Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Semicontinuidad y Medibilidad de Correspondencias y la Existencia de Selectores Continuos y Medibles

Tesis que para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas

presenta:

Alejandra Fonseca Morales

Director de Tesis:

Dr. Fernando Luque Vásquez

20 de Enero de 2010.

SINODALES

Dr. Fernando Luque Vásquez,

Dr. Oscar Vega Amaya,

Dr. Agustín Brau Rojas,

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa.

A mis amores:

Luz María, Silvestre, Theodulfa,
Omar, José y
Daniel.

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

A mis maestros.

A la familia Álvarez Fonseca y a la familia Zúñiga Vázquez.

A todos ¡$e^{1000^{1000}}$ gracias!

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar de una manera accesible a lectores con una formación equivalente a estudios de licenciatura en matemáticas, algunos resultados importantes sobre la existencia de selectores continuos o medibles para multifunciones, también llamadas correspondencias.

La motivación para la realización de este trabajo surge del estudio de algunos problemas en la teoría de control estocástico, en los que la existencia de políticas o estrategias óptimas es consecuencia de la existencia de una función medible $f : X \to A$ que satisface

$$u^*(x) = \sup_{a \in A(x)} \{u(x,a)\} = u(x, f(x)), \tag{1}$$

en donde X, A son espacios métricos, $x \twoheadrightarrow A(x)$ es una correspondencia de X a A y u es una finción de valores reales definida en la gráfica de la correspondencia,

$$\mathbb{K} := \{(x,a) : a \in A(x), x \in X\}.$$

Si para cada $x \in X$ se define

$$A^*(x) := \left\{ a^* \in A(x) : u(x,a^*) = \sup_{a \in A(x)} \{u(x,a)\} \right\},$$

entonces la existencia de una función que satisface (1), es equivalente a la existencia de un selector para la correspondecia $x \twoheadrightarrow A^*(x)$.

Esta tesis está organizada en 4 capítulos: en el primero se hace una revisión de los conceptos básicos de correspondencias, tales como; la imagen inversa inferior, la imagen inversa superior, la semicontinuidad superior e inferior y algunas operaciones con correspondencias. En el segundo capítulo se analizan los conceptos necesarios para asegurar la existencia de selectores continuos; partición de la unidad subordinada a una cubierta, cubiertas localmente finitas, espacios paracompactos, **Teorema de Michael**, correspondencia convexa, funciones inf-compactas.

El tercer capítulo tiene como objetivo proporcionar los fundamentos teóricos de la medibilidad de correspondencias, los cuales son necesarios para asegurar la existencia de selectores medibles; correspondencias medibles y débilmente medibles, funciones conjuntamente medibles (funciones de Caratheodory), **Teorema de selección de Kuratowski-Ryll-Nardzewski**, Teorema del Máximo medible. En el capítulo 4 (Apéndice), se agregan algunos resultados que son útiles en los capítulos 2 y 3 para la demostración de varios resultados.

Índice general

Capítulo 1

Teoría de Correspondencias

En este capítulo iniciaremos con la definición del concepto "correspondencia", estudiaremos algunas propiedades de correspondencias que nos ayudarán técnicamente para la demostración de algunos resultados posteriores, también veremos el concepto de semicontinuidad de correspondencias y finalmente analizaremos algunas operaciones que se pueden definir con ellas.

1.1. Características de una Correspondencia

Definición 1.1.1 *Sean X, Y conjuntos no vacíos. Una correspondencia φ de X a Y es una función que asigna a cada x en X un elemento $\varphi(x)$ del conjunto potencia 2^Y de Y, es decir, φ es una función con dominio X y contradominio 2^X.*

Para representar una correspondencia de X a Y usaremos la notación $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$.

Definición 1.1.2 *Sea $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia.*

La imagen bajo φ de $A \subset X$ se define por;

$$\varphi(A) := \bigcup_{x \in A} \varphi(x).$$

De este modo el ***rango*** *de φ es $\varphi(X)$.*

Definimos también a la gráfica de φ como el conjunto

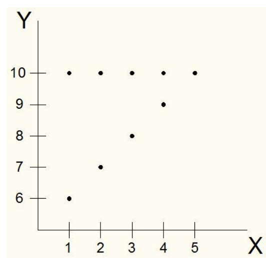
$$Gr\varphi := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \varphi(x)\}.$$

Ejemplo 1.1.1 *Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ y φ definida por*

$$\varphi(x) = \{x + 5\} \cup \{10\}, x \in X.$$

Claramente, φ es una correspondencia y la gráfica de φ es:

$$Gr\varphi = \{(x, x + 5), (x, 10) : x \in X\}.$$



Ejemplo 1.1.2 *Sean $X = [0, 1]$ y $Y = B_2(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < 2\}$, con $\|\cdot\|$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$\varphi(t) = \{y \in Y : \|y\| \leq t\} \quad t \in [0, 1].$$

Observemos que φ es una correspondencia ya que para cada $t \in X$ el conjunto $\varphi(t) \subset Y$. Además, la gráfica de φ es:

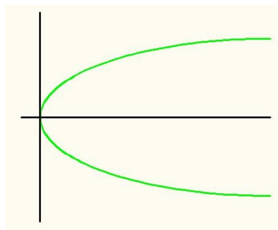
$$Gr\varphi = \{(t, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n : \|y\| \leq t\}.$$

Ejemplo 1.1.3 *Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi(k) := \left\{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\right\}.$$

La gráfica de la correspondencia φ es:

$$Gr\varphi = \left\{(k, -\sqrt{k}), (k, \sqrt{k}) : k \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}\right\}.$$



Observación 1.1.1 *Una función $f : X \to Y$ puede identificarse con la correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ dada por,*

$$\varphi(x) := \{f(x)\} \quad x \in X.$$

Sea $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia y Y un espacio topológico; si para cada $x \in X$, el conjunto $\varphi(x)$ tiene una determinada propiedad, diremos que φ toma valores con esa propiedad. Así, diremos que φ toma valores cerrados, (abiertos, compactos, conexos, resp.), si para cada $x \in X$ el conjunto $\varphi(x)$ es cerrado, (abierto, compacto, conexo, resp.) en Y. Si Y es un espacio vectorial, entonces diremos que φ toma valores convexos, si para cada $x \in X$, el conjunto $\varphi(x)$ es convexo en Y.

Recordemos que para una función $f : X \to Y$, la imagen inversa de un subconjunto A de Y se define como

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Para una correspondencia se tienen dos imágenes inversas, las cuales se definen a continuación.

Definición 1.1.3 *Sea $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia.*

*a) La **imagen inversa superior** de un subconjunto A de Y, denotada por $\varphi_s^{-1}(A)$, se define como*

$$\varphi_s^{-1}(A) := \{x \in X : \varphi(x) \subset A\}.$$

*b) La **imagen inversa inferior** de un subconjunto A de Y, denotada por $\varphi_i^{-1}(A)$, se define como*

$$\varphi_i^{-1}(A) := \{x \in X : \varphi(x) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Una relación entre las dos imagenes inversas está dada con la siguiente propiedad, la cual nos será muy útil en la demostración de varios resultados posteriores.

Propiedad 1.1.1 *Sea $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia y A un subconjunto de Y. Se tiene lo siguiente:*

a) $(\varphi_s^{-1}(A))^c = \varphi_i^{-1}(A^c)$, *b)* $(\varphi_i^{-1}(A))^c = \varphi_s^{-1}(A^c)$.

Demostración. La demostración de la parte $a)$ se sigue de que

$$\begin{aligned} x \in \varphi_s^{-1}(A) &\Leftrightarrow \varphi(x) \subset A \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) \cap A^c = \varnothing \\ &\Leftrightarrow x \notin \varphi_s^{-1}(A^c) \\ &\Leftrightarrow x \in (\varphi_s^{-1}(A^c))^c. \end{aligned}$$

La demostración de $b)$ se sigue de la propiedad $a)$, tomando A^c en lugar de A. ■

En el siguiente resultado se prueba que la imagen inversa superior de una intersección arbitraria de conjuntos, es la intersección de las imágenes inversas superiores de los conjuntos.

Proposición 1.1.1 *Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia y $\{A_k\}_{k\in I}$ es una colección de subconjuntos de Y, entonces*

$$\varphi_s^{-1}(\cap_{k\in I} A_k) = \bigcap_{k\in I} \varphi_s^{-1}(A_k).$$

Demostración. Definimos

$$A := \varphi_s^{-1}(\cap_{k\in I} A_k) \quad \text{y} \quad B := \bigcap_{k\in I} \varphi_s^{-1}(A_k).$$

La igualdad de A y B se sigue de las siguientes equivalencias;

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \varphi(x) \subset \bigcap_{k\in I} A_k \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) \subset A_k, \quad \forall k \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \varphi_s^{-1}(A_k), \quad \forall k \in I, \\ &\Leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

■

En el siguente ejemplo se muestra que la imagen inversa inferior de la intersección de conjuntos, no necesariamente es la intersección de las imágenes inversas inferiores de los conjuntos.

Ejemplo 1.1.4 *Considere la correspondencia* $\varphi : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *definida en el Ejemplo 1.1.3,*

$$\varphi(k) = \left\{\sqrt{k}, -\sqrt{k}\right\}.$$

Tomemos $A = \{-2, 1\}$ *y* $B = (-2, 2]$, *observemos que;*

$$\varphi_i^{-1}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : \left\{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right\} \cap \{-2, 1\} \neq \varnothing\right\} = \{1, 4\},$$

y que

$$\varphi_i^{-1}(B) = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : \left\{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right\} \cap (-2, 2] \neq \varnothing\right\} = [0, 4].$$

La intersección es

$$\varphi_i^{-1}(A) \cap \varphi_i^{-1}(B) = \{1, 4\} \cap [0, 4] = \{1, 4\}.$$

Por otro lado $A \cap B = \{-2, 1\} \cap (-2, 2] = \{1\}$ *y*

$$\varphi_i^{-1}(A \cap B) = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : \left\{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right\} \cap \{1\} \neq \varnothing\right\} = \{1\},$$

lo cual prueba que la imagen inversa inferior de la intersección de conjuntos, no necesariamente es la intersección de las imágenes inversas inferiores de los conjuntos.

En el siguiente resultado se prueba que la imagen inversa inferior de la unión entre conjuntos, es la unión de las imágenes inversas inferiores de los conjuntos.

Proposición 1.1.2 *Si* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ *es una correspondencia y* $\{A_k\}_{k\in I}$ *es una colección de subconjuntos de* Y*, entonces*

$$\varphi_i^{-1}(\cup_{k\in I} A_k) = \bigcup_{k\in I} \varphi_i^{-1}(A_k).$$

Demostración. Por la Propiedad 1.1.1, b),

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1}(\cup_{k\in I} A_k) &= (\varphi_s^{-1}((\cup_{k\in I} A_k)^c))^c \\ &= (\varphi_s^{-1}(\cap_{k\in I} A_k^c))^c, \end{aligned}$$

y por la Proposición 1.1.1;

$$\begin{aligned} (\varphi_s^{-1}(\cap_{k\in I} A_k^c))^c &= (\bigcap_{k\in I} \varphi_s^{-1}(A_k^c))^c \\ &= \bigcup_{k\in I} (\varphi_s^{-1}(A_k^c))^c. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la Propiedad 1.1.1, b), obtenemos

$$\bigcup_{k\in I} (\varphi_s^{-1}(A_k^c))^c = \bigcup_{k\in I} \varphi_i^{-1}(A_k)$$

y por lo tanto,

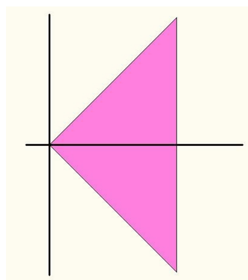
$$\varphi_i^{-1}(\cup_{k\in I} A_k) = \bigcup_{k\in I} \varphi_i^{-1}(A_k).$$

■

La imagen inversa superior, de una unión de conjuntos, no necesariamente es la unión de las imagines inversas superiores. El siguiente ejemplo demuestra esta afirmación.

Ejemplo 1.1.5 *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^+ \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *la correspondencia definida por*

$$\varphi(x) = [-x, x] \, .$$



Tomemos $A := \{1, 3\}$, $B := (-8, 3)$ *y observemos que*

$$\varphi_s^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^+ : [-x, x] \subset \{1, 3\}\} = \varnothing,$$

y que

$$\varphi_s^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^+ : [-x, x] \subset (-8, 3)\} = (0, 3) \, .$$

En consecuencia

$$\varphi_s^{-1}(A) \cup \varphi_s^{-1}(B) = \varnothing \cup (0, 3) = (0, 3) \, ,$$

mientras que

$$\varphi_s^{-1}(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R}^+ : [-x, x] \subset (-8, 3]\} = (0, 3] \, .$$

1.2. Correspondencias Semicontinuas

Para definir el concepto de “correspondencias semicontinuas”, requerimos de la noción de vecindad de un punto y vecindad de un conjunto, las cuales se presentan a continuación.

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $F \subset X$. Diremos que V es una vecindad de x, si existe un abierto A tal que $x \in A \subset V$. Análogamente, S es una vecindad de F si existe un abierto O tal que $F \subset O \subset S$. A los conjuntos A y O se les llama vecindad abierta de x y F respectivamente.*

Definición 1.2.2 *Sean X, Y espacios topológicos y $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia.*

a) Se dice que φ es ***semicontinua superiormente*** *en $x \in X$, si para cada vecindad U de $\varphi(x)$ existe una vecindad V de x tal que*

$$\varphi(z) \subset U \quad \forall z \in V.$$

b) Se dice que φ es ***semicontinua inferiormente*** *en $x \in X$ si para cada conjunto abierto U tal que $\varphi(x) \cap U \neq \varnothing$, existe una vecindad V de x, tal que*

$$\varphi(z) \cap U \neq \varnothing \quad \forall z \in V.$$

c) Se dice que φ es continua en $x \in X$, si es semicontinua superiormente e inferiormente en x.

