UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Teoremas de Estructura y Factorización para Funciones Holomorfas en el Disco Unitario

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Carolina Espinoza Villalva

Directora de Tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 22 de Junio de 2011

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora.

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Universidad de Sonora.

M.C. Marysol Navarro Burruel
Universidad de Sonora.

Dr. Jorge Rivera Noriega
Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Dedicatoria

A Dios, eres la principal razón
por la que estoy aquí.

A mis padres, Ana Berta y Salvador, que
han sabido llevarme por el camino correcto.

A Abel, por que me has acompañado siempre.

A mis hermanos, Salvador, Ana Karina y Román.

Agradecimientos

Faltan palabras, tiempo y espacio para agradecer a todas las personas que han hecho posible la realización de este trabajo. Empezaré por el más importante, Dios, nunca me has dejado sola Señor y es gracias a ti que he logrado todo esto.

Agradezco profundamente a mi mamá, por todo su amor, comprensión y apoyo, jamás lograré pagar lo que ha hecho por mi madre. A mi padre, que en su silencio siempre me ha demostrado lo orgulloso que esta de mi y de su familia. Confieso que siempre he sentido un gran orgullo por ustedes y una profunda admiración. A mi hermano Salvador y mi hermanito Román, gracias por tu apoyo niño. Karina, debo agradecer tus palabras de aliento y la ayuda que siempre he recibido de ti.

Abel, no tengo palabras para expresar lo agradecida que estoy contigo, hemos crecido juntos y siempre has estado a mi lado, agradezco a Dios que te pusiera en mi camino.

No puedo dejar de mencionar a mis amigos y compañeros en especial Yury, Azucena, Felipe, Luis y Marla. Luis, gracias por toda la ayuda, sé que lograrás lo que te propongas. Marla, siempre estuviste ahí para escucharme, me has apoyado académica y personalmente, eres parte de mi familia.

A mi Directora de Tesis, tutora y profesora, Dra. Martha Guzmán. Gracias por guiarme en este camino, por mostrarme la belleza del Análisis Matemático y por todo el tiempo dedicado no sólo a la preparación y revisión de este trabajo, sino por sus excelentes clases y el apoyo brindado durante la Licenciatura. Ha sido una bendición para mi conocerla y un gran honor trabajar con usted. Siento una gran admiración y cariño por usted.

Muchas gracias a mis sinodales, Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa, M.C. Marysol Navarro Burruel y Dr. Jorge Rivera Noriega por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

A los profesores del Departamento de Matemáticas, en particular, quiero agradecer a los profesores Eduardo Tellechea, Silvia Ibarra, Carlos Robles, Teresa Robles y de nuevo a Adolfo Minjárez y Marysol Navarro por sus enseñanzas y calidad humana.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido para la realización de esta tesis como becaria del proyecto "Mecanismos de Promedios en Sistemas de Evolución Clásicos y Cuánticos" (Ref. no. 55463).

Carolina Espinoza Villalva
Hermosillo, Sonora
Junio de 2011

Índice general

Introducción

La teoría de los espacios de Hardy H^p tiene sus orígenes en los descubrimientos hechos hace 80 o 90 años por grandes matemáticos como G.H. Hardy, J.E. Littlewood, I.I. Privalov, los hermanos Riesz, V. Smirnov y G. Szegö, por citar sólo algunos. La mayoría de los resultados presentados en ese entonces, corresponden a las propiedades de las funciones que constituyen dichos espacios.

La historia comienza cuando en 1915, Hardy publica el artículo *The mean value of the modulus of an analytic function*, en el cual demuestra su Teorema de Convexidad. En 1923, F. Riesz introduce la clase de funciones H^p, usando la letra H en honor a Godfrey Harold Hardy. Después de probar su Teorema de Factorización, F. Riesz estuvo en condiciones de demostrar que toda función $F \in H^p$ tiene límites radiales casi en todas partes y que $\log |F(e^{it})|$ pertenece a L^1 a menos que $F(z) \equiv 0$. Fue hasta finales de los años 40's que los espacios de Hardy fueron tratados como espacios de Banach, gracias al trabajo realizado por A. E. Taylor en el artículo *New proofs of some theorems of Hardy by Banach space methods.* El Teorema de Factorización Canónica presentado en este trabajo, se debe a V. Smirnov y fue A. Beurling quien acuñó los términos función interior y función exterior para las funciones que satisfacen ciertas condiciones en la factorización dada por el Teorema de Factorización Canónica.

Los poderosos métodos de la variable compleja han sido de gran importancia en el desarrollo de esta teoría, sin embargo, el estudio de los espacios de Hardy no se ha reducido sólo al disco unitario del plano complejo, también se han definido estos espacios para el semiplano superior y posteriormente, se logró extender H^p al semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$, utilizando en este caso técnicas de variable real. Es en efecto, la variable compleja, algunos resultados estándares de Teoría de la Medida y del Análisis Funcional, la herramienta utilizada para desarrollar los temas presentados en este trabajo.

Existen varias formas de abordar el estudio de los espacios de Hardy, en este caso, nos enfocaremos a los espacios H^p definidos en el disco unitario. El texto consta de cuatro capítulos organizados de la siguiente manera: en el Capítulo 1 definimos a las funciones subarmónicas y demostramos algunos resultados sobre este tipo de funciones, tales como el Principio del Máximo. Posteriormente, introducimos a los espacios H^p y presentamos propiedades básicas de las funciones que pertencen a estos espacios.

En el Capítulo 2, caracterizamos a las funciones en H^p, para $1 < p \leq \infty$, como las integrales de Poisson de funciones en $L^p([-\pi, \pi])$ con coeficientes de Fourier cero para frecuencias negativas. En este Capítulo también examinamos el comportamiento en la frontera de las funciones en H^p y probamos el Teorema de Factorización de F. Riesz, el cual nos permite demostrar que toda función en H^p tiene límites radiales casi en todas partes. Obtuvimos también la representación de Poisson y de Cauchy para las funciones en H^p con $p \geq 1$, y como aplicación de esta representación demostramos el famoso Teorema de los hermanos Frigyes y Marcel Riesz.

En el tercer Capítulo definimos al operador función conjugada y como consecuencia de la Desigualdad de Marcel Riesz, obtenemos que dicho operador es continuo en $L^p([-\pi, \pi])$ siempre que $1 < p < \infty$. Estudiamos también el comportamiento de este operador en $L^1([-\pi, \pi])$ y observamos que es posible identificar a H^p para $p \geq 1$, con un subespacio cerrado de $L^p([-\pi, \pi])$. Finalizamos este Capítulo, comentando cómo definir al operador función conjugada como una integral singular.

En el último Capítulo estudiamos algunas propiedades de H^p como espacio vectorial topológico y calculamos su espacio dual cuando $1 < p < \infty$. Para finalizar este Capítulo, demostramos un Teorema de Factorización Canónica, el cual nos permite construir conjuntos densos en H^p.

Aunque la notación utilizada en el desarrollo de esta teoría es en general estándar, es importante mencionar ciertos detalles para que la lectura de este trabajo sea clara y sencilla. Usaremos las palabras *región* y *dominio* para designar a un conjunto abierto y conexo, escribiremos $P(f)$ para referirnos a la integral de Posisson de la función $f \in L^p([-\pi, \pi])$. Denotaremos por Σ_{n-1} a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y por $|\Sigma_{n-1}|$ a su medida de Lebesgue. En ocasiones escribiremos D para referirnos al disco unitario en el plano complejo.

Con el objetivo de complementar la información presentada en el cuerpo de este trabajo, se incluye un apéndice sobre funciones armónicas y con el fin de que el lector pueda, si así lo desea, profundizar más sobre los tópicos desarrollados en el texto, hemos incluído una Bibliografía básica sobre estos temas.

Capítulo **1**

Funciones Subarmónicas

En esta sección estudiaremos las propiedades de las funciones subarmónicas y construiremos algunos ejemplos de ellas. Estas funciones nos permitiŕan definir los espacios de Hardy en el disco unitario y presentar algunos resultados sobre los elementos que constituyen a estos espacios.

Definición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $v : \Omega \to [-\infty, \infty)$ una función. Diremos que v es semicontinua superiormente en el conjunto Ω si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \Omega : v(x) < \alpha\}$ es abierto.*

Puede verse fácilmente que la definición anterior es equivalente a la siguiente afirmación: para cada $x_0 \in \Omega$ y para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de x_0 tal que $v(x) < v(x_0) + \epsilon$ para todo $x \in U$.

También se puede mostrar que una función v es semicontinua superiormente en Ω si y sólo si para todo $x_0 \in \Omega$ se tiene que

$$\limsup_{x \to x_0} v(x) \leq v(x_0).$$

Es importante notar que al igual que en el caso de la continuidad, la semicontinuidad es una propiedad puntual. Cuando la condición anterior se verifica para un punto $x_0 \in \Omega$, decimos que v es semicontinua superiormente en x_0. Es claro que toda función continua es semicontinua superiormente. Si A es cerrado, también χ_A es semicontinua superiormente. En ocasiones, escribiremos v es s.c.s. en lugar de v es semicontinua superiormente.

Definamos ahora a las funciones subarmónicas.

Definición 1.2. *Sea v una función definida en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con valores en $[-\infty, \infty)$. Decimos que v es subarmónica en Ω si se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) *v es semicontinua superiormente en Ω*

ii) *$\forall x_0 \in \Omega$ $\exists r(x_0)$ tal que $B_{r(x_0)}(x_0) \subset \Omega$ y $\forall 0 < r < r(x_0)$ se verifica*

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r\sigma) d\sigma$$

Observación 1.3. *Si $v : \Omega \to [-\infty, \infty)$ es semicontinua superiormente, entonces para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $M_K \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) \leq M_K$ $\forall x \in K$.*

En efecto, sea $K_j = \{x \in K : v(x) \geq j\}$ con $j \in \mathbb{N}$. Claramente K_j es cerrado, pues v es semicontinua superiormente y como K es compacto, se sigue que K_j es compacto para toda $j \in \mathbb{N}$. Además $K_{j+1} \subset K_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Dado que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \{x \in K : \ v(x) = +\infty\} = \emptyset$$

se sigue que $K_j = \emptyset$ para algún $j \in \mathbb{N}$, es decir, $v(x) < j$ para todo $x \in K$.

Gracias a la observación anterior, es posible asignar un significado a las integrales que aparecen en la Definición 1.2. Cada una de estas integrales está definida como la integral de la parte positiva de la función $v(x_0 + r\sigma)$ menos la integral de la parte negativa de dicha función. Esta integral tiene sentido, pues la integral de la parte positiva es finita, ya que es la integral de una función acotada en una conjunto de medida finita. En vista de lo anterior, las integrales en la Definición 1.2 pueden ser un número real o $-\infty$. Más tarde mostraremos que ninguna de éstas integrales puede ser $-\infty$ a menos que v sea idénticamente igual a $-\infty$ y por tanto, v es integrable sobre la esfera.

Observación 1.4. *Si v es subarmónica, la Definición 1.2 y el Lema de Fatou implican que $\limsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} v(x) \geq v(x_0)$. Por consiguiente*

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} v(x) = v(x_0).$$

Daremos ahora una caracterización bastante útil para la semicontinuidad superior.

Proposición 1.5. *La función v es semicontinua superiormente en Ω si y sólo si para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, v es el límite en K de una sucesión decreciente de funciones continuas.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Observemos primero que si $v = \inf\limits_{\alpha \in \Lambda} v_\alpha$ donde cada v_α es semicontinua superiormente, entonces v es semicontinua superiormente, pues $\forall \beta \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \Omega : \ v(x) < \beta\} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{x \in \Omega : \ v_\alpha(x) < \beta\}$ es abierto en Ω.

Si $v|_K = \lim \ v_n$ donde $v_n \downarrow v$ y cada v_n es continua, entonces $v = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} v_n$. Como cada v_n es semicontinua superiormente en K, v también lo es. Luego, v es semicontinua superiormente en todo compacto K de Ω, por tanto v es semicontinua en Ω.

($\Rightarrow$) Sea $K \subset \Omega$ compacto y sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal modo que K esté cubierto por una colección finita de bolas $\left\{B_\epsilon(x_j^{(\epsilon)})\right\}_{j=1}^n$ con $x_j^{(\epsilon)} \in K \ \forall j = 1, \ldots, n$.

Sea $\left\{\phi_j^{(\epsilon)}\right\}_{j=1}^n$ una partición de la unidad sobre K subordinada al cubrimiento $\left\{B_\epsilon(x_j^{(\epsilon)})\right\}_{j=1}^n$, esto es $\forall j \in \mathbb{N}$:

i) $\phi_j^{(\epsilon)} : \Omega \to [0,1]$ es continua y con soporte compacto.

ii) *sop* $\phi_j^{(\epsilon)} \subset B_\epsilon(x_j^{(\epsilon)})$.

iii) $\sum\limits_{j=1}^n \phi_j^{(\epsilon)}(x) = 1 \ \forall x \in K$.

Sea $m_j^{(\epsilon)} = \sup\{v(\xi) : \ \xi \in B_\epsilon(x_j^{(\epsilon)})\}$ y consideremos la función continua

$$\psi^{(\epsilon)}(x) = \sum_{j=1}^n m_j^{(\epsilon)} \phi_j^{(\epsilon)}(x) \ \forall x \in K.$$

Consideremos una sucesión $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\epsilon_n \downarrow 0$ y construyamos sus correspondientes funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots$.

Ahora definamos $u_1 = \psi_1, \ u_2 = \min\{\psi_2, u_1\}, \ldots, u_j = \min\{\psi_j, u_{j-1}\}, \ldots$. Observemos que cada u_j es continua y además $u_1 \geq u_2 \geq \cdots$. Mostraremos que $\forall x \in K$ $v(x) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(x)$.

Notemos primero que $\psi_p \geq v(x)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in K$, pues si J_p es el conjunto de índices j tales que $x \in B_{\epsilon_p}(x_j^{(\epsilon_p)})$ entonces

$$\begin{aligned}\psi_p - v(x) &= \sum_{j=1}^{n}(m_j^{(\epsilon_p)} - v(x))\phi_j^{(\epsilon_p)}(x)\\ &= \sum_{j\in J_p}(m_j^{(\epsilon_p)} - v(x))\phi_j^{(\epsilon_p)}(x) + \sum_{j\notin J_p}(m_j^{(\epsilon_p)} - v(x))\phi_j^{(\epsilon_p)}(x)\\ &= \sum_{j\in J_p}(m_j^{(\epsilon_p)} - v(x))\phi_j^{(\epsilon_p)}(x)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

pues *sop* $\phi_j^{(\epsilon_p)} \subset B_{\epsilon_p}(x_j^{(\epsilon_p)})$ y $v(x) \leq m_j^{(\epsilon_p)} = \sup\{v(\xi) :\ \xi \in B_{\epsilon_p}(x_j^{(\epsilon_p)})\}$. Se sigue de los comentarios anteriores que $u_n(x) - v(x) \geq 0$ $\forall x \in K$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, lo cual puede probarse por inducción.

Ahora, como $\text{mín}\{\text{mín}\{a,b\},c\} = \text{mín}\{a,b,c\}$, tenemos que

$$u_q(x) - v(x) = \min_{1\leq p\leq q}\{\psi_p(x) - v(x)\} \leq \psi_q(x) - v(x) = \sum_{j\in J_q}(m_j^{(\epsilon_q)} - v(x))\phi_j^{(\epsilon_q)}(x).$$

Como $v(x)$ es s.c.s., dado $\epsilon > 0$ $\exists U$ vecindad de x tal que $v(t) < v(x) + \epsilon$ $\forall t \in U$. Así podemos elegir n_0 de forma que $2\epsilon_{n_0} < d(x, \partial U)$, en consecuencia $\forall q \geq n_0$ tendremos que $B_{\epsilon_q}(x_j^{(\epsilon_q)}) \subset U$ y

$$m_j^{(\epsilon_q)} - v(x) = \sup\{v(\xi) :\ \xi \in B_{\epsilon_q}(x_j^{(\epsilon_q)})\} - v(x) \leq v(x) + \epsilon - v(x) = \epsilon\ \forall j$$

lo cual implica que $\forall q \geq n_0$

$$u_q(x) - v(x) \leq \epsilon \sum_{j\in J_q}\phi_j^{(\epsilon_q)}(x) \leq \epsilon\sum_{j=1}^{n}\phi_j^{(\epsilon_q)}(x) = \epsilon.$$

Concluimos que $v(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. □

1.1. El Principio del Máximo

Sabemos que toda función armónica es continua en su dominio de armonicidad, además estas funciones se caracterizan por satisfacer la Propiedad del Valor Medio, por consiguiente toda función armónica con valores reales es subarmónica. Como consecuencia de la Propiedad del Valor medio, se puede establecer el Principio del

Máximo para funciones armónicas el cual nos permite demostrar la unicidad de la solución al problema clásico de Dirichlet en dominios acotados de $\mathbb{R}^n$. Curiosamente, este mismo principio se satisface para funciones subarmónicas y lo único que necesitamos para demostrarlo, es la desigualdad que aparece en la Definición 1.2.

Teorema 1.6 (Principio del Máximo). *Sea v una función subarmónica en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces v no puede alcanzar su valor máximo en Ω a menos que v sea constante.*

Demostración. Supongamos que $\exists \xi \in \Omega$ tal que $v(\xi) = \sup\{v(x) : x \in \Omega\} = m$ y sea $A = \{x \in \Omega : v(x) = m\}$. Nótese que $A \neq \emptyset$ pues $\xi \in A$, aún más, A es cerrado pues la semicontinuidad superior de v implica que el conjunto $\Omega \backslash A = \{x \in \Omega : v(x) < m\}$ es abierto.

También A es abierto, pues si $x_0 \in A$, existe $r_0 > 0$ tal que $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset \Omega$, más aún $B_{r_0}(x_0) \subset A$:

Si existiera $y \in B_{r_0}(x_0) \cap (\Omega \backslash A)$, necesariamente $v(y) < m$. Como v es semicontinua superiormente en y, para $\epsilon = m - v(y) > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subset B_{r_0}(x_0)$ y $\forall z \in B_\delta(y)$ se satisface que

$$v(z) < v(y) + \epsilon = m.$$

Tomemos ahora $r' < r_0$ de tal forma que $B_{r'}(x) \cap B_\delta(y) \neq \emptyset$, entonces

$$m = v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r'\sigma) d\sigma < m$$

lo cual es absurdo. Por lo anterior debe cumplirse que $B_{r_0}(x_0) \subset A$.

Tenemos entonces que $A \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en Ω y como Ω es conexo, concluimos que $A = \Omega$, es decir v es constante. $\square$

Como consecuencia del Principio del Máximo obtenemos el siguiente

Corolario 1.7. *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea $v : \overline{\Omega} \to [-\infty, \infty)$ s.c.s. en $\overline{\Omega}$ y subarmónica en Ω. Entonces v tiene un máximo en $\overline{\Omega}$ y lo alcanza en $\partial\Omega$ (y sólo en $\partial\Omega$ si v no es constante).*

Demostración. Como $\overline{\Omega}$ es compacto, sabemos que v es acotada superiormente en $\overline{\Omega}$; sea $M = \sup\limits_{\xi \in \overline{\Omega}} v(x)$, entonces $\exists x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $v(x_0) = M$. Si no fuese así, para todo $x \in \Omega$ tendríamos $v(x) < M$. Luego para cada $x \in \Omega$ $\exists t_x \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) < t_x < M$.

Sea $\epsilon_x = t_x - v(x) > 0$, entonces existe U_x vecindad de x tal que

$$v(z) < v(x) + \epsilon_x = t_x \ \ \forall z \in U_x$$

Como el conjunto $\overline{\Omega}$ es compacto, existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tales que $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$, y así $\forall x \in \Omega$

$$v(x) < \max_{1 \leq i \leq k} \ t_{x_i} < M$$

lo cual contradice que M es el supremo de $\{v(x) : x \in \bar{\Omega}\}$. Por tanto, existe un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$ donde v alcanza su valor máximo.

Si v es constante ya terminamos, si no, el Teorema 1.6 asegura que $x_0 \notin \Omega$ y así $x_0 \in \bar{\Omega} \backslash \Omega = \partial\Omega$. □

Utilizaremos el Principio del Máximo para establecer una caracterización para las funciones subarmónicas, la cual representa una mejor justificación para el nombre que reciben dichas funciones. Durante la prueba de este Teorema, utilizaremos una técnica a la cual recurriremos varias veces en resultados subsiguientes.

Teorema 1.8. *Sea $v : \Omega \to [-\infty, \infty)$ semicontinua superiormente en el conjunto abierto Ω. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *v es subarmónica.*

ii) *Para todo conjunto abierto y acotado G tal que $\overline{G} \subset \Omega$ y toda función u con valores en $\mathbb{R}$, continua en $\overline{G}$, armónica en G tal que $v(x) \leq u(x) \, \forall x \in \partial G$, se tiene que $v(x) \leq u(x) \, \forall x \in G$.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Haremos la prueba por casos. Supongamos que v es subarmónica en Ω y que u satisface las hipótesis de *ii)*:

Caso 1: Si G es conexo, entonces la función $v - u$ es s.c.s. en $\overline{G}$, subarmónica en G y $(v-u)(x) \leq 0$ para todo $x \in \partial G$. Se sigue del Corolario 1.7 que

$$(v-u)(x) \leq 0 \ \forall x \in G.$$

Caso 2: Si G es disconexo, consideremos $\{G_i\}_{i \in I}$ las componentes conexas de G, las cuales forman una partición de G en subconjuntos conexos maximales y además $\partial G = \bigcup_{i \in I} \partial G_i$.

Luego, $v(x) \leq u(x) \ \forall x \in \partial G_i$ y para todo $i \in I$. Por el caso anterior, tenemos que $v(x) \leq u(x) \ \forall x \in G_i$ y para todo $i \in I$. Por tanto $v(x) \leq u(x) \ \forall x \in G$.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Supongamos que *ii*) es válido. Sea $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Probaremos que

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma n-1} v(x_0 + r\sigma) d\sigma.$$

Como v es semicontinua superiormente en Ω y $\partial B_r(x_0)$ es compacto, existe una sucesión de funciones continuas $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ que converge a v en $\partial B_r(x_0)$.

Consideremos a la solución al problema de Dirichlet en $B_r(x_0)$ con función frontera u_j, la cual denotaremos también por u_j para aligerar la notación. Dicha función es continua en la $\overline{B_r(x_0)}$ y armónica en $B_r(x_0)$.

Como $v(x) \leq u_j(x)$ $\forall x \in \partial B_r(x_0)$ y para toda $j \in \mathbb{N}$, se sigue de *ii*) que

$$v(x) \leq u_j(x) \leq u_j(x) \ \forall x \in B_r(x_0) \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Observemos también que como u_{j+1} es subarmónica $\forall j \in \mathbb{N}$ y $u_{j+1}(x) \leq u_j(x)$ $\forall x \in B_r(x_0)$, podemos usar que *i*) $\Rightarrow$ *ii*)para obtener

$$u_{j+1}(x) \leq u_j(x) \ \forall x \in B_r(x_0) \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Monótona obtenemos

$$\begin{aligned} v(x_0) \leq \lim_{j\to\infty} u_j(x_0) &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{|\Sigma_{n-1}|} u_j(x_0 + r\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{|\Sigma_{n-1}|} \lim_{j\to\infty} u_j(x_0 + r\sigma) d\sigma \\ &= \int\limits_{|\Sigma_{n-1}|} v(x_0 + r\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Como v es semicontinua superiormente en Ω, lo anterior implica que v es subarmónica en Ω. $\square$

Observación 1.9. *Nótese que en la demostración anterior, probamos que si v es subarmónica en Ω, entonces*

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r\sigma) d\sigma$$

se verifica cuando $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Esto es más fuerte que lo supuesto en la Definición 1.2, donde la desigualdad se verifica para radios $r < r(x_0)$ suficientemente pequeños dependiendo del punto $x_0 \in \Omega$.

La caracterización obtenida en la Proposición 1.5 nos proporciona técnicas muy útiles para trabajar con funciones subarmónicas.

Proposición 1.10. *Sea v una función subarmónica en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que v no es idénticamente igual a $-\infty$. Entonces si $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ tenemos*

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r\sigma) d\sigma > -\infty$$

Demostración. Sea

$$A = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x + r\sigma) d\sigma = -\infty \textit{ para algún } r > 0 \textit{ tal que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega \right\}$$

Veremos que $A = \emptyset$.

Observemos que si $x_0 \in \Omega$ y $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, podemos encontrar una sucesión de funciones continuas $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ que converge a v en $\partial B_r(x_0)$.

Consideremos de nuevo a u_j extendida como función armónica en $B_r(x_0)$, continua en $\overline{B_r(x_0)}$. Luego $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tal que $||x|| < 1$ se tiene

$$\begin{aligned} v(x_0 + rx) &\leq \lim_{j \to \infty} u_j(x_0 + rx) \\ &= \lim_{j \to \infty} \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} P(x,s) u_j(x_0 + rs) ds \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} P(x,s) \lim_{j \to \infty} u_j(x_0 + rs) ds \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} P(x,s) v(x_0 + rs) ds \end{aligned}$$

donde $P(x, s)$ es el núcleo de Poisson y la segunda desigualdad se sigue del Teorema de Convergencia Monótona.

Ahora, si $x_0 \in A$, entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ y

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r\sigma) d\sigma = -\infty.$$

Luego si $M_x = \sup\limits_{s \in \Sigma_{n-1}} P(x, s)$ tenemos

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} P(x,s) v(x_0 + rs) ds \leq M_x \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + rs) ds = M_x(-\infty) = -\infty.$$

De los comentarios anteriores se sigue que $v(y) = -\infty$ $\forall y \in B_r(x_0)$. Tomando $\rho > 0$ de tal forma que $\overline{B_\rho(y)} \subset B_r(x_0)$ se tiene

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma n-1} v(y + \rho s) ds = -\infty.$$

Así $B_r(x_0) \subset A$ y A es abierto en Ω.

También $\Omega \backslash A$ es abierto en Ω, pues si $x_0 \in \Omega \backslash A$ y $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ entonces $A \cap B_r(x_0) = \emptyset$. Si no, $\exists y \in A \cap B_r(x_0)$ y $\exists \delta > 0$ tal que

$$\int_{\Sigma_{n-1}} v(y + \delta\sigma) d\sigma = -\infty.$$

Igual que antes obtenemos que $v(z) = -\infty$ $\forall z \in B_\delta(y)$. Podemos tomar $0 < r' < r$ de tal forma que $v(x_0 + r'\sigma) = -\infty$ donde σ pertenece a un conjunto abierto $I \subset \Sigma_{r'}(x_0)$. Luego

$$\int_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r'\sigma) d\sigma = \int_{\Sigma_{r'}(x_0) \backslash I} v d\sigma + \int_I v d\sigma = -\infty$$

y por tanto, $x_0 \in A$, lo cual es imposible pues $x_0 \in \Omega \backslash A$. Así $B_r(x_0)$ debe estar contenido en $\Omega \backslash A$. Puesto que $x_0 \in \Omega \backslash A$ era arbitrario, hemos probado que $\Omega \backslash A$ es abierto y por tanto A es cerrado en Ω.

Como Ω es conexo, se sigue que $A = \Omega$ ó $A = \emptyset$. Si $A = \Omega$, tendríamos que para todo $x \in \Omega$ $\exists$ $r > 0$ tal que $\int_{\Sigma_{n-1}} v(x + r\sigma) d\sigma = -\infty$, e igual que antes, obtenemos que $v(z) = -\infty$ $\forall z \in B_r(x)$. Lo anterior, implica que $v(z) = -\infty$ $\forall z \in \Omega$, lo cual no es posible por hipótesis.

Por lo expuesto hasta aquí, debe pasar que $A = \emptyset$, es decir, si $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ entonces

$$\int_{\Sigma_{n-1}} v(x + r\sigma) d\sigma > -\infty$$

$\square$

Con el resultado anterior, quedó demostrado el comentario que hacíamos en la Observación 1.3 sobre la integrabilidad de v sobre la esfera. La siguiente proposición asegura que la integral de una función subarmónica en esferas de radio r es creciente con respecto a r.

Proposición 1.11. *Sea v una función subarmónica en $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces la función*

$$m(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(r\sigma) d\sigma$$

es una función creciente en el intervalo [0,R).

Demostración. Sean $r_1, r_2 \in [0, R)$ tales que $r_1 < r_2$. Como v es semicontinua superiormente en $B_R(0)$ sabemos que existe una sucesión de funciones continuas $u_1 \geq u_2 \geq ...$ que converge a v en $\partial B_{r_2}(0)$.

Para cada j denotemos también por u_j a la solución al problema de Dirichlet en $B_{r_2}(0)$ con dato u_j, la cual es una función continua en $\overline{B_{r_2}(0)}$ y armónica en $B_{r_2}(0)$.

Entonces

$$\begin{aligned} m(r_1) &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(r_1\sigma) d\sigma \\ &\leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} u_j(r_1\sigma) d\sigma \\ &= u_j(0) \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} u_j(r_2\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Haciendo $j \to \infty$ y usando el Teorema de Convergencia Monótona obtenemos:

$$m(r_1) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(r_2\sigma) d\sigma = m(r_2)$$

□

Observación 1.12. *En la definición 1.2 es posible sustituir la condición ii) por:*
ii)' Para cada $x_0 \in \Omega$ y cada $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ se tiene que

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int\limits_{B_r(x_0)} v(x) dx.$$

En efecto: supongamos que *ii)* se satisface, entonces $\forall s \in (0, r]$

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + s\sigma) d\sigma.$$

Multiplicando ambos lados por s^{n-1} e integrando de cero a r con respecto a s obtenemos

$$\frac{r^n}{n}v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int_0^r s^{n-1}\int_{\Sigma_{n-1}} v(x_0+s\sigma)d\sigma ds,$$

lo cual implica

$$v(x_0) \leq \frac{n}{r^n|\Sigma_{n-1}|}\int_{B_r(x_0)} v(x)dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} v(x)dx.$$

Recíprocamente, si *ii)'* se cumple, entonces para cualquier abierto $G \subset \Omega$ tal que $\overline{G} \subset \Omega$ y cualquier $x_0 \in G$, existe $r(x_0) > 0$ tal que $B_{r(x_0)}(x_0) \subset \Omega$ y $\forall\, 0 < r < r(x_0)$ se verifica

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} v(x)dx.$$

Con la condición anterior, es posible mostrar de la misma forma que en el Teorema 1.6 y el Corolario 1.7 que v satisface el Principio del Máximo.

Ahora si $G \subset \Omega$ es un conjunto abierto y acotado tal que $\overline{G} \subset \Omega$ y $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{G}$, armónica en G tal que $v(x) \leq u(x)\ \forall x \in \partial G$, quisieramos mostrar que $v(x) \leq u(x)\ \forall x \in G$.

Si v es constante en $\overline{G}$, por el Principio del Mínimo para funciones armónicas tendremos que $v(x) \leq u(x)\ \forall x \in \overline{G}$.

