Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Teorema de Linealización de Poincarè

Tesis que para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas

presenta:

Mayra Alejandra Mazón Méndez

Director de Tesis:

Dr. Fernando Verduzco González

20 de Enero de 2010

Agradecimientos

A Dios por haberme permitido terminar satisfactoriamente este trabajo y darme la fortaleza y la sabiduría necesaria.

A mi familia, por todo el amor, el apoyo y la confianza que siempre me brindan. Gracias por estar conmigo y guiarme siempre por el buen camino.

Al Dr. Fernando Verduzco González, por ser mi maestro, confiar en mi, orientarme y dedircarme tiempo para sacar este trabajo adelante.

A Yofre Alexey Laborín, por el cariño y los sabios consejos que siempre me brinda. Gracias por estar siempre en el momento indicado y permitirme formar parte de tu vida.

A mis amigos Carmen, Alejandra, Maria Antonieta, Lupita, Sandra, Nadia, Carlos, Dupret, Adrian y Oscar, por ser como son, apoyarme en las buenas y malas y brindarme el cariño que solamente los amigos pueden dar.

A mis sinodales, Dr. Fco. Armando Carrillo Navarro, Dr. Daniel Olmos Liceaga y M.C. Horacio Leyva Castellanos, por revisar y corregir este trabajo.

Deseo agradecer también el financiamiento obtenido mediante CONACYT.

Índice

Introducción

En problemas de la vida cotidiana difícilmente se pueden encontrar soluciones a los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales ya que los métodos que conocemos son pocos comparados con los métodos para encontrar soluciones a los sistemas lineales. Por tal motivo, muchas veces se busca encontrar la forma normal del sistema de ecuaciones para poder dar una aproximación a la solución real del sistema o por lo menos saber el comportamiento local del problema. Si la forma normal del sistema de ecuaciones diferenciales es lineal, se dice que se linealizó el campo vectorial alrededor del punto sobre el cual se está trabajando y si esto sucede, se puede estudiar fácilmente el comportamiento local del sistema ya que existe mucha teoría alrededor de este tipo de sistemas de ecuaciones.

Inicialmente Henri Poincarè en su tesis titulada "Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles [1]"publicada en 1879, estudió la linealización de un campo vectorial alrededor de un punto de equilibrio, a través de la existencia de soluciones analíticas de ecuaciones en derivadas parciales casi lineales de primer orden. En particular, descubrió que cuando los exponentes característicos del punto de equilibrio de un campo vectorial analítico de dimensión arbitraria cumplían una condición algebraica, llamada condición de no resonancia, junto con una condición geométrica, entonces existe un cambio de coordenadas alrededor del punto de equilibrio que lo transforma simplemente a su parte lineal, que es de lo que trata el Teorema de Linealización de Poincarè que se estudia en este trabajo.

En general, este trabajo desarrollará un caso particular del sistema que se menciona en el Teorema de Linealización de Poincarè.

Normalmente en los libros se demuestra que la condición de no resonancia se cumple cuando los valores propios de la matriz correspondiente a la parte lineal del sistema son distintos y mencionan que este resultado es válido también aunque dicha matriz no tenga valores propios distintos. Fue de éste hecho donde nació el interés de estudiar las condiciones que debe cumplir la matriz correspondiente a la parte lineal del sistema para que exista un cambio de coordenadas que lo transforma simplemente a su parte lineal cuando dicha matriz tiene solo un valor propio con multiplicidad; que es el problema que se desarrolla a lo largo de esta investigación.

El trabajo que se presenta se ha dividido en las siguientes partes: En el primer capítulo se presentan conceptos básicos y resultados importantes que se utiliza a lo largo de la demostración del Teorema de Linealización de Poincarè la cual se desarrolla en el segundo capítulo así como también en el caso particular que se está trabajando en esta investigación; mientras que en el tercer capítulo se estudia el caso particular (matriz donde la parte lineal del sistema tiene un solo valor propio con multiplicidad) y se presenta el Teorema que menciona las características que debe cumplir el sistema no lineal para que exista un cambio analítico que lo transforme simplemente a su parte lineal, para después finalizar exponiendo las conclusiones de esta investigación.

Capítulo 1

Preliminares

Para este trabajo es necesario recordar ciertos conceptos y propiedades que se estudian en los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Álgebra Lineal. Por tal motivo se incluye este capítulo.

1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Si una ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria, donde la derivada o la diferencial de más alto orden determina el orden de la ecuación diferencial.

Hay muchas formas de clasificar a las ecuaciones diferenciales, pero para nuestro análisis es conveniente clasificarlas en lineales y no lineales.

Definición 1 *Una ecuación diferencial ordinaria es lineal de orden n si tiene la forma:*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Es decir, la variable dependiente y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$, depende solo de x. Si no se cumple lo anterior se dice que la ecuación diferencial es no es lineal.

Ejemplo 1 $\frac{dx}{dt} = x + t$ *es una ecuación diferencial lineal; mientras que* $\frac{dx}{dt} = x + x^2 - x^7 + \sin x$ *es una ecuación diferencial no lineal.*

Un sistema homogéneo de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\dot{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\dot{x_3} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \\
&\vdots \\
\dot{x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

en notación matricial se expresa como

$$\dot{x} = Ax$$

donde A es la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ es el vector de las funciónes incógnitas.

1.2. Espacios Vectoriales

Los conjuntos (no vacíos) en donde están definidas ciertas operaciones cumplen propiedades las cuales utilizaremos a lo largo de este trabajo, por tal motivo en esta sección se mostrará la definición de espacio vectorial y veremos un ejemplo que nos ayudará más adelante a comprender mejor el Teorema de Linealización de Poincaré.

Definición 2 *Un espacio vectorial es un conjunto V (no vacío) donde están definidas dos operaciones (la suma y el producto por un escalar) sobre un campo F que satisfacen las siguientes propiedades:*
Sean $u, v, w \in V$, y $a, b \in F$, respectivamente:

1. *u+(v+w)=(u+v)+w*
2. *v+w=w+v*
3. *Existe un elemento 0 $\in$ V, llamado vector cero o nulo, de forma que v+0=v para todo v $\in$ V.*
4. *Para todo v $\in$ V, existe un elemento -v $\in$ V, llamado elemento inverso de v, de forma que v+(-v)=0.*
5. *a(v+w)=av+aw*
6. *(a+b)v=av+bv*
7. *a(bv)=(ab)v*
8. *1v=v, donde 1 es la identidad multiplicativa en F*

Ejemplo 2 *Consideremos el siguiente conjunto de polinomios homogéneos de grado dos en dos variables*

$$\mathcal{P}_2^3 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

Demostraremos que es un espacio vectorial. Observe que el vector nulo es $p(x) = 0$ y el elemento inverso es $-p(x) = -a_1x_1^2 - a_2x_1x_2 - a_3x_2^2$. Las operaciones suma y multiplicación por escalar son las operaciones usuales en el conjunto de funciones.

En general, el conjunto de todos los polinomios homogéneos de grado r en n variables es un espacio vectorial.

$$\mathcal{P}_n^r = \{\, a_1x_1^r + a_2x_1^{r-1}x_2 + \cdots + a_{k-1}x_{n-1}x_n^{r-1} + a_kx_n^r \,|\, a_i \in \mathbb{R},\ \text{para } i = 1, \ldots, k = C_{n-1}^{r+n-1} \,\}.$$

Ejemplo 3 *El conjunto de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ cuyas entradas son elementos del conjunto $\mathcal{P}_3^2$*

$$H_3^2 = \left\{ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,|\, h(x) = \begin{pmatrix} a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_2x_3 + a_5x_3^3 + a_6x_1x_3 \\ b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2 + b_4x_2x_3 + b_5x_3^3 + b_6x_1x_3 \\ c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_2^2 + c_4x_2x_3 + c_5x_3^3 + c_6x_1x_3 \end{pmatrix}; \right.$$
$$\left. a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \text{ } para \ i = 1, 2, \ldots, 6 \right\}$$

también es un espacio vectorial.

Ejemplo 4 *Sea*

$$H_n^r = \{h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | h = (h_1, \ldots, h_n)^T, h_i \in \mathcal{P}_n^r,\ para\ i = 1, \ldots, n\,\}$$

Verificar que H_n^r es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Sean $u = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$,$v = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$, $w = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T \in H_n^r$ donde p_i, q_i, r_i son polinomios homogéneos de grado r para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$

1.Asociativa

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T + ((q_1, q_2, \ldots, q_n)^T + (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T) \\ &= (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T + (q_1 + r_1, q_2 + r_2, \ldots, q_n + r_n)^T \\ &= (p_1 + q_1 + r_1, p_2 + q_2 + r_2, \ldots, p_n + q_n + r_n)^T \\ &= (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n)^T + (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T \\ &= ((p_1, p_2, \ldots, p_n)^T + (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T) + (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T \\ &= (u + v) + w. \end{aligned}$$

2.Conmutativa

$$\begin{aligned}
v+w &= (p_1,p_2,\ldots,p_n)^T + (q_1,q_2,\ldots,q_n)^T \\
&= (p_1+q_1,p_2+q_2,\ldots,p_n+q_n)^T = (q_1+p_1,q_2+p_2,\ldots,q_n+p_n)^T \\
&= (q_1,q_2,\ldots,q_n)^T + (p_1,p_2,\ldots,p_n)^T \\
&= w+v.
\end{aligned}$$

3. Existe un elemento $0=(0,0,\ldots,0)\in H_n^r$, de forma que para todo $v\in H_n^r$

$$v+0=(p_1,p_2,\ldots,p_n)^T+(0,0,\ldots,0)^T=(p_1+0,p_2+0,\ldots,p_n+0)^T=(p_1,p_2,\ldots,p_n)^T=v.$$

4. Para todo $v\in V$, existe un elemento $-v=(-p_1,-p_2,\ldots,-p_n)^T\in H_n^r$, llamado elemento inverso de v, de forma que

$$\begin{aligned}
v+(-v) &= (p_1,p_2,\ldots,p_n)^T + (-p_1,-p_2,\ldots,-p_n)^T \\
&= (p_1-q_1,p_2-q_2,\ldots,p_n-q_n)^T = (0,0,\ldots,0)^T = 0.
\end{aligned}$$

5.Distributividad

$$\begin{aligned}
a(v+w) &= a((q_1,q_2,\ldots,q_n)^T+(r_1,r_2,\ldots,r_n)^T) = a(q_1+r_1,q_2+r_2,\ldots,q_n+r_n)^T \\
&= (a(q_1+r_1),a(q_2+r_2),\ldots,a(q_n+r_n))^T \\
&= (aq_1+ar_1,aq_2+ar_2,\ldots,aq_n+ar_n)^T \\
&= (aq_1,aq_2,\ldots,aq_n)^T+(ar_1,ar_2,\ldots,ar_n)^T \\
&= a(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T+a(r_1,r_2,\ldots,r_n)^T \\
&= av+aw.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
(a+b)v &= (a+b)(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T = ((a+b)q_1,(a+b)q_2,\ldots,(a+b)q_n)^T \\
&= (aq_1+bq_1, aq_2+bq_2,\ldots,aq_n+bq_n)^T \\
&= (aq_1,aq_2,\ldots,aq_n)^T + (bq_1,bq_2,\ldots,bq_n)^T \\
&= a(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T + b(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T \\
&= av+bv.
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
a(bv) &= a(b(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T) = a(bq_1,bq_2,\ldots,bq_n)^T \\
&= ((ab)q_1,(ab)q_2,\ldots,(ab)q_n)^T \\
&= (ab)(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T \\
&= (ab)v.
\end{aligned}$$

8. Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
1v &= 1(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T = ((1)q_1,(1)q_2,\ldots,(1)q_n)^T \\
&= (q_1,q_2,\ldots,q_n)^T = v
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que H_n^r es un espacio vectorial $\square$

Este espacio será de vital importancia a lo largo de esta investigación.

Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de V. Diremos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *generan* a V si, dado cualquier elemento $v \in V$, existen números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = v, \tag{1.2}$$

donde al miembro izquierdo de la expresión (1.2) es llamada una combinación lineal de los elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definición 3 *Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de V. Diremos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si existen números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todos iguales a 0, tales que*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Si no existen tales números, entonces decimos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

En otras palabras, los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si, y sólo si, se satisface la siguiente condición: Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

entonces $a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.
Si los elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V generan V y además son linealmente independientes, entonces se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una *base* de V.
Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de elementos, al que se le llama *dimensión* del espacio vectorial.

Ejemplo 5 *Demostramos que $\mathcal{P}_2^2 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. Una base para dicho espacio es $B_2^2 = \{x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$. Claramente x_1^2, x_1x_2, x_2^2 generan a todo $\mathcal{P}_2^2$ y además $a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 = 0$ si y solo si a_1, a_2, a_3 son todos ceros, es decir, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 es un conjunto linealmente independiente. Además, como la base contiene 3 elementos, entonces el espacio vectorial $\mathcal{P}_2^2$ es de dimensión 3. En general el espacio vectorial $\mathcal{P}_n^r$ tiene dimensión C_{n-1}^{r+n-1} y una base es el conjunto*

$$B_n^r = \{x_1^r, x_1^{r-1}x_2, \ldots, x_n^r\}.$$

Ejemplo 6 *Observemos que el conjunto*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_3^2 \;=\; & \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\
& \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1y_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2y_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2y_3 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

es una base para H_3^2, cuya dimensión es 18.

En general podemos calcular la dimensión del espacio H_n^r, ya que tenemos que la base de los polinómios homogéneos de grado r tiene C_{n-1}^{n+r-1} elementos y como estamos trabajando con campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$ donde la dimensión es n, esto implica que la base $\mathcal{B}_n^r$ tiene $n\delta(r,n)$ elementos, donde

$$\delta(r,n) = C_{n-1}^{n+r-1}. \tag{1.3}$$

1.3. Matriz asociada a una transformación

En esta parte, veremos como puede asociarse una matriz a una transformación lineal, en particular, a un Operador Lineal. Esta asociación, resulta ser de gran interés ya que usando dicha correspondencia el estudio de nuestro problema, el cual se basa en analizar cuando un operador lineal es invertible, se reduce a investigar cuando el determinante de una matriz triangular es distinto de cero, que es "mas fácil" de estudiar por las caracteristicas de estas matrices.

Definición 4 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Una base ordenada $\mathcal{B}$ de V es una base en la cual se ha establecido un orden.*

Así, por ejemplo, la base ordenada $\mathcal{H}_3^2$ para el espacio vectorial H_3^2 de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3^2 \;=\; & \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1y_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2y_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ & \left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3^2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

es una base ordenada donde el orden es el siguiente. Consideremos $y^{\mathbf{m}} = y_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{m_3}$

$$\begin{aligned} B_{2,3} = \quad & \{\, \mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) \,|\, (m_1, m_2, m_3) = (k_1, k_2 - k_1, 2 - k_2); \\ & k_1 = 2, 1, 0 \text{ } y \text{ } k_2 = 2, \ldots, k_1 \} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observe que se cumple $m_1 + m_2 + m_3 = 2$ y además también se cumple que $m_i \geq 0$. entonces podemos escribir la base ordenada

$$\mathcal{H}_3^2 = \{\, y^{\mathbf{m}} e_i | i = 1, 2, 3, \; m \in B_{2,3} \}$$

donde el orden de los elementos de la base está determinado por el orden del conjunto $B_{2,3}$ y e_i es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Generalizando lo anterior, la base ordenada $\mathcal{H}_n^r$ para el espacio vectorial H_n^r de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r es

$$\mathcal{H}_n^r = \{\, y^{\mathbf{m}} e_i \mid i = 1 \ldots, n \;, \mathbf{m} \in B_{r,n} \}\,. \tag{1.6}$$

donde el conjunto $B_{r,n}$ es el que se describe a continuación

$$\begin{aligned} B_{r,n} &= \{ \mathbf{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_n) \, | m_i = k_i - k_{i-1} \text{ para } i = 1, .., n \, ; \\ & \qquad k_i = r, .., k_{i-1} \text{ para } i = 1, \ldots, n-1 \, ; k_0 = 0, k_n = r \} \, , \end{aligned}$$

con $\sum_{j=1}^{n} m_j = r$ y $m_j \geq 0$.

Definición 5 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base ordenada de V. Si $x \in V$, definimos el vector de coordenadas de x, respecto a $\mathcal{B}$ como*

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)^T$$

donde se cumple: $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n$

En palabras, el vector de coordenadas de x es la n-ada que se forma con los coeficientes de los vectores de la base, al escribir a x como combinación lineal de ésta.

Ejemplo 7 *Dado*

$$q(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 y_2 \\ y_1^2 - 5y_3^2 \\ 2y_1 y_3 + y_2^2 \end{pmatrix},$$

calcular su vector de coordenadas con respecto a la base ordenada $\mathcal{H}_3^2$.

La base ordenada $\mathcal{H}_3^2$ esta compuesta por los siguientes elementos

$$\begin{aligned} \{ \, & y_1^2 e_1, \, y_1 y_2 e_1, \, y_1 y_3 e_1, \, y_2^2 e_1, \, y_2 y_3 e_1, \, y_3^2 e_1, \, y_1^2 e_2, \, y_1 y_2 e_2, \, y_1 y_3 e_2, \\ & y_2^2 e_2, \, y_2 y_3 e_2, \, y_3^2 e_2, \, y_1^2 e_3, \, y_1 y_2 e_3, \, y_1 y_3 e_3, \, y_2^2 e_3, \, y_2 y_3 e_3, \, y_3^2 e_3 \, \} \end{aligned}$$

donde e_1, e_2, e_3 son los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces el vector de coordenadas de

$$q(y) = 2(y_1 y_2 e_1) + (y_1^2 e_2) - 5(y_3^2 e_2) + 2(y_1 y_3 e_3) + (y_2^2 e_3)$$

con respecto a la base $\mathcal{H}_3^2$ es

$$[q(y)]_{\mathcal{H}_3^2} = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -5, 0, 0, 2, 1, 0, 0)^T$$

Supongamos ahora que tenemos $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases ordenadas para V y W respectivamente, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Para cada $u_j \in \mathcal{B}_1$, podemos calcular el vector de coordenadas de $T(u_j)$ con respecto a la base $\mathcal{B}_2$ e ir formando una matriz, con estos vectores de coordenadas como columnas, es decir, si

$$T(u_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + a_{3j}w_3 + \ldots + a_{mj}w_m$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces se forma la matriz:

$$[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 6 *La matriz asociada al operador lineal T ,respecto a las bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, es la matriz $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ descrita arriba. Cuando V=W, es decir, cuando tenemos un operador lineal T y $\mathcal{B}_1$ es una base ordenada para V entonces la notación es $[T]_{\mathcal{B}_1}$.*

Ejemplo 8 *Calcular la matriz asociada al operador lineal $T : H_2^2 \to H_2^2$, con*

$$T(y^{\boldsymbol{m}}e_i) = 5y^{\boldsymbol{m}}e_i - y^{\boldsymbol{m}}e_{i-1}$$

con respecto a la base ordenada $\mathcal{H}_2^2$ donde $e_0 = 0$ y para $i = 1, 2$.

Recordemos que

$$\mathcal{H}_2^2 = \{y_1^2e_1, y_1y_2e_1, y_2^2e_1, y_1^2e_2, y_1y_2e_2, y_2^2e_2\}.$$

Aplicando el operador T a los elementos de la base anterior obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} T(y_1^2e_1) &= 5y_1^2e_1 \\ T(y_1y_2e_1) &= 5y_1y_2e_1 \\ T(y_2^2e_1) &= 5y_2^2e_1 \\ T(y_1^2e_2) &= 5y_1^2e_2 - y_1^2e_1 \\ T(y_1y_2e_2) &= 5y_1y_2e_2 - y_1y_2e_1 \\ T(y_2^2e_2) &= 5y_2^2e_2 - y_2^2e_1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$[T]_{\mathcal{H}_2^2} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

1.4. Propiedades de las Matrices

Teorema 1 *Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$ de la siguiente forma*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

donde A y C son matrices triangulares de orden r y s respectivamente donde $r+s=n$ mientras que O y B son matrices rectangulares, donde O es una matriz nula entonces $detM = detA \cdot detC$

Demostracion : Tomemos A y C matrices triangulares inferiormente de orden r y s respectivamente

$$
\begin{aligned}
detM &= det\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}_{n\times n} \\
&= a_{rr}det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & \cdots & a_{(r-1)(r-1)} & b_{(r-1)1} & \cdots & b_{(r-1)s} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\
&\vdots \\
&= a_{rr}\cdot a_{r-1,r-1}\cdots a_{11}det\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}_{s\times s} \\
&= detA\cdot det\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}_{s\times s} \\
&= detA\cdot detC
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $detM = detA\cdot detC$.

Analogamanete se demuestran los casos cuando A y C son matrices triangulares superiores de orden r y s respectivamente, y cuando A es una matriz triangular superior de orden r y C es una matriz triangular inferior de orden s $\square$

Corolario 1 *Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz triangular por bloques de la siguiente forma*

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde $A_{ij}, O \in M_{s\times s}$ para todo $j, i = 1, 2, ..., r | i < j$ y cada A_{ii} es una matriz triangular donde $r \times s = n$ mientras que O es una matriz nula. Entonces

$$detM = \prod_{i=1}^{r} detA_{ii}.$$

Lema 1 *Las matrices triangulares con elementos en la diagonal principal todos ceros son matrices nilpotentes.*

Demostración:

Sea $M_{n\times n}$ una matriz triangular inferiormente con elementos de la diagonal principal todos ceros. Entonces

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ b_{31} & 0 & \ddots & & & \\ b_{41} & b_{42} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n(n-2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

donde los $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$.

Notamos que M^2 es nuevamente una matriz nilpotente pero con la diagonal que esta abajo de la diagonal principal con entradas todas cero.

Si seguimos con este procedimiento de multiplicar matrices llegamos a que

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & & \ddots & & & \\ c_{(k+1)1} & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{n(n-k)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

para $k < n$ y donde los c_{ij} dependen de los términos a_{rs} de la matriz M.

Entonces con esto ya podemos calcular la matriz M^n.

Tenemos que $M^n = M^{n-1}M$ y como con los calculos anteriores tenemos la forma de M^{n-1} podemos calcular M^n

$$M^n = M^{n-1}M = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ d_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$= (0)_{n\times n}$$

donde el término d_{1n} depende de las entradas de la matriz M

Entonces $M^n = 0 \Rightarrow M$ es nilpotente.

Analogamente se demuestra cuando la matriz es triangular superior $\square$

Lema 2 *Si M es una matriz triangular por bloques definida de la siguiente manera*

$$M = \begin{pmatrix} A & -I & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ O & O & \ddots & -I \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz invertible $n \times n$. Entonces

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-2} & A^{-3} & \cdots & A^{-n} \\ O & A^{-1} & A^{-2} & \cdots & A^{-(n-1)} \\ O & O & A^{-1} & \cdots & A^{-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Primeramente tomaremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} A & -I \\ O & A \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

donde A es una matriz invertible $n \times n$, suponiendo que la inversa de la matriz anterior es de la forma

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & B \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$$

nos queda encontrar la forma de B en término de las submatrices de la matriz M. Entonces se debe de cumplir que

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & -I \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & B \\ O & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & AB - A^{-1} \\ O & I \end{pmatrix} = I_{2n \times 2n}$$

de lo anterior obtenemos que $AB - A^{-1} = 0 \Rightarrow AB = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-2}$. Por lo tanto

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-2} \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ahora haremos el siguiente caso

$$M = \begin{pmatrix} A & -I & O \\ O & A & -I \\ O & O & A \end{pmatrix}_{3n\times 3n}$$

donde A es una matriz invertible $n \times n$ del mismo modo que el caso anterior, supongamos que la matriz inversa es de la forma

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & B_1 & B_2 \\ O & A^{-1} & B_3 \\ O & O & A^{-1} \end{pmatrix}$$

entonces nos queda encontrar la forma de las matrices B_1, B_2 y B_3 en términos de las submatrices de la matriz M

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= \begin{pmatrix} A & -I & O \\ O & A & -I \\ O & O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & B_1 & B_2 \\ O & A_3^{-1} & B_3 \\ O & O & A_3^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & AB_1 - A^{-1} & AB_2 - B_3 \\ O & I & AB_3 - A^{-1} \\ O & O & I \end{pmatrix} \\ &= I_{3n\times 3n} \end{aligned}$$

de lo anterior obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} AB_1 - A^{-1} &= 0 \Rightarrow B_1 = A^{-2} \\ AB_3 - A^{-1} &= 0 \Rightarrow B_3 = A^{-2} \\ AB_2 - B_3 &= 0 \Rightarrow B_2 = B_3 A^{-1} \Rightarrow B_2 = A^{-3} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-2} & A^{-3} \\ O & A^{-1} & A^{-2} \\ O & O & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Con los casos anteriores podemos concluir que si tenemos

$$M = \begin{pmatrix} A & -I & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ O & O & \ddots & -I \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}_{kn\times kn}$$

donde A es una matriz invertible $n \times n$, entonces

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-2} & A^{-3} & \cdots & A^{-k} \\ O & A^{-1} & A^{-2} & \cdots & A^{-(k-1)} \\ O & O & A^{-1} & \cdots & A^{-(k-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A^{-1} \end{pmatrix}_{kn\times kn}$$

$\square$

Lema 3 *Si* $lim_{n\to\infty} A^n = 0$, *entonces* $I - A$ *es no-singular y*

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Capítulo 2

Teorema de Linealización de Poincarè

Dado un sistema no lineal

$$\dot{x} = F(x),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $F(0) = 0$, buscamos un cambio de coordenadas $x = y + h(y)$ tal que el sistema en las nuevas coordenadas tenga la expresión "más simple posible".
Supongamos que el campo F ha sido desarrollado en serie de Taylor alrededor del equilibrio $x = 0$, y que, además, su parte lineal se encuentra en forma de Jordan,

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots , \tag{2.1}$$

donde $F_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r. Supongamos que el campo X posee términos no lineales de grado r en adelante, con $r \geq 2$, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots \tag{2.2}$$

y considere el cambio de coordenadas cercano a la identidad

$$x = y + h_r(y), \tag{2.3}$$

donde $h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r. La idea es encontrar h_r tal que, el sistema (2.2) en las nuevas coordenadas no posea términos de grado menor o igual a r. Derivando (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y))\,\dot{y}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

pero $Dh_r(y)$ es no-singular ya que, si $y \approx 0$ se cumple $lim_{n\to\infty}(Dh_r(y))^n = 0$ y además por el Lema 3 se tiene

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots ,$$

luego, de (2.4) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1}\,\dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots)(Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots) \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots)\,(J(y + h_r(y)) + F_r(y + h_r(y)) \\ &\quad + F_{r+1}(y + h_r(y)) + \cdots), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} F_r\,(y + h_r(y)) &= F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \cdots \\ F_{r+1}(y + h_r(y)) &= F_{r+1}(y) + \cdots \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots)\,(Jy + Jh_r(y) + F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) \\ &\quad + F_{r+1}(y) + \cdots) \\ &= Jy + \widetilde{F}_r(y) + F_{r+1}(y) + \cdots + \widetilde{F}_{2r-1}(y) + \cdots , \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde

$$\widetilde{F}_r(y) = F_r(y) - (Dh_r(y)Jy - Jh_r(y)). \tag{2.6}$$

$$\widetilde{F}_{2r-1}(y) = DF_r(y)h_r(y) - Dh_r(y)\widetilde{F}_r(y) \tag{2.7}$$

Observe que el cambio de coordenadas (2.3) tiene la propiedad de transformar (2.2) en (2.5) sin agregar términos de orden menor a r. Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de h_r tal que $\widetilde{F}_r = 0$. Considere el espacio vectorial H_n^r de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r, y sea $L_J : H_n^r \to H_n^r$ el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y).$$

Tal operación se conoce como el *paréntesis de Lie* entre los campos vectoriales Jy y $h_r(y)$. Basta probar que L_J es invertible, ya que

$$\widetilde{F}_r = 0 \Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y)).$$

Tenemos entonces el siguiente resultado

Proposición 1 *Si el operador L_J es invertible, entonces existe un cambio de coordenadas de la forma*

$$x = y + h_r(y)$$

que transforma

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + \mathcal{O}(|x|^{r+1})$$

en

$$\dot{y} = Jy + \mathcal{O}(|y|^{r+1})$$

donde

$$h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y)).$$

Ahora bien, L_J será invertible si y sólo si todos sus valores propios son diferentes de cero. Calculemos entonces sus valores propios. Supongamos que J es diagonal

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pra $i = 1, 2, \ldots, n$. Sabemos por (1.6) que

$$\mathcal{H}_n^r = \{\, y^{\mathbf{m}} e_i \mid i = 1 \ldots, n \ \ , \mathbf{m} \in B_{r,n} \} \, .$$

es una base ordenada para H_n^r. Aplicando el operador L_J a los elementos de esta base obtenemos

$$L_J \left(y^{\mathbf{m}} e_i \right) = D \left(y^{\mathbf{m}} e_i \right) Jy - J \left(y^{\mathbf{m}} e_i \right),$$

pero

$$D \left(y^{\mathbf{m}} e_i \right) = D \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 \\ \frac{m_1}{y_1} y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2} y^{\mathbf{m}} & \cdots & \frac{m_n}{y_n} y^{\mathbf{m}} \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} ,$$

$$Jy = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
D\left(y^{\mathbf{m}}e_i\right)Jy &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1\lambda_1 y^{\mathbf{m}} + \cdots + m_n\lambda_n y^{\mathbf{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(m\cdot\lambda\right) y^{\mathbf{m}} e_i,
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Además

$$
\begin{aligned}
J(y^{\mathbf{m}}e_i) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ y^{\mathbf{m}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i y^{\mathbf{m}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_i y^{\mathbf{m}} e_i.
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
L_J\left(y^{\mathbf{m}}e_i\right) &= D\left(y^{\mathbf{m}}e_i\right)Jy - J\left(y^{\mathbf{m}}e_i\right)\\
&= \left(\mathbf{m}\cdot\lambda\right)y^{\mathbf{m}}e_i - \lambda_i y^{\mathbf{m}}e_i\\
&= \left(\mathbf{m}\cdot\lambda - \lambda_i\right)y^{\mathbf{m}}e_i,
\end{aligned}$$

es decir, $y^{\mathbf{m}}e_i$ es un vector propio de L_J con valor propio

$$\Lambda_{\mathbf{m},i} = (\mathbf{m}\cdot\lambda) - \lambda_i. \tag{2.8}$$

Luego, L_J será invertible si y sólo si $\Lambda_{\mathbf{m},i} \neq 0$ para toda $\mathbf{m} \in B_{r,n}$ y toda $i = 1.\ldots, n$. Esto nos lleva al siguiente concepto,

Definición 7 *Diremos que la $n-$tupla de valores propios $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es* ***resonante de orden*** r *si es posible encontrar una relación entera de la forma*

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} m_j\lambda_j,$$

para algún $\boldsymbol{m} \in B_{r,n}$ y alguna $i = 1, \ldots, n$.

Observación 1 *Puede probarse que la expresión (2.8) también es válida para el caso en que J no es diagonal.*

Veamos como determinar h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$, es decir, determinar h_r tal que

$$L_J(h_r(y)) = F_r(y).$$

Expresemos h_r y F_r en términos de los vectores canónicos de H_n^r,

$$\begin{aligned}
h_r(y) &= \sum_{\mathbf{m},i} h_{\mathbf{m},i}y^{\mathbf{m}}e_i\\
F_r(y) &= \sum_{\mathbf{m},i} F_{\mathbf{m},i}y^{\mathbf{m}}e_i,
\end{aligned}$$

con $\sum_{j=1}^{n} m_j = r$, luego,

$$\begin{aligned} L_J(h_r(y)) &= L_J\left(\sum_{\mathbf{m},i} h_{\mathbf{m},i} y^{\mathbf{m}} e_i\right) \\ &= \sum_{\mathbf{m},i} h_{\mathbf{m},i} L_J\left(y^{\mathbf{m}} e_i\right) \\ &= \sum_{\mathbf{m},i} h_{\mathbf{m},i}\left(\mathbf{m}\cdot\lambda - \lambda_i\right) y^{\mathbf{m}} e_i. \end{aligned}$$

Ahora bien, $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$ si y sólo si

$$h_{\mathbf{m},i} = \frac{F_{\mathbf{m},i}}{(\mathbf{m}\cdot\lambda - \lambda_i)}. \tag{2.9}$$

Como los valores propios de J son no resonantes, la expresión anterior siempre tiene sentido.

Tenemos entonces probado el teorema de linealización de Poincaré

Teorema 2 *(**Poincaré**) Si los valores propios de la matriz J son no resonantes, entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = Jx + \cdots$$

puede ser reducido al sistema lineal

$$\dot{y} = Jy$$

por un cambio formal de coordenadas $x = y + \cdots$.

Observación 2 *El cambio de coordenadas $x = y + \cdots$ debe entenderse como una serie formal, en donde no estamos interesados en la región de convergencia, la cual puede ser vacia.*

Ejemplo 9 *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_2 + 3x_1x_2 + 9x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 + 9x_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Encontrar un cambio de coordenadas que transaforme (2.10) *en un sistema lineal.*

Primeramente calculemos la resonancia de los valores propios($\lambda_1 = 3$,$\lambda_2 = 2$). Veamos si existen enteros no negativos m_1,m_2 tal que

$$\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \quad \text{donde} \;\; m_1 + m_2 = r \Rightarrow m_2 = r - m_1$$

entonces

$$\begin{aligned} 3 &= 3m_1 + 2(r - m_1) \\ 3 &= m_1 + 2r \\ m_1 &= 3 - 2r \end{aligned}$$

como $r \geq 2$, entonces no existen enteros tal que $\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$.
Del mismo modo, veamos si existen enteros no negativos m_1, m_2 tal que

$$\lambda_2 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \quad \text{donde} \quad m_1 + m_2 = r \quad \Rightarrow m_2 = r - m_1$$

entonces

$$\begin{aligned} 2 &= 3m_1 + 2(r - m_1) \\ 2 &= m_1 + 2r \\ m_1 &= 2 - 2r \end{aligned}$$

y como $r \geq 2$, entonces no existen enteros tal que $\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$.
Por lo tanto los valores propios son no resonantes. Entonces aplicando el Teorema de Linealización de Poincaré tenemos que existe un cambio de coordenadas de la forma:

$$x = y + h_2(y) + h_3(y) + \cdots ,$$

tal que el sistema (2.10) se reduce al sistema lineal

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Calcularemos $h_2(y)$. Sabemos que

$$F_2(y) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 + 9x_2^2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{(2,0),1} = 3 \quad &\Rightarrow \quad h_{(2,0),1} = \frac{3}{(2,0)\cdot(3,2)-3} = 1 \\ F_{(1,1),1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(1,1),1} = 0 \\ F_{(0,2),1} = -1 \quad &\Rightarrow \quad h_{(0,2),1} = \frac{-1}{(0,2)\cdot(3,2)-3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{(2,0),2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(2,0),2} = 0 \\ F_{(1,1),2} = 3 \quad &\Rightarrow \quad h_{(1,1),2} = \frac{3}{(1,1)\cdot(3,2)-2} = 1 \\ F_{(0,2),2} = 9 \quad &\Rightarrow \quad h_{(0,2),2} = \frac{9}{(0,2)\cdot(3,2)-3} = 9 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$h_2(y) = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 \\ y_1y_2 + 9y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar el cambio de coordenadas

$$x = y + h_2(y), \tag{2.11}$$

tenemos un nuevo sistema en el cual no aparecen los términos cuadráticos. En general, este cambio de coordenadas puede introducir términos cúbicos en el nuevo sistema. Veamos si este es el caso calculando los términos cúbicos. Para ello utilicemos (2.7) con $r = 2$ y observando que $\widetilde{F}_2(y) = 0$ obtenemos

$$\widetilde{F}_3(y) = \begin{pmatrix} 6y_1^3 - 8y_1y_2^2 - 18y_2^3 \\ 6y_1^2y_2 + 45y_1y_2^2 + 159y_2^3 \end{pmatrix}.$$

de lo anterior tenemos que (2.10) con el cambio de coordenadas (2.15) es:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6y_1^3 - 8y_1y_2^2 - 18y_2^3 \\ 6y_1^2y_2 + 45y_1y_2^2 + 159y_2^3 \end{pmatrix} + \cdots$$

Como vimos que los valores propios son no resonantes, entonces podemos encontrar un $h_3(y)$, tal que el nuevo sistema no contenga términos cúbicos, después un $h_4(y)$ tal que el nuevo sistema no contenga términos de orden 4 y así sucesivamente.

Ejemplo 10 *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Encontrar un cambio de coordenadas que transaforme (2.12) *en un sistema lineal de ser posible.*

Primeramente determinemos si existe algún orden de resonancia de los valores propios($\lambda_1 = 3$,$\lambda_2 = 1$). Veamos si existen enteros no negativos m_1,m_2 tal que

$$\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \quad \text{donde } m_1 + m_2 = r \Rightarrow m_2 = r - m_1$$

entonces

$$\begin{aligned} 3 &= 3m_1 + (r - m_1) \\ 3 &= 2m_1 + r \\ 2m_1 &= 3 - r \end{aligned} \tag{2.13}$$

como $r \geq 2$. Observemos que la única solución que satisface la ecuación anterior es para $r = 3$, $\mathbf{m} = (0, 3)$ e $i = 1$. Por lo tanto el término resonante es

$$\begin{pmatrix} y_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Del mismo modo, veamos si existen enteros no negativos m_1, m_2 tal que

$$\lambda_2 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \quad \text{donde} \quad m_1 + m_2 = r \quad \Rightarrow m_2 = r - m_1$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= 3m_1 + (r - m_1) \\ 1 &= 2m_1 + r \\ 2m_1 &= 1 - r \end{aligned}$$

y como $r \geq 2$, entonces no existe solución.

Por lo tanto solo existe el término resonante (2.14). Entonces podemos encontrar un cambio de coordenadas que transforma (2.12) en el sistema

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para alguna $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como la resonancia es de orden 3, si es posible encontrar un cambio de coordenadas tal que el nuevo sistema no posea términos de orden 2, por tal motivo calcularemos $h_2(y)$. Sabemos que

$$F_2(y) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{(2,0),1} = 3 \quad &\Rightarrow \quad h_{(2,0),1} = \frac{3}{(2,0)\cdot(3,1) - 3} = 1 \\ F_{(1,1),1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(1,1),1} = 0 \\ F_{(0,2),1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(0,2),1} = 0 \\ F_{(2,0),2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(2,0),2} = 0 \\ F_{(1,1),2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(1,1),2} = 0 \\ F_{(0,2),2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{(0,2),2} = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$h_2(y) = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar el cambio de coordenadas

$$x = y + h_2(y). \tag{2.15}$$

tenemos un nuevo sistema en el cual no aparecen los términos cuadráticos. Veamos cuales son los términos cúbicos del nuevo sistema, para ello utilicemos (2.7) con $r = 2$ y observando que $\widetilde{F}_2(y) = 0$ obtenemos

$$\widetilde{F}_3(y) = \begin{pmatrix} 6y_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

de lo anterior tenemos que (2.12) con el cambio de coordenadas (2.15) es:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6y_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

Obsérvese que al no existir los términos resonantes en nuestro nuevo sistema, podemos asegurar la existencia de un cambio de coordenadas que linealiza al sistema (2.12). Calculemos $h_3(y)$. Sabemos que

$$\widetilde{F}_3(y) = \begin{pmatrix} 6y_1^3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\widetilde{F}_{(3,0),1} = 6 \Rightarrow \; h_{(3,0),1} = \frac{6}{(3,0)\cdot(3,1) - 3} = 1$$

y $h_{m,i} = 0$ para los otros casos, por lo tanto

$$h_3(y) = \begin{pmatrix} y_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces aplicando el cambio de coordenadas

$$x = y + h_2(y) + h_3(y),$$

transforma al sistema (2.12) en

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + \mathcal{O}(|y|^4).$$

Teorema 3 ***(Poincarè-Dulac)*** *Si los valores propios de la matriz J son resonantes, entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = Jx + \cdots, \tag{2.16}$$

puede ser reducido al sistema

$$\dot{y} = Jy + w(y), \tag{2.17}$$

por un cambio formal de coordenadas $x = y + \cdots$, donde $w(y)$ consiste de todos los monomios resonantes.

El sistema (2.17) es llamado *forma normal* de (2.16).

Capítulo 3

Caso de estudio

3.1. Casos particulares

En el capítulo anterior se analizó el caso cuando la matriz jacobiana de la parte lineal del sistema no lineal tenía todos sus valores propios distintos. Para este capítulo analizaremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots , \tag{3.1}$$

donde $F_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r y J es la siguiente matriz

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

que según el Teorema de Poincare también se puede linealizar bajo ciertas condiciones.

3.1.1. Caso $n = 2$

En esta sección mostraremos las condiciones que debe de cumplir la matriz J del sistema no lineal (3.1) para eliminar los términos de orden r después de aplicarle el cambio de coordenadas de la forma

$$x = y + h_r(y),$$

donde $h_r(y)$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r.
Empezaremos desarrollando el caso cuando $x \in \mathbb{R}^2$, donde el sistema no lineal tiene la siguiente forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_r(x) + \cdots . \tag{3.3}$$

En el capítulo anterior, observamos que basta probar que L_J es invertible para asegurar que existe el cambio de coordenadas que andamos buscando. Empezaremos aplicando el operador L_J a los elementos de la base ordenada $\mathcal{H}_2^r$

$$\mathcal{H}_2^r = \{\, y^{\mathbf{m}} e_i \mid i = 1, 2 \ , \mathbf{m} \in B_{r,2} \} \, ,$$

para obtener la matriz asociada a la transformación y asi ver cuando el determinante de dicha matriz es distinto de cero. Observe que

$$L_J(y^{\mathbf{m}} e_i) = D(y^{\mathbf{m}} e_i) J y - J(y^{\mathbf{m}} e_i),$$

pero

$$\begin{aligned}
D(y^{\mathbf{m}}e_1) &= \begin{pmatrix} \frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
D(y^{\mathbf{m}}e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} \end{pmatrix}, \\
Jy &= \begin{pmatrix} \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
D(y^{\mathbf{m}}e_i)Jy &= (\frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}}(\lambda y_1 + y_2) + \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}}(\lambda y_2))e_i \\
&= (m_1\lambda y^{\mathbf{m}} + m_2\lambda y^{\mathbf{m}} + \frac{m_1 y_2}{y_1}y^{\mathbf{m}})e_i
\end{aligned}$$

donde $m_1 + m_2 = r$, con lo anterior

$$D(y^{\mathbf{m}}e_i)Jy = (r\lambda y^{\mathbf{m}} + \frac{m_1 y_2}{y_1}y^{\mathbf{m}})e_i.$$

para i=1,2. Además

$$\begin{aligned}
J(y^{\mathbf{m}}e_1) &= \begin{pmatrix} \lambda y^{\mathbf{m}} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda y^{\mathbf{m}}e_1 \\
J(y^{\mathbf{m}}e_2) &= \begin{pmatrix} y^{\mathbf{m}} \\ \lambda y^{\mathbf{m}} \end{pmatrix} = \lambda y^{\mathbf{m}}e_2 + y^{\mathbf{m}}e_1
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$J(y^{\mathbf{m}}e_i) = \lambda y^{\mathbf{m}}e_i + y^{\mathbf{m}}e_{i-1},$$

para $i = 1, 2$, con $e_0 = 0$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
L_J(y^{\mathbf{m}}e_i) &= (r\lambda y^{\mathbf{m}} + \frac{m_1 y_2}{y_1}y^{\mathbf{m}})e_i - (\lambda y^{\mathbf{m}})e_i - (y^{\mathbf{m}})e_{i-1} \\
&= ((r-1)\lambda y^{\mathbf{m}} + m_1 y^{m_1-1,m_2+1})e_i - (y^{\mathbf{m}})e_{i-1}.
\end{aligned}$$

Con esto, los elementos de la base ordenada $\mathcal{H}_2^r$ bajo la transformación son:

$$\begin{aligned}
L_J(y_1^r e_1) &= ((r-1)\lambda y_1^r + r y_1^{r-1} y_2) e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_1^r e_1 + r y_1^{r-1} y_2 e_1 \\
L_J(y_1^{r-1} y_2 e_1) &= ((r-1)\lambda y_1^{r-1} y_2 + (r-1) y_1^{r-2} y_2^2) e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_1^{r-1} y_2 e_1 + (r-1) y_1^{r-2} y_2^2 e_1 \\
&\vdots \\
L_J(y_1 y_2^{r-1} e_1) &= ((r-1)\lambda y_1 y_2^{r-1} + y_2^r) e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_1 y_2^{r-1} e_1 + y_2^r e_1 \\
L_J(y_2^r e_1) &= (r-1)\lambda y_2^r e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_2^r e_1 \\
L_J(y_1^r e_2) &= ((r-1)\lambda y_1^r + r y_1^{r-1} y_2) e_2 - y_1^r e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_1^r e_2 + r y_1^{r-1} y_2 e_2 - y_1^r e_1 \\
L_J(y_1^{r-1} y_2 e_2) &= ((r-1)\lambda y_1^{r-1} y_2 + (r-1) y_1^{r-2} y_2^2) e_2 - y_1^{r-1} y_2 e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_1^{r-1} y_2 e_2 + (r-1) y_1^{r-2} y_2^2 e_2 - y_1^{r-1} y_2 e_1 \\
&\vdots \\
L_J(y_1 y_2^{r-1} e_2) &= ((r-1)\lambda y_1 y_2^{r-1} + y_2^r) e_2 - y_1 y_2^{r-1} e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_1 y_2^{r-1} e_2 + y_2^r e_2 - y_1 y_2^{r-1} e_1 \\
L_J(y_2^r e_2) &= (r-1)\lambda y_2^r e_2 - y_2^r e_1 \\
&= (r-1)\lambda y_2^r e_2 - y_2^r e_1
\end{aligned}$$

Si llamamos Φ a la matriz asociada a la transformación se tiene que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_{r2} & -I \\ O & A_{r2} \end{pmatrix}_{2\delta(r,2)\times 2\delta(r,2)}$$

donde $\delta(r,2)$ está definida en (1.3), $I \in M_{\delta(r,2)\times\delta(r,2)}$ es la matriz identidad y A_{r2} es la matriz triangular inferior

$$A_{r2} = \begin{pmatrix} (r-1)\lambda & & & & 0 \\ r & (r-1)\lambda & & & \\ & (r-1) & (r-1)\lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & (r-1)\lambda \end{pmatrix}_{\delta(r,2)\times\delta(r,2)},$$

para $r = 2, 3, \ldots$. Con esto, el determinante de la matriz Φ se calcula de la siguiente manera:

$$det\Phi = (detA_{r2})^2 = (((r-1)\lambda)^{\delta(r,2)})^2 = (r-1)^{2\delta(r,2)}\lambda^{2\delta(r,2)} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$$

Por lo tanto, L_J es invertible si y sólo si $\lambda \neq 0$. Con esto probamos que existe un cambio de coodenadas de tal forma que podemos linealizar el sistema no lineal (3.3) en

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y. \tag{3.4}$$

Veamos como calcular los $h_r(y)$. Si $m^1, m^2, \cdots, m^{\delta(r,2)}$ son los elementos del conjunto ordenado $B_{r,2}$ entonces podemos expresar a $h_r(y)$ de la siguiente forma:

$$h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y)) = \begin{pmatrix} A_{r2}^{-1} & A_{r2}^{-2} \\ O & A_{r2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m^1,1} \\ F_{m^2,1} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(2,r)},1} \\ F_{m^1,2} \\ F_{m^2,2} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(2,r)},2} \end{pmatrix}.$$

Para obtener A_{r2}^{-1} primeramente vamos a representar a la matriz A_{r2} como suma de dos matrices, tal como se muestra a continuación:

$$A_{r2} = (r-1)\lambda(I + \frac{1}{(r-1)\lambda} M_{r2})$$

donde

$$M_{r2} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ r & 0 & & & \\ 0 & r-1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{\delta(r,2)\times\delta(r,2)}$$

Ahora, como la matriz M_{r2} es nilpotente podemos obtener A_{r2}^{-1}

$$\begin{aligned} A_{r2}^{-1} &= \left((r-1)\lambda(I + (\frac{1}{(r-1)\lambda})M_{r2})\right)^{-1} = ((r-1)\lambda)^{-1}\left(I + (\frac{1}{(r-1)\lambda})M_{r2}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{(r-1)\lambda}\left(I - \frac{1}{(r-1)\lambda}M_{r2} + \frac{1}{((r-1)\lambda)^2}M_{r2}^2 - \cdots + \frac{(-1)^r}{((r-1)\lambda)^r}M_{r2}^r\right). \end{aligned}$$

3.1.2. Caso $n = 3$

Ahora pasemos al caso donde $x \in \mathbb{R}^3$. Tenemos el sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_r(x) + \cdots . \tag{3.5}$$

Al igual que en la sección anterior empezaremos aplicando el operador L_J a los elementos de la base ordenada $\mathcal{H}_3^r$ para obtener la matriz asociada a la transformación y asi ver cuando el determinante de dicha matriz es distinto de cero.

$$L_J(y^{\mathbf{m}}e_i) = D(y^{\mathbf{m}}e_i)Jy - J(y^{\mathbf{m}}e_i)$$

Entonces

$$\begin{aligned} D(y^{\mathbf{m}}e_1) &= \begin{pmatrix} \frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D(y^{\mathbf{m}}e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$D(y^{\mathbf{m}}e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}} \end{pmatrix},$$

y

$$Jy = \begin{pmatrix} \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda y_2 + y_3 \\ \lambda y_3 \end{pmatrix}$$

esto nos lleva a

$$\begin{aligned} D(y^{\mathbf{m}}e_i)Jy &= (\frac{m_1}{y_1}y^{\mathbf{m}}(\lambda y_1 + y_2) + \frac{m_2}{y_2}y^{\mathbf{m}}(\lambda y_2 + y_3) + \frac{m_3}{y_3}y^{\mathbf{m}}(\lambda y_3))e_i \\ &= (m_1\lambda y^{\mathbf{m}} + m_2\lambda y^{\mathbf{m}} + \frac{m_1 y_2}{y_1}y^{\mathbf{m}} + \frac{m_2 y_3}{y_2}y^{\mathbf{m}})e_i, \end{aligned}$$

donde $m_1 + m_2 + m_3 = r$, entonces

$$D(y^{\mathbf{m}}e_i)Jy = (r\lambda y^{\mathbf{m}} + \frac{m_1 y_2}{y_1}y^{\mathbf{m}} + \frac{m_2 y_3}{y_2}y^{\mathbf{m}})e_i,$$

para $i = 1, 2, 3$. Además

$$\begin{aligned} J(y^{\mathbf{m}}e_1) &= \begin{pmatrix} \lambda y^{\mathbf{m}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda y^{\mathbf{m}} e_1, \\ J(y^{\mathbf{m}}e_2) &= \begin{pmatrix} y^{\mathbf{m}} \\ \lambda y^{\mathbf{m}} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda y^{\mathbf{m}} e_2 + y^{\mathbf{m}} e_1, \\ J(y^{\mathbf{m}}e_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ y^{\mathbf{m}} \\ \lambda y^{\mathbf{m}} \end{pmatrix} = \lambda y^{\mathbf{m}} e_3 + y^{\mathbf{m}} e_2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$J(y^{\mathbf{m}}e_i) = \lambda y^{\mathbf{m}} e_i + y^{\mathbf{m}} e_{i-1}$$

para $i = 1, 2, 3$ con $e_0 = 0$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} L_J(y^{\mathbf{m}}e_i) &= (r\lambda y^{\mathbf{m}} + \frac{m_1 y_2}{y_1} y^{\mathbf{m}} + \frac{m_2 y_3}{y_2} y^{\mathbf{m}})e_i - (\lambda y^{\mathbf{m}})e_i - (y^{\mathbf{m}})e_{i-1} \\ &= ((r-1)\lambda y^{\mathbf{m}} + m_1 y^{m_1-1, m_2+1, m_3} + m_2 y^{m_1, m_2-1, m_3+1})e_i - (y^{\mathbf{m}})e_{i-1} \end{aligned}$$

Si aplicamos el operador L_J a los elementos de la base ordenada $\mathcal{H}_3^r$ y acomodamos los coeficientes en la matriz asociada a la transformación que llamaremos Φ se tiene:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_{r3} & -I & O \\ O & A_{r3} & -I \\ O & O & A_{r3} \end{pmatrix}_{3\delta(r,3) \times 3\delta(r,3)}$$

donde $I \in M_{\delta(r,3)\times\delta(r,3)}$ es la matriz identidad y A_{r3} es de la siguiente manera:

$$A_{r3} = \begin{pmatrix} C_{03} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{03} & C_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{13} & C_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{r-1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{r-1,3} & C_{r3} \end{pmatrix}_{\delta(r,3)\times\delta(r,3)}$$

con

$$\begin{aligned} C_{i3} &= M_{i2} + (r-1)\lambda I_{\delta(i,2)\times\delta(i,2)} \\ D_{i3} &= \begin{pmatrix} (r-i)I_{\delta(i,2)\times\delta(i,2)} \\ 0 \end{pmatrix}_{\delta(i+1,2)\times\delta(i,2)}, \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \ldots, r$.

Entonces el determinante de la matriz Φ (por ser matriz trangular superior) se calcula de la siguiente manera:

$$det\Phi = (detA_{r3})^3 = (((r-1)\lambda)^{\delta(r,3)})^3 = ((r-1)\lambda)^{3\delta(r,3)} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$$

Por lo tanto, L_J es invertible si y solo si $\lambda \neq 0$. Con esto probamos que existe un cambio de coodenadas de tal forma que podemos linealizar el sistema no lineal (3.5) en

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} y. \tag{3.6}$$

Veamos como calcular $h_r(y)$. Si $m^1, m^2, \cdots, m^{\delta(r,3)}$ son los elementos del conjunto ordenado $B_{r,3}$ entonces podemos expresar a $h_r(y)$ de la siguiente forma:

$$h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y)) = \begin{pmatrix} A_{r3}^{-1} & A_{r3}^{-2} & A_{r3}^{-3} \\ O & A_{r3}^{-1} & A_{r3}^{-2} \\ O & O & A_{r3}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m^1,1} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,3)},1} \\ F_{m^1,2} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,3)},2} \\ F_{m^1,3} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,3)},3} \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el caso $n = 2$, la matriz

$$A_{r3} \quad = \quad (r-1)\lambda(I + \frac{1}{(r-1)\lambda} M_{r3})$$

donde

$$M_{r3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{03} & M_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{13} & M_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{r-1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{r-1,3} & M_{r2} \end{pmatrix}_{\delta(r,3)\times\delta(r,3)}$$

es una matriz nilpotente. Entonces

$$\begin{aligned} A_{r3}^{-1} &= \left((r-1)\lambda(I + (\frac{1}{(r-1)\lambda}) M_{r3})\right)^{-1} = ((r-1)\lambda)^{-1}\left(I + (\frac{1}{(r-1)\lambda}) M_{r3}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{(r-1)\lambda}\left(I - \frac{1}{(r-1)\lambda} M_{r3} + \frac{1}{((r-1)\lambda)^2} M_{r3}^2 - \cdots + \left(\frac{(-1)}{(r-1)\lambda} M_{r3}\right)^{\delta(r,3)-1}\right). \end{aligned}$$

3.1.3. Caso $n = 4$

Por último realizaremos el caso donde $x \in \mathbb{R}^4$, para después pasar al caso donde $x \in \mathbb{R}^n$. Tenemos el sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x + F_2(x) + \cdots + F_r(x) + \cdots . \tag{3.7}$$

Haciendo los mismos cálculos anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} L_J(y^{\mathbf{m}}e_i) &= ((r-1)\lambda y^{\mathbf{m}} + m_1 y^{m_1-1,m_2+1,m_3,m_4} + m_2 y^{m_1,m_2-1,m_3+1,m_4} \\ &\quad + m_3 y^{m_1,m_2,m_3-1,m_4+1})e_i - (y^{\mathbf{m}})e_{i-1} \end{aligned}$$

Si aplicamos el operador L_J a los elementos de la base ordenada $\mathcal{H}_4^r$ y acomodamos los coeficientes en la matriz asociada a la transformación que llamaremos Φ se tiene:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_{r4} & -I & O & O \\ O & A_{r4} & -I & O \\ O & O & A_{r4} & -I \\ O & O & O & A_{r4} \end{pmatrix}$$

donde $I \in M_{\delta(r,4)\times\delta(r,4)}$ es la matriz identidad y A_{r4} es de la siguiente manera:

$$A_{r4} = \begin{pmatrix} C_{04} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{04} & C_{14} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{14} & C_{24} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{r-1,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{r-1,4} & C_{r4} \end{pmatrix}_{\delta(r,4)\times\delta(r,4)}$$

con

$$
\begin{aligned}
C_{i4} &= M_{i3} + (r-1)\lambda I_{\delta(i,3)\times\delta(i,3)} \\
D_{i4} &= \begin{pmatrix} (r-i)I_{\delta(i,3)\times\delta(i,3)} \\ 0 \end{pmatrix}_{\delta(i+1,3)\times\delta(i,3)},
\end{aligned}
$$

para $i = 0, 1, \ldots, r$.

Entonces el determinante de la matriz Φ (por ser matriz triangular superior) se calcula de la siguiente manera:

$$
det\Phi = (detA_{r4})^4 = (((r-1)\lambda)^{\delta(r,4)})^4 = ((r-1)\lambda)^{4\delta(r,4)} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0
$$

Por lo tanto, L_J es invertible si y solo si $\lambda \neq 0$. Con esto probamos que podemos encontrar un cambio de coodenadas de tal forma que linealice al sistema no lineal (3.7) en

$$
\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} y. \tag{3.8}
$$

Veamos como calcular los $h_r(y)$. Si $m^1, m^2, \cdots, m^{\delta(r,4)}$ son los elementos del conjunto ordenado $B_{r,4}$ entonces podemos expresar a $h_r(y)$ de la siguiente forma:

$$h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y)) = \begin{pmatrix} A_{r4}^{-1} & A_{r4}^{-2} & A_{r4}^{-3} & A_{r4}^{-4} \\ O & A_{r4}^{-1} & A_{r4}^{-2} & A_{r4}^{-3} \\ O & O & A_{r4}^{-1} & A_{r4}^{-2} \\ O & O & O & A_{r4}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m^1,1} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,4)},1} \\ F_{m^1,2} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,4)},2} \\ \vdots \\ F_{m^1,4} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,4)},4} \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el caso $n = 2$ y $n = 3$, la matriz

$$A_{r4} = (r-1)\lambda(I + \frac{1}{(r-1)\lambda}M_{r4})$$

donde

$$M_{r4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{04} & M_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{14} & M_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{r-1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{r-1,4} & M_{r3} \end{pmatrix}$$

es una matriz nilpotente.

Entonces

$$\begin{aligned} A_{r4}^{-1} &= \left((r-1)\lambda(I + (\frac{1}{(r-1)\lambda})M_4)\right)^{-1} = ((r-1)\lambda)^{-1}\left(I + (\frac{1}{(r-1)\lambda})M_4\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{(r-1)\lambda}\left(I - \frac{1}{(r-1)\lambda}M_4 + \frac{1}{((r-1)\lambda)^2}M_4^2 - \cdots + \left(\frac{(-1)}{(r-1)\lambda}M_4\right)^{\delta(r,4)-1}\right). \end{aligned}$$

3.2. Caso general

Con ayuda de los casos anteriores podemos pasar al caso general, es decir, cuando $x \in \mathbb{R}^n$ y ver cuando existe el cambio de coordenadas. Tenemos el sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix} x + F_2(x) + \cdots + F_r(x) + \cdots . \tag{3.9}$$

Haciendo los mismos cálculos anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} L_J(y^{\mathbf{m}} e_i) &= ((r-1)\lambda y^{\mathbf{m}} + m_1 y^{m_1-1, m_2+1, m_3, \cdots, m_n} + m_2 y^{m_1, m_2-1, m_3+1, m_4, \cdots, m_n} \\ &\quad + \cdots + m_{n-1} y^{m_1, \cdots, m_{n-1}-1, m_n+1}) e_i - (y^{\mathbf{m}}) e_{i-1} \end{aligned}$$

Si aplicamos el operador L_J a los elementos de la base ordenada $\mathcal{H}_n^r$ y acomodamos los coeficientes en la matriz asociada a la transformación que llamaremos Φ se tiene:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_{rn} & -I & \cdots & O \\ O & A_{rn} & \cdots & O \\ O & O & \ddots & -I \\ O & O & \cdots & A_{rn} \end{pmatrix}$$

donde $I \in M_{\delta(r,n)\times\delta(r,n)}$ y A_{rn} tiene la siguiente forma:

$$A_{rn} = \begin{pmatrix} C_{0,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{0n} & C_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{1n} & C_{2,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{r-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{r-1,n} & C_{r,n} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} C_{in} &= M_{i,n-1} + (r-1)\lambda I_{\delta(i,n-1)\times\delta(i,n-1)} \\ D_{in} &= \begin{pmatrix} (r-i)I_{\delta(i,n-1)\times\delta(i,n-1)} \\ 0 \end{pmatrix}_{\delta(i+1,n-1)\times\delta(i,n-1)}, \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \ldots, r$.

Entonces el determinante de la matriz Φ(por ser triangular inferiormente) se calcula de la siguiente manera:

$$det\Phi = (detA_{rn})^n = (((r-1)\lambda)^{\delta(r,n)})^n = ((r-1)\lambda)^{n\delta(r,n)} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$$

Por lo tanto, L_J es invertible si y solo si $\lambda \neq 0$. Con esto probamos que existe un cambio de coodenadas de tal forma que linealiaza al sistema no lineal (3.9) en

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix} y. \tag{3.10}$$

Veamos como calcular $h_r(y)$. Si $m^1, m^2, \cdots, m^{\delta(r,n)}$ son los elementos del conjunto ordenado $B_{r,n}$ entonces podemos expresar a $h_r(y)$ de la siguiente forma:

$$h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y)) = \begin{pmatrix} A_{rn}^{-1} & A_{rn}^{-2} & A_{rn}^{-3} & \cdots & A_{rn}^{-n} \\ O & A_{rn}^{-1} & A_{rn}^{-2} & \cdots & A_{rn}^{-(n-1)} \\ O & O & A_{rn}^{-1} & \cdots & A_{rn}^{-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{rn}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m^1,1} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,n)},1} \\ F_{m^1,2} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,n)},2} \\ \vdots \\ F_{m^1,n} \\ \vdots \\ F_{m^{\delta(r,n)},n} \end{pmatrix}$$

con

$$A_{rn}^{-1} = (r-1)\lambda(I + \frac{1}{(r-1)\lambda} M_{rn})$$

donde

$$M_{rn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{0,n} & M_{1,n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{1,n} & M_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{r-1,,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{r-1,,n} & M_{r,n-1} \end{pmatrix}$$

$M_{r,n}$ es una matriz nilpotente.

Tenemos entonces probado el siguiente teorema

Teorema 4 *Sea*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda \neq 0$ *entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = Jx + \cdots$$

puede ser reducido al sistema lineal

$$\dot{y} = Jy$$

por un cambio formal de coordenadas $x = y + \cdots$.

Conclusiones

Explorando la demostración del Teorema de Linealización de Poincaré encontramos que utilizando solamente herramientas de Álgebra Lineal se pueden demostrar casos particulares de este Teorema que normalmente no vienen demostrado en los libros.

Del caso particular que se trabajó en esta tesis podemos partir para encontrar la forma explícita de los cambios de coordenadas de otros casos particulares del teorema de Poincaré, ya que éste, solamente nos asegura la existencia del cambio de coordenadas.

En un futuro, se podría trabajar, utilizando la misma idea que se manejo en esta tesis, con matrices diagonales por bloques donde los bloques sean del caso que se maneja en esta tesis y combinaciones de éstas con otros casos.

Por último, es importante mencionar que en el estudio de las bifurcaciones en puntos de equilibrio, es necesario utilizar la forma normal del sistema dada por el Teorema de Poincarè-Dulac.

Bibliografía

[1] Poincaré, H. *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*. Año 1879. Editorial: Gauthier-Villars, Paris.

[2] Arnold V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Ecuations*. Año 1983. Editorial: Springer-Verlag.

[3] Serge, Lang. *Introducción al Álgebra Lineal*. Año 1990. Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

[4] Boyce-DiPrima. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Año 2007, Editorial: Limusa Wiley.

[5] Arnold J.,Sthepen Friedberg y Lawrence Spence.*Algebra Lineal*. Año 1982. Editorial: Publicaciones Cultural, S.A.

[6] Carl D. Meyer.*Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Año 2000. Editorial: Society for Industrial and Applied Mathematics.