



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Vigilancia en Galerías de Arte Curvilíneas con Huecos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Carolina Rivera Arredondo

Director de Tesis: Dr. Jorge Urrutia Galicia

Asesor de Tesis: M.C. Javier Cano Vila

Hermosillo, Sonora, México, Enero, 14, 2011

SINODALES

M.C. Javier Cano Vila

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Juan Pablo Soto Barrera

Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

L.M. Nicolás Campanelli Prestini

Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Agradezco a mi familia por el apoyo que me han brindado siempre, en todas las formas posibles. También agradezco a mis maestros, en particular a mis directores de tesis Dr. Jorge Urrutia Galicia y M.C. Javier Cano Vila, y a mis sinodales Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, Dr. Juan Pablo Soto Barerra y L.M. Nicolás Campanelli Prestini.

Índice general

Índice general	5
Introducción	I
1. Teoría de gráficas	1
1.1. Gráficas y subgráficas	2
1.2. Tipos de gráficas	5
1.3. Emparejamientos	11
1.4. Gráficas en el plano	13
1.5. Coloraciones	21
2. Galerías de arte	23
2.1. El problema original de Galería de Arte	24
2.2. Galerías ortogonales	25
2.3. Galerías con huecos	26
2.4. Galerías tradicionales	29
3. Galerías curvilíneas	33
3.1. Definiciones	33

3.2. Puntos guardia en galerías arista-cóncavas	34
3.3. Vértices guardia en galerías arista-convexas	37
3.4. Puntos guardia en galerías arista-convexas	40
4. Galerías curvilíneas con huecos	57
4.1. Definiciones	57
4.2. Puntos guardia en galerías arista-cóncavas	58
4.3. Vértices guardia en galerías arista-convexas	61
4.4. Puntos guardia en galerías arista-convexas	70
Bibliografía	81

Introducción

Los problemas de Galería de Arte se empezaron a estudiar en 1973. Su surgimiento se acredita a Victor Klee, quien propuso el problema de encontrar el número suficiente de guardias para vigilar una galería de arte. Una galería de arte es representada por un polígono en el plano y los guardias por puntos en él. Quien solucionó el problema propuesto por Klee fue Vašek Chvátal, con su ampliamente conocido Teorema de Galería de Arte de Chvátal [4], el cual afirma lo siguiente: $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar una galería de arte con n paredes.

Esta área de investigación se ha desarrollado bastante en las últimas décadas. Prueba de esto es la gran cantidad de artículos y libros publicados sobre el tema, entre los que sobresalen tres compendios [16, 17, 19]. En ellos se demuestran variantes del teorema original, por ejemplo, algunos autores han considerado galerías ortogonales, curvilíneas o con huecos, así como guardias a los que se les permite tener cierta movilidad o cuya visibilidad se limita.

Los tipos de guardias que nos interesarán principalmente serán los vértices guardia y los puntos guardia. Ambos tienen su posición fija, los primeros en vértices del polígono y los segundos en puntos arbitrarios dentro del polígono. El concepto de vigilancia proviene de la idea intuitiva de poder ver un objeto, esto es que no exista nada entre el observador y el objeto que bloquee la visión. Así, decimos que un punto p en la galería es *vigilado* por un guardia g si el segmento de recta \overline{gp} está totalmente

contenido en la galería.

Esta tesis se estructurará de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se expondrán brevemente los conceptos básicos de Teoría de Gráficas. En el Capítulo 3 se dará una introducción a los problemas de Galería de Arte: se definirá la terminología usada en el área y se mencionarán algunos de los principales resultados.

El Capítulo 4 tratará de galerías curvilíneas. Estas galerías se pueden ver como polígonos cuyas aristas son curvas simples en lugar de segmentos de recta. De las galerías curvilíneas nos interesaremos únicamente en aquellas cuyas aristas posean cierta propiedad de concavidad o convexidad, a las cuales llamaremos galerías arista-cóncavas y galerías arista-convexas, respectivamente. La razón de esto es que el número de guardias suficiente y a veces necesario para vigilar estos tipos de galerías está relacionado linealmente con el número de vértices de la galería. En este capítulo se enuncian tres teoremas en los cuales se da la cantidad suficiente y a veces necesaria de guardias, como función del número de vértices, para vigilar cada tipo de galería: $2n - 4$ puntos guardia para galerías arista-cóncavas, $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ vértices guardia para galerías arista-convexas y $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos guardia para galerías arista-convexas.

Por último, en el Capítulo 5 se estudiarán las galerías curvilíneas con huecos, las cuales serán el tema central de esta tesis. A grandes rasgos, una galería curvilínea con huecos es una galería curvilínea que contiene galerías curvilíneas en su interior, llamadas huecos. Impondremos ciertas condiciones a las galerías de tal manera que podamos dar una cota superior, en función del número de vértices de la galería, de la cantidad de guardias necesaria para vigilar cualquier galería con ese número de vértices. Si la galería es arista-convexa, sus huecos tendrán que ser galerías arista-cóncavas, y viceversa. Se mencionan cuatro resultados, producto de esta tesis. En el primero se afirma que $2(n + 2h) - 4$ puntos guardia son suficientes y a veces necesarios para vigilar una galería arista-cóncava con n vértices y h huecos. Otros dos dan cotas superiores de la cantidad de vértices guardia necesaria para vigilar galerías con huecos arista-convexas, a las cuales se les han impuesto algunas condiciones. El último resultado afirma que $\lfloor \frac{n+h}{2} \rfloor$ puntos guardia son suficientes para vigilar una galería con huecos arista-convexa y $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ son a veces necesarios.

Capítulo 1

Teoría de gráficas

La Teoría de Gráficas tuvo sus inicios en los trabajos de Euler en el siglo XVIII. Una gráfica es un objeto matemático conformado por dos tipos de elementos que son los vértices y las aristas, donde las aristas tienen la función de relacionar pares de vértices. Aunque la definición de este objeto es abstracta, hay una asociación intrínseca con su diagrama o representación gráfica, de ahí su nombre. En este diagrama los vértices son puntos y las aristas son líneas que unen pares de vértices relacionados. Dentro del contexto matemático a veces se usa indistintamente el término gráfica para referirse tanto al objeto abstracto como a su representación gráfica. Esto no conlleva ningún problema, ya que el diagrama arroja suficiente información para recuperar la gráfica de la cual se obtuvo.

Dada la relación natural entre las gráficas y sus diagramas, estas nos pueden ayudar a representar visualmente un problema. La variedad de situaciones que puede modelar una gráfica es inmensa. Principalmente modelan situaciones donde la propiedad que nos interesa estudiar de los objetos hace surgir una relación binaria entre ellos. Esto nos permite asociar pares de objetos, lo cual induce de manera natural una gráfica en la que los vértices son los objetos de estudio y las aristas son líneas uniendo pares de objetos que están relacionados.

Este capítulo servirá como introducción a la Teoría de Gráficas. En la Sección 2.1 se definirán algunos conceptos básicos del área que se usarán a lo largo de esta

tesis. En la Sección 2.2 se mencionarán algunos tipos de gráficas y en la Sección 2.3 se estudiarán los emparejamientos. La Sección 2.4 estará totalmente dedicada a la representación de gráficas en el plano, incluyendo gráficas planas, gráficas aplanables, polígonos y triangulaciones. Por último, la Sección 2.4 tratará de coloraciones de vértices.

1.1. Gráficas y subgráficas

En Teoría de Gráficas hay conceptos para los cuales no hay convención en la definición, hasta el concepto de gráfica puede variar dependiendo del autor. Las definiciones que manejaré aquí son, de entre las más comunes, las que se adecúan mejor a los tipos de gráficas que emplearemos.

Una **gráfica** es un par de conjuntos $G = (V, E)$ tal que $E \subset \{\{u, v\} \subset V \mid u \neq v\}$. En lo que sigue denotaremos $[V]^2 = \{\{u, v\} \subset V \mid u \neq v\}$. A los elementos de V se les llama **vértices** y a los elementos de E **aristas**. Si $e = \{u, v\} \in E$ entonces u y v son llamados **extremos** de e y decimos que e **une** los vértices u y v . Por simplicidad, usaremos la notación uv para referirnos a la arista $\{u, v\}$. Los conjuntos de vértices y aristas de una gráfica G se denotarán $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente. Algunas veces no distinguiremos entre una gráfica y su conjunto de vértices o aristas. Así, podremos escribir $v \in G$ y $uv \in G$ para referirnos al vértice $v \in V(G)$ y a la arista $uv \in E(G)$.

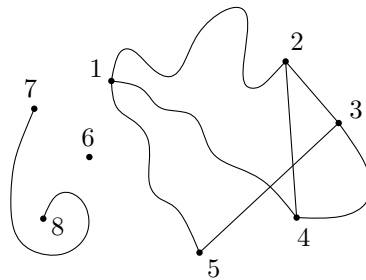


Figura 1.1: La gráfica con conjunto de vértices $V = \{1, \dots, 8\}$ y conjunto de aristas $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{7, 8\}\}$.

Notemos que (\emptyset, \emptyset) es una gráfica; a esta la llamaremos **gráfica vacía** y la denotaremos simplemente por \emptyset .

De su definición deducimos que en una gráfica no pueden presentarse los siguientes casos:

1. dos o más aristas con los mismos extremos,
2. una arista con ambos extremos iguales.

Para permitir los casos anteriores se crea el concepto de **multigráfica**, la cual se define como una 3-tupla $G = (V, E, \phi)$ donde V y E son conjuntos tales que $V \cap E = \emptyset$ y $\phi : E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ es una función. Observemos que una gráfica puede ser considerada una multigráfica haciendo V el conjunto de vértices, E el conjunto de aristas y ϕ la función identidad. Cabe mencionar que todos los conceptos de esta sección aplican también para multigráficas.

Si los conjuntos de vértices y aristas de una gráfica G son finitos decimos que la gráfica es **finita**. Entonces podremos hablar del número de vértices y aristas de G , los cuales denotaremos por $|G|$ y $\|G\|$. Al número de vértices de una gráfica G le llamamos el **orden** de G . Como únicamente trabajaremos con gráficas finitas, de ahora en adelante al decir gráfica nos referiremos a una gráfica finita.

Dos conceptos que hablan de la relación entre pares de elementos de una gráfica son los conceptos de adyacencia e incidencia. Se dice que dos aristas son **adyacentes** si existe un vértice que es extremo de ambas. Dos vértices son **adyacentes** si existe una arista que tenga como extremos a dichos vértices. También se dice que una arista es adyacente a la otra y que un vértice es adyacente al otro. Diremos que una arista y un vértice son **incidentes** si el vértice es extremo de la arista, también podremos decir que la arista es incidente al vértice o que el vértice es incidente a la arista. A partir del concepto de incidencia definiremos el grado de un vértice, el cual es un número natural que se le asocia a cada vértice de una gráfica. Sea v un vértice de la gráfica G , entonces el **grado** de v , denotado por $d_G(v)$, es el número de aristas incidentes a v . De ser claro a cuál gráfica nos referimos solamente escribiremos $d(v)$.

Como habíamos mencionado, el término gráfica se debe a que esta puede representarse gráficamente mediante un diagrama. En este diagrama los vértices se representan por medio de puntos y las aristas mediante líneas uniendo pares de vértices adyacentes. De este sólo nos interesará la relación de incidencia que existe entre los vértices y las aristas, la forma del diagrama es inmaterial.

Hay ocasiones en las que a dos gráficas diferentes se les puede asociar un mismo diagrama, esto ocurre cuando las gráficas son isomorfas. Decimos que dos gráficas $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfas**, denotado por $G \cong G'$, si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que $uv \in E$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$ (Ver Figura 1.2). Así, gráficas isomorfas son gráficas esencialmente iguales, ya que sus elementos se relacionan de la misma manera aunque sus representaciones abstractas sean distintas.

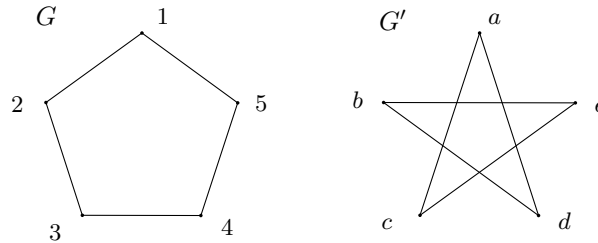


Figura 1.2: Dos gráficas isomorfas G y G' . El isomorfismo $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ está dado por: $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = c$, $\varphi(3) = e$, $\varphi(4) = b$, $\varphi(5) = d$.

Seguiremos usando la notación $V = V(G)$ y $E = E(G)$ para la gráfica G y la notación $V' = V(G')$ y $E' = E(G')$ para la gráfica G' . Si G y G' son tales que $V' \subset V$ y $E' \subset E$ entonces se dice que G' es **subgráfica** de G (y G es **supergráfica** de G') o que G **contiene** a G' , y se denota por $G' \subset G$. Hay formas de obtener subgráficas o supergráficas de una gráfica, ya sea eliminando o agregando vértices o aristas; estas se mencionan a continuación.

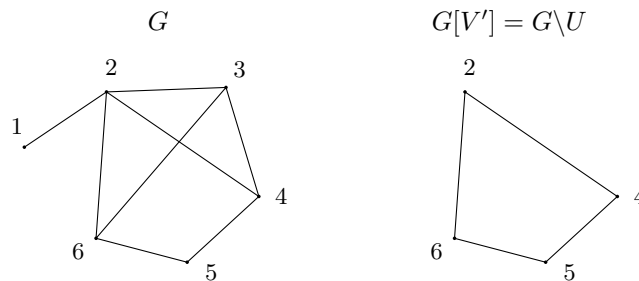


Figura 1.3: Las gráficas G y $G[V'] = G \setminus U$, donde $V' = \{2, 4, 5, 6\}$ y $U = \{1, 3\}$.

Consideremos la gráfica G y sea $V' \subset V$. A partir de V' podemos obtener una subgráfica de G , denotada $G[V']$, tomando como conjunto de vértices a V' y como conjunto de aristas al formado por las aristas en E que tienen ambos extremos en V' . A $G[V']$ se le llama **subgráfica inducida** por V' (Ver Figura 1.3). Para denotar a la subgráfica inducida por los vértices de una subgráfica $H \subset G$ escribimos $[H]$. Si H es tal que $V(H) = V$ entonces a H le llamamos **subgráfica generadora** de G o diremos que H **genera** a G . Si $U \subset V$ entonces a la subgráfica $G[V \setminus U]$ la denotaremos por $G \setminus U$, y si $U = \{u\}$ solamente escribiremos $G \setminus u$.

También pueden obtenerse subgráficas o supergráficas partiendo del conjunto de aristas que queremos eliminar o agregar a la gráfica original. Si $F \subset [V]^2$ entonces escribimos $G \cup F = (V, E \cup F)$ y $G \setminus F = (V, E \setminus F)$. Si $F = \{f\}$ solamente escribimos $G \cup f$ y $G \setminus f$, respectivamente (Ver Figura 1.4).

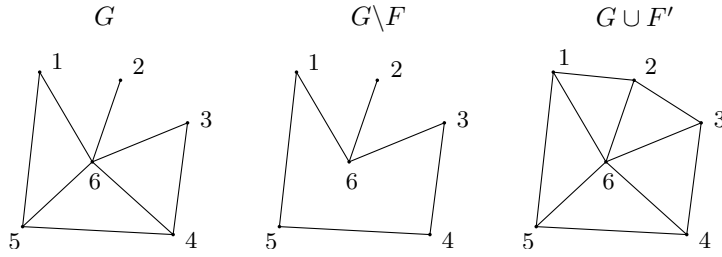


Figura 1.4: Las gráficas G , $G \setminus F$ y $G \cup F'$, donde $F = \{\{4, 6\}, \{5, 6\}\}$ y $F' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

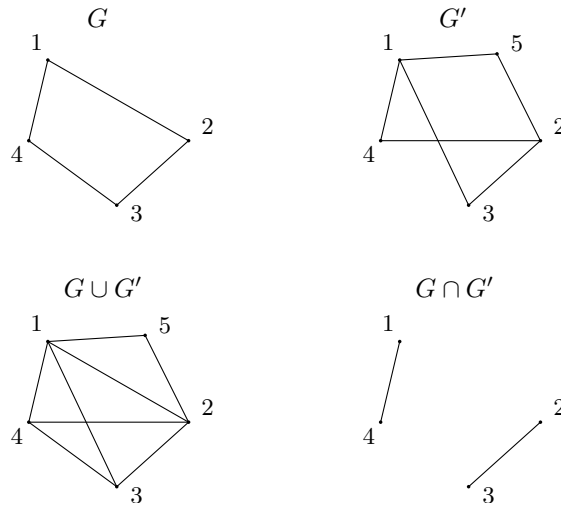


Figura 1.5: Las gráficas G , G' , $G \cup G'$ y $G \cap G'$.

A partir de dos gráficas arbitrarias G y G' se pueden obtener las siguientes gráficas. La **unión** de G y G' se define como $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$, la **intersección** como $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ y la **resta** como $G \setminus G' = G \setminus V'$ (Ver Figura 1.5). Cuando $G \cap G' = \emptyset$ decimos que las gráficas G y G' son **ajenas**.

1.2. Tipos de gráficas

Si $G = (V, E)$ es tal que $E = [V]^2$ entonces decimos que G es una gráfica **completa**. Es decir, G es completa si para todo par de vértices distintos existe una arista que los une. Es importante mencionar que todas las gráficas completas de n vértices son isomorfas. La gráfica completa de n vértices se denota por K_n ; a K_3 le llamaremos **triángulo** (Ver Figura 1.6).

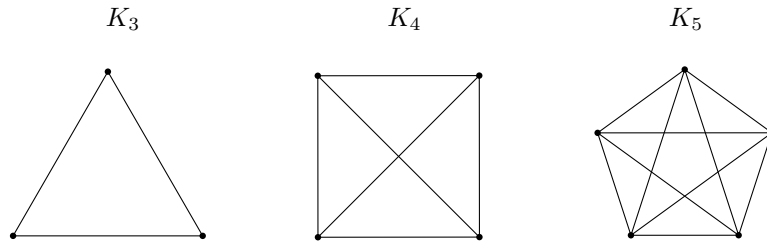


Figura 1.6: Las gráficas completas K_3 , K_4 y K_5 .

Un **camino** es una gráfica P tal que $V(P) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ y $E(P) = \{v_0v_1, \dots, v_{n-2}v_{n-1}\}$, donde $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$. Se dice que P **une** los vértices v_0 y v_{n-1} y a estos se les llama **extremos** de P . A los vértices de P distintos de sus extremos les llamaremos **vértices interiores**. A la gráfica $C = P \cup v_{n-1}v_0$ se le llama **ciclo** (Ver Figura 1.7). La **longitud** de un camino, así como de un ciclo, es la cardinalidad de su conjunto de aristas. A partir de este concepto se define la **distancia** entre dos vértices u y v en una gráfica G , denotada $d_G(u, v)$, la cual es el mínimo de las longitudes de los caminos que son subgráficas de G y unen a u y v . También podemos escribir $d(u, v)$ en caso de ser claro cuál gráfica estamos considerando.

Notemos que todos los caminos con n aristas son isomorfos, al igual que todos los ciclos con n aristas. Así, al camino y al ciclo de longitud n los denotamos P_n y C_n , respectivamente. Notemos que $C_3 = K_3$. Una forma de referirnos a un camino o a un ciclo es por la sucesión de vértices que lo conforman, donde dos vértices son consecutivos si y sólo si son adyacentes. Por ejemplo, para las gráficas anteriores escribiríamos $P = v_0 \dots v_{n-1}$ y $C = v_0 \dots v_{n-1}v_0$.

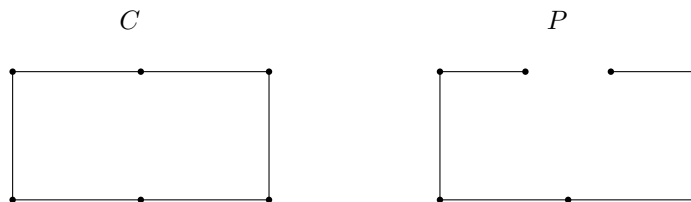


Figura 1.7: El ciclo C_6 y el camino P_6 .

Se dice que una gráfica G es **conexa** si para todo par de vértices $u, v \in G$ existe un camino en G que los une; y decimos que es **disconexa** si no es conexa. A una subgráfica conexa maximal de una gráfica G le llamamos **componente conexa** de G , o simplemente **componente**. El conjunto de componentes conexas conforman una

partición de la gráfica, ya que cada vértice o arista pertenece a una y sólo una componente.

Una gráfica conexa sin ciclos es llamada **árbol** (Ver Figura 1.8). Habrá ocasiones en las que seleccionaremos un vértice particular del árbol para distinguirlo del resto, a este le llamaremos **raíz**. A los vértices de grado 1 de un árbol, distintos de la raíz, les llamamos **hojas**. El siguiente teorema caracteriza a los árboles.

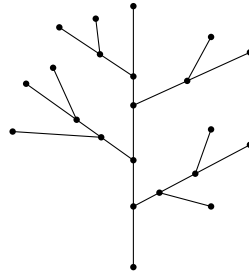


Figura 1.8: Un árbol.

Teorema 1.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una gráfica T :*

- (a) T es un árbol.
- (b) Para todo par de vértices $u, v \in T$ existe un único camino que los une.
- (c) T es conexa pero $T \setminus uv$ es desconexa para toda arista $uv \in T$.
- (d) T no contiene ciclos pero $T \cup uv$ sí, para todo par de vértices no adyacentes $u, v \in T$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) : Supongamos que para dos vértices $u, v \in T$ existen dos caminos distintos P_1 y P_2 que los unen. Como $P_1 \neq P_2$ entonces existe una arista $e = xy \in E(P_1) \setminus E(P_2)$. Como la gráfica $(P_1 \cup P_2) \setminus e$ es conexa, debe contener un camino P que una a x y y . Pero entonces $P \cup e$ es un ciclo contenido en T , lo cual contradice que T sea un árbol.

(b) \Rightarrow (c) : Tenemos que T es conexa. Ahora, sea $uv \in T$. Si $T \setminus uv$ es conexa entonces contiene un camino P que une a u y v . Pero entonces tendremos dos caminos en T que unen los vértices u y v , a saber P y uv , lo cual contradice la hipótesis.

(c) \Rightarrow (d) : Si T tuviera un ciclo entonces al eliminar una de sus aristas se conservaría la conexidad de T , contradiciendo la hipótesis, por lo tanto T no contiene

ciclos. Ahora sean $u, v \in T$ dos vértices no adyacentes. Como T es conexa existe un camino P que une a u y v . Luego $T \cup uv$ contiene el ciclo $P \cup uv$.

(d) \Rightarrow (a) : T no contiene ciclos, falta demostrar que es conexa. Sean $u, v \in T$. Si u y v son adyacentes entonces el camino que los une es la arista $uv \in T$. Si no son adyacentes entonces existe un ciclo C en $T \cup uv$. Como T no contiene ciclos tenemos que $uv \in C$. Luego, $C \setminus uv$ es un camino que une a u y v y que está contenido en T . Por lo tanto, T es conexa. ■

Por el teorema anterior sabemos que en un árbol T sólo existe un camino que une a cada par de vértices $u, v \in T$. Denotaremos por $P_T(u, v)$ a este camino, o $P(u, v)$ si se sobrentiende en cuál árbol estamos considerando el camino.

El siguiente lema enuncia una propiedad sobre el grado de los vértices de un árbol que nos servirá cuando hablemos de triangulaciones de polígonos en la Sección 1.4.3.

Lema 1.2. *Todo árbol con más de un vértice tiene al menos dos hojas.*

Demostración. Sea T un árbol. Para todo par de vértices en T consideremos el único camino que los une. De todos ellos, sea $P = x_0 \dots x_{n-1}$ el de mayor longitud. Veremos que x_0 es adyacente únicamente a x_1 y que x_{n-1} es adyacente únicamente a x_{n-2} . Supongamos que no. Si x_0 es adyacente a un vértice $v \neq x_1$ entonces hay dos casos:

- 1) $v \in P$: Entonces $v = x_i$, para algún $i = 2, \dots, n-1$, y se tendría que x_0x_i y $x_0x_1 \dots x_i$ son dos caminos distintos que unen a x_0 y x_i en T , lo cual contradice el que T sea un árbol por el teorema 1.1.
- 2) $v \notin P$: Entonces $vx_0 \dots x_{n-1}$ es un camino de mayor longitud que P , lo cual contradice el que P sea el de mayor longitud.

Si x_{n-1} es adyacente a un vértice $v \neq x_{n-2}$, se presentan los mismos casos y de igual manera se llega a una contradicción. Por lo tanto, los vértices x_0 y x_{n-1} tienen grado 1 y entonces son hojas de T . ■

Habrán ocasiones en las que nos será de mucha utilidad encontrar una subgráfica generadora que además sea un árbol; a esta subgráfica le llamaremos **árbol generador**. El siguiente teorema nos dice para cuáles tipos de gráficas siempre es posible encontrar un árbol generador.

Teorema 1.3. *Toda gráfica conexa contiene un árbol generador.*

Demostración. Sea G una gráfica conexa. Como $[G] = G$ entonces existe una subgráfica conexa minimal T tal que $[T] = G$. Tenemos que $T \setminus uv$ es desconexa para toda arista $uv \in T$, ya que de lo contrario T no sería minimal. Como T es conexa por definición, entonces T es un árbol por el teorema 1.1. ■

Existen varios algoritmos para encontrar árboles generadores de gráficas conexas. Entre ellos podemos mencionar el algoritmo BFS (*Breadth-First Search*, o en español *Búsqueda en Anchura*), el cual emplearemos más adelante en el capítulo 3. El objetivo de este algoritmo es recorrer todos los vértices de una gráfica dada, y la forma en la que se recorren produce un árbol generador. La información de entrada que recibe es una gráfica conexa G y un vértice $r \in G$ que será la raíz del árbol. El algoritmo recorre la gráfica G de la siguiente manera. Partimos de r y recorremos sus aristas incidentes hasta llegar a los vértices adyacentes a r , los cuales consideramos ahora como “descubiertos”. Luego repetimos este procedimiento con cada uno de los vértices que acabamos de descubrir, para proceder a descubrir los vértices adyacentes a ellos que hasta ese momento no han sido descubiertos (Ver Figura 1.9).

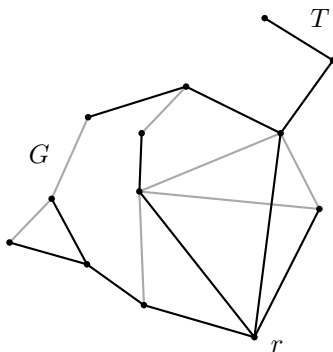


Figura 1.9: Una gráfica conexa G y su árbol T , con raíz r , obtenido con el algoritmo BFS.