Si v no es constante en $\overline{G}$, entonces $v-u$ sólo puede alcanzar su máximo en la frontera de G. Así, existe $y_0 \in \partial G$ tal que $(v-u)(y_0) = \max\limits_{x\in\overline{G}}(v-u)(x)$, lo cual implica que $(v-u)(x) \leq (v-u)(y_0) \leq 0\ \forall x \in \overline{G}$. Por lo anterior tenemos que $v(x) \leq u(x)\ \forall x \in \overline{G}$.

De esta manera, v satisface *b)* del Teorema 1.8 por lo cual v es una función subarmónica y se satisface *ii)*.

Proposición 1.13. *Sea v una función continua no negativa en un conjunto abierto Ω tal que v es de clase C^2 en el abierto $\Omega_0 = \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$. Supongamos también que $\Delta v \geq 0$ sobre Ω_0. Entonces v es subarmónica en todo Ω.*

Demostración. Sea $\xi_0 \in \Omega_0$ y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(\xi_0)} \in \Omega_0$. Para $s \in [0,r]$ definamos la función

$$f(s) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int_{\Sigma_{n-1}} v(\xi_0+s\sigma)d\sigma$$

la cual es diferenciable en $[0,r]$ y además es creciente en $[0,r]$ pues $\forall s \in [0,r]$

$$f'(s) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|s^{n-1}} \int\limits_{B_s(\xi_0)} \Delta v \geq 0.$$

Luego

$$v(\xi_0) = f(0) \leq f(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(\xi_0 + r\sigma) d\sigma.$$

Como tomamos $\xi_0 \in \Omega_0$ arbitrario y v es s.c.s. en Ω_0 hemos probado que v es subarmónica en Ω_0.

Sólo falta considerar los puntos $x_0 \in \Omega$ donde $v(x_0) = 0$. Sea $x_0 \in \Omega \backslash \Omega_0$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Deseamos mostrar que $\forall r' \in (0,r)$

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r'\sigma) d\sigma. \tag{1.1}$$

Sea u una función armónica en $B_{r'}(x_0)$, con $r' \in (0,r)$, que coincide con v en $\partial B_{r'}(x_0)$. Para demostrar (1.1) es suficiente probar que $v(x) \leq u(x)$ $\forall x \in \overline{B_{r'}(x_0)}$, pues de ser así, tendremos que

$$v(x_0) \leq u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r'\sigma) d\sigma = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r'\sigma) d\sigma.$$

Supongamos que $v(x_1) - u(x_1) > 0$ para algún $x_1 \in B_{r'}(x_0)$ y sea

$$M = \max\{v(x) - u(x) : x \in \overline{B_{r'}(x_0)}\} > 0.$$

Sea $A = \{x \in B_{r'}(x_0) : v(x) - u(x) = M\}$. Notemos que A es un subconjunto de Ω_0 pues si $x \in A$, entonces $v(x) = u(x) + M \geq M > 0$. Además, como $v - u$ es una función continua tenemos que A es un subconjunto cerrado y no vacío de $B_{r'}(x_0)$.

También A es abierto en $B_{r'}(x_0)$, pues si $x \in A$ entonces $x \in B_{r'}(x_0) \cap \Omega_0$. Como $B_{r'}(x_0) \cap \Omega_0$ es un conjunto abierto, $\exists \rho > 0$ tal que $\overline{B_\rho(x)} \subset B_{r'}(x_0) \cap \Omega_0$. Puesto que $v - u$ es subarmónica en $B_{r'}(x_0) \cap \Omega_0$ sabemos que $\forall s \in (0,\rho)$

$$M = v(x) - u(x) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} (v-u)(x + s\sigma) d\sigma \leq M$$

lo cual implica que $v - u = M$ en $B_\rho(x_0)$ y así $B_\rho(x_0) \subset A$. Como $A \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en $B_{r'}(x_0)$, se sigue que $A = B_{r'}(x_0)$. En particular, para x_0 tendríamos que

$$M = v(x_0) - u(x_0) = -u(x_0) \leq 0$$

lo cual es absurdo pues $M > 0$. Así $v(x) \leq u(x)$ $\forall x \in B_{r'}(x_0)$ y v es subarmónica. $\square$

1.2. Algunas Funciones Subarmónicas

En esta sección demostraremos algunos resultados que nos permitirán construir un ejemplo de una función subarmónica, la cual nos será de gran utilidad para iniciar con el estudio de los espacios H^p.

Teorema 1.14. *Sea v una función subarmónica en Ω y sea Φ una función creciente y convexa en $\mathbb{R}$. Entonces la función $\Phi \circ v$ también es una función subarmónica (Debemos definir $\Phi(-\infty)$ de forma que Φ sea continua y así la composición siempre tenga sentido).*

Demostración. Mostraremos primero que $\Phi \circ v$ es semicontinua superiormente. Sea $t \in \mathbb{R}$, observemos que $(\Phi \circ v)^{-1}[-\infty, t) = v^{-1}(\Phi^{-1}[-\infty, t))$.

Como Φ es una función creciente y continua sabemos que $\Phi^{-1}([-\infty, t)) = [-\infty, s)$ o $\Phi^{-1}([-\infty, t)) = \emptyset$. En cualquier caso, como v es s.c.s. $v^{-1}(\Phi^{-1}[-\infty, t))$ es un conjunto abierto.

Tomemos ahora $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Como Φ es creciente y es convexa, usando la desigualdad de Jensen obtendremos

$$\Phi(v(x_0)) \leq \Phi\left(\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int\limits_{\Sigma_{n-1}} v(x_0 + r\sigma)d\sigma\right) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int\limits_{\Sigma_{n-1}} (\Phi \circ v)(x_0 + r\sigma)d\sigma.$$

□

Es un hecho conocido que una función u definida en un conjunto simplemente conexo, es armónica si y sólo si es la parte real de una función holomorfa en dicho conjunto. Supongamos ahora que $F(z)$ es una función holomorfa que no tiene ceros, y consideremos la función $\log(F(z))$, la cual podemos definir localmente como una función analítica, entonces $\log|F(z)| = Re\{\log(F(z))\}$. De esta manera, si $F(z)$ es holomorfa y no tiene ceros, la función $\log|F(z)|$ es armónica.

Sin embargo, cuando $F(z)$ no está exenta de ceros, es necesario realizar un poco más de trabajo para obtener un resultado análogo. Por esta razón, necesitaremos mostrar el siguiente:

Lema 1.15. $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log|1 - e^{it}|dt = 0.$

Demostración. Notemos que la función $1-z$ es holomorfa y no tiene ceros en el disco unitario D, por lo cual $\log|1-z|$ es armónica en D y tiene la propiedad del valor medio. Así $\forall\, r \in [0,1)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|1-re^{it}|dt = 0.$$

Obsérvese que si $|t| \leq \pi/3$ entonces $1/2 \leq \cos t \leq 1$. Luego, si $0 < r < 1$

$$|1-re^{it}| = \sqrt{1+r^2-2r\cos t} \leq \sqrt{1+r^2-r} = \sqrt{1+r(r-1)} \leq 1$$

y así

$$\begin{aligned} |\log|1-re^{it}|| &= -\log|1-re^{it}| \\ &= \log\frac{1}{|1-re^{it}|} \\ &= \log\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos t}} \\ &\leq \log\frac{1}{|\operatorname{sen} t|}. \end{aligned}$$

Ahora sea $\alpha \in (0,1)$ y sea $B_\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $(1/B_\alpha)|t|^\alpha \leq |\operatorname{sen} t|$. Dado que el logaritmo es una función creciente y que $\log x < x$ si $x > 0$, tendremos

$$\log\frac{1}{|\operatorname{sen} t|} \leq \log\frac{B_\alpha}{|t|^\alpha} < \frac{B_\alpha}{|t|^\alpha}$$

Así, si $|t| \leq \pi/3$ tendremos que $|\log|1-re^{it}|| \leq B_\alpha|t|^{-\alpha}$.

Observemos ahora que si $|t| \geq \pi/3$ entonces $-1 \leq \cos t \leq 1/2$ y por consiguiente

$$\sqrt{1+r^2-r} \leq \sqrt{1+r^2-2r\cos t} \leq 1+r < 2.$$

Pero $\sqrt{r^2-r+1} = \sqrt{(r-1/2)^2+3/4} \geq \sqrt{3}/2 \geq 1/2$ y así

$$-\log 2 = \log\frac{1}{2} \leq \log|1-re^{it}| \leq \log 2$$

i.e. $|\log|1-re^{it}|| \leq \log 2$ si $|t| \geq \pi/3$.

Por tanto, tenemos que $|\log|1-re^{it}|| \leq f(t)$ $\forall 0 < r < 1$, donde $f(t) = B_\alpha|t|^{-\alpha}$ si $|t| < \pi/3$ y $f(t) = \log 2$ si $\pi/3 \leq |t| \leq \pi$. Como f es integrable en $[-\pi,\pi]$ se sigue del Teorema de Convergencia Dominada que

$$0 = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1-re^{it}|dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1} \log|1-re^{it}|dt = \int_{-\pi}^{\pi} \log|1-e^{it}|dt.$$

$\square$

Una de las consecuencias del Teorema de Taylor para funciones holomorfas es que si $F(z)$ es holomorfa y no idénticamente cero en un conjunto abierto que contiene al disco cerrado $\overline{D_r(z_0)}$, entonces el conjunto de ceros de $F(z)$ en $\overline{D_r(z_0)}$ es finito. Además, los ceros de $F(z)$ en $\overline{D_r(z_0)}$ no pueden ser de orden infinito (ver [12], Prop. 3.2.9 y Cor. 3.2.10, p. 212). En virtud de los comentarios anteriores, no hay ambigüedad al establecer el siguiente resultado:

Teorema 1.16 (Fórmula de Jensen)**.** *Sea F(z) una función analítica en* $D_R(0)$ *tal que* $F(0) \neq 0$*. Para* $r \in (0, R)$*, sean* $z_1, z_2, ..., z_n$ *los ceros de* $F(z)$ *en* $\overline{D_r(0)}$ *listados tantas veces como sus multiplicidades. Entonces*

$$\log |F(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|z_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{it})| dt.$$

Demostración. Supongamos que $z_1, z_2, \ldots, z_m \in D_r(0)$, $z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_n \in \partial D_r(0)$ y definamos la siguiente función

$$G(z) = F(z) \prod_{j=1}^{m} \frac{r^2 - z\bar{z}_j}{r(z - z_j)} \prod_{j=m+1}^{n} \frac{z_j}{z - z_j}.$$

Obsérvese que $G(z)$ está bien definida, pues los términos $(z-z_j)$ que se encuentran en el denominador se cancelarán con los correspondientes $(z - z_j)$ que se obtienen de la factorización de $F(z)$.

Nótese también que $G(z)$ es holomorfa en $D_{r+\epsilon}(0)$ para algún $\epsilon > 0$ y nunca es cero en dicho disco. Por lo anterior podemos asegurar que la función $\log |G(z)|$ es armónica en $D_{r+\epsilon}(0)$ y satisface la Propiedad del Valor Medio, por tanto

$$\log |G(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |G(re^{it})| dt.$$

Pero, como $|z_j| = r$ para $j = m + 1, \ldots, n$ se tiene que

$$\log |G(0)| = \log |F(0)| + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{r}{|z_j|} = \log |F(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|z_j|}.$$

Observemos también que

$$\left| \frac{r^2 - re^{it}\bar{z}_j}{r(re^{it} - z_j)} \right| = \left| \frac{r - e^{it}\bar{z}_j}{re^{it} - z_j} \right| = 1$$

y que para $j = m+1, \dots, n$

$$\left|\frac{z_j}{re^{it} - z_j}\right| = \left|\frac{re^{it_j}}{r(e^{it} - e^{it_j})}\right| = \frac{1}{|1 - e^{i(t-t_j)}|}.$$

Por consiguiente

$$|G(re^{it})| = |F(re^{it})| \prod_{j=m+1}^{n} \frac{1}{|1 - e^{t-t_j}|}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
\log|F(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{r}{|z_j|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|G(re^{it})|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{1}{|1 - e^{i(t-t_j)}|}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1 - e^{i(t-t_j)}|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se sigue del Lema 1.15. □

Como corolario a este resultado, se obtiene de forma inmediata un sin fin de ejemplos de funciones subarmónicas. Basta con tener una función holomorfa no idénticamente cero en un conjunto abierto del plano complejo para obtener en principio una función subarmónica, a decir, $\log|F(z)|$ y en virtud del Corolario 1.14 podemos componer dicha función con una función convexa y creciente para obtener de nuevo una función subarmónica.

Corolario 1.17. *Sea $F(z)$ una función holomorfa y no idénticamente cero en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces las funciones $\log|F(z)|$, $\log^+|F(z)| = \text{máx}\{\log|F(z)|, 0\}$ y $|F(z)|^a$ para cualquier $0 < a < \infty$ son subarmónicas en Ω.*

Demostración. Probaremos primero que $\log|F(z)|$ es subarmónica y como las funciones $\log^+|F(z)|$ y $|F(z)|^a$ resultan de componer $\log|F(z)|$ con las funciones crecientes y convexas $\text{máx}\{t, 0\}$ y e^{at}, por el Corolario 1.14 obtendremos nuestro resultado.

Obsérvese que tanto $|F(z)|$ como $\log t$ son funciones continuas, por consiguiente, $\log|F(z)|$ es una función continua que toma valores en $[-\infty, \infty)$.

Supongamos ahora que $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$, entonces

$$\log|F(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(z_0 + re^{it})|dt$$

lo cual es claro si $F(z_0) = 0$. Si $F(z_0) \neq 0$ simplemente aplicamos la Fórmula de Jensen a la función $z \mapsto F(z_0 + z)$ la cual es holomorfa en $D_{r+\epsilon}(0)$ para algún $\epsilon > 0$ y no se anula en $z = 0$.

Con lo anterior queda demostrado que $\log|F(z)|$ es subarmónica. $\square$

1.3. Espacios de Hardy H^p

Si $F(z)$ es holomorfa en el disco unitario, para cada $r \in [0, 1)$ podemos definir

$$m_0(F, r) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F(re^{it})|dt}$$

$$m_p(F, r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}$$

$$m_\infty(F, r) = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |F(re^{it})|$$

entonces, para cada $F \in H(D)$ y cada $0 \leq p \leq \infty$, $m_p(F, r)$ es una función creciente de r en $[0, 1)$.

En efecto: para $0 \leq p < \infty$ $\log^+|F(z)|$ y $|F(z)|^p$ son funciones subarmónicas y por la Proposición 1.11 m_0 y m_p son funciones crecientes de r.

Para $p = \infty$ si $r_1 < r_2$ el Teorema del Módulo Máximo asegura que

$$\sup_{\pi \leq t \leq \pi} |F(r_1 e^{it})| = \sup_{\overline{D_{r_1}}(0)} |F(z)| \leq \sup_{\overline{D_{r_2}}(0)} |F(z)| = \sup_{\pi \leq t \leq \pi} |F(r_2 e^{it})|$$

es decir: $m_\infty(F, r_1) \leq m_\infty(F, r_2)$.

La observación anterior, debida a Hardy es el punto de partida en la teoría de espacios de Hardy H^p introducida por Frigyes Riesz.

Definición 1.18. *Si $0 < p \leq \infty$ definimos $H^p(D)$ como la familia de funciones*

$$H^p = \{F \in H(D) : ||F||_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} m_p(F, r) < \infty\}.$$

Para $p = 0$, definimos la clase Nevanlinna N como

$$N = \{F \in H(D) : \sup_{0 \leq r < 1} m_0(F, r) < \infty\}.$$

Observación 1.19. *Si $0 < p < q < \infty$ entonces $H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N$.*

En efecto: la primera contención es trivial y la segunda se sigue de la desigualdad de Hölder. Veamos que $H^p \subset N$.

Sabemos que $\log x \leq x$ $\forall x \in (0, \infty)$, luego si $p > 0$ entonces $\log(x^p) \leq x^p$ $\forall x > 0$, por lo cual $\log x \leq \frac{1}{p} x^p$ $\forall x > 0$ y por consiguiente $\log^+ x \leq \frac{1}{p} x^p$ $\forall x > 0$.

Así, si $F \in H^p$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt \leq \frac{1}{2p\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{p} ||F||_{H^p}^p < \infty$$

lo cual implica que $F \in N$.

Observación 1.20. *En el Capítulo 2 de [3], se demuestra que una función F analítica en el disco unitario pertenece a la clase N si y sólo si F es el cociente de dos funciones analíticas acotadas. En la prueba, es de vital importancia el hecho de que $\int \log^+ |F|$ es acotada. Lo anterior justifica de cierta forma el uso de $\log^+$ en la definición de la clase Nevanlinna.*

Proposición 1.21. *Sea $F \in N$ tal que $F(0) \neq 0$, entonces*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\log |F(re^{it})|| dt < \infty.$$

Demostración. Por la Fórmula de Jensen sabemos que

$$-\infty < \log |F(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{it})| dt$$

.

Por consiguiente

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- |F(re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt - \log |F(0)|.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|log|F(re^{it})||dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|F(re^{it})|dt\\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt - \log|F(0)|\\ &\leq K - \log|F(0)|\end{aligned}$$

donde $K = 2\sup\limits_{0\leq r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt$ es finito pues $F\in N$. □

Teorema 1.22. *Supongamos que $F \in N$ y F no es idénticamente cero. Sean $\{z_j\}$ los ceros de F listados tantas veces como sus multiplicidades. Entonces*

$$\sum_j (1-|z_j|) < \infty.$$

Demostración. Supongamos que $|z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ y que $F(0) \neq 0$. Por la Fórmula de Jensen tenemos que $\forall r \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\log|F(0)| + \sum_{|z_j|\leq r}\log\frac{r}{|z_j|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(re^{it})|dt\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt\\ &\leq M\end{aligned}$$

donde $M \in \mathbb{R}^+$ es independiente de r, pues $F \in N$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $r \in (0,1)$ suficientemente cerca de 1 tal que $|z_n| \leq r$. Consecuentemente $|z_j| \leq r$ para $j = 1,2,\ldots,n$ y así, para n fijo

$$\log|F(0)| + \sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|z_j|} \leq \log|F(0)| + \sum_{|z_j|\leq r}\log\frac{r}{|z_j|} \leq M.$$

De lo anterior, se sigue que $\forall r \in (0,1)$

$$\sum_{j=1}^{n}\log\frac{1}{|z_j|} \leq M - \log|F(0)| - n\log r$$

y haciendo $r \to 1$ tenemos $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{1}{|z_j|} \leq M - \log |F(0)|.$$

Consecuentemente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_j|} \leq M - \log |F(0)|.$$

Y notando que $0 \leq 1 - |z_j| \leq \log \frac{1}{|z_j|}$, obtenemos que

$$\sum_{j} (1 - |z_j|) < \infty.$$

$\square$

Teorema 1.23. *Sea* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos en* $D_1(0)\backslash\{0\}$ *tal que* $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty$. *Sea* $k \in \mathbb{N}$, *entonces el producto de Blaschke*

$$B(z) = z^k \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z_j - z}{1 - z\overline{z_j}} \frac{|z_j|}{z_j}$$

converge uniformemente en cada subconjunto compacto del disco unitario a una función $B \in H^{\infty}$ *cuyos ceros son precisamente los* $z_j's$ *más un cero de orden* k *en* $z = 0$.

Demostración. Si demostramos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z_j - z}{1 - z\overline{z_j}} \frac{|z_j|}{z_j} \right| \tag{1.2}$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos del disco unitario, tendremos que

$$B(z) = z^k \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z_j - z}{1 - z\overline{z_j}} \frac{|z_j|}{z_j}$$

converge uniformemente en cada subconjunto compacto del disco unitario y además $B(z) \in H(D)$ (Ver [12], Teo. 7.1.15, p. 411).

Supongamos que $|z| \leq r < 1$, entonces

$$\left| 1 - \frac{z_j - z}{1 - z\overline{z_j}} \frac{|z_j|}{z_j} \right| = (1 - |z_j|) \left| \frac{z_j + z|z_j|}{z_j - z|z_j|^2} \right| \leq (1 - |z_j|) \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty$, la serie (1.2) converge uniformemente si $|z| \leq r$.

Falta ver que $|B(z)| \leq M$ para alguna $M > 0$ y para toda $z \in D$. Para ello, observemos que para cada $z_0 \in D$ la transformación $T_{z_0} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ tal que

$$T_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}$$

es continua en $\overline{D}$, holomorfa en D y además $T_{z_0}(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Luego, podemos escribir

$$B(z) = z^k \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j|}{z_j} T_{z_j}(z)$$

y notar que $|B(z)| = |z|^k \prod_{j=1}^{\infty} |T_{z_j}(z)| \leq 1$. Así basta tomar $M = 1$ para concluir que $B(z) \in H^\infty(D)$. $\square$

Observación 1.24. *Como $B(z) \in H^\infty$, el Teorema de Fatou asegura que $B(z)$ tiene límites no tangenciales en casi todo punto de la frontera de D (ver Apéndice). Escribiremos*

$$B(e^{it}) = \lim_{z \overset{N.T.}{\to} e^{it}} B(z).$$

En general, si para alguna función F definida en D se sabe que existe el valor frontera no tangencial en e^{it} lo denotaremos por $F(e^{it})$.

Si $F \in H^p$ con $p \geq 1$ es posible mostrar que F es una integral de Poisson y por tanto $F(e^{it})$ existe para casi toda t. Para ver una demostración, puede verse el Apéndice . Más adelante extenderemos este resultado para cualquier $p > 0$.

Para finalizar este capítulo, demostraremos el siguiente teorema sobre el producto de Blaschke que aparece en el Teorema 1.23.

Teorema 1.25. *Sea $B(z)$ el producto de Blaschke que aparece en el Teorema 1.23. Entonces $|B(e^{it})| = 1$ para casi toda t y*

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{it})| dt = 0. \tag{1.3}$$

Demostración. Como $B(z)$ es holomorfa en D, $\log|B(z)|$ es subarmónica y la integral en (1.3) es una función creciente de r, por lo cual sabemos que el límite en (1.3) existe. Del Teorema 1.23 también sabemos que $|B(z)| \leq 1 \ \forall z \in D$, por lo que $\log(1/|B(re^{it})|) \geq 0 \ \forall r \in [0, 1)$. Usando el Lema de Fatou obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{1}{|B(e^{it})|}\right) dt \leq \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{1}{|B(re^{it})|}\right) dt,$$

equivalentemente

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt \le \int_{-\pi}^{\pi}\log|B(e^{it})|dt \le 0. \tag{1.4}$$

Si probamos que el límite en (1.4) también es mayor o igual que cero, habremos terminado, pues tendríamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(e^{it})| = 0$$

o equivalentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{1}{B(e^{it})}\right| = 0$$

y como $\log|1/B(e^{it})| \ge 0$ obtendremos que $\log|1/B(e^{it})| = 0$ para casi toda t, de lo cual se sigue que $|B(e^{it})| = 1$ para casi toda t.

Veamos que el límite es mayor o igual que cero:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$B_n(z) = z^k \prod_{j=1}^{n} \frac{z_j - z}{1 - z\overline{z_j}} \frac{|z_j|}{z_j}.$$

Nótese que $B_n(z)$ es continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D, por tanto es analítica y acotada en D. Así $B_n(e^{it})$ existe para casi toda t.

Como el límite no tangencial existe, podemos calcularlo radialmente. Si $z = re^{it}$ y hacemos $r \to 1$ entonces

$$|B_n(z)| = r^k \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j - re^{it}|}{|1 - re^{it}\overline{z_j}|} \to \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j - eit|}{|1 - e^{it}\overline{z_j}|} = 1.$$

Así $|B_n(e^{it})| = 1$ para casi toda t. Además $|B_n(re^{it})| \to 1$ uniformemente en t cuando $r \to 1$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{B(re^{it})}{B_n(re^{it})}\right|dt &= \lim_{r\to 1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B_n(re^{it})|dt\right] \\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt.\end{aligned}$$

Pero por el Corolario 1.17, para toda $r \in [0,1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{B(re^{it})}{B_n(re^{it})}\right| dt &\geq \log\left|\frac{B(0)}{B_n(0)}\right| \\ &= \log\prod_{j=n+1}^{\infty}|z_j| \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty}\log|z_j|.\end{aligned}$$

Así para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}\log|z_j| \leq \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt.$$

Por otro lado, como $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|) < \infty$ sabemos que $\lim_{r\to 1}|z_j| = 1$. Como $|z_j| > 0$ se sigue que $\delta = \inf_{j\in\mathbb{N}}|z_j| > 0$.

Luego para toda $j \in \mathbb{N}$

$$0 < \log|z_j|^{-1} < |z_j|^{-1} - 1 = |z_j|^{-1}(1-|z_j|) < \delta^{-1}(1-|z_j|).$$

Lo cual implica que $0 < \sum_{j=1}^{\infty}\log|z_j|^{-1} < \infty$ y por tanto $\sum_{j=n+1}^{\infty}\log|z_j|^{-1} \to 0$ si $n \to \infty$.

Concluimos que

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt = 0.$$

$\square$

Capítulo 2

Teorema de Factorización de F. Riesz

En el Capítulo anterior, se introdujo el espacio H^p consistente de todas la funciones F holomorfas en el disco unitario para las cuales se satisface

$$\sup_{0 \le r < 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \right]^{1/p} = \lim_{r \to 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \right]^{1/p} < \infty \tag{2.1}$$

si $0 < p < \infty$ y si $p = \infty$

$$\sup_{0 \le r < 1} \left[\sup_{-\pi \le t \le \pi} |F(re^{it})| \right] < \infty. \tag{2.2}$$

También denotamos por $\|F\|_{H^p}$ a los supremos en (2.1) y (2.2).

Obsérvese que para $1 \le p \le \infty$ y $F, G \in H(D)$ la desigualdad de Minkowski nos dice que $\forall r \in [0, 1)$

$$m_p(F + G, r) \le m_p(F, r) + m_p(G, r).$$

Haciendo $r \to 1$ obtenemos

$$\|F + G\|_{H^p} \le \|F\|_{H^p} + \|G\|_{H^p}.$$

Como $\|\cdot\|_{H^p}$ es homogénea y $\|F\|_{H^p} = 0$ implica que $F = 0$, hemos demostrado que $(H^p, \|\cdot\|_{H^p})$ es un espacio vectorial normado para $1 \le p \le \infty$.

Si $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_{H^p}$ no satisface la desigualdad del triángulo. Sin embargo, se cumple que

$$\|F+G\|_{H^p}^p \leq \|F\|_{H^p}^p + \|G\|_{H^p}^p.$$

Así $(F,G) \mapsto \|F-G\|_{H^p}^p$ es una métrica invariante en H^p. También es claro que $\|\cdot\|_{H^p}^p$ es p-homogénea, es decir $\|\alpha F\|_{H^p}^p = |\alpha|^p \|F\|_{H^p}^p$. Por lo tanto, para $0 < p < 1$ H^p también es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_{H^p}^p$ es una p-norma en H^p.

Enseguida estudiaremos algunas de las propiedades de las funciones que constituyen al espacio H^p. En capítulos posteriores investigaremos la estructura de H^p como espacio vectorial métrico.

Se sabe que en los espacios L^p el caso $p = 2$ ocupa un lugar muy especial, pues a pesar de que el Teorema de Riesz-Fisher asegura que para $1 \leq p \leq \infty$ el espacio L^p es de Banach, L^2 es el único que posee la propiedad de ser un espacio de Hilbert. Son precisamente las propiedades de L^2 como espacio de Hilbert, la clave en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Denotemos por $P(f)$ a la integral de Poisson de la función f, entonces*

$$H^2 = \{P(f) : f \in L^2([-\pi,\pi]) \text{ tal que } \hat{f}(j) = 0 \;\forall j < 0\}.$$

Demostración. Tomemos $F(z) \in H^2$ con serie de Taylor $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. Luego, la función $t \mapsto F(re^{it})$ tendrá serie de Fourier $\sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j e^{ijt}$.

Como $\sum_{j=0}^{n} a_j r^j e^{ij\cdot} \to F(re^{i\cdot})$ en la norma $\|\cdot\|_2$ cuando $n \to \infty$, se sigue que

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} a_j r^j e^{ij\cdot} \right\|_2 \to \left\| F(re^{i\cdot}) \right\|_2 = m_2(F,r)$$

cuando $n \to \infty$. Pero como $\{e^{in\cdot}\}_{n=0}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal en $L^2([-\pi,\pi])$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 r^{2j} = \left\| \sum_{j=0}^{n} a_j^2 r^j e^{ij\cdot} \right\|_2^2 \to m_2^2(F,r)$$

cuando $n \to \infty$. Por consiguiente $m_2^2(F,r) = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 r^{2j}$ y así

$$\|F\|_{H^2}^2 = \lim_{r\to 1} m_2(F,r) = \lim_{r \to 1} \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 r^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2.$$

En resumen, hemos obtenido que $F \in H^2 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. Pero por el Teorema de Riesz-Fisher, si $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$, existe una función $f \in L^2([-\pi,\pi])$ cuya serie de Fourier es $\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}$. Además la integral de Poisson de f será

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}f(t)dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \\
&= F(re^{i\theta}).
\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que si F es una función en H^2 entonces F es la integral de Poisson de alguna función $f \in L^2([-\pi,\pi])$ cuyos coeficientes de Fourier a_j son cero para frecuencias negativas.

Recíprocamente, si $F = P(f)$ con $f \in L^2([-\pi,\pi])$ y $\hat{f}(j) = 0\ \forall j < 0$, entonces

$$\begin{aligned}
F(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}\right)f(t)dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}
\end{aligned}$$

lo cual implica que $F \in H(D)$. Como $\forall r \in [0,1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^2 dt \leq M$$

concluimos que $F \in H^2$. □

La proposición anterior es válida también para $1 < p \leq \infty$. Sin embargo, las técnicas que utilizaremos para esta demostración distarán mucho de aquellas utilizadas en el caso $p = 2$, pues como mencionábamos anteriormente, para $p \neq 2$ el espacio $L^p([-\pi,\pi])$ ya no es un espacio de Hilbert.

Proposición 2.2. *Para $1 < p \leq \infty$, las funciones en H^p son las integrales de Poisson de funciones en $L^p([-\pi,\pi])$ cuyos coeficientes de Fourier son cero para frecuencias negativas.*

Demostración. Sea $F \in H^p$ con $1 < p \leq \infty$ y sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ su representación en serie de Taylor.

Como F es armónica y $\|F\|_{H^p} < \infty$, sabemos que existe $f \in L^p([-\pi,\pi])$ tal que $F = P(f)$ (ver Apéndice). Aún más, sabemos que $F(z) \to f(t)$ si $z \stackrel{N.T.}{\to} e^{it}$, i.e. $F(e^{it}) = f(t)$ para casi toda t.

También para $1 < p < \infty$ sabemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt \to 0 \tag{2.3}$$

si $r \to 1$ y si $F \in H^\infty$ tenemos que $F(re^{it}) \to F(e^{it})$ cuando $r \to 1$ en la topología débil-* de $L^\infty([-\pi,\pi])$.

Queremos mostrar que la serie de Fourier de $f(t) = F(e^{it})$ es $\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}$.

