UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

El Problema L^p Dirichlet para la Ecuación de Laplace

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Luis René San Martín Jiménez

Director de Tesis: Dr. Jorge Rivera Noriega

Hermosillo, Sonora, México, Junio de 2011

SINODALES

Dr. Jorge Rivera Noriega
Universidad Autónoma del estado de Morelos, Cuernavaca, México.

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Jesús Adolfo Minjarez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Marysol Navarro Burruel
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

A mi familia

Quiero agradecer a mis padres por apoyarme siempre, a mis maestros durante la licenciatura por sus enseñanzas, en especial a la Dr. Martha Guzmán. Doy las gracias también a mi Director de Tesis, Dr. Jorge Rivera Noriega, a mis sinodales Dra. Martha Dolores Guzmán Partida, Dr. Jesús Adolfo Minjarez Sosa y M.C. Marysol Navarro Burruel por sus contribuciones a este trabajo y porque cada uno fue mi maestro.

Índice general

Introducción **11**

1. El Problema Clásico de Dirichlet en el Disco del plano $\mathbb{R}^2$ **17**

1.1. La invarianza de la Ecuación de Laplace y la forma polar del Laplaciano 18

1.2. La Fórmula de Poisson 20

1.3. Series de Fourier 24

1.4. Solución al Problema Clásico de Dirichlet en el Disco 27

2. Ecuación de Laplace y Ecuación de Poisson **31**

2.1. Solución fundamental del Laplaciano 31

2.2. Ecuación de Poisson 33

2.3. Propiedades de las funciones armónicas 37

3. Funciones de Green **53**

3.1. Derivación de la Función de Green 54

3.2. Simetría de la Función de Green 57

3.3. Función de Green para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 58

3.4. Función de Green para una bola en $\mathbb{R}^n$ 62

4. Problema Clásico de Dirichlet para dominios con frontera regular 67

4.1. Funciones subarmónicas y superarmónicas 67

4.2. Convergencia de funciones armónicas 68

4.3. Solución al problema Clásico de Dirichlet en dominios con frontera regular 70

5. Teorema de Diferenciación de Lebesgue y Función Maximal de Hardy - Littlewood 77

5.1. El Teorema de Cubierta de Vitali 78

5.2. Función Máximal de Hardy - Littlewood 80

5.3. Teorema de Diferenciación de Lebesgue 88

5.4. El conjunto de Lebesgue de una función 90

6. Convoluciones e Identidades Aproximadas 97

6.1. Convoluciones 97

6.2. Identidades aproximadas 103

6.3. Problema de Dirichlet en el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con dato en L^p 112

7. Planteamiento del Problema L^p Dirichlet 115

7.1. Planteamiento del Problema L^p Dirichlet 115

Introducción

El Problema Clásico de Dirichlet en su versión más general se puede plantear de la siguiente manera:

> *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado y una función $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, encontrar una función u armónica en Ω cumpliendo $u = f$ en $\partial\Omega$.*

En este trabajo revisaremos las soluciones a algunos Problemas Clásicos de Dirichlet, y a través del estudio de estos problemas se generará una propuesta de cómo plantear el Problema de Dirichlet en su versión L^p:

> *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1, y una función $f \in L^p(\partial\Omega)$, encontrar una función u armónica en Ω que además satisfaga $u = f$ para casi todo punto en $\partial\Omega$.*

Así mismo, presentamos técnicas de como resolver este Problema.

El contenido de este trabajo está dividido en seis capítulos como se describen a continuación:

En el Capítulo 1 abordamos el Problema Clásico de Dirichlet en el Disco del plano 2 - dimensional. Se demuestra la invarianza de la Ecuación de Laplace bajo isometrías, hecho que sugiere encontrar la forma del Operador de Laplace en coordenadas polares. Una vez logrado esto, a través del método de separación de variables llegamos a una solución en forma de una serie trigonométrica bajo ciertas suposiciones sobre el dato en la frontera, y a partir de esta representación conseguimos otra por medio de la Fórmula de Poisson. Posteriormente investigamos que propiedades se pueden añadir al dato en la frontera para que la solución en forma de serie trigonométrica tenga sentido. Finalmente, establecemos el resultado principal de este capítulo, que proporciona condiciones suficientes en el dato en la frontera para producir una solución.