Una gráfica $G = (V, E)$ es **bipartita** si V admite una partición en dos subconjuntos X y Y , tal que toda arista tiene un extremo en X y otro en Y (Ver Figura 1.10). Existe una condición necesaria y suficiente para que una gráfica sea bipartita, la cual enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Una gráfica es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.*

Demostración. Sea G una gráfica sin ciclos de longitud impar, probaremos que es bipartita. Supondremos que la gráfica es conexa, ya que G es bipartita si y sólo

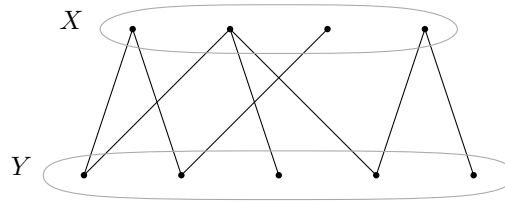
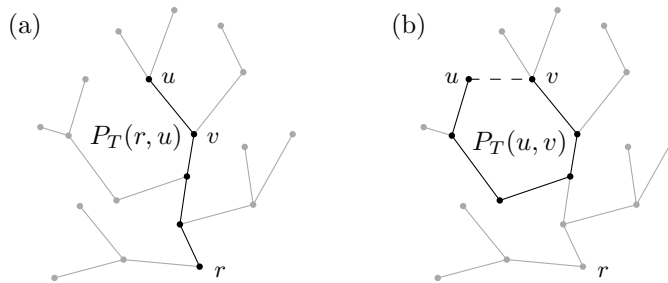


Figura 1.10: Una gráfica bipartita.

si sus componentes lo son. Sea T el árbol generador de G y r su raíz. Notemos que la longitud de $P_T(r, v)$ es $d_T(r, v)$. Sean $X = \{v \in V(G) \mid d_T(r, v) \text{ es par}\}$ y $Y = \{v \in V(G) \mid d_T(r, v) \text{ es impar}\}$. Los conjuntos X y Y forman una partición de $V(G)$, demostraremos que G es bipartita con esta partición.

Sea $uv \in G$. Si $uv \in T$ entonces $uv \in P_T(r, u)$ o $uv \in P_T(r, v)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $uv \in P_T(r, u)$. Luego $d_T(r, u) = d_T(r, v) + 1$, por lo que u y v están en conjuntos diferentes de la partición (Ver Figura 1.11 (a)). Si $uv \notin T$ entonces $P_T(u, v) \cup uv$ es un ciclo en G , el cual tiene longitud par por hipótesis. Luego, $P_T(u, v)$ tiene un número par de vértices. Como todas las aristas de $P_T(u, v)$ están en T entonces, por el caso anterior, los vértices de $P_T(u, v)$ alternan entre los conjuntos X y Y . Por lo tanto, u y v están en conjuntos diferentes (Ver Figura 1.11 (b)).

Figura 1.11: Ilustración de los casos (a) $uv \in T$ y (b) $uv \notin T$.

Para demostrar la otra implicación, sea G bipartita y supongamos que existe un ciclo $C = z_0 \dots z_{2k} z_0 \subset G$ de longitud impar. Sean X y Y los conjuntos de la partición de $V(G)$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_0 \in X$. Notemos que $z_i \in X$ implica que $z_{i+1} \in Y$, y $z_i \in Y$ implica que $z_{i+1} \in X$ (suma módulo $2k + 1$). Así, $z_0 \in X$ implica que $z_{2k} \in X$. Pero esto es una contradicción, ya que $z_{2k} z_0 \in G$ y $z_0, z_{2k} \in X$. Por lo tanto, G no tiene ciclos de longitud impar. ■

Otras gráficas que serán de nuestro interés son las gráficas dirigidas. Una **gráfica**

dirigida es un par de conjuntos $G = (V, E)$, a cuyos elementos llamaremos vértices y aristas al igual que en una gráfica, tales que $E \subset \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$. Para simplificar la notación, escribiremos uv para referirnos a la arista (u, v) . Si $e = uv \in E$ entonces a u le llamamos *extremo inicial* de e y a v *extremo final*. La forma de representar una arista de una gráfica dirigida es con una flecha que inicie en el extremo inicial de la arista y termine en el extremo final (Ver Figura 1.12). Diferenciamos las aristas que “entran” a cada vértice de las que “salen” de él; para esto llamamos *grado exterior* de un vértice v al número de aristas que inician en v y *grado interior* de v al número de aristas que terminan en v . A los vértices de G con grado exterior 0 les llamaremos *pozos*.

Sea P una gráfica dirigida tal que P es el camino $v_0 \dots v_{n-1}$, vista como gráfica no dirigida. Si las aristas de P están dirigidas de v_i a v_{i+1} , para $i = 0, \dots, n-2$, entonces a P se le llama *camino dirigido*. Al vértice de P con grado interior 0 le llamamos *extremo inicial* de P y al vértice con grado exterior 0 le llamamos *extremo final*. Si C es una gráfica dirigida tal que C es el ciclo $v_0 \dots v_{n-1}v_0$, vista como gráfica no dirigida, y además sus aristas están dirigidas de v_i a v_{i+1} (suma módulo n) entonces a C se le llama *ciclo dirigido* (Ver Figura 1.12).

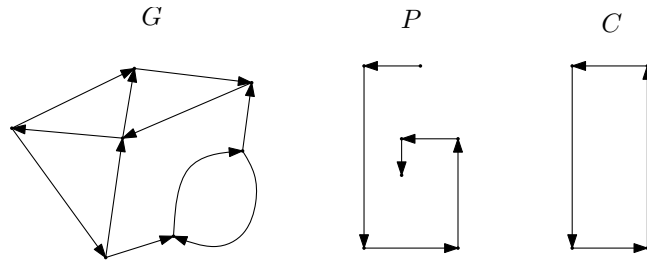


Figura 1.12: Ejemplo de una gráfica dirigida G , un camino dirigido P y un ciclo dirigido C .

1.3. Emparejamientos

Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Un subconjunto $M \subset E$ es un *emparejamiento* en G si ningún par de aristas en M son adyacentes en G . Se dice que los extremos de una arista en M están *emparejados* bajo M . Si cualquier vértice de G es incidente a alguna arista en M entonces a M se le llama *emparejamiento perfecto*. Es claro que una gráfica que tiene un emparejamiento perfecto debe tener un número par de vértices. Algunos ejemplos de gráficas con emparejamientos perfectos son: gráficas completas, ciclos y caminos, todos con un número par de vértices.

El siguiente resultado, obtenido por Tutte [18], establece una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga un emparejamiento perfecto. La demostración que presentaremos aquí será la dada por Lóvasz [13]. Llamaremos **componente par** (**impar**) a una componente de una gráfica con un número par (impar) de vértices. Denotaremos por $o(G)$ al número de componentes impares de G .

Teorema 1.5 (Tutte 1947). *G tiene un emparejamiento perfecto si y sólo si*

$$o(G \setminus S) \leq |S| \text{ para todo } S \subset V.$$

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $S \subset V$. Si G tiene un emparejamiento perfecto, entonces en cada componente impar de $G \setminus S$ debe existir un vértice que esté unido bajo M a uno de S . Esto implica que

$$o(G \setminus S) \leq |S|.$$

Ahora supongamos que $o(G \setminus S) \leq |S|$ para todo $S \subset V$, pero G no tiene un emparejamiento perfecto. En particular, al hacer $S = \emptyset$ se tiene que $o(G) = 0$, lo cual implica que G tiene un número par de vértices. Sea $G' = (V, E')$ una gráfica maximal sin emparejamientos perfectos que contiene a G . Como $G \setminus S$ genera a $G' \setminus S$, para todo $S \subset V$, tenemos que $o(G' \setminus S) \leq o(G \setminus S)$, y así

$$o(G' \setminus S) \leq |S| \text{ para todo } S \subset V.$$

Denotamos por U al subconjunto de vértices con grado $|G'| - 1$ en G' . Como G' no tiene emparejamientos perfectos entonces $U \neq V$. Primero probaremos que las componentes de $G' \setminus U$ son gráficas completas. Supongamos lo contrario, entonces alguna componente no es completa y en ella existen vértices x, y y z tales que $xy, yz \in E'$ y $xz \notin E'$. Por otra parte, como $y \notin U$ existe $w \in G' \setminus U$ tal que $yw \notin E'$.

Por la maximalidad de G' , las gráficas $G' \cup xz$ y $G' \cup yw$ tienen emparejamientos perfectos; sean M_1 y M_2 tales emparejamientos, respectivamente. Notemos que $xz \in M_1$ y $yw \in M_2$. Sea H la subgráfica de $G' \cup \{xz, yw\}$ inducida por los vértices incidentes a las aristas en $M_1 \cup M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)$. Cada vértice de H tiene grado 2, por lo que H es una unión ajena de ciclos. Además las aristas de estos ciclos alternan entre M_1 y M_2 , de lo cual concluimos que los ciclos tienen longitud par. Se pueden presentar dos casos:

- 1) xz y yw están en componentes diferentes de H .

Sea C el ciclo de H al que pertenece yw . Entonces tomando las aristas de M_1

que pertenecen a C y las aristas de M_2 que no pertenecen a C obtenemos un emparejamiento perfecto en G' , lo cual contradice la hipótesis (Ver Figura 1.13 (a)).

2) xz y yw están en la misma componente de H .

Sea C el ciclo al que pertenecen xz y yw . Sin pérdida de generalidad, supongamos que z, x, y, w aparecen en C en sentido contrario a las manecillas del reloj. Entonces las aristas de M_1 en la sección $yw \dots z$ de C junto con yz y las aristas de M_2 que no están en la sección $yw \dots z$ de C constituyen un emparejamiento perfecto de G' , lo cual es una contradicción (Ver Figura 1.13 (b)).

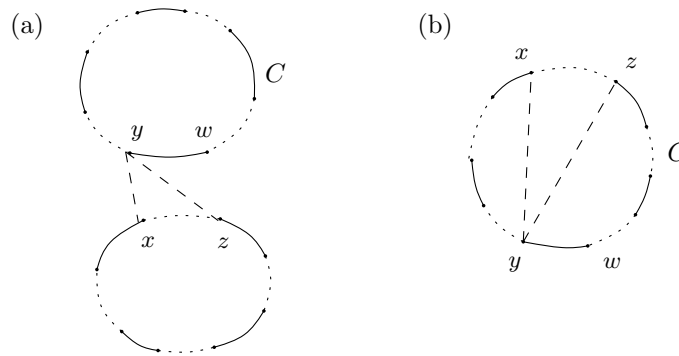


Figura 1.13: (a) xz y yw están en componentes diferentes de H y (b) xz y yw están en la misma componente de H . Las aristas en M_1 están representadas con líneas punteadas y las aristas en M_2 con líneas continuas.

Como en ambos casos llegamos a una contradicción, concluimos que las componentes de $G' \setminus U$ son gráficas completas.

Por hipótesis, tenemos que $o(G' \setminus U) \leq |U|$. Pero entonces podemos obtener un emparejamiento perfecto de G' de la siguiente manera: a cada componente impar de $G' \setminus U$ le agregamos un vértice de U haciéndola una gráfica completa con un número par de vértices, la cual ya sabemos que tiene un emparejamiento perfecto al igual que las componentes pares de $G' \setminus U$, y al resto de los vértices de U los unimos con vértices de U . Lo anterior nos lleva a una contradicción, y como habíamos partido de la suposición de que G no tenía un emparejamiento perfecto entonces G sí tiene un emparejamiento perfecto. ■

1.4. Gráficas en el plano

Dado que, formalmente, una gráfica plana es un subconjunto del plano euclidiano, antes de dar su definición revisaremos algunos conceptos topológicos que servirán pa-

ra comprender de forma más completa lo que es una gráfica plana y los conceptos derivados de ella. Con este objetivo, en la Sección 1.4.1 definiremos algunos conceptos topológicos para luego dar las definiciones de gráfica plana, gráfica aplanable y polígono en la Sección 1.4.2 y tratar el tema de triangulaciones en la Sección 1.4.3, las cuales son un tipo particular de gráficas planas.

1.4.1. Algunos conceptos topológicos

El plano euclidiano se define como el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ dotado de la topología inducida por la distancia euclidiana ^a. Denotaremos por $B_\varepsilon(x)$ a la bola abierta con centro en x y de radio ε , esto es, el conjunto de puntos cuya distancia a x es menor que ε . Las bolas abiertas serán la base de esta topología, ya que a partir de ellas definiremos los conjuntos abiertos. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ es **abierto** si para todo $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset X$. En particular, las bolas abiertas son conjuntos abiertos. Un conjunto es **cerrado** si su complemento es abierto.

Los conjuntos abiertos satisfacen las siguientes propiedades:

1. unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto,
2. intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.

Como el complemento de un conjunto abierto es cerrado, de las propiedades anteriores se sigue que los conjuntos cerrados satisfacen lo siguiente:

1. intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado,
2. unión finita de conjuntos cerrados es cerrado.

El **interior** de X , denotado por $\overset{\circ}{X}$, es el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset X$. Claramente, $\overset{\circ}{X}$ es un conjunto abierto, y de hecho es el abierto más grande contenido en X . La **cerradura** de X , denotada \overline{X} , es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $B_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset$ para toda $\varepsilon > 0$. Es fácil probar que \overline{X} es un conjunto cerrado y que además es el cerrado más pequeño que contiene a X . De esto podemos concluir que $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}$. La **frontera** de X , denotada ∂X , es el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que $B_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{R}^2 \setminus X \neq \emptyset$. Tenemos que $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus X}$, de lo cual se sigue que la frontera es cerrada.

^aRecordemos que la distancia euclidiana entre dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ se define como $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Un conjunto es **disconexo** si es la unión de dos conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos; y es **conexo** si no es desconexo. A los conjuntos conexos les llamaremos **regiones**. La propiedad de ser maximalmente conexo induce una partición en un conjunto desconexo. Para cada $x \in X$ definimos la **componente conexa** $C(x)$, o simplemente **componente**, como la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x . Notemos que $C(x)$ es un conjunto conexo maximal en X .

Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^2$. Decimos que X y Y son **homeomorfos** si existe una función $h : X \rightarrow Y$ continua, biyectiva y con inversa continua. A esta función h le llamamos **homeomorfismo**. Un **arco** A lo definiremos como un conjunto homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si $h : [0, 1] \rightarrow A$ es dicho homeomorfismo entonces los puntos $h(0)$ y $h(1)$ son los **extremos** de A y la imagen del intervalo abierto $(0, 1)$ bajo h es llamada el **interior** de A . Un tipo especial de arcos son los segmentos de recta, a estos los denotamos por \overline{xy} , donde x y y son los extremos del segmento. Para el segmento dirigido de x a y usaremos la notación \vec{xy} . A partir de los segmentos de recta definimos las **poligonales**, estas son arcos que son unión finita de segmentos de recta. También se define el concepto de convexidad: un conjunto X es **convexo** si $\overline{xy} \subset X$, para todo par de puntos $x, y \in X$.

Definiremos **curva de Jordan** como un conjunto homeomorfo al círculo unitario \mathbb{S}^1 . A continuación mencionamos el Teorema de la Curva de Jordan, el cual nos será útil cuando hablemos de polígonos (Sección 1.4.2).

Teorema 1.6. *Sea \mathcal{J} una curva de Jordan. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{J}$ tiene exactamente dos componentes, las cuales tienen como frontera a \mathcal{J} .*

Decimos que X es **acotado** si existe $x \in \mathbb{R}^2$ y un número natural n tal que $X \subset B_n(x)$. Así, una curva de Jordan \mathcal{J} separa el plano en dos regiones abiertas que tienen a \mathcal{J} como frontera, una de las cuales es acotada y es llamada el **interior** de \mathcal{J} , y la otra no acotada llamada el **exterior**. Diremos que \mathcal{J} **acota** un subconjunto del plano X si X está contenido en la unión de \mathcal{J} y su interior.

Decimos que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$. Diremos que X es **simplemente conexo** si la función identidad $id_X : X \rightarrow X$ es homotópica a la función constante $c_{x_0} : X \rightarrow X$ dada por $c_{x_0}(x) = x_0$. Intuitivamente, un espacio simplemente conexo es uno que no tiene "hoyos". Por ejemplo, la bola unitaria $B_1(0, 0)$ es simplemente conexa mientras que $B_1(0, 0) \setminus (0, 0)$ y el círculo unitario \mathbb{S}^1 no lo son.

1.4.2. Gráficas planas, aplanables y polígonos

Una gráfica *plana* es un par de conjuntos finitos $G = (V, E)$ (al igual que en una gráfica los elementos de V son llamados vértices y los de E aristas) con las siguientes propiedades:

- P1 los vértices son puntos del plano,
- P2 las aristas son arcos cuyos extremos son dos vértices distintos,
- P3 no hay dos aristas que compartan ambos extremos,
- P4 el interior de una arista no contiene ningún vértice ni puntos de otra arista.

Notemos que la propiedad P3 nos permite referirnos a una arista de una gráfica plana indicando solamente sus vértices. Representaremos a una gráfica plana $G = (V, E)$ por el subconjunto del plano $V \cup \bigcup_{e \in E} e$, el cual es un conjunto cerrado.

Una gráfica plana $G = (V, E)$ induce de manera natural una gráfica $G' = (V', E')$, donde $V = V'$ y $E' = \{uv \mid u \text{ y } v \text{ son los extremos de alguna arista } e \in E\}$. Una gráfica isomorfa a la gráfica inducida por una gráfica plana es llamada *aplanable*. Un ejemplo de una gráfica que no es aplanable es la gráfica completa K_5 (Ver Figura 1.6). Por lo anterior, podemos decir que una gráfica aplanable es aquella que puede ser dibujada en el plano sin que sus aristas se intersecten y que las gráficas planas son los diagramas de las gráficas aplanables que tienen esta propiedad.

Todos los conceptos definidos para gráficas también aplicarán para gráficas planas. Por ejemplo, dos gráficas planas serán isomorfas si sus gráficas inducidas son isomorfas, una gráfica plana será conexa si su gráfica inducida es conexa, etc.

Sea G una gráfica plana. A las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ les llamamos *caras* de G . Dado que G está acotada, exactamente una de sus caras es no acotada, a esta le llamamos *cara exterior* y a las demás caras les llamamos *caras interiores*. Notemos que las caras de una gráfica plana son conjuntos abiertos. Diremos que dos caras son *adyacentes* si hay una arista que está en la frontera de ambas. También diremos que una arista es *adyacente* a una cara si la arista está en la frontera de la cara.

Si G es una gráfica plana entonces definimos la gráfica *dual* de G , denotada G^* , como la multigráfica con las siguientes propiedades:

- D1 existe una correspondencia biunívoca entre las caras de G y los vértices de G^* ,

D2 existe una correspondencia biunívoca entre las aristas de G y las aristas de G^* dada de la siguiente manera: si e es una arista de G entonces la arista e^* de G^* que está relacionada con e tiene como extremos a las dos caras de G adyacentes a e .

Como dijimos, G^* no es una gráfica bajo la definición dada aquí, aunque se le llame gráfica dual, sino que es una multigráfica. La razón de esto es porque G^* puede tener dos o más aristas con los mismos extremos o una arista con ambos extremos iguales, estos casos se ilustran en la Figura 1.14. Observemos que D1 y D2 definen una única multigráfica, salvo isomorfismos, por lo que podemos hablar de *la* gráfica dual sin riesgo a ambigüedad.

Hay una forma de dibujar G^* tal que su diagrama satisfaga las condiciones P1 y P4 de una gráfica plana; a estas multigráficas se les llama **multigráficas aplanables** y a los diagramas con las características mencionadas se les llama **multigráficas planas**. La manera de dibujar el diagrama de la gráfica dual para que resulte ser una multigráfica plana es la siguiente: dibujamos un vértice f^* en cada cara de G , y por cada arista e de G trazamos una arista e^* de tal forma que cruce una única vez a e y no cruce ninguna otra arista (Ver Figura 1.14). El hecho de que la gráfica dual sea aplanable tiene una demostración formal aunque aquí nos conformaremos con el argumento intuitivo dado anteriormente. Muchas veces nos convendrá pensar en la gráfica dual como la multigráfica plana construida como se explicó previamente, así que no distinguiremos entre ambas.

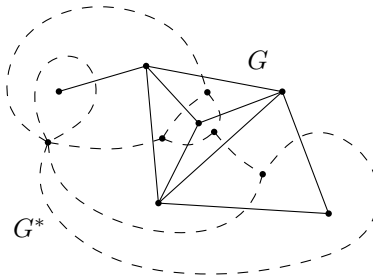


Figura 1.14: La gráfica plana G y su dual G^* .

De la misma forma en que la que se obtiene la gráfica dual de una gráfica plana, se puede obtener la gráfica dual a partir de una multigráfica plana. Así, tiene sentido hablar de la gráfica dual de la gráfica dual, la cual es isomorfa a la gráfica original cuando esta es conexa, esto es $G \cong G^{**}$. Para convencernos de esto, dibujemos la gráfica plana G y su dual G^* de la forma mencionada. La idea de la demostración consiste en notar que cada cara de G^* contiene un único vértice de G y que cada vértice de G está en una cara de G^* , por lo que hay una biyección entre los vértices

de G y los vértices de G^{**} . Ahora, tomemos dos vértices adyacentes $u, v \in G$ y sea $e = uv$. A estos vértices les corresponden dos caras C_u, C_v de G^* , las cuales son adyacentes ya que tienen en su frontera a la arista e^* (Ver Figura 1.15).

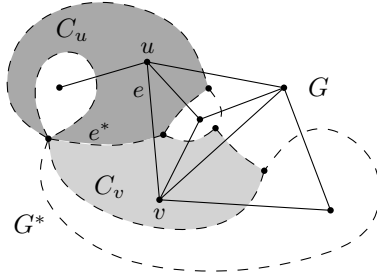


Figura 1.15: Ilustración de la prueba de que $G \cong G^{**}$.

Otro tipo de subconjuntos del plano que nos interesará son los polígonos. Un **polígono** es una gráfica plana P tal que los vértices son v_0, \dots, v_{n-1} , con $n \geq 3$, y el conjunto de aristas son los segmentos de recta $\overline{v_0v_1}, \dots, \overline{v_{n-1}v_0}$. Observemos que la gráfica que induce un polígono es un ciclo, por lo que puede denotarse indicando solamente la sucesión de vértices que lo conforman, es decir, $P = v_0 \dots v_{n-1}v_0$. Por esta razón al polígono de 3 vértices se le llama **triángulo** al igual que el ciclo de 3 vértices; al polígono de 4 vértices le llamaremos **cuadrilátero**.

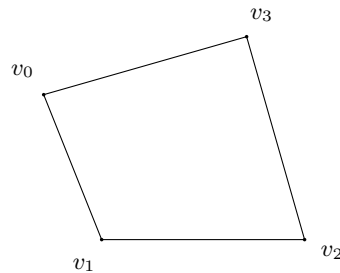


Figura 1.16: Un polígono de 4 vértices.

Observemos que un polígono es una curva de Jordan, por lo que divide al plano en dos regiones: el interior y el exterior. Algunos autores representan un polígono en el plano por la unión de la curva $\bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{v_i v_{i+1}}$ (suma módulo n) y su interior; nosotros también representaremos así a los polígonos. Notemos que entonces la frontera de una polígono P corresponde a la curva $\bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{v_i v_{i+1}}$ (suma módulo n). Otro concepto relacionado con polígonos es el de **diagonal**, el cual se refiere a un segmento \overline{uv} contenido en P que une dos vértices u y v no consecutivos.

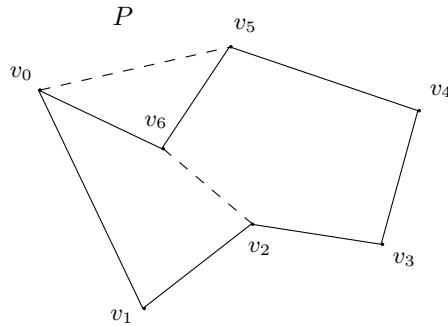


Figura 1.17: Un polígono P de 7 vértices. El segmento $\overline{v_0v_5}$ no es una diagonal, pero $\overline{v_2v_6}$ sí lo es.

1.4.3. Triangulaciones

Definiremos **triangulación** como una gráfica plana tal que la cerradura de cada una de sus caras interiores es un triángulo. Una **triangulación** de un polígono P es una triangulación T tal que $V(T) = V(P)$ y $E(P) \subset E(T) \subset E(P) \cup D$, donde D denota el conjunto de diagonales de P . Para denotar una triangulación de un polígono P escribiremos $T(P)$. El siguiente teorema afirma que todo polígono tiene al menos una triangulación, aunque puede ser que esta no sea única, como vemos en la Figura 1.18.

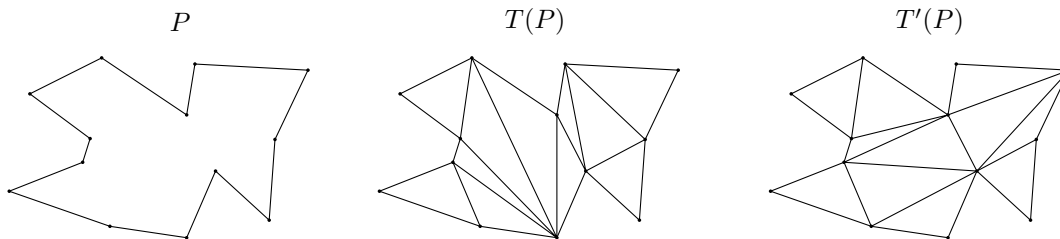


Figura 1.18: Un polígono P y dos de sus triangulaciones $T(P)$ y $T'(P)$.

Teorema 1.7. *Todo polígono puede ser triangulado, además toda triangulación de un polígono de n vértices consta de $n - 2$ triángulos.*

Demostración. La demostración será por inducción en el número de vértices del polígono. Es claro que un polígono de $n = 3$ vértices ya está triangulado y el número de triángulos es $1 = n - 2$. Ahora supongamos que podemos triangular cualquier polígono con menos de $n \geq 4$ vértices y que la triangulación tiene $n - 2$ triángulos. Sea $P = v_0 \dots v_{n-1}v_0$ un polígono con n vértices. Primero probaremos que P tiene una diagonal. Tomemos tres vértices consecutivos v_{k-1} , v_k y v_{k+1} tal que el ángulo

en v_k interior al polígono es menor a 180° . Si la arista $v_{k-1}v_{k+1}$ está contenida en P entonces es una diagonal. Si $v_{k-1}v_{k+1}$ no está contenida en P entonces existe al menos un vértice contenido en el triángulo $v_{k-1}v_kv_{k+1}v_{k-1}$. Sea u el vértice de P más cercano a v_k que está contenido en ese triángulo. Tenemos que el segmento $\overline{v_k u}$ está totalmente contenido en P y por lo tanto es una diagonal. Esta diagonal divide a P en dos polígonos P_1 y P_2 (Ver Figura 1.19). Si denotamos por n_i al número de vértices de P_i , para $i = 1, 2$, entonces tenemos que $n_1 + n_2 = n + 2$, ya que $\overline{v_k u}$ es arista de ambos polígonos y por lo tanto sus extremos se cuentan dos veces. Como claramente $n_i < n$ entonces, por hipótesis de inducción, cada uno de estos polígonos puede ser triangulado. La unión de estas triangulaciones corresponde a una triangulación de P , la cual tiene $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ triángulos. ■

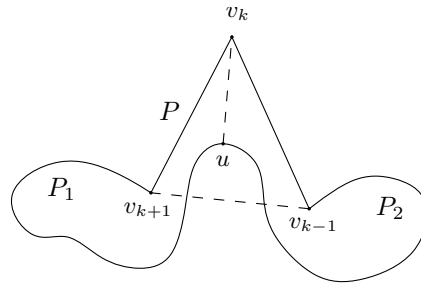


Figura 1.19: Ilustración de la demostración del teorema 1.7.