Cuando $1 < p < \infty$ se sabe que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p$, de esto y de (2.3) se sigue que $\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})| dt$ cuando $r \to 1$.

Puesto que e^{-int} es acotada para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que cuando $r \to 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it}) e^{-int} dt \to \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it}) e^{-int} dt$$

y así los coeficientes de Fourier de $F(re^{it})$ son

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) e^{-int} dt &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it}) e^{-int} dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j e^{ijt} \right) e^{-int} dt \\
&= \lim_{r\to 1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-n)t} dt \\
&= \lim_{r\to 1} a_n r^n = a_n
\end{aligned}$$

si $n \geq 0$ y $c_n = 0$ si $n < 0$. Por tanto, la serie de Fourier de $f(t) = F(e^{it})$ es $\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}$.

Cuando $p = \infty$ sabemos que $\forall g \in L^1([-\pi,\pi])$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) F(re^{it}) dt \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t) F(e^{it}) dt$$

si $r \to 1$. En particular, si tomamos $g(t) = e^{-int}$ tendremos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it})e^{-int}dt \to \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})e^{-int}dt.$$

De la misma forma que en caso anterior, obtenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}$ es la serie de Fourier de $F(e^{it})$.

El recíproco se sigue de forma análoga al caso $p = 2$. $\square$

2.1. La Función Frontera

A lo largo de esta sección, estudiaremos el comportamiento de las funciones de H^p cuando nos acercamos a la frontera del disco. Para iniciar, veamos lo que hasta este momento podemos decir sobre esta situación y la representación en términos de la función frontera.

Teorema 2.3. *Sea $F \in H^p$ con $1 < p \leq \infty$*

i) Para casi toda t, el límite

$$F(e^{it}) = \lim_{z \xrightarrow{N.T.}} F(z)$$

existe, la función $f(t) = F(e^{it})$ pertenece a $L^p([-\pi, \pi])$ y $F = P(f)$.

ii) Si $1 < p < \infty$ entonces $\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt \to 0$ si $r \to 1$.

iii) Si $p = \infty$ entonces $F(re^{it}) \to F(e^{it})$ en la topología debil- de $L^\infty([-\pi, \pi])$ si $r \to 1$.*

iv) Para cada $1 < p \leq \infty$ se tiene $\|F\|_{H^p} = \|f\|_p$.

v) F es la integral de Cauchy de su función frontera, es decir:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Demostración. Sólo debemos mostrar *iv)* y *v)* (ver Apéndice). Si $1 < p < \infty$ de *ii)* se sigue que si $r \to 1$ entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \to \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt.$$

Consecuentemente $\|F\|_{H^p} = \lim\limits_{r\to 1} m_p(F,r) = \|f\|_p$.

Cuando $p=\infty$ tenemos que para casi todo $t_0 \in [-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned} |f(t_0)| = \lim_{r\to 1} |F(re^{it_0})| &\leq \lim_{r\to 1}\left(\sup_{t\in[-\pi,\pi]} |F(re^{it})|\right) \\ &= \lim_{r\to 1} m_\infty(F,r) \\ &= \|F\|_{H^\infty}. \end{aligned}$$

También $|F(z)| \leq \|f\|_\infty$ $\forall z \in D$ (ver Apéndice), y en consecuencia $\|F\|_{H^\infty} = \sup\limits_{z\in D}|F(z)| \leq \|f\|_\infty$.

Por tanto $\|f\|_p = \|F\|_{H^p}$ para toda $p \in (1,\infty]$.

Ahora solo resta mostrar *v)*: para toda $z \in D$ y cualquier $r \in [0,1)$, el Teorema de Cauchy asegura que

$$\begin{aligned} F(rz) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(r\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{F(re^{it})e^{it}}{e^{it}-z} dt \end{aligned}$$

tomando límite cuando r tiende a uno en ambos lados y usando *ii)* si $1 < p < \infty$ y *iii)* si $p = \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{F(re^{it})e^{it}}{e^{it}-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{F(e^{it})e^{it}}{e^{it}-z} dt, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Si $(a_r)_{0\leq r<1}$ es una red, definimos

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 1} a_r &= \inf_{r\in[0,1)} \sup_{s\geq r} a_s \\ \liminf_{r\to 1} a_r &= \sup_{r\in[0,1)} \inf_{s\geq r} a_s \end{aligned}$$

Demostraremos ahora el siguiente resultado para las funciones en la clase Nevanlinna:

Teorema 2.4. *Sea F una función en N no idénticamente cero. Entonces*

$$\limsup_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|F(re^{it})||dt < \infty.$$

Por tanto, si $F(e^{it}) = \lim_{r\to 1} F(re^{it})$ existe para casi toda t (el cual efectivamente existe para $1 \leq p \leq \infty$), entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log|F(e^{it})||dt < \infty$$

y consecuentemente $F(e^{it})$ puede anularse solamente en un conjunto de medida cero.

Demostración. Supongamos primero que $F(0) \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
-\infty < \log|F(0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F(re^{it})|dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|F(re^{it})|dt
\end{aligned}$$

de lo anterior se sigue que

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|F(re^{it})|dt \leq \sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F(re^{it})|dt - \log|F(0)|$$

y este supremo es finito puesto que $F \in N$. Consecuentemente

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|F(re^{it})||dt \leq 2\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F(re^{it})|dt - \log|F(0)| = C < \infty.$$

Si $F(0) = 0$ escribamos $F(z) = z^k H(z)$, donde $H(0) \neq 0$ y k es la multiplicidad del cero de F en $z = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
-\infty < \log|H(0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|H(re^{it})|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt - k\log r
\end{aligned}$$

y procediendo de forma análoga al caso anterior, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|F(re^{it})||dt \leq \sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^{+}|F(re^{it})|dt - \log|H(0)| - k\log r$$

lo cual está uniformemente acotado para $r > 1/2$.

En cualquier caso, hemos probado que el límite superior

$$\limsup_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|F(re^{it})||dt$$

es finito. □

Estudiaremos ahora el comportamiento de $F \in H^p$ para $0 < p \leq 1$. Para $p = 1$ se sabe que si $F \in H^1$, existe una medida de Borel μ sobre $[-\pi, \pi]$ tal que

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

Además, si definimos $G(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t)$ y θ_1 es uno de los puntos donde $G'(\theta)$ existe y es finita, entonces $F(z) \to G'(\theta_1)$ cuando z tiende no tangencialmente a e^{θ_1} (La demostración de estos comentarios puede verse en el Apéndice).

Lo anterior implica la existencia de la función frontera de $F \in H^1$. A pesar de ello, aún no sabemos si F tiene que ser necesariamente la integral de Poisson de su función frontera, como sucede para $p > 1$. Para $p < 1$ ni siquiera sabemos si $F(e^{it})$ existe.

Proposición 2.5. *Si $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$ y F no tiene ceros en D, entonces F tiene una función frontera no tangencial $F(e^{it})$ la cual pertenece a $L^p([-\pi, \pi])$.*

Demostración. Ya hemos demostrado este resultado para $1 \leq p \leq \infty$ aún cuando F tiene ceros en D. Más adelante veremos que la hipótesis de que F no tenga ceros también puede omitirse para $0 < p < 1$.

Supongamos que $F \in H^p$, con $0 < p < 1$, y que F no tiene ceros en D. Dado que F no se anula en D, podemos escribir $F(z) = G(z)^2$ para alguna $G \in H(D)$. Luego, $|G(z)|^{2p} = |F(z)|^p$ $\forall z \in D$ y se sigue que $G \in H^{2p}$. Además $\|G\|^2_{H^{2p}} = \|F\|_{H^p}$.

Si $1/2 \leq p < 1$, entonces $2p \geq 1$, y por *i)* del Teorema 2.3, sabemos que existe $\lim_{r\to 1} G(z) = G(e^{it})$ para casi toda t y pertenece a $L^{2p}([-\pi,\pi])$. Se sigue que $F(e^{it})$ también existe y pertenece a $L^p([-\pi,\pi])$ pues

$$F(e^{it}) = \lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{it}}} F(z) = \lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{it}}} G^2(z) = G^2(e^{it}).$$

Si ahora $1/4 \leq p \leq 1/2$, entonces $2p \geq 1/2$ y podemos aplicar el argumento anterior usando la existencia del límite no tangencial para $1/2 \leq q < 1$.

Procediendo de forma inductiva, se obtiene el resultado. □

De nueva cuenta, extenderemos un resultado que ya habíamos probado para las funciones en H^p con $1 < p \leq \infty$ a las funciones en H^p con $0 < p \leq 1$ que no tienen ceros en el disco unitario. Posteriormente probaremos que esta proposición sigue siendo válida cuando F tiene ceros en D.

Proposición 2.6. *Si $F \in H^p$ con $0 < p \leq \infty$ y F nunca es cero en D entonces*

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt = 0.$$

Demostración. Ya sabemos que este resultado es válido para $p > 1$ aún cuando F tiene ceros en D, de manera que sólo debemos probar el caso $0 < p \leq 1$.

Si $F \in H^p$ con $0 < p \leq 1$ y F no tiene ceros en D, podemos escribir como antes, $F(z) = G^2(z)$ con $\|G\|^2_{H^{2p}} = \|F\|_{H^p}$.

Observemos que si $1/2 < p \leq 1$ entonces $2p > 1$ y que

$$\begin{aligned} \|G(re^{it}) - G(e^{it})\|_{2p} &\leq \|G(re^{it})\|_{2p} + \|G(e^{it})\|_{2p} \\ &\leq \|G\|_{H^{2p}} + \|G\|_{H^{2p}} \\ &= 2\|G\|_{H^{2p}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt &= \int_{-\pi}^{\pi} |G^2(re^{it}) - G^2(e^{it})|^p dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it}) + G(e^{it})|^p |G(re^{it}) - G(e^{it})|^p dt \\
&\leq \left[\int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it}) + G(e^{it})|^{2p} dt\right]^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it}) - G(e^{it})|^{2p} dt\right]^{1/2} \\
&\leq 2^p \|G\|_{H^{2p}}^p \left[\int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it}) - G(e^{it})|^2 p\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

y como el resultado es válido para $p > 1$ tenemos que si $r \to 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt \leq 2^p \|G\|_{H^{2p}}^p \left[\int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it}) - G(e^{it})|^2 p\right]^{1/2} \longrightarrow 0.$$

Igual que en la proposición anterior podemos proceder inductivamente para probar el resultado. □

Como corolario de la proposición anterior obtenemos la representación de Poisson y de Cauchy para la funciones en H^1.

Corolario 2.7. *Si $F \in H^1$ y F nunca es cero en D entonces*

i) $F = P(f)$ *con* $f(t) = F(e^{it})$.

ii) $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Demostración. Debido a la Proposición 2.6, la prueba de *ii)* será idéntica a la de *v)* en el Teorema 2.3, por lo cual la omitiremos.

Para *i)* obsérvese que la Proposición 2.6 implica que si $r \to 1$ entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) F(re^{it}) dt \to \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) F(e^{it}) dt$$

para toda función $\varphi(t)$ acotada en $[-\pi, \pi]$. En particular si $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales positivos tal que $r_n \uparrow 1$ y $F_n(t) = F(r_n e^{it})$, tendremos que $\forall \varphi(t)$ acotada

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) F_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) F(e^{it}) dt. \tag{2.4}$$

Puesto que la función $F_n(z) = F(r_n z)$ es armónica en $D(0, 1/r_n)$, tiene la siguiente representación de Poisson (Ver [6], p. 4):

$$F(r_n r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F_n(t) dt. \tag{2.5}$$

Nótese que si tomamos límite cuando $n \to \infty$ en (2.5), el lado izquierdo converge a $F(re^{i\theta})$ y por (2.4) el lado derecho converge a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt$. Así

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt.$$

□

2.2. Teorema de Factorización de F. Riesz

En la sección anterior logramos extender *ii)* y parte de *i)* del Teorema 2.3 a las funciones en H^p, con $0 < p \leq 1$, que no tienen ceros en D. Ahora bien, sabemos que no todas las funciones en H^p estan exentas de ceros en el disco unitario y obtener resultados análogos al Teorema 2.3 para funciones arbitrarias en H^p para cualquier p, podría parecer muy difícil. Sin embargo, el matemático húngaro Frigyes Riesz (1880-1956) hizo la observación fundamental de que los ceros no importan ya que podemos factorizarlos, y como resultado de su comentario, obtenemos el siguiente Teorema y varias consecuencias que nos permitirán estudiar más a fondo el comportamiento en la frontera de las funciones en los espacios de Hardy.

Teorema 2.8. *Sea $F \in N$ no idénticamente cero y sea B el producto de Blaschke formado con los ceros de F. Entonces $F(z) = B(z)H(z)$ donde H no tiene ceros en D y pertence a la clase Nevanlinna. Además $\|H\|_N = \|F\|_N$ y si $F \in H^p$, entonces $H \in H^p$ y $\|H\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.*

Demostración. Sea $F \in N$ no idénticamente cero y sean $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ los ceros de F listados tantas veces como sus multiplicidades. Por el Teorema 1.22 sabemos que la serie

$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|)$ converge y de acuerdo al Teorema 1.23, el producto de Blaschke $B(z)$ formado con los ceros de F es una función holomorfa y acotada que tiene exactamente los mismos ceros que F. Además $|B(e^{it})| = 1$ para casi toda t.

Por todo lo anterior, es posible escribir $F = B \cdot H$ con H analítica y sin ceros en D.

Recordemos que $|B(re^{it})| \leq 1$ y así

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} |H(re^{it})| dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} |F(re^{it})| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|B(re^{it})|} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} |F(re^{it})| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{it})| dt.\end{aligned}$$

Si tomamos límite cuando $r \to 1$ obtendremos que $\|H\|_N \leq \|F\|_N$, pues por el Teorema 1.25 la segunda integral tiende a cero.

Por otro lado $|F(z)| \leq |H(z)|\ \forall z \in D$, por ser $|B(z)| \leq 1$ para toda $z \in D$. Luego, $\|F\|_N \leq \|H\|_N$ y consecuentemente $\|H\|_N = \|F\|_N$.

Supongamos ahora que $F \in H^p$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n(z)$ igual que en el Teorema 1.25 y definamos $H_n(z) = F(z)/B_n(z)$.

Sabemos que $|B_n(re^{it})|$ converge uniformemente en t a 1 cuando r tiene a uno y así, si $p < \infty$

$$\begin{aligned}\|H_n\|_{H^p}^p &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{F(re^{it})}{B_n(re^it)} \right|^p dt \\ &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left| \frac{F(re^{it})}{B_n(re^it)} \right|^p - |F(re^{it})|^p \right] dt + \|F\|_{H^p}^p \\ &= \|F\|_{H^p}^p.\end{aligned}$$

Si $p = \infty$ tenemos

$$\begin{aligned}\|H_n\|_{H^\infty} &= \lim_{r\to 1} m_\infty(F/B_n, r) \\ &\leq \lim_{r\to 1} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} \left(\frac{|F(re^{it})|}{|B_n(re^{it})|} - |F(re^{it})| \right) + \lim_{r\to 1} m_\infty(F, r) \\ &= \|F\|_{H^\infty}.\end{aligned}$$

Pero $|F(z)| \leq |H_n(z)|\ \forall z \in D$ implica que $\|F\|_{H^\infty} \leq \|H_n\|_{H^\infty}$.

En consecuencia $\|F\|_{H^p} = \|H_n\|_{H^p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cualquier p.

Notemos ahora que para r fijo, $|H_n(re^{it})|$ converge de forma creciente a $|H(re^{it})|$ cuando $n \to \infty$. De manera que si $p < \infty$ podemos aplicar el Teorema de Convergencia Monótona para obtener

$$m_p(H, r) = \lim_{n\to\infty} m_p(H_n, r) \leq \lim_{n\to\infty} \|H_n\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$$

y tomando límite cuando r tiende a uno se tiene que $\|H\|_{H^p} \leq \|F\|_{H^p}$. También $\|H\|_{H^p} \geq \|F\|_{H^p}$, puesto que $|F(z)| \leq |H(z)|$ $\forall z \in D$.

Si $p = \infty$, para cualquier $t \in [-\pi, \pi]$ y $\forall r \in [0, 1)$

$$|H(re^{it})| = \lim_{n\to\infty} |H_n(re^{it})| \leq \lim_{n\to\infty} \|H_n\|_{H^\infty} = \|F\|_{H^\infty}.$$

Esto implica que $m_\infty(H, r) \leq \|F\|_{H^\infty}$ y consecuentemente $\|H\|_{H^\infty} \leq \|F\|_{H^\infty}$. Pero de nuevo, dado que $|F(z)| \leq |H(z)|$ $\forall z \in D$, se tiene que $\|H\|_{H^\infty} \geq \|F\|_{H^\infty}$.

En cualquier caso hemos probado que si $F \in H^p$, entonces $H \in H^p$ y

$$\|F\|_{H^p} = \|H\|_{H^p}.$$

$\square$

Como consecuencia de este teorema de factorización se tienen los siguientes corolarios:

Corolario 2.9. *Si $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$, entonces $F = F_1 \cdot F_2$ donde $\|F_1\|_{H^{2p}} = \|F_2\|_{H^{2p}} = \|F\|_{H^p}^{1/2}$.*

Demostración. Sea $F(z) = B(z)H(z)$ la factorización dada por el Teorema 2.8. Como $H(z)$ no tiene ceros en D, podemos escribir $H(z) = G^2(z)$ con

$$\|G\|_{H^{2p}}^{2p} = \|H\|_{H^p}^p = \|F\|_{H^p}^p.$$

Luego, será suficiente escribir $F_1 = B \cdot G$ y $F_2 = G$, pues

$$\|F_2\|_{H^{2p}} = \|G\|_{H^{2p}} = \|F\|_{H^p}^{1/2}$$

y usando el Teorema anterior para $F_1(z) = B(z)G(z)$ tendremos

$$\|F_1\|_{H^{2p}} = \|G\|_{H^{2p}} = \|F\|_{H^p}^{1/2}.$$

$\square$

Corolario 2.10. *Sea $F \in H^p$ con $0 < p \leq \infty$, entonces $F = F_1 - F_2$ donde F_1 y F_2 son funciones en H^p, no se anulan en D y $\|F_j\|_{H^p} \leq \|F\|_{H^p}$ para $j = 1, 2$.*

Demostración. De nuevo escribamos $F = B \cdot H$ y tomemos

$$F_1 = \left(\frac{1+B}{2}\right) H$$
$$F_2 = \left(\frac{1-B}{2}\right) H$$

Como H no tiene ceros en D y $|B(z)| < 1$ en D, sabemos que F_j no tiene ceros en D para $j = 1, 2$. Además

$$|F_j(z)| \leq \frac{|H(z)|}{2} + \frac{|B(z)H(z)|}{2} \leq |H(z)| \;\; \forall z \in D$$

por lo cual $\|F_j\|_{H^p} \leq \|H\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$ para $j = 1, 2$. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es abodar el problema de la existencia y comportamiento de la función frontera para una función arbitraria en H^p con cualquier valor de p. En la sección anterior examinamos el comportamiento en la frontera de funciones sin ceros en D, ahora, el Teorema de factorización 2.8 nos permitirá extender los resultados obtenidos a funciones arbitrarias en H^p.

Teorema 2.11. *Sea $F \in H^p$ con $0 < p \leq \infty$. Entonces*

i) El límite no tangencial

$$F(e^{it}) = \lim_{\substack{N.T. \\ z \to e^{it}}} F(z)$$

existe para casi toda t y la función $F(e^{it})$ pertenece a $L^p([-\pi, \pi])$.

ii) $\displaystyle \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt = 0.$

iii) $\displaystyle \|F\|_{H^p} = \lim_{r \to 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p \right]^{1/p} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt \right]^{1/p}.$

Demostración. i) Supongamos que F no es idénticamente cero. En virtud del Teorema 2.8 podemos escribir $F(z) = B(z)H(z)$, donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de F y $H(z)$ es una función holomorfa que no se anula en D tal que $\|H\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.

Nótese que B y H poseen límites no tangenciales para casi todo punto frontera, pues B es acotada y H no tiene ceros en D. La existencia de estos límites provee la existencia de un límite no tangencial para F, a saber

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{it}}} F(z) = F(e^{it}) = B(e^{it})H(e^{it}).$$

Más aún, $|F(e^{it})| = |H(e^{it})|$ para casi toda t, puesto que $|B(e^{it})| = 1$ casi en todas partes. En consecuencia $F(e^{it})$ pertence a $L^p([-\pi,\pi])$, dado que $H(e^{it}) \in L^p([-\pi,\pi])$.

ii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt &= \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{it})H(re^{it}) - B(e^{it})H(e^{it})|^p dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{it})[H(re^{it}) - H(e^{it})] - H(e^{it})[B(e^{it}) - B(re^{it})]|^p dt \\
&\leq C_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{it})[H(re^{it}) - H(e^{it})]|^p dt + \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{it})[B(e^{it}) - B(re^{it})]|^p dt \right) \\
&\leq C_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |H(re^{it}) - H(e^{it})|^p dt + \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{it})[B(e^{it}) - B(re^{it})]|^p dt \right).
\end{aligned}$$

La primera integral tiende a cero cuando r tiende a uno por la Proposición 2.6. La segunda integral también tiende a cero por el Teorema de Convergencia Dominada, dado que $|B(re^{it})| \leq |B(e^{it})| = 1$ $\forall r \in [0,1)$ y $H(e^{it}) \in L^p([-\pi,\pi])$.

iii) Para $p > 1$ la igualdad se tiene por el Teorema 2.3. Sólo queda mostrar el caso $p \leq 1$. Por el inciso *ii)* tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it}) - F(e^{it})|^p dt + \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt \\
&\leq 2\pi\epsilon + \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt
\end{aligned}$$

siempre y cuando r sea suficientemente cercano a uno. De esta manera, $\forall \epsilon > 0$ se verifica

$$\|F\|_{H^p}^p \leq \epsilon + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt$$

y en consecuencia $\|F\|_{H^p} \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt\right]^{1/p}$.

Por otro lado, el Lema de Fatou implica

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt\right]^{1/p} &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1} |F(e^{it})|^p dt\right]^{1/p} \\
&\leq \lim_{r\to 1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt\right]^{1/p} \\
&= \|F\|_{H^p}
\end{aligned}$$

Concluimos pues que $\|F\|_{H^p} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt\right]^{1/p}$. $\square$

Corolario 2.12. *Sea $F \in H^p$ para algún $0 < p < \infty$ y supongamos que la función frontera $F(e^{it})$ pertenece a $L^q([-\pi,\pi])$, entonces F pertence a H^q.*

Demostración. Si $q \leq p$ no hay nada que hacer, pues en este caso $H^p \subset H^q$.

Supongamos que $q > p$. Si $p > 1$, entonces $F = P(f)$ donde $f(t) = F(e^{it})$ y además

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^q dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^q dt \; \forall r \in [0,1)$$

lo cual implica que F pertenece a H^q.

Supongamos ahora que $p \leq 1$ y sea $F(z) = B(z)H(z)$ la factorización dada por el Teorema 2.8. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $1 < np$ y escribamos $H(z) = G^n(z)$, con G una función holomorfa que no se anula en D.

Dado que $|H(z)|^p = |G(z)|^{np}\ \forall z \in D$, se sigue que $\|G\|_{H^{np}}^{np} = \|H\|_{H^p}^p = \|F\|_{H^p}^p$. Además, la función frontera satisface $|G(e^{it})|^n = |H(e^{it})| = |F(e^{it})|$.

Puesto que $F(e^{it}) \in L^q([-\pi,\pi])$, se sigue que $G(e^{it})$ pertence a $L^{nq}([-\pi,\pi])$. Por el caso anterior, tenemos que $G \in H^{nq}$ y así $F \in H^q$. $\square$

Demostraremos ahora el siguiente resultado, el cual es una extensión del Corolario 2.7 a todo el espacio H^1.

Corolario 2.13. *Cada $F \in H^1$ es la integral de Poisson y la integral de Cauchy de su función frontera $F(e^{it})$.*

Demostración. Sea $F \in H^1$ y tomemos $0 < s < 1$. Sabemos que para $z = re^{it} \in D$ se tiene

$$F(sre^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)F(se^{it})dt.$$

Si hacemos $s \to 1$ y usamos *ii)* del Teorema 2.11 se obtiene

$$F(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)F(e^{it})dt$$

que es la representación de Poisson de $F \in H^1$

Para obtener la representación de Cauchy observese que para $0 < s < 1$

$$F(sz) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{F(s\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(se^{it})e^{it}}{e^{it} - z}dt.$$

Si nuevamente hacemos $s \to 1$ y usamos *ii)* del Teorema 2.11 tendremos

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{F(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(e^{it})e^{it}}{e^{it} - z}dt.$$

□

Lema 2.14. *Sea $F \in H^1$, entonces la función*

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}Re[F(e^{it})]dt$$

es analítica en D y su derivada es

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{it}Re[F(e^{it})]}{(e^{it} - z)^2}dt.$$

Demostración. Sea $z_0 \in D$ y tomemos $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{(e^{it} - z)(e^{it} - z_0)} - \frac{1}{(e^{it} - z_0)^2}\right| < \frac{\epsilon}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Re[F(e^{it})]|dt} \tag{2.6}$$

siempre que $|z - z_0| < \delta$. De esta manera

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2e^{it}Re[F(e^{it})]}{(e^{it}-z_0)^2}dt\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2e^{it}(z-z_0)}{(e^{it}-z)(e^{it}-z_0)} - \frac{2e^{it}(z-z_0)}{(e^{it}-z_0)^2}\right]\frac{Re[F(e^{it})]}{z-z_0}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{(e^{it}-z)(e^{it}-z_0)} - \frac{1}{(e^{it}-z_0)^2}\right| |Re[F(e^{it})]|dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Re[F(e^{it})]|dt}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Re[F(e^{it})]|dt \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

siempre y cuando $|z - z_0| < \delta$. Por tanto

$$G'(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2e^{it}Re[F(e^{it})]}{(e^{it}-z_0)^2}dt.$$

$\square$

Corolario 2.15. *Si $F \in H^1$, entonces para toda $z \in D$*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}Re[F(e^{it})]dt + iIm[F(0)].$$

Demostración. Observemos primero que si $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}Re\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right] &= Re\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\left(\frac{e^{-it}-\bar{z}}{e^{-it}-\bar{z}}\right)\right] \\ &= Re\left[\frac{1-\bar{z}e^{it}+ze^{-it}-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\right] \\ &= \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \\ &= P_r(\theta - t).\end{aligned}$$

Sea $G(z)$ como en el Lema anterior, entonces la parte real de $G(z)$ es

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)Re[F(e^{it})]dt = Re[F(z)].$$

Dado que $G(z)$ y $F(z)$ son funciones analíticas en D, cuyas partes reales coinciden para todo $z \in D$, su diferencia es una función constante en el disco unitario (Ver [16], problema 13, Cap. 1).

Puesto que $G(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re[F(e^{it})]dt \in \mathbb{R}$, se sigue que

$$G(0) = Re[G(0)] = Re[F(0)].$$

En consecuencia

$$F(z) - G(z) = F(0) - G(0) = F(0) - Re[F(0)] = Im[F(0)].$$

Finalmente

$$F(z) = G(z) + iIm[F(0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} Re[F(e^{it})]dt + iIm[F(0)].$$

□

La representación de Poisson para funciones en H^1 será de mucha utilidad para demostrar algunos resultados en capítulos posteriores, pero por el momento, podemos presentar una aplicación de esta representación en la demostración de un famoso teorema debido a los hermanos Frigyes y Marcel Riesz.

Teorema 2.16. *Sea μ una medida de Borel en $[-\pi,\pi]$ cuyos coeficientes de Fourier se anulan para todas las frecuencias negativas, esto es*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} d\mu(t) = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Entonces μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $d\mu(t) = f(t)dt$ para alguna $f \in L^1([-\pi,\pi])$.

Demostración. Denotemos por a_j los coeficientes de Fourier de μ y sea F la integral de Poisson de μ, entonces

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}d\mu(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}d\mu(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Resulta entonces, que $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es una función holomorfa en D.

Por otra parte, dado que $\forall r \in [0,1)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t)$$

vemos que $F \in H^1$. Denotemos por $f(t)$ al límite no tangencial de $F(z)$. De acuerdo con el Corolario 2.13 $F = P(f)$, además, por el Teorema 2.11 se tiene que $f \in L^1([-\pi,\pi])$.

En síntesis $P(\mu) = F(re^{it}) = P(f)$, esto es

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j r^{|j|} e^{ij\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)} f(t)dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)dt \right) r^{|k|} e^{ik(\theta)}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} f(t)dt \ \forall j \in \mathbb{Z}$, esto es, las medidas $f(t)dt$ y $d\mu(t)$ tienen los mismos coeficientes de Fourier. Por tanto $f(t)dt = d\mu(t)$ (ver [10], Corolario de la p. 35). □

Corolario 2.17. *Sea $F \in H^1$ y supóngase que su función frontera $F(e^{it})$ coincide casi en todas partes con una función de variación acotada. Entonces $F(z)$ puede ser extendida a una función continua en $\overline{D}$ y $F(e^{it})$ es una función absolutamente continua.*

Demostración. Si demostramos que $F(e^{it})$ coincide casi en todas partes con una función absolutamente continua h, habremos terminado: como $F = P(h)$, se sigue que $F(re^{it}) \to h(t)$ uniformemente en t cuando $r \to 1$ y esto implica la continuidad de F en $\overline{D}$.

Supongamos que $F(e^{it}) = f(t)$ para casi toda t, con $f(t)$ una función de variación acotada. El espacio de funciones normalizadas de variación acotada en $[-\pi,\pi]$ está formado por funciones $k \in BV[-\pi,\pi]$ tales que $k(-\pi) = 0$ y $k(t+) = k(t)$ $\forall t \in (-\pi,\pi)$. Puesto que $f \in BV[-\pi,\pi]$, existe una única función $g \in NBV[-\pi,\pi]$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)g(t)dt \ \ \forall \varphi \in C([-\pi,\pi]).$$

De hecho, dicha función está definida como

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = -\pi \\ f(t+) - f(-\pi) & \text{si } -\pi < t < \pi \\ f(\pi) - f(-\pi) & \text{si } t = -\pi. \end{cases}$$

Como f es de variación acotada, su conjunto de puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable y consecuentemente $f(t+) = f(t)$ para casi toda $t \in [-\pi, \pi]$. Luego, tenemos que $g(t) = f(t) - f(a)$ para casi toda t en $[-\pi, \pi]$.

También existe una correspondencia biyectiva entre el espacio de medidas de Borel de variación finita en $[-\pi, \pi]$ y el espacio $NBV[-\pi, \pi]$ (Ver [9], Teo. 19.48 p. 331 o [1], Teo. 13.2 p.226): dada $k \in NBV[-\pi, \pi]$ existe una medida de Borel $\mu : \mathcal{B}([-\pi, \pi]) \to \mathbb{C}$ tal que $\mu(a, t] = k(t) - k(a)$. Recíprocamente, dada μ una medida de Borel de variación finita, la función $k(t) = \int_{-\pi}^{t} d\mu(s)$ es una función en $NBV[-\pi, \pi]$.