En el Capítulo 2 primero presentamos la solución fundamental del Laplaciano que en primera instancia nos servirá para resolver la Ecuación de Poisson. Luego, demostramos un importante número de propiedades que satisfacen las funciones armónicas, como la Propiedad del Valor Medio y el Principio del Máximo. También estudiamos la regularidad y analiticidad de una función armónica, así como el Teorema de Liouville y la Desigualdad de Harnack para funciones armónicas positivas. Estos resultados nos serán de gran ayuda en el desarrollo del capítulo 4.

En el Capítulo 3 resolvemos el Problema Clásico de Dirichlet con dato continuo para dos dominios específicos: la bola en $\mathbb{R}^n$ y el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Nuestro enfoque será partir de un dominio en general y proponer una función de Green para este dominio, luego representar a la solución del Problema de Dirichlet por medio de la función de Green y el dato en la frontera. Una vez hecho esto, construiremos la función de Green para cada dominio en concreto y mostraremos que la respectiva Fórmula de Representación es en verdad una solución.

En el capítulo 4 resolvemos el Problema Clásico de Dirichlet con dato continuo y un dominio Ω con frontera regular. Para realizar esto, primero definimos las funciones subarmónicas (y superarmónicas), que serán el germen de nuestro método de solución. Luego enunciamos un Principio del Máximo para funciones subarmónicas (Principio del Mínimo para funciones superarmónicas), una herramienta de recurrente uso en este capítulo. Más adelante se estudia un poco aspectos de la convergencia de sucesiones de funciones armónicas. Después exponemos el Método de Perron de funciones subarmónicas. A cada dato en la frontera g le asociamos su función de Perron ω_g, probamos que ω_g es armónica y luego examinamos su comportamiento en la frontera de Ω cuando esta es regular. Finalmente damos algunas condiciones geométricas sobre la frontera de Ω que aseguren su regularidad.

En el Capítulo 5 nos apartamos por un momento del estudio de los Problemas Clásicos de Dirichlet con el fin de tener herramientas para plantear el Problema L^p Dirichlet. Para una función f introducimos la Función Maximal de Hardy - Littlewood Mf, probamos algunas de sus propiedades fundamentales, como el Teorema de Hardy - Littlewood y el acotamiento del operador $f \mapsto Mf$ en L^p, $p > 1$. Esto nos preparará para formular el Teorema de Diferenciación de Lebesgue. Con este resultado será posible hablar sobre convergencia casi en todas partes en varios contextos.

En el Capítulo 6 comenzamos con algunos resultados básicos sobre convoluciones que nos dirán que algunas convoluciones tienen sentido. Después concentramos nuestra atención en identidades aproximadas. Luego de definirlas, analizaremos inmediatamente la convergencia $f * \phi_a \to f$ cuando $a \to 0$ en L^p, casi en todas partes y no tangencial casi en todas partes, donde $(\phi_a)_a$ es una identidad aproximada y

f es una función en L^p. Posteriormente estaremos interesados en obtener un acotamiento del tipo $|f * \phi_a(x)| \leq CMf(x)$ para casi todo x, y también otro del tipo $|f * \phi_a(x')| \leq CMf(x)$ para casi todo x, donde x' está en un cono con vértice en x. Todo lo anterior es la base para poder resolver el Problema de Dirichlet para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con dato en la frontera en L^p, estudiar este caso específico a la postre será la motivación para plantear el Problema de Dirichlet en su versión L^p.

Por último, en el Capítulo 7 identificamos los elementos que aparecen en el Problema de Dirichlet para el Semi - espacio para vislumbrar que elementos son esenciales en el planteamiento del caso general.

Notación

A lo largo de este trabajo, cuando escribimos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