Una observación sobre la gráfica dual de una triangulación es que cada uno de sus vértices tiene grado menor o igual a 3. Esto se demuestra fácilmente, notando que cada triángulo es adyacente a lo más a 3 triángulos, por lo que cada vértice en la gráfica dual será adyacente a lo más a 3 vértices. El siguiente lema enuncia otra propiedad importante sobre las gráficas duales de triangulaciones de polígonos. A partir de ahora, en las gráficas duales no consideraremos las caras exteriores.

Lema 1.8. *La gráfica dual de una triangulación de un polígono es un árbol.*

Demostración. Sea P un polígono y $T(P)$ una triangulación. Las aristas de $T(P)^*$ corresponden a diagonales de P . Como toda diagonal parte a P en dos regiones ajenas, se tiene $T(P)^*$ se vuelve disconexa al eliminar cualquiera de sus aristas. Luego, por el teorema 1.1 (c), $T(P)^*$ es un árbol. ■

Para enunciar el siguiente teorema primero necesitaremos definir *oreja* de una triangulación; esta es un triángulo de la triangulación tal que dos de sus aristas son aristas del polígono.

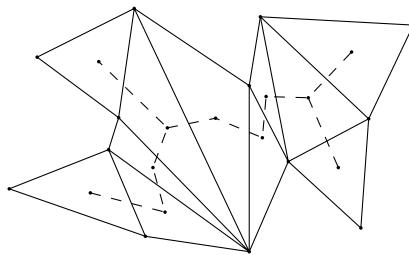


Figura 1.20: La gráfica dual de una triangulación de un polígono.

Teorema 1.9 (Meister 1975). *Toda triangulación de un polígono tiene al menos dos orejas.*

Demostración. Tenemos que la gráfica dual de una triangulación de un polígono es un árbol, por el lema 1.8, cuyas hojas corresponden a orejas de la triangulación. Como todo árbol tiene al menos dos hojas, por el lema 1.2, entonces la triangulación tiene al menos dos orejas. ■

1.5. Coloraciones

Una k -*coloración* de una gráfica $G = (V, E)$ es una función $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Se dice que una coloración es *buena* si $c(u) \neq c(v)$ siempre que u y v sean adyacentes. Diremos que una gráfica es k -*coloreable* si tiene una k -coloración buena. Una k -coloración induce una partición de los vértices en k conjuntos, llamados *clases cromáticas*, dados por $C_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$, para $i = 1, \dots, k$.

El siguiente teorema se refiere a coloraciones de vértices en triangulaciones de polígonos, y resultará muy útil en secciones posteriores.

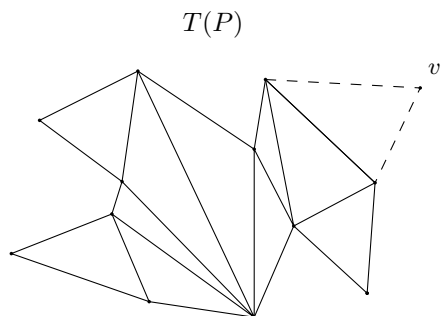


Figura 1.21: Ilustración de la demostración del teorema 1.10.

Teorema 1.10. *Toda triangulación de un polígono es 3-coloreable.*

Demostración. La demostración será por inducción en el número de vértices del polígono. Para un polígono con $n = 3$ vértices es trivial. Supongamos que el teorema es cierto para cualquier triangulación de un polígono con menos de $n \geq 4$ vértices. Sea P un polígono con n vértices y $T(P)$ una triangulación. Tomemos una oreja de $T(P)$. Por definición, dos lados de esa oreja son aristas de P ; llamemos v al vértice incidente a esas dos aristas (Ver Figura 1.21). Al remover v obtenemos un polígono triangulado con $n - 1$ vértices. Esta triangulación es 3-coloreable, por hipótesis. Ahora agregamos el vértice v y lo coloreamos de tal forma que su color sea distinto al de sus vértices adyacentes. Como sólo es adyacente a dos vértices, esto siempre es posible. Por lo tanto, $T(P)$ es 3-coloreable. ■

Capítulo 2

Galerías de arte

El problema que propuso Victor Klee consistía en determinar el mínimo número de guardias tal que fuera suficiente para vigilar cualquier galería con n paredes. Para esto, una galería de n paredes se modeló con un polígono de n vértices; por esta razón se usan indistintamente ambos términos. Sea P una galería, diremos que un punto $p \in P$ *vigila* un punto $q \in P$ si $\overline{pq} \subset P$; de igual manera, decimos que q es *visible* desde p . Notemos que esta definición permite que \overline{pq} intersecte a la frontera de P . A estos puntos que tienen la capacidad de vigilar otros puntos de la galería les llamamos *puntos guardia*. Decimos que un conjunto de guardias G *vigila* un subconjunto del plano X si todo punto $x \in X$ es vigilado por algún $g \in G$.

El primer libro dedicado enteramente a los problemas de galería de arte fue *Art Gallery Theorems and Algorithms* de J. O'Rourke [16], publicado en 1987. Desde entonces, se ha acumulado un gran acervo de artículos y libros en los que se tratan variantes del problema original y se muestran algoritmos para obtener los conjuntos de guardias. Entre ellos se pueden mencionar los compendios de T. Shermer [17] y J. Urrutia [19].

Las variantes consisten en la modificación del diseño de la galería y en la habilidad de los guardias para vigilar. En cuanto a los guardias, existen diferentes tipos dependiendo de las restricciones que les imponamos, por ejemplo fijando su posición o permitiendo la movilidad en cierta región del polígono. Los *vértices guardia* son

aquellos que mantienen fija su posición restringiéndose a los vértices de la galería. Otro tipo de guardias que vale la pena mencionar son los *guardias móviles*, los cuales fueron introducidos por Toussaint en 1981. Estos guardias ya no permanecen fijos en un punto sino que se les permite patrullar un segmento de recta totalmente contenido en la galería; un punto dentro de la galería se considera vigilado si es visible desde algún punto en la ruta del guardia.

Sobre la organización de este capítulo, en la primera sección nos dedicaremos a definir el problema original de Galería de Arte y a dar una demostración del Teorema de Chvátal. Las secciones posteriores tratarán sobre algunas de las variantes de galerías de arte más estudiadas: en la Sección 2.2 veremos galerías ortogonales, en la Sección 2.3 galerías con huecos y en la Sección 2.4 galerías tradicionales.

2.1. El problema original de Galería de Arte

Sea P un polígono con n vértices. Definimos $g(P)$ como el mínimo número de guardias que se necesitan para vigilar el polígono P , esto es, el mínimo entero k tal que existe un conjunto de k guardias que vigilan P . Definimos $G(n)$ como el máximo valor de $g(P)$ sobre todos los polígonos P con n vértices. A $G(n)$ le llamamos el número de guardias suficiente y a veces necesario para vigilar un polígono con n vértices. La suficiencia se debe a que cualquier polígono con n vértices puede ser vigilado con esa cantidad de guardias; y la necesidad es porque al menos un polígono con n vértices necesita ese número de guardias para ser vigilado, es decir, no puede ser vigilado con menos.

Así, se puede reformular el problema de Klee como “¿Cuál es la función $G(n)$?”. El Teorema de Galería de Arte de Chvátal respondió esta interrogante afirmando que $G(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Tres años después de haberse publicado este teorema, Fisk [7] dio otra demostración que resultó mucho más simple que la primera. A continuación enunciamos el Teorema de Chvátal con la demostración dada por Fisk.

Teorema 2.1 (Chvátal 1975). $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar una galería de arte con n vértices.

Demostración. Sea P una galería con n vértices. Por el teorema 1.7, P tiene una triangulación $T(P)$ y, por el teorema 1.10, $T(P)$ tiene una 3-coloración buena. Tomamos la clase cromática más pequeña de la coloración, la cual tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices, y colocamos un guardia en cada uno de esos vértices. Afirmamos que este conjunto de guardias vigila P . Esto es porque cada triángulo de $T(P)$, por ser convexo, puede ser vigilado con un sólo guardia posicionado en cualquier punto del

triángulo. Por la forma en la que escogimos los guardias sabemos que hay al menos uno en cada triángulo, por lo tanto $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son suficientes para vigilar cualquier polígono de n vértices.

Ahora probaremos la parte de necesidad. En la Figura 2.1 se muestra un polígono con 12 vértices que necesita 4 guardias para ser vigilado. Para cada k podemos construir un polígono con $n = 3k$ vértices, similar al de la Figura 2.1, que necesite $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias para ser vigilado. Este polígono estaría formado por k crestas. Cada cresta del polígono se puede vigilar con un guardia, y además un guardia vigila a lo más una cresta. Por lo tanto, este polígono necesita $k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias para ser vigilado. ■

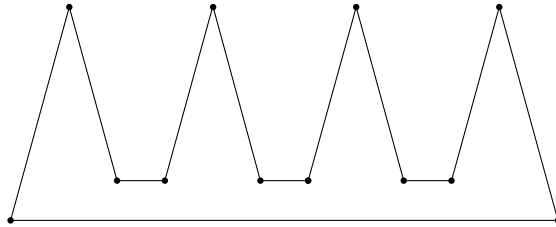


Figura 2.1: Prueba de necesidad del teorema 2.1.

2.2. Galerías ortogonales

En las *galerías ortogonales* cada arista es paralela a uno de los ejes coordenados, lo cual ocasiona que los ángulos interiores midan 90° o 270° . Ya que comúnmente la pared externa de un edificio es un polígono ortogonal, este tipo de galerías se acercan más a un modelo realista comparadas con aquellas a las que no se les impone ninguna restricción. En 1983, Kahn, Klawe y Kleitman [10] demostraron lo siguiente sobre este tipo de galerías:

Teorema 2.2 (Kahn, Klawe, Kleitman 1983). $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un polígono ortogonal con n vértices.

La demostración que dieron Kahn, Klawe y Kleitman comparte ciertas similitudes con la prueba de Fisk, en ambas se agregan diagonales para dividir el polígono en regiones convexas, sólo que en esta las regiones convexas son cuadriláteros. A una gráfica plana que se obtiene agregando diagonales a un polígono P de tal forma que la cerradura de cada cara interior sea un cuadrilátero se le llama *cuadrelaterización* de P . En la prueba se demuestra que todo polígono ortogonal tiene una *cuadrelaterización convexa*, es decir, una cuadrelaterización tal que todos sus cuadriláteros

son convexos. Después de construir esta cuadrelaterización convexa, se obtiene una 4-coloración de sus vértices de tal forma que cada cuadrilátero tenga sus cuatro vértices de colores distintos. Como cada cuadrilátero es convexo, un guardia dentro de este es suficiente para vigilarlo. Por esta razón, podemos colocar guardias en los vértices que pertenecen a la clase cromática más pequeña y con estos vigilar todo el polígono. Así, colocamos a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices guardias.

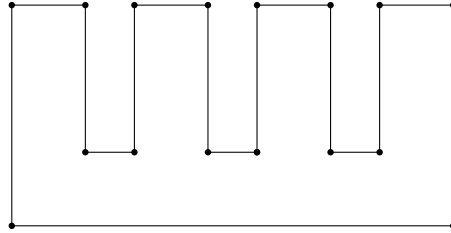


Figura 2.2: Polígono ortogonal con 16 vértices que necesita 4 vértices guardia para ser vigilado.

Para demostrar la parte de necesidad se construyen polígonos como el que se muestra en la Figura 2.2. Un polígono de esta forma tiene $n = 4k$ vértices y está formado por k crestas. Cada cresta puede vigilarse con un guardia y un guardia puede vigilar a lo más una cresta. Por lo tanto, este polígono necesita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices guardias.

2.3. Galerías con huecos

Hay otra variante en la que se consideran galerías que contienen polígonos, cuyo interior no forma parte de la galería. A estas galerías se les llama **galerías con huecos** o **polígonos con huecos**. Formalmente, se define un polígono con huecos P a partir de un polígono P_0 y un conjunto $\mathcal{H} = \{P_1, \dots, P_h\}$ de polígonos ajenos por pares, tales que P_k está en el interior de P_0 para $k = 1, \dots, h$. P se define entonces como la gráfica plana cuyo conjunto de vértices es $\bigcup_k V(P_k)$, cuyo conjunto de aristas es $\bigcup_k E(P_k)$ y que se representa en el plano por el conjunto $\overline{P_0} \setminus \bigcup_k \overline{P_k}$. Al polígono P_0 le llamaremos **polígono exterior** y a los elementos de \mathcal{H} **huecos**. Los huecos funcionan como obstáculos para la visibilidad de los guardias, ya que estos no pueden ver a través de los huecos. Las galerías ortogonales con huecos son aquellas en las que tanto el polígono exterior como los huecos son polígonos ortogonales, tomando el mismo par de ejes coordenados para todos los polígonos.

El primer resultado para polígonos con huecos fue dado por O'Rourke [16], el cual afirma lo siguiente:

Teorema 2.3 (O'Rourke 1982). *Para vigilar un polígono con n vértices y h huecos son suficientes $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ vértices guardia, y para un polígono ortogonal con huecos son suficientes $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$ vértices guardia.*

En la prueba del resultado para polígonos con huecos, primero se eliminan los huecos “cortando” el polígono a través de diagonales que unan el polígono exterior con un hueco o que unan dos huecos. Al realizar este procedimiento se añaden dos vértices por corte, por lo que al final se obtiene un polígono sin huecos con $n + 2h$ vértices, y el resultado se sigue del Teorema de Chvátal. Para polígonos ortogonales con huecos la técnica es similar, también se “corta” el polígono a través de diagonales para eliminar los huecos, pero en este caso lo que se obtiene después de eliminar todos los huecos no es necesariamente un polígono ortogonal. Sin embargo, este polígono tiene una cuadrelaterización convexa, y esta tiene una 4-coloración buena. Colocando guardias en los vértices de la clase cromática más pequeña se obtiene la cota.

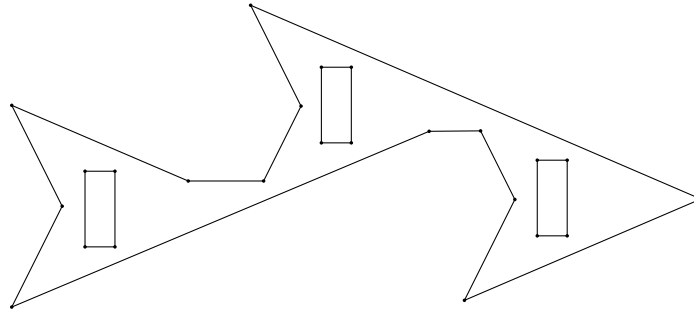


Figura 2.3: Polígono con 24 vértices y 3 huecos que necesita 9 vértices o puntos guardia para ser vigilado.

En ese mismo año, Shermer dio ejemplos de familias de polígonos con huecos que necesitan $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ vértices guardia para ser vigilados (Ver Figura 2.3). En 1984, Shermer e independientemente Aggarwal probaron que $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ vértices guardia son suficientes para $h = 1$; esto llevó al primero a conjeturar que $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ vértices guardia son siempre suficientes. Shermer también conjetura, basándose en el polígono mostrado en la Figura 2.4, que $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ vértices guardia son siempre suficientes para vigilar un polígono ortogonal con huecos.

Para puntos guardia, Bjorling-Sachs y Souvaine [1] e independientemente Hoffman, Kaufman y Kriegel [9] probaron que:

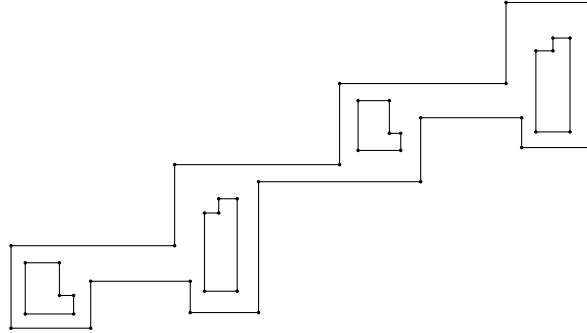


Figura 2.4: Polígono ortogonal con 44 vértices y 4 huecos que necesita 12 vértices guardia para ser vigilado.

Teorema 2.4 (Bjorling-Sachs, Souvaine, Hoffman, Kaufman, Kriegel 1991). $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ puntos guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono con n vértices y h huecos.

La técnica que usaron Bjorling-Sachs y Souvaine fue reducir el problema al caso sin huecos. Para esto se elimina cada hueco agregando aristas que unan vértices del hueco con puntos del polígono exterior o con puntos de otro hueco. Primero se toma una arista $v_i v_{i+1}$ de algún hueco H tal que el ángulo en v_{i+1} interior al polígono sea mayor a 180° y tal que su prolongación en la dirección de v_{i+1} interseccione a P , donde P es el polígono exterior u otro hueco, luego en el punto de intersección agregamos el vértice u . Sea v un punto sobre la arista en la que se encuentra u tal que u y v se encuentren a una distancia muy pequeña y además el cuadrilátero $C = v_{i+1} v_{i+2} v u v_{i+1}$ sea convexo, entonces en v agregamos otro vértice. Después eliminamos la arista $v_{i+1} v_{i+2}$ y el segmento \overline{uv} , y agregamos las aristas $v_{i+1} u$ y $v_{i+2} v$. Así, la frontera de $H \setminus v_{i+1} v_{i+2}$ y la frontera de $P \setminus uv$ se combinan mediante la adición de $v_{i+1} u$ y $v_{i+2} v$. Al final de esta construcción hemos agregado dos vértices, a saber u y v , pero como el vértice v_{i+1} ahora se encuentra en el interior de la arista $v_i u$ lo podemos eliminar. Luego, solamente tuvimos que añadir un vértice para obtener un polígono con $h - 1$ huecos. Realizando este procedimiento recursivamente obtenemos un polígono sin huecos con $n + h$ vértices.

Para vigilar el polígono construido se sigue la idea de Fisk de triangular el polígono y 3-colorear los vértices, pero debemos cuidar que en la triangulación aparezca por cada hueco un triángulo T tal que $C \cup T$ sea convexo, y así un guardia en cualquiera de los vértices de T vigilará también C . La cota corresponde a puntos guardia y no a vértices guardia ya que los guardias se posicionan en los vértices del polígono sin huecos que construimos, pero algunos de los vértices de este son puntos interiores a las aristas del polígono original. Se demuestra que siempre es posible realizar esta

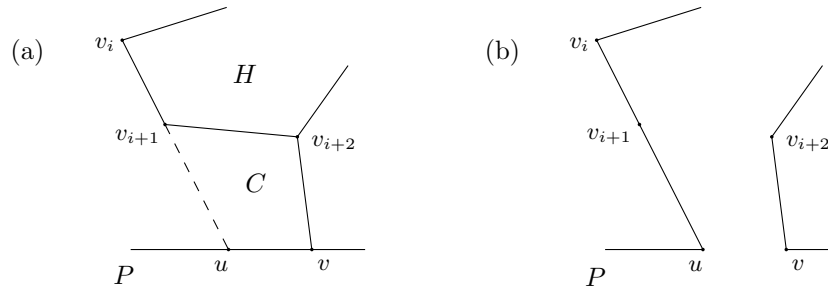


Figura 2.5: Prueba de suficiencia del teorema 2.4.

construcción, por lo que $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ puntos guardia son suficientes para vigilar un polígono con huecos.

La cota inferior se prueba construyendo para cada n un polígono con huecos similar al de la Figura 2.3 que necesite $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ puntos guardias para ser vigilado.

Otro resultado sobre polígonos con huecos fue dado por Hoffman en 1990, el cual trata de vigilancia con puntos guardia en polígonos ortogonales con huecos. Lo interesante de este resultado es que el número de guardias no depende del número de huecos.

Teorema 2.5 (Hoffman 1990). $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ puntos guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un polígono ortogonal con n vértices y h huecos.

En la Figura 2.6 se muestra un polígono ortogonal con huecos que necesita esta cantidad de guardias para ser vigilado.

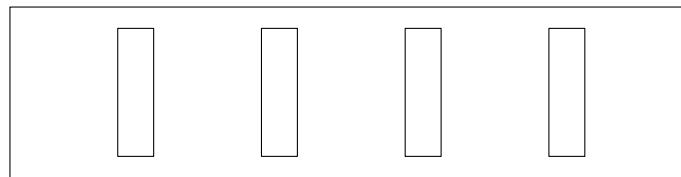


Figura 2.6: Polígono ortogonal con 20 vértices y 4 huecos que necesita 5 puntos guardia para ser vigilado.

2.4. Galerías tradicionales

Si nos piden pensar en una galería, lo más probable es que la imagen que nos venga a la mente sea la de un cuarto rectangular dividido en habitaciones rectangulares, con

puertas que comuniquen habitaciones contiguas. Las *galerías tradicionales* son las que se acercan más a esta idea; éstas están formadas por un rectángulo dividido en rectángulos más pequeños, que representan las habitaciones, tales que dos adyacentes se comunican por medio de una puerta.

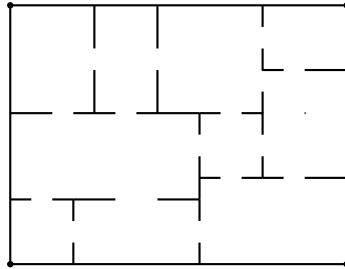


Figura 2.7: Una galería tradicional.

El siguiente teorema afirma que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias son suficientes para vigilar una galería tradicional con n habitaciones. La idea más importante de la prueba, y que es la que nos permite obtener la cota, es el emparejamiento de la gráfica dual, lo cual es equivalente a agrupar pares de habitaciones contiguas.

Teorema 2.6 (Czyzowicz, Rivera-Campo, Santoro, Urrutia, Zaks 1994). *Toda galería tradicional con n habitaciones puede ser vigilada con $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias.*

Demostración. Sea G una galería tradicional. Sea D la gráfica cuyos vértices son las habitaciones de G , tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si las habitaciones correspondientes se comunican. Lo que probaremos será que D tiene un emparejamiento perfecto cuando el número de vértices es par. Así, por cada arista del emparejamiento podremos colocar un guardia en la puerta que comunica a ambas habitaciones, con lo cual vigilaremos G . Para el caso cuando D tiene un número impar de vértices, bastará dividir cualquier habitación en dos.

Supongamos que D tiene un número par de vértices. Para probar que D tiene un emparejamiento perfecto usaremos el Teorema de Tutte (teorema 1.5). Sea $S \subset V(D)$ y k el número de componentes de $D \setminus S$. Observemos que cada componente en $D \setminus S$ representa un polígono ortogonal en G , posiblemente con huecos. Como cada polígono ortogonal tiene al menos 4 esquinas, entonces en total por todas las componentes se tienen al menos $4k$ esquinas. Observemos que al agregar una de las habitaciones de G representada por un vértice de S a lo más desaparecen 4 esquinas, y que al agregar todas las habitaciones en S sólo nos quedamos con las 4 esquinas de G . De lo anterior se tiene que en total a lo más podemos tener $4|S| + 4$ esquinas por todas

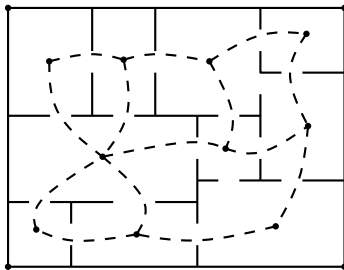


Figura 2.8: Ilustración de la prueba del teorema 2.6.

las componentes de $D \setminus S$. Luego se tiene que $4k \leq 4|S| + 4$, o lo que es equivalente $k \leq |S| + 1$. En el caso cuando $k = |S| + 1$ se tiene que al menos una componente de $D \setminus S$ es par, lo cual se demuestra fácilmente usando argumentos de paridad. Por lo tanto $o(D \setminus S) \leq |S|$, lo cual implica que D tiene un emparejamiento perfecto. ■

Podemos ver que la cota dada por el teorema anterior es justa. Por ejemplo, la galería de la Figura 2.9 necesita $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias para ser vigilada.

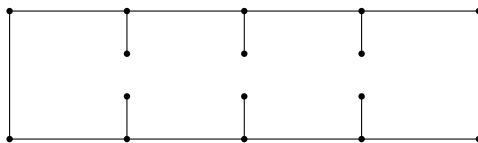


Figura 2.9: Prueba de necesidad del teorema 2.6.

Capítulo 3

Galerías curvilíneas

Al permitir que las aristas de una galería sean curvas simples arbitrarias se obtiene una variante muy interesante: las galerías curvilíneas. Estas fueron propuestas por M. Karavelas y E. Tsigaridas en el 2007. El tema central de su investigación fueron galerías que presentan cierta propiedad de concavidad o convexidad en sus aristas, ya que el número de guardias necesario para vigilarlas está acotado por una función lineal del número de vértices.

Sobre el contenido de este capítulo, en la Sección 3.1 se definen los tipos de galerías estudiadas por Karavelas y Tsigaridas. En las secciones posteriores se presentan y demuestran algunos resultados sobre galerías curvilíneas; los resultados de las secciones 3.2 y 3.3 son de Karavelas, Tóth y Tsigaridas [12, 11], y el de la Sección 3.4 de Cano, Tóth y Urrutia [3].

3.1. Definiciones

Sea $P = (V, A)$ una gráfica plana donde $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ es el conjunto de vértices, con $n \geq 3$, y $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ es el conjunto de aristas tal que los extremos de a_i son v_i y v_{i+1} . Si además pedimos que las aristas sean curvas diferenciables por pedazos entonces a la unión de la curva $\bigcup_{a \in A} a$ y su interior le llamamos **polígono curvilíneo** o **galería curvilínea**. En lo que resta del capítulo, los elementos del conjunto de vértices de P se denotarán por $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ y los elementos del

conjunto de aristas por $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$.

Si $a_i \cup \overline{v_i v_{i+1}}$ es una curva simple y su interior es convexo entonces a a_i le llamamos **arco convexo**. Sea a_i un arco convexo y denotemos por C_i al interior de $a_i \cup \overline{v_i v_{i+1}}$. Si para cada punto p en el interior de a_i existe $\varepsilon > 0$ tal que $C_i \cap B_\varepsilon(p)$ está contenido en P entonces decimos que a_i es **convexo con respecto a P** . Si, en cambio, a_i es un arco convexo pero no es convexo con respecto a P entonces decimos que a_i es **cóncavo con respecto a P** . Cuando todas las aristas de un polígono P son arcos convexos (arcos cóncavos) con respecto a él, a P le llamamos **polígono arista-convexo** (**polígono arista-cóncavo**).

Con esto hemos definido los dos tipos de galerías que serán de nuestro interés en este capítulo, que son los polígonos arista-convexos y arista-cóncavos. Como hemos dicho, el número de guardias necesario para vigilar este tipo de galerías está acotado por una función lineal del número de vértices. Sin embargo, si consideramos polígonos curvilíneos en general esto no ocurre (aún cuando sus aristas sean arcos convexos), ya que dado un número fijo de vértices n podemos construir un polígono curvilíneo que necesite más de g guardias para cualquier entero g (Ver Figura 3.1).

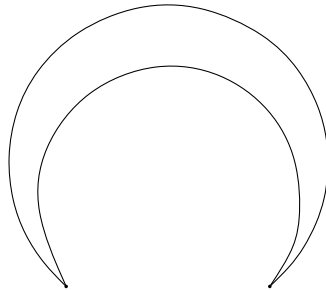


Figura 3.1: Entre más “delgado” hagamos el polígono más guardias necesitaremos para vigilarlo, mientras que el número de vértices se mantiene constante.

3.2. Puntos guardia en galerías arista-cóncavas

En las galerías arista-cóncavas el número de puntos guardias necesario para vigilarlas está acotado por una función lineal del número de vértices. Sin embargo, si consideramos vértices guardia es posible que la galería no pueda ser vigilada completamente. Un ejemplo se muestra en la Figura 3.5 (b). En este polígono cualesquiera dos aristas consecutivas son tangentes en el vértice que tienen en común. Como resultado, los vértices de la galería únicamente ven los segmentos de recta representados

por las líneas discontinuas.

A continuación presentamos el resultado de Karavelas, Tóth y Tsigaridas sobre vigilancia en galerías arista-cóncavas con puntos guardia.

Teorema 3.1 (Karavelas, Tóth, Tsigaridas 2009). *Sea P un polígono arista-cóncavo con n vértices. Entonces $2n - 4$ puntos guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar P .*

Demostración. Sea $P = (V, A)$ un polígono arista-cóncavo con n vértices. Denotamos por $t_j(i)$ a la recta tangente al arco a_j en el punto v_i , para $i = j, j + 1$. También denotamos por b_i al rayo con vértice en v_i que biseca el ángulo formado por $t_{i-1}(i)$ y $t_i(i)$, y que intersecta el interior de P . A partir de estas rectas construimos el conjunto de arcos $\Lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}$, tal que sus elementos satisfagan lo siguiente:

1. $\lambda_i \subset P$ y es un arco convexo cuyos extremos son v_i y v_{i+1} ,
2. λ_i es tangente a b_i (a b_{i+1}) en v_i (en v_{i+1}),
3. el número de tangencias entre los elementos de Λ es máximo,
4. si denotamos por C_i al interior de la curva $\lambda_i \cup v_i v_{i+1}$ entonces $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo i, j .

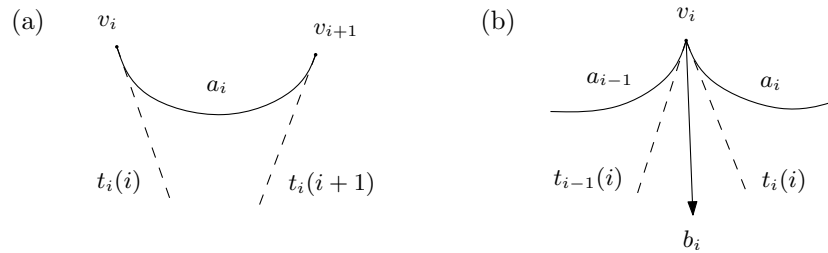


Figura 3.2: (a) Construcción de las rectas $t_i(i)$ y $t_{i+1}(i+1)$, (b) construcción de la bisectriz b_i .

Sea Q la gráfica plana que tiene por conjunto de vértices a V y por conjunto de aristas a Λ (Ver Figura 3.3). Tenemos que Q es un polígono arista-cóncavo cuyas caras interiores son triángulos, ya que el número de tangencias entre los elementos de Λ es máximo. Además, Q tiene la propiedad de que al ser vigilado también se vigilará P . Por esto, en lo que sigue nos dedicaremos a encontrar un conjunto de guardias que vigilen Q .

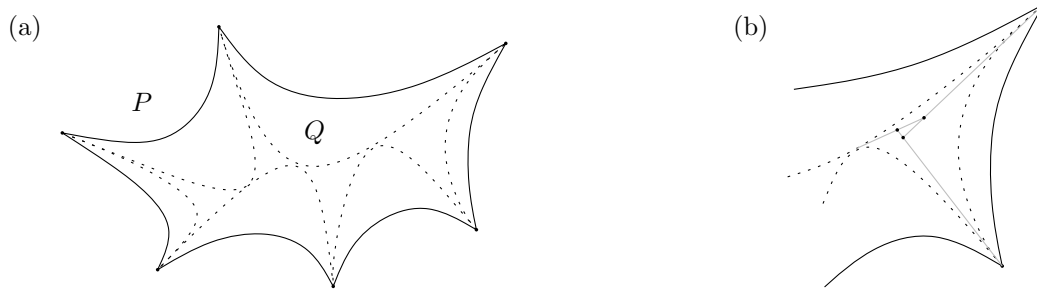


Figura 3.3: (a) Los polígonos P y Q , (b) una cara interior de Q junto con los segmentos $r_{i,\sigma(j)}$.

Para cada arista λ_i , sean $\sigma(1), \dots, \sigma(m)$ los índices de las aristas tangentes a λ_i . Construimos las rectas $l_{i,\sigma(j)}$ tangentes a λ_i y $\lambda_{\sigma(j)}$ en su punto de tangencia. Llamemos $r_{i,\sigma(j)}$ al segmento que une los puntos de intersección de $l_{i,\sigma(j)}$ con $l_{i,\sigma(j-1)}$ y $l_{i,\sigma(j+1)}$. Notemos que cada triángulo que es cara interior de Q tiene por bisectrices a los segmentos $r_{i,\sigma(j)}$ (Ver Figura 3.3 (b)). Las intersecciones de estas bisectrices generan a lo más tres puntos en el interior de cada triángulo. Observemos que colocando guardias en dos de estos puntos de intersección por cada cara es suficiente para vigilar el polígono Q . Llamemos G al conjunto de guardias obtenido de esta forma.

Ahora veamos cuál es la cardinalidad de G . Para esto construimos la gráfica Γ que tiene por vértices a Λ , tal que dos de ellos son adyacentes si las curvas son tangentes. Tenemos que Γ es aplanable, ya que se puede dibujar en el plano como se muestra en la Figura 3.4. Esta gráfica plana es generada por el polígono $\lambda_0 \dots \lambda_{n-1} \lambda_0$, y toda arista de Γ es una arista o una diagonal de este polígono. Como el número de tangencias entre los elementos de Λ es máxima, se tiene que el número de adyacencias de la gráfica Γ es máximo. Por lo tanto, Γ es isomorfa a un polígono triangulado de n vértices. Observemos que los triángulos en Γ están en correspondencia biunívoca con las caras interiores de Q . Como cada cara interior de Q contiene dos guardias y Γ tiene $n - 2$ triángulos, por el teorema 1.7, entonces $|G| = 2(n - 2)$.

Para probar la parte de necesidad construimos un polígono similar al polígono Q de la Figura 3.3 (a), modificando un poco las aristas de tal forma que ningún par de aristas no adyacentes se intersecte, pero que se sigan manteniendo cercanas (Ver Figura 3.5 (a)). Si las aristas están lo suficientemente cercanas entonces cada bloque triangular necesitará dos guardias para ser vigilado (Ver Figura 3.5 (b)). Esta construcción la podemos realizar para cualquier número n de vértices, de manera que el polígono resultante necesite $2n - 4$ puntos guardia para ser vigilado. ■

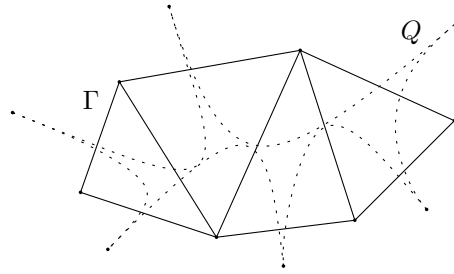


Figura 3.4: Construcción de Γ como gráfica plana.

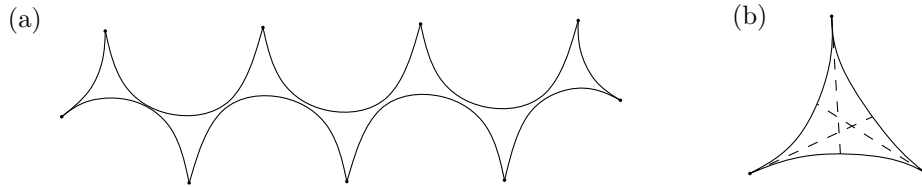


Figura 3.5: (a) Polígono arista-cóncavo con 9 vértices que necesita 14 guardias para ser vigilado, (b) triángulo que necesita dos guardias para vigilarse.

3.3. Vértices guardia en galerías arista-convexas

En el 2009, Karavelas, Tóth y Tsigaridas [11] probaron que $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ vértices guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un polígono arista-convexo con n vértices. Recientemente, Cano, Tóth y Urrutia dieron una prueba más corta y sencilla, la cual es la que se presentará aquí. Para poder dar la prueba, primero realizaremos algunas construcciones y probaremos un lema.

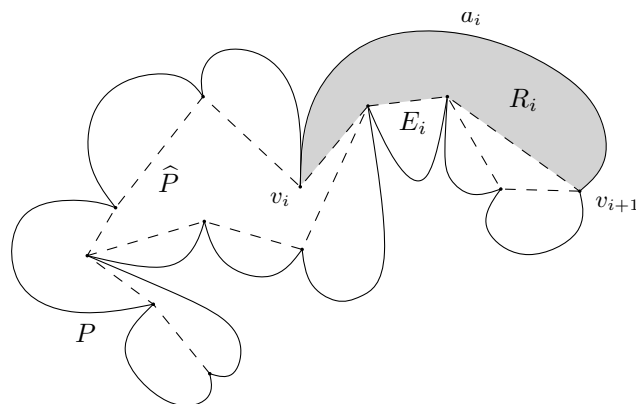


Figura 3.6: El polígono arista-convexo P y su polígono subyacente \hat{P} .

Sea $P = (V, A)$ un polígono arista-convexo. Sea E_i el camino más corto (euclidiano) que une a los vértices v_i y v_{i+1} y está contenido en P . Vemos que E_i es una poligonal formada por varios segmentos de recta. Definimos la gráfica plana $\widehat{P} = \bigcup_i E_i$. A \widehat{P} le llamaremos *polígono subyacente* de P , aunque no sea propiamente un polígono. Definimos R_i , la *habitación* de a_i , como la unión de la curva $a_i \cup E_i$ y su interior. Vemos que \widehat{P} divide el interior de P en regiones que pueden ser habitaciones de alguna arista o polígonos. A estos polígonos que tienen como frontera a aristas de \widehat{P} les llamaremos *componentes poligonales* de \widehat{P} (Ver Figura 3.6).

Ahora probaremos un lema que será necesario en la demostración del teorema principal de esta sección.

Lema 3.2. *Sea $p \in R_i$. Entonces existe una arista $e \in E_i$ que es completamente vista por p .*

Demostración. Sea $p \in R_i$ y sean $v_i = u_0, u_1, \dots, u_k = v_{i+1}$ los vértices de E_i . Prolongamos cada arista $u_{j-1}u_j$ en la dirección de u_j hasta intersectar el arco a_i . Esta construcción divide a R_i en k regiones convexas S_1, \dots, S_k tales que $u_{j-1}u_j \in S_j$ y la prolongación de $u_{j-2}u_{j-1}$ también pertenece a S_j (Ver Figura 3.7). Así, $p \in S_j$ para alguna j , y por lo tanto p ve a $u_{j-1}u_j$. ■

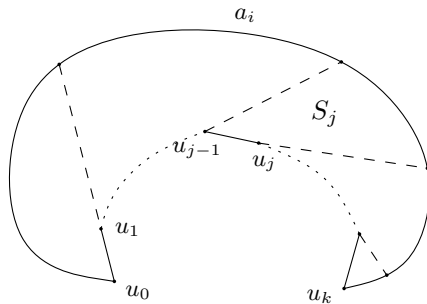


Figura 3.7: Ilustración de la prueba del lema 3.2

Sea $\Gamma(\widehat{P})$ la gráfica cuyos vértices son las componentes poligonales de \widehat{P} , tal que dos son adyacentes si existe un camino en \widehat{P} que intersekte las fronteras de ambas componentes y no intersekte ninguna otra. $\Gamma(\widehat{P})$ no contiene ciclos, ya que de lo contrario el polígono subyacente \widehat{P} tendría un hueco, y esto a su vez implicaría la existencia de un hueco en P , lo cual es una contradicción. Como $\Gamma(\widehat{P})$ es conexa y no contiene ciclos entonces es un árbol.

Teniendo todas estas preliminares ya estamos listos para demostrar el teorema.

Teorema 3.3 (Karavelas, Tóth, Tsigaridas 2009). *Sea P un polígono arista-convexo con n vértices. Entonces $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ vértices guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar P .*

Demostración. Consideremos una triangulación de cada componente poligonal de \hat{P} . Denotemos por $T(\hat{P})$ a la unión de \hat{P} y de dichas triangulaciones de sus componentes poligonales. $T(\hat{P})$ es 3-coloreable porque, como ya vimos, $\Gamma(\hat{P})$ es un árbol.

Por el lema 3.2, sabemos que para vigilar las habitaciones de P es suficiente tener un guardia sobre cada arista de \hat{P} . Por otra parte, para vigilar las componentes poligonales es suficiente colocar guardias en los vértices de alguna clase cromática de la 3-coloración de $T(\hat{P})$. Ambas condiciones se satisfacen al posicionar guardias en los vértices de cualesquiera dos clases cromáticas. Escogiendo las dos clases cromáticas más pequeñas aseguramos que $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ vértices guardia son suficientes para vigilar P .

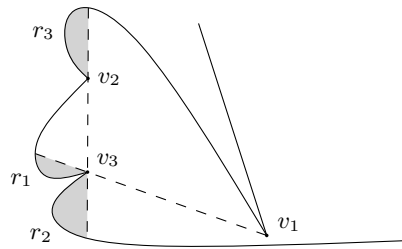


Figura 3.8: Bloque básico para la construcción de la cota inferior. Las regiones sombreadas son r_1 , r_2 y r_3 .

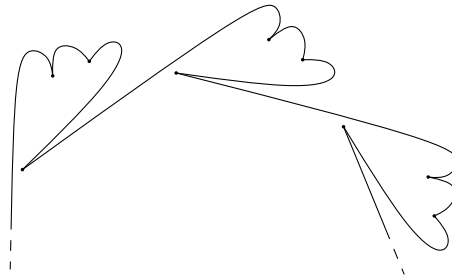


Figura 3.9: Sección de un polígono arista-convexo con $3n$ vértices que necesita $2n$ vértices guardia para ser vigilado.

Para la prueba de necesidad, se muestra una familia de polígonos arista-convexos de $3n$ vértices que necesitan $2n$ guardias para ser vigilados. La construcción de estos polígonos se basa en la curva mostrada en la Figura 3.8. Observemos que un guardia en v_i no ve la región r_i , para $i = 1, 2, 3$, por lo que son necesarios al menos dos

guardias para vigilar cada uno de esos bloques. La forma de construir el polígono arista-convexo con $3n$ vértices es tomando un polígono convexo con n vértices y pegar en cada una de sus aristas una copia de la curva mostrada en la Figura 3.8 (Ver Figura 3.9). Como se necesitan al menos dos guardias para vigilar el interior de cada bloque, en total son necesarios al menos $2n$ vértices guardia para vigilar todo el polígono. ■

3.4. Puntos guardia en galerías arista-convexas

Recientemente se demostró el siguiente teorema.

Teorema 3.4 (Cano, Tóth, Urrutia 2010). *Sea P un polígono arista-convexo con n vértices. Entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar P .*

Observemos que la cota para polígonos arista-convexos mejora considerablemente cuando consideramos puntos guardia en lugar de vértices guardia. Para la demostración de este teorema necesitaremos realizar ciertas construcciones, definir algunos conceptos y demostrar varios lemas, lo cual haremos a continuación.

3.4.1. Descomposiciones convexas

Sea $P = (V, A)$ una galería arista-convexa. Una **descomposición convexa** C de P es una familia finita de conjuntos convexos y cerrados, a los cuales llamaremos **celdas**, tales que sus interiores son ajenos por pares y la unión de todos ellos es P , además pediremos que la frontera de toda celda esté formada por segmentos de recta o secciones de la frontera de P . Permitimos celdas con interior vacío, a las cuales llamaremos **degeneradas** (este caso se presenta sólo cuando algún arco de P es un segmento de recta). A partir de una descomposición convexa C podemos contruir una gráfica, la cual denotaremos por $\delta(C)$, tal que el conjunto de aristas esté formado por los segmentos de recta que son frontera de alguna celda en C y no están contenidos en la frontera de P , y los vértices sean los extremos de dichos segmentos. A los vértices de $\delta(C)$ que no sean vértices de P les llamaremos **vértices Steiner**. Cuando sea clara la descomposición convexa a la que nos referimos escribiremos solamente δ .

Nos interesaremos en una clase particular de descomposiciones convexas. Llamaremos **descomposición normal** a aquella descomposición convexa compuesta por $n + 1$ celdas para la cual exista una gráfica dirigida $\vec{\delta}(C)$, obtenida a partir de $\delta(C)$ dirigiendo sus aristas, tal que satisfaga las siguientes condiciones:

- N1 un vértice de $\vec{\delta}(C)$ tiene grado exterior 1 si y sólo si es un vértice de P o un vértice Steiner localizado en el interior de P ,
- N2 un vértice de $\vec{\delta}(C)$ tiene grado exterior 0 si y sólo si es un vértice Steiner localizado en el interior de una arista de P .

Hay una forma natural de obtener descomposiciones normales, para esto definimos lo siguiente. Sean r y r' dos rayos con vértice v . Cuando hablemos del **ángulo formado por r y r'** nos referiremos al ángulo formado por dichos rayos medido en sentido contrario a las manecillas del reloj desde r hasta r' . Definiremos la **región entre r y r'** como la unión de todos aquellos rayos s con vértice v tales que el ángulo formado por r y s es mayor que 0 y menor que el ángulo formado por r y r' .

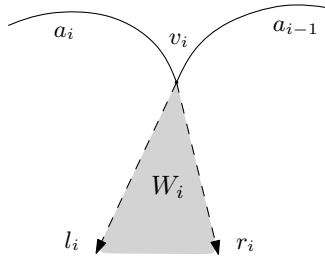


Figura 3.10: Los rayos r_i y l_i , y la región W_i .

Ahora procedemos a la construcción de una descomposición normal de P muy particular. Desde cada vértice v_i trazamos dos rayos l_i y r_i hacia el interior de P tal que l_i que sea tangente a a_{i-1} y r_i a a_i . Llamamos W_i a la cerradura de la región entre l_i y r_i (Ver Figura 3.10). Para $i = 0, \dots, n - 1$, trazamos un segmento dirigido s_i desde v_i hasta intersectar la frontera de P u otro segmento trazado anteriormente, de manera que s_i esté contenido en $W_i \cap P$ y que la prolongación de s_i no intersekte el interior de los arcos a_{i-1} o a_i . Lo que obtenemos con esta construcción es una descomposición normal de P a la cual llamaremos **descomposición estándar** (Ver Figura 3.11). Por lo anterior es claro que toda galería arista-convexa tiene una descomposición estándar. Observemos que la manera de construir las celdas induce una dirección en las aristas de $\delta(C)$; siempre que tengamos una descomposición estándar C nos referiremos a esta gráfica por $\vec{\delta}(C)$.

El lema que se enuncia a continuación clasifica las componentes de $\vec{\delta}(C)$, cuando C es una descomposición normal.

Lema 3.5. *Sea C una descomposición normal. Entonces toda componente de $\vec{\delta}(C)$ es un árbol dirigido con un sólo pozo, el cual está en el interior de una arista de P ,*

o es una gráfica dirigida sin pozos con exactamente un ciclo, el cual acota una única celda.

Demostración. Sea t una componente de $\vec{\delta}(C)$. Como todo vértice de t tiene grado exterior menor o igual que 1 entonces t contiene a lo más un ciclo dirigido. Si t no contiene ningún ciclo entonces es un árbol y además debe tener algún vértice de grado exterior 0 (si todos los vértices de t tienen grado exterior 1 entonces t contiene un ciclo). Supongamos que t tiene dos vértices de grado exterior 0, digamos u y v . Consideremos el camino en t que une a u y v . Entonces en ese camino debe haber un vértice con grado exterior mayor que 1, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, t tiene un único pozo y este debe estar en el interior de una arista de P por N2.

Ahora supongamos que t contiene un ciclo dirigido σ . Tenemos que el interior de σ está contenido en P , por lo que este ciclo acota al menos una celda de C . Si σ acotara dos celdas entonces habría un vértice en ese ciclo con grado exterior mayor que 1, lo cual nos llevaría de nuevo a una contradicción. Por lo tanto, σ acota una única celda. Notemos que en este caso, t no tiene ningún vértice de grado exterior 0.

■

3.4.2. Tipos de celdas

Sea $c \in C$ una celda. Definimos $\varphi(c)$ como la subgráfica de $\vec{\delta}(C)$ formada por las aristas que están en la frontera de c . Diremos que la celda c es **adyacente** a una región R del plano si las fronteras de c y R se intersectan pero sus interiores no; también podremos decir que R es adyacente a c o que c y R son adyacentes. R puede ser, por ejemplo, un vértice, una arista, una celda, una componente de $\vec{\delta}(C)$, etc.

En una descomposición normal pueden aparecer celdas que intersecten a la frontera de P solamente en sus vértices. A estas celdas las llamaremos **cíclicas** y la razón de esto es que $\varphi(c)$ es un ciclo dirigido, lo cual se sigue directamente de que todos sus vértices deben tener grado exterior 1. A las celdas que no son cíclicas las llamaremos **acíclicas** (Ver Figura 3.11). De las celdas sólo vamos a querer aquellas que tengan en su frontera al menos dos vértices de P ; a estas las llamaremos **buenas** y la razón de su elección se hará evidente más adelante. A una celda que no es buena la llamaremos **mala** (Ver Figura 3.11). A las descomposiciones normales compuestas únicamente por celdas buenas las llamaremos **descomposiciones buenas**.

Es claro que el número de vértices en la frontera de una celda es mayor o igual al número de componentes de $\vec{\delta}(C)$ adyacentes a dicha celda. De lo anterior, tenemos que las celdas malas son adyacentes a una única componente de $\vec{\delta}(C)$. El siguiente

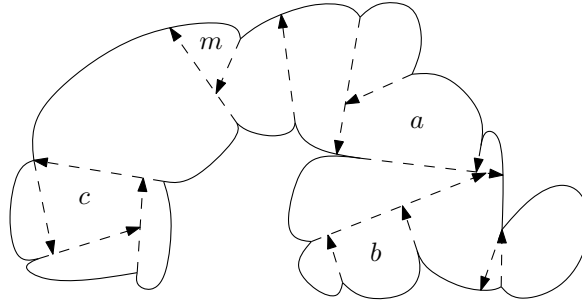


Figura 3.11: Un polígono arista-convexo y una de sus descomposiciones estándar. La celda c es cíclica, la celda a es acíclica, b es buena y m es mala.

lema nos dice qué tanto le falta a una celda mala para ser buena.

Lema 3.6. *Toda celda en una descomposición estándar de P tiene al menos un vértice de P en su frontera.*

Demostración. Sea c una celda de una descomposición estándar de P . De las aristas de $\varphi(c)$, sea s la última trazada al construir la descomposición estándar. Sea v el vértice inicial de s , entonces v pertenece a la frontera de c , ya que ninguna otra arista en $\varphi(c)$ intersecta el interior de s . ■

El siguiente lema habla de una característica muy importante de las celdas malas.

Lema 3.7. *Sea t una componente de $\vec{\delta}(C)$. Si c es una celda mala adyacente a t entonces c es cíclica o es adyacente al pozo de t .*

Demostración. Sea c una celda mala adyacente a t y supongamos que c no es cíclica. Por ser c una celda mala, la única componente de $\vec{\delta}(C)$ a la que es adyacente es t . Lo anterior implica que $\varphi(c)$ es conexa, más aún, $\varphi(c)$ es un camino cuyos extremos están en la frontera de P . De esto podemos concluir que $\varphi(c)$ es un camino dirigido, ya que de lo contrario llegaríamos a una contradicción con que c es una celda mala o con las restricciones de los grados exteriores de los vértices de $\vec{\delta}(C)$. Tenemos que el extremo inicial del camino dirigido $\varphi(c)$ tiene grado exterior 1, por lo que es un vértice de P y además es el único en la frontera de c . Sea x el extremo final del camino dirigido $\varphi(c)$. Como x no puede ser un vértice de P , tenemos que x se encuentra en el interior de un arco de P y tiene grado exterior 0. Luego, x es el pozo de t y por lo tanto, c es adyacente al pozo de t . ■

3.4.3. Construcción de una descomposición buena

Las descomposiciones buenas serán importantes porque a partir de ellas construiremos el conjunto de guardias que nos permitirá vigilar P . Veremos que para todo polígono arista-convexo podemos construir una descomposición buena a partir de cualquiera de sus descomposiciones estándar.

Lema 3.8. *Toda galería arista-convexa tiene una descomposición buena.*

Demostración. Sea P una galería arista-convexa y C una descomposición estándar de P . Si C es buena entonces es la descomposición que buscamos. Si C no es buena entonces tiene celdas malas. A continuación se presenta un algoritmo que procesa cada celda mala de C y la convierte en una celda buena, mientras se mantienen las tres invariantes siguientes:

- I1 C es una descomposición normal,
- I2 para toda arista $e \in \vec{\delta}$ existe un vértice $v \in P$ tal que en $\vec{\delta}$ hay un camino de aristas colineales que contiene a e y que inicia o termina en v ,
- I3 si una celda $c \in C$ es adyacente a un vértice $v \in P$ entonces c continúa siendo adyacente a v .

Notemos que I3 implica que las celdas buenas permanecen buenas.

Una celda mala puede ser cíclica o acíclica, y la manera de procesarla dependerá de esto. Ambos algoritmos para procesar celdas se exponen a continuación.

Procesamiento de celdas acíclicas.

Sea c una celda acíclica mala y sea t la componente a la que es adyacente. Por el lema 3.7, $\varphi(c)$ es un camino dirigido que empieza en un vértice de P y termina en el pozo de t . Sea v_i el extremo inicial de $\varphi(c)$ y x el pozo de t . Tenemos que x está en el interior de un arco de P incidente a v_i ; sin pérdida de generalidad supongamos que es a_i . Sean e_0, \dots, e_{k-1} los caminos máximos contenidos en $\varphi(c)$ formados por aristas colineales (se encuentran numerados en el orden inducido por la dirección de $\varphi(c)$, empezando en v_i y terminando en x). Sean u_j y u_{j+1} los extremos de e_j , para $j = 0, \dots, k-2$; así $u_0 = v_i$ y los extremos de e_{k-1} son u_{k-1} y x .

Enseguida presentamos el algoritmo para procesar la celda c . Definimos inicialmente $y = u_{k-1}$, por lo que $y\vec{x} = e_{k-1}$. Ahora supongamos que en algún momento del procesamiento $y = u_j$. Mientras $j \neq 0$, deformamos $y\vec{x}$ deslizando su extremo x sobre a_i hacia v_{i+1} (al mismo tiempo acortamos las aristas de $\vec{\delta}$ incidentes a algún punto de $y\vec{x}$) hasta que alguna de las siguientes situaciones se presente:

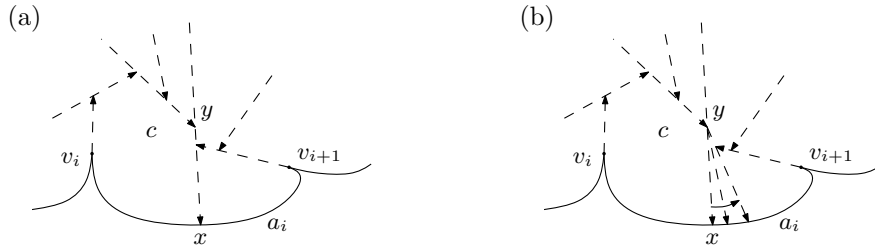


Figura 3.12: (a) Una celda acíclica mala c , (b) deformación del segmento $y\vec{x}$.

A1 $y\vec{x}$ se vuelve colineal con e_{j-1} , en cuyo caso redefinimos $y = u_{j-1}$ (Ver Figura 3.13),

A2 aparece otro vértice de P en la frontera de c ; cuando esto ocurre se termina el algoritmo (Ver Figura 3.14).

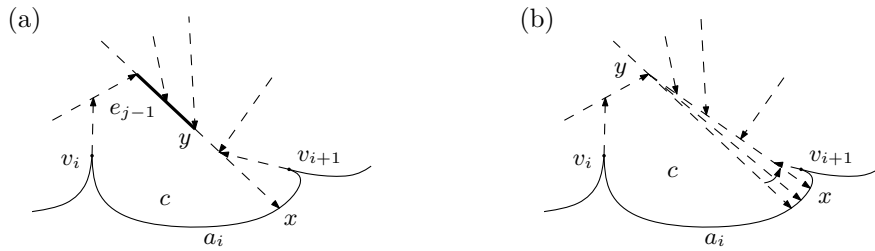


Figura 3.13: (a) El segmento $y\vec{x}$ se vuelve colineal con e_{j-1} , (b) continuación de la deformación del segmento $y\vec{x}$.

El algoritmo termina ya que en cada iteración ocurre A1, en cuyo caso disminuye j , u ocurre A2, en cuyo caso se termina el algoritmo. Ahora veamos que c es una celda buena al terminar el procesamiento. Para esto, demostraremos que en algún momento ocurre A2. Supongamos lo contrario, entonces llegamos a que $j = 0$. Esto implica que el segmento $u_1\vec{x}$ es colineal con $e_0 = u_0\vec{u}_1$ pero x sigue estando en el interior de a_i . Lo anterior contradice la construcción inicial de la descomposición estándar C . Por lo tanto, c debe ser una celda buena al final del algoritmo.

Puede ocurrir que después del procesamiento una celda de C se haya convertido en un punto. Supongamos que este es el caso y sea c' dicha celda. Entonces c' era adyacente a t y como t no tiene celdas cíclicas, por el lema 3.5, entonces c' era acíclica. Además, por I3 se tiene que c' era una celda mala antes del procesamiento. Haciendo un análisis similar al de c , se tiene que $\varphi(c')$ era un camino dirigido que empezaba en v_{i+1} y terminaba en x . Así, el punto en el que se convierte c' después del procesamiento debe ser v_{i+1} . Con lo anterior, podemos ver que este caso solamente ocurre

cuando el vértice que se agrega a c es v_{i+1} (Ver Figura 3.14 (a)). Para resolver este problema agregamos la arista dirigida $v_i \vec{v}_{i+1}$ a $\vec{\delta}$. Vemos que esta arista divide a c en dos celdas buenas, así seguimos teniendo $n + 1$ celdas en C y reducimos el número de celdas malas en al menos uno.

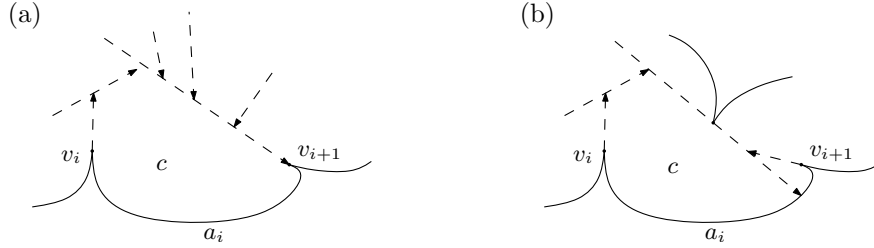


Figura 3.14: Las dos situaciones que se pueden presentar cuando la celda c se vuelve buena: (a) el vértice agregado a $\varphi(c)$ es v_{i+1} , (b) el vértice agregado a $\varphi(c)$ no es v_{i+1} .

Ahora, demostraremos que las invariantes I1 - I3 se mantienen. C sigue siendo normal porque $\vec{\delta}$ cumple las restricciones de los grados exteriores y C consta de $n + 1$ celdas convexas: c es convexa por A1; en el caso cuando desaparece una celda y c se divide en dos celdas, estas son convexas; el resto de las celdas se mantienen convexas también. La invariante I2 se cumple para las aristas de $\vec{\delta}$ que no modificamos. Las aristas de $\vec{y}\vec{x}$ no cumplen I2 durante el procesamiento, sin embargo al final hay un vértice sobre $\vec{y}\vec{x}$ por lo que todas sus aristas ahora cumplen I2. La invariante I3 se mantiene, porque si una celda deja de ser adyacente a algún vértice entonces significa que una arista modificada durante el procesamiento de c pasó por ese vértice y no se detuvo ahí, lo cual viola A2.

Procesamiento de celdas cíclicas.

Sea c una celda cíclica mala. Como dijimos anteriormente, $\varphi(c)$ es un ciclo dirigido, y además c tiene un único vértice en su frontera, al cual llamaremos v_i . Sean e_0, \dots, e_{k-1} los caminos máximos contenidos en $\varphi(c)$ formados por aristas colineales (se encuentran numerados en el orden inducido por la dirección de $\varphi(c)$, empezando y terminando en v_i). Sean u_j y u_{j+1} los extremos de e_j (suma módulo k), así, $u_0 = v_i$. Definimos $x = u_{k-2}$ (Ver Figura 3.15 (a)).

Enseguida presentamos el algoritmo para procesar la celda c . Como $k \geq 3$, podemos definir inicialmente $y = u_{k-3}$; notemos que entonces al inicio del algoritmo tenemos $\vec{y}\vec{x} = e_{k-3}$. Por I2, existe un vértice $w \in P$ tal que hay un camino dirigido en $\vec{\delta}$ de aristas colineales que contiene a e_{k-2} y termina o empieza en w ; en este caso empieza en w ya que dicho camino dirigido debe tener a u_{k-1} como extremo final (Ver Figura 3.15 (a)). Sea $s = w\vec{u}_{k-1}$. Ahora, supongamos que en algún momento del

procesamiento tenemos que $y = u_j$. Mientras $j \neq k - 1$, deformamos $y\vec{x}$ deslizando su extremo x sobre s hacia w (al mismo tiempo acortamos las aristas de $\vec{\delta}$ incidentes a algún punto de $y\vec{x}$) hasta que alguna de las siguientes situaciones se presente:

- C1 $y\vec{x}$ se vuelve colineal con e_{j-1} , en cuyo caso redefinimos $y = u_{j-1}$ (suma módulo k) (Ver Figura 3.15 (b)),
- C2 aparece otro vértice de P en la frontera de c ; cuando esto ocurre se termina el algoritmo (Ver Figura 3.15 (c)).

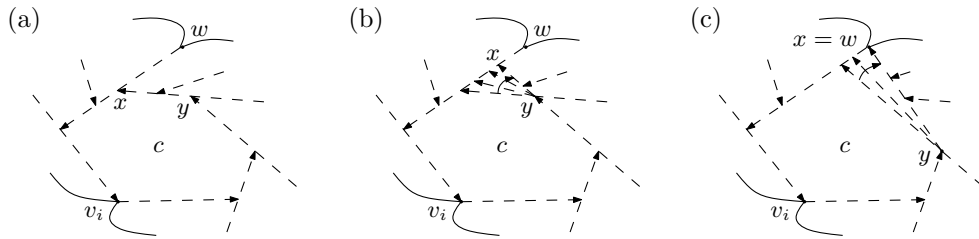


Figura 3.15: (a) Una celda cíclica mala c , (b) el segmento $y\vec{x}$ se vuelve colineal con e_{j-1} , (c) la celda c se vuelve buena.

El algoritmo termina porque en cada iteración se presenta la situación C1 o la situación C2; en la primera se disminuye j y en la segunda se termina el algoritmo. Afirmamos que c es una celda buena al terminar el procesamiento. Para probar esto supongamos que nunca ocurre C2; entonces llegamos a que $j = k - 1$. Esto implica que el segmento $u_0\vec{x}$ es colineal con $e_{k-1} = u_{k-1}u_0$. Es claro que esto no puede ocurrir sin que antes el segmento $y\vec{x}$ intersekte el vértice w . Por lo tanto, en algún momento debe ocurrir C2, lo cual significa que c se convierte en una celda buena al final del procesamiento.

Cuando procesamos una celda cíclica no puede ocurrir que una celda de C se convierta en un punto. Para ver esto, sea t la componente a la que es adyacente c y supongamos que una celda c' adyacente a t se convirtió en un punto después del procesamiento. Por I3, c' era una celda mala. Por otra parte, como t no tiene pozos, la única celda adyacente a t que puede ser mala es c . Esto implica que $c = c'$, lo cual es una contradicción.

Los argumentos para probar que las invariantes I1 - I3 se mantienen son los mismos a los dados para celdas acíclicas. ■

3.4.4. La gráfica dual de una descomposición buena

Sea C una descomposición buena. Llamaremos $D(C)$ a la gráfica cuyos vértices son las celdas de C y dos son adyacentes si se intersectan en su frontera (Ver Figura 3.16). Dada una componente t de $\vec{\delta}$ llamaremos $D(t)$ a la subgráfica de $D(C)$ inducida por las celdas adyacentes a t . Sea $D' \subset D(C)$, definimos la región $R(D')$ como la unión de las celdas en D' . Para referirnos a $R(D(t))$ simplemente escribiremos $R(t)$. En esta sección probaremos algunas propiedades importantes de $D(C)$.

Lema 3.9. *Los vértices de $D(C)$ tienen grado mayor o igual a 2.*

Demostración. Sea $c \in C$. Claramente, el grado de c en $D(C)$ es mayor o igual al número de aristas de $\varphi(c)$. Supongamos que $\varphi(c)$ sólo tiene una arista, digamos e . Como c es buena, ambos extremos de e deben ser vértices de P , esto es $e = v_i v_{i+1}$. Como v_{i+1} tiene grado exterior 1, existe otra arista e' que inicia en v_{i+1} . La arista e' se encuentra entre dos celdas c_1 y c_2 adyacentes a v_{i+1} . Por lo tanto, c es adyacente a c_1 y c_2 . ■

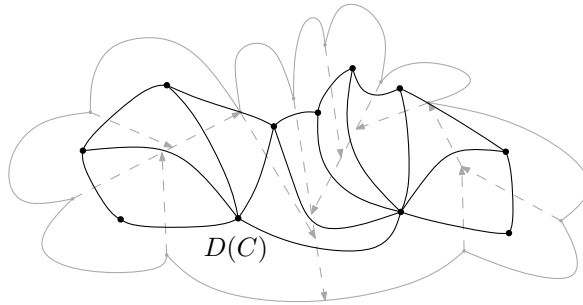


Figura 3.16: Una descomposición buena de un polígono arista-convexo y su gráfica dual $D(C)$.

Lema 3.10. *$D(t)$ contiene un ciclo cuyos vértices son las celdas acíclicas de $D(t)$.*

Demostración. Observemos que la frontera de $R(t)$ está formada por arcos de P y aristas de $\vec{\delta}$ no contenidas en t . Construimos una subgráfica $H_a(t) \subset D(t)$ recorriendo la frontera de $R(t)$ empezando de un punto arbitrario. Diremos que **encontramos** la celda c cuando pasemos por una sección de un arco de P o una arista de $\vec{\delta}$ contenida en la frontera de c . Como todas las celdas acíclicas tienen una sección de un arco de P en su frontera entonces $H_a(t)$ contiene todas las celdas acíclicas de $D(t)$. $H_a(t)$ no contiene celdas cíclicas porque ninguna arista de una celda cíclica está contenida en la frontera de $R(t)$. Ahora, supongamos que encontramos dos veces a una misma celda

c . Luego, $R(t) \setminus c$ es una región desconexa, lo cual implica a su vez que t es desconexa. Lo anterior es claramente una contradicción, por lo que ninguna celda se encuentra dos veces. Por otra parte, dos celdas encontradas consecutivamente son adyacentes en $D(t)$ porque al menos comparten un vértice. De lo anterior se concluye que $H_a(t)$ es un ciclo contenido en $D(t)$ que contiene todas sus celdas acíclicas y no contiene ninguna celda cíclica. ■

Lema 3.11. *Sea c una celda adyacente a una única componente t de $\vec{\delta}$, tal que c es cíclica o adyacente al pozo de t . Entonces existe un vértice $v(c) \in P$ y dos celdas $c_1, c_2 \neq c$ consecutivas en $H_a(t)$ tales que $v(c)$ está en la frontera de c , c_1 y c_2 .*

Demostración. Primero supongamos que t es un árbol dirigido, así c es adyacente al pozo de t , al cual llamaremos x . Tenemos que $\varphi(c)$ es un camino dirigido que empieza en un vértice v_i de P y termina en x . Como c es buena, existe al menos un vértice $v(c) \in P$ tal que $v(c)$ se encuentra en el interior del camino $\varphi(c)$ (Ver Figura 3.17 (a)). Sean c_1 y c_2 las celdas que contienen en su frontera una sección de un arco de P incidente a $v(c)$. Como $v(c)$ está en el interior de $\varphi(c)$ entonces $c_1, c_2 \neq c$. Además, c_1 y c_2 son consecutivas en $H_a(t)$.

Ahora supongamos que c es cíclica. Sea $v(c)$ cualquier vértice de P en la frontera de c . Sean c_1 y c_2 las celdas que contienen en su frontera una sección de un arco de P incidente a $v(c)$ (Ver Figura 3.17 (b)). Similarmente, en este caso tenemos que $c_1, c_2 \neq c$ y estas celdas son consecutivas en $H_a(t)$. ■

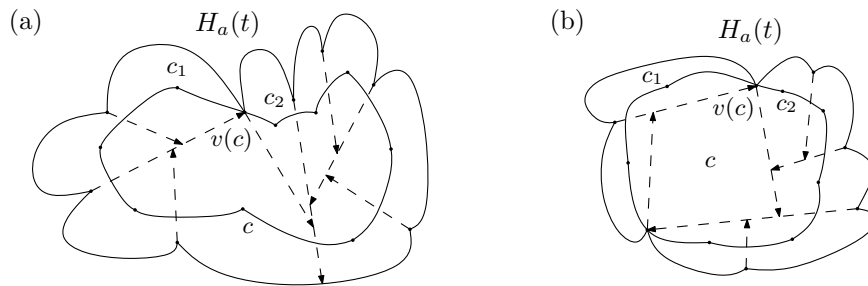


Figura 3.17: Ilustración de la demostración del lema 3.11: (a) c es adyacente al pozo de t , (b) c es cíclica.

Lema 3.12. *$D(t)$ contiene un ciclo que pasa por todos sus vértices.*

Demostración. Notemos que si t es un árbol entonces en $D(t)$ no hay celdas cíclicas; en este caso definimos $H(t) = H_a(t)$. Si t contiene un ciclo entonces en $D(t)$ hay una celda cíclica c que, por el lema 3.11, es adyacente a dos celdas c_1 y c_2 consecutivas en

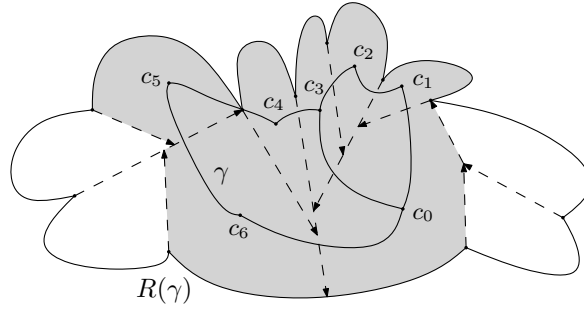


Figura 3.18: El ciclo básico $\gamma = c_0 \dots c_6 c_0$ y su subciclo $c_0 c_1 c_2 c_3 c_0$.

$H_a(t)$. Definimos $H(t) = H_a(t) \cup cc_1 \cup cc_2 \setminus c_1 c_2$. Es claro que en ambos casos $H(t)$ es un ciclo que pasa por todos los vértices de $D(t)$. ■

Denotaremos por $H(t)$ al ciclo que pasa por todos los vértices de $D(t)$ construido como en el lema anterior.

Sea $\gamma \subset D(t)$ un ciclo. Si $R(\gamma)$ es simplemente conexo entonces a γ lo llamaremos **básico** (Ver Figura 3.18). Observemos que $R(\gamma)$ es simplemente conexo si y sólo γ no acota alguna celda cíclica. En particular, $H(t)$ es un ciclo básico. También si t es un árbol entonces todo ciclo en $D(t)$ es básico. Sea $\gamma = c_0 \dots c_{m-1} c_0$ un ciclo básico de $D(t)$. Si c_i y c_j son adyacentes en $D(t)$ entonces al ciclo $\gamma' = c_i c_{i+1} \dots c_j c_i$ (suma módulo m) le llamamos **subciclo** de γ (Ver Figura 3.18). A continuación se demuestra una propiedad de los ciclos básicos.

Lema 3.13. *Todo ciclo básico en $D(t)$ contiene tres celdas consecutivas adyacentes a un vértice de $\vec{\delta}$.*

Demostración. Sea $\gamma = c_0 \dots c_{m-1} c_0$ un ciclo básico en $D(t)$. Para demostrar que γ contiene tres celdas adyacentes a un vértice de $\vec{\delta}$ es suficiente demostrar que γ contiene un subciclo básico con tres vértices, ya que las respectivas celdas se intersectarán en un vértice de $\vec{\delta}$. Sea γ' el subciclo básico de γ con el menor número de vértices. Reenumerando de ser necesario, podemos suponer que $\gamma' = c_0 \dots c_i c_0$. Si $i = 2$ entonces ya acabamos. Supongamos entonces que $i \geq 3$. La frontera común de c_0 y c_i es un segmento de recta s . Como $R(\gamma')$ es simplemente conexo entonces un extremo de s es adyacente a una celda $c_j \in \gamma'$ distinta de c_0 y c_i , tal que $R(c_0 c_1 \dots c_j c_0)$ y $R(c_j c_{j+1} \dots c_i c_j)$ son regiones simplemente conexas. Notemos que puede darse el caso que alguna de las gráficas $c_0 c_1 \dots c_j c_0$ y $c_j c_{j+1} \dots c_i c_j$ tenga únicamente dos vértices. Pero $i \geq 3$, por lo que alguna de estas gráficas tiene al menos tres vértices y entonces es un ciclo; además es subciclo de γ y es básico, por construcción, lo cual nos lleva a

una contradicción. ■

3.4.5. Construcción del conjunto de guardias

A un camino con un número par de vértices le llamaremos *camino par*, de lo contrario le llamaremos *camino impar*. Similarmente, a un ciclo con un número par de vértices le llamaremos *ciclo par*, y en caso contrario le llamaremos *ciclo impar*. A continuación probamos dos lemas que serán de vital importancia para la construcción del conjunto de guardias de P .

Lema 3.14. *Sea $\gamma \subset D(t)$ un camino par con k vértices. Entonces $R(\gamma)$ puede ser vigilada con $\frac{k}{2}$ guardias.*

Demostración. Como γ es un camino par entonces tiene un emparejamiento perfecto con $\frac{k}{2}$ aristas. Colocando un guardia en la frontera común de c y c' , para cada arista cc' del emparejamiento, vigilamos $R(\gamma)$. ■

Lema 3.15. *Sea $\gamma \subset D(t)$ un ciclo básico con k vértices. Entonces $R(\gamma)$ puede ser vigilada con $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ guardias.*

Demostración. Supongamos que γ es un ciclo par y sea e una de sus aristas. Se tiene que $\gamma \setminus e$ es un camino par con k vértices y entonces, por el lema 3.14, $R(\gamma \setminus e) = R(\gamma)$ puede ser vigilada con $\frac{k}{2}$ guardias. Ahora supongamos que γ es un ciclo impar. Por el lema 3.13, γ contiene tres celdas consecutivas adyacentes a un vértice de $\vec{\delta}$, las cuales podemos vigilar con un sólo guardia colocado en dicho vértice. El resto de las $k - 3$ celdas de γ forman un camino par y entonces, por el lema 3.14, bastan $\frac{k-3}{2}$ guardias para vigilarlas. En ambos casos $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ guardias son suficientes para vigilar $R(\gamma)$. ■

Ahora ya podemos demostrar el teorema principal de esta sección. Pero antes introduciremos un poco de notación. Sea $p = x_0 \dots x_{k-1}$ un camino. Dados $0 \leq i \leq j \leq k - 1$, denotaremos $[x_i, x_j] = x_i \dots x_j$, $(x_i, x_j) = x_{i+1} \dots x_j$, $[x_i, x_j) = x_i \dots x_{j-1}$ y $(x_i, x_j] = x_{i+1} \dots x_{j-1}$.

Demostración del teorema 3.4. Sea P un polígono arista-convexo con n vértices y C una descomposición buena de P . Sea Γ la gráfica cuyos vértices son las componentes de $\vec{\delta}$, tal que dos son adyacentes si existe una celda en C adyacente a ambas componentes. Entonces Γ es conexa y así podemos obtener un árbol generador aplicando el algoritmo BFS, el cual nos da además un orden en los vértices. Denotemos por t_1, \dots, t_m a las componentes de $\vec{\delta}$ según el orden inducido por el algoritmo

BFS. Es importante hacer la observación que, por ser P simplemente conexo y por las características del algoritmo BFS, cada componente t_k es adyacente a lo más a una celda que a su vez es adyacente a una componente t_j , con $j < k$. Denotemos $n(t_k) = |D(t_k)|$, para $k = 1, \dots, m$. Notemos que $n(t_k) \geq 2$.

La construcción del conjunto de guardias se realizará en m iteraciones. En la iteración k procesaremos la gráfica $D(t_k)$ para obtener un conjunto G_k , de manera que $\cup_{i=1}^k G_i$ vigile $\cup_{i=1}^k R(t_i)$, exceptuando si acaso una celda de $D(t_k)$. La celda de $D(t_k)$ que dejemos sin vigilar deberá ser adyacente a otra componente t_j , con $j > k$, para que sea posible vigilarla posteriormente cuando procesemos $D(t_j)$.

Por los lemas 3.14 y 3.15, será suficiente obtener una partición en caminos pares y ciclos básicos de la subgráfica de $D(t_k)$ inducida por las celdas que queremos vigilar. Así, al vigilar s_k celdas de $D(t_k)$ aseguraremos que usamos a lo más $\lfloor \frac{s_k}{2} \rfloor$ guardias.

A continuación se explicará el procesamiento de $D(t_k)$. Por una observación hecha anteriormente, $D(t_k)$ tiene a lo más una celda ya vigilada, por lo que los casos que se presentan al procesar $D(t_k)$ son los siguientes: ninguna celda de $D(t_k)$ está vigilada, una celda de $D(t_k)$ está vigilada.

Caso a: Ninguna celda de $D(t_k)$ está vigilada. Si $n(t_k) = 2$ entonces un guardia es suficiente. Si $n(t_k) \geq 3$ entonces consideramos el ciclo básico $H(t_k) \subset D(t_k)$. Como $H(t_k)$ tiene $n(t_k)$ vértices entonces, por el lema 3.15, $\lfloor \frac{n(t_k)}{2} \rfloor$ guardias son suficientes para vigilar $R(t_k)$.

Caso b: Exactamente una celda c de $D(t_k)$ está vigilada. Si $n(t_k) = 2$ entonces tenemos solamente una celda aún sin vigilar. Pero esta celda debe ser adyacente a otra componente t_j , con $j > k$, por lo que podemos dejarla sin vigilar y procesarla hasta la j -ésima iteración. Si $n(t_k) \geq 3$ es impar entonces $H(t_k) \setminus \{c\}$ es un camino par. Si $n(t_k) \geq 3$ es par entonces distinguimos varios casos.

Caso b1: $D(t_k)$ tiene una celda cíclica. Sea c_1 la celda cíclica. Notemos que $c_1 \neq c$, ya que c_1 es adyacente únicamente a t_k . Por el lema 3.11, existen dos pares de celdas c_2, c_3 y c_4, c_5 que son consecutivas en $H_a(t_k)$ y adyacentes a c_1 , con la posibilidad de tener $c_3 = c_4$ o $c_2 = c_5$ (la notación es tal que c_2, c_3, c_4 y c_5 aparecen en $H_a(t_k)$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj). Tenemos que $[c_3, c_4], [c_5, c_2]$ es una partición de los vértices de $H_a(t_k)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c \in [c_5, c_2]$. Definimos $p_5 = [c_5, c]$ si $[c_5, c]$ es un camino par, o $p_5 = (c_5, c)$ en caso contrario. También definimos $p_2 = (c, c_2)$ si (c, c_2) es un camino par, o $p_2 = (c, c_2)$ en caso contrario. Veamos que $D(t_k) \setminus (\{c\} \cup p_2 \cup p_5)$ contiene un ciclo generador que

contiene a c_1 , por lo que es un ciclo básico (Ver Figura 3.19).

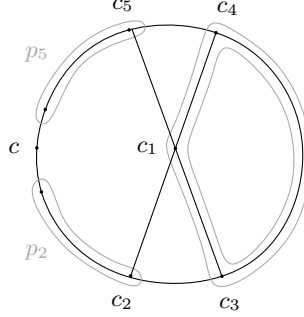


Figura 3.19: Caso b1.

Caso b2: $D(t_k)$ no tiene ninguna celda cíclica. Sean c_1 y c_2 las dos celdas adyacentes al pozo de t_k que son consecutivas en $H(t_k)$. Tenemos tres casos.

Caso b2.1: Ambas celdas adyacentes al pozo de t_k son adyacentes a otra componente de $\vec{\delta}$. Como $n(t_k)$ es par, entonces $H(t_k) \setminus \{c\}$ es un camino impar. Luego, tenemos que para alguna $i \in \{1, 2\}$, la gráfica $H(t_k) \setminus \{c, c_i\}$ es la unión de dos caminos pares (aceptamos la posibilidad $c = c_1$ o $c = c_2$). Entonces dejamos sin vigilar a c_i para vigilarla en una iteración posterior.

Caso b2.2: Exactamente una celda adyacente al pozo de t_k es adyacente a otra componente de $\vec{\delta}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que c_2 es adyacente a ninguna otra componente de $\vec{\delta}$. Luego existen dos celdas adyacentes a c_2 y consecutivas en $H(t_k)$; las llamamos c_3 y c_4 tales que c_2, c_3 y c_4 se encuentran en $H(t_k)$ en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c_1 \in [c_4, c_2]$. Definimos $H_1 = [c_4, c_1]$ y $H_2 = [c_2, c_4] \cup c_2c_4 \cup c_2c_3$; notemos que $H(t_k) \subset H_1 \cup H_2$ y $H_1 \cap H_2 = \{c_4\}$. Tenemos 2 casos:

- **Caso b2.2.1:** $c \in H_1$. Notemos que c divide a H_1 en dos caminos. Sea $p_1 = (c, c_1]$ si $(c, c_1]$ es un camino par, o $p_1 = (c, c_1)$ en caso contrario (se puede dar el caso $c = c_1$ y entonces $p_1 = \emptyset$). Sea $p_4 = [c_4, c)$ si $[c_4, c)$ es un camino par, o $p_4 = (c_4, c)$ en caso contrario. Se tiene que $H_2 \setminus p_4$ contiene un ciclo básico generador (Ver Figura 3.20 (a)).
- **Caso b2.2.2:** $c \in H_2$. Si $H_2 \setminus \{c\}$ contiene un camino par generador entonces definimos p_2 como ese camino, si no entonces p_2 es el camino generador de $H_2 \setminus \{c, c_4\}$. Definimos $p_1 = H_1 \setminus (\{c_1\} \cup p_2)$. Notemos que p_1 debe ser un

camino par, por lo que $\{p_1, p_2\}$ es una partición de los vértices de $D(t_k) \setminus \{c, c_1\}$ en caminos pares (Ver Figura 3.20 (b)).

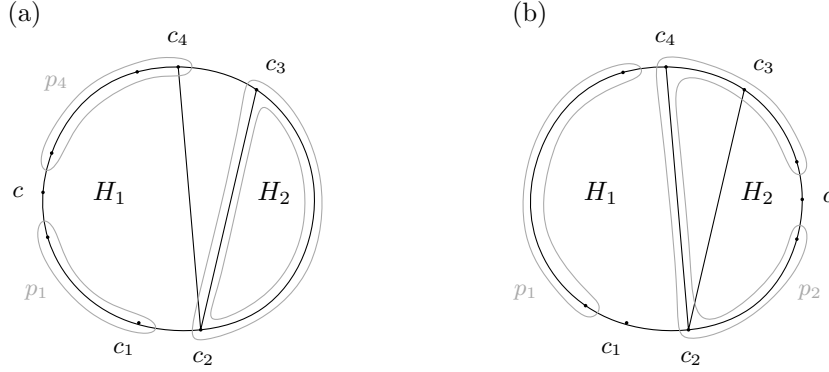


Figura 3.20: (a) Caso b2.2.1 y (b) caso b2.2.2.

Caso b2.3: Ninguna celda adyacente al pozo de t_k es adyacente a otra componente de $\vec{\delta}$. Notemos que entonces $c \neq c_1$ y $c \neq c_2$. Por el lema 3.11, existen dos celdas c_3 y c_4 consecutivas en $H(t_k)$ tales que c_2, c_3 y c_4 pueden vigilarse simultáneamente desde un vértice $v(c_2) \in P$. De igual manera, existen dos celdas c_5 y c_6 consecutivas en $H(t_k)$ tales que c_1, c_5 y c_6 pueden vigilarse simultáneamente desde un vértice $v(c_1) \in P$. La numeración es tal que las celdas c_3 y c_4 se encuentran en $H(t_k)$ en sentido contrario a las manecillas del reloj, al igual que c_5 y c_6 . Distinguimos dos casos dependiendo de los vértices $v(c_1)$ y $v(c_2)$:

- **Caso b2.3.1:** $v(c_1) \neq v(c_2)$. Entonces c_3, c_4, c_5 y c_6 se encuentran sobre $H(t_k)$ en sentido contrario a las manecillas del reloj (se puede dar el caso $c_4 = c_5$). Sean $p = [c_4, c_5]$, $H_1 = [c_5, c_1] \cup c_1c_5 \cup c_1c_6$ y $H_2 = [c_2, c_4] \cup c_2c_4 \cup c_2c_3$.

Supongamos que $c \in H_1$. Si la gráfica $H_1 \setminus \{c\}$ tiene un número par de vértices entonces llamamos p_1 al camino que la genera, de lo contrario llamamos p_1 al camino generador de $H_1 \setminus \{c, c_5\}$. Luego, definimos $p' = p \setminus p_1$ si $p \setminus p_1$ es un camino par, o $p' = p \setminus (\{c_4\} \cup p_1)$ en caso contrario. Vemos que los vértices de $H_2 \setminus p'$ forman un ciclo básico en $D(t_k)$ (Ver Figura 3.21 (a)). El caso donde $c \in H_2$ es análogo al caso $c \in H_1$.

Si $c \in p$ entonces definimos $p_5 = (c, c_5]$ si $(c, c_5]$ es un camino par o $p_5 = (c, c_5)$ en caso contrario, y $p_4 = [c_4, c)$ si $[c_4, c)$ es un camino par o $p_4 = (c_4, c)$ en caso contrario. Tenemos que los vértices de $H_1 \setminus p_5$ y $H_2 \setminus p_4$ forman ciclos básicos

en $D(t_k)$ (Ver Figura 3.21 (b)).

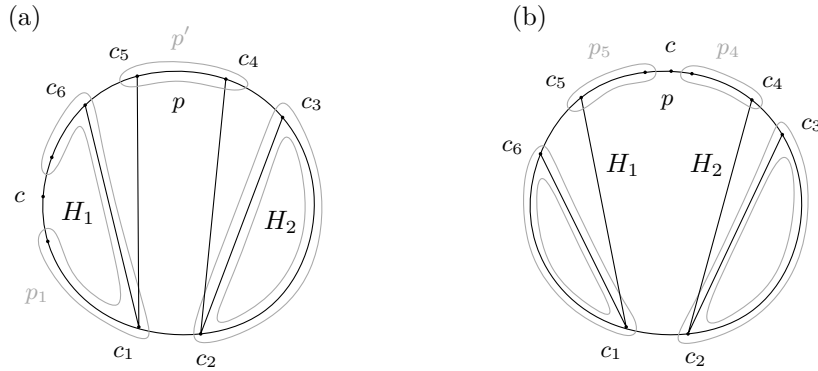


Figura 3.21: Caso b2.3.1 cuando (a) $c \in H_1$ y (b) $c \in p$.

- Caso b2.3.2:** $v(c_1) = v(c_2)$. Esto implica que $c_4 = c_6$ y $c_3 = c_5$, por lo que las celdas c_1, c_2, c_3, c_4 forman una gráfica completa en $D(t_k)$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $c \in [c_4, c_1]$. Sea $p_4 = [c_4, c]$ si $[c_4, c]$ es un camino par o $p_4 = (c_4, c)$ en caso contrario, y $p_1 = (c, c_1]$ si $(c, c_1]$ es un camino par o $p_1 = [c, c_1]$. La gráfica $D(t_k) \setminus (\{c\} \cup p_4 \cup p_1)$ contiene un ciclo básico generador (Ver Figura 3.22).

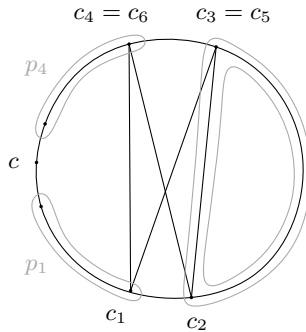


Figura 3.22: Caso b2.3.2.

Como cada celda es vigilada sólo una vez, tenemos que al final hemos usado a lo más $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias.

Para la prueba de necesidad mostramos una familia de polígonos arista-convexos que necesitan $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias para ser vigilados. La forma de construir el polígono es

tomando un polígono regular de n vértices y en cada una de sus aristas pegar una curva como la mostrada en la Figura 3.23 (a). Esta curva tiene la propiedad de que la recta tangente a a con vértice en v intersecta a u . Esto hace que el interior de la curva $a \cup \overline{uv}$ únicamente pueda ser vigilado colocando un guardia en el interior de la misma o en su frontera. Así, un guardia puede vigilar a lo más dos arcos adyacentes, lo cual nos da la cota. ■

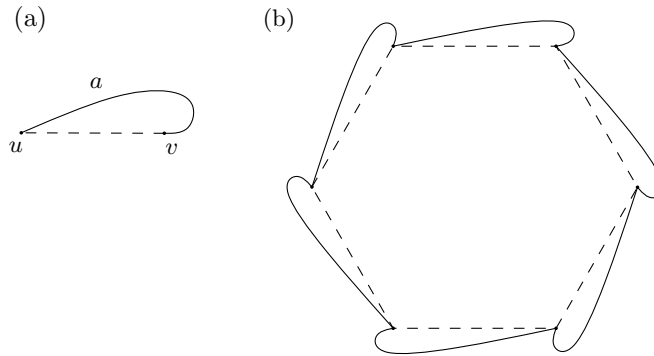


Figura 3.23: (a) La curva a , (b) polígono arista-convexo con 6 vértices que necesita 3 puntos guardia para ser vigilado.

Capítulo 4

Galerías curvilíneas con huecos

Las galerías de las que tratan los cuatro resultados de esta tesis son las galerías curvilíneas con huecos. De estas hablaremos extensivamente en este capítulo: en la Sección 4.1 definiremos las galerías con huecos arista-convexas y las galerías con huecos arista-cóncavas, en la Sección 4.2 presentaremos un teorema que da la cantidad suficiente y a veces necesaria de puntos guardia para vigilar una galería con huecos arista-cóncava, en la Sección 4.3 presentaremos dos resultados sobre galerías con huecos arista-convexas y vértices guardia, y en la Sección 4.4 presentaremos un teorema sobre galerías con huecos arista-convexas y puntos guardia.

4.1. Definiciones

Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos, donde P_0 es el polígono exterior y $\mathcal{H} = \{P_1, \dots, P_h\}$ es el conjunto de huecos. Como ya mencionamos en la Sección 2.3, el conjunto de vértices de P será la unión de los vértices de P_0 y los vértices de los huecos $P_k \in \mathcal{H}$. Denotaremos por n_k al número de vértices de P_k , y a sus vértices y aristas los denotaremos por $V(P_k) = \{v_0^k, \dots, v_{n_k-1}^k\}$ y $A(P_k) = \{a_0^k, \dots, a_{n_k-1}^k\}$.

Si P_0 es un polígono curvilíneo, al igual que todo elemento de \mathcal{H} , entonces a P le llamamos **polígono curvilíneo con huecos** o **galería curvilínea con huecos**. De estos nos interesarán dos tipos en particular: aquellos en los que P_0 es un polígono arista-convexo y P_k es un polígono arista-cóncavo, para $k = 1, \dots, h$, a los

cuales llamaremos *polígonos con huecos arista-convexos* o *galerías con huecos arista-convexas*; y aquellos en los que P_0 es un polígono arista-cóncavo y P_k es un polígono arista-convexo, para $k = 1, \dots, h$, a los cuales llamaremos *polígonos con huecos arista-cóncavos* o *galerías con huecos arista-cóncavas*.

4.2. Puntos guardia en galerías arista-cóncavas

El siguiente teorema da una cota justa de la cantidad de guardias necesaria para vigilar un polígono con huecos arista-cóncavo.

Teorema 4.1. *Sea P un polígono con huecos arista-cóncavo con n vértices y h huecos. Entonces $2(n + 2h) - 4$ puntos guardia son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar P .*

Demostración. Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos arista-cóncavo, donde $\mathcal{H} = \{P_1, \dots, P_h\}$. Para cada $k \in \{0, \dots, h\}$ y cada $i \in \{0, \dots, n_k - 1\}$ construimos las rectas $t_i^k(i)$ y $t_i^k(i + 1)$ tangentes a a_i^k en los puntos v_i^k y v_{i+1}^k , respectivamente, y el rayo b_i^k con vértice en v_i^k que biseca al ángulo formado por $t_{i-1}^k(i)$ y $t_i^k(i)$ y que intersecta el interior de P (Ver Figura 4.1). A partir de estos rayos contruimos $h + 1$ conjuntos $\Lambda_k = \{\lambda_0^k, \dots, \lambda_{n_k-1}^k\}$, para $k = 0, \dots, h$, tales que sus elementos satisfagan lo siguiente:

1. $\lambda_i^k \subset P$ es un arco convexo cuyos extremos son v_i^k y v_{i+1}^k ,
2. λ_i^k es tangente a b_i^k (a b_{i+1}^k) en v_i^k (en v_{i+1}^k),
3. el número de tangencias entre los elementos de $\bigcup_k \Lambda_k$ es máximo,
4. si denotamos por C_i^k al interior de la curva $\lambda_i^k \cup v_i^k v_{i+1}^k$ entonces $C_i^k \cap C_j^m = \emptyset$, para todo i, j, k, m .

Para $k = 0, \dots, h$, sea Q_k el polígono cuyo conjunto de aristas es Λ_k y conjunto de vértices es $V(P_k)$. Observemos que los polígonos Q_k son arista-convexos, para $k \neq 0$, mientras que Q_0 es un polígono arista-cóncavo. Además, Q_k está contenido en el interior de Q_0 , para $k \neq 0$, y los elementos del conjunto $\mathcal{I} = \{Q_1, \dots, Q_h\}$ son ajenos por pares. Por lo tanto, $Q = (Q_0, \mathcal{I})$ es un polígono con huecos arista-cóncavo. Notemos que el polígono Q tiene la propiedad de que un conjunto de guardias que lo vigile también vigilará P .

Nuestra estrategia será obtener un polígono arista-cóncavo Q^h a partir de Q eliminando sus huecos uno por uno, y tal que los subconjuntos del plano que representen

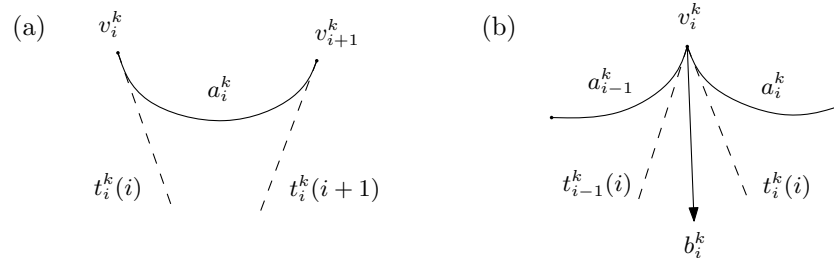


Figura 4.1: (a) Construcción de las rectas $t_i^k(i)$ y $t_i^k(i+1)$, (b) construcción de los rayos b_i^k .

ambos polígonos sean iguales. Así, cualquier conjunto de guardias que vigile Q^h vigilará también Q .

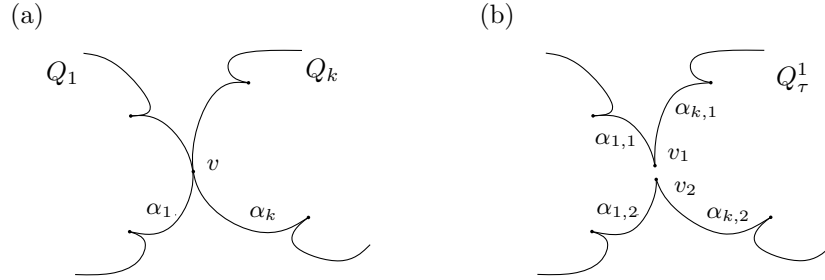


Figura 4.2: Construcción del polígono Q_τ^1 .

Fijémonos primero en el hueco Q_1 de Q . Como hemos maximizado el número de tangencias entre los elementos de $\bigcup_k \Lambda_k$, existirá un arco $\alpha_1 \in \Lambda_1$ que sea tangente a otro arco $\alpha_k \in \Lambda_k$, con $k \neq 1$. Sea v el punto de tangencia de α_1 y α_k , y hagamos $v_1 = v_2 = v$. Este punto v divide a cada uno de los arcos α_1 y α_k en dos; llamemos $\alpha_{1,1}$ y $\alpha_{1,2}$ a los arcos en los que se divide α_1 , y $\alpha_{k,1}$ y $\alpha_{k,2}$ a los arcos en los que se divide α_k . Construimos el polígono con huecos $Q^1 = (Q_0^1, \mathcal{I}^1)$ a partir de Q agregando los vértices v_1 y v_2 y sustituyendo los arcos α_1 y α_k por $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{k,1}$ y $\alpha_{k,2}$. Formalmente esto es: sean $\tau = \min\{1, k\}$ y $\mu = \max\{1, k\}$, entonces Q_τ^1 será tal que $V(Q_\tau^1) = V(Q_1) \cup V(Q_k) \cup \{v_1, v_2\}$ y $A(Q_\tau^1) = A(Q_1) \cup A(Q_k) \cup \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}\} \setminus \{\alpha_1, \alpha_k\}$; el resto de los polígonos serán tales que $Q_j^1 = Q_j$, para $j < \mu$ y $j \neq \tau$, y $Q_j^1 = Q_{j+1}$, para $j \geq \mu$. Con este procedimiento hemos contruido un polígono con huecos arista-cóncavo Q^1 con $h - 1$ huecos tal que $|Q^1| = |Q| + 2 = n + 2$.

Repitiendo el mismo procedimiento para el polígono Q^1 , fijándonos ahora en el hueco Q_1^1 , obtendremos un polígono Q^2 con $h - 2$ huecos tal que $|Q^2| = |Q^1| + 2 = n + 4$. Realizando este algoritmo $h - 2$ veces más obtendremos al final un polígono arista-

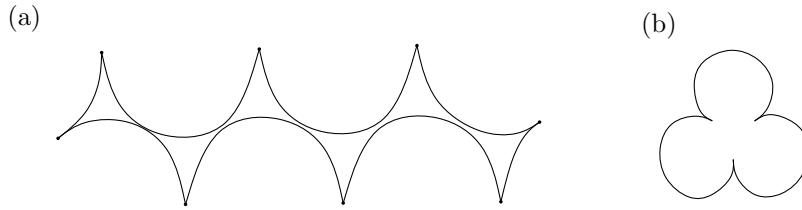


Figura 4.3: Construcción de la cota inferior: (a) polígono exterior, (b) hueco.

cóncavo Q^h sin huecos tal que $|Q^h| = n + 2h$. Y así, por el teorema 3.1, $2(n + 2h) - 4$ puntos guardia serán suficientes para vigilar Q^h , y a su vez vigilar P .

Para la prueba de necesidad mostramos un polígono con huecos arista-cóncavo con n vértices y h huecos, donde $n \geq 3h + 3$, que necesita $2(n + 2h) - 4$ puntos guardia para ser vigilado. La forma de los huecos se muestra en la Figura 4.3 (b); en este polígono dos arcos adyacentes son tangentes en su vértice común. Como cada hueco tiene 3 vértices entonces el polígono exterior debe tener $k = n - 3h$ vértices. La forma del polígono exterior se muestra en la Figura 4.3 (a); este corresponde a la cota inferior para polígonos arista-cóncavos. Los huecos se colocan en el interior del polígono exterior de tal manera que el número de tangencias entre los polígonos sea máximo (Ver Figura 4.4). ■

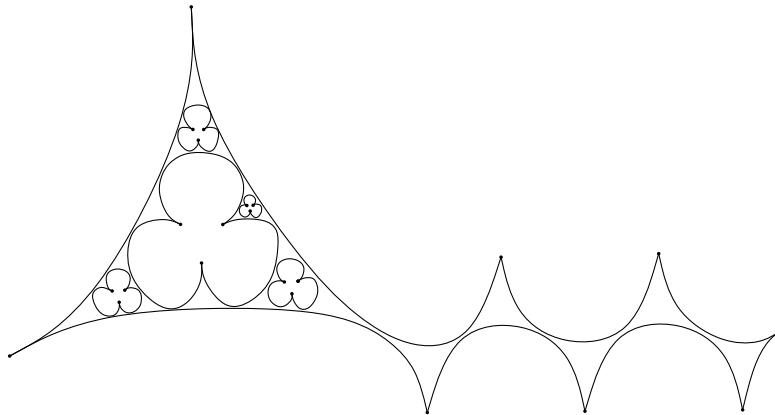


Figura 4.4: Polígono con huecos arista-cóncavo con 23 vértices y 5 huecos que necesita 62 puntos guardia para ser vigilado.

4.3. Vértices guardia en galerías arista-convexas

Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos arista-convexo. Para cada par de vértices v_i^k y $v_{i+1}^k \in P$, sea E_i^k el camino más corto (euclidiano) contenido en P que une a v_i^k y v_{i+1}^k , y es tal que el interior de la curva $a_i^k \cup E_i^k$ no contiene ningún hueco de P . Definimos $E_k = \bigcup_i E_i^k$. A la gráfica $\widehat{P} = \bigcup_k E_k$ le llamaremos el **polígono subyacente** de P . Consideremos una cara interior de \widehat{P} ; si esa cara no contiene un hueco de P entonces a su cerradura le llamaremos **componente poligonal** de \widehat{P} , de lo contrario le llamaremos **hueco**. A la unión de la curva $a_i^k \cup E_i^k$ y su interior le llamaremos la **habitación** de a_i^k .

Definimos $\Gamma(\widehat{P})$ de la misma forma que para polígonos arista-convexos sin huecos: la gráfica cuyos vértices son las componentes poligonales de \widehat{P} , tal que dos son adyacentes si existe un camino en \widehat{P} que intersecte las fronteras de ambas componentes y no intersecte ninguna otra. Observemos que en el caso con huecos, $\Gamma(\widehat{P})$ puede contener ciclos. Lo que haremos en la demostración del siguiente teorema será construir un polígono Q a partir de P tal que $\Gamma(\widehat{Q})$ sea un árbol. Esto implicará que \widehat{Q} es isomorfa al polígono subyacente de un polígono sin huecos, por lo que podremos vigilar sus componentes poligonales de la misma forma que para polígonos sin huecos.

Teorema 4.2. *Sea P un polígono con huecos arista-convexo con n vértices y h huecos. Entonces $\lfloor \frac{2(n+h)}{3} \rfloor$ vértices guardia son siempre suficientes para vigilar P y $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - \lceil \frac{2h}{3} \rceil$ son a veces necesarios.*

Demostración. Observemos que \widehat{P} divide al polígono P en habitaciones y componentes poligonales. Lo que haremos será construir un conjunto de $\lfloor \frac{2(n+h)}{3} \rfloor$ vértices guardias y demostrar que vigila las componentes poligonales y las habitaciones, con lo cual demostraremos que vigila P .

Si existe un vértice $v \in \widehat{P}$ tal que $v \in E_k \cap E_j$, donde $k \neq j$, entonces podremos “cortar” \widehat{P} a través de v y reducir su número de huecos en uno. La ventaja de “cortar” a través de v es que sólo tendremos que duplicar el vértice v , con lo cual el número de vértices sólo aumentará en uno. Puede ocurrir que algunas poligonales E_k sean tales que $E_k \cap E_j = \emptyset$, para toda $j \neq k$. Para remediar esto, modificaremos la poligonal E_k para que intersecte alguna E_j y así podamos “cortar” a través de algún vértice contenido en la intersección. A continuación damos el algoritmo para realizar esta construcción.

Definimos $F_k^0 = E_k$, para $k = 0, \dots, h$, y $Q^0 = \bigcup_k F_k^0$. Supongamos que estamos en la iteración $1 \leq i+1 \leq h$. Construiremos la gráfica Q^{i+1} a partir de Q^i como se

indica a continuación. Tenemos dos casos.

- **Caso a: Existe $k \neq 1$ tal que $F_1^i \cap F_k^i \neq \emptyset$.**

Sea $w_{i+1} \in F_1^i \cap F_k^i$ un vértice. “Cortaremos” Q^i a través del vértice w_{i+1} para obtener una gráfica Q^{i+1} con un hueco menos y que sea igual a Q^i como subconjunto del plano. Sean $x_1, x_2 \in F_1^i$ y $y_1, y_2 \in F_k^i$ los vértices adyacentes a w_{i+1} tales que x_1, w_{i+1}, x_2 y y_1, w_{i+1}, y_2 se encuentran en sentido contrario a las manecillas del reloj en F_1^i y F_k^i , respectivamente. Sean $w'_{i+1} = w_{i+1}$, $\tau = \min\{1, k\}$ y $\mu = \max\{1, k\}$. Definimos $F_\tau^{i+1} = F_1^i \cup F_k^i \cup \{w'_{i+1}, w'_{i+1}x_1, w'_{i+1}y_2\} \setminus \{w_{i+1}x_1, w_{i+1}y_2\}$ (Ver Figura 4.5).

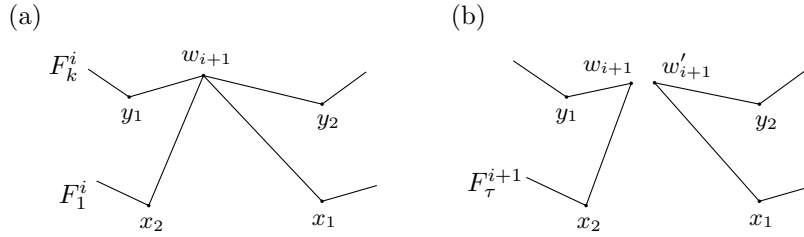


Figura 4.5: Ilustración del caso a: (a) antes del “corte” y (b) después del “corte”.

- **Caso b: No existe $k \neq 1$ tal que $F_1^i \cap F_k^i \neq \emptyset$.**

Afirmamos que existe $k \neq 1$ tal que F_k^i contiene un vértice w_{i+1} que ve una arista completa de F_1^i . Sean $x_1, x_2 \in F_1^i$ los extremos de la arista vista por w_{i+1} , tales que x_1, x_2 se encuentran en F_1^i en sentido contrario a las manecillas del reloj. Definimos el triángulo $T_{i+1} = w_{i+1}x_2x_1w_{i+1}$. Tenemos que T_{i+1} está contenido en alguna componente poligonal de Q^i y su interior no contiene vértices ni interseca aristas de Q^i , ya que de lo contrario w_{i+1} no podría ver por completo la arista x_1x_2 . Lo que haremos será eliminar el triángulo T_{i+1} de la componente poligonal de Q^i a la que pertenece para unir las poligonales F_1^i y F_k^i . Para esto, sean $y_1, y_2 \in F_k^i$ los vértices adyacentes a w_{i+1} , tales que y_1, w_{i+1}, y_2 se encuentran en sentido contrario a las manecillas del reloj en F_k^i . Sean $w'_{i+1} = w_{i+1}$, $\tau = \min\{1, k\}$ y $\mu = \max\{1, k\}$. Definimos $F_\tau^{i+1} = F_1^i \cup F_k^i \cup \{w'_{i+1}, w'_{i+1}x_1, w'_{i+1}y_2, w_{i+1}x_2\} \setminus \{x_1x_2, w_{i+1}y_2\}$ (Ver Figura 4.6).

El resto de las poligonales las definiremos como $F_j^{i+1} = F_j^i$, para $j < \mu$ y $j \neq \tau$, y $F_j^{i+1} = F_{j+1}^i$, para $j \geq \mu$. Finalmente definiremos $Q^{i+1} = \bigcup_k F_k^{i+1}$.

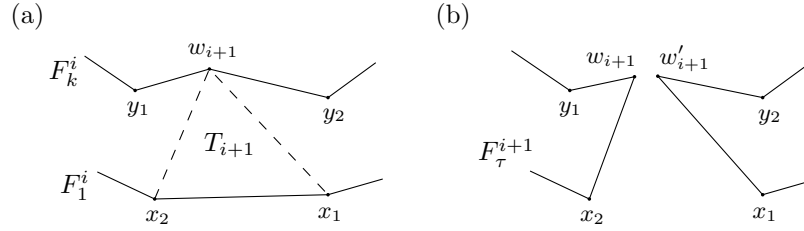


Figura 4.6: Ilustración del caso b: (a) antes del “corte” y (b) después del “corte”.

Realizamos h iteraciones para obtener las gráficas planas Q^1, \dots, Q^h , el conjunto de triángulos $\{T_i \mid i \in I\}$ y el conjunto de vértices $W = \{w_1, \dots, w_h\}$. Notemos que $|Q^{i+1}| = |Q^i| + 1$, por lo que $|Q^h| = n + h$. Además, la región del plano representada por la unión de las componentes poligonales de Q^h y los triángulos T_i , para $i \in I$, es igual a la región representada por la unión de las componentes poligonales de $Q^0 = \hat{P}$.

Sea $T(Q^h)$ una triangulación de las componentes poligonales de Q^h . Entonces $T(Q^h)$ tiene una 3-coloración, ya que Q^h es isomorfa al polígono subyacente de un polígono arista-convexo sin huecos. Sea G el conjunto de vértices de Q^h que pertenecen a las dos clases cromáticas más pequeñas de la 3-coloración. Tenemos que G vigila las componentes poligonales de Q^h . Observemos también que cada arista de Q^h tiene uno de sus extremos en G y que $|G| \leq \lfloor \frac{2(n+h)}{3} \rfloor$.

El siguiente algoritmo obtiene un conjunto de guardias a partir de G que vigila P . Definimos inicialmente $G^h = G$. En cada iteración procesaremos G^i para obtener un conjunto G^{i-1} tal que cada arista de Q^{i-1} tenga un guardia de G^{i-1} en alguno de sus extremos y $|G^{i-1}| \leq \lfloor \frac{2(n+h)}{3} \rfloor$. Notemos que G^h satisface las propiedades mencionadas. Se presentan dos casos al procesar G^i : $i \notin I$ o $i \in I$. Veremos primero el caso cuando $i \notin I$. Esto significa que para obtener Q^i a partir de Q^{i-1} sólo duplicamos un vértice y no necesitamos eliminar ningún triángulo. Definiendo $G^{i-1} = G^i$, vemos que este conjunto satisface las propiedades deseadas.

Ahora veamos el caso cuando $i \in I$. Entonces para obtener Q^i a partir de Q^{i-1} eliminamos el triángulo T_i . Este triángulo tiene como vértice a $w_i = w'_i$; a los otros dos vértices de T_i los llamaremos x_1, x_2 tales que sean adyacentes a w'_i, w_i en Q^i , respectivamente. Si $x_1 \in G^i$ o $x_2 \in G^i$ entonces tenemos al menos un guardia en la arista x_1x_2 y podemos definir $G^{i-1} = G^i$. Si $x_1, x_2 \notin G^i$ entonces $w_i, w'_i \in G^i$, ya que las aristas $x_1w'_i, x_2w_i \in Q^i$. Como tenemos guardias en w_i, w'_i y $w_i = w'_i$, podemos “trasladar” el guardia en w_i a x_1 , esto es, definimos $G^{i-1} = G^i \cup \{x_1\} \setminus \{w_i\}$. En este caso también obtenemos un conjunto de guardias G^{i-1} que satisface las propiedades mencionadas.

Después de realizar este algoritmo h veces obtenemos el conjunto G^0 tal que $|G^0| \leq \lfloor \frac{2(n+h)}{3} \rfloor$. Como cada arista de $Q^0 = \hat{P}$ tiene un guardia de G^0 en alguno de sus extremos entonces este conjunto de guardias vigila las componentes poligonales de $Q^0 = \hat{P}$ y, por el lema 3.2, también vigila las habitaciones de P . De lo anterior concluimos que G^0 vigila P , y por lo tanto $\lfloor \frac{2(n+h)}{3} \rfloor$ vértices guardia son suficientes.

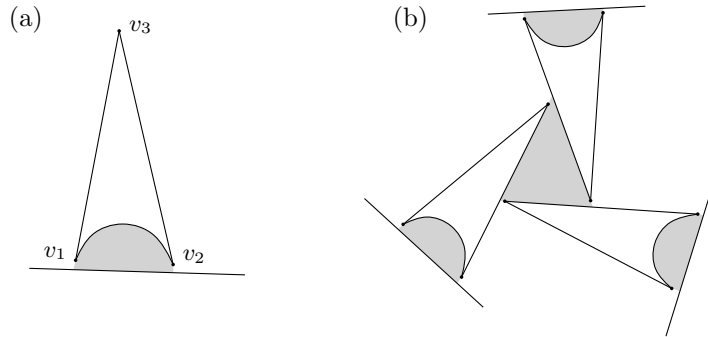


Figura 4.7: (a) Hueco del polígono construido para la cota inferior, (b) colocación de tres huecos.

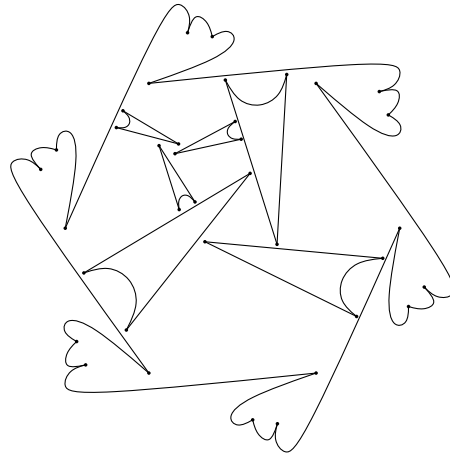


Figura 4.8: Polígono con huecos arista-convexo con 36 vértices y 6 huecos que necesita 20 vértices guardia para ser vigilado.

Para la prueba de necesidad mostramos una familia de polígonos con huecos arista-convexos con n vértices y h huecos, donde $n \geq 3h + 3$, que necesitan $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - \lceil \frac{2h}{3} \rceil$ vértices guardia para ser vigilados. La forma de los huecos se muestra en la Figura 4.7 (a). Colocando los huecos de tal forma que los vértices v_1 y v_2 queden muy cerca

de un arco, ya sea del polígono exterior u otro hueco, obligamos a que la región sombreada únicamente pueda ser vigilada colocando un guardia en v_1 o en v_2 . Si $h \geq 3$ entonces podremos colocar grupos de tres huecos de la forma mostrada en la Figura 4.7 (b). De esta manera necesitaremos un guardia para vigilar cada una de las regiones sombreadas. Para el polígono exterior, construimos un polígono arista-convexo con $k = n - 3h$ vértices como se muestra en la Figura 4.8, la cual corresponde a la cota inferior para vértices guardia en polígonos arista-convexos. Por la manera en que construimos este polígono, son necesarios

$$\left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{h}{3} \right\rfloor + h = \left\lfloor \frac{2n}{3} - 2h \right\rfloor + \left\lfloor \frac{h}{3} \right\rfloor + h = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{h}{3} \right\rfloor - h = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2h}{3} \right\rfloor$$

vértices guardia para vigilarlo. ■

Antes de demostrar el siguiente teorema primero daremos una definición. Definimos el **cierre convexo** de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ como el mínimo conjunto convexo que contiene a X (Ver Figura 4.9). Al cierre convexo de X lo denotaremos por $CH(X)$. Notemos que $CH(X)$ es un polígono cuyos vértices son puntos de X .

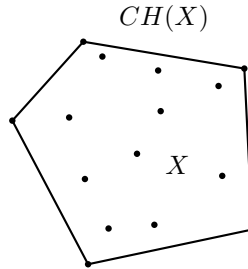


Figura 4.9: El conjunto X y su cierre convexo $CH(X)$.

Para cada $P_k \in \mathcal{H}$, sea E_i^k el camino más corto (euclidiano) que une a v_i^k y v_{i+1}^k y está contenido en $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus P_k}$. Sea $E_k = \bigcup_i E_i^k$; notemos que E_k contiene en una de sus caras interiores al hueco P_k . Definimos el **polígono subyacente** de P_k , para $k = 1, \dots, h$, como la gráfica plana $\hat{P}_k = CH(P_k) \cup E_k$ (Ver Figura 4.10 (a)). Notemos que $CH(\hat{P}_k) = CH(P_k)$. La cerradura de las caras interiores de \hat{P}_k , exceptuando la cara que contiene al hueco P_k , son polígonos; a estos polígonos les llamaremos **componentes poligonales** de \hat{P}_k . A la unión de la curva $a_i^k \cup E_i^k$ y su interior le llamaremos la **habitación** de a_i^k .

Observemos que la definición de la gráfica $\Gamma(\cdot)$ también aplica para polígonos subyacentes de huecos, así para cada $P_k \in \mathcal{H}$ podemos considerar la gráfica $\Gamma(\hat{P}_k)$.

Notemos que $\Gamma(\widehat{P}_k)$ contiene un ciclo cuyos vértices son las componentes poligonales que intersectan la frontera de $CH(P_k)$, y además este es el único ciclo que tiene esta gráfica (Ver Figura 4.10 (b)).

Para cada k , sea $T(\widehat{P}_k)$ la unión de \widehat{P}_k y triangulaciones de sus componentes poligonales. El siguiente lema afirma que la gráfica plana $T(\widehat{P}_k)$ es 3-coloreable.

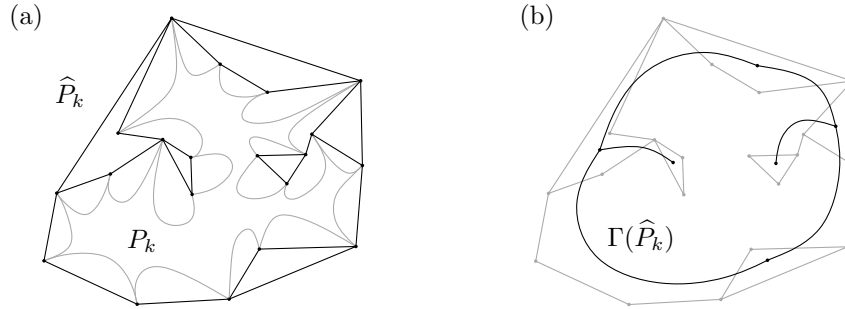


Figura 4.10: (a) El hueco P_k y su polígono subyacente \widehat{P}_k , (b) \widehat{P}_k y la gráfica $\Gamma(\widehat{P}_k)$.

Lema 4.3. $T(\widehat{P}_k)$ es 3-coloreable, para $k = 0, \dots, h$.

Demostración. Sabemos que $\Gamma(\widehat{P}_0)$ es un árbol, por lo que $T(\widehat{P}_0)$ es 3-coloreable. Consideremos ahora $k \geq 1$ y obtengamos una 3-coloración buena de los vértices de $CH(P_k)$. Sean q_1, \dots, q_m las componentes poligonales de \widehat{P}_k que pertenecen al ciclo de $\Gamma(\widehat{P}_k)$. Como cada componente q_i tiene una única arista en $CH(P_k)$ entonces tenemos coloreados dos vértices adyacentes en cada q_i . Esta coloración la podemos extender a una 3-coloración buena de $T(q_i)$, para toda i . Observemos que entonces la gráfica $\Gamma(\widehat{P}_k) \setminus \bigcup_i q_i q_{i+1}$ es un conjunto de árboles, ajenos por pares, cuya raíz es una componente 3-coloreada. Luego, podemos extender esta coloración a las triangulaciones de las componentes poligonales no coloreadas, obteniendo así una 3-coloración buena de $T(\widehat{P}_k)$. ■

El siguiente teorema es sobre una clase particular de polígonos con huecos arista-convexos. Para estos polígonos demostramos que $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ vértices guardia son suficientes para vigilarlos.

Teorema 4.4. Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos arista-convexo tal que:

1. para todas $k, j \in \{0, \dots, h\}$, los polígonos subyacentes \widehat{P}_k y \widehat{P}_j son ajenos o alguno está contenido en una componente poligonal del otro,

2. hay a lo más dos polígonos subyacentes contenidos en cada habitación de P y en cada componente poligonal de \widehat{P}_k , para toda $k \in \{0, \dots, h\}$.

Entonces $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ vértices guardia son suficientes para vigilar P .

Demostración. Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos arista-convexo que satisface las condiciones 1 y 2. Sea $k \in \{0, \dots, h\}$, q una componente poligonal de \widehat{P}_k y \mathcal{S} el conjunto de polígonos subyacentes contenidos en q . Definimos una **pre-triangulación** de q , denotada $T_0(q)$, como una gráfica plana tal que su conjunto de vértices es $V(q)$ y su conjunto de aristas satisface lo siguiente:

- T1 toda arista de q es arista de $T_0(q)$ y toda arista de $T_0(q)$ que no es arista de q es una de sus diagonales,
- T2 ninguna arista de $T_0(q)$ intersecciona elementos de \mathcal{S} ,
- T3 toda diagonal d de q , tal que $d \notin T_0(q)$, intersecciona una arista de $T_0(q)$ o algún polígono subyacente en \mathcal{S} .

La forma de construir la gráfica $T_0(q)$ es empezar a construir una triangulación de q y parar cuando ya no podamos agregar otra arista sin interseccionar algún polígono subyacente (Ver Figura 4.11 (a)). De lo anterior concluimos que toda componente poligonal q tiene una pre-triangulación y que esta se puede extender a una triangulación de q .

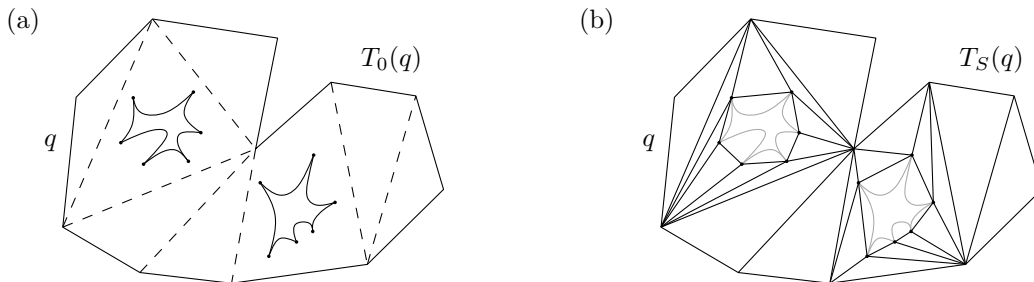


Figura 4.11: (a) La componente q y una pre-triangulación $T_0(q)$, (b) la gráfica $T_S(q)$.

Para cada componente poligonal q de \widehat{P}_k , fijamos una triangulación $T(q)$ de q tal que $T_0(q) \subset T(q)$. Definimos la gráfica $T(\widehat{P}_k)$ como la unión de las triangulaciones $T(q)$, donde q es componente poligonal de \widehat{P}_k . También definimos $T_S(q)$ como la triangulación de la cerradura de $q \setminus \bigcup_{s \in \mathcal{S}} CH(s)$ tal que $T_0(q) \subset T_S(q)$ (Ver Figura 4.11 (b)).

Notemos que todo punto de P pertenece a una habitación de un arco de P o a una componente poligonal de algún polígono subyacente. Así, para encontrar un conjunto de guardias que vigile P bastará construir un conjunto que vigile las habitaciones y las componentes poligonales. Consideremos un polígono subyacente \widehat{P}_k y una componente poligonal q de \widehat{P}_k . Sea \mathcal{S} el conjunto de polígonos subyacentes contenidos en q y sea p un punto en la cerradura de $q \setminus \bigcup_{s \in \mathcal{S}} CH(s)$. Tenemos tres casos:

- **Caso a:** q no contiene polígonos subyacentes. Entonces p pertenece a un triángulo de $T(q)$, y las aristas de este triángulo son vistas por p . Luego, p ve una arista de $T(\widehat{P}_k)$.
- **Caso b:** q contiene un único polígono subyacente. Sea $\mathcal{S} = \{\widehat{P}_j\}$. Tenemos que p está en un triángulo t de $T_{\mathcal{S}}(q)$, cuyas tres aristas son vistas por p . Notemos que t tiene dos vértices v_1, v_2 en $T_0(q)$ o en $CH(P_j)$. Si $v_1, v_2 \in T_0(q)$ entonces v_1v_2 es una arista de $T_0(q)$, por T3; y si $v_1, v_2 \in CH(P_j)$ entonces v_1v_2 es una arista de $CH(P_j)$, por convexidad. En ambos casos, p ve una arista de $T(\widehat{P}_k)$.
- **Caso c:** q contiene dos polígonos subyacentes. Sea $\mathcal{S} = \{\widehat{P}_j, \widehat{P}_l\}$. Tenemos que p se encuentra en un triángulo t de $T_{\mathcal{S}}(q)$. Si t tuviera dos vértices v_1, v_2 en $T_0(q)$, $CH(P_j)$ o $CH(P_l)$ entonces v_1v_2 sería una arista de esa gráfica y así p vería una arista completa de $T(\widehat{P}_k)$. Si esto no ocurre entonces t tiene como vértices a $v \in T_0(q)$, $u \in CH(P_j)$ y $w \in CH(P_l)$ (Ver Figura 4.12). Sean $u_1, u_2 \in CH(P_j)$ los vértices adyacentes a u . Notemos que alguno de los ángulos puu_1, puu_2 es menor a 180° ; sin pérdida de generalidad supongamos que es puu_1 .

Definimos inicialmente $x = u$ y consideramos el segmento dirigido $\vec{v}x$. Diremos que $\vec{v}x$ *intersecta inicialmente* un vértice y en una gráfica H si en el interior del segmento \overline{vy} no hay ningún vértice ni punto de alguna arista de H . En este caso consideraremos las intersecciones iniciales en $H = T_0(q) \cup CH(P_j) \cup CH(P_l)$. El punto x lo deslizamos sobre $\overline{uu_1}$ en la dirección de u_1 y nos detenemos cuando $\vec{v}x$ interseque un vértice.

Sea v' el vértice que $\vec{v}x$ interseca inicialmente en H . Si $v' = u_1$ entonces el triángulo vu_1w no contiene vértices ni aristas de H , y así p ve la arista uu_1 . Supongamos que $v' \neq u_1$. Tenemos que $v' \notin CH(P_l)$, ya que de lo contrario el segmento $\overline{v'w}$ estaría contenido en $CH(P_l)$ y esto contradeciría la aplanabilidad de $T_{\mathcal{S}}(q)$. También tenemos que $v' \notin CH(P_j)$, porque de lo contrario $\overline{v'u}$ estaría contenido en $CH(P_j)$ y así v' sería adyacente a u , lo cual contradice que $v' \neq u_1$. Por lo tanto, $v' \in T_0(q)$. Como vv' no interseca aristas de H entonces $vv' \in T_0(q)$. Por otra parte, el triángulo $pvv'p$ no contiene puntos de H , por lo que p ve la arista $vv' \in T_0(q) \subset T(\widehat{P}_k)$.

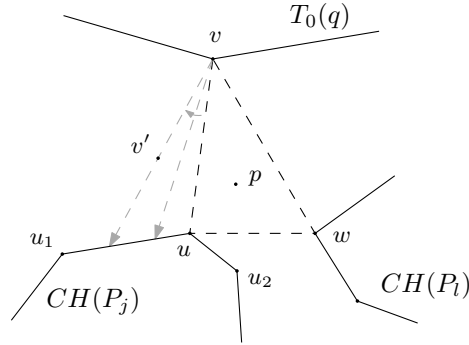


Figura 4.12: Ilustración del caso c.

Ahora consideremos una habitación R_i^k y sea \mathcal{S} el conjunto de polígonos subyacentes contenidos en R_i^k . Sea p un punto en la cerradura de $R_i^k \setminus \bigcup_{s \in \mathcal{S}} CH(s)$. En este caso consideraremos las intersecciones iniciales en $H = R_i^k \cup \bigcup_{s \in \mathcal{S}} CH(s)$. Tenemos que existe un vértice u de E_i^k o de un polígono subyacente tal que u es visto por p , y en el interior del segmento pu no hay ningún vértice ni punto de alguna arista. Entonces p ve una sección de alguna arista incidente a u ; sea u' el otro extremo de esa arista.

Sea l el rayo con vértice en p que pasa por u . Rotamos l 360° en la dirección en la que intersectamos el interior de uu' antes que u' . Si al rotar l intersectamos inicialmente dos vértices de E_i^k o de algún polígono subyacente entonces p ve una arista completa de esta gráfica, por la convexidad de $CH(s)$, para toda $s \in \mathcal{S}$, y la convexidad de $E_i^k \cup v_i^k v_{i+1}^k$. Supongamos que no ocurre ninguno de estos casos. Entonces hay dos polígonos subyacentes contenidos en R_i^k , digamos $\mathcal{S} = \{\widehat{P}_j, \widehat{P}_l\}$, y E_i^k y los elementos de \mathcal{S} son tales que p ve únicamente los vértices $u_1 \in CH(P_l)$, $u_2 \in CH(P_j)$ y $u_3 \in E_i^k$. Notemos que en este caso, p no ve una arista completa de E_i^k o de algún polígono subyacente (Ver Figura 4.13). Sea $r = u_1 u_2 u_3$. Se tiene que todos los puntos en la cerradura de $R_i^k \setminus \bigcup_{s \in \mathcal{S}} CH(s)$ que no están en r ven una arista completa de E_i^k , $CH(P_j)$ o $CH(P_l)$. Luego, r contiene todos los puntos que no ven una arista completa, entre los cuales se encuentra p .

Para solucionar este problema, agregaremos la arista $u_1 u_2$, la cual conecta las gráficas \widehat{P}_l y \widehat{P}_j , y así todo punto en r verá esta arista. Definimos $\widehat{P}_{jl} = \widehat{P}_j \cup \widehat{P}_l \cup u_1 u_2$ y a \widehat{P}_{jl} le llamaremos el **acoplamiento** de \widehat{P}_j y \widehat{P}_l , también diremos que \widehat{P}_j y \widehat{P}_l están **acoplados**. Sea $T(\widehat{P}_{jl}) = T(\widehat{P}_j) \cup T(\widehat{P}_l) \cup u_1 u_2$. Afirmamos que $T(\widehat{P}_{jl})$ es 3-coloreable: primero 3-coloreamos $T(\widehat{P}_j)$, después coloreamos u_1 de un color distinto al de u_2 , y finalmente 3-coloreamos $T(\widehat{P}_l)$ manteniendo el color de u_1 .

Sea $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ el conjunto de todos los polígonos subyacentes no acoplados

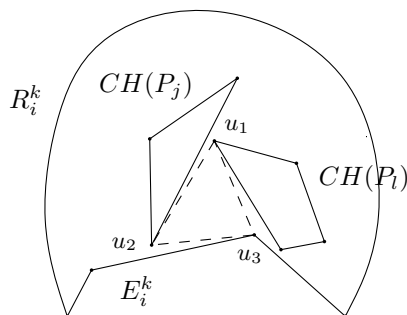


Figura 4.13: Ilustración del caso cuando $p \in R_i^k$.

y de acoplamientos. Sea $T(Q_k)$ la triangulación de Q_k que hemos definido y consideremos una 3-coloración de esta gráfica. Sea G_k el conjunto de vértices de Q_k que pertenecen a una de las dos clases cromáticas más pequeñas y definamos $G = \bigcup_k G_k$. Tenemos que $|G| \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. También tenemos que todo punto de P ve dos vértices adyacentes de algún Q_k , por lo que ve dos vértices en distintas clases cromáticas. Por lo tanto, G vigila P . ■

4.4. Puntos guardia en galerías arista-convexas

Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos arista-convexo, donde $\mathcal{H} = \{P_1, \dots, P_h\}$. Definimos **descomposición convexa** de P y construimos la gráfica $\delta(C)$ de la misma manera que para polígonos sin huecos. Definimos **descomposición normal** como aquella descomposición convexa compuesta por $n - h + 1$ celdas para la cual exista una gráfica dirigida $\vec{\delta}(C)$, obtenida a partir de $\delta(C)$ dirigiendo sus aristas, tal que satisfaga las condiciones N1 y N2. También definimos **descomposición estándar** y **descomposición buena** de P de la misma manera que para polígonos sin huecos. Observemos que P siempre tiene una descomposición estándar, por la forma de construirla. A partir de una descomposición estándar de P podemos obtener una descomposición buena modificando las aristas de $\vec{\delta}(C)$ de la misma forma que indica el lema 3.8, y la razón de esto es que localmente no hay diferencia entre un polígono con huecos y uno sin huecos; desde ahora, toda descomposición buena la consideraremos obtenida de esta forma.

Sea C una descomposición buena de P . Llamaremos **multifronterizas** a aquellas celdas de C tales que su frontera intersecta la frontera de dos polígonos distintos P_i y P_j (Ver Figura 4.14). También distinguiremos algunas componentes de $\vec{\delta}(C)$. Llamaremos **componentes agujeradas** a aquellas componentes t que contengan un ciclo μ que no sea la frontera de una celda cíclica (Ver Figura 4.16 (a)). El nombre se

debe a que μ contiene al menos un hueco en su interior. Por ser C una descomposición normal, μ debe ser el único ciclo de t y entonces todas las celdas en $D(t)$ son acíclicas; esto a su vez implica que toda celda en $D(t)$ tiene en su frontera una sección de un arco de P . Por otra parte, también tenemos que todos los vértices de t deben tener grado exterior 1.

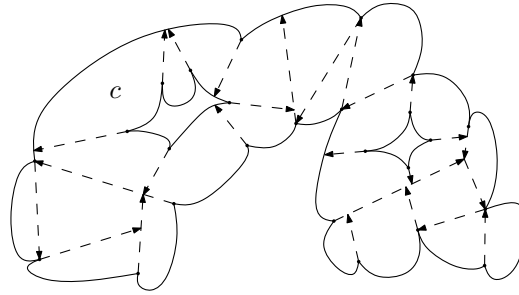


Figura 4.14: Una descomposición buena de un polígono con huecos arista-convexo. La celda c es multifronteriza.

Sea $\gamma \subset D(C)$ un ciclo tal que $R(\gamma)$ es un polígono con huecos y además uno de sus huecos contiene a un hueco de P ; entonces a γ le llamaremos **ciclo agujerado**. Observemos que si t es una componente agujerada entonces $D(t)$ contiene ciclos agujerados, pero no es cierto en el otro sentido (Ver Figura 4.15).

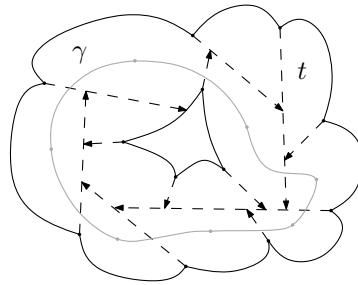


Figura 4.15: $D(t)$ contiene el ciclo agujerado γ , sin embargo t no es una componente agujerada.

Sea t una componente agujerada. Distinguiremos dos ciclos agujerados de $D(t)$ cuando $R(t)$ contenga un único hueco. Construimos un ciclo en $D(t)$, al cual llamaremos **ciclo exterior**, con las celdas encontradas al recorrer el polígono exterior de $R(t)$. De la misma manera, construimos un ciclo en $D(t)$ con las celdas encontradas al recorrer el hueco de $R(t)$; a este le llamaremos **ciclo interior** (Ver Figura 4.16 (b)). Sean γ_I y γ_E el ciclo interior y el ciclo exterior, respectivamente, de la componente

agujerada t . Observemos que $\gamma_I \cup \gamma_E$ genera a $D(t)$, ya que toda celda tiene una sección de un arco de P en su frontera, y por consiguiente interseca a la frontera de $R(t)$. También notemos que μ , el ciclo contenido en t , divide a $R(t)$ en dos regiones: en el interior de μ se encuentra $R(\gamma_I)$ y en el exterior $R(\gamma_E)$. De aquí, se sigue que γ_I y γ_E son ciclos ajenos.

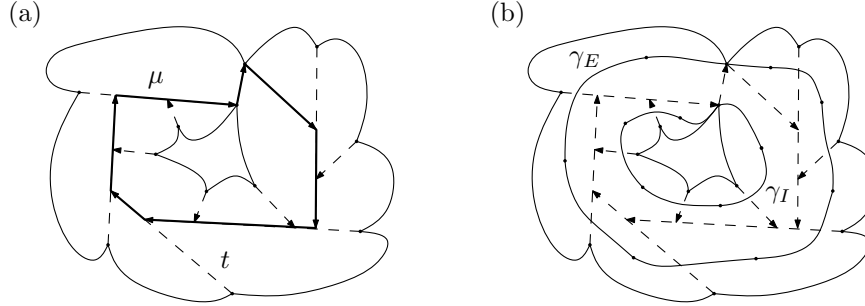


Figura 4.16: (a) Una componente agujerada t y el ciclo μ que contiene, (b) el ciclo interior γ_I y el ciclo exterior γ_E .

El siguiente lema enuncia una característica de los ciclos contenidos en componentes agujeradas, el cual servirá para demostrar el lema 4.6.

Lema 4.5. *Sea C una descomposición buena, t una componente agujerada de $\vec{\delta}(C)$ y μ el ciclo contenido en t . Entonces μ contiene un vértice de P .*

Demostración. Sea C_0 la descomposición estándar de la cual proviene C . Consideremos los caminos maximales de aristas colineales contenidos en $\delta(\vec{C}_0)$ tales que al deformarlos alguna de sus aristas se convirtió en una arista de μ . Recordemos que estos caminos fueron trazados en orden, por lo que podemos escoger el que fue trazado primero; llamémoslo p_0 . Se tiene que p_0 inicia en un vértice u_0 de P y termina en un punto de un arco a . Sea $p = u_0u_1 \dots u_k$ el camino en el que se convirtió p_0 después de deformarlo. Por hipótesis, alguna arista u_iu_{i+1} pertenece a μ . Como u_{i+1} tiene grado exterior 1, entonces la arista $u_{i+1}u_{i+2}$ también debe pertenecer a μ . Por inducción, vemos que el camino $u_i \dots u_k$ está contenido en μ . Como u_k debe pertenecer a a y tener grado exterior 1, entonces u_k es uno de los extremos de a . Por lo tanto, u_k es el vértice de P que pertenece a μ . ■

Lema 4.6. *Sea t una componente agujerada tal que $R(t)$ contiene un único hueco. Entonces existe un triángulo $c_1c_2c_3c_1$ en $D(t)$ tal que $c_1 \in \gamma_E$ (o $c_1 \in \gamma_I$) y $c_2, c_3 \in \gamma_I$ (o $c_2, c_3 \in \gamma_E$), y además c_2, c_3 son adyacentes en ese ciclo.*

Demostración. Sea μ el ciclo contenido en t y v el vértice de P que pertenece a μ . Sean c_2, c_3 las celdas que contienen en su frontera a v y una sección de un arco incidente a v (Ver Figura 4.17). Se tiene que c_2 y c_3 pertenecen a γ_I o γ_E , ya que ambas quedan en el interior de μ o en el exterior. Si $c_2, c_3 \in \gamma_I$ entonces c_2 y c_3 se encuentran consecutivamente al recorrer la frontera del hueco de $R(t)$, por lo que son adyacentes en γ_I . Por otra parte, existe al menos una celda en el exterior de μ que contiene en su frontera a v ; sea c_1 esta celda. Entonces $c_1 \in \gamma_E$ y $c_1 c_2 c_3 c_1$ es un triángulo contenido en $D(t)$, ya que las tres celdas se intersectan en v . El caso cuando $c_2, c_3 \in \gamma_E$ es análogo. ■

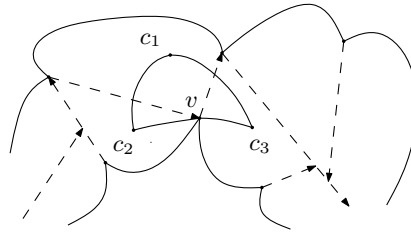


Figura 4.17: Ilustración de la prueba del lema 4.6

Los siguientes lemas enuncian dos propiedades importantes: una sobre ciclos agujerados que no contienen celdas multifronterizas y otra sobre componentes que no son adyacentes a celdas multifronterizas.

Lema 4.7. Si $\gamma \subset D(C)$ es un ciclo agujerado que no contiene celdas multifronterizas entonces $\gamma \subset D(t)$, donde t es una componente agujerada.

Demostración. Sea $\gamma = c_0 \dots c_{k-1} c_0 \subset D(C)$ un ciclo agujerado sin celdas multifronterizas. Como c_i es adyacente a c_{i-1} entonces existe una componente conexa A_i de $\varphi(c_i)$ cuya intersección con $\varphi(c_{i-1})$ es no vacía. Similarmente, existe una componente conexa B_i de $\varphi(c_i)$ cuya intersección con $\varphi(c_{i+1})$ es no vacía. Si $A_i \neq B_i$ entonces c_i sería una celda multifronteriza, ya que en la frontera de c_i habría dos secciones de arcos de P tales que una se encontraría en el interior de γ y otra en el exterior. Por lo tanto, $A_i = B_i$ y $A_i \cup A_{i+1}$ es conexo, para toda i . De aquí se sigue por inducción que $\bigcup_i A_i$ es conexo. Luego, $\bigcup_i A_i$ es subgráfica de una componente t , y así $\gamma \subset D(t)$. Ahora, como $\bigcup_i A_i$ es conexo y $c_k \cap \bigcup_i A_i \neq \emptyset$ para toda k , tenemos que $\bigcup_i A_i$ contiene un ciclo que “rodea” los huecos de $R(\gamma)$. Además, uno de los huecos de $R(\gamma)$ es hueco de P , por ser γ un ciclo agujerado. Luego, el ciclo que contiene $\bigcup_i A_i$ no es frontera de una celda cíclica, y así t es una componente agujerada. ■

Lema 4.8. Si t es una componente agujerada que no es adyacente a celdas multifronterizas entonces $R(t)$ es un polígono arista-convexo con un único hueco.

Demostración. Sea μ el ciclo contenido en t y supongamos que $R(t)$ es un polígono con al menos dos huecos H_1 y H_2 . Como los vértices de t tienen grado exterior 1 entonces toda celda que intersekte a H_1 o H_2 tiene en su frontera una sección de un arco de P . Si una celda c intersekte a H_1 y H_2 entonces c sería multifronteriza, ya que contendría en su frontera dos secciones de arcos pertenecientes a polígonos diferentes. Por lo tanto, ninguna celda en $R(t)$ intersekte a ambos huecos. Para que esto sea posible, debe existir un camino π contenido en t que empiece y termine en vértices de μ , de tal manera que H_1 y H_2 se encuentren en distintas componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mu \cup \pi)$ (Ver Figura 4.18). Cualquier elección de los grados exteriores de los vértices de π contradeciría el hecho de que todos los vértices de t tienen grado exterior 1. Por lo tanto, $R(t)$ debe ser un polígono arista-convexo con un único hueco. ■

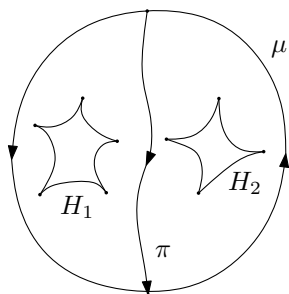


Figura 4.18: Ilustración de la prueba del lema 4.8.

Antes de probar el resultado principal de esta sección daremos una definición. Definimos *polígono multinivel* como un polígono en una superficie de Riemann. La idea intuitiva de este tipo de polígonos es la de un polígono que yace en varios niveles conectados por rampas (Ver Figura 4.19).

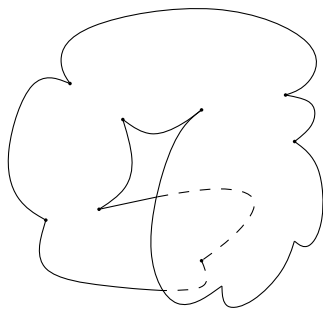


Figura 4.19: Polígono multinivel.

Teorema 4.9. $\lfloor \frac{n+h}{2} \rfloor$ puntos guardia son siempre suficientes para vigilar un polígono con huecos arista-convexo con n vértices y $h \geq 1$ huecos, y $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos guardia son a veces necesarios.

Demostración. Sea $P = (P_0, \mathcal{H})$ un polígono con huecos arista-convexo con n vértices y h huecos, y C una descomposición buena de P . El siguiente algoritmo modifica el polígono P y la descomposición convexa C para obtener un polígono multinivel arco-convexo P' y una descomposición convexa C' de P' sin celdas multifronterizas. Definimos inicialmente $P' = P$ y $C' = C$. Supongamos que existe una celda multifronteriza $c_1 \in C'$. Notemos que $\varphi(c_1)$ tiene al menos dos componentes conexas. Sea φ_1 una componente conexa y $\varphi_2 = \varphi(c_1) \setminus \varphi_1$. Modificaremos el polígono P' de la siguiente manera. Duplicamos la celda c_1 agregando una celda $c_2 = c_1$. Las celdas c_1 y c_2 las consideramos en dos niveles distintos y hacemos que las aristas de φ_1 en la frontera de c_1 se conviertan en aristas de la frontera de P' ; lo mismo para las aristas de φ_2 en la frontera de c_2 . A las celdas c_1, c_2 las llamaremos **celdas duplicadas**, y diremos que una es **gemela** de la otra. Realizamos esta construcción hasta que C' no tenga celdas multifronterizas.

Afirmamos que el algoritmo termina. Esto es porque en cada iteración se escoge una celda multifronteriza $c_1 \in C'$ para procesarla y después de hacer esto el número de polígonos que intersectan a c_1 disminuye en uno. Como c_1 es adyacente a un número finito de polígonos, entonces c_1 deja de ser multifronteriza en un número finito de iteraciones. Además, toda celda que no es multifronteriza sigue siendo no multifronteriza después del algoritmo.

Intuitivamente, lo que hace la construcción anterior es fusionar dos polígonos de P' , a saber aquellos que intersectan a φ_1 , los cuales pueden ser huecos o un hueco y el polígono exterior. Por esto, después de cada iteración el número de huecos disminuye en uno y lo que obtenemos es un polígono arista-convexo multinivel (con huecos o sin huecos). Por lo tanto, si f es el número de iteraciones que tuvimos que realizar entonces $f \leq h$. Además, al final del algoritmo P' tiene $h - f$ huecos, C' tiene $(n - h + 1) + f$ celdas y el número de celdas duplicadas es $2f$. Por otra parte, observemos que $\vec{\delta}(C')$ y $\vec{\delta}(C)$ contienen las mismas componentes, ya que ninguna arista de $\vec{\delta}(C')$ se duplica o se elimina.

Tenemos que, por la forma de construir el polígono multinivel P' , todos los lemas demostrados en esta sección también se satisfacen para P' . En el resto de la demostración los usaremos libremente.

Sea t' una componente no agujerada de $\vec{\delta}(C')$. Por el lema 4.7, $D(t')$ no contiene ciclos agujerados, ya que t' no es adyacente a celdas multifronterizas. Entonces $R(t')$

no contiene huecos, por lo que $D(t')$ satisface todas las propiedades que nos permiten vigilar s celdas con a lo más $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ guardias. Sin embargo, $D(C) \neq D(C')$; específicamente, $D(C')$ no satisface el lema 3.9, el cual dice que todos los vértices de $D(C)$ tienen grado mayor o igual a 2. Observemos que los únicos vértices de $D(C')$ que pueden tener grado uno son las celdas duplicadas. Este problema lo solucionaremos permitiendo que al vigilar las celdas de $D(t')$ podamos dejar sin vigilar alguna de sus celdas duplicadas.

Ahora procedemos a vigilar las celdas de $D(C')$. Sea $\Gamma(C')$ la gráfica cuyos vértices son las componentes de $\tilde{\delta}(C')$, tal que dos son adyacentes si existe una celda en C' adyacente a ambas componentes. Tenemos que $\Gamma(C')$ es conexa, por lo que podemos obtener un árbol generador aplicando el algoritmo BFS, el cual nos da además un orden en los vértices. Pediremos que la raíz de ese árbol sea una componente agujerada, en caso de existir. Denotamos por t'_1, \dots, t'_m a las componentes de $\tilde{\delta}(C')$ según el orden inducido por el algoritmo. De las propiedades del algoritmo BFS y de que C' no contiene celdas multifronterizas se sigue que la componente t'_k tiene una única celda que pertenece a alguna componente t'_j con $j < k$. Denotaremos $n(t'_k) = |D(t'_k)|$, para $k = 1, \dots, m$. Procesaremos las gráficas $D(t'_1), \dots, D(t'_m)$ en ese orden, de manera que al procesar $D(t'_k)$ vigilarémos todas las celdas adyacentes a t'_k aún sin vigilar, exceptuando a lo más una celda, la cual debe ser duplicada o adyacente a otra componente t'_j , con $j > k$ (esta la vigilarémos cuando procesemos $D(t'_j)$).

El procesamiento de la gráfica $D(t'_k)$ será de la siguiente manera. Si t'_k no es una componente agujerada entonces, como mencionamos anteriormente, $R(t'_k)$ no tiene huecos y así podemos vigilar s_k celdas de $D(t'_k)$ con a lo más $\lfloor \frac{s_k}{2} \rfloor$ puntos guardias.

Ahora supongamos que t'_k es una componente agujerada. Por el lema 4.8, $R(t'_k)$ debe ser un polígono arista-convexo con un único hueco. Sean γ_I el ciclo interior de $D(t'_k)$ y γ_E el ciclo exterior. Por el lema 4.6, existen celdas c_1, c_2, c_3 tales que c_1 y c_2 son adyacentes y pertenecen al mismo ciclo, y c_3 pertenece al otro ciclo. Distinguimos dos casos.

Caso a: Ninguna celda de $D(t'_k)$ está vigilada. Notemos que si hay al menos una componente agujerada entonces este caso se presenta al menos una vez. Primero veamos el caso cuando alguno de los ciclos γ_I o γ_E es par (puede ser que ambos sean ciclos pares). Sin pérdida de generalidad supondremos que γ_I es par. Entonces podemos vigilar las celdas de γ_I con $\frac{|\gamma_I|}{2}$ guardias y las celdas de γ_E con $\lceil \frac{|\gamma_E|}{2} \rceil$. Luego, son suficientes $\lceil \frac{n(t'_k)}{2} \rceil = \lfloor \frac{n(t'_k)+1}{2} \rfloor$ guardias. Para el caso donde ambos ciclos γ_I y γ_E son impares supondremos que $c_1c_2 \in \gamma_E$ y $c_3 \in \gamma_I$, ya que el otro caso es análogo. Tenemos que las gráficas $\gamma_E \cup \{c_3, c_1c_3, c_2c_3\} \setminus \{c_1c_2\}$ y $\gamma_I \setminus \{c_3\}$ son caminos pares,

por lo que bastarán $\frac{n(t'_k)}{2}$ guardias (Ver Figura 4.20). En ambos casos, para vigilar s_k celdas usamos a lo más $\lfloor \frac{s_k+1}{2} \rfloor$ guardias.

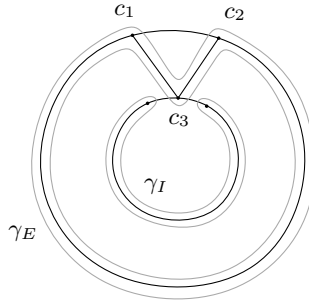


Figura 4.20: Caso a.

Caso b: Una celda de $D(t'_k)$ está vigilada. Notemos que este caso se presenta a lo más $h - f - 1$ veces. Sea c la celda ya vigilada. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $c \in \gamma_E$. El caso donde alguno de los ciclos γ_I o $\gamma_E \setminus \{c\}$ es par es análogo al caso a. Si ambos ciclos son impares tenemos dos casos:

- **Caso b1:** $c_3 \in \gamma_I$. Las gráficas $\gamma_E \cup \{c_3, c_1c_3, c_2c_3\} \setminus \{c, c_1c_2\}$ y $\gamma_I \setminus \{c_3\}$ son caminos pares, por lo que bastarán $\frac{n(t'_k)-1}{2}$ guardias (Ver Figura 4.21 (a)).
- **Caso b2:** $c_3 \in \gamma_E$. En este caso sólo podemos asegurar que vigilamos las celdas de $D(t'_k) \setminus \{c\}$ con $\lceil \frac{n(t'_k)}{2} \rceil = \lfloor \frac{n(t'_k)-1}{2} \rfloor + 1$ puntos guardia: $\gamma_E \setminus \{c\}$ con $\lceil \frac{|\gamma_E|-1}{2} \rceil$ vértices guardia y γ_I con $\lceil \frac{|\gamma_I|}{2} \rceil$ (Ver Figura 4.21 (b)).

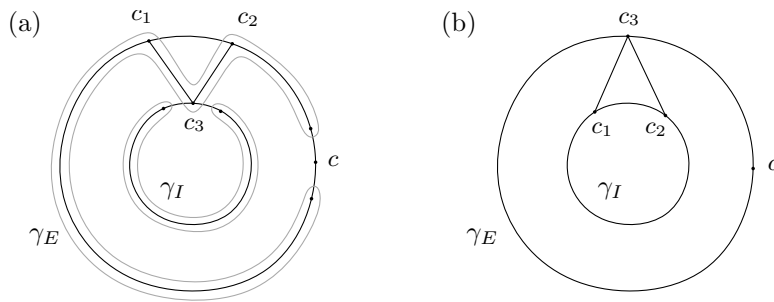


Figura 4.21: (a) Caso b1 y (b) caso b2.

Notemos que en los casos b1 y b2 usamos a lo más $\lfloor \frac{s_k}{2} \rfloor + 1$ guardias para vigilar

s_k celdas.

Después de procesar todas las gráficas $D(t'_k)$, las únicas celdas que posiblemente queden sin vigilar son algunas celdas duplicadas. Denotemos por Z al conjunto de celdas duplicadas sin vigilar. Consideremos dos celdas gemelas. Si al menos una de esas celdas está vigilada entonces podemos olvidarnos de la otra, ya que representan la misma celda en C . Si ninguna está vigilada entonces podemos colocar un guardia en alguna de ellas y así tener vigilada su celda correspondiente en C . Así, para vigilar las celdas en C correspondientes a celdas en Z agregamos a lo más $\lfloor \frac{|Z|}{2} \rfloor$ guardias.

Denotemos por Y al conjunto de celdas que fueron vigiladas al procesar alguna gráfica $D(t'_k)$, donde t'_k es una componente agujerada. Como el caso **a** al menos se presenta una vez, en caso de existir alguna componente agujerada, y el caso **b** se presenta a lo más $h - f - 1$ veces entonces para vigilar las celdas en Y usamos a lo más $\lfloor \frac{|Y|+1}{2} \rfloor + (h - f - 1)$ guardias. Por último, denotemos por X al conjunto de celdas que fueron vigiladas al procesar alguna gráfica $D(t'_k)$, donde t'_k no es una componente agujerada. Tenemos que para vigilar las celdas en X usamos a lo más $\lfloor \frac{|X|}{2} \rfloor$ guardias.

Tenemos que $C' = X \cup Y \cup Z$ y además estos conjuntos son ajenos por pares, por lo que $|X| + |Y| + |Z| = n - h + f + 1$. Por otra parte, cada celda en C pertenece a X , Y o Z , por lo que la cantidad de puntos guardia suficiente para vigilar todas las celdas en C es

$$\begin{aligned}
 & \left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{|Y|+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{|Z|}{2} \right\rfloor + (h - f - 1) \\
 & \leq \left\lfloor \frac{|X| + |Y| + |Z| + 1}{2} \right\rfloor + (h - f - 1) \\
 & = \left\lfloor \frac{(n - h + f + 1) + 1}{2} \right\rfloor + (h - f - 1) \\
 & = \left\lfloor \frac{(n - h + f + 2) + 2(h - f - 1)}{2} \right\rfloor \\
 & = \left\lfloor \frac{n + h - f}{2} \right\rfloor \\
 & \leq \left\lfloor \frac{n + h}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

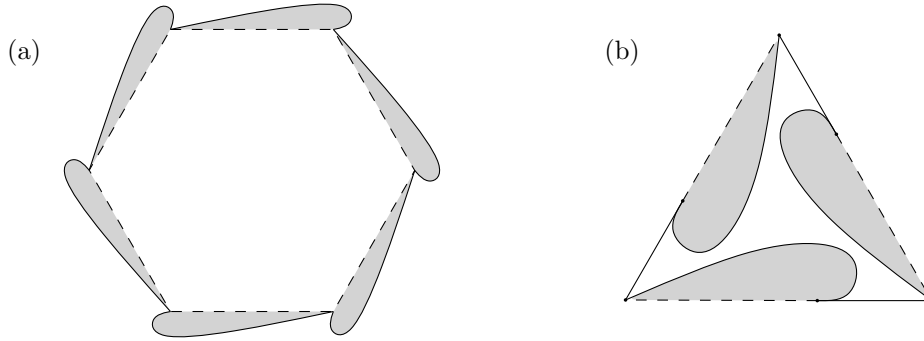


Figura 4.22: (a) Polígono exterior y (b) hueco del polígono con huecos arista-convexo que prueba la necesidad de los $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos guardia.

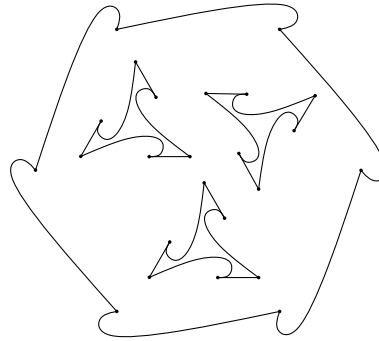


Figura 4.23: Polígono con huecos arista-convexo con 24 vértices y 3 huecos que necesita 12 puntos guardia para ser vigilado.

Para la prueba de necesidad construimos una familia de polígonos con huecos arista-convexos con n vértices y h huecos, donde $n \geq 6h + 3$, que necesitan $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos guardia para ser vigilados. La forma de los huecos se muestra en la Figura 4.22 (b). Cada región sombreada del hueco puede ser vigilada únicamente colocando un guardia en algún punto de la región. Luego, para vigilar las 3 regiones sombreadas en un hueco son necesarios 3 guardias. Por otra parte, cada hueco tiene 6 vértices, por lo que el polígono exterior deberá tener $k = n - 6h$ vértices. La construcción del polígono exterior corresponde a la cota inferior para puntos guardia en polígonos arista-convexos (Ver Figura 4.22 (a)). Si en las regiones sombreadas, ya sea de los huecos o del polígono exterior, no hay puntos de otros polígonos entonces serán necesarios

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 3h = \left\lceil \frac{n - 6h}{2} \right\rceil + 3h = \left\lceil \frac{n}{2} - 3h \right\rceil + 3h = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

puntos guardia para vigilarlo. ■

Bibliografía

- [1] I. Bjorling-Sachs, D. Souvaine, *A tight bound for guarding polygons with holes*, Rutgers University, Reporte Técnico LCSR-TR-165, 1991.
- [2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press Ltd., 1976.
- [3] J. Cano, Cs. D. Tóth, J. Urrutia, *A tight bound for piece-wise convex art galleries with point guards*, por aparecer.
- [4] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, Journal of Combinatorial Theory (B) 18, 39-41, 1975.
- [5] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, J. Zaks, *Guarding rectangular art galleries*, Discrete Math 50, 149-157, 1994.
- [6] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag Heidelberg, Nueva York, 2005.
- [7] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, Journal of Combinatorial Theory (B) 24, 374, 1978.
- [8] F. Hoffman, *On the rectilinear art gallery problem*, Proc. ICALP, Lecture Notes in Computational Science 90, Springer-Verlag, 717-728, 1990.
- [9] F. Hoffman, M. Kaufman, K. Kriegel, *The art gallery problem for polygons with holes*, Proc. 32nd Symposium of Foundations of Computer Science, 39-48, 1991.

-
- [10] J. Kahn, M. Klawe, D. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods 4, 194-206, 1983.
- [11] M. I. Karavelas, Cs. D. Tóth, E. P. Tsigaridas, *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Computational Geometry: Theory and Applications, por aparecer.
- [12] M. I. Karavelas, E. P. Tsigaridas, *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Research Report 6132, INRIA, 2007.
- [13] L. Lovász, *Three Short Proofs in Graph Theory*, Journal of Combinatorial Theory (B) 19, 111-113, 1975.
- [14] G. H. Meisters, *Polygons have ears*, The American Mathematical Monthly 82, 648-651, 1975.
- [15] J. O'Rourke, *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvátal's Theorem*, Geometriae Dedicata 14, 273-283, 1983.
- [16] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, 1987.
- [17] T. C. Shermer, *Recent results in art galleries*, Proc. IEEE, 80(9): 1384-1399, 1992.
- [18] W. T. Tutte, *The Factorization of a planar Graph*, Journal of the London Mathematical Society 22, 107-111, 1947.
- [19] J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, En J.-R. Sack and J. Urrutia editors, Handbook of Computational Geometry, 973-1027, North-Holland, 2000.