Por tanto, $f(t) = C + g(t)$ donde $g(t) = \int_{-\pi}^{t} d\mu(s)$ para casi toda t y para alguna medida de Borel μ en $[-\pi, \pi]$.

Por otra parte, si $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ entonces $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it})e^{ijt}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikt} \right) e^{ijt}dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+k)t}dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera, podemos integrar por partes para calcular los coeficientes de Fourier con frecuencias negativas de μ:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}d\mu(t) &= \frac{1}{2\pi}e^{ijt}g(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{ij}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}g(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}g(\pi)(e^{ij\pi} - e^{-ij\pi}) + \frac{Cij}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}dt - \frac{ij}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}F(e^{it})dt \\
&= -\frac{ij}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}F(e^{it})dt \\
&= \lim_{r\to 1}\left[\frac{-ij}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it})e^{ijt}dt\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Con lo anterior, hemos demostrado que los coeficientes de Fourier de μ correspondientes a frecuencias negativas son cero y por el Teorema de los hermanos Riesz, sabemos que $d\mu(t) = k(t)dt$ para alguna función $k(t)$ integrable en $[-\pi, \pi]$.

Así $g(t) = \int_{-\pi}^{t} k(s)ds$ y por tanto $g(t)$ es absolutamente continua. Luego, también $f(t)$ es absolutamente continua y se sigue el resultado. $\square$

2.3. Algunas Desigualdades Clásicas

A lo largo de esta sección demostraremos algunas desigualdades clásicas como la desigualdad de Hardy y la desigualdad de Fejér-Riesz. Además, estableceremos algunas relaciones entre el espacio H^1 y un subespacio de $L^1[-\pi, \pi]$.

Teorema 2.18 (Desigualdad de Hardy)**.** *Sea $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ una función en H^1. Entonces existe una constante C independiente de F tal que*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_j|}{j+1} \leq C\|F\|_{H^1}.$$

Demostración. Primero demostraremos el resultado con la hipótesis adicional de que $a_j \geq 0$ para toda j. Posteriormente, demostraremos que para cada F existe una función $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j z^j$ tal que $\|G\|_{H^1} \leq \|F\|_{H^1}$ y $|a_j| \leq A_j$ para toda $j = 0, 1, 2, \ldots$, con lo cual habremos terminado.

Supongamos pues, que los coeficientes a_j de F son no negativos y para cada $z \in D$ definamos $u(z) = Im[\log(1-z)]$, donde hemos elegido la rama principal del logaritmo.

Nótese que $u(z)$ es una función armónica en D que satisface $-\pi/2 < u(z) < \pi/2$, ya que $-\pi < arg(z) < \pi$.

Puesto que la expansión en serie de Taylor de $\log(1-z)$ es

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(-z)^j = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$$

tenemos la siguiente expresión para $u(z)$:

$$\begin{aligned}
u(re^{it}) &= \frac{1}{2i}\left[\log(1-re^{it}) - \overline{\log(1-re^{it})}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r^j e^{ijt})}{j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r^j e^{-ijt})}{j}\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r^j e^{ijt})}{j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r^j e^{-ijt})}{-j}\right] \\
&= \frac{i}{2} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{\infty} \frac{r^{|j|} e^{ijt}}{j}.
\end{aligned}$$

Así, para $r < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it})u(re^{it})dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j e^{ijt}\right)\left(\frac{i}{2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{r^{|k|}e^{ikt}}{k}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{-k} r^k r^{|-k|} dt \\
&= \frac{-i}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} r^{2k}
\end{aligned}$$

y dado que $a_j \geq 0$ tendremos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} r^{2k} = 2\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it})u(re^{it})dt\right| \leq \pi\|F\|_{H^1}.$$

Haciendo r tender a uno obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \leq \pi\|F\|_{H^1}.$$

Como $F(z)$ es la integral de Cauchy de su función frontera (Corolario 2.13), sabemos que

$$a_0 = F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})dt = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})dt\right| \leq \|F\|_{H^1}$$

y así

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{j+1} = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{j+1} \leq a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{j} \leq (1+\pi)\|F\|_{H^1}.$$

Veamos ahora como obtener G para demostrar el caso general. Sabemos que podemos escribir $F = F_1 \cdot F_2$ con $\|F_1\|_{H^2} = \|F_1\|_{H^2} = \|F\|_{H^1}^{1/2}$. Sean $\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ la expresión en series de F_1 y F_2, respectivamente y definamos $G_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty}|b_j|z^j$ y $G_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty}|c_j|z^j$. La caracterización dada en el Proposición 2.1 implica que

$$\|G_1\|_{H^2} = \left[\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|^2\right]^{1/2} = \|F_1\|_{H^2}$$
$$\|G_2\|_{H^2} = \left[\sum_{j=0}^{\infty}|c_j|^2\right]^{1/2} = \|F_2\|_{H^2}$$

Definamos ahora $G(z) = G_1(z)G_2(z)$, la desigualdad de Hölder asegura que G pertence a H^1, además

$$\|G\|_{H^1} \leq \|G_1\|_{H^2}\|G_2\|_{H^2} = \|F_1\|_{H^2}\|F_2\|_{H^2} = \|F\|_{H^1}.$$

Observemos también que la expansión en serie de Taylor de $G(z)$ es $\sum_{j=0}^{\infty} A_j z^j$ con $A_j = \sum_{k=0}^{j}|b_k||c_{j-k}|$, y como $a_j = \sum_{k=0}^{j} b_k c_{j-k}$, es claro que $|a_j| \leq A_j \; \forall j = 0, 1, 2, ...$

Por todo lo expuesto hasta aquí, podemos concluir que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{j+1} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_j}{j+1} \leq (1+\pi)\|G\|_{H^1} \leq (1+\pi)\|F\|_{H^1}.$$

□

El Teorema 2.11 implica que el mapeo $H^1 \to L^1([-\pi,\pi])$ tal que $F(z) \mapsto f(t) = F(e^{it})$ es una isometría lineal. Por medio de esta isometría, podemos identificar a H^1 con un subespacio de $L^1([-\pi,\pi])$ el cual denotaremos también por H^1. No habrá ambigüedades al llamar a estos espacios de la misma forma, por la manera en que hemos distinguido a las funciones holomorfas escribiéndolas con letras mayúsculas y sus funciones frontera con letras minúsculas o como $F(e^{it})$. Nótese también, que podemos pasar del espacio H^1 de funciones holomorfas al subespacio de $L^1([-\pi,\pi])$, tomando el límite radial de nuestra función analítica. Recíprocamente, para pasar del subespacio de $L^1([-\pi,\pi])$ a H^1, solamente necesitamos calcular la integral de Poisson de la función frontera para recuperar a nuestra función holomorfa. Lo anterior también será útil cuando estudiemos a H^p en general, como subespacio de $L^p([-\pi,\pi])$.

Obsérvese que si $F(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in H^1$, los coeficientes de Fourier de $f(t) = F(e^{it})$ serán $\hat{f}(j)=a_j$ si $j=0,1,2,\ldots$ y $\hat{f}(j)=0$ si $j<0$. De esta manera, podemos escribir la desigualdad de Hardy de la siguiente forma:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(j)|}{j+1} \leq C\|f\|_1.$$

En $L^1([-\pi,\pi])$ también podemos definir el subespacio ReH^1 como

$$ReH^1 = \{g \in L^1([-\pi,\pi]) : g = Re[f] \textit{ para alguna } f \in H^1\}.$$

Para establecer la desigualdad de Hardy en términos de funciones en ReH^1 necesitamos de la siguiente

Proposición 2.19. *Si $g \in ReH^1$, entonces existe una única función $F(z) \in H^1$ tal que $Re[F(e^{it})] = g(t)$ y $F(0) \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Dado que $g \in ReH^1$, existe $G(z) \in H^1$ tal que $g = Re[G(e^{it})]$. Por el Corolario 2.15

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} Re[G(e^{it})]dt + iIm[G(0)].$$

Definamos $F(z) = G(z) - iIm[G(0)]$, entonces $F(z)$ cumple con las condiciones deseadas, pues $F(e^{it}) = G(e^{it}) - iIm[G(0)]$ y esto implica que $Re[F(e^{it})] = Re[G(e^{it})] = g(t)$ y $F(0) = G(0) - iIm[G(0)] = Re[G(0)] \in \mathbb{R}$.

También F es única, pues si G y F son funciones en H^1 tales que $Re[G(e^{it})] =$

$Re[F(e^{it})] = g(t)$ y $F(0), G(0) \in \mathbb{R}$, por el Corolario 2.15 tendremos que

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} Re[G(e^{it})]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} g(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} Re[H(e^{it})]dt \\
&= F(z)
\end{aligned}$$

y por tanto $G(z) = F(z)$. □

Gracias a esta Proposición, se tiene una correspondencia biyectiva entre ReH^1 y las funciones $F(z) \in H^1$ tales que $F(0)$ es real. En virtud de lo anterior, para cada $g \in ReH^1$ podemos definir $\|g\|_{ReH^1} = \|F\|_{H^1}$.

Calculemos ahora los coeficientes de Fourier de $g \in ReH^1$. Si $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ es la función en H^1 con $F(0) \in \mathbb{R}$ que corresponde a $g(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{g}(j) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re[F(e^{it})]e^{-ijt}dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re[F(re^{it})]e^{-ijt}dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikt} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ikt}\right) e^{-ijt}dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} a_k r^k e^{i(k-j)t} + \sum_{k\leq 0} \overline{a_{-k}} r^k e^{i(k-j)t}\right) dt
\end{aligned}$$

y así

$$\hat{g}(j) = \begin{cases} \frac{\overline{a_{-j}}}{2} & si\ j < 0 \\ a_0 & si\ j = 0 \\ \frac{a_j}{2} & si\ j > 0. \end{cases}$$

Por tanto, podemos ver a la desigualdad de Hardy en términos de los coeficientes de Fourier de cualquier $g \in ReH^1$:

$$\sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{\infty} \left| \frac{\hat{g}(j)}{j} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{j} \leq C\|F\|_{H^1} = C\|g\|_{ReH^1}.$$

Por último, observemos que ReH^1 es un subespacio propio de $ReL^1([-\pi,\pi])$. Para demostrarlo, construiremos una función f que pertenece a $ReL^1([-\pi,\pi])$ cuya serie $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \dfrac{|\hat{f}(j)|}{j}$ es infinita y por tanto, dicha función no puede pertenecer a ReH^1.

Recordemos que si $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión convexa que converge a cero, entonces

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jt) \tag{2.7}$$

converge excepto posiblemente en $t = 0$, a una función integrable no negativa $f(t)$ cuya serie de Fourier es (2.7) (Ver [17], Cap. V).

Observemos ahora que la sucesión $(\frac{1}{\log j})_{j=2}^{\infty}$ es convexa y converge a cero, por lo cual

$$f(t) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\cos(jt)}{\log j}$$

es una función en $ReL^1([-\pi,\pi])$.

Sin embargo, $f(t) \notin ReH^1$: los coeficientes de Fourier de f son $\frac{1}{\log j}$ si $j > 1$ y cero si $j \leq 2$, además

$$\lim_{j\to\infty} \int_2^j \frac{dt}{t\log t} = +\infty$$

y por el criterio de la integral tenemos que

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{|\hat{f}(j)|}{j} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j\log j} = +\infty.$$

En el Capítulo 3 demostraremos que $ReH^p = ReL^p([-\pi,\pi])$ para $1 < p < \infty$. Aunque no lo probaremos aquí, la desigualdad de Hardy es una extensión a $p = 1$ de la desigualdad de Paley, la cual establece que para $f \in L^p([-\pi,\pi])$ con $1 < p \leq 2$ se tiene

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(j)|^p}{|j|^{2-p}} \leq C_p\|f\|_p^p.$$

Para finalizar este Capítulo, demostraremos la siguiente desigualdad, que resulta de interés porque compara la integral en el segmento $[-1,1]$ con la integral en el círculo de un elemento de H^p.

Teorema 2.20 (Desigualdad de Fejér-Riesz)**.** *Sea $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$, entonces*

$$\int_{-1}^{1} |F(x)|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt.$$

Demostración. Demostraremos primero el caso $p = 2$: tomemos $0 < r < 1$ y apliquemos el Teorema de Cauchy a la función holomorfa $F(z)\overline{F(\overline{z})}$, sobre el segmento $[-r, r]$ seguido del semicírculo $\{re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Obtendremos entonces

$$\int_{-r}^{r} |F(x)|^2 dx + ir \int_{0}^{\pi} F(re^{it})\overline{F(re^{-it})}e^{it} dt = 0$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{-r}^{r} |F(x)|^2 dx &= -ir \int_{0}^{\pi} F(re^{it})\overline{F(re^{-it})}e^{it} dt \\
&\leq r \int_{0}^{\pi} |F(re^{it})||F(re^{-it})| dt \\
&\leq \left[\int_{0}^{\pi} |F(re^{it})|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_{0}^{\pi} |F(re^{-it})|^2 dt \right]^{1/2} \\
&= \left[\int_{0}^{\pi} |F(re^{it})|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{0} |F(re^{it})|^2 dt \right]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_{0}^{\pi} |F(re^{it})|^2 dt + \int_{-\pi}^{0} |F(re^{it})|^2 dt \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^2 dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $r \to 1$ tenemos

$$\int_{-1}^{1} |F(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^2 dt.$$

Para demostrar el caso general, escribamos $F(z) = B(z)H(z)$ donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de F y $H \in H^p$ no tiene ceros en D y $\|H\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.

Para $z \in D$ definamos la función holomorfa $K(z) = \log H(z)$ y sea $G(z) = e^{\frac{p}{2}K(z)}$. Entonces

$$|G(z)|^2 = |e^{K(z)}|^p = |H(z)|^p$$

y por tanto $\|G\|_{H^2}^2 = \|H\|_{H^p}^p = \|F\|_{H^p}^p$. Consecuentemente

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |F(x)|^p dx \leq \int_{-1}^{1} |H(x)|^p dx = \int_{-1}^{1} |G(x)|^2 dx \\ \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{it})|^2 dt = \frac{2\pi}{2}\|G\|_{H^2}^2 \\ = \frac{2\pi}{2}\|F\|_{H^p}^p = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt.\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

La Función Conjugada

Se sabe que en una región simplemente conexa Ω, una función u con valores reales, es armónica si y sólo si existe una función F holomorfa en Ω tal que $Re[F(z)] = u(z)$. De lo anterior, también podemos concluir que toda función armónica en Ω tiene un conjugado armónico, a saber, $v(z) = Im[F(z)]$. En virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, este conjugado armónico estará determinado de manera única salvo una constante aditiva.

Ahora bien, si f es una función integrable en $[-\pi, \pi]$, su integral de Poisson $u = P(f)$, resulta ser una función armónica (Consultar Apéndice). Podemos entonces denotar por v al conjugado armónico de u determinado por la condición $v(0) = 0$ y estudiar el límite

$$\lim_{r \to 1} v(re^{it}). \tag{3.1}$$

Observemos primero, que el límite en (3.1) efectivamemente existe: si escribimos $f = f^+ - f^-$ podemos restringir nuestra atención al caso $f \geq 0$, lo cual implica que $u \geq 0$ y la existencia del límite se seguirá del siguiente Teorema.

Teorema 3.1. *Sea $F(z)$ una función holomorfa en D tal que $Re[F(z)] \geq 0$ para toda $z \in D$. Entonces, F tiene límites no tangenciales casi en todo punto frontera.*

Demostración. Para cada $z \in D$, definamos $G(z) = [1 + F(z)]^{-1}$. Dado que

$$1 \leq Re[1 + F(z)] \leq |1 + F(z)|$$

se tiene que $|G(z)| \leq 1 \; \forall z \in D$ y por tanto $G \in H^\infty$.

De acuerdo con el Teorema de Fatou

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z \to e^{it}}} G(z) = G(e^{it})$$

existe y es distinto de cero para casi toda t. Pero $F(z) = G^{-1}(z) - 1$ y por tanto

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z \to e^{it}}} F(z) = F(e^{it})$$

existe casi en todas partes y es igual a $G^{-1}(e^{it}) - 1$. $\square$

Ahora es posible dar la siguiente definición sin ningún tipo de ambigüedades:

Definición 3.2. *Sea $f(t)$ una función 2π-periódica integrable en $[-\pi, \pi]$. Sea $u(re^{it})$ su integral de Poisson y sea $v(re^{it})$ el conjugado armónico de u determinado de manera única por la condición $v(0) = 0$. Definimos la función conjugada de f como*

$$\tilde{f}(t) = \lim_{r \to 1} v(re^{it}).$$

3.1. La Desigualdad de Marcel Riesz

En esta sección demostraremos el Teorema de Marcel Riesz, el cual establece que el operador función conjugada ($f \mapsto \tilde{f}$) es acotado en $L^p([-\pi, \pi])$ para $p \in (1, \infty)$. El operador función conjugada también se conoce como la Transformada de Hilbert en el círculo. El siguiente Teorema será pieza clave en la prueba del Teorema de Marcel Riesz:

Teorema 3.3. *Para cada $p \in (1, 2]$ existe una constante C_p tal que para cada función $F(z) = u(z) + iv(z)$ holomorfa en D, con $u(z) > 0$ en D, v real valuada y $v(0) = 0$, la desigualdad*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt \leq C_p \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt$$

se satisface para toda $r \in (0, 1)$.

Demostración. Dado que $Re[F(z)] > 0$, podemos escribir $F(z) = |F(z)| e^{i\varphi(z)}$ donde $\varphi(z) = \arg(F(z))$. Podemos escribir también $u(z) = |F(z)| \cos \varphi(z)$ y $v(z) = |F(z)| \operatorname{sen} \varphi(z)$.

Si demostramos que existen constantes positivas C_p y D_p para las cuales se verifica

$$|\operatorname{sen}\theta|^p \leq C_p|\cos\theta|^p - D_p\cos(p\theta) \;\; si \; |\theta| < \frac{\pi}{2} \tag{3.2}$$

el Teorema quedaría probado, pues

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt &= \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p |\operatorname{sen}(\varphi(re^{it}))|^p dt \\
&\leq C_p \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p |\cos(\varphi(re^{it}))|^p dt - D_p \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p \cos(p\varphi(re^{it}))dt \\
&= C_p \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt - D_p \int_{-\pi}^{\pi} Re[F^p(re^{it})]dt \\
&= C_p \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt - 2\pi D_p Re[F^p(0)] \\
&\leq C_p \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt.
\end{aligned}$$

Probemos ahora (3.2): elijamos δ de modo que $\pi/2 < p(\pi/2 - \delta)$. Entonces si $\pi/2 - \delta < |\theta| < \pi/2$ tendremos

$$\frac{\pi}{2} < p\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) < |p\theta| < \pi.$$

En consecuencia, $\cos(p\theta) = cos|p\theta| \leq \cos\left(p\left[\frac{\pi}{2} - \delta\right]\right) < 0$ y así $0 < -\cos\left(p\left[\frac{\pi}{2} - \delta\right]\right) \leq -\cos|p\theta|$.

Puesto que $|\operatorname{sen}\theta|^p < 1$, podemos tomar $D_p > 0$ suficientemente grande tal que para $\pi/2 - \delta < |\theta| < \pi/2$ se satisfaga

$$|\operatorname{sen}\theta|^p < D_p(-\cos|p\theta|) \leq K|\cos\theta|^p - D_p\cos(p\theta)$$

donde K es cualquier constante positiva.

Veamos qué hacer cuando $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$: en este caso, tenemos que

$$0 < \operatorname{sen}\delta = \cos(\frac{\pi}{2} - \delta) \leq \cos|\theta| = \cos\theta.$$

Así, podemos elegir $C_p > 0$ suficientemente grande, de manera que $1 \leq C_p(\operatorname{sen}\delta)^p - D_p$. Luego

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}\theta|^p < 1 &\leq C_p(\operatorname{sen}\delta)^p - D_p \\
&\leq C_p|\cos\theta|^p - D_p\cos(p\theta).
\end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que si $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, existen constantes C_p y D_p tales que

$$|\operatorname{sen}\theta|^p \leq C_p|\cos\theta|^p - D_p\cos(p\theta)$$

y por tanto, el Teorema queda demostrado. $\square$

Como Corolario obtenemos el acotamiento del operador $L^p([-\pi,\pi]) \to L^p([-\pi,\pi])$ tal que $f \mapsto \tilde{f}$.

Corolario 3.4 (Desigualdad de Marcel Riesz)**.** *Para cada* $1 < p < \infty$*, existe una constante* B_p *tal que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^p dt \leq B_p \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt$$

para toda $f \in L^p([-\pi,\pi])$*.*

Demostración. Probaremos primero el Corolario para $f \in L^p([-\pi,\pi])$ con $p \in (1,2]$. Debido a que

$$|\alpha - \beta|^p \leq \text{máx}\{1, 2^{p-1}\}(|\alpha|^p + |\beta|^p)$$

bastará probar el resultado para aquellas funciones que sólo toman valores reales. Más aún, la linealidad del operador función conjugada nos permitirá asumir que $f \geq 0$, no idénticamente cero.

Denotemos por u a la integral de Poisson de f y por v a su conjugado armónico que satisface $v(0) = 0$. Dado que $\tilde{f}(t) = \lim\limits_{r\to 1} v(re^{it})$, el lema de Fatou implica que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^p dt &\leq \liminf_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt \\
&\leq C_p \liminf_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \\
&\leq C_p \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se sigue del Teorema 3.3. Lo anterior, prueba la desigualdad de Marcel Riesz para $1 < p \leq 2$.

Pasemos ahora al caso $2 < p < \infty$. Denotemos por p' al exponente conjugado de p, claramente $1 < p' < 2$. De nuevo, denotemos por u a la integral de Poisson de f y por v al conjugado armónico de u que se anula en cero.

Nótese que para $r < 1$, gracias al Teorema de Representación de Riesz, podemos escribir

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt = \sup \left\{ \left| \int_{-\pi}^{\pi} v(re^{it}) g(t) dt \right| : g \in L^{p'}([-\pi, \pi]), 2\pi \|g(t)\|_{p'} \leq 1 \right\}. \quad (3.3)$$

Afirmamos que para toda $g \in L^{p'}([-\pi, \pi])$ con $2\pi \|g(t)\|_{p'} \leq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{it}) g(t) dt = -\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) \tilde{g}(t) dt. \quad (3.4)$$

En efecto: supongamos que $g \geq 0$. Sea $h = P(g)$ y denotemos por $w(z)$ al conjugado armónico de h que se anula en cero. Obsérvese que para $0 < s < 1$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} [v(rse^{it}) h(se^{it}) + u(rse^{it}) w(se^{it})] dt = 0 \quad (3.5)$$

ya que $v(rz)h(z) + u(rz)w(z)$ es una función armónica (es la parte imaginaria de una función holomorfa) que se anula en cero.

Como $p' \in (1, 2]$, podemos aplicar el Teorema 3.3 a la función holomorfa $h(z) + iw(z)$ para obtener

$$\int_{-\pi}^{\pi} |w(re^{it})|^{p'} dt \leq C_{p'} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{it})|^{p'} dt$$

y puesto que h está uniformemente en $L^{p'}([-\pi, \pi])$, también lo hace w, aún más $h = P(\tilde{g})$ pues $\lim_{s \to 1} w(se^{it}) = \tilde{g}(t)$.

Tenemos entonces que $h(se^{it})$ converge a $g(t)$ y $w(se^{it})$ converge a $\tilde{g}(t)$ cuando s tiende a uno en $L^{p'}([-\pi, \pi])$. De (3.5) se sigue que si $s \to 1$, entonces

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} [v(rse^{it}) h(se^{it}) + u(rse^{it}) w(se^{it})] dt \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [v(re^{it}) g(t) + u(re^{it}) \tilde{g}(t)] dt$$

pues $u(rse^{it})$ y $v(rse^{it})$ convergen uniformemente en t a $u(re^{it})$ y $v(re^{it})$, respectivamente, y además las cuatro funciones son acotadas.

Lo anterior implica la afirmación en (3.4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{it}) g(t) dt = -\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) \tilde{g}(t) dt.$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it})\tilde{g}(t)dt\right| &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p\right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{g}(t)|^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{g}(t)|^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\leq B_{p'}^{1/p'} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\leq B_{p'}^{1/p'} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

De lo anterior y en virtud de (3.3) y (3.4) tenemos que

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt\right]^{1/p} \leq B_{p'}^{1/p'} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right]^{1/p}.$$

Finalmente, usando el Lema de Fatou tendremos

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^p dt\right]^{1/p} \leq B_{p'}^{1/p'} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right]^{1/p}$$

con lo cual queda demostrado el corolario. □

Aunque no lo demostraremos en este trabajo, es importante mencionar que una consecuencia de la Desigualdad de Marcel Riesz es la convergencia en norma $\|\cdot\|_p$ de la serie de Fourier de $f \in L^p([-\pi,\pi])$ a f (Ver [10], p.49).

Corolario 3.5. *Si $F \in H^p$, con $1 < p < \infty$, entonces para cada $0 \leq r < 1$ se satisface*

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Im[F(re^{it})]|^p dt\right]^{1/p} \leq B_p^{1/p} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Re[F(re^{it})]|^p dt\right]^{1/p} + |Im[F(0)]|.$$

Demostración. Sea $u = Re[F]$ y sea v el conjugado armónico de u que se anula en cero. Es claro que

$$Im[F(z)] = v(z) + Im[F(0)].$$

Para $s<1$ fijo, podemos escribir

$$u(rse^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)Re[F(se^{it})]dt$$
$$v(rse^{i\theta}) = Im[F(rse^{it})] - Im[F(0)].$$

Nótese que la función conjugada de $u(se^{it})$ es $v(se^{it}) = Im[F(se^{it})] - Im[F(0)]$ y por la desigualdad de Marcel Riesz

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Im[F(re^{it})] - Im[F(0)]|^p dt\right]^{1/p} \leq B_p^{1/p}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Re[F(re^{it})]|^p dt\right]^{1/p}.$$

De donde se sigue que

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Im[F(re^{it})]|^p dt\right]^{1/p} - |Im[F(0)]| \leq B_p^{1/p}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Re[F(re^{it})]|^p dt\right]^{1/p}.$$

$\square$

3.2. El Operador Función Conjugada en $L^1([-\pi,\pi])$

La Desigualdad de Marcel Riesz no puede extenderse a $L^1([-\pi,\pi])$ ni a $L^\infty([-\pi,\pi])$, sin embargo, en $L^1([-\pi,\pi])$ podemos demostrar resultados sobre el comportamiento del operador función conjugada. Por el momento daremos una fórmula para calcular el conjugado armónico de $u = P(f)$ cuando f es real valuada.

Sabemos que si u es una función armónica en $D(0,R)$ que toma valores reales, entonces tiene una representación en series como $u(re^{i\theta}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r^{|j|} e^{ij\theta}$, la cual converge uniformemente en compactos de $D(0,R)$.

Nuestro objetivo es encontrar $v(re^{i\theta})$, el conjugado armónico de $u(re^{i\theta})$ tal que $v(0)=0$. El conjugado armónico v, debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r} \ y \ \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} |j| a_j r^{|j|-1} e^{ij\theta} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} |j| a_j r^{|j|} e^{ij\theta}$$

y consecuentemente

$$v(re^{i\theta}) = -i\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \frac{|j|}{j} a_j r^{|j|} e^{ij\theta} + \psi(r). \tag{3.6}$$

También tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} ija_j r^{|j|} e^{ijt}. \tag{3.7}$$

Derivando con respecto a r en (3.6) e igualando a (3.7) se obtiene

$$-i\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \frac{|j|}{j}|j|a_j r^{|j|-1} e^{ij\theta} + \psi'(r) = -\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} ija_j r^{|j|-1} e^{ij\theta}$$

y de lo anterior, se concluye que $\psi(r) = C$. Como $v(0) = 0$, se tiene que C debe ser cero y entonces

$$v(re^{i\theta}) = -i\sum_{j\in\mathbb{Z}} sgn(j) a_j r^{|j|} e^{ij\theta}$$

donde $sgn(0) = 0$.

Veamos ahora que sucede cuando $u = P(\mu)$ con μ una medida de Borel en $[-\pi, \pi]$. Sabemos que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Como $P_r(\theta - t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ij(\theta - t)}$, se sigue que

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r^{|j|} e^{ij\theta}$$

donde a_j es el coeficiente de Fourier de μ correspondiente a la frecuencia j. En consecuencia

$$\begin{aligned} v(re^{i\theta}) &= -i\sum_{j\in\mathbb{Z}} sgn(j) a_j r^{|j|} e^{ij\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\sum_{j\in\mathbb{Z}} isgn(j) r^{|j|} e^{ij(\theta - t)} d\mu(t). \end{aligned}$$

Denotemos por $Q_r(\theta)$ a la serie $-\sum_{j\in\mathbb{Z}} isgn(j) a_j r^{|j|} e^{i\theta}$. Es sencillo ver que

$$Q_r(\theta) = \frac{2r \operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Por consiguiente, tendremos que

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r\operatorname{sen}(\theta - t)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}d\mu(t). \tag{3.8}$$

Proposición 3.6. *La función $Q_r(\theta)$ definida anteriormente, se llama Núcleo de Poisson Conjugado y tiene las siguientes propiedades:*

i) $Q_r(\theta)$ *es una función impar.*

ii) $Q_r(\theta) \leq 0$ *si* $\theta \in [-\pi, 0]$ *y* $Q_r(\theta) \geq 0$ *si* $\theta \in [0, \pi]$.

iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta)d\theta = 0.$

iv) $\displaystyle\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |Q_r(\theta)|d\theta = \infty.$

Demostración. El inciso *i)* se tiene porque $\operatorname{sen}\theta$ es impar y $\cos\theta$ es par, *ii)* es válido porque el numerador en $Q_r(\theta)$ siempre es mayor que cero, $\operatorname{sen}\theta \leq 0$ en $[-\pi, 0]$ y $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ en $[0, \pi]$. El inciso *iii)* se sigue trivialmente de *i)*.

Finalmente, de *ii)* y *ii)* se tiene que $\int_{-\pi}^{\pi} |Q_r(\theta)|d\theta = 2\int_0^{\pi} Q_r(\theta)d\theta$. Pero

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1} 2\int_0^{\pi} Q_r(\theta)d\theta &= \lim_{r\to 1} 2\log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\Big|_0^{\pi} \\
&= \lim_{r\to 1} 4\log\frac{1+r}{1-r} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.7. *La proposición anterior, nos permitirá mostrar que el operador función conjugada no es acotado en $L^1([-\pi,\pi])$:*

Para $0 \leq r < 1$, consideremos las funciones $f(t) = P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$ las cuales pertenecen a $L^1([-\pi,\pi])$. Consideremos también la medida $d\mu(t) = f(t)dt$.

El conjugado armónico de $u = P(f)$ es

$$\begin{aligned}
v(se^{i\theta}) &= -i \sum_{j\in\mathbb{Z}} sgn(j) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} P_r(t)dt \right] s^{|j|} e^{ij\theta} \\
&= -i \sum_{j\in\mathbb{Z}} sgn(j) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{it(k-j)} dt \right] s^{|j|} e^{ij\theta} \\
&= -i \sum_{j\in\mathbb{Z}} sgn(j) r^{|j|} s^{|j|} e^{ij\theta} \\
&= \frac{2rs \operatorname{sen}\theta}{1 - 2sr\cos\theta + (sr)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\tilde{P}_r(\theta) = \lim_{s\to 1} v(se^{i\theta}) = Q_r(\theta)$.

Recordemos ahora que para toda $r \in [0,1)$ se tiene $\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 2\pi$. Ahora bien, si el operador función conjugada fuera acotado en $L^1([-\pi,\pi])$, existiría una constante $M > 0$ tal que

$$\|\tilde{f}\|_1 \leq M\|f\|_1 \ \forall f \in L^1([-\pi,\pi]).$$

En particular, se tendría que

$$\|Q_r\|_1 \leq M\|P_r\|_1 = M \ \forall r \in [0,1)$$

lo cual contradice *iv)* en la Proposición 3.6.

Observación 3.8. *El operador función conjugada tampoco es continuo en* $L^\infty([-\pi,\pi])$*:*

Si lo fuera, tendríamos que $\sim^t$: $(L^\infty([-\pi,\pi]))^* \to (L^\infty([-\pi,\pi]))^*$ también sería acotado. Como $L^1([-\pi,\pi])$ se encuentra isométricamente inmerso en el dual de $L^\infty([-\pi,\pi])$, lo anterior implicaría la continuidad del operador función conjugada en $L^1([-\pi,\pi])$, pero por la observación 3.7 esto no es posible.

Las observaciones anteriores nos impiden extender el Corolario 3.4 a los casos $p = 1$ y $p = \infty$. Sin embargo, tenemos un resultado sustituto para el caso $p = 1$:

Teorema 3.9 (Kolmogorov)**.** *El operador función conjugada es de tipo débil (1,1), es decir, existe $C > 0$, tal que para cada $f \in L^1([-\pi,\pi])$ y cada $\lambda > 0$, la medida de Lebesgue del conjunto*

$$E_\lambda = \{t \in [-\pi,\pi] : |\tilde{f}(t)| > \lambda\}$$

satisface

$$|E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

De esta manera, $|E_\lambda|$ tiende a cero si λ tiende a infinito.

Demostración. Supongamos primero que $f \geq 0$ con $\|f\|_1 = 1$ y fijemos $\lambda > 0$. Consideremos ahora a la función $\varphi(z) = \frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}$, entonces $\varphi(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : Re[z] > 0\}$. Más aún, $\varphi(z)$ es conforme en dicho conjunto, pues $\varphi'(z) = \frac{2i\lambda}{(z+i\lambda)^2} \neq 0$.

Notemos ahora que $\varphi(z)$ transforma el semiplano $Re[z] > 0$ en el semiplano $Im[z] < 0$: si $z = x + iy$, entonces

$$\varphi(x+iy) = \frac{x^2+y^2-\lambda^2-2ix\lambda}{x^2+(y+\lambda)^2}. \tag{3.9}$$

Si hacemos que x tienda a cero en (3.9), tendremos que $\varphi(z)$ tenderá a $\frac{y-\lambda}{y+\lambda}$, por lo que deducimos que la frontera de $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : Re[z] > 0\})$ es el eje real. Además, si tomamos $z_0 = \lambda$, tendremos que $\varphi(z_0) \in \{z \in \mathbb{C} : Im[z] < 0\}$, como $\varphi(z)$ es un mapeo conforme, podemos concluir que $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : Re[z] > 0\}) = \{z \in \mathbb{C} : Im[z] < 0\}$ (Consultar [12], p. 322).

Podemos determinar a la función $\arg(z)$ de forma que para $z \in \{z \in \mathbb{C} : Im[z] < 0\}$ se tenga $-\pi < \arg(z) < 0$. En $\{z \in \mathbb{C} : Re[z] > 0\}$, definamos $h_\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\varphi(z)$.

Nótese que $h_\lambda(z)$ armónica, pues es la parte imaginaria de una función holomorfa. Además $0 < h_\lambda(z) < 1\ \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : Re[z] > 0\}$.

Afirmamos que las curvas de nivel de $h_\lambda(z)$ son arcos de círculos que pasan por $\pm i\lambda$.

En efecto: si $h_\lambda(z) = k$, entonces

$$\arg\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda} = \pi(k-1).$$

De manera que $\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}$ representa una semirecta con argumento $\pi(k-1)$, digamos que

$$\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda} = te^{i\theta_k}\ t > 0, \theta_k = \pi(k-1).$$

La expresión anterior implica que

$$z = i\lambda\left[\frac{1+te^{i\theta_k}}{1-te^{i\theta_k}}\right]. \tag{3.10}$$

Así, z es la imagen de la semirecta real positiva bajo la transformación de Möbius $i\lambda\left[\frac{1+te^{i\theta_k}}{1-te^{i\theta_k}}\right]$ y por tanto, los puntos z se encuentran sobre una recta o un círculo (Ver [12], Prop. 5.2.3 p. 330). Observemos que la expresión en (3.10) no corresponde a la parametrización de una recta, por lo que necesariamente los puntos z corresponden a un arco de círculo. Cada uno de los círculos mencionados anteriormente pasan por $\pm i\lambda$.

En particular, para $k = 1/2$ tendremos $\theta_k = \pi/2$ y $z = \lambda\left[\frac{2t}{1+t^2} + i\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]$. Como

$$\left|\frac{2t}{1+t^2} + i\frac{1-t^2}{1+t^2}\right| = 1$$

y $Re[z] = \frac{2t}{1+t^2} > 0$, estamos en el semicírculo $\{\lambda e^{it} : -\pi/2 < t < \pi/2\}$. Así, $h_\lambda(z) = 1/2$ si y sólo si $Re[z] > 0$ y $|z| = \lambda$. Luego, $Re[z] > 0$ y $|z| \geq \lambda$ implican que $h_\lambda(z) \geq 1/2$.

También es conveniente observar que

$$\begin{aligned} h_\lambda(1) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} &= 1 + \frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} - i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\lambda \\ &= \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \arg\lambda) \\ &\leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de las siguientes afirmaciones: como $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi/2 - \arctan x) = 0$, $\exists M > 0$ tal que $x \geq M$ implica que $\pi/2 - \arctan x < 1/x$. Si para $x > 0$ definimos $G(x) = 1/x + \arctan x - \pi/2$, tendremos que $G'(x) < 0\ \forall x > 0$ y por tanto $G(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$. Luego $G(x) \geq G(M) > 0$ si $0 < x < M$, pero esto implica que $1/x + \arctan x - \pi/2 = G(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Denotemos ahora por u a la integral de Poisson de f y sea v el conjugado armónico de u determinado por la condición $v(0) = 0$. Puesto que $u(z) \geq 0\ \forall z \in D$, podemos considerar la función armónica no negativa $h_\lambda(u(z) + iv(z))$ y por la Propiedad del Valor Medio tendremos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_\lambda(u(re^{it}) + iv(re^{it}))dt = h_\lambda(u(0)) = h_\lambda(1) \leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda}.$$

La tercera igualdad, se tiene por que $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_0(t)f(t)dt = 1$.

Por otra parte, si $|v(re^{it})| > \lambda$, entonces $|u(re^{it})+iv(re^{it})| > \lambda$ y consecuentemente $h_\lambda(u(re^{it}) + iv(re^{it})) > 1/2$.

De esta forma, si definimos el conjunto $A_\lambda = \{t \in [-\pi,\pi] : |v(re^{it})| > \lambda\}$ tendremos

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}|A_\lambda| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{A_\lambda} h_\lambda(u(re^{it}) + iv(re^{it}))dt \leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda}$$

y así $|A_\lambda| \leq \frac{8}{\lambda}$.

Tomemos ahora una sucesión $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ en $(0,1)$ tal que $r_j \uparrow 1$. Como $\tilde{f}(t) = \lim\limits_{r\to 1} v(re^{it})$, sabemos que $|\tilde{f}(t)| > \lambda$ si y sólo si $\exists J \in \mathbb{N}$ tal que $|v(r_je^{it})| > \lambda\ \forall j \geq J$, pero esto es equivalente a que $t \in \cup_{k=1}^{\infty}\cap_{j=k}^{\infty}\{\theta : |v(r_je^{i\theta})| > \lambda\}$.

Luego, $|E_\lambda| = |\cup_{k=1}^{\infty}\cap_{j=k}^{\infty}\{\theta : |v(r_je^{i\theta})| > \lambda\}|$ y como $\cap_{j=k}^{\infty}\{\theta : |v(r_je^{i\theta})| > \lambda\}$ es creciente, se sigue que

$$|E_\lambda| = \lim_{k\to\infty} |\cap_{j=k}^{\infty}\{\theta : |v(r_je^{i\theta})| > \lambda\}| \leq \frac{8}{\lambda} = \frac{8}{\lambda}\|f\|_1 = \frac{4}{\lambda}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

Con esto queda probada la desigualdad de Kolmogorov para el caso $f \geq 0$ con $C = 4$.

Ahora bien, si f es real, podemos escribir $f = f^+ - f^-$ y observar que

$$\begin{aligned}|\{t : |\tilde{f}(t)| > \lambda\}| &\leq |\{t : |\tilde{f^+}(t)| > \lambda/2\}| + |\{t : |\tilde{f^-}(t)| > \lambda/2\}| \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\|f^+\|_1 + \leq \frac{C}{\lambda}\|f^-\|_1 \\ &\leq \frac{2C}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Basta usar la linealidad del operador función conjugada para mostrar el caso $\|f\|_1 \neq 1$ y el caso en que $f(t)$ toma valores en los complejos. $\square$

Aun cuando el operador función conjugada no es continuo en $L^1([-\pi,\pi])$, es acotado de $L^1([-\pi,\pi])$ en $L^p([-\pi,\pi])$ para $p \in (0,1)$, para demostrarlo, necesitamos del siguiente

Lema 3.10. *Para cada $f \in L^p([-\pi,\pi])$, con $0 < p < \infty$ se satisface*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt = p\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{p-1}m_f(\lambda)d\lambda$$

donde $m_f(\lambda) = |\{t \in [-\pi,\pi] : |f(t)| > \lambda\}|$ y λ es mayor que cero.

Demostración. Observemos primero que $m_f(\lambda) = |\{t \in [-\pi,\pi] : |f(t)| > \lambda\}| = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(\lambda,\infty)}(|f(t)|)dt$. También notemos que $\forall t \in [-\pi,\pi]$

$$|f(t)|^p dt = \int\limits_0^{|f(t)|} pu^{p-1} du = \int\limits_0^{\infty} pu^{p-1}\chi_{(0,|f(t)|)}(u)du.$$

Finalmente, usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} pu^{p-1}\chi_{(0,|f(t)|)}(u)du\right] dt \\
&= \int\limits_0^{\infty} pu^{p-1} \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \chi_{(0,|f(t)|)}(u)dt\right] du \\
&= \int\limits_0^{\infty} pu^{p-1} \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \chi_{(u,\infty)}(|f(t)|)dt\right] du \\
&= \int\limits_0^{\infty} pu^{p-1} m_f(u)du.
\end{aligned}$$

□

Podemos ahora demostrar el siguiente resultado:

Corolario 3.11. *Para cualquier $f \in L^1([-\pi,\pi])$ y para toda $p \in (0,1)$ se verifica*

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^p dt\right]^{1/p} \leq C(1-p)^{-1/p}\left[\frac{1}{2\pi}|f(t)|dt\right]$$

donde C es la misma constante que aparece en el Teorema (3.9).

Demostración. Tomemos $\lambda_0 = \frac{C}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$ con C como en el Teorema 3.9. Entonces usando el Lema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^p dt &= p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1}|E_\lambda| d\lambda \\
&= p \int_0^{\lambda_0} \lambda^{p-1}|E_\lambda| d\lambda + p \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{p-1}|E_\lambda| d\lambda \\
&\leq 2\pi p \int_0^{\lambda_0} \lambda^{p-1} d\lambda + p \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{p-2} C \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \right) d\lambda \\
&= 2\pi\lambda_0^p + \frac{2\pi p \lambda_0 \lambda_0^{p-1}}{1-p} \\
&= \frac{2\pi\lambda_0^p}{1-p} \\
&= \frac{2\pi}{1-p} \left[\frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \right]^p
\end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq C(1-p)^{-1/p} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

□

Gracias al corolario anterior podremos demostrar que el conjugado armónico de la integral de Poisson de una función f en $L^1([-\pi,\pi])$ también cuenta con una representación como integral de Poisson, en este caso, de la función conjugada de f. Esta representación nos permitirá estudiar a los subespacios H^p y ReH^p en $L^p([-\pi,\pi])$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Corolario 3.12. *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$ tal que $\tilde{f} \in L^1([-\pi,\pi])$ y sea $u = P(f)$. Denotemos por v al conjugado armónico de u determinado por la condición $v(0) = 0$, entonces $v = P(\tilde{f})$.*

Demostración. Como el operador función conjugada es lineal, podemos suponer que $f \geq 0$. De esta manera, tendremos que $u = P(f)$ será armónica y no negativa. Luego, existe una función F holomorfa en D tal que $u = Re[F]$.

Para cada $r \in (0,1)$ consideremos las funciones $u(re^{it})$ y $v(re^{it})$ donde $v(re^{it})$ es la función conjugada de $u(re^{it})$. Aplicando el corolario anterior a estas funciones obtenemos que $\forall r \in (0,1)$ y toda $p \in (0,1)$

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt\right]^{1/p} \leq C(1-p)^{-1/p}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|dt.$$

Esto implica que

$$\sup_{r\in(0,1)} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt\right]^{1/p} < \infty.$$

También

$$\sup_{r\in(0,1)} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt\right]^{1/p} < \infty$$

pues $\forall r \in (0,1)$ y $\forall p \in (0,1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

El hecho de que ambos supremos sean finitos, asegura que la función holomorfa $u+iv$ pertence a H^p $\forall p \in (0,1)$ y por el Teorema 2.11 existe su función frontera, más aún,

$$\lim_{r\to 1}(u(re^{it}) + iv(re^{it})) = f(t) + i\tilde{f}(t) \in L^1([-\pi,\pi]).$$

Ahora bien, como la función frontera de $u+iv$ pertence a $L^1([-\pi,\pi])$, el Corolario 2.12 afirma que $u+iv \in H^1$ y así $u+iv = P(f) + iP(\tilde{f})$. Se sigue entonces que $v = P(\tilde{f})$. $\square$

En la Sección 2.3 del Capítulo 2 estudiamos a H^1 como subespacio de $L^1([-\pi,\pi])$, siendo este subespacio la imagen de H^1 bajo la isometría

$$\begin{aligned} H^1 &\to L^1([-\pi,\pi]) \\ F(z) &\mapsto F(e^{it}). \end{aligned}$$

Definimos también al espacio ReH^1, el cual consta de las funciones frontera que son la parte real de funciones en H^1. De forma análoga podemos ver a H^p y ReH^p

para $1 \leq p \leq \infty$, como subespacios de $L^p([-\pi,\pi])$ y con lo que hasta ahora hemos estudiado sobre el operador función conjugada, daremos una descripción de estos espacios en términos de la función conjugada.

Teorema 3.13. *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *entonces*

i) $H^p = \{f + i\tilde{f} + ic : f \in ReL^p([-\pi,\pi]), c \in \mathbb{R}\}$ *y* $ReH^p = ReL^p([-\pi,\pi])$ *cuando* $1 < p < \infty$.

ii) $H^1 = \{f + i\tilde{f} + ic : f \in ReL^1([-\pi,\pi]),\ \tilde{f} \in L^1([-\pi,\pi]),\ c \in \mathbb{R}\}$ *y* $ReH^1 \subset ReL^1([-\pi,\pi])$.

iii) $H^\infty = \{f + i\tilde{f} + ic : f \in ReL^\infty([-\pi,\pi]),\ \tilde{f} \in L^\infty([-\pi,\pi]),\ c \in \mathbb{R}\}$ *y* $ReH^\infty \subset ReL^\infty([-\pi,\pi])$.

Demostración. Sea $F(e^{it}) \in H^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ y sea $F(z)$ la función holomorfa en H^p correspondiente a $F(e^{it})$. Si denotamos por $u(z)$ a la parte real de $F(z)$, entonces $Im[F(z)] = v(z) + Im[F(0)]$, donde $v(z)$ es el conjugado armónico de $u(z)$ que se anula en cero. Llamemos

$$f(t) = \lim_{r\to 1} u(re^{it}) = Re[F(e^{it})]$$
$$\tilde{f}(t) = \lim_{r\to 1} v(re^{it}) = Im[F(e^{it})] - c$$

con $c = Im[F(0)]$. De esta manera, podemos escribir $F(e^{it}) = f(t) + i\tilde{f} + ic$. Hemos mostrado que toda función en H^p, para $1 \leq p \leq \infty$, tiene la forma $f + i\tilde{f} + ic$ para alguna función $f \in ReL^p([-\pi,\pi])$ con $\tilde{f}(t) \in L^p([-\pi,\pi])$ y alguna constante $c \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente, sea $f \in ReL^p([-\pi,\pi])$ con $1 \leq p \leq \infty$ tal que $\tilde{f} \in L^p([-\pi,\pi])$ (para $p \in (1,\infty)$ no es necesario pedir esta condición, pues la Desigualdad de Marcel Riesz asegura que $\tilde{f} \in L^p([-\pi,\pi])$ siempre que $f \in L^p([-\pi,\pi])$). Denotemos por u a la integral de Poisson de f y por v al conjugado armónico de u tal que $v(0) = 0$. Como $f \in L^p([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$, el Corolario 3.12 afirma que $v = P(\tilde{f})$. Así $u + iv \in H^p$ y en consecuencia su función frontera $f + i\tilde{f} \in H^p$.

El argumento en el párrafo anterior también implica que para $1 < p < \infty$ $ReL^p([-\pi,\pi]) \subset ReH^p$ y puesto que ReH^p está contenido en $ReL^p([-\pi,\pi])$, se concluye que $ReL^p([-\pi,\pi]) = ReH^p$.

Que la contención es propia en *ii)* lo demostramos cuando definimos al espacio ReH^1 en los cometarios hechos despues de demostrar la Desigualdad de Hardy. Ahora, si la contención no fuera propia en *iii)*, esto implicaría el acotamiento del operador función conjugada en $L^\infty([-\pi,\pi])$, lo cual sabemos que es imposible. □

3.3. El Operador Función Conjugada como Integral Singular

Hasta ahora, hemos definido y calculado a la función conjugada como un límite desde el interior del disco unitario. Para finalizar con nuestra discusión sobre el operador función conjugada, veremos como definirlo ya no desde el interior del disco, sino en su frontera como una integral singular.

Al iniciar el Capítulo definimos $\tilde{f} = \lim\limits_{r\to 1} v(re^{it})$ y de acuerdo a la fórmula (3.8)

$$\begin{aligned} v(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(t)f(\theta - t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} -Q_r(t)f(\theta + t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} Q_r(t)f(\theta - t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} Q_r(t)[f(\theta - t) - f(\theta + t)]dt. \end{aligned}$$

Pero si $r \to$ entonces

$$\frac{r\,\mathrm{sen}\,t}{1 - 2r\cos t + r^2} \longrightarrow \frac{\mathrm{sen}\,t}{2(1-\cos t)} = \frac{1}{2\tan t/2}.$$

Además, si $0 < t < \pi$, entonces $0 < t/2 < \pi/2$ y

$$\begin{aligned} \left|\frac{r sent}{1 - 2r\cos t + r^2}\right| &= \frac{2r\,\mathrm{sen}(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}{1 + r^2 - 2r(\cos^2(\frac{t}{2}) - \mathrm{sen}^2(\frac{t}{2}))} \\ &= \frac{2r\,\mathrm{sen}(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}{(1-r)^2 + 4r\,\mathrm{sen}^2(\frac{t}{2})} \\ &\leq \frac{2r\,\mathrm{sen}(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}{4r\,\mathrm{sen}^2(\frac{t}{2})} \\ &\leq \frac{1}{\tan|\frac{t}{2}|} \leq \frac{2}{|\frac{t}{2}|} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por que $\tan|\frac{t}{2}| \geq |\frac{t}{2}|$. De lo anterior, se sigue que si

$$\int_{0}^{\pi} \frac{|f(\theta - t) - f(\theta + t)|}{t} dt < \infty \tag{3.11}$$

el Teorema de Convergencia Dominada asegura que

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{r\to 1} v(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{2\tan(\frac{t}{2})}dt. \tag{3.12}$$

Cabe mencionar que la condición en (3.12) se satisface si por ejemplo, $f'(\theta)$ existe, pues

$$\lim_{t\to 0}\frac{|f(\theta-t)-f(\theta+t)|}{t} = 0$$

y $\frac{|f(\theta-t)-f(\theta+t)|}{t}$ es integrable en $[\alpha,\pi]$ $\forall\alpha > 0$.

Obsérvese también que si f' es continua en una intervalo (a,b), entonces $v(z)$ se puede extender continuamente al arco $\{e^{it} : a < t < b\}$. En efecto: Sea $[\alpha,\beta]$ cualquier subintervalo cerrado de (a,b) y tomemos $\theta\in[\alpha,\beta]$. Para $\epsilon = 1$, $\exists\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{f(\theta+t)-f(t)}{t}\right| < 1 + |f'(\theta)|$$
$$\left|\frac{f(\theta-t)-f(t)}{t}\right| < 1 + |f'(\theta)|$$

y de esta manera si $0 < t < \delta$

$$\left|\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{t}\right| < 2(1+f'(\theta)) \leq 2(1+M)$$

donde M es la cota de f' en $[\alpha,\beta]$.

Por otra parte, sabemos que la función $\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{t}$ en integrable en intervalos de la forma $[\eta,\pi]$, siempre que $\eta > 0$. Por todo lo anterior, podemos afirmar que $\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{t}\in L^1([0,\pi])$ y usar el Teorema de Convergencia Dominada para obtener

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{r\,\mathrm{sen}\,t}{1-2r\cos t+r^2}[f(\theta-t)+f(\theta+t)]dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt.$$

Además, esta convergencia es uniforme en $\theta\in[\alpha,\beta]$. Así, podemos definir $\tilde{f}(\theta) = \lim_{r\to 1} v(re^{i\theta}) = v(e^{i\theta})$.Entonces

$$|v(e^{i\theta}) - v(e^{i\theta_0})| \leq |v(e^{i\theta}) - v(r_0e^{i\theta})| + |v(r_0e^{i\theta}) - v(r_0e^{i\theta_0})| + |v(r_0e^{i\theta_0}) - v(e^{i\theta_0})| \leq \epsilon$$

si r_0 es suficientemente cercano a uno y $|\theta-\theta_0| < \delta(\epsilon)$.

Definición 3.14. *Sea f una función definida en $[a,b]$.*

i) *Diremos que un punto $c \in [a,b]$ es un punto sigular de f, si ésta es continua excepto en c y además f crece sin cota en dicho punto.*

ii) *Diremos que la integral $\int_a^b f(t)dt$ es singular si ninguno de los siguientes límites existe*

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{c-\delta} f(t)dt, \quad \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(t)dt.$$

iii) *Cuando el límite*

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\int\limits_a^{c-\delta} f(t)dt + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(t)dt\right\}$$

existe, es llamado el Valor Principal de Cauchy de la integral singular y se denota como p.v. $\int_a^b f(t)dt$.

Definición 3.15. *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Diremos que θ está en el Conjunto de Lebesgue de f si*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h}|f(\theta+t)-f(\theta-t)|dt = 0.$$

Es posible probar que casi toda θ pertenece al conjunto de Lebesgue de f, para ver una demostración, consúltese [11] p.19.

Cuando trabajamos con funciones arbitrarias en $L^1([-\pi,\pi])$, pedir que $f'(\theta)$ exista se convierte en una condición muy fuerte. Lo anterior nos lleva a preguntarnos ¿Qué sucedería si la condición (3.11) no se cumpliera? En tal caso, la integral que aparece en (3.12) no sería absolutamente convergente.

En el siguiente teorema aseguraremos la validez de (3.12) para cualquier función en $L^1([-\pi,\pi])$ y para casi toda θ, siempre y cuando interpretemos a nuestra integral en el sentido de Valor Principal de Cauchy.

Teorema 3.16. *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$, entonces*

$$\tilde{f}(\theta) = p.v.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\theta-t)}{\tan(\frac{t}{2})}dt$$

para toda θ en el Conjunto de Lebesgue de f, y en consecuencia, para casi toda θ.

Demostración. Sea θ un punto en el Conjunto de Lebesgue de f. Mostraremos que

$$\sigma(r) = v(re^{i\theta}) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{1-r<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t)}{2\tan(\frac{t}{2})} dt$$

tiende a cero cuando r tiende a uno.

Notemos primero que

$$\begin{aligned}
\sigma(r) =& \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<1-r} Q_r(t) f(\theta - t) dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{1-r<|t|<\pi} \left[\frac{1}{2} Q_r(t) - \frac{1}{2\tan(\frac{t}{2})} \right] f(\theta - t) dt \\
=& \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<1-r} Q_r(t) [f(\theta - t) - f(\theta)] dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{1-r<|t|<\pi} \left[\frac{1}{2} Q_r(t) - \frac{1}{2\tan(\frac{t}{2})} \right] [f(\theta - t) - f(\theta)] dt.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se tiene por que $\tan t$ y el Núcleo de Poisson Conjugado son funciones impares. Observemos ahora que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<1-r} Q_r(t) [f(\theta - t) - f(\theta)] dt \right| &\le \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|<1-r} \frac{|r \operatorname{sen} t|}{1 - 2r\cos t + r^2} |f(\theta - t) - f(\theta)| dt \\
&\le \frac{1}{\pi(1-r)} \int\limits_{-(1-r)}^{1-r} |f(\theta - t) - f(\theta)| dt
\end{aligned}$$

y ésta última expresión tiende a cero cuando r tiende a uno, puesto que θ esta en el Conjunto de Lebesgue de f.

Por otra parte

$$\left| \int\limits_{1-r<|t|<\pi} \left[\frac{1}{2} Q_r(t) - \frac{1}{2\tan(\frac{t}{2})} \right] [f(\theta - t) - f(\theta)] dt \right|$$

está acotado por

$$\int\limits_{1-r<|t|<\pi} \left| \frac{1}{2} Q_r(t) - \frac{1}{\tan(\frac{t}{2})} \right| |f(\theta - t) - f(\theta)| dt. \tag{3.13}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left|\frac{r\operatorname{sen} t}{1-2r\cos t+r^2}-\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}\right| &= \left|\frac{r\operatorname{sen} t}{(1-r)^2+4r\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})}-\frac{\operatorname{sen} t}{4\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})}\right| \\
&= \left|\frac{-(1-r)^2\operatorname{sen} t}{4\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})\left[(1-r)^2+4r\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})\right]}\right| \\
&\leq \left|\frac{2(1-r)^2\operatorname{sen}(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}{4\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})4r\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})}\right| \\
&\leq \frac{(1-r)^2}{|8r\operatorname{sen}^3(\frac{t}{2})|}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\frac{1-r}{2} < |\frac{t}{2}| < \frac{\pi}{2}$ y existe una constante $0 < K < 1$ tal que $K|t| < \operatorname{sen}|\frac{t}{2}| < |\operatorname{sen}(\frac{t}{2})|$, si $r > 1/2$, podemos encontrar $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{8r|\operatorname{sen}^3(\frac{t}{2})|} \leq \frac{C}{|t|^3}.$$

De los comentarios anteriores se sigue que (3.13) es menor o igual que

$$C(1-r)^2 \int\limits_{1-r<|t|<\pi} \frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{|t|^3}dt$$

siempre que $r > 1/2$.

Estudiaremos ahora el comportamiento de la integral que corresponde al intervalo $(1-r,\pi)$, pues la integral sobre $(-\pi, r-1)$ se comportará de forma análoga. Integrando por partes obtendremos

$$\begin{aligned}
(1-r)^2\int_{1-r}^{\pi}\frac{|f(\theta-t)-f(t)|}{t^3}dt =& (1-r)^2\left[\frac{1}{t^3}\int_0^t|f(\theta-s)-f(\theta)|ds\right]\Big|_{1-r}^{\pi} \\
&+ 3(1-r)^2\int_{1-r}^{\pi}\left[\int_0^t|f(\theta-s)-f(\theta)|ds\right]\frac{dt}{t^4} \\
=& \frac{(1-r)^2}{\pi^3}\int_0^{\pi}|f(\theta-t)-f(\theta)|dt - \frac{1}{1-r}\int_0^{1-r}|f(\theta-t)-f(t)|dt \\
&+ 3(1-r)^2\int_{1-r}^{\pi}\left[\int_0^t|f(\theta-s)-f(\theta)|ds\right]\frac{dt}{t^4}.
\end{aligned}$$

Cuando r tiende a uno, las dos primeras integrales tienden a cero, dado que θ está en el Conjunto de Lebesgue de f. Analicemos la tercera integral: fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos

$\delta > 0$ de tal forma que si $0 < t < \delta$ se tenga

$$\frac{1}{t}\int_0^t |f(\theta - s) - f(\theta)|ds < \epsilon.$$

Con esta elección de δ tendremos

$$\begin{aligned}
3(1-r)^2 \int_{1-r}^{\delta} \left[\int_0^t |f(\theta - s) - f(\theta)|ds \right] \frac{dt}{t^4} &\leq 3(1-r)^2 \int_{1-r}^{\delta} \epsilon \frac{dt}{t^3} \\
&= -\frac{3}{2\delta^2}\epsilon(1-r)^2 + \frac{3}{2}\epsilon \\
&\leq \frac{3}{2}\epsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente, si r es suficientemente cercano a uno, se tiene

$$\begin{aligned}
3(1-r)^2 \int_{\delta}^{\pi} \left[\int_0^t |f(\theta - s) - f(\theta)|ds \right] \frac{dt}{t^4} &\leq 3(1-r)^2 \int_{\delta}^{\pi} \left[\int_0^t |f(\theta - s) - f(\theta)|ds \right] \frac{dt}{\delta^4} \\
&\leq \frac{3\pi(1-r)^2}{\delta^4} \int_0^{\pi} |f(\theta - s) - f(\theta)|ds \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Con lo anterior queda demostrado nuestro teorema. □

Capítulo 4

H^p como Espacio Lineal

Hasta ahora sólo hemos estudiado las propiedades de las funciones que constituyen a los espacios H^p, a continuación, examinaremos algunas de las propiedades que poseen estos espacios vistos como espacios vectoriales topológicos.

Al inicio del Capítulo 2 comentamos que para $p \geq 1$, la función $\|\cdot\|_{H^p}$ define una norma en H^p. Lo anterior no sucede si $0 < p < 1$, sin embargo, $\|\cdot\|_{H^p}^p$ es una cuasinorma y en consecuencia $(F, G) \mapsto \|F - G\|_{H^p}^p$ es una distancia en H^p, invariante bajo traslaciones y compatible con su estructura vectorial.

Definamos ahora la función

$$N_p(F) = \begin{cases} \|F\|_{H^p} & si\ p \geq 1 \\ \|F\|_{H^p}^p & si\ p < 1 \end{cases}$$

y estudiemos a H^p como espacio lineal métrico con la distancia $d(F, G) = N_p(F - G)$.