La correspondencia φ es ***semicontinua superiormente (inferiormente)*** *en X, si lo es en cada punto x de X, análogamente φ es* ***continua*** *en X si lo es en todo punto x de X.*

Ejemplo 1.2.1 *La correspondencia $\varphi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ definida por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x < 1 \\ [0,1] & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es semicontinua superiormente en $[0,1]$, *semicontinua inferiormente en* $[0,1)$, *pero no es semicontinua inferiormente en* $[0,1]$.

Demostraremos esta afirmación. Primero que φ *no es semicontinua inferiormente en* $x = 1$. *Supongamos lo contrario y tomemos a* $U := \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, *entonces*

$$U \cap \varphi(1) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) \cap [0,1] \neq \varnothing,$$

por lo tanto, existe V *vecindad de* x *tal que*

$$\varphi(z) \cap U \neq \varnothing \quad \forall z \in V,$$

pero no puede ser dado que si $z \in V$ *y* $z \neq 1$, *entonces*

$$\varphi(z) \cap U = \{0\} \cap (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \varnothing,$$

así, φ *no puede ser semicontinua inferiormente en* $x = 1$.

Para probar la semicontinuidad superior de φ *en* $x = 1$, *consideremos una vecindad* U *de* $\varphi(1) = [0,1]$ *y* $V := \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *que es vecindad abierta de* $x = 1$. *Obsérvese que para cada* $z \in V, z \neq 1$,

$$\varphi(z) = \{0\} \subset \varphi(1) = [0,1]$$

lo que implica que φ *es semicontinua superiormente en* $x = 1$.

Probemos ahora que φ *es continua en* $[0,1)$. *Para esto tomemos* $x \in [0,1)$ *y* U *una vecindad abierta de* $\varphi(x) = \{0\}$, *en este caso:*

$$U \cap \{0\} \neq \varnothing \textit{ si, y sólo si, } \{0\} \subset U,$$

para la vecindad abierta de $V = [0,1)$, *obtenemos que*

$$\varphi(z) = \varphi(x) = \{0\} \subset U \quad \forall z \in V$$

por lo tanto φ *es continua en* $[0,1)$.

Ejemplo 1.2.2 *La correspondencia* $\psi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ *definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } x < 1 \\ \{0\} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente en $[0,1]$, *semicontinua superiormente en* $[0,1)$, *pero no es semicontinua superiormente en* $[0,1]$.

Primero demostremos que ψ *no es semicontinua superiormente en* $x = 1$. *Tomemos la vecindad* $U = \left[0, \frac{3}{4}\right)$ *de* $\psi(1) = \{0\}$ *y sea* V *una vecindad arbitraria de* $x = 1$. *Entonces, si* $z \in V$ *y* $z \neq 1$, *el conjunto* $\psi(z) = [0,1]$ *no está contenido en* $U = \left[0, \frac{3}{4}\right)$ *y por lo tanto* ψ *no es semicontinua superiormente en* $x = 1$.

Probemos ahora que ψ *es semicontinua inferiormente en* $x = 1$. *Sea* U *un conjunto abierto que intersecta a* $\psi(1) = \{0\}$ *y tomemos* $V = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *la vecindad abierta de* $x = 1$. *Entonces*

$$\psi(z) = [0,1] \cap U \neq \varnothing \quad \forall z \in V,$$

por lo tanto, ψ *es semicontinua inferiormente en* $x = 1$.

Para probar la semicontinuidad superior de ψ *en* $[0,1)$, *tomemos* $x \in [0,1)$ *y* U *una vecindad de* $\psi(x) = [0,1]$. *Observe que para* $V = [0,1)$

$$\psi(z) = [0,1] \subset U \quad \forall z \in V,$$

por lo que ψ *es semicontinua superiormente en* $[0,1)$.

Ahora para la semicontinuidad inferior en $[0,1)$, *supongamos que* $x \in [0,1)$ *y que* U *es un abierto que intersecta a* $\psi(x) = [0,1]$. *Entonces para la vecindad abierta* $V = [0,1)$ *de* x, *se sigue que*

$$\psi(z) \cap U = [0,1] \cap U \neq \varnothing \quad \forall z \in V,$$

por lo tanto ψ *es semicontinua inferiormente en* $[0,1)$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la semicontinuidad superior de una correspondencia entre espacios topológicos, en términos de conjuntos abiertos y cerrados.

Teorema 1.2.1 *Si* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ *es una correspondencia entre espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) φ *es semicontinua superiormente en* X.

ii) $\varphi_s^{-1}(A)$ *es abierto en* X *para todo conjunto abierto* A *en* Y.

iii) $\varphi_i^{-1}(F)$ *es cerrado en* X *para todo conjunto cerrado* F *en* Y.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que φ es una correspondencia semicontinua superiormente y que A es un abierto en Y. Si $\varphi_s^{-1}(A) = \varnothing$, el resultado se sigue trivialmente.

Supongamos que $\varphi_s^{-1}(A)$ es no vacío; probaremos que cada punto $x \in \varphi_s^{-1}(A)$ es un punto interior y así obtendremos que $\varphi_s^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X.

Sea $x \in \varphi_s^{-1}(A)$. Por la semicontinuidad superior, existe una vecindad V_x de x tal que $\varphi(z) \subset A \ \ \forall z \in V_x$ de donde se sigue que

$$V_x \subset \varphi_s^{-1}(A),$$

y por lo tanto, x es un punto interior de $\varphi_s^{-1}(A)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que para todo subconjunto A abierto en Y, $\varphi_s^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X. Por la definición de vecindad, para $x \in X$ y U una vecindad de $\varphi(x)$ existe un abierto V_U en Y tal que

$$\varphi(x) \subset V_U \subset U,$$

entonces $V = \varphi_s^{-1}(V_U)$ es una vecindad abierta de x tal que

$$\varphi(z) \subset V_U \subset U \quad \forall z \in V,$$

por lo tanto, φ es semicontinua superiormente en X.

ii) $\Leftrightarrow$ *iii*) Por la Propiedad 1.1.1, a), tenemos que

$$(\varphi_s^{-1}(A))^c = \varphi_i^{-1}(A^c) \quad A \subset Y.$$

Si A es un subconjunto abierto en Y, entonces:

$$\varphi_s^{-1}(A) \text{ es abierto en } X \text{ si, y sólo si, } \varphi_i^{-1}(A^c) \text{ es cerrado en } X.$$

■

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la semicontinuidad inferior de una correspondencia entre espacios topológicos, en términos de conjuntos abiertos y cerrados.

Teorema 1.2.2 *Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia entre espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) φ *es semicontinua inferiormente en* X.
ii) $\varphi_i^{-1}(A)$ *es abierto en* X *si* A *es abierto en* Y.
iii) $\varphi_s^{-1}(F)$ *es cerrado en* X *si* F *es cerrado en* Y.

Demostración. *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Supongamos que φ es una correspondencia semicontinua inferiormente y que A es un abierto en Y.

Si el conjunto $\varphi_i^{-1}(A)$ es vacío, entonces es abierto en X. Supongamos que $\varphi_i^{-1}(A)$ es diferente del vacío. Por la semicontinuidad inferior, para cada x en $\varphi_i^{-1}(A)$ existe una vecindad abierta V_x de x, tal que

$$\varphi(z) \cap A \neq \varnothing \quad \forall z \in V_x,$$

la definición de V_x y la definición de $\varphi_i^{-1}(A)$ implican que

$$V_x \subset \varphi_i^{-1}(A).$$

lo cual muestra que x es un punto interior de $\varphi_i^{-1}(A)$. Por lo tanto, tenemos que $\varphi_i^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Supongamos que $\varphi_i^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X, donde A es un abierto en Y. Sea x en X y U una vecindad abierta en Y cuya intersección con $\varphi(x)$ sea diferente del vacío.

Por hipótesis, $V_x := \varphi_i^{-1}(U)$ es vecindad abierta de x tal que

$$\varphi(z) \cap U \neq \varnothing \quad \forall z \in V_x,$$

por lo tanto, φ es una correspondencia semicontinua inferiormente en X.

iii) $\Leftrightarrow$ *ii*) Por la Propiedad 1.1.1, b) tenemos que para todo subconjunto U en Y,

$$(\varphi_i^{-1}(U))^c = \varphi_s^{-1}(U^c).$$

Así, para A un abierto en Y,

$$\varphi_i^{-1}(A) \text{ es abierto en } X \text{ si, y sólo si, } \varphi_s^{-1}(A^c) \text{ es cerrado en } X.$$

■

Considerando una correspondencia definida entre espacios métricos, obtenemos caracterizaciones, por medio de sucesiones, para la semicontinuidad superior y la semicontinuidad inferior, como se muestra en los siguentes dos reultados.

Teorema 1.2.3 *Sean X, Y espacios métricos y $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) φ es semicontinua inferiormente en x.

2) Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y para cada y en $\varphi(x)$ existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a y y tal que

$$y_n \in \varphi(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y para cada $y \in \varphi(x)$ existe una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a y y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y_k \in \varphi(x_{n_k}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Suponga que φ es semicontinua inferiormente en x. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x y sea y un punto en $\varphi(x)$.

Como y está en $B_1(y) \cap \varphi(x)$, por la semicontinuidad inferior de φ existe una vecindad V_1 de x tal que

$$\varphi(z) \cap B_1(y) \neq \varnothing \quad \forall z \in V_1,$$

y por la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a x existe n_1 en $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_1$ para todo $n \geq n_1$.

Luego, como $y \in B_{\frac{1}{2}}(y) \cap \varphi(x)$, por la semicontinuidad inferior de φ existe una vecindad V_2 de x tal que

$$\varphi(z) \cap B_{\frac{1}{2}}(y) \neq \varnothing \quad \forall z \in V_2,$$

y existe $n_2 > n_1$ en $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_2$ para todo $n \geq n_2$.

Procediendo inductivamente tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, el punto y pertenece a $B_{\frac{1}{k}}(y) \cap \varphi(x)$ y por la semicontinuidad inferior de φ existe una vecindad V_k de x tal que

$$\varphi(z) \cap B_{\frac{1}{k}}(y) \neq \varnothing \quad \forall z \in V_k.$$

Además, por la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a x existe $n_k > n_{k-1}$ en $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_k$ para todo $n \geq n_k$.

Definamos la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

Para $n < n_1$, sea y_n un punto arbitrario en $\varphi(x_n)$.
Para $n_1 \leq n < n_2$, tome $y_n \in \varphi(x_n) \cap B_1(y)$.
Para $n_k \leq n < n_{k+1}$, tome y_n en $\varphi(x_n) \cap B_{\frac{1}{k}}(y)$.

Entonces para cada natural n, el punto y_n está en $\varphi(x_n) \cap B_{\frac{1}{k}}(y)$. Por lo tanto la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto y, además y_n está en $\varphi(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

2) $\Rightarrow$ 3) La demostración de esta implicación es trivial.

3) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que φ no es semicontinua inferiormente en x, es decir, existe un conjunto abierto U con

$$\varphi(x) \cap U \neq \varnothing,$$

y tal que para toda vecindad V de x existe $z_v \in V$ tal que

$$\varphi(z_v) \cap U = \varnothing,$$

por lo tanto, para cada número natural n la vencindad $B_{1/n}(x)$ contiene un punto x_n que satisface que

$$\varphi(x_n) \cap U = \varnothing.$$

Observemos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y que

$$\varphi(x_n) \cap U = \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea y un elemento de $\varphi(x) \cap U$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, se sigue por hipótesis que existe una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a y y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y_k \in \varphi(x_{n_k}) \subset U^c \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo cual implica que $y \in U^c$ puesto que U^c es cerrado. Lo anterior contradice el hecho que $y \in \varphi(x) \cap U$, por lo tanto, φ es semicontinua inferiormente en x. ■

Teorema 1.2.4 *Sean X, Y espacios métricos y una correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) φ es semicontinua superiormente en x y $\varphi(x)$ es compacto.

2) Para cada sucesión $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Gr\varphi$, tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a x, se tiene que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación en $\varphi(x)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Suponga que φ es una correspondencia semicontinua superiormente en x y que $\varphi(x)$ es compacto en Y. Sea

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Gr\varphi,$$

tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto x y supongamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene un punto de acumulación en $\varphi(x)$, entonces para cada punto $y \in \varphi(x)$ existe $r_y > 0$, tal que y_n no está en $B_{r_y}(y)$ para n suficientemente grande. Puesto que

$$\varphi(x) \subset \bigcup_{y\in\varphi(x)} B_{r_y}(y).$$

y $\varphi(x)$ es compacto, entonces existen puntos $y_1', y_2', ..., y_k'$ en $\varphi(x)$ tales que

$$\varphi(x) \subset U := \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{y_i'}}(y_i').$$

El conjunto U es vecindad abierta de $\varphi(x)$ y por la semicontinuidad superior existe una vecindad abierta V de x tal que

$$\varphi(z) \subset U \quad \forall z \in V.$$

Además, por la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al punto x existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$, $x_n \in V$ y

$$y_n \in \varphi(x_n) \subset U, \quad \forall n \geq M.$$

Lo cual es una contradicción, pues para n suficientemente grande $y_n \notin U$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que φ no es semicontinua superiormente en x, entonces existe una vecindad abierta U de $\varphi(x)$, tal que para toda vecindad V de x existe x_v en V tal que

$$\varphi(x_v) \cap U^c \neq \varnothing.$$

Así, para cada n en $\mathbb{N}$ existe x_n un punto en $B_{\frac{1}{n}}(x)$ tal que

$$\varphi(x_n) \cap U^c \neq \varnothing,$$

claramente, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Si y_n está en $\varphi(x_n) \cap U^c$, entonces la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está totalmente contenida en el conjunto cerrado U^c y como

$$\varphi(x) \cap U^c = \varnothing,$$

implica que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene un punto de acumulación en $\varphi(x)$, lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto, la correspondencia φ es semicontinua superiormente en x.