Definición 4.1. *Un Espacio Vectorial Topológico (EVT) es un espacio vectorial X con una topología tal que, con respecto a esta topología, las funciones*

i) $+ : X \times X \mapsto X$ *tal que* $(x, y) \mapsto x + y$

ii) $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ *tal que* $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

son continuas.

Es sencillo demostrar que todo espacio normado, es una espacio vectorial topológico con la topología inducida por su norma.

Supongamos que X es un espacio vectorial y $\mathscr{P}$ es una familia de seminormas en X. Sea $\mathscr{T}$ la topología en X que tiene como sub-base a los conjuntos de la forma $\{x : p(x - x_0) < \epsilon\}$, donde $p \in \mathscr{P}$, $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. De esta manera, un subconjunto U de X será abierto si y sólo si para cada $x_0 \in U$ existen $p_1, \ldots, p_k$ en $\mathscr{P}$ y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ tales que $\cap_{j=1}^{k}\{x \in X : p_j(x - x_0) < \epsilon_j\} \subseteq U$. No es difícil mostrar que X con esta topología es un EVT.

Definición 4.2. *Un Espacio Localmente Convexo (ELC) es un EVT cuya topología esta definida por una familia de seminormas* $\mathscr{P}$ *tal que* $\cap_{p\in\mathscr{P}}\{x : p(x) = 0\} = \{0\}$.

Definición 4.3. *Sea* X *un espacio vectorial y* $A \subseteq X$*. Diremos que* A *es balanceado si* $\alpha x \in A$ *siempre que* $x \in A$ *y* $|\alpha| \leq 1$.

Obsérvese que si A es balanceado, entonces $0 \in A$. También puede demostrarse la siguiente caracterización para Espacios Localmente Convexos.

Proposición 4.4. *Sea* X *un EVT y sea* $\mathscr{U}$ *la colección de todos los subconjuntos de* X *que son abiertos, convexos y balanceados. Entonces* X *es localmente convexo si y sólo si* $\mathscr{U}$ *es una base para el sistema de vecindades de cero.*

Para profundizar más en este tema, puede consultarse el Capítulo IV en [2]. Nuestro siguiente objetivo es probar que para $0 < p < 1$, el espacio H^p no es localmente convexo. Para lograrlo, mostraremos primero que para estos mismos valores de p, los espacios $L^p([-\pi, \pi])$ tampoco son localmente convexos.

Lema 4.5. *Para* $0 < p < 1$, $L^p([-\pi, \pi])$ *no es localmente convexo.*

Demostración. Si $L^p([-\pi, \pi])$, con $0 < p < 1$, fuera localmente convexo, tendríamos que la bola unitaria $B_1 = \{f \in L^p([-\pi, \pi]) : \|f\|_p < 1\}$, la cual es una vecindad de cero, debería contener una vecindad convexa de cero, digamos V. Dicha vecindad, deberá contener a su vez, una bola $B_\epsilon = \{f \in L^p([-\pi, \pi]) : \|f\|_p < \epsilon\}$, para algún $\epsilon > 0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, dividamos el intervalo $[-\pi, \pi]$ en k subintervalos de igual longitud, $I_1 = [\alpha_1, \beta_1], I_2 = [\alpha_2, \beta_2], \ldots, I_k = [\alpha_k, \beta_k]$. Tomemos a_k de forma que

$a_k^p = k(p+1)\frac{\epsilon}{2}$, y para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ definamos la función

$$f_j(t) = \begin{cases} 0 & si & -\pi \le t \le \alpha_j \\ \frac{2a_k}{\beta_j - \alpha_j}(t - \alpha_j) & si & \alpha_j \le t < \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} \\ a_k & si & t = \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} \\ \frac{2a_k}{\alpha_j - \beta_j}(t - \beta_j) & si & \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} < t \le \beta_j \\ 0 & si & \beta_j < t \le \pi \end{cases}$$

la cual toma el valor a_k en el centro de $[\alpha_j, \beta_j]$, es lineal en lo que queda de I_j y cero fuera de dicho intervalo. Además

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_j(t)|^p dt = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos g_k de la siguiente manera:

$$g_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j(t)$$

con $\lambda_j \ge 0$ y $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_k(t)|^p dt &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_j(t)|^p dt \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^p \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si elegimos

$$\lambda_j = \frac{\frac{1}{j^{1/p}}}{\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^{1/p}}}$$

tendremos que $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^p = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^{1/p}} \right)^{-p} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

Como la expresión anterior tiende a infinito cuando $k \to \infty$, podemos escoger k suficientemente grande, de tal forma que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_k(t)|^p dt = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^p \frac{\epsilon}{2} > 1. \tag{4.1}$$

Lo anterior prueba que $L^p([-\pi,\pi])$ no puede ser localmente convexo, pues $f_1,\ldots,f_k$ pertencen a B_ϵ, pero g_k, que es una combinación convexa de ellas, no pertenece a V. $\square$

Teorema 4.6. *Para $0<p<1$, H^p no es localmente convexo.*

Demostración. Igual que antes, si H^p fuera localmente convexo, la bola unitaria $B_1 = \{F \in H^p : N_p(F) < 1\}$ debería contener alguna vecindad convexa de cero, digamos V.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y notemos que las funciones f_j construidas en la demostración del Teorema anterior, son el límite uniforme de polinomios trigonométricos. Es decir, dada $\delta > 0$, para cada j es posible encontrar

$$h_j(t) = \sum_{l=-m_j}^{m_j} a_{jl} e^{ilt}$$

de tal forma que para cada $t \in [-\pi,\pi]$

$$|h_j(t) - f_j(t)| < \delta$$

Definamos $q_j(t) = e^{im_j t} h_j(t)$, entonces para $t \in [-\pi,\pi]$

$$|q_j(t) - e^{im_j t} f_j(t)| = |e^{im_j t}||h_j(t) - f_j(t)| < \delta \tag{4.2}$$

Observemos también que, si λ_j e I_j son como en el Teorema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e^{im_j t} f_j(t)\right|^p dt &= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_{I_j}|\lambda_j f_j(t)|^p\,dt \\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_{I_j}\left|\sum_{l=1}^{k}\lambda_l f_l(t)\right|^p dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{l=1}^{k}\lambda_l f_l(t)\right|^p dt > 1
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (4.1). Sea ahora $Q_j(z) = \displaystyle\sum_{l=-m_j}^{m_j} a_{jl} z^{l+m_j}$, entonces $Q_j(e^{it}) = q_j(t)$ y por (4.2)

$$\begin{aligned}
\|Q_j\|_{H^p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_j(t)|^p dt &\leq \delta^p + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_j(t)|^p dt \\
&\leq \delta^p + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

si δ es suficientemente pequeño. Ahora bien, sabemos que

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(t) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t} f_j(t)\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t}(h_j(t) - f_j(t))\right| \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \delta = \delta$$

y usando que $|a^p - b^p| \leq |a - b|^p$ si $a \geq 0,\ b \geq 0$ y $0 < p < 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t} f_j(t)\right|^p - \left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(t)\right|^p &\leq \left|\left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t} f_j(t)\right|^p - \left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(t)\right|^p\right| \\
&\leq \left|\left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t} f_j(t)\right| - \left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(t)\right|\right|^p \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t} f_j(t) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(t)\right|^p \\
&\leq \delta^p.
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j Q_j(t)\right\|_{H^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(t)\right|^p dt \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{im_j t} f_j(t)\right|^p - \delta^p\right] dt \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

si δ es suficientemente pequeño.

En síntesis, hemos construido una combinación convexa de elementos de B_ϵ que no pertenece a V. Por lo anterior, H^p no puede ser Localmente Convexo. $\square$

Continuaremos ahora buscando más propiedades de H^p como EVT.

Teorema 4.7. *Si $F \in H^p$, con $0 < p \le \infty$ y $z \in D$, entonces*

$$|F(z)| \le (1 - |z|)^{-1/p} \|F\|_{H^p}.$$

Demostración. Supongamos que F no es idénticamente cero y escribamos $F(z) = B(z)H(z)$, donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de F en D, $H(z)$ es una función holomorfa que no se anula en D y además $\|H\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.

Consideremos la función analítica $A(z) = \log H(z)$ y la función $G(z) = e^{pA(z)}$. Nótese que $|G(z)| = |H(z)|^p \ \forall z \in D$ y en consecuencia $\|G(z)\|_{H^1} = \|H\|^p_{H^p} = \|F\|^p_{H^p} < \infty$.

Como $G(z) \in H^1$, G es la integral de Cauchy de su función frontera:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{G(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Luego

$$\begin{aligned} |F(z)|^p \le |H(z)|^p &= |G(z)| \\ &\le \frac{1}{1-|z|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{it})| dt \\ &= \frac{\|G\|_{H^1}}{1-|z|} = \frac{\|F\|^p_{H^p}}{1-|z|}. \end{aligned}$$

□

Observación 4.8. *Si $1 \le p$, la Proposición 2.2 implica que la imagen de H^p bajo la isometría*

$$\begin{aligned} H^p &\to L^p([-\pi, \pi]) \\ F(z) &\mapsto F(e^{it}) \end{aligned}$$

es $\{f \in L^p([-\pi,\pi]) : \hat{f}(j) = 0 \ \forall j < 0\}$. Nótese que este conjunto es cerrado y puesto que $L^p([-\pi,\pi])$ es completo, se sigue que H^p también es un espacio completo.

La completez de los espacios H^p para cualquier valor de p se seguirá del Teorema anterior.

Corolario 4.9. *H^p es un espacio completo para toda $0 < p \le \infty$.*

Demostración. Observemos que si $F \in H^p$ y $K \subset D$ es un conjunto compacto, entonces

$$\sup_{z\in K} |F(z)| \leq \sup_{z\in K} (1-|z|)^{-1/p} \|F\|_{H^p}.$$

Así, si $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en H^p, ésta convergerá uniformemente en subconjuntos compactos de D a una función holomorfa, digamos F. Además

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_j(re^{it}) - F(re^{it})|^p dt &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_j(re^{it}) - F_k(re^{it})|^p dt \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \|F_j - F_k\|_{H^p}^p \\ &< \epsilon \end{aligned} \tag{4.3}$$

si j es suficientemente grande. De lo anterior, se sigue que $F_j - F \in H^p$ y puesto que $F_j \in H^p$, obtenemos que $F \in H^p$. De (4.3) también se sigue que $F_j \to F$ en H^p si $j \to \infty$. Como $(F_j)_{j=1}^{\infty} \subset H^p$ era una sucesión de Cauchy arbitraria, concluimos que H^p es completo. □

En vista del Corolario anterior, es posible ver a H^p como un subespacio cerrado de $L^p([-\pi,\pi])$, para cualquier $0 < p < \infty$.

Proposición 4.10. *Para* $0 < p < \infty$, H^p *es el subespacio cerrado más pequeño de* $L^p([-\pi,\pi])$ *que contiene a las funciones* $\{e^{ijt} : j \geq 0\}$.

Demostración. Por el Corolario anterior sabemos que H^p es un subespacio cerrado de $L^p([-\pi,\pi])$ y es claro que contiene a $\{e^{ijt} : j \geq 0\}$.

Consideremos ahora a U, un subespacio cerrado de $L^p([-\pi,\pi])$ que contiene a $\{e^{ijt} : j \geq 0\}$. Demostraremos que $H^p \subseteq U$.

Sea $F \in H^p$ y sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ su expresión en serie de Taylor. Se sabe que $F(re^{it}) \to F(e^{it})$ en la norma $\|\cdot\|_p$ si $r \to 1$.

Por otra parte, para r fijo, $\sum_{j=1}^{k} a_j z^j \to F(re^{it})$ en $L^p([-\pi,\pi])$ cuando $k \to \infty$. Siendo U un conjunto cerrado y $\sum_{j=1}^{k} a_j r^j e^{ijt}$ elemento de U para cada $r \in (0,1)$, se sigue que las funciones $F(re^{it})$ pertenecen a U.

De nuevo, como U es cerrado, el límite de $F(re^{it})$ cuando $r \to 1$ también es un elemento de U, es decir, $F(e^{it}) \in U$. Por tanto, $H^p \subset U$. □

4.1. El Dual de H^p

Hemos mostrado que para $0 < p < 1$, los espacios H^p no son localmente convexos. Los primeros espacios no localmente convexos examinados, fueron los espacios $L^p([0,1])$ con $0 < p < 1$, para éstos, se sabe que su dual topológico es cero.

En efecto: demostraremos que la única vecindad convexa de cero es $L^p([0,1])$.

Sea V una vecindad convexa de cero, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\{f \in L^p([0,1]) : \int_0^1 |f(t)|^p dt < \epsilon\} \subset V$.

Si g es cualquier función en $L^p([0,1])$, dado $k \in \mathbb{N}$, es posible dividir al intervalo $[0, 2\pi]$ en k subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$ de forma que para $j = 1, 2, \ldots, k$

$$\int_{I_j} |g(t)|^p dt = \frac{1}{k} \int_0^1 |g(t)|^p dt.$$

De esta manera, si k es suficientemente grande, tendremos que

$$\int_{I_j} |kg(t)|^p dt = k^{p-1} \int_0^1 |g(t)|^p dt < \epsilon.$$

Es decir, para k suficientemente grande, las funciones $kg\chi_{I_j}$ pertencen a V. En consecuencia, la combinación convexa $g = \sum_{j=1}^k k^{-1}(kg\chi_{I_j})$ también pertenece a V. Como $g \in L^p([0,1])$ era arbitraria, hemos mostrado que $V = L^p([0,1])$.

Ahora, si $\varphi \in (L^p([0,1]))^*$, para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\varphi^{-1}(D(0,\epsilon))$ es una vecindad abierta y convexa de cero en $L^p([0,1])$. Luego, esta vecindad debe coincidir con $L^p([0,1])$. Por tanto, $|\varphi(f)| < \epsilon \; \forall f \in L^p([0,1])$ y para todo $\epsilon > 0$. De lo anterior, se concluye que $\varphi = 0$.

A pesar de que los espacios H^p con $p \in (0,1)$ no son localmente convexos, sus espacios duales cuentan con una cantidad suficiente de funcionales lineales continuos. En el libro *Theory of H^p Spaces*, de Peter L. Duren, se presentan los siguientes resultados sobre el espacio dual de H^p para $p < 1$:

Definición 4.11. *Sea φ una función con valores en los complejos. Diremos que φ es una función de la clase Lipchitz Λ_α, $0 < \alpha \leq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Diremos que φ es de clase Λ_* si existe una constante A tal que

$$|\varphi(x + h) - 2\varphi(x) + \varphi(x - h)| \leq Ah$$

para toda x y para toda $h > 0$.

Observación 4.12. *Si $\beta < \alpha$ es claro que $\Lambda_1 \subset \Lambda_* \subset \Lambda_\beta \subset \Lambda_\alpha$.*

Antes de dar una representación para los funcionales lineales en H^p, $p < 1$, introduciremos la siguiente notación: denotemos por $\mathscr{A}$ a la clase formada por las funciones analíticas en D y continuas en $\overline{D}$. Escribiremos $F \in \Lambda_\alpha$ para indicar que $F \in \mathscr{A}$ y su función frontera $F(e^{it})$ pertence a la clase Λ_α, $0 < \alpha \leq 1$. Similarmente, por $F \in \Lambda_*$ entenderemos que $F \in \mathscr{A}$ y $F(e^{it}) \in \Lambda_*$. El espacio dual de H^p quedará completamente determinado por el siguiente Teorema:

Teorema 4.13. *A cada funcional lineal acotado ϕ en H^p, $0 < p < 1$, le corresponde una única función $G \in \mathscr{A}$ tal que*

$$\phi(F) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it}) G(e^{-it}) dt \;\; \forall\, F \in \; H^p. \tag{4.4}$$

Si $(n+1)^{-1} < p < n^{-1}$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $G^{(n-1)} \in \Lambda_\alpha$, donde $\alpha = \frac{1}{p} - n$. Recíprocamente, para cualquier G con $G^{(n-1)} \in \Lambda_\alpha$, el límite en (4.4) existe para toda $F \in H^p$ y define un funcional lineal acotado.

Si $p = (n+1)^{-1}$, entonces $G^{n-1} \in \Lambda_*$; recíprocamente, cualquier G con $G^{(n-1)} \in \Lambda_*$ define, por medio de (4.4), un funcional lineal acotado en H^p.

Curiosamente, el Teorema de Hahn-Banach, falla en los espacios H^p, con $p < 1$, pues es posible demostrar que existe un subespacio propio de H^p y un funcional lineal definido en él, que no puede ser extendido continuamente a H^p.

La demostración de estos resultados no se encuentra a nuestro alcance por el momento, por tal motivo, no es presentada en este trabajo. Sin embargo, puede leerse más sobre este tema en el Capítulo 7 de [3].

Para $p \geq 1$, sabemos que $(L^p([-\pi, \pi]))^*$ es isométricamente isomorfo a $L^{p'}([-\pi, \pi])$, donde p y p' son exponentes conjugados. Por lo anterior, es natural esperar que el dual de H^p, con este mismo rango de valores de p, sea $H^{p'}$. Dedicaremos esta sección a demostrar la afirmación anterior.

Teorema 4.14. *Si $1 \leq p < \infty$ y p' es el exponente conjugado de p, definamos $H^{p'}(0) = \{f \in H^{p'} : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0\}$, entonces*

$$(H^p)^* \cong L^{p'}([-\pi, \pi])/H^{p'}(0).$$

Demostración. La isometría entre $L^{p'}([-\pi,\pi])$ y $(L^p([-\pi,\pi]))^*$ está dada de la siguiente forma: $f \mapsto \Lambda_f$, donde

$$\Lambda_f(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \quad \forall g \in L^p([-\pi,\pi]).$$

En vista de lo anterior, a cada $f \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ podemos asociarle el funcional $\Lambda_f \in (H^p)^*$ tal que

$$\Lambda_f(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})f(t)dt$$

el cual se obtiene restringiendo el funcional $\Lambda_f \in (L^p([-\pi,\pi]))^*$ a H^p. Además

$$|\Lambda_f(F)| \leq \|F\|_{H^p}\|f\|_{p'}$$

lo cual implica que $\|\Lambda_f\| \leq \|f\|_{p'}$. De esta manera

$$\begin{aligned} L^{p'}([-\pi,\pi]) &\to (H^p)^* \\ f &\mapsto \Lambda_f \end{aligned} \tag{4.5}$$

es un mapeo lineal y continuo.

El Teorema de Hahn-Banach establece que dado $\Lambda \in (H^p)^*$ es posible encontrar una extensión lineal y continua de Λ a $L^p([-\pi,\pi])$, digamos $\tilde{\Lambda}$, tal que $\|\Lambda\|_{(H^p)^*} = \|\tilde{\Lambda}\|_{(L^p([-\pi,\pi]))^*}$. Aún más, el Teorema de Representación de Riesz, asegura que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_g$ para alguna $g \in L^{p'}([-\pi,\pi])$. Por tanto, el mapeo (4.5) es un mapeo sobre, cuyo núcleo es

$$N_0 = \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})f(t)dt = 0 \ \forall F \in H^p\}.$$

Siendo H^p el subespacio cerrado de $L^p([-\pi,\pi])$ más pequeño que contiene a $\{e^{ijt} : j \geq 0\}$, N_0 coincide con

$$B = \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \hat{f}(-j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}f(t)dt = 0 \ \forall j \geq 0\}.$$

En efecto, supongamos que $f \in B$. Dada cualquier $F \in H^p$ existe una sucesión $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ en el subespacio generado por $\{e^{ijt} : j \geq 0\}$, la cual converge a F. Luego, como Λ_f es continua en H^p

$$\Lambda_f(F) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_f(F_k) = 0.$$

Así, $\Lambda_f(F) = 0\ \forall F \in H^p$ y $f \in N_0$. Consecuentemente, $B \subset N_0$. La otra contención se sigue trivialmente.

Nótese ahora que $B = \{f \in H^{p'} : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0\} = H^{p'}(0)$ y por tanto, el núcleo del mapeo (4.5) es $H^{p'}(0)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} L^{p'}([-\pi,\pi])/H^{p'}(0) &\to (H^p)^* \\ f + H^{p'}(0) &\mapsto \Lambda_f \end{aligned}$$

es un isomorfismo, aún más, es un isomorfismo isométrico:

Para cualquier extensión Λ de Λ_f a $L^p([-\pi,\pi])$, se tiene que $\|\Lambda_f\|_{(H^p)^*} \leq \|\Lambda\|_{(L^p([-\pi,\pi]))^*}$. Pero el Teorema de Hahn-Banach asegura que existe una extensión lineal continua de Λ_f a $L^p([-\pi,\pi])$ que conserva la norma de Λ_f, de modo que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_f\|_{(H^p)^*} &= \text{ínf}\{\|\Lambda\|_{(L^p([-\pi,\pi]))^*} : \Lambda \in (L^p([-\pi,\pi]))^* \ y\ \Lambda\big|_{H^p} = \Lambda_f\} \\ &= \text{ínf}\{\|\Lambda_g\|_{(L^p([-\pi,\pi]))^*} : \Lambda_g\big|_{H^p} = \Lambda_f \ y\ g \in L^{p'}([-\pi,\pi])\} \\ &= \text{ínf}\{\|g\|_{p'} : \Lambda_g\big|_{H^p} = \Lambda_f \ y\ g \in L^{p'}([-\pi,\pi])\} \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del Teorema de Representación de Riesz. Ahora bien, como $\Lambda_g\big|_{H^p} = \Lambda_f$ si y sólo si $g - f \in H^{p'}(0)$, la norma de Λ_f se puede calcular como

$$\text{ínf}\{\|g\|_{p'} : g - f \in H^{p'}(0)\}.$$

O bien,

$$\|\Lambda_f\|_{(H^p)^*} = \text{ínf}\{\|f - h\|_{p'} : h \in H^{p'}(0)\} = \|f + H^{p'}(0)\|$$

□

Calcularemos ahora el dual del espacio $H^p(0)$, utilizando esencialmente el mismo procedimiento que en el teorema anterior.

Teorema 4.15. *Si $1 \leq p < \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$, entonces*

$$(H^p(0))^* \cong L^{p'}([-\pi,\pi])/H^{p'}.$$

Demostración. Igual que antes, consideremos la asociación

$$\begin{aligned} L^{p'}([-\pi,\pi]) &\to (H^p(0))^* \\ f &\mapsto \Lambda_f \end{aligned}$$

de nuevo, este mapeo es sobreyectivo y su núcleo es

$$\begin{aligned}
N_0 &= \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = 0 \; \forall \; g \in H^p(0)\} \\
&= \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = 0 \; \forall \; g \in H^p \; tal \; que \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = 0\} \\
&= \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ijt}dt = 0 \; \forall j \in \mathbb{N}\} \\
&= \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \hat{f}(-j) = 0 \; \forall j \in \mathbb{N}\} \\
&= H^{p'}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
L^{p'}/H^{p'} &\to (H^p(0))^* \\
f + H^{p'} &\mapsto \Lambda_f
\end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios normados, aún más, es un isomorfismo isométrico, pues

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_f\|_{(H^p(0))^*} &= \inf\{\|\varphi\|_{(L^p([-\pi,\pi]))^*} : \varphi \in (L^p([-\pi,\pi]))^* \; y \; \varphi\big|_{H^p(0)} = \Lambda_f\} \\
&= \inf\{\|g\|_{p'} : g \in L^{p'}([-\pi,\pi]) \; y \; g - f \in H^{p'}\} \\
&= \inf\{\|f - h\|_{p'} : h \in H^{p'}\} \\
&= \|f + H^{p'}\|.
\end{aligned}$$

□

Observación 4.16. *El espacio $H^{p'}(0)$ tiene un complemento topológico en $L^{p'}([-\pi,\pi])$, excepto para $p' = \infty$.*

Veamos:

Si $f \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ tiene la serie de Fourier $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^{ijt}$, su integral de Poisson será

$$\begin{aligned}
u(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}e^{ij(t-s)}f(s)ds \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r^{|j|}e^{ijt}.
\end{aligned}$$

Si v es el conjugado armónico de u, con $v(0)=0$, entonces

$$v(re^{it}) = -i\sum_{j\in\mathbb{Z}} sgn(j)a_j r^{|j|}e^{ijt}. \tag{4.6}$$

También se tiene que $v = P(\tilde{f})$, puesto que $f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$ y $\tilde{f} \in L^{p'}([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$. De esta forma

$$v(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}e^{ij(t-s)}\tilde{f}(s)ds = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijs}\tilde{f}(s)ds\right]r^{|j|}e^{ijt}$$

de esto y (4.6), se sigue que $\hat{\tilde{f}}(j) = -isgn(j)a_j$ y que la serie de Fourier de $\tilde{f}$ es

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} -isgn(j)a_j e^{ijt}.$$

Para cada $f \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ definamos $A(f) = \frac{1}{2}(f + i\tilde{f} - \hat{f}(0))$. La desigualdad de Marcel Riesz asegura que existe una constante $B_{p'}$ tal que $\|\tilde{f}\|_{p'} \leq B_{p'}\|f\|_{p'}$. Con esto, tendremos que $A(f)$ será acotado, pues

$$\begin{aligned}\|A(f)\| &\leq \frac{1}{2}(\|f\|_{p'} + \|\tilde{f}\|_{p'} + |\hat{f}(0)|)\\ &\leq \frac{(2+B_{p'})}{2}\|f\|_{p'}.\end{aligned}$$

Además, los coeficientes de Fourier de $A(f)$ son

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(f(t) + i\tilde{f}(t) - \hat{f}(0))e^{-ijt}dt = \begin{cases} 0 & si\ j \leq 0\\ a_j & si\ j > 0.\end{cases}$$

De esta forma

$$A(L^{p'}([-\pi,\pi])) = \{f \in L^{p'}([-\pi,\pi]) : \hat{f}(j) = 0\ \forall\ j \leq 0\} = H^{p'}(0)$$

es decir, A es la proyección de $L^{p'}([-\pi,\pi])$ sobre $H^{p'}(0)$.

Observemos ahora que la serie de Fourier de la función $f - A(f)$ es

$$\sum_{j\leq 0} a_j e^{ijt} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{-j}e^{-ijt}.$$

Definamos $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{-j} z^j$ y notemos que

$$\begin{aligned}
P(f - A(f))(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - A(f)(t)] \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ij(\theta - t)} dt \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ij\theta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - A(f)(t)] e^{-ijt} dt \right] \\
&= \sum_{j\le 0} a_j r^{|j|} e^{ij\theta} \\
&= F(re^{-i\theta})
\end{aligned}$$

es decir, $P(f - A(f))(z) = F(\overline{z})$. Luego, $F \in H^{p'}$, pues $\forall r \in [0,1)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^{p'} dt = \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{-it})|^{p'} dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - A(f)(t)|^{p'} dt.$$

Puesto que $F(e^{-it})$ y $f(t) - A(f)(t)$ tienen los mismos coeficientes de Fourier, se tiene que

$$f(t) = A(f)(t) + F(e^{-it}).$$

Ahora escribamos $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_{-j}} z^j$, y observemos que

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{f - A(f)}\right)(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\overline{f(t) - A(f)(t)}] \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ij(\theta - t)} dt \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ij\theta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\overline{f(t) - A(f)(t)}] e^{-ijt} dt \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_{-j}} r^{|j|} e^{ij\theta} \\
&= G(re^{i\theta}).
\end{aligned}$$

Es decir, $G(z) = P\left(\overline{f - A(f)}\right)(z)$. En consecuencia, $G \in H^{p'}$, además, $F(e^{-it}) = \overline{G(e^{it})}$ y

$$f(t) = A(f) + \overline{G(e^{it})}.$$

Definamos $\overline{H^{p'}} = \{\overline{h(t)} : h \in H^{p'}\}$ y $(H^{p'})^- = \{h(-t) : h \in H^{p'}\}$. Obsérvese que $H^{p'}(0) \cap \overline{H^{p'}} = \{0\}$, pues si $f \in H^{p'}(0) \cap \overline{H^{p'}}$, entonces $\hat{f}(-j) = 0 \ \forall j = 0, 1, 2, \ldots$ y

$\hat{f}(j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y necesariamente $f = 0$. De forma análoga se tiene que $H^{p'}(0) \cap (H^{p'})^- = \{0\}$.

Por lo expuesto hasta aquí, podemos afirmar que $L^{p'}([-\pi,\pi])$ es la suma directa algebraica de $H^{p'}(0)$ y $\overline{H^{p'}}$ y de $H^{p'}(0)$ y $(H^{p'})^-$. Ahora bien, puesto que $H^{p'}$ es un subespacio cerrado de $L^{p'}([-\pi,\pi])$, podemos escribir a este último como suma directa topológica de las siguientes formas:

$$L^{p'}([-\pi,\pi]) = H^{p'}(0) \oplus \overline{H^{p'}}$$
$$L^{p'}([-\pi,\pi]) = H^{p'}(0) \oplus (H^{p'})^-.$$

Observación 4.17. *También es posible expresar la descomposición en suma directa de $L^{p'}([-\pi,\pi])$ como*

$$L^{p'}([-\pi,\pi]) = H^{p'} \oplus \overline{H^{p'}(0)}$$
$$L^{p'}([-\pi,\pi]) = H^{p'} \oplus (H^{p'}(0))^-.$$

Para probar esto, basta observar que una función $f(t)$ pertence a $L^{p'}([-\pi,\pi])$ si y sólo si $\overline{f(t)}$ también pertence a $L^{p'}([-\pi,\pi])$. Además, en virtud de la continuidad del operador conjugación, se sabe que si V es un subespacio cerrado de $L^{p'}([-\pi,\pi])$, entonces $\overline{V}$ también es cerrado en $L^{p'}([-\pi,\pi])$. En vista de lo anterior, se tiene

$$L^{p'}([-\pi,\pi]) = \overline{L^{p'}([-\pi,\pi])} = \overline{H^{p'}(0)} \oplus \overline{\overline{H^{p'}}} = \overline{H^{p'}(0)} \oplus H^{p'}.$$

De forma análoga, notando que $f(t) \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ si y sólo si $f(-t) \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ y que si V es cerrado en $f(t) \in L^{p'}([-\pi,\pi])$, también V^- lo es, se obtiene

$$L^{p'}([-\pi,\pi]) = (L^{p'}([-\pi,\pi]))^- = (H^{p'}(0))^- \oplus ((H^{p'})^-)^- = (H^{p'}(0))^- \oplus H^{p'}.$$

Vale la pena mencionar que la proyección de $L^{p'}([-\pi,\pi])$ sobre $H^{p'}$ es el operador acotado $B(f) = \frac{1}{2}(f + i\tilde{f} + \hat{f}(0))$: si $f \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ tiene la serie de Fourier $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^{ijt}$, los coeficientes de Fourier de $B(f)$ serán

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(f(t) + i\tilde{f}(t) + \hat{f}(0))e^{-ijt}dt = \begin{cases} 0 & si\ j < 0 \\ a_j & si\ j \geq 0. \end{cases}$$

En vista de lo anterior, la serie de Fourier de $B(f)$ sería $\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}$, la cual representa la serie de Fourier de una función en $H^{p'}$.

Observación 4.18. *El primer teorema del isomorfismo (ver [5]) y las descomposiciones en suma directa topológica dadas en las observaciones anteriores, dan lugar a los siguientes isomorfismos topológicos:*

i) $L^{p'}([-\pi,\pi])/H^{p'}(0) \cong H^{p'}$.

ii) $L^{p'}([-\pi,\pi])/H^{p'} \cong H^{p'}(0)$.

Observación 4.19. *Los Teoremas 4.14, 4.15 y la observación anterior, nos permiten reestablecer los isomorfismos*

$$L^{p'}([-\pi,\pi])/H^{p'}(0) \cong (H^p)^*$$
$$L^{p'}([-\pi,\pi])/H^{p'} \cong (H^p(0))^*$$

del siguiente modo si $1 < p < \infty$*:*

$$(H^p)^* \cong H^{p'}.$$

El isomorfismo está dado como $\Lambda_G(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})G(e^{-it})dt$ *para toda* $F \in H^p$ *y* $G \in H^{p'}$*. O bien, esta dado por* $\tilde{\Lambda}_G(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it})\overline{G(e^{it})}dt$*. También* $(H^p(0))^* \cong H^{p'}(0)$*.*

Cabe mencionar que que $H^\infty(0)$ no es un espacio complementario en $L^\infty([-\pi,\pi])$. De ser así, tendríamos que el operador función conjugada debería ser acotado en $L^\infty([-\pi,\pi])$, y por dualidad, tendríamos la continuidad de este operador en $L^1([-\pi,\pi])$.

4.2. Teorema de Factorización Canónica

El Teorema de Factorización de Riesz, demostrado en el Capítulo 2, ha sido pieza clave en el estudio del comportamiento en la frontera del disco de las funciones en H^p. Dicho Teorema establece que dada una función $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$, es posible factorizarla como $F = BH$, donde B es el producto de Blaschke formado con los ceros de F en el disco unitario, $H \in H(D)$ no se anula en D y $\|F\|_{H^p} = \|H\|_{H^p}$. En esta sección, encontraremos una factorización más fina para $F \in H^p$, la cual nos permitirá construir conjuntos densos en H^p.

Definición 4.20. *Se dice que una medida* ν *es singular con respecto a la medida de Lebesgue* λ*, si existe una partición medible* $\{A, B\}$ *de* $\mathbb{R}$ *tal que* ν *está concentrada en* A *y* λ *está concentrada en* B*.*

Observación 4.21. *Si denotamos por* δ *a la medida de Dirac concentrada en cero, tendremos que* δ *es singular con respecto a la medida de Lebesgue* λ*. Para mostrar esto, basta tomar la partición* $\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ *y notar que* δ *está concentrada en* $\mathbb{Q}$ *y* λ *en* $\mathbb{Q}^c$*.*

El siguiente teorema nos será útil para encontrar la nueva factorización de las funciones en H^p.

Teorema 4.22 (de Descomposición de Lebesgue)**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$, entonces existen medidas μ_{ac} y μ_{sing} tales que μ_{ac} es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, μ_{sing} es singular con respecto a la medida de Lebesgue y*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}.$$

Esta representación es única.

Puede consultarse la demostración de este resultado en la página 326 de [9]. Enunciaremos ahora nuestro nuevo teorema de factorización:

Teorema 4.23 (de Factorización Canónica)**.** *Sea $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$ no idénticamente cero, entonces*

$$F(z) = e^{ic}B(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)}e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt}$$

donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de F, c es una constante real y σ es una medida singular no negativa.

Demostración. Si escribimos $F(z) = B(z)H(z)$, sabemos que $H(z) \in H^p \subset N$ nunca es cero, y el Teorema 1.21 asegura que

$$\limsup_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|H(re^{it})||dt < \infty.$$

Si $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales no negativos tal que $r_j \uparrow 1$, entonces

$$\limsup_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|H(r_je^{it})|dt \leq \limsup_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|H(re^{it})|dt < \infty.$$

De modo que $(\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|H(r_je^{it})|dt)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales no negativos. De forma análoga, se obtiene que $(\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|H(r_je^{it})|dt)_{j=1}^{\infty}$ es también una sucesión acotada no negativa.

Por lo expuesto hasta aquí, tenemos que $(\log^+|H(r_je^{it})|)_{j=1}^{\infty}$ y $(\log^-|H(r_je^{it})|)_{j=1}^{\infty}$ son sucesiones acotadas en $L^1([-\pi,\pi]) \hookrightarrow M([-\pi,\pi])$. En otras palabras, ambas sucesiones se encuentran en el interior de una bola cerrada de $M([-\pi,\pi]) = (C[-\pi,\pi])^*$.

El Teorema de Banach-Alaoglu afirma que dicha bola es débilmente-* compacta y dado que $C[-\pi,\pi]$ es separable, se sigue que esta bola es metrizable en la topología débil-*. Así, existe una subsucesión de $(r_j)_{j=1}^{\infty}$, (la cual denotaremos de la misma manera para aligerar la notación), que converge de forma creciente a 1, y medidas $\mu_1, \mu_2 \in M([-\pi,\pi])$ tales que

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\log^+|H(r_je^{it})|dt \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t)d\mu_1(t)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\log^-|H(r_je^{it})|dt \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t)d\mu_2(t)$$

cuando $j\to\infty$ para toda $g\in C[-\pi,\pi]$. En particular, si $g(t)=1$ se tiene

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|H(r_je^{it})|dt = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_1(t)$$
$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|H(r_je^{it})|dt = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_2(t).$$

Demostraremos ahora que

$$d\mu_1(t) = \log^+|H(e^{it})|dt.$$

Para ello, basta probar que $\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|H(r_je^{it})|dt = \int_{-\pi}^{\pi} \log|H(e^{it})|dt.$

Si $p\geq 1$, usamos que

$$\begin{aligned}|\log^+|H(r_je^{it})| - \log^+|H(e^{it})|| &\leq ||H(r_je^{it})| - |H(e^{it})||\\ &\leq |H(r_je^{it}) - H(e^{it})|\end{aligned}$$

y como $H^p\subset H^1$, cuando $j\to\infty$ se tiene $\int_{-\pi}^{\pi}|\log^+|H(r_je^{it})| - \log^+|H(e^{it})|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi}|H(r_je^{it}) - H(e^{it})|dt \to 0$.

Ahora, si $0<p<1$

$$\begin{aligned}|\log^+|H(r_je^{it})| - \log^+|H(e^{it})|| &\leq \frac{1}{p}||H(r_je^{it})|^p - |H(e^{it})|^p|\\ &\leq \frac{1}{p}|H(r_je^{it}) - H(e^{it})|^p\end{aligned}$$

y entonces $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\log^+|H(r_je^{it})| - \log^+|H(e^{it})||dt = 0$, pues $\int_{-\pi}^{\pi}|H(r_je^{it}) - H(e^{it})|^p dt \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Observemos ahora que las funciones $z \mapsto \log H(r_jz)$ pertenecen a H^1, pues

$$\sup_{0\le r<1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\log|H(r_jre^{it})||dt < \infty$$

$$\sup_{0\le r<1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\arg[H(r_jre^{it})]|dt \le \pi(2\pi) < \infty$$

y por el Corolario 2.15

$$\log H(r_jz) = i\arg H(0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|H(r_je^{it})|dt$$

$$= ic + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log^+|H(r_je^{it})|dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log^-|H(r_je^{it})|dt.$$

Haciendo j tender a infinito se obtiene

$$\log H(z) = ic + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log^+|H(e^{it})|dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_2(t).$$

Pero por el Teorema de Descomposición de Lebesgue sabemos que $d\mu_2(t) = g(t)dt + d\sigma(t)$ donde $g \ge 0$ es integrable y σ es una medida singular no negativa.

De forma que

$$\log H(z) = ic + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}k(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)$$

donde $k(t) = \log^+|H(e^{it})| - g(t)$ es integrable. De aquí, si $z = re^{i\theta}$ se tiene

$$\log|H(z)| = Re[\log H(z)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right][k(z)dt - d\sigma(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)[k(t)dt - d\sigma(t)],$$

es decir, $\log|H(z)| = P(k(t)dt - d\sigma(t))$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\log|H(e^{it})| &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t k(s)ds - \int_0^t d\sigma(s)\right]\\ &= k(t) - \frac{d}{dt}\int_0^t d\sigma(s)\\ &= k(t)\end{aligned}$$

pues σ es singular con respecto a la medida de Lebesgue.

Como $|F(e^{it})| = |H(e^{it})|$ para casi toda $t \in [-\pi, \pi]$, podemos escribir

$$\log\frac{F(z)}{B(z)} = ic + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)$$

y en consecuencia

$$F(z) = e^{ic}B(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)}e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt}.$$

□

En adelante, usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned}I_F(z) &= e^{ic}B(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)}\\ E_F(z) &= e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt}\end{aligned}$$

y llamaremos a I_F y E_F los factores interior y exterior de F, respectivamente.

Proposición 4.24. *Si $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$, entonces*

i) $E_F \in H^p$ *y* $\|E_F\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.

ii) $|I_F(z)| \leq 1$ *en* D *y* $|I_F(e^{it})| = 1$ *para casi toda* $t \in [-\pi, \pi]$.

Demostración. La primera parte de *i)* se tiene por que

$$\begin{aligned}|E_F(z)|^p &= \left|e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt}\right|^p\\ &= e^{p\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right]\log|F(e^{it})|dt}\\ &= e^{P(\log|F(e^{it})|^p)}\\ &\leq P(|F(e^{it})|^p).\end{aligned}$$

La segunda parte de *i)* se tiene porque

$$
\begin{aligned}
|E_F(e^{i\theta})| &= \lim_{r\to 1} |E_F(re^{i\theta})| \\
&= \lim_{r\to 1} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right]\log|F(e^{it})|dt} \\
&= \lim_{r\to 1} e^{\log|F(re^{i\theta})|} \\
&= \lim_{r\to 1} |F(re^{i\theta})| \\
&= |F(e^{i\theta})|.
\end{aligned}
$$

Para la primera parte de *ii)*, sólo hay que observar que

$$|I_F(z)| = |B(z)|e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\sigma(t)} \le e^{-P(\sigma)} \le 1$$

pues $P(\sigma) \ge 0$. La segunda parte de *ii)* se sigue imediatamente de *i)*. Se concluye también que $I_F \in H^\infty$. □

Definición 4.25. *Diremos que una función $F \in H^p$ es una función interior si $E_F = 1$; diremos que F es exterior si I_F es constante.*

Corolario 4.26. *Las funciones interiores son precisamente aquellas funciones $F \in H^\infty$ tales que $|F(e^{it})| = 1$.*

Demostración. Si $E_F = 1$, es trivial que $F \in H^\infty$ y $|F(e^{it})| = |E_F(e^{it})| = 1$. Ahora bien, si $|F(e^{it})| = 1$, entonces $\log|F(e^{it})| = 0$ y $E_F(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt} = 1$. □

Corolario 4.27. *Si $F \in H^p$, con $0 < p \le \infty$, y no es idénticamente cero, entonces*

$$\log|F(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(e^{it})|dt \tag{4.7}$$

y la igualdad se verifica si y sólo si F es una función exterior.

Demostración. Por el Teorema de Factorización Canónica se tiene

$$|F(0)| = |B(0)|e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(t)} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(e^{it})|dt} \le e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(e^{it})|dt},$$

de donde se sigue (4.7). La igualdad se satisface si y sólo si $\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(t) = 0$ y $|B(0)| = 1$:

Por el Teorema del Módulo Máximo sabemos que $|B(0)| = 1$ si y sólo si $B(z) = 1\ \forall\ z \in D$. También $\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(t) = 0$ si y sólo si $\sigma = 0$. De manera que la igualdad se satisface si y sólo si I_F es constante, es decir, si F es una función exterior. □

El siguiente Teorema es una aplicación del Corolario anterior.

Teorema 4.28. *Supongamos que $F \in H^p$ y $F^{-1} \in H^p$ para alguna $0 < p \leq \infty$. Entonces F es una función exterior.*

Demostración. Si aplicamos el corolario anterior a F y F^{-1}, tendremos

$$\log|F(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(e^{it})|dt,$$

$$-\log|F(0)| = \log|F^{-1}(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F^{-1}(0)|dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(0)|dt,$$

lo cual implica que $\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(e^{it})|dt$. Por el corolario anterior, concluimos que F es una función exterior. □

Teorema 4.29. *Sea $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones exteriores en H^p decreciente en módulo para todo $z \in D$. Supongamos que $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ converge uniformemente en conjuntos compactos de D a una función $F(z)$. Entonces F es una función exterior, siempre que F no sea idénticamente cero.*

Demostración. Obsérvese primero que F es una función holomorfa en D, por ser el límite uniforme en conjuntos compactos de D, de una sucesión de funciones holomorfas en el disco. Además $F \in H^p$, pues $|F(z)| \leq |F_1(z)|\ \forall\, z \in D$.

En virtud del Corolario 4.7, para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\log|F_j(0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F_j(e^{it})|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F_j(e^{it})|dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|F_j(e^{it})|dt.\end{aligned}$$

Como $|F_j(z)| \leq |F_1(z)|\ \forall\, z \in D$ y $\forall\, j \in \mathbb{N}$, se sigue que $|F_j(e^{it})| \leq |F_1(e^{it})|$ y en consecuencia

$$0 \leq \log^+|F_j(e^{it})| \leq \log^+|F_1(e^{it})| \in L^1([-\pi,\pi]).$$

Usando el Teorema de Convergencia Dominada tenemos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F_j(e^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|F(e^{it})|dt.$$

Para $(\log^- |F_j(e^{it})|)_{j=1}^{\infty}$, usamos que $\log^-(t)$ es decreciente y por tanto

$$0 \leq \log^- |F_j(e^{it})| \leq \log |F_{j+1}(e^{it})| \ \forall \ j \in \mathbb{N}.$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Monótona a la sucesión $(\log^- |F_j(e^{it})|)_{j=1}^{\infty}$ obtenemos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- |F_j(e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- |F(e^{it})| dt.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(e^{it})| dt &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F_j(e^{it})| dt \\ &= \lim_{j\to\infty} \log |F_j(0)| \\ &= \log |F(0)| \end{aligned}$$

y F es una función exterior. □

Teorema 4.30. *Sea $F \in H^p$, con $0 < p \leq \infty$, no idénticamente cero, tal que $Re[F(z)] \geq 0$ para toda $z \in D$. Entonces F es una función exterior.*

Demostración. Construiremos una sucesión de funciones exteriores, decreciente en módulo que converge uniformemente en D a nuestra función F.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ definamos $F_j(z) = F(z) + 1/j$, entonces $F_j \in H^p \ \forall \ j \in H^p$ y F_j es una función exterior, ya que $F_j^{-1} \in H^\infty \subset H^p$. Además, $F_j \to F$ uniformemente en D cuando $j \to \infty$ y $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ es decreciente en módulo. Por el Teorema anterior, concluimos que el límite de $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ es una función exterior. □

Teorema 4.31. *Sea $K(z)$ el cociente de dos funciones exteriores y supongamos que $K(e^{it})$ pertence a $L^p([-\pi,\pi])$ para $0 < p \leq \infty$. Entonces $K \in H^p$.*

Demostración. Como $K(z)$ es el cociente de dos funciones exteriores, podemos escribir

$$K(z) = \frac{E_F(z)}{E_G(z)} = e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \frac{|F(e^{it})|}{|G(e^{it})|} dt}$$

salvo una constante multiplicativa. Nótese que $K(z)$ es holomorfa en D, pues es el cociente de dos funciones holomorfas que no se anulan en D. Ahora, si $p < \infty$, usando la desigualdad de Jensen, obtenemos

$$|K(z)|^p = e^{P(\log |K(e^{it})|^p)} \leq P(|K(e^{it})|^p).$$

De lo anterior se sigue que $K \in H^p$. Si $p = \infty$, sabemos que

$$|K(z)| = e^{P(\log|K(e^{it})|)} \leq P(|K(e^{it})|)$$

y de nuevo, podemos concluir que $K(z) \in H^\infty$. □

A continuación desarrollaremos una técnica para construir conjuntos densos en los espacios H^p. Antes de iniciar, necesitamos recordar una consecuencia del famoso Teorema de Hahn-Banach:

"Sea X un espacio normado y Z un subespacio de X. Sea $x_o \in X$ tal que $\delta = d(x_0, Z) > 0$, entonces existe $T \in X^*$ tal que $\|T\|_{X^*} = 1$, $T(x_0) = \delta$ y $T(z) = 0$ para todo $z \in Z$".

Para construir nuestros conjuntos densos, necesitaremos de los siguientes lemas:

Lema 4.32. *Sea X un espacio normado, U un subespacio de X y sea $g = 0$ en U. Si toda extensión continua de g a X es cero, entonces U es denso en X.*

Demostración. Si U no fuera denso en X, entonces existiría $y \in X$ tal que $d = d(y, U) \geq 0$ y por el Teorema de Hahn-Banach existiría una funcional $\Lambda \in X^*$ tal que $\|\Lambda\|_{X*} = 1$, $\Lambda(y) = d$ y $\Lambda(z) = 0 \; \forall \; z \in U$.

Así, Λ sería una extensión no cero y continua de g a X, lo cual contradice nuestras hipótesis. Dicha contradicción viene de suponer que U no es denso en X, por tanto, U debe ser denso. □

Lema 4.33. *Sea $F \in H^p$, con $p \leq 1$, una función exterior. Si $K \in H^{p'}$ y se cumple que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} E_F(e^{it}) e^{ijt} K(e^{it}) dt = 0 \;\; \forall \; j = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.8}$$

entonces para toda $G \in H^p$ se verifica

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it}) K(e^{it}) dt = 0.$$

Demostración. Si (4.8) se satisface, los coeficientes de Fourier de la función $h(t) = E_F(e^{it}) e^{-it} K(e^{it})$ correspondientes a frecuencias negativas son cero. Como h pertence a $L^1([-\pi, \pi])$, existe $H \in H^1$ tal que

$$\begin{aligned} E_F(e^{it}) K(e^{it}) &= e^{it} H(e^{it}) \\ &= e^{it} I_H(e^{it}) E_H(e^{it}). \end{aligned}$$

Consecuentemente, $|E_H(e^{it})/E_F(e^{it})| = |K(e^{it})| \in L^{p'}([-\pi,\pi])$. El Teorema 4.31 afirma que $E_H(z)/E_F(z)$ pertence a $H^{p'}$. Si denotamos por $S(z)$ a este último cociente, tendremos que $K(e^{it}) = e^{it} I_H(e^{it}) S(e^{it})$ y $\forall\, G \in H^p$

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})K(e^{it})dt = \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})I_H(e^{it})S(e^{it})e^{it}dt = 0.$$

La última integral es cero porque representa el coeficiente de Fourier correspondiente a la frecuencia -1 de una función en H^1. □

Teorema 4.34. *Sea $F \in H^p$, con $0 < p < \infty$, una función exterior. Sea $\mathbb{P} = \{P(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j^{(k)} z^j : a_j^{(k)} \in \mathbb{C}\ \forall\, j = 0,1,2,\ldots,k,\ k \in \mathbb{N}\}$ el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$. Entonces $F \cdot \mathbb{P} = \{F(z)P(z) : P \in \mathbb{P}\} \subset H^p$ es denso en H^p.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $F = E_F$. Probaremos primero el caso $p \geq 1$:

Sabemos que $E_F \cdot \mathbb{P}$ es una subespacio de H^p y que a su vez H^p es una subespacio cerrado de $L^p([-\pi,\pi])$. A cada $K(e^{it}) \in H^{p'}$ podemos asociarle el funcional continuo $\phi_K : E_F \cdot \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\phi_K(E_F(e^{it})e^{ijt}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_F(e^{it})e^{ijt}K(e^{it})dt.$$

Obsérvese que cualquier extensión de ϕ_K a H^p tendrá la forma

$$\phi_K(G(e^{it})) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})K(e^{it})dt.$$

Si tomamos $K \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ de forma que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_F(e^{it})e^{ijt}K(e^{it})dt = 0\ \forall\, j \geq 0$$

tendremos definido un funcional lineal continuo ϕ_K que se anula en $E_F \cdot \mathbb{P}$ y por el Lema 4.33 toda extensión de ϕ_K a H^p debe ser cero. Usando el Lema 4.32, podemos concluir que $E_F(z) \cdot \mathbb{P}$ es denso en H^p.

Para el caso $0 < p < 1$ bastará probar que el resultado se satisface para $1/2 < p < 1$, ya que $(0,1] = \cup_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}}]$ y entonces se puede proceder por inducción.

Supongamos que $1/2 < p < 1$: dada $F \in H^p$ y $\epsilon > 0$, queremos encontrar $P \in \mathbb{P}$ tal que $\|H - E_F P\|_{H^p}^p < \epsilon$.

Como $F(z) = E_F(z) \in H^p$ no tiene ceros en D, existe una función holomorfa $A(z)$ tal que $E_F(z) = A^2(z)$. Notemos que $A(z)$ pertence a H^{2p} y es una función exterior, ya que

$$\log|A(0)| = \frac{1}{2}\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\log|F(e^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|A(e^{it})|dt.$$

Aún más $A(z) = E_A(z)$ pues

$$\begin{aligned} A(z) = E_F^{1/2}(z) &= e^{\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt} \\ &= e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|^{1/2}dt} \\ &= e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|A(e^{it})|dt} \\ &= E_A(z). \end{aligned}$$

Ahora, para la misma $H \in H^p$, podemos encontrar $R \in \mathbb{P}$ tal que $|H(z) - R(z)| < \epsilon/3$ y así $\|H - R\|_{H^p}^p < \epsilon/3$.

Como $R \in \mathbb{P}$, se sigue que $R \in H^{2p}$. Puesto que $E_A(z)$ es una función exterior en H^{2p} y $2p > 1$, podemos encontrar una polinomio $Q \in \mathbb{P}$ tal que $\|R - E_A Q\|_{H^{2p}}^p < \epsilon/3$. Lo anterior implica que $\|R - E_A Q\|_{H^p}^p < \epsilon/3$, pues $p < 2p$.

Elijamos ahora $\delta < \frac{(\epsilon/3)^{1/p}}{\|E_F\|_{H^p}^{p/2}}$, entonces existe $P \in \mathbb{P}$ tal que $\|Q - E_A P\|_{H^{2p}} < \delta$. De esta forma

$$\begin{aligned} \|E_A Q - E_F P\|_{H^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|E_A(e^{it})[Q(e^{it}) - E_A(e^{it})P(e^{it})]|^p dt \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|E_A(e^{it})|^{2p}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Q(e^{it}) - E_A(e^{it})P(e^{it})|^{2p}\right)^{1/2} \\ &= \|E_F\|_{H^p}^{p/2}\|Q - E_A P\|_{H^{2p}}^p \\ &\leq \epsilon/3. \end{aligned}$$

Por lo expuesto hasta aquí, podemos ver que

$$\|H - E_F P\|_{H^p}^p \leq \|H - R\|_{H^p}^p + \|R - E_A Q\|_{H^p}^p + \|E_A Q - E_F P\|_{H^p}^p < \epsilon$$

con lo cual queda demostrado el resultado. $\square$

Corolario 4.35. *Si $F \in H^p$, con $0 < p < \infty$, entonces la cerradura en H^p del espacio $F \cdot \mathbb{P}$ es $I_F \cdot H^p$.*

Demostración. Notemos primero que $I_F \cdot H^p \subset H^p$ es un subespacio cerrado de $L^p([-\pi, \pi])$, pues es la imagen de H^p bajo la isometría $G \mapsto I_F G$. Vemos que esta función es en efecto, una isometría:

$$\|I_F G\|_{H^p}^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |I_F(e^{it}) G(e^{it})|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{it})|^p dt = \|G\|_{H^p}^p.$$

Obsérvese también que $F \cdot \mathbb{P} \subset I_F \cdot H^p$: si $P \in \mathbb{P}$, entonces $FP = I_F(E_F P) \in I_F \cdot H^p$. En consecuencia

$$\overline{F \cdot \mathbb{P}} \subset \overline{I_F \cdot H^p} = I_F \cdot H^p \subset H^p.$$

Si denotamos por $(\overline{F \cdot \mathbb{P}})_{H^p}$ a la cerradura de $F \cdot \mathbb{P}$ en H^p, entonces $\forall\, F \in H^p$

$$(\overline{F \cdot \mathbb{P}})_{H^p} = \overline{F \cdot \mathbb{P}} \cap H^p = \overline{F \cdot \mathbb{P}}.$$

También sabemos que $\overline{E_F \cdot \mathbb{P}} = H^p$ y así

$$\overline{F \cdot \mathbb{P}} = \overline{I_F \cdot E_F \cdot \mathbb{P}} = I_F \cdot \overline{E_F \cdot \mathbb{P}} = I_F \cdot H^p.$$

$\square$

Conclusiones

Hemos caracterizado a las funciones en H^p, con $p > 1$, como integrales de Poisson de funciones en $L^p([-\pi, \pi])$ con coeficientes de Fourier cero para frecuencias negativas.

Gracias al Teorema de Factorización de Riesz, hemos logrado probar que toda función en H^p tiene límites radiales casi en todas partes, más aún, este límite radial es una función en $L^p([-\pi, \pi])$, cuya norma $\|\cdot\|_p$ coincide con la norma $\|\cdot\|_{H^p}$ de su función original. Hemos encontrado así, una isometría entre estos espacios, y la forma de pasar de uno a otro es tomar límite cuando $r \to 1$. Si $p \geq 1$, podemos regresar a H^p por medio de la integral de Poisson. De esta manera, identificamos a H^p con un subespacio cerrado de $L^p([-\pi, \pi])$.

El estudio del operador función conjugada, nos ha permitido hacer la identificiación anterior aún más clara, pues hemos visto que para $p \geq 1$, $H^p = \{f + i\tilde{f} + ic : f \in ReL^p([-\pi, \pi]), \tilde{f} \in L^p \ y \ c \in \mathbb{R}\}$ y no sólo eso, también mostramos que ReH^p coincide con $ReL^p([-\pi, \pi])$ cuando $1 < p < \infty$, no así para $p = 1$ y $p = \infty$.

También encontramos que el espacio dual de H^p, cuando $1 < p < \infty$, es, como era de esperarse, el espacio $H^{p'}$, donde p y p' son exponentes conjugados. Para $0 < p < 1$ observamos que al igual que $L^p([-\pi, \pi])$, H^p no es localmente convexo. A pesar de no haberlo demostrado en este trabajo, se sabe que el espacio dual de H^p para este mismo rango de valores de p, consta de una cantidad suficiente de funcionales lineales, a diferencia del espacio dual de $L^p([-\pi, \pi])$, formado solamente por el funcional lineal cero. Todo lo anterior, nos permite concluir, al menos cuando $0 < p < 1$, que los espacios H^p son, vía estos argumentos, buenos sustitutos de los espacios $L^p([-\pi, \pi])$.

Ahora bien, el estudio de los espacios de Hardy no termina aquí, aún quedan muchos tópicos que tratar, pues los temas desarrollados en este trabajo sólo cubren la parte básica de la Teoría clásica de espacios H^p. Como se mencionó en la introducción, es posible definir estos espacios en el semiplano superior, en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ o mejor aún, es posible hacer un estudio similar a la teoría clásica de espacios de Hardy considerando ahora funciones que toman valores en un espacio de Banach. Aún existe trabajo que realizar sobre estos espacios y estoy segura de que en el futuro, me gustaría continuar con el estudio de esta Teoría.

Apéndice

Apéndice A

Funciones Armónicas

Definición .36. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ y sea $u : \Omega \to \mathbb{C}$ un función. Diremos que u es armónica en Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.*

Existe una relación natural entre las funciones armónicas y las funciones holomorfas en el plano complejo, pues toda función analítica es una función armónica con valores en $\mathbb{C}$. También es posible demostrar que una función con valores reales, definida en un conjunto simplemente conexo del plano complejo, es armónica si y sólo si es la parte real de una función holomorfa.

Si u es una función armónica con valores reales definida en el disco $D(0,R)$, entonces es posible encontrar una representación en series para u, la cual converge uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0,R)$.

Veamos: sabemos que existe una función F, analítica en $D(0,R)$ tal que $u(z) = Re[F(z)]$ para todo $z \in D(0,R)$. Como F es holomorfa en $D(0,R)$, puede representarse como una serie de potencias en el disco, digamos que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Notando que $u(z) = \frac{1}{2}\left[F(z) + \overline{F(z)}\right]$ y escribiendo $z = re^{i\theta}$ con $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$

obtenemos una representación en series para u

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \tag{9}$$

donde

$$a_k = \begin{cases} \frac{\overline{c_{-k}}}{2} & si\ k < 0 \\ Re[c_0] & si\ k = 0 \\ \frac{c_k}{2} & si\ k > 0. \end{cases}$$

Además la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $D(0, R)$.

Si $R > 1$, tendremos que la serie en (9) convergerá uniformemente. Así, si consideramos la función $t \to u(e^{it})$, para $t \in [-\pi, \pi]$, veremos que sus coeficientes de Fourier serán $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}\right] dt = a_j \ \ \forall\, j \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo esta expresión para a_j en (9) y usando la convergencia uniforme de la serie obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)}\right] dt.$$

Cuando $0 \le r < 1$, la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}$ converge uniformemente en t.

Proposición .37. *La función $P_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} \quad 0 \le r < 1$$

se llama Núcleo de Poisson para el disco unitario y tiene las siguientes propiedades:

i) *Es continua, positiva y periódica en t, con período de 2π.*

ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1\ \forall\, r \in [0, 1)$.

iii) *Para cualquier $0 < \delta < \pi$ se tiene que $\sup_{\delta \le |t| \le \pi} Pr(t) \to 0$ si $r \to 1$.*

Demostración. Es claro que $P_r(t)$ es continuo y positivo, y como $\cos t$ es 2π-periódico, $P_r(t)$ también lo es. Para *ii)* obsérvese que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = dt \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 1.$$

Por último, para *iii)*, basta observar que $1-2r\cos\delta+r^2 \leq 1-2r\cos|t|+r^2$ para $|t|\geq\delta$, y que $g(r)=1-2r\cos\delta+r^2$ tiene un mínimo en $r=\cos\delta$, por lo cual

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-\cos\delta}.$$

□

Proposición .38. *Si u es una función armónica real, definida en el disco $D(0,R)$ con $R>1$, entonces para $0\leq r<1$ y $\theta\in[-\pi,\pi]$*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u(e^{it})dt.$$

Demostración. Es consecuencia de los comentarios anteriores. □

Mostraremos ahora que la representación de Poisson es válida para una clase más amplia de funciones armónicas en el disco unitario.

Teorema .39. *Sea u una función armónica en D tal que*

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty \tag{10}$$

para algún $1<p<\infty$. Entonces existe una función $f\in L^p([-\pi,\pi])$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt.$$

Así, u es la integral de Poisson de alguna función $f\in L^p([-\pi,\pi])$.

Demostración. Tomemos una sucesión $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ de números reales no negativos tal que $r_j\uparrow 1$ y consideremos las funciones $f_j:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ tales que $f_j(t)=u(r_je^{it})$. Denotemos por K al supremo en (10). Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_je^{it})|^p dt \leq K$$

se tiene que $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ está contenida en una bola cerrada B de $L^p([-\pi,\pi])\cong(L^{p'}([-\pi,\pi]))^*$, donde p y p' son exponentes conjugados. Por el Teorema de Banach-Alaoglu (Consultar [13], p. 68-69), B es débilmente-* compacta y como $L^{p'}([-\pi,\pi])$ es separable, se sigue que dicha bola es metrizable en la topología débil-* (Ver [13], Teo. 3.6, p. 70). Por tal motivo, es posible encontrar una subsucesión de $(f_j)_{j=1}^{\infty}$, la cual denotaremos de la misma forma, que converge en la topología débil-* a alguna función $f \in L^p([-\pi,\pi]) \cong (L^{p'}([-\pi,\pi]))^*$.

Recordemos que la isometría entre $L^p([-\pi,\pi])$ y $(L^{p'}([-\pi,\pi]))^*$ está dada por la función $L^p([-\pi,\pi]) \to (L^{p'}([-\pi,\pi]))^*$ tal que $f \mapsto \Lambda_f$ donde

$$\Lambda_f(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\overline{f(t)}dt \ \ \forall\, g \in L^{p'}([-\pi,\pi]).$$

Por lo expuesto hasta aquí, se tiene que si $j \to \infty$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\overline{f_j(t)}dt \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\overline{f(t)}dt \ \ \forall\, g \in L^{p'}([-\pi,\pi]).$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideremos la función $u_j : D(0,1/r_j) \to \mathbb{R}$ tal que $u_j(z) = u(r_j z)$, la cual es armónica en $D(0,1/r_j)$. Puesto que $1/r_j > 1$, tenemos la siguiente representación para u_j:

$$u_j(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u_j(e^{it})dt$$

la cual es válida para toda $j \in \mathbb{N}$, para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Podemos reescribir la representación anterior como

$$\begin{aligned} u(r_j re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(r_j e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f_j(t)dt. \end{aligned}$$

Si hacemos j tender a infinito en la expresión anterior, el lado izquierdo tenderá a $u(re^{i\theta})$, mientras que el lado derecho tenderá a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt$, puesto que $P_r(t) \in L^{p'}([-\pi,\pi])$ por ser una función continua.

De esta forma

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt$$

para toda $0 \leq r < 1$, $\theta \in [-\pi,\pi]$ y alguna función $f \in L^p([-\pi,\pi])$. $\square$

En el resultado anterior sólo consideramos el caso en el que $1 < p < \infty$. Resulta natural preguntarnos qué sucede cuando $p = 1$ y cuando $p = \infty$. Si modificamos la condición (10) de manera adecuada, es posible obtener un resultado análogo al Teorema anterior para $p = \infty$. El caso $p = 1$ será tratado de forma un poco distinta.

Teorema .40. *Sea u una función armónica en D tal que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_\infty < \infty \tag{11}$$

donde $u_r(t) = u(re^{it})$. Entonces existe una función $f \in L^\infty([-\pi, \pi])$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

para toda $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demostración. De nuevo tomemos una sucesión de números reales no negativos $(r_j)_{j=1}^\infty$ tal que $r_j \uparrow 1$ y para cada $j \in \mathbb{N}$ definamos $f_j(t) = u(r_j e^{it})$. Denotemos por K al supremo en (11), entonces

$$\|f_j\|_\infty = \|u_{r_j}\|_\infty \leq K$$

y por tanto $(f_j)_{j=1}^\infty$ está contenida en una bola cerrada B de $L^\infty([-\pi, \pi]) \cong (L^1([-\pi, \pi]))^*$. Como $L^1([-\pi, \pi])$ es separable, podemos usar el mismo argumento que en la demostración del Teorema anterior para obtener el resultado. $\square$

Una pieza clave en la demostración de estos Teoremas ha sido el hecho de que para $1 < p \leq \infty$, se tiene que $L^p([-\pi, \pi]) \cong (L^{p'}([-\pi, \pi]))^*$, donde p y p' son exponentes conjugados. Para $p = 1$ necesitamos hacer algunas observaciones.

Consideremos al espacio $M([-\pi, \pi])$ formado por las medidas de Borel complejas en $[-\pi, \pi]$. Dada $\mu \in M([-\pi, \pi])$, la función $|\mu|$ definida en $\mathscr{B}([-\pi, \pi])$ como

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| : \{A_i\}_{i=1}^\infty \text{ es una partición de } A \right\}$$

resulta ser una medida positiva en $\mathscr{B}([-\pi, \pi])$, y es llamada la variación total de μ (Ver [14], Capítulo 6, p.124-126).

En $M([-\pi, \pi])$ podemos considerar la norma $\|\mu\| = |\mu|([-\pi, \pi])$, con la cual $M([-\pi, \pi])$ es completo. Es posible mostrar que el espacio $L^1([-\pi, \pi])$ está inmerso en $M([-\pi, \pi])$ mediante la asociación $f \mapsto \mu_f$ donde $\mu_f(E) = \int_E f(t)dt$. Más aún, esta asociación es una isometría, pues

$$\|\mu_f\| = |\mu_f|([-\pi,\pi]) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt = \|f\|_1$$

(Consúltese [15], Teo. 6.3, p.134).

Por otra parte, por el Teorema de Representación de Riesz-Markov, se sabe que $M([-\pi,\pi])$ es isometricamente isomorfo al dual de $C([-\pi,\pi])$ (Ver [4], p.223). Con lo expuesto hasta aquí, podremos dar un resultado análogo al Teorema .39 para el caso $p = 1$.

Teorema .41. *Sea u una función armónica en D tal que*

$$\sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|dt < \infty.$$

Entonces existe una medida de Borel μ sobre $[-\pi,\pi]$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$$

para $0 \le r < 1$ y $\theta \in [-\pi,\pi]$.

Demostración. Sea $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $r_j \uparrow 1$ y consideremos las funciones $f_j(t) = u(r_j e^{it})$, las cuales forman una sucesión $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ acotada en $L^1([-\pi,\pi])$.

Como $L^1([-\pi,\pi])$ se encuentra isométricamente inmerso en $M([-\pi,\pi]) \cong (C([-\pi,\pi])^*$, tenemos que la sucesión $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ está contenida en una bola cerrada de $(C([-\pi,\pi]))^*$. Por el Teorema de Banach-Alaoglu tal bola es débilmente-* compacta y como $C([-\pi,\pi])$ es separable, dicha bola es metrizable.

Luego, $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión, la cual denotaremos de la misma forma, que converge en la topología débil-* a una medida $\mu \in (C([-\pi,\pi]))^*$, es decir, si $j \to \infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f_j(t)dt \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(t)d\mu(t)dt \;\; \forall g \in C([-\pi,\pi]).$$

Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$ definamos la función $u_j(z) = u(r_j z)$, la cual es armónica en $D(0, 1/r_j)$. Puesto que $1/r_j > 1$, u_j tiene la siguiente representación

$$u_j(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u_j(e^{it})dt$$

la cual es válida para $r \in [0,1)$ y $\theta \in [-\pi,\pi]$. Lo anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} u(r_j re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u(r_j e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f_j(t)dt \end{aligned}$$

y haciendo j tender a infinito y usando que $P_r(t) \in C([-\pi,\pi])$ obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t).$$

$\square$

Definición .42. *Una identidad aproximada en* $[-\pi,\pi]$ *es una familia* $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de funciones* 2π*-periódicas en* $L^1([-\pi,\pi])$*, donde* I *es un conjunto dirigido, que satisface las siguientes condiciones:*

i) $\sup\limits_{\alpha\in I} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt = K < \infty.$

ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_\alpha(t)dt = 1 \;\forall\; \alpha \in I.$

iii) Para toda $0<\delta<\pi$ *se tiene que* $\int_{\delta<|t|<\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt \to 0$ *cuando* α *"crece" en el conjunto dirigido* I.

Obsérvese que el Núcleo de Poisson es una identidad aproximada en $[-\pi,\pi]$. Las propiedades de $(P_r)_{0\leq r<1}$ nos permitirán obtener recíprocos para los Teoremas .39 y .40.

Teorema .43. *Sea* $f \in L^p([-\pi,\pi])$ *y sea* $u = P(f)$ *su integral de Poisson, es decir,*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt$$

con $0 \leq r < 1, -\pi \leq t \leq \pi$. *Entonces* u *es armónica en* D. *Además, si* $p < \infty$, *para toda* $r \in [0,1)$ *se satisface*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt.$$

Si $p = \infty$, *se tiene que* $|u(z)| \leq \|f\|_\infty$ *para toda* $z \in D$.

Demostración. Probaremos primero el caso en que f toma valores reales.

Sea $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ la serie de Fourier de f, entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}\right] f(t)dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}a_k e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Como f toma valores reales, $a_0 \in \mathbb{R}$ y entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k a_k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} r^k e^{-ik\theta} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k a_k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} \\ &= Re\left[2\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + a_0\right] \end{aligned}$$

y puesto que $2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + a_0$ es una función holomorfa en D, concluimos que u es armónica en D.

Ahora, si f toma valores en $\mathbb{C}$, basta notar que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)Re[f(t)]dt + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)Im[f(t)]dt$$

y que $Re[f(t)]$ e $Im[f(t)]$ son funciones en $L^p([-\pi,\pi])$ que toman valores reales, para usar el caso anterior y concluir que u es armónica en D.

Para obtener las desigualdades observemos que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)f(\theta - t)dt \end{aligned}$$

y por la desigualdad integral de Minkowski tendremos que

$$\begin{aligned} \|u(re^{i\cdot})\|_p &= \|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot - t)P_r(t)dt\|_p \\ &\leq \|f(\cdot - t)\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt \\ &= \|f\|_p. \end{aligned}$$

Para $p = \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)|f(\theta - t)|dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\|f\|_\infty dt \\ &= \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

y así, $|u(z)| \leq \|f\|_\infty \ \forall\, z \in D$. $\square$

Teorema .44. *Sea μ una medida de Borel compleja en $[-\pi, \pi]$ y sea $u = P(\mu)$ su integral de Poisson. Entonces $u(z)$ es armónica en D y para toda $r \in [0, 1)$ se tiene*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) = \|\mu\|.$$

Demostración. De nuevo, consideraremos primero el caso en que μ toma valores reales. Sea $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ la serie de Fourier de μ, donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}d\mu(t).$$

Entonces para $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}\right]d\mu(t) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik\theta}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}d\mu(t)\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}a_k e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Como μ toma valores reales, $a_0 \in \mathbb{R}$ y en consecuencia, podemos reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} r^k e^{-ikt} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ikt} \\ &= Re\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (re^{i\theta})^k\right]. \end{aligned}$$

Es decir, u es la parte real de una función holomorfa en D y consecuentemente, es armónica en D.

Supongamos ahora que μ toma valores en $\mathbb{C}$, entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d[Re\mu(t)] + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d[Im\mu(t)]$$

y como $Re[\mu(t)]$ e $Im[\mu(t)]$ son medidas reales, por el caso anterior, u es armónica en

D. Además, usando el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\theta \right] d|\mu|(t) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds \right] d|\mu|(t) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t).
\end{aligned}$$

□

Hasta aquí, hemos probado lo siguiente:

i) Una función u es armónica en D y

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty$$

para algún $1 < p < \infty$ si y sólo si $u = P(f)$ para alguna función $f \in L^p([-\pi, \pi])$.

ii) Una función u es armónica en D y

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_\infty < \infty$$

donde $u_r(t) = u(re^{it})$ si y sólo si $u = P(f)$ para alguna función $f \in L^\infty([-\pi, \pi])$.

iii) Una función u es armónica en D y

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt < \infty$$

si y sólo existe una medida de Borel compleja μ sobre $[-\pi, \pi]$ tal que $u = P(\mu)$.

Examinemos ahora el comportamiento de las integrales de Poisson en la frontera.

Teorema .45. *Sea* $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ *una identidad aproximada en* $[-\pi,\pi]$*, donde* $(I,\prec)$ *es un conjunto dirigido. Entonces*

i) *Si* $f \in L^p([-\pi,\pi])$ *con* $1 \leq p < \infty$*, y* $f_\alpha(\theta)$ *es la convolución*

$$f_\alpha(\theta) = (f * \Phi_\alpha)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\Phi_\alpha(t)dt,$$

entonces $f_\alpha \to f$ *en* $L^p([-\pi,\pi])$.

ii) *Si* f *es continua y* 2π*-periódica, entonces* $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ *converge a* f *uniformemente en* $[-\pi,\pi]$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Obsérvese que para cada $\alpha \in I$ se tiene que

$$f_\alpha(\theta) - f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\Phi_\alpha(t)dt - f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta - t) - f(\theta)]\Phi_\alpha(t)dt.$$

Tomando norma $\|\cdot\|_p$ y usando la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\|f_\alpha - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\Phi_\alpha(t)|dt. \qquad (12)$$

Puesto que $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una identidad aproximada, existe $K > 0$ tal que

$$\sup_{\alpha\in I} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt \equiv K < \infty.$$

Como el espacio de funciones continuas $C([-\pi,\pi])$ es denso en $L^p([-\pi,\pi])$, existe una función continua g tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{8K}.$$

Para cada $\theta \in [-\pi,\pi]$, definamos $g_t(\theta) = g(\theta - t) - g(\theta)$. Obsérvese que $g_t(\theta) \to 0$ si $t \to 0$, pues g es continua en θ. Además, para toda $\theta \in [-\pi,\pi]$ se verifica que $|g_t(\theta)| \leq 2\|g\|_\infty$, de lo cual se sigue $g_t \in L^p([-\pi,\pi])$ para todo t. Usando el Teorema de Convergencia Dominada tendremos que

$$\lim_{t\to 0} \|g_t\|_p = 0.$$

Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta$ implica que $\|g_t\|_p < \frac{\epsilon}{4K}$. En consecuencia, si $|t| < \delta$

$$\begin{aligned}\|f(\cdot - t) - f\|_p &\leq \|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\|_p + \|g(\cdot - t) - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= 2\|f - g\|_p + \|g_t\|_p \\ &\leq \frac{\epsilon}{4K} + \frac{\epsilon}{4K}.\end{aligned}$$

Para esa misma elección de δ, la expresión en (12) quedaría como sigue

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\Phi_\alpha(t)| dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\Phi_\alpha(t)| dt.$$

Pero esto es menor o igual que

$$\frac{\epsilon}{2K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\alpha(t)| dt + \frac{\|f\|_p}{\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\Phi_\alpha(t)| dt.$$

Ahora bien, como $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una identidad aproximada, sabemos que $\exists \alpha_0 \in I$ tal que si $\alpha_0 \prec \alpha$, entonces

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\Phi_\alpha(t)| dt < \frac{\pi\epsilon}{2\|f\|_p}.$$

De manera que si $\alpha_0 \prec \alpha$ tendremos

$$\begin{aligned}\|f_\alpha - f\|_p &< \frac{\epsilon}{2K}\left(\sup_{\alpha \in I} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\alpha(t)| dt\right) + \frac{\|f\|_p}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\Phi_\alpha(t)| dt \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

De donde concluimos que $f_\alpha \to f$ en $L^p([-\pi, \pi])$.

Ahora, si $f \in C([-\pi, \pi])$, dado que $[-\pi, \pi]$ es compacto, tendremos que f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \text{ implica } |f(t) - f(s)| < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Luego, para esa misma elección de δ tendremos

$$
\begin{aligned}
|f_\alpha(\theta) - f(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_\alpha(\theta) - f(\theta)||\Phi_\alpha(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f_\alpha(\theta) - f(\theta)||\Phi_\alpha(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |f_\alpha(\theta) - f(\theta)||\Phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq \frac{\epsilon}{2K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq \frac{\epsilon}{2K}\sup_{\alpha\in I}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt\right) + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt.
\end{aligned}
$$

Tomando $\alpha_0 \in I$ de manera que $\alpha_0 \prec \alpha$ implique

$$\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_\alpha(t)|dt < \frac{\pi\epsilon}{2\|f\|_\infty}$$

obtenemos

$$|f_\alpha(\theta) - f(\theta)| < \epsilon \ \ \forall\theta \in [-\pi, \pi].$$

Por tanto, $f_\alpha \to f$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$. $\square$

Corolario .46. *Sea f una función 2π-periódica en $\mathbb{R}$ y sea $u = P(f)$ su integral de Poisson. Entonces*

i) *Si $f \in L^p([-\pi, \pi])$, con $1 \leq p < \infty$, entonces* $\lim\limits_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it}) - f(t)|^p dt = 0.$

ii) *Si $f(t) \in C([-\pi, \pi])$, entonces $u(re^{it}) \to f(t)$ uniformemente en t cuando $r \to 1$.*

Teorema .47. *Sea $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ una identidad aproximada en $[-\pi, \pi]$, donde $(I, \prec)$ es un conjunto dirigido.*

i) *Si $f \in L^\infty([-\pi, \pi])$ y $f_\alpha = f * \Phi_\alpha$, entonces f_α converge a f en la topología débil-* de $L^\infty([-\pi, \pi]) \cong (L^1([-\pi, \pi]))^*$.*

ii) *Si $\mu \in M([-\pi, \pi])$ y $f_\alpha = \mu * \Phi_\alpha$, entonces f_α converge a μ en la topología débil-* de $M([-\pi, \pi]) \cong (C([-\pi, \pi]))^*$.*

Demostración. i) Veamos primero que f_α pertence a $L^\infty([-\pi,\pi])$. Como $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una identidad aproximada, existe $K>0$ tal que

$$\sup_{\alpha\in I}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi_\alpha(t)|dt \equiv K<\infty.$$

Luego, $\forall\alpha\in I$ y toda $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}|f_\alpha(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta-t)||\Phi_\alpha(t)|dt\\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_\alpha(t)|dt\\ &\leq \frac{\|f\|_\infty K}{2\pi}.\end{aligned}$$

Así, f_α es acotada y pertence a $L^\infty([-\pi,\pi])$.

Probaremos ahora *i)*. Queremos ver que $\forall\psi\in L^1([-\pi,\pi])$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f*\Phi_\alpha)(\theta)\psi(\theta)d\theta \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\psi(\theta)d\theta.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f*\Phi_\alpha)(\theta)\psi(\theta)d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Phi_\alpha(\theta-t)dt\right]\psi(\theta)d\theta\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\Phi_\alpha(\theta-t)d\theta\right]f(t)dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(\psi*\tilde{\Phi}_\alpha)(t)f(t)dt\end{aligned}$$

donde $(\tilde{\Phi}_\alpha(t))_{\alpha\in I} = (\Phi_\alpha(-t))_{\alpha\in I}$. Nótese que $(\tilde{\Phi}_\alpha)_{\alpha\in I}$ es también una identidad aproximada en $[-\pi,\pi]$, además

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f*\Phi_\alpha)(\theta)\psi(\theta)d\theta-\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\psi(\theta)d\theta\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi}|(f*\Phi_\alpha)(\theta)\psi(\theta)-f(\theta)\psi(\theta)|d\theta\\ &\leq \|f\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi}|(\psi*\tilde{\Phi})(\theta)-\psi(\theta)|d\theta\end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a cero cuando α "crece" en el conjunto I, por el Teorema .45. Concluimos pues, que $f_\alpha \to f$ en la topología débil-* de $L^\infty([-\pi,\pi])$.

Para *ii)*, necesitamos ver que $\forall \psi \in C([-\pi,\pi])$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(\theta)\psi(\theta)d\theta \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)d\mu(\theta).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (\mu * \Phi_\alpha)(\theta)\psi(\theta)d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_\alpha(\theta - t)d\mu(t)\right]\psi(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\Phi_\alpha(\theta - t)d\theta\right]d\mu(t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\psi * \tilde{\Phi}_\alpha)(t)d\mu(t)\end{aligned}$$

donde, de nuevo $(\tilde{\Phi}_\alpha(t))_{\alpha\in I} = (\Phi_\alpha(-t))_{\alpha\in I}$ es una identidad aproximada en $[-\pi,\pi]$. Finalmente, como esta última expresión tiende a $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)d\mu(t)$, el resultado queda demostrado. □

Corolario .48. *i) Si $f \in L^\infty([-\pi,\pi])$ y $u = P(f)$ es su integral de Poisson, entonces $u(re^{it})$ converge a f en la topología débil-* de $L^\infty([-\pi,\pi])$.*

ii) Si $\mu \in M([-\pi,\pi])$ y $u = P(\mu)$ es su integral de Poisson, entonces $u(re^{it})$ converge a $d\mu(t)$ en la topología débil- de $M([-\pi,\pi])$.*

Para continuar con el estudio del comportamiento en la frontera de las integrales de Poisson, introduciremos la siguiente definición:

Definición .49. *Sea u una función definida en D, y sea $z_0 = e^{i\theta_0} \in \partial D$. Diremos que L es el límite no tangencial de u en z_0, si para todo $C > 0$, $u(z)$ converge a L cuando z tiende a z_0 permaneciendo en la región $\{z = re^{i\theta} : |\theta - \theta_0| < C(1-r)\}$.*

Escribiremos

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z \to e^{i\theta_0}}} u(z) = L.$$

Consideremos también la función

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t)$$

donde μ es una medida de Borel en $[-\pi, \pi]$. La función anterior es de variación acotada, por ser absolutamente continua, en consecuencia, F tiene derivada finita para casi todo θ.

Teorema .50. *Sea μ una medida de Borel en $[-\pi, \pi]$ y sea*

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t).$$

Sea θ_0 uno de los puntos donde $F'(\theta)$ existe y es finita y sea $u = P(\mu)$ la integral de Poisson de μ. Entonces u converge a $F'(\theta_0)$ cuando z tiende no tangencialmente a $z_0 = e^{i\theta_0}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\theta_0 = 0$, es decir, $z_0 = 1$. Podemos asumir también que $F'(0) = 0$.

Tomemos $C > 0$, mostraremos que $u(re^{i\theta})$ es uniformemente pequeño en θ, si $|\theta| < C(1-r)$.

Sea $\epsilon > 0$, como $F'(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\theta| < \delta$, implica $|F(\theta)| < \epsilon|\theta|$.

Si restringimos nuestra atención a las $r's$ tales que $C(1-r) < \delta/4$, para $re^{i\theta} \in \{re^{i\theta} : |\theta| < C(1-r)\}$ tendremos

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t) d\mu(t) \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t) \\
&\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t) d\mu(t) \right| + \left(\sup_{\frac{\delta}{2} \leq |t|} P_r(t) \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) \right).
\end{aligned}$$

Como el supremo en el segundo sumando tiende a cero cuando $r \to 1$, sólo debemos preocuparnos por la primera integral. Procederemos integrando por partes. Tomemos

$$s = \frac{1}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2},\ v = F(t)$$
$$ds = \frac{2r\,\mathrm{sen}(\theta-t)dt}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2},\ dv = d\mu(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) &= \frac{1}{2\pi}P_r(\theta-t)F(t)\Big|_{-\delta}^{\delta} - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{(1-r^2)r\,\mathrm{sen}(\theta-t)F(t)}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2}dt \\ &= A+B.\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{1}{2\pi}|F(\delta)P_r(\theta-\delta)-F(-\delta)P_r(\theta+\delta)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|t|\geq\delta|}|F(t)|(P_r(\theta+\delta)+P_r(\theta-\delta)) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\sup_{|t|\geq\delta|}|F(t)|\right)\left(\sup_{\frac{\delta}{2}\leq|t|}P_r(t)\right).\end{aligned}$$

De nuevo, como el segundo supremo tiende a cero cuando $r\to 1$, $|A|$ tiende a cero cuando $r\to 1$.

Para controlar a $|B|$, tomaremos $0<\theta<\delta/2$ y descompondremos la integral sobre $[-\delta,\delta]$ en integrales sobre $[-\delta,0]$, $[0,2\theta]$ y $[2\theta,\delta]$.

Para la integral sobre $[-\delta,0]$ usaremos que

$$|F(t)|<\epsilon|t| = \epsilon(-t)<\epsilon(\theta-t).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{0}\frac{(1-r^2)r\,\mathrm{sen}(\theta-t)F(t)}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2}dt\right| &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\frac{(1-r^2)r|\,\mathrm{sen}(\theta-t)|\epsilon(\theta-t)}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2}dt \\ &= \frac{\epsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r^2)r|\,\mathrm{sen}\,s|s}{[1-2r\cos s+r^2]^2}ds \\ &= \frac{\epsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r^2)rs\,\mathrm{sen}\,s}{[1-2r\cos s+r^2]^2}ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-r^2)rs\,\mathrm{sen}\,s}{[1-2r\cos s+r^2]^2}ds.\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} v = s,\ w &= \frac{-1}{2[1-2r\cos s + r^2]} \\ dv = ds,\ dw &= \frac{r \operatorname{sen} s}{[1-2r\cos s + r^2]^2} \end{aligned}$$

e integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon(1-r^2)}{\pi}\left[\frac{-s}{2(1-2r\cos s + r^2)}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{ds}{2(1-2r\cos s + r^2)}\right] &= \frac{-\epsilon(1-r^2)\pi}{2\pi(1+r)^2} + \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Para la integral sobre $[0, 2\theta]$, usaremos que $|F(t)| < \epsilon t$ y que $|\theta - t| < \theta$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\theta} \frac{(1-r^2)r\operatorname{sen}(\theta-t)F(t)}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2}dt\right| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\theta} \frac{(1-r^2)r\operatorname{sen}(\theta-t)\epsilon t}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2}dt \\ &\leq \int_0^{2\theta}\frac{(1-r^2)r\theta\epsilon t}{(1-r)^4}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\theta}\frac{(1+r)r\theta\epsilon t}{(1-r)^3}dt \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\theta}\frac{(2\theta)^2\epsilon}{(1-r)^3}dt \\ &= \frac{2\theta^3\epsilon}{\pi(1-r)^3} \\ &\leq \frac{8C^3\epsilon}{\pi} \end{aligned}$$

pues $|\theta| < C(1-r)$.

Por último, para la integral sobre $[2\theta, \delta]$, usaremos que $|F(t)| < \epsilon t < 2\epsilon(t-\theta)$, entonces

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{2\theta}^{\delta}\frac{(1-r^2)r\operatorname{sen}(\theta-t)F(t)}{[1-2r\cos(\theta-t)]^2}dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{2\theta}^{\delta}\frac{(1-r^2)r\operatorname{sen}(\theta-t)\epsilon 2(t-\theta)}{[1-2r\cos(\theta-t)+r^2]^2}dt$$

$$= \frac{2\epsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\delta-\theta}\frac{(1-r^2)rs\operatorname{sen}s}{[1-2r\cos s+r^2]^2}ds$$

$$= \frac{2\epsilon}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-r^2)rs\operatorname{sen}s}{[1-2r\cos s+r^2]^2}ds.$$

Tomamos

$$v = t,\ dw = \frac{r\operatorname{sen}s}{[1-2r\cos s+r^2]^2}$$
$$dv = dt,\ w = \frac{-1}{2(1-2r\cos s+r^2)}$$

para de nuevo integrar por partes y obtener

$$\left.\frac{\epsilon sr\operatorname{sen}s(1-r^2)}{\pi[1-2r\cos s+r^2]^1}\right|_0^{\pi} + \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{\pi}P_r(s)ds = \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, si $|\theta| < C(1-r) < \delta/4$, tenemos que $|u(re^{i\theta})| < M\epsilon$.

Ahora, si $F'(0) \neq 0$, podemos considerar la medida $d\lambda(t) = d\mu(t) - F'(0)dt$ y definir $G(\theta) = \int_0^{\theta} d\lambda(t)$.

Obsérvese que $G'(\theta) = F'(\theta) - F'(0)$ y por tanto $G'(0) = 0$. Por el caso anterior, tenemos que $P(\lambda)(z) \to G'(0) = 0$ cuando $z \xrightarrow{N.T.} 1 = e^{i0}$, pero $P(\lambda) = P(\mu) - F'(0)$, por lo cual, podemos concluir que $P(\mu)$ tiende a $F'(0)$ si $z \xrightarrow{N.T.} 1 = e^{i0}$. $\square$

Un teorema clásico de Lebesgue establece que si $f \in L^p([-\pi,\pi])$, para $p \geq 1$, entonces

$$\frac{d}{d\theta}\int_0^{\theta} f(t)dt$$

existe para casi toda θ y es igual a $f(\theta)$.

Corolario .51. *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$ y sea $u = P(f)$, entonces $u(z) \to f(\theta)$ si $z \xrightarrow{N.T.} e^{i\theta}$ para casi todo θ.*

Demostración. Definamos $F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t) = \int_0^\theta f(t)dt$, entonces $F'(\theta) = f(\theta)$ para casi toda θ, y por el Teorema anterior, $u(z) = P(f) \to F'(\theta) = f(\theta)$ si $z \xrightarrow{N.T.} e^{i\theta}$ para casi toda θ. $\square$

Observación .52. *i) Si u es una función armónica en D tal que*

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty$$

para algún $1 < p < \infty$, entonces existe una función $f \in L^p([-\pi,\pi])$ tal que $u = P(f)$ y

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{i\theta}}} u(z) = f(\theta)$$

para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$.

ii) Si u es una función armónica en D y existe $M > 0$ tal que $|u(z)| < M$ $\forall z \in D$, entonces existe una función $f \in L^\infty([-\pi,\pi])$ tal que $u = P(f)$ y

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{i\theta}}} u(z) = f(\theta)$$

para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$.

iii) Si u es una función armónica en D tal que

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt < \infty$$

entonces existe una medida de Borel μ en $[-\pi,\pi]$ tal que $u = P(\mu)$ y

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{i\theta}}} u(z) = F'(\theta)$$

para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Corolario .53 (Teorema de Fatou)**.** *Si F es una función holomorfa y acotada en D, entonces existe*

$$\lim_{\substack{N.T. \\ z\to e^{i\theta}}} F(z)$$

para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demostración. Como F es holomorfa en D, también es armónica en D, además, F es acotada en el disco por hipótesis. Se sigue de *ii)* de la observación anterior que F tiene límites no tangenciales para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$. $\square$

Bibliografía

[1] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, (1972).

[2] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, (1985).

[3] P.L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Dover, (2000).

[4] G. B. Folland,*Real AnalysisModern Techniques and their Applications* (2nd ed.), John Wiley, (1999).

[5] J. B. Fraleigh, *Algebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana , (1988).

[6] J. García Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, (1985).

[7] G. García Figueroa, *Teoremas de Extensión Armónica para Funciones y Distribuciones*, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, (2006).

[8] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Springer, (2007).

[9] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer, (1965).

[10] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis* (2nd ed.), Dover, (1976).

[11] P. Koosis, *Introduction to H^p Spaces* (2nd ed.), Cambridge University Press, (1998).

[12] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis* (3rd ed.), W.H. Freeman and Company, (1999).

[13] W. Rudin, *Functional Analysis*, Ed. McGraw-Hill, (1973).

[14] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York (1953).

[15] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (2nd ed.), Ed. McGraw-Hill, (1974).

[16] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, (2003).

[17] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Dover, (1955).