Para probar la compacidad del conjunto $\varphi(x)$ basta con suponer nuevamente que se cumple 2). Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $\varphi(x)$ y definimos para toda n, $x_n \equiv x$ es claro que

$$(x, y_n) \subset Gr\varphi,$$

la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación en $\varphi(x)$, lo cual implica que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, por lo tanto, $\varphi(x)$ es compacto.

■

Ejemplo 1.2.3 *La correspondencia* $\varphi : [0,10] \twoheadrightarrow [0,10]$ *definida por*

$$\varphi(x) = [0,x],$$

es una correspondencia continua en $[0,10]$.

Primero probemos que φ *es semicontinua inferiormente en* $[0,10]$. *Sea* $x \in [0,10]$, $y \in \varphi(x)$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente a* x.

Si $x = y$ *la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es tal que* $x_n \in \varphi(x_n)$ *y además es convergente a* x. *Si* $x \neq y$, *tenemos que para* $\epsilon = x - y > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$x_n \in (x - \epsilon, x] \qquad \forall n \geq N,$$

esto implica que para toda $n \geq N$, *el punto* $y \in \varphi(x_n)$. *Para* $n < N$ *tomemos* y_n *un punto arbitrario en* $\varphi(x_n)$ *y para* $n \geq N$ *tomemos* $y_n \equiv y$, *entonces la sucesión* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es tal que* $y_n \in \varphi(x_n)$ *y es convergente a* y.

Probemos ahora la semicontinuidad superior en $[0,10]$. *Sea* $x \in [0,10]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente a* x *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que* $y_n \in \varphi(x_n)$.

Caso 1, si existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$y_{n_k} \in \varphi(x) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces por la compacidad de $\varphi(x)$, *se sigue que* $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *contiene una subsucesión convergente en* $\varphi(x)$, *por lo que la sucesión* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *posee un punto de acumulación en* $\varphi(x)$.

Caso 2, supongamos que no pasa el caso uno, eso quiere decir que para toda $n \in \mathbb{N}$ *excepto posiblemente por una cantidad finita de índices* n,

$$y_n \in [x, x_n],$$

como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x, *entonces* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x, *por lo tanto,* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene un punto de acumulación en* $\varphi(x)$ *y así finalmente* φ *es continua en* $[0,10]$.

1.3. Operaciones con correspondencias

En esta sección se definen algunas operaciones con correspondencias, tales como la correspondencia cerradura y la correspondencia intersección, además veremos un caso en particular para el cual, la correspondencia intersección de dos correspondencias semicontinuas inferiormente, es semicontinua inferiormente, dado que en general este resultado es falso.

Definición 1.3.1 *Sea φ una correspondencia entre espacios topológicos. La correspondencia cerradura de φ, denotada por $\bar{\varphi}$ se define por*

$$\bar{\varphi}(x) := \overline{\varphi(x)}.$$

Proposición 1.3.1 *Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia entre espacios topológicos, U un subconjunto abierto en Y y $x_0 \in X$, entonces*

$$\overline{\varphi(x_0)} \cap U \neq \varnothing \text{ si, y sólo si, } \varphi(x_0) \cap U \neq \varnothing.$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.0.1. ■

El siguiente resultado muestra la relación de semicontinuidad entre una correspondencia y la correspondencia cerradura.

Lema 1.3.1 *Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Entonces*

1.- $\overline{\varphi}$ es semicontinua inferiormente en x_0 si, y sólo si, φ es semicontinua inferiormente en x_0.

2.-Si Y es normal y φ es semicontinua superiormente en x_0, entonces $\bar{\varphi}$ es semicontinua superiormente en x_0.

Demostración. 1) Sea U un conjunto abierto cuya intersección con $\varphi(x_0)$ es no vacío. Por la Proposición 1.3.1 tenemos que

$$\overline{\varphi(x)} \cap U \neq \varnothing \text{ si, y sólo si, } \varphi(x) \cap U \neq \varnothing.$$

El resultado se sigue de la definición de semicontinuidad inferior.

2) Supongamos que φ es semicontinua superiormente en x_0 y que U es un conjunto abierto en Y tal que

$$\overline{\varphi(x_0)} \subset U.$$

Como Y es normal, por el Lema 4.0.3, existe un abierto G, tal que

$$\overline{\varphi(x_0)} \subset G \subset \overline{G} \subset U.$$

Además, por la semicontinuidad superior de φ el conjunto $W = \varphi_s^{-1}(G)$ es una vecindad abierta de x_0, más aun, para cada $z \in W$, $\varphi(z) \subset G$, se tiene que

$$\overline{\varphi(z)} \subset \overline{G} \subset U \quad \forall z \in W,$$

por lo tanto, la correspondencia cerradura $\overline{\varphi}$ es semicontinua superiormente en x_0.
■

A continuación se introducen las definiciones de correspondencia intersección, correspondencia unión y correspondencia producto, las cuales nos serán utiles en los capítulos 2 y 3.

Definición 1.3.2 *Sea $\{\varphi_k : k \in K\}$ una familia de correspondencias entre los conjuntos X y Y, definimos para cada x de X :*

1) La correspondencia unión por

$$(\textstyle\bigcup_{k\in K} \varphi_k)(x) := \bigcup_{k\in K}(\varphi_k(x)).$$

2) La correspondencia intersección por

$$(\textstyle\bigcap_{k\in K} \varphi_k)(x) := \bigcap_{k\in K}(\varphi_k(x)).$$

3)La correspondencia producto $\psi : X \twoheadrightarrow Y^{\mathbb{N}}$ *por*

$$\psi(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

El siguiente ejemplo muestra que, en general, la intersección de correspondencias semicontinuas inferiormente no necesariamente es semicontinua inferiormente.

Ejemplo 1.3.1 *Las correspondencias* $\varphi, \vartheta : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ *definidas por*

$$\varphi(x) = \{x\} \text{ y } \vartheta(x) = \{1 - x\}$$

son continuas (en particular semicontinuas inferiormente).

La correspondencia intersección es

$$\gamma(x) := (\varphi \cap \vartheta)(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2}\right\} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \varnothing & \text{si } x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Probemos que γ *no es semicontinua inferiormente. Sea* U *un conjunto abierto en* Y *tal que*

$$U \cap (\varphi \cap \vartheta)(\tfrac{1}{2}) = U \cap \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \neq \varnothing,$$

entonces

$$(\varphi \cap \vartheta)_i^{-1}(U) = \left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

y como $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ *es un conjunto cerrado, implica que* $\varphi \cap \vartheta$ *no es semicontinua inferiormente.*

En el siguente teorema se presenta un caso particular donde se tiene que la intersección entre correspondencias semicontinuas inferiormente es semicontinua inferiormente.

Teorema 1.3.1 *Sea f una función continua de un espacio topológico X a un espacio métrico Y y $\beta > 0$ fijo. Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia semicontinua inferiormente tal que*

$$\varphi(x) \cap \xi(x) \neq \varnothing \quad \forall x \in X$$

donde $\xi : X \twoheadrightarrow Y$ es la correspondencia definida por

$$\xi(x) := B_\beta(f(x)).$$

Entonces la correspondencia intersección $\varphi \cap \xi$ es semicontinua inferiormente.

Demostración. Sean G un subconjunto abierto en Y y

$$A := (\varphi \cap \xi)_i^{-1}(G).$$

Si A es no vacío y $z \in A$, tenemos que

$$B := \varphi(z) \cap \xi(z) \cap G \neq \varnothing.$$

Además, como $\xi(z) \cap G$ es un conjunto abierto, entonces para cada $y \in B$ existe $\eta > 0$ tal que

$$B_{2\eta}(y) \subset \xi(z) \cap G = B_\beta(f(z)) \cap G, \tag{1.1}$$

lo cual implica que $d(y, f(z)) < \beta - 2\eta$.

Por otra parte, por la continuidad de la función f implica que existe V una vecindad abierta de z tal que

$$d(f(v), f(z)) < \eta \quad \forall v \in V,$$

además, para cada $v \in V$, se tiene que $B_\eta(y) \subset B_\beta(f(z)) \cap G = \xi(v) \cap G$, puesto que si $s \in B_\eta(y)$ entonces

$$\begin{aligned} d(s, f(v)) &\leq d(s,y) + d(y, f(z)) + d(f(z), f(v)) \\ &< \eta + \beta - 2\eta + \eta \\ &= \beta. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\varphi(z) \cap B_\eta(y)$ es no vacío porque al menos está el punto y. Como φ es semicontinua inferiormente existe U una vecindad abierta de z tal que

$$\varphi(u) \cap B_\eta(y) \neq \varnothing \quad \forall u \in U. \tag{1.2}$$

Por (1.1) y (1.2) la vecindad abierta $V \cap U$ de z es tal que

$$B_\eta(y) \subset \xi(x) \cap G \quad \text{ y } \quad \varphi(x) \cap B_\eta(y) \neq \varnothing \quad \forall x \in V \cap U.$$

Por lo tanto, $\varphi(x) \cap \xi(x) \cap G \neq \varnothing$, lo cual implica que la vecindad abierta $V \cap U$ de z es un subconjunto de A y por lo tanto, $(\varphi \cap \xi)_i^{-1}(G)$ es un abierto en X y así la correspondencia $\varphi \cap \xi$ es semicontinua inferiormente en X. ∎

Capítulo 2

Selectores Continuos

2.1. Preliminares

Antes de comenzar con el estudio de selectores continuos de una correspondencia, estudiaremos primero algunos conceptos y resultados básicos que nos ayudarán a demostrar la existencia de tales selectores, entre estos conceptos se encuentra la llamada partición de la unidad, la cual se define a continuación.

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico y $\{G_i : i \in I\}$ una cubierta abierta para X. Una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{G_i : i \in I\}$, es una familia de funciones continuas de X en $[0,1]$ que satisface:*

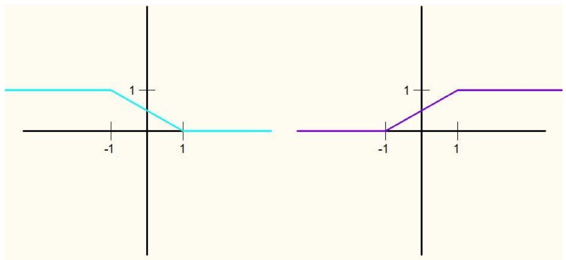
a) Sólo un número finito de funciones de la familia toman valor diferente de cero para todo $x \in X$,

b) $f_i(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus G_i$ y

c) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ para todo x en X.

Ejemplo 2.1.1 *Sea $\{G_1 = (-\infty, 1), G_2 = (-1, \infty)\}$ una cubierta para $\mathbb{R}$. Una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{G_1, G_2\}$ es la familia de funciones $\{f_1, f_2\}$ definidas por,*

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -1/2x + \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad y \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1/2x + \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Estas funciones satisfacen que si $x \in G_1^c = [1, \infty)$, *entonces* $f_1(x) = 0$ *y si* $x \in G_2^c = (-\infty, -1]$ *entonces* $f_2(x) = 0$. *Por último, para cada* x *en* $\mathbb{R}$,

$$f_1(x) + f_2(x) = 1.$$

Como se dice coloquialmente, conforme avanzamos en este trabajo esta teoría va tomando sabor, así pues, el siguiente lema asegura la existencia de una partición de la unidad subordinada a una cubierta abierta, cuando esta cubierta es finita.

Lema 2.1.1 *Sea* X *un espacio normal. Si* $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$ *es una cubierta abierta finita de* X, *entonces existe una partición de la unidad subordinada a la cubierta* $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$.

Demostración. Construiremos una nueva cubierta $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ de conjuntos abiertos para X, tal que satisfaga las siguientes condiciones:

i) $V_i \subset \overline{V_i} \subset G_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$.

ii) $\{V_i : i \leq j\} \bigcup \{G_i : i > j\}$ para cada $j = 1, 2, ..., n$, es una cubierta de X.

Primero definimos el conjunto

$$F_1 = X \setminus \bigcup_{i=2}^{n} G_i,$$

que es un conjunto cerrado y es un subconjunto del abierto G_1. Por normalidad del espacio X (ver Lema 4.0.3), existe un conjunto abierto V_1 tal que

$$F_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset G_1,$$

es decir, el conjunto abierto V_1 satisface la condición i) y además, la familia $\{V_1, G_2, ..., G_n\}$ cubre a X, por lo tanto se satisface la condición ii).

Supongamos que existen conjuntos abiertos $V_1, V_2, ..., V_{k-1}$, con $1 < k-1 < n$ que satisfacen la condición i) y ii). Para definir el conjunto V_k, sea

$$F_k := X \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i \cup \bigcup_{i=k+1}^{n} G_i),$$

el cual es un conjunto cerrado y un subconjunto del abierto G_k. Si $s \in F_k$, entonces

$$s \in X \quad y \quad s \notin (\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i) \cup (\bigcup_{i=k+1}^{n} G_i),$$

es decir, para $i = 1, ..., k-1$, el punto $s \notin V_i$ y para $i = k+1, ..., n$, el punto $s \notin G_i$. Como $X = G_1 \cup \cdots \cup G_n$, se obtiene que $s \in G_k$. Por la normalidad del espacio X, existe un conjunto abierto V_k, tal que

$$F_k \subset V_k \subset \overline{V_k} \subset G_k.$$

Falta probar que $\{V_i : i \leq k\} \bigcup \{G_i : i > k\}$ es una cubierta para X. Si x es un elemento de $X = G_1 \cup \cdots \cup G_n$, entonces x es un elemento de G_i para algún $i = 1, ..., n$. Obsérvese que si para algún $i_0 \in \{k+1, ..., n\}, x \in G_{i_0}$, entonces

$$x \in \{V_i : i \leq k\} \bigcup \{G_i : i > k\}.$$

Si $x \in X \setminus \bigcup_{i=k+1}^{n} G_i$ y usando que $F_k \subset V_k$, obtenemos que

$$x \in (\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i) \cup (X \setminus (\bigcup_{i=k+1}^{n} G_i \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} V_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} V_i \cup V_k,$$

en consecuencia $x \in \{V_i : i \leq k\} \cup \{G_i : i > k\}$.

Inductivamente, hemos construido una cubierta $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$, que satisface las condiciones i) y ii). Como los conjuntos $X \setminus G_i$ y $\overline{V_i}$ son cerrados y ajenos en X, por la normalidad del espacio X y el Lema de Urysohn, (ver Lema 4.0.5), para cada $i \in \{1, ..., n\}$, podemos encontrar una función continua g_i de X al intervalo $[0,1]$ tal que

a) $g_i(x) = 0$ si $x \in X \setminus G_i$

b) $g_i(x) = 1$ si $x \in \overline{V_i}$.

Finalmente, definamos $f_i : X \to \mathbb{R}$ por,

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{(\sum_{k=1}^n g_k(x))}$$

Observemos que para cada $x \in X$ la suma $\sum_{k=1}^n g_k(x)$ es diferente de cero dado que la familia $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ cubre a X y por lo tanto, existe V_j tal que $x \in V_j$ y $g_j(x) = 1$.

Además, se satisface lo siguiente:

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{(\sum_{k=1}^n g_k(x))} = 0 \;\; si \;\; x \in X \setminus G_i.$$

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(x)}{(\sum_{k=1}^n g_k(x))} = 1 \;\; para \;\; cada \;\; x \in X,$$

es decir, $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una partición de la unidad subordinada a $\{G_1, ..., G_n\}$. ■

Definición 2.1.2 *Un **selector o selección** de una correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$, es una función $f : X \to Y$ que satisface para cada x en X,*

$$f(x) \in \varphi(x).$$

Ejemplo 2.1.2 *Sea $\varphi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ definida por:*

$$\varphi(n) = \left\{n, n+1, n^2\right\}.$$

Sean f_1, f_2, f_3 funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n \\ f_2(n) &= n+1 \\ f_3(n) &= n^2. \end{aligned}$$

Claramente, para cada n en $\mathbb{N}$, $f_1(n), f_2(n), f_3(n)$ son elementos de $\varphi(n)$ y por lo tanto f_1, f_2, f_3 son selectores de la correspondencia φ.

Como se ha mencionado antes, uno de nuestros objetivos para este trabajo y de este capítulo es establecer condiciones garantizar la existencia de selectores continuos de una correspondencia, de modo que, como su nombre lo dice, un **selector continuo** es una función que además de ser un selector es una función continua.

Ejemplo 2.1.3 *Sea $\varphi : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ la correspondencia dada por:*

$$\varphi(x) = [-1, 1].$$

La función $f(x) = sen(x), x \in \mathbb{R}$ es un selector de φ,

$$f(x) = sen(x) \in [-1, 1] = \varphi(x).$$

Considerando que f es continua, se tiene que f es un selector continuo de φ.

2.1.1. Primer Teorema de Existencia

A continuación el primer Teorema de existencia de selectores continuos para una familia de correspondencias muy particular.

Teorema 2.1.1 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y φ una correspondencia de X a un espacio normado Y con valores convexos. Si para cada $y \in Y$, el conjunto*

$$\varphi_i^{-1}(\{y\}) := \{x \in X : y \in \varphi(x)\},$$

es un abierto en X, entonces φ tiene un selector continuo.

Demostración. Notemos que la colección de conjuntos $\left\{\varphi_i^{-1}(\{y\}) : y \in Y\right\}$ es una cubierta abierta para X. Entonces por la compacidad de X existen $y_1, y_2, ..., y_n$ puntos en Y tales que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{y_j\}).$$

Sea $\mathscr{A} := \left\{\varphi_i^{-1}(\{y_1\}), \varphi_i^{-1}(\{y_2\}), ..., \varphi_i^{-1}(\{y_n\})\right\}$. Como X es un espacio Hausdorff compacto, por el Lema 4.0.4, X es normal y por el Lema 2.1.1, existe una partición de la unidad $\{f_j : j \in \{1, 2, ..., n\}\}$ subordinada a la cubierta $\mathscr{A}$.

Definimos $\sigma : X \to Y$ por

$$\sigma(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j.$$

Dado que σ es suma finita de funciones continuas de X a Y obtenemos que σ es una función continua en X. Para los índices $j \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$x \in \varphi_i^{-1}(\{y_j\}),$$

se tiene que $y_j \in \varphi(x)$. Obtenemos que $\sigma(x)$ es una combinación convexa de los puntos y_j los cuales son elementos del conjunto convexo $\varphi(x)$, por lo tanto, $\sigma(x) \in \varphi(x)$, en consecuencia σ es un selector continuo de φ. ■

Ejemplo 2.1.4 *Consideremos la correspondencia $\varphi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ dada por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \\ \\ [0,1] & \text{si } x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}). \end{cases}$$

El Teorema 2.1.1 asegura que la correspondencia φ posee un selector continuo, puesto que para cada $y \in [0,1]$,

$$\varphi_i^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & \text{si } y \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \\ \\ [0,1] & \text{si } y \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \end{cases}$$

es abierto en $[0,1]$.

Es importante hacer la observación de que las condiciones del Teorema 2.1.1 son muy fuertes, lo que lo hace un resultado muy débil, por esta razón, es necesario introducir nuevos conceptos que nos permitan tener resultados mucho más generales.

Definición 2.1.3 *Una cubierta de un espacio X es localmente finita, si para cada punto x en X existe una vecindad de x que se intersecta sólo con una cantidad finita de los miembros de la cubierta.*

Definición 2.1.4 *Si C_1, C_2 son cubiertas para un espacio topológico, C_1 es llamada un refinamiento de C_2, si cada elemento de C_1 es un subconjunto de algún elemento de C_2.*

Ejemplo 2.1.5 *Las cubiertas $V = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ y $G = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$ definidas en la demostración del Lema 2.1.1, satisfacen que V es un refinamiento de G.*

Definición 2.1.5 *Un espacio topológico se llama paracompacto, si es Hausdorff y toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Proposición 2.1.1 *Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces X es un espacio paracompacto.*

Demostración. Sea $A = \{G_i : i \in I\}$ una cubierta abierta para el espacio X. Por compacidad existe una subcubierta abierta finita de A, digamos

$$B = \{G_1, G_2, ..., G_n\}.$$

que cubre al espacio X. Como los elementos de la cubierta B son elementos de A, se sigue que B es un refinamiento abierto localmente finito de A, por lo tanto el espacio X es un espacio paracompacto. ■

Proposición 2.1.2 *Si X es un espacio métrico, entonces X es un espacio paracompacto.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en el Teorema 3.22 en [1].
■

Teorema 2.1.2 *Si $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una cubierta localmente finita de un espacio topológico X. Entonces*

a) $\left\{\overline{A_\alpha} : \alpha \in I\right\}$ es también una cubierta localmente finita.
b) Para cada $J \subset I$, el conjunto $\bigcup\left\{\overline{A_\alpha} : \alpha \in J\right\}$ es cerrado en X.

Demostración. a) Si x es un elemento de X, entonces existe una vecindad abierta U_x de x tal que para toda $\alpha \in I$, excepto en una cantidad finita de índices α,

$$U_x \cap A_\alpha = \varnothing,$$

lo cual implica que para toda $\alpha \in I$, excepto en una cantidad finita de índices α,

$$A_\alpha \subset U_x^c.$$

Como U_x^c es un conjunto cerrado, obtenemos que para toda α en I, excepto en una cantidad finita de índices α,

$$\overline{A_\alpha} \subset U_x^c,$$

y por lo tanto $\left\{\overline{A_\alpha} : \alpha \in I\right\}$ es también una cubierta localmente finita de X.

b) Sea $D := \bigcup_{\beta \in J} \overline{A_\beta}$ con $J \subset I$, entonces

$$D^c = \bigcap_{\beta \in J} \overline{A}_\beta^c.$$

Si $D = X$ terminamos la demostración. Si D^c es diferente del vacío, para x en D^c se tiene, por el inciso a), que existe U_x una vecindad abierta de x tal que

$$U_x \cap \overline{A_{\beta_i}} \neq \varnothing,$$

lo cual es válido sólo para un número finito de índices $\beta_i \in I$.

Si definimos

$$L := \left\{\beta_i \in J : U_x \cap \overline{A_{\beta_i}} \neq \varnothing\right\},$$

entonces

$$U_x \setminus \bigcup_{\beta \in L} \overline{A}_\beta,$$

es una vecindad abierta de x totalmente contenida en D^c, lo que implica que el conjunto D^c es abierto y en consecuencia el conjunto D es cerrado. ■

Lema 2.1.2 *Sea X un espacio paracompacto. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe una familia localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abiertos que recubre a X y tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos definida por;

$$\mathscr{A} := \{A \subset X : A \text{ es abierto y } \overline{A} \subset U_\alpha \text{ para algún } \alpha\}.$$

Veamos que $\mathscr{A}$ es una cubierta para X. Sea x un elemento de X, entonces existe $\alpha \in J$ tal que $x \in U_\alpha$. Como X es un espacio Hausdorff compacto entonces por la Proposición 4.0.2 el espacio X es regular, por lo tanto para el conjunto cerrado U_α^c que no contiene a x, existen conjuntos abiertos ajenos A y B tales que

$$x \in A \text{ y } U_\alpha^c \subset B.$$

De modo que

$$A \subset B^c \text{ y } \overline{A} \subset B^c \subset U_\alpha,$$

por lo tanto A es un elemento de $\mathscr{A}$ y como x es arbitrario, se sigue que $\mathscr{A}$ es una cubierta para X.

Ahora, como X es un espacio paracompacto entonces $\mathscr{A}$ posee un refinamiento abierto localmente finito $\mathscr{B} = \left\{B_\beta\right\}_{\beta \in K}$ y como $\mathscr{B}$ refina a $\mathscr{A}$, podemos definir una función $f : K \to J$ eligiendo para cada β en K un elemento α en J tal que

$$\overline{B_\beta} \subset U_\alpha, \quad \text{es decir,} \quad f(\beta) = \alpha.$$

Para cada α en J definimos V_α

$$V_\alpha = \bigcup \left\{B_\beta : f(\beta) = \alpha\right\},$$

(si no existe β en K tal que $f(\beta) = \alpha$, entonces V_α es vacío). Observemos que por el Teorema 2.1.2, b),

$$\begin{aligned} \overline{V_\alpha} &= \overline{\cup \left\{B_\beta : f(\beta) = \alpha\right\}} \\ &\subset \cup \left\{\overline{B_\beta} : f(\beta) = \alpha\right\} \\ &\subset U_\alpha. \end{aligned}$$

Finalmente, comprobemos que la colección de conjuntos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es localmente finita. Sea x en X y W una vecindad de x tal que se intersecta sólo con una cantidad finita de elementos en $\mathscr{B}$, digamos $B_{\beta_1}, B_{\beta_2}, ..., B_{\beta_n}$. Entonces V_α puede intersectar a W sólo si,

$$\alpha \in \{f(\beta_1), f(\beta_2), ..., f(\beta_n)\},$$

por lo tanto, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia localmente finita de conjuntos abiertos que recubre a X y es tal que para cada α en J, $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. ■

Lema 2.1.3 *Si $\{G_\alpha : \alpha \in J\}$ es una cubierta abierta localmente finita para un espacio paracompacto X, entonces existe una partición de la unidad subordinada a la cubierta G_α.*

Demostración. Aplicando dos veces el Lema 2.1.2 se pueden encontrar familias localmente finitas $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de conjuntos abiertos que cubren a X y tales que para cada $\alpha \in J$,

$$\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \quad \text{y} \quad \overline{V_\alpha} \subset G_\alpha.$$

Dado que X es paracompacto, obtenemos que es normal y por el Lema de Urysohn, (ver Lema 4.0.5), podemos encontrar para cada α en J, una función continua $g_\alpha : X \to [0,1]$ tal que

$$g_\alpha(\overline{W_\alpha}) = \{1\} \quad \text{y} \quad g_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}.$$

Definimos para cada α en J y para cada x en X,

$$f_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum_{j\in J} g_j(x)}.$$

Para ver que las funciones f_α están bien definidas, sea $x \in X$. Dado que los conjuntos $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ cubren a X, existe un V_{α_0} que contiene a x y tal que se intersecta sólo con un número finito de conjuntos W_α, significa que para un número finito de índices α, $g_\alpha(x) \neq 0$, lo cual implica que $\sum_{\alpha\in J} g_\alpha(x)$ es diferente de cero y es finito. Observese además, que por lo anterior f_α es continua en V_{α_0} y por lo tanto continua sobre X. Además, se satisface lo siguiente:

$$f_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum_{j\in J} g_j(x)} = 0 \;\; si \;\; x \in X \setminus G_\alpha \subset X \setminus V_\alpha$$

y

$$\sum_{\alpha\in J} f_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in J} \frac{g_\alpha(x)}{\sum_{j\in J} g_j(x)} = 1 \quad \forall x \in X,$$

por lo tanto, $\{f_\alpha\}\alpha \in J$ es una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$. ■

Teorema 2.1.3 *Sea X un espacio paracompacto y Y un espacio normado. Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia semicontinua inferiormente con valores convexos, entonces para cada $\beta > 0$, existe un selector continuo $f_\beta : X \to Y$ de la correspondencia $\psi : X \twoheadrightarrow Y$ definida por*

$$\psi(x) = N(\varphi(x), \beta) := \{y \in Y : \exists s \in \varphi(x) \ \ tal \ \ que \ \ d(y, s) < \beta\}.$$

Demostración. Para β en $\mathbb{R}^+$ fijo, definamos para cada y en Y el conjunto

$$U_y := \varphi_i^{-1}(B_\beta(y)).$$

Como la correspondencia φ es semicontinua inferiormente, por el Teorema 1.2.2, se sigue que U_y es abierto en X. Por lo anterior, la familia $\{U_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta para el espacio paracompacto X, entonces existe un refinamiento abierto localmente finito $\{G_i : i \in I\}$.

Por el Lema 2.1.3 existe $\{\pi_i : i \in I\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{G_i : i \in I\}$ y como la familia $\{G_i : i \in I\}$ es un refinamiento de la familia $\{U_y : y \in Y\}$, para cada i en I existe $y_{(i)}$ en Y tal que

$$G_i \subset U_{y_{(i)}}.$$

Definamos la función $f_\beta : X \to Y$ como:

$$f_\beta(x) := \textstyle\sum_{i \in I} \pi_i(x) y_{(i)}.$$

Notemos que para cada $x \in X$ existe una vecindad V_x de x, el cual se intersecta sólo con un número finito de elementos de la cubierta $\{G_i : i \in I\}$, lo cual implica que a lo más, para un número finito de índices $\pi_i(x) \neq 0$, por lo tanto, f_β está bien definida. Además, dado que las funciones π_i son continuas, se sigue que f_β es una función continua en V_x y por lo tanto continua sobre X.

Probemos ahora que para cada $x \in X, f_\beta(x) \in \psi(x)$. Como $f_\beta(x)$ es una combinación convexa de puntos $y_{(i)}$, entonces para cada $j \in I$ tal que $x \in G_j \subset U_{y_{(j)}}$ se sigue que $x \in \varphi_i^{-1}(B_\beta(y_{(j)}))$ y que

$$\varphi(x) \cap B_\beta(y_{(j)}) \neq \varnothing,$$

por lo anterior $y_{(j)}$ es un elemento de la nube $N(\varphi(x), \beta)$, el cual es un conjunto convexo y dado que $\varphi(x)$ es convexo, $f_\beta(x) \in \psi(x)$. ■

2.2. Teorema de Michael

Después de una larga trayectoria de trabajo tenemos las herramientas necesarias para demostrar la existencia de selectores continuos para una corespondencia, lo cual se afirma en el **Teorema de Michael** (la demostración original de este teorema se encuentra en [6]).

Teorema 2.2.1 *Si X es un espacio paracompacto, Y un espacio Banach y $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia con valores cerrados, convexos y además semicontinua inferiormente, entonces φ tiene un selector continuo.*

Demostración. Iniciaremos construyendo una sucesión de funciones continuas $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $f_i(x)$ es un elemento de la bola $B_{2^{-i+2}}(f_{i-1}(x))$, para cada $i = 2, 3, ...$

b) $f_i(x)$ es un elemento de la nube $N(\varphi(x), 2^{-i})$, para cada i en $\mathbb{N}$.

Por el Teorema 2.1.3, para $\beta = 2^{-1}$ existe una función continua de X a Y a la que llamaremos f_1, tal que

$$f_1(x) \in N(\varphi(x), 2^{-1}),$$

es decir, f_1 satisface la condición b).

Supongamos que tenemos $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones continuas de X a Y que satisfacen la condición b). Para determinar la función f_{n+1}, definamos para cada x en X la correspondencia;

$$\psi(x) := \varphi(x) \cap (B_{2^{-n}}(f_n(x))).$$

Por la condición b), tenemos que existe $y \in \varphi(x)$ tal que

$$\|f_n(x) - y\| < 2^{-n}.$$

es decir, $y \in B_{2^{-n}}(f_n(x))$, significa que para cada x en X, la correspondencia ψ toma valores no vacíos. Además, la correspondencia ψ toma valores convexos dado que la correspondencia φ toma valores convexos y la bola $B_{2^{-n}}(f_n(x))$ es también convexa. Luego, por el Teorema 1.3.1, ψ es una correspondencia semicontinua inferiormente. Tenemos entonces que $\psi(x)$ es una correspondencia que satisface las condiciones del Teorema 2.1.3, así que para $\beta = 2^{-(n+1)}$ existe una función continua $f_{n+1} : X \to Y$ tal que

$$f_{n+1}(x) \in N(\psi(x), 2^{-(n+1)}),$$

y como $\psi(x) \subset \varphi(x)$, se sigue que

$$f_{n+1}(x) \in N(\varphi(x), 2^{-(n+1)}),$$

por lo tanto, la función f_{n+1} satisface la condición b).

Por otra parte, puesto que $\psi(x) \subset B_{2^{-n}}(f_n(x))$, obtenemos que

$$f_{n+1}(x) \in B_{2^{-n}+2^{-(n+1)}}(f_n(x)) \subset B_{2^{-n+1}}(f_n(x)),$$

con lo que para $i = n+1$ se tiene la condición a). La construcción anterior nos asegura la existencia de una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X a Y, que satisface las condiciones a) y b) y por la condición a), tenemos que para toda n en $\mathbb{N}$ y toda x en X,

$$\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| < 2^{-n+1}.$$

Notemos que si $m > n$ entonces

$$\begin{aligned}\|f_m(x) - f_n(x)\| &\leq \|f_m(x) - f_{m-1}(x)\| + ... + \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \\ &< 2^{-m+2} + ... + 2^{-n+1} \\ &= 2^{-n+1}\left[1 + ... + 2^{-m+n+1}\right] \\ &< 2^{-n+1}(2) = 2^{-n+2}.\end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$ y $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que $2^{-n_\epsilon+2} < \epsilon$, por lo anterior se tiene que para $m > n > n_\epsilon$

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < 2^{-n+2} < 2^{-n_\epsilon+1} < \epsilon \quad \forall x \in X,$$

entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy uniforme. Como el espacio Y es completo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $f : X \to Y$ y dado que cada función es continua, por el Teorema 4.0.6 la función f es también continua. Por la condición b),

$$\hat{d}(f_n(x), \varphi(x)) < 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $\hat{d}(f_n(x), \varphi(x)) = inf\left\{\|f_n(x) - y\| : y \in \varphi(x)\right\}$, por la Proposición 4.0.5, la función $\hat{d}$ es continua, por lo tanto aplicando límite cuando n tiende a infinito, obtenemos

$$\hat{d}(f(x), \varphi(x)) = 0.$$

Por la Proposición 4.0.4, el punto $f(x)$ está en la cerradura de $\varphi(x)$ y como φ toma valores cerrados, $f(x) \in \varphi(x)$. Concluimos que la función f es un selector continuo de la correspondencia φ. ∎

Como corolarios al Teorema de Michael a continuación se presentan algunos resultados.

Definición 2.2.1 *Una función $g : Y \subset \mathbb{R}^r \to Z \subset \mathbb{R}^s$, con Y, Z conjuntos convexos, se dice ser convexa si:*

$$g((1-\lambda)y + \lambda y') \leq (1-\lambda)g(y) + \lambda g(y'),$$

para cada $y, y' \in Y$ y $\lambda \in [0,1]$, (la desigualdad es componente a componente).

Definición 2.2.2 *Sea $\varphi : \mathbb{R}^p \twoheadrightarrow \mathbb{R}^q$ una correspondencia con valores convexos no vacíos y sea $\mathbb{K}$ la gráfica de φ, es decir,*

$$\mathbb{K} := \{(x, y) : y \in \varphi(x), x \in \mathbb{R}^p\}.$$

Una función $g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ se dice ser inf-compacta en $\mathbb{K}$ si para toda $x \in \mathbb{R}^p$ y todo $r \in \mathbb{R}$, el conjunto:

$$\{y \in \varphi(x) : g(x, y) \leq r\},$$

es compacto.

Ejemplo 2.2.1 *Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi(x) = [0, \infty),$$

y $g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g((x, y)) = x + y.$$

Para $r \in \mathbb{R}$ fijo y $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\{y \in [0, \infty) : x + y \leq r\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x > r \\ [0, r - x] & \text{si } x \leq r. \end{cases}$$

es un conjunto compacto, por lo tanto la función g es inf-compacta en $\mathbb{K}$.

Corolario 2.2.1 *Si $\varphi : \mathbb{R}^p \twoheadrightarrow \mathbb{R}^q$ es una correspondencia con valores no vacíos, cerrados, convexos y semicontinua inferiormente en $\mathbb{R}^p$, entonces*

1) Existe f un selector continuo de φ.

2) Sea $g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ una función inf-compacta en $\mathbb{K}$ y convexa. Si

$$g^*(x) := \inf_{y \in \varphi(x)} g(x,y),$$

entonces para cada $x \in \mathbb{R}^p$, la correspondencia

$$\varphi^*(x) := \{y \in \varphi(x) : g(x,y) = g^*(x)\},$$

toma valores compactos y convexos.

3) Si φ^* es semicontinua inferiormente, entonces existe un selector continuo f^* tal que

$$g^*(x) = g(x, f^*(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Demostración. 1) Como $\varphi : \mathbb{R}^p \twoheadrightarrow \mathbb{R}^q$, es una correspondencia con valores cerrados, convexos, semicontinua inferiormente y como $\mathbb{R}^p$ es un espacio paracompacto (ver Proposición 2.1.2), entonces por el Teorema de Michael, existe f un selector continuo de φ.

2) Probemos que para cada $x \in \mathbb{R}^p$, el conjunto $\varphi^*(x)$ es compacto y convexo. Notemos que para $r = g^*(x)$ tenemos:

$$\varphi^*(x) \subset B := \{y \in \varphi(x) : g(x,y) \leq r\},$$

y dado que g es inf-compacta el conjunto B es compacto, entonces basta probar que $\varphi^*(x)$ es un conjunto cerrado. Sea y_0 un punto límite de $\varphi^*(x)$, entonces existe una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \varphi^*(x)$ que converge al punto y_0. Nótese que por lo anterior y dado que φ toma valores cerrados, $y_0 \in \varphi(x) \cap B$. Lo cual implica que $g(x, y_0) = g^*(x)$. Por lo tanto, $\varphi^*(x)$ es compacto.

Probemos ahora la convexidad del conjunto $\varphi^*(x)$. Sean y, y' en $\varphi^*(x)$,

$$\begin{aligned} g^*(x) &= \lambda g^*(x) + (1-\lambda)g^*(x) \\ &= \lambda g(x,y) + (1-\lambda)g(x,y') \\ &\geq g(x, \lambda y + (1-\lambda)y') \\ &\geq \inf_{y^* \in \varphi(x)} g(x, y^*) \\ &= g^*(x), \end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi^*(x)$ es un conjunto convexo.

3) Como φ^* es semicontinua inferiormente, por el Teorema de Michael, existe un selector continuo f^* de φ^*, que satisface para cada $x \in \mathbb{R}^p$,

$$g(x, f^*(x)) = g^*(x).$$

■

Capítulo 3

Selectores Medibles

3.1. Medibilidad de correspondencias.

En este capítulo estudiaremos algunas condiciones para que una correspondencia posea un selector medible. Para iniciar con el estudio de selectores medibles recordemos que una función $f : (X, \sum_X) \to (Y, \sum_Y)$ entre espacios medibles es medible, si para cada $A \in \sum_Y$, el conjunto $f^{-1}(A)$ es un elemento de $\sum_X$. El concepto de medibilidad también se tiene para correspondencias y se define como sigue:

Definición 3.1.1 *Sea $(X, \sum)$ un espacio medible y Y un espacio topológico. Se dice que una correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es:*

a) ***Débilmente medible****, si $\varphi_i^{-1}(G)$ está en la $\sigma-$álgebra $\sum$, para cada abierto $G \subset Y$.*

b) ***Medible****, si $\varphi_i^{-1}(F)$ está en la $\sigma-$álgebra $\sum$, para cada cerrado $F \subset Y$.*

De manera análoga podemos definir los conceptos de la Definición 3.1.1 como lo dice la siguiente proposición, cuya demostración se sigue directamente de la Propiedad 1.1.3.

Proposición 3.1.1 *Sean* $(X, \sum)$ *un espacio medible,* Y *un espacio topológico y* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$.

a) φ *es* ***Débilmente medible*** *si, y sólo si,* $\varphi_s^{-1}(F) \in \sum$, *para cada cerrado* $F \subset Y$.

b) φ *es* ***Medible*** *si, y sólo si,* $\varphi_s^{-1}(G) \in \sum$, *para cada abierto* $G \subset Y$.

Ejemplo 3.1.1 *Sean* $(X, \sum)$ *con* $\sum = \{\varnothing, X\}$ *un espacio medible,* (Y, τ) *con* $\tau = \{\varnothing, X\}$ *un espacio topológico y* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$. *Observemos que los conjuntos*

$$\varphi_s^{-1}(\varnothing) = \varnothing \;\; y \;\; \varphi_s^{-1}(Y) = X,$$

son elementos de la σ- *álgebra* $\sum$. *En conclusión, cualquier correspondencia definida entre estos espacios es siempre una correspondencia medible y débilmente medible.*

Ejemplo 3.1.2 *Sean* $(X, \sum)$ *un espacio medible,* Y *un espacio topológico y* $B \subset Y$ *fijo. La correspondencia* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ *definida por* $\varphi(x) = B$ *es medible y débilmente medible.*

Sea $A \subset Y$ *arbitrario,*

a) si $B \subset A$, *entonces*

$$\varphi_s^{-1}(A) = X \in \sum,$$

b) si $B \cap A^c \neq \varnothing$, *entonces*

$$\varphi_s^{-1}(A) = \varnothing \in \sum.$$

Por lo tanto, si A *es un conjunto abierto o cerrado, es claro que* $\varphi_s^{-1}(A)$ *es un elemento de la* $\sigma-$*álgebra* $\sum$.

Observación 3.1.1 *Sea* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ *una correspondencia de un espacio medible* X *a un espacio topológico* Y.

Si φ es semicontinua inferiormente, entonces φ es una correspondencia débilmente medible.

Si φ es correspondencia semicontinua superiormente, entonces φ es una correspondencia medible.

La Observación 3.1.1 se siguen del Teorema 1.2.1 y el Teorema 1.2.2.

Una relación entre la medibidad y medibilidad débil de correspodencias está dada en el siguiente teorema. Mas concretamente, en este teorema se establecen condiciones bajo las cuales estas propiedades son equivalentes.

Teorema 3.1.1 *Para una correspondencia $\varphi : (X, \sum) \twoheadrightarrow (Y, d)$ de un espacio medible a un espacio métrico, tenemos lo siguiente:*

1) Si φ es medible, entonces es débilmente medible.

2) Si φ es débilmente medible y toma valores compactos, entonces es medible.

Demostración. 1) Sea G un abierto en Y. Por la Proposición 4.0.6, G es un conjunto F_σ y por lo tanto, por la Lema 4.0.6, podemos representar a G como:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

donde para cada n, el conjunto F_n es cerrado en Y. Demostremos que $\varphi_i^{-1}(G) \in \sum$;

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1}(G) &= \varphi_i^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_i^{-1}(F_n). \end{aligned}$$

Usando que φ es medible, obtenemos que para cada n, $\varphi_i^{-1}(F_n) \in \sum$, por lo tanto

$$\varphi_i^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_i^{-1}(F_n) \in \sum,$$

es decir, φ es débilmente medible.

2) Sea F un subconjunto cerrado en Y. Si F es vacío, claramente

$$\varphi_i^{-1}(F) = \varnothing \in \sum.$$

Supongamos que F es no vacío y definamos para cada n en $\mathbb{N}$;

$$G_n := \left\{ y \in Y : \hat{d}(y, F) > \tfrac{1}{n} \right\},$$

donde $\hat{d}(y, F) = inf \{\|y - z\| : z \in F\}$, es la métrica, que asigna la distancia entre un punto y un conjunto. Claramente $G_n \subset G_{n+1}$, además, si y es un punto límite de G_n, entonces existe una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset G_n$ que converge a y y satisface que

$$\hat{d}(y_k, F) > \tfrac{1}{n} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por la Proposición 4.0.5 la métrica $\hat{d}(\cdot, F)$ es continua en X, por lo tanto en el límite cuando k tiende a infinito obtenemos:

$$\hat{d}(y, F) \geq \tfrac{1}{n} > \tfrac{1}{n+1},$$

lo cual implica que y es un elemento de G_{n+1}. Entonces hemos probado que

$$\overline{G_n} \subset G_{n+1},$$

por lo tanto,

$$F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}. \tag{3.1}$$

Probaremos ahora que

$$\varphi_s^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_s^{-1}(\overline{G_n}). \tag{3.2}$$

Sea p un elemento de $\varphi_s^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)$, entonces

$$\varphi(p) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Como φ toma valores compactos, existe una subcubierta finita $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$ tal que

$$\varphi(p) \subset \bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j},$$

y como para cada n, $G_n \subset G_{n+1}$, tomando $N := max\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ se obtiene;

$$\varphi(p) \subset \bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j} \subset G_N \subset \overline{G_N},$$

entonces $p \in \varphi_s^{-1}(\overline{G_N})$ y por lo tanto

$$p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_s^{-1}(\overline{G_n}),$$

lo que implica

$$\varphi_s^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_s^{-1}(\overline{G_n}).$$

Para la otra contención tomemos $p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_s^{-1}(\overline{G_n})$, entonces existe N en $\mathbb{N}$ tal que $p \in \varphi_s^{-1}(\overline{G_N})$, es decir,

$$\varphi(p) \subset \overline{G_N}.$$

Por (3.1)

$$\varphi(p) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

lo cual significa que $p \in \varphi_s^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)$. Por la Propiedad 1.1.3 y usando (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{-1}(F) &= \left[\varphi_s^{-1}(F^c)\right]^c \\
&= \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_s^{-1}(\overline{G_n})\right]^c \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_s^{-1}(\overline{G_n})\right]^c \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_i^{-1}(\overline{G_n}^c)
\end{aligned}$$

Por hipótesis φ es débilmente medible, esto es,

$$\varphi_i^{-1}(\overline{G_n}^c) \in \sum \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto,

$$\varphi_i^{-1}(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_i^{-1}(\overline{G_n}^c) \in \sum,$$

es decir, φ es medible. ■

Lema 3.1.1 *Una correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ de un espacio medible a un espacio topológico es débilmente medible si, y sólo si, la correspondencia cerradura $\overline{\varphi}$ es débilmente medible.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.1 obtenemos que para G un subconjunto abierto en Y,

$$\varphi_i^{-1}(G) = (\overline{\varphi})_i^{-1}(G).$$

Por lo tanto,

$$\varphi_i^{-1}(G) \in \sum \text{ si, y sólo si, } (\overline{\varphi})_i^{-1}(G) \in \sum.$$

■

Lema 3.1.2 *Para una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de correspondencias de un espacio medible $(X, \sum)$ a un espacio topológico (Y, τ), tenemos lo siguiente:*

1) La correspondencia unión es:

a) Débilmente medible, si cada φ_n es débilmente medible.

b) Medible, si cada φ_n es medible.

2) Si Y es un espacio métrico separable y cada φ_n es débilmente medible, entonces la correspondencia producto, es débilmente medible.

3) Si Y es un espacio métrico separable, cada φ_n es débilmente medible y toma valores compactos, entonces la correspondencia intersección $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es medible y por tanto débilmente medible.

Demostración. La definición de estas correspondencias, se encuentran en la Sección 1.3, "Operaciones con correspondencias", en el Capítulo 1.

1) Las demostraciónes de a) y b) se siguen directamente de la Propiedad 1.1.2.

2) Como Y es un espacio métrico separable, tenemos que $Y^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico separable (la demostración de esta afirmación se encuentra en la Proposición 7.4. en [2]). Sea G un abierto en $Y^{\mathbb{N}}$, entonces el conjunto G lo podemos escribir como:

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k,$$

donde para cada $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos U_k son elementos de la topología producto en $Y^{\mathbb{N}}$ de la forma:

$$U_k = \prod_{n=1}^{\infty} V_{k,n},$$

con $V_{k,n}$ abierto en Y y $V_{k,n} = Y$ para todos excepto un número finito de índices n. Por lo anterior, la correspondencia producto ψ satisface que

$$\begin{aligned}
\psi_i^{-1}(G) &= \psi_i^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \psi_i^{-1}(U_k) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cap U_k \neq \varnothing \right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cap \prod_{n=1}^{\infty} V_{k,n} \neq \varnothing \right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \varphi_n(x) \cap V_{k,n} \neq \varnothing \right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} (\varphi_n)_i^{-1}(V_{k,n}).
\end{aligned}$$

Dado que φ_n es una correspondencia débilmente medible el conjunto $(\varphi_n)_i^{-1}(V_{k,n}) \in \sum$, por lo tanto, obtenemos que $\psi_i^{-1}(G) \in \sum$. Así, la correspondencia producto ψ es débilmente medible.

3) De la parte 2), obtenemos que la correspondencia producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n : X \twoheadrightarrow Y^{\mathbb{N}}$$

es débilmente medible y como para cada n, la correspondencia φ_n toma valores compactos, entonces por el Teorema de Tychonov (cuya demostración se encuentra en Teorema 14, Capítulo 9, [8]), implica que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n,$$

también toma valores compactos y por el Teorema 3.1.1, 2), la correspondencia $\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ es medible.

Ahora observemos que para cada subconjunto cerrado F de $Y^{\mathbb{N}}$ y para el conjunto

$$\mathscr{D} := \left\{ (y)_{n=1}^{\infty} \in Y^{\mathbb{N}} : y \in Y \right\},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1}(F) &= \left\{ x \in X : \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cap F \neq \varnothing \right\} \\ &= \left\{ x \in X : \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cap F^{\mathbb{N}} \cap \mathscr{D} \neq \varnothing \right\} \\ &= (\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n)_i^{-1}(F^{\mathbb{N}} \cap \mathscr{D}). \end{aligned}$$

Como el conjunto $F^{\mathbb{N}} \cap \mathscr{D}$ es cerrado en $Y^{\mathbb{N}}$, por la medibilidad de la correspondencia $\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ obtenemos que

$$\varphi_i^{-1}(F) \in \sum,$$

por lo tanto la correspondencia intersección φ es medible. ■

3.2. Teorema de selección de Kuratowski-Ryll-Nardzewski

En esta sección demostramos un resultado que permite asegurar bajo condiciones adecuadas la existencia de selectores medibles de una correspondencia, este resultado es conocido comunmente como el **Teorema de selección de Kuratowski-Ryll-Nardzewski.** Pero primero la definición de selector medible.

Definición 3.2.1 *Un* ***selector medible*** *de una correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ con valores no vacíos, entre espacios medibles, es una función medible $f : X \to Y$ que satisface para cada x en X,*

$$f(x) \in \varphi(x).$$

Ejemplo 3.2.1 *Sea $\varphi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ la correspondencia dada por $\varphi(x) = [0,x]$, veamos que la función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = \frac{x}{2}$, es un selector medible de φ. Probemos que f es medible, sean $r \in [0,1]$ y*

$$F := \{x \in [0,1] : f(x) < r\} = \{x \in [0,1] : x < 2r\}.$$

a) Si $r = 0$, se sigue que

$$F = \varnothing \in \textstyle\sum_{\mathbb{R}}.$$

b) Si $r \in (0,1]$ implica que

$$F = [0, 2r) \in \textstyle\sum_{\mathbb{R}}.$$

Por lo tanto, f es medible (f también es continua) y claramente

$$\tfrac{x}{2} \in [0, x].$$

Teorema 3.2.1 ***(de selección de Kuratowski-Ryll-Nardzewski.)***
Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una correspondencia débilmente medible con valores cerrados y no

vacíos, de un espacio medible a un espacio métrico separable y completo (polaco), entonces φ admite un selector medible.

Demostración. Sea $D = \{y_1, y_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable de Y y sea h la métrica en Y, definamos $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$, por

$$d(x,y) = \gamma \cdot \tfrac{h(x,y)}{1+h(x,y)}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

La función d es también una métrica para Y que satisface que $diamY < 1$, además, esta métrica es equivalente a la métrica h, por lo tanto, sin perdida de generalidad podemos utilizar a d como la métrica para el espacio Y.

Ahora construiremos una sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ de funciones medibles de X a Y con valores en el conjunto denso D que satisfaga que para cada $x \in X$ y $n \geq 0$;

a) $\hat{d}(f_n(x), \varphi(x)) < \frac{1}{2^n}$,
b) $d(f_n(x), f_{n+1}(x)) < \frac{1}{2^n}$.

Definimos $f_0 : X \to Y$ por $f_0(x) = y_1$. Como el $diamY < 1$ obtenemos que

$$\hat{d}(y_1, \varphi(x)) < 1,$$

así, se satisface la condición a), además como f_0 es una función constante, entonces es medible.

El paso inductivo es suponer que existen $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ funciones medibles de X a Y que satisfacen la condición a), esto es; para cada $x \in X$ existe $y \in \varphi(x)$ tal que

$$d(y, f_n(x)) < \frac{1}{2^n}.$$

Como D es un conjunto denso y $\delta := \frac{1}{2^n} - d(y, f_n(x)) > 0$, se tiene que

$$B_{\frac{\delta}{2}}(y) \cap D \neq \varnothing,$$

por lo que existe $y_k \in B_{\frac{\delta}{2}}(y) \cap D$ tal que $d(y_k, y) < \frac{\delta}{2}$, en consecuencia

$$\begin{aligned} d(y_k, f_n(x)) &\leq d(y_k, y) + d(y, f_n(x)) \\ &< \frac{\delta}{2} + d(y, f_n(x)) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{d(y, f_n(x))}{2} + d(y, f_n(x)) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{d(y, f_n(x))}{2} \\ &= \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

es decir,

$$f_n(x) \in B_{\frac{1}{2^n}}(y_k). \tag{3.3}$$

Por otra parte

$$\hat{d}(y_k, \varphi(x)) \leq d(y_k, y) < \tfrac{\delta}{2} \leq \tfrac{1}{2^{n+1}}$$

lo cual implica que

$$\varphi(x) \cap B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(y_k) \neq \varnothing. \tag{3.4}$$

Entonces por (3.3) y (3.4) obtenemos que

$$x \in A_k := \varphi_i^{-1}(B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(y_k)) \bigcap f_n^{-1}(B_{\frac{1}{2^n}}(y_k)).$$

Sea $k_n(x)$ el índice más pequeño tal que $x \in A_k$ y definimos la función $f_{n+1} : X \to Y$ por

$$f_{n+1}(x) := y_{k_n(x)}.$$

Por construcción tenemos que

$$\hat{d}(f_{n+1}(x), \varphi(x)) < \tfrac{1}{2^{n+1}} \quad \text{y} \quad d(f_{n+1}(x), f_n(x)) < \tfrac{1}{2^n}.$$

Probemos que f_{n+1} es una función medible. Como φ es débilmente medible y f_n es medible, entonces $A_k \in \sum_X$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Así, para B un conjunto de Borel en Y,

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{-1}(B) &= \left\{x \in X : y_{k_n(x)} \in B\right\} \\ &= \bigcup_{y_k \in B} \{x \in X : k_n(x) = k\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [A_k \smallsetminus \bigcup_{m=1}^{k-1} A_m] \in \sum, \end{aligned}$$

por lo tanto, f_{n+1} es una función medible. Esta construcción nos asegura la existencia de la sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con valores en el denso D y que satisfacen las condiciones a) y b).

Sea $\epsilon > 0$ y $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N_\epsilon - 1}} < \epsilon$ si $m \geq n \geq N_\epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_m(x)) &\leq d(f_n(x), f_{n+1}(x)) + d(f_{n+1}(x), f_{n+2}(x)) + ... + d(f_{m-n-1}(x), f_m(x)) \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{m-n-1}} \\ &= \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{m-2n-1}}\right] \\ &< \frac{1}{2^n}[2] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo anterior, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy uniforme, lo cual implica la convergencia a una función f de X a Y y por el Lema 4.0.7, f es también una función medible.

Finalmente como $\varphi(x)$ es cerrado y por la condición a), tenemos que $f(x)$ es un elemento de $\varphi(x)$, por lo tanto f es un selector medible de la correspondencia φ. ■

Como un primer corolario al teorema de existencia tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.1 *Para una correspondencia $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ de un espacio medible a un espacio topológico, con valores no vacíos y cerrados tenemos lo siguiente.*

a) Si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de selectores medibles de φ que satisfacen para cada x en X

$$\varphi(x) = \overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}},$$

entonces φ es débilmente medible.

b) Si Y es un espacio polaco y φ es débilmente medible, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de selectores medibles de la correspondencia φ que satisfacen para cada x en X,

$$\varphi(x) = \overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}}.$$

Demostración. a) Sea G un conjunto abierto en Y, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{-1}(G) &= \{x \in X : \varphi(x) \cap G \neq \varnothing\} \\
&= \left\{x \in X : \overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}} \cap G \neq \varnothing\right\} \\
&= \{x \in X : \{f_1(x), f_2(x), ...\} \cap G \neq \varnothing\} \\
&= \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ f_n(x) \in G\} \\
&= \left\{x \in X : \exists n \in \mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ x \in f_n^{-1}(G)\right\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(G).
\end{aligned}$$

Dado que f_n es medible, $f_n^{-1}(G) \in \sum$ y por lo tanto $\varphi_i^{-1}(G) \in \sum$.

b) Supongamos que Y es un espacio polaco y φ una correspondencia débilmente medible. Sea $\{U_1, U_2, ...\}$ una base numerable para Y y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_n : X \twoheadrightarrow Y$ por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) \cap U_n & \text{si } \varphi(x) \cap U_n \neq \varnothing \\ \varphi(x) & en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$$

Probaremos que para un conjunto abierto G en Y,

$$(\varphi_n)_i^{-1}(G) = \varphi_i^{-1}(U_n \cap G) \bigcup (\varphi_i^{-1}(G) \cap (\varphi_i^{-1}(U_n))^c). \tag{3.5}$$

Para $x \in (\varphi_n)_i^{-1}(G)$,

$$\varphi_n(x) \cap G \neq \varnothing.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = \varphi(x) \cap U_n \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \varphi_i^{-1}(U_n \cap G). \\ \varphi_n(x) = \varphi(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \varphi_i^{-1}(G) \cap \varphi_s^{-1}(U_n^c) = \varphi_i^{-1}(G) \cap \left[\varphi_i^{-1}(U_n)\right]^c, \end{aligned}$$

de donde se sigue la igualdad en (3.5).

Usando que φ es débilmente medible de (3.5) tenemos que φ_n es débilmente medible y por el Lema 3.1.1 la correspondencia cerradura $\overline{\varphi_n}$ es también débilmente medible, además, dado que $\overline{\varphi_n}$ toma valores no vacíos y cerrados, por el Teorema 3.2.1, se sigue que existe un selector medible f_n de la correspondencia $\overline{\varphi_n}$. Falta demostrar que para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) = \overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}}.$$

Como φ toma valores cerrados, claramente

$$\overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}} \subset \varphi(x).$$

Probemos ahora la otra contención. Sea $y \in \varphi(x)$ y sea $\epsilon > 0$, entonces existe $U_n \subset B_\epsilon(y)$ un elemento de la báse para la topología generada por la métrica en Y, lo que implica que existe f_n tal que

$$f_n(x) \in \varphi_n(x) = \varphi(x) \cap U_n \subset \varphi(x) \cap B_\epsilon(y),$$

de donde se sigue que $d(y, f_n(x)) < \epsilon$ y por lo tanto $y \in \overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}}$. Como y es un punto arbitrario de $\varphi(x)$, hemos probado que $\varphi(x) \subset \overline{\{f_1(x), f_2(x), ...\}}$. ■

3.3. Teorema del máximo medible

El Teorema del máximo medible es un corolario más al Teorema de selección de Kuratowski-Ryll-Nardzewski. Para establecer este resultado es necesario estudiar las llamadas funciones de Caratheodory, además, de otros conceptos relacionados.

Definición 3.3.1 *Sea $(X, \sum)$ un espacio medible y sean (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) espacios topológicos. Una función $f : X \times Y \to Z$ se dice ser de Carathéodory si se satisface:*

a) Para cada y en Y, la función $f(\cdot, y) : X \to Z$ es $\sum / \sigma(\tau_Z)$−medible, es decir, $f^{-1}(B, y)$ es un elemento de $\sum$ para todo subconjunto de Borel B en Z.

2) Para cada x en X la función $f(x, \cdot) : Y \to Z$ es continua en Y.

Definición 3.3.2 *Si $\varphi : (X, \sum) \to (Y, d)$ es una correspondencia de un espacio medible a un espacio métrico que toma valores no vacíos, entonces la función distancia asociada a φ es la función $\delta : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\delta(x, y) = \hat{d}(y, \varphi(x)).$$

Teorema 3.3.1 *Si φ es una correspondencia con valores no vacíos de un espacio medible X a un espacio métrico separable Y. Entonces φ es débilmente medible si, y sólo si, la función distancia asociada a φ es una función de Carathéodory.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por la definición de distancia asociada tenemos que $\delta(x, \cdot)$ es continua en Y (ver Proposición 4.0.5). Sea $y \in Y$ fijo y $r \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} D := \{x \in X : \delta(x, y) < r\} &= \left\{x \in X : \hat{d}(y, \varphi(x)) < r\right\} \\ &= \{x \in X : B_r(y) \cap \varphi(x) \neq \varnothing\} \\ &= \varphi_i^{-1}(B_r(y)). \end{aligned}$$

Como φ es medible, $D \in \sum$ y por lo tanto $\delta(\cdot, y)$ es medible.

($\Leftarrow$) Sea D un subconjunto denso numerable del espacio separable Y, por la Proposición 4.0.6 para un subconjunto abierto A en Y, se tiene que:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(y_n),$$

con $r_n \in \mathbb{Q}^+$ y $y_n \in D$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{-1}(A) &= \varphi_i^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(y_n)) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_i^{-1}(B_{r_n}(y_n)) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \varphi(x) \cap B_{r_n}(y_n) \neq \varnothing\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : \hat{d}(y_n, \varphi(x)) < r_n\right\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \delta(x, y_n) < r_n\}.
\end{aligned}$$

Como cada conjunto $\{x \in X : \delta(x, y_n) < r_n\} \in \sum$, entonces $\varphi_i^{-1}(A) \in \sum$, por lo tanto, φ es débilmente medible. ■

Definición 3.3.3 *Sean* $(X, \sum_X)$, $(Y, \sum_Y)$ *y* $(Z, \sum_Z)$ *espacios medibles. Diremos que* $f : X \times Y \to Z$ *es conjuntamente medible, si para cada* $A \in \sum_Z$,

$$f^{-1}(A) \in \sigma(\sum_X \times \sum_Y).$$

Lema 3.3.1 *Sea* $(X, \sum)$ *un espacio medible,* (Y, d) *un espacio métrico separable y* (Z, ρ) *un espacio métrico, entonces cada función* $f : X \times Y \to Z$ *de Carathéodory es conjuntamente medible.*

Demostración. Sea $D = \{y_1, y_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable de Y y F un subconjunto cerrado de Z. Iniciemos probando que para $(x, y) \in X \times Y$, el punto $f(x, y) \in F$ si, y sólo si, para cada n, existe $y_m \in D$, tal que

$$d(y, y_m) < \frac{1}{n} \quad y \quad \hat{\rho}(f(x, y_m), F) < \frac{1}{n}.$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $f(x, y) \in F$. Por continuidad de la función $f(x, \cdot)$, para $\epsilon = \frac{1}{n}$ existe $\delta > 0$ y $y_m \in D$, tal que

$$d(y, y_m) < min\left\{\delta, \frac{1}{n}\right\} \leq \frac{1}{n},$$

y

$$\rho(f(x,y), f(x,y_m)) < \epsilon = \frac{1}{n},$$

por lo tanto,

$$\hat{\rho}(f(x,y_m), F) \leq \rho(f(x,y_m), f(x,y)) < \frac{1}{n}.$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para cada n, existe $y_m \in D$, tal que

$$d(y,y_m) < \frac{1}{n} \quad y \quad \hat{\rho}(f(x,y_m), F) < \frac{1}{n}.$$

La sucesión $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a y, entonces por la continuidad de $f(x,\cdot)$, se sigue que la sucesión $(f(x,y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x,y)$. Además, por la Proposición 4.0.5;

$$lim_{n\to\infty}\hat{\rho}(f(x,y_m), F) = \hat{\rho}(f(x,y), F),$$

lo que implica que

$$\hat{\rho}(f(x,y), F) = 0.$$

Por la Proposición 4.0.4, $f(x,y) \in F$ y por lo tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(F) &= \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) \in F\} \\
&= \left\{(x,y) \in X \times Y : \forall n, \exists y_m \in D \; tal \; que \; d(y,y_m) < \frac{1}{n} \; y \; \hat{\rho}(f(x,y_m), F) < \frac{1}{n}\right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\left\{x \in X : \hat{\rho}(f(x,y_m), F) < \frac{1}{n}\right\} \times B_{\frac{1}{n}}(y_m)\right].
\end{aligned}$$

Para n fijo, el conjunto

$$\left\{x \in X : \hat{\rho}(f(x,y_m), F) < \frac{1}{n}\right\} = f^{-1}(\cdot, y_m)(\left\{z \in Z : \hat{\rho}(z, F) < \frac{1}{n}\right\}),$$

y como $f(\cdot,y)$ es $\sum/\sigma(\mathscr{B}_Z)$−medible se obtiene que

$$f^{-1}(\cdot, y_m)(\left\{z \in Z : \hat{\rho}(z, F) < \frac{1}{n}\right\}) \in \sum,$$

así que $f^{-1}(F) \in \sigma(\sum \times \mathscr{B}_Y)$ y por lo tanto, f es conjuntamente medible. ■

Teorema 3.3.2 *Supongamos que $f : X \times Y \to Z$ es una función de Carathéodory donde $(X, \sum)$ es un espacio medible, (Y, d) es un espacio métrico separable y (Z, τ) un espacio topológico. Para cada G subconjunto de Z, se define la correspondencia $\varphi_G : X \to Y$ por*

$$\varphi_G(x) = \{y \in Y : f(x, y) \in G\}.$$

Si G es abierto, entonces φ_G es una correspondencia medible.

Demostración. Supongamos sin perdida de generalidad que G es no vacío y que F es un subconjunto cerrado de Y. Obsérvese que

$$\begin{aligned} (\varphi_G)_i^{-1}(F) &= \{x \in X : \varphi_G(x) \cap F \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in X : \{y \in Y : f(x, y) \in G\} \cap F \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in X : \exists y \in F \ \ tal \ \ que \ \ f(x, y) \in G\} \\ &:= A. \end{aligned}$$

Sea $\{y_1, y_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable en F. Probaremos que

$$A = \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ f(x, y_n) \in G\} := B.$$

Sea $x \in A$. Para algún y en F, $f(x, y)$ es un punto interior del conjunto abierto G, por lo tanto existe $r > 0$ tal que

$$B_r(f(x, y)) \subset G.$$

Como $f(x, \cdot)$ es continua, para $r > 0$ existe V una vecindad abierta de y tal que

$$f(x, v) \in B_r(f(x, y)) \subset G \quad \forall v \in V.$$

Puesto que, V es una vecindad abierta de y y $\{y_1, y_2, ...\}$ es denso en F, se tiene que

$$V \cap \{y_1, y_2, ...\} \neq \varnothing,$$

y por lo tanto existe y_n en $V \cap \{y_1, y_2, ...\}$ tal que

$$f(x, y_n) \in B_r(f(x, y)) \subset G,$$

lo cual implica que $x \in B$.

Ahora sea $x \in B$, significa que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x, y_n) \in G$, como

$$\{y_1, y_2, ...\} \subset F,$$

es claro que $y_n \in F$, por lo tanto $x \in A$.

Por lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_G)_i^{-1}(F) &= A \\ &= B \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x, y_n) \in G\}. \end{aligned}$$

Dado que $f(\cdot, y)$ es $\sum/\sigma(\tau_Z)-$ medible, cada conjunto $\{x \in X : f(x, y_n) \in G\} \in \sum$, entonces $(\varphi_G)_i^{-1}(F) \in \sum$. Por lo tanto φ_G es una correspondencia medible. ■

Lema 3.3.2 *Sean $(X, \sum)$ un espacio medible, Y, Z_1, Z_2 espacios métricos separables y Z un espacio topológico. Si $f_i : X \times Y \to Z_i, i = 1, 2$ son funciones de Carathéodory y $g : Z_1 \times Z_2 \to Z$ es Borel medible, entonces la composición $h : X \times Y \to Z$ definida por*

$$h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

es conjuntamente medible.

Demostración. Esta demostración se encuentra en [1], Teorema 4.52. ■

Teorema 3.3.3 *Sean $(X, \sum)$ un espacio medible, Y un espacio polaco y Z un espacio métrico separable. Supongamos que $f : X \times Y \to Z$ es una función de Carathéodory y que $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es débilmente medible con valores compactos no vacíos.*

Supongamos además que $\pi : X \to Z$ es una función medible tal que para cada $x \in X$ existe $y \in \varphi(x)$ tal que $\pi(x) = f(x,y)$. Entonces la correspondencia $\gamma : X \twoheadrightarrow Y$ definida por

$$\gamma(x) = \{y \in \varphi(x) : f(x,y) = \pi(x)\},$$

es medible y admite un selector medible, es decir, además de que γ es medible, existe una función medible $\xi : X \to Y$ tal que $\xi(x)$ es un elemento de $\varphi(x)$ y $\pi(x) = f(x,\xi(x))$ para cada x en X.

Demostración. Sean d la métrica en Z, $g : Z \times Z \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $g(z_1,z_2) = d(z_1,z_2)$ y $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = g(f(x,y),\pi(x)) = d(f(x,y),\pi(x)).$$

Como f es continua en Y, obtenemos que h es continua en Y, además, las funciones $(x,y) \to f(x,y)$ y $(x,y) \to \pi(x)$ son funciones de Carathéodory y por el Lema 3.3.2, h es conjuntamente medible, en particular es medible y por el Lema 3.3.1, la función h es de Carathéodory.

Para cada n definamos la correspondencia $\psi_n : X \twoheadrightarrow Y$ por:

$$\psi_n(x) = \left\{y \in Y : d(f(x,y),\pi(x)) < \tfrac{1}{n}\right\} = \left\{y \in Y : h(x,y) \in (-\infty, \tfrac{1}{n})\right\}.$$

Por el Teorema 3.3.2 cada ψ_n es medible y por el Teorema 3.1.1 y el Lema 3.1.1 la correspondencia $\overline{\psi_n}$ es débilmente medible. Además, por el Lema 3.1.2, 3)

$$\gamma(x) = \varphi(x) \cap \overline{\psi_1}(x) \cap \overline{\psi_2}(x), ...,$$

es medible y así débilmente medible.

Como γ toma valores compactos y no vacíos, por el Corolario 3.2.1, γ tiene un selector medible ξ. ■

Teorema 3.3.4 *(Teorema del máximo medible.) Sean Y un espacio polaco, $(X, \sum)$ un espacio medible, $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia débilmente medible con valores compactos, no vacíos y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Definamos*

$$m(x) = \text{máx}_{y \in \varphi(x)} f(x, y),$$

y la correspondencia $\mu : X \twoheadrightarrow Y$ por

$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x) : f(x, y) = m(x)\}.$$

Entonces

1) m es medible.

2) La correspondencia μ toma valores compactos y no vacíos.

3) μ es medible y admite un selector medible.

Demostración. 1) Por el Corolario 3.2.1 existe una sucesión de selectores medibles $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de φ tal que para cada x en X,

$$\varphi(x) = \overline{\{g_1(x), g_2(x), ...\}}.$$

Sea $h_n : X \to X \times Y$ una función definida por

$$h_n(x) = (x, g_n(x)).$$

Observemos que para cada A en $\sum$ y B en $\mathscr{B}_X$,

$$h_n^{-1}(A \times B) = A \cap g_n^{-1}(B) \in \sum,$$

por lo que para cada n, la función h_n es $\sum / \sigma(\sum \times \mathscr{B}_X)$–medible.

Como f es de Carathéodory, por el Lema 3.3.1, es conjuntamente medible y por lo tanto medible en $\sigma(\sum \times \mathscr{B}_X)$. Así, para cada n la composición $f \circ h_n$ es medible.

Ahora

$$\begin{aligned} m(s) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x, g_n(x)) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} f(h_n(x)) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} f \circ h_n(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, m es medible.

2) Para cada $s \in X$, el conjunto $\mu(s)$ es cerrado y está contenido en $\varphi(s)$, el cual es compacto, por lo tanto μ toma valores compactos y no vacíos.

3) Se sigue del Teorema 3.3.3 tomando $m(x) = \pi(x)$. ■

Capítulo 4

Apéndice

Proposición 4.0.1 *Sea Y un espacio topológico. Si A es abierto en Y, entonces*

$$\overline{B} \cap A = \varnothing \text{ si, y sólo si, } B \cap A = \varnothing \quad \forall B \subset Y.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $B \subset Y$ y supongamos que $\overline{B} \cap A = \varnothing$, como $B \subset \overline{B}$, es claro que $B \cap A = \varnothing$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $B \cap A = \varnothing$ y que

$$\overline{B} \cap A \neq \varnothing.$$

Nótese que $x \in A \cap \overline{B}$ es un punto interior de A y un punto de acumulación de B, por tal motivo existe U una vecindad abierta de x tal que $U \subset A$ y usando que $A \cap B = \varnothing$, se sigue que

$$U \cap B = \varnothing,$$

lo cual implica que x no puede ser punto de acumulación de B lo que es una contradicción y por lo tanto, $\overline{B} \cap A = \varnothing$. ■

Lema 4.0.3 *Sea Y un espacio regular. Y es normal si, y sólo si, dado un cerrado F y un abierto U, tal que F es un subconjunto de U, entonces existe V abierto, tal que*

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

La demostraciń la puede encontrar en [7].

Proposición 4.0.2 *Si X es un espacio Hausdorff, entonces es un espacio regular.*

La demostraciń la puede encontrar en [7].

Lema 4.0.4 *Si X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces X es normal.*

La demostraciń la puede encontrar en [7].

Lema 4.0.5 *(Lema de Urysohn).*
Sea (X,τ) un espacio topológico. X es un espacio normal si, y sólo si, para cualesquier subconjuntos cerrados ajenos A y B de X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que

$$f(A) = \{0\} \text{ y } f(B) = \{1\}.$$

La demostraciń la puede encontrar en [7].

Proposición 4.0.3 *Todo espacio paracompacto X, es regular.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X y $x \in A^c$. Como el espacio X es Hausdorff, para cada a en A y el punto x fijo, existe un abierto U_a tal que x no está en $\overline{U_a}$, así

$$\mathscr{L} := \{U_a : a \in A\} \bigcup A^c$$

es una cubierta abierta para el espacio X y como X es paracompacto la cubierta $\mathscr{L}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito

$$\{V_a : a \in A\} \bigcup G.$$

Obtenemos que $A \subset W := \{V_a : a \in A\}$ y por el Teorema 2.1.2, b) obtenemos que

$$\overline{W} = \left\{\overline{V_a} : a \in A\right\},$$

por lo tanto, $x \in \overline{W}^c$. Por lo que W y $(\overline{W})^c$ son conjuntos abiertos ajenos tales que

$$A \subset W \text{ y } x \in (\overline{W})^c.$$

■

Teorema 4.0.5 *Todo espacio paracompacto X, es normal.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos cerrado ajenos en X. Por la Proposición 4.0.3 el espacio X es regular, entonces para cada a en A , existe un abierto U_a tal que

$$\overline{U_a} \cap B = \varnothing,$$

por lo tanto

$$\mathscr{L} := \{U_a : a \in A\} \bigcup A^c$$

es una cubierta abierta para el espacio X y como X es paracompacto la cubierta $\mathscr{L}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito

$$\{V_a : a \in A\} \bigcup G.$$

El conjunto abierto $W := \{V_a : a \in A\}$ contiene a A, además por el Teorema 2.1.2, b) obtenemos que

$$\overline{W} = \left\{\overline{V_a} : a \in A\right\}.$$

Por lo tanto $B \subset \overline{W}^c$. ■

Proposición 4.0.4 *Sea X un espacio normado, A un subconjunto de X. Definamos*

$$\hat{d}(x, A) \quad = \quad \inf_{a \in A} \|x - a\| = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Si $\hat{d}(x, A) = 0$, entonces $x \in \overline{A}$.

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

Proposición 4.0.5 *Sea X un espacio normado, A un subconjunto de X y d la métrica generada por la norma de X. Entonces la métrica $\hat{d}$ definida en (4.1) es una función continua.*

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

Teorema 4.0.6 *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas de un espacio topológico X a un espacio normado Y que converge uniformemente a una función f de X a Y. Si cada función f_n es continua en X, entonces f es continua en X.*

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

Lema 4.0.6 *Si (X, d) un espacio métrico, entonces cada conjunto cerrado F, es un conjunto G_δ y cada conjunto abierto A es un conjunto F_σ.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado en X y definamos para cada n en $\mathbb{N}$,

$$G_n := \left\{x \in X : \hat{d}(x, F) < \frac{1}{n}\right\},$$

Probemos que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Como F es un subconjunto de $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, basta probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset F.$$

Supongamos que $x \in G_n$ para toda n en $\mathbb{N}$, es decir,

$$\hat{d}(x, F) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, se sigue que

$$\hat{d}(x, F) = 0.$$

Por la Proposición 4.0.4, $x \in \overline{F} = F$, por lo tanto

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Probemos que los conjuntos G_n son conjuntos abiertos en X. Sea n en $\mathbb{N}$ fijo y sea y un elemento de G_n, entonces existe x en F tal que

$$d(x, y) < \frac{1}{n}.$$

Sea $r = \frac{1}{n} - d(x, y) > 0$. Si b es un elemento de $B_r(y)$ entonces

$$\begin{aligned} d(b, x) &\leq d(b, y) + d(y, x) \\ &< r + d(y, x) \\ &= \frac{1}{n} - d(x, y) + d(y, x) \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Como $x \in F$, obtenemos que $b \in G_n$, además que

$$B_r(y) \subset G_n,$$

así, G_n es un conjunto abierto, por lo tanto F es un conjunto G_δ. En consecuencia el conjunto abierto $F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c$, es un conjunto F_σ. ∎

Proposición 4.0.6 *Sea (Y, d) un espacio métrico separable, G un conjunto abierto en Y. Entonces G se puede escribir como una unión numerable de bolas abiertas de Y.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso numerable de Y, probemos que el conjunto:

$$\mathscr{B} := \{B_r(p) : p \in D, \ \ r \in \mathbb{Q}^+\},$$

es base para la topología generada por la métrica d. Sea A un abierto en Y. Para cada $a \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(a) \subset A.$$

Sea $s \in \mathbb{Q}^+$ tal que $0 < 2s < r$, como D es un conjunto denso en Y, se sigue que

$$D \cap B_s(a) \neq \varnothing.$$

y sea p en $D \cap B_s(a)$, entonces la $d(p, a) < s$. Además si $b \in B_s(p)$, se sigue que

$$\begin{aligned} d(b,a) &\leq d(b,p) + d(p,a) \\ &< s + s \\ &< r \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$B_s(p) \subset B_r(a) \subset A.$$

Por lo tanto $\mathscr{B}$, es una base para la topología generada por la métrica d, en consecuencia existe $J \subset \mathbb{Q}^+$ un conjunto de índices numerable tal que

$$A = \bigcup_{k \in J} B_{r_k}(p_k).$$

■

Lema 4.0.7 *El límite puntual de una sucesión de funciones medibles de un espacio medible* $(X, \sum)$ *a un espacio métrico* (Y, d)*, es medible.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de X a Y, supongamos que f es el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sea F un conjunto cerrado no vacío en Y, es suficiente probar que $f^{-1}(F)$ es un elemento de $\sum$, para esto, definamos para cada n,

$$G_n := \left\{ y \in Y : \hat{d}(y, F) < \tfrac{1}{n} \right\},$$

en el Lema 4.0.6 se prueba que los conjuntos G_n son abiertos en Y y que

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}.$$

Probemos que

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k).$$

Sea x en $f^{-1}(F) = f^{-1}(\cap_{k=1}^{\infty} G_k)$, entonces

$$f(x) \in G_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq m$

$$f_n(x) \in G_k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

de modo que

$$x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k) \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo tanto

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k).$$

Sea x en $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$. Entonces para toda k, existe m, tal que para toda $n \geq m$,

$$x \in f_n^{-1}(G_k),$$

en consecuancia obtenemos que para toda k existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_n(x) \in G_k \quad \forall n \geq m,$$

en el límite, obtenemos que para toda k,

$$f(x) \in \overline{G_k},$$

entonces $f(x) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{(G_k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k) = F$ y por lo tanto $x \in f^{-1}(F)$.

Por la medibilidad de las funciones f_n obtenemos que $f_n^{-1}(G_k) \in \sum$, entonces $f^{-1}(F) \in \sum$. Así, la función límite f es una función medible. ■

Bibliografía

[1] C.D. Aliprantis y K.C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer-Berlag, Berlin, 2006.

[2] D.P. Bertsekas and S. E. Shreve, *Stochastic Optimal Control. The Discrete Time Case*, Academic Press, New york, 1978.

[3] J. Dugundji, *Topology*, University of Southern California, 1976.

[4] O. Hernández-Lerma y W. J. Runggaldier, *Monotone approximations for convex sthochastic control problems*, J. Math. Syst. Estimation and Control 4 (1994), 99-140.

[5] A.E. Klein y C.Thompson, *Theory of Correspondencias*, Wiley, 1984.

[6] E. Michael, *Continuos Selections I*, Ann. Math. 63(1956), 361-382.

[7] J.R. Munkres, *Topology.* Prentice Hall, Inc. segunda edición, 2000.

[8] H.L. Royden, *Real Analysis.* Macmillan, New York, 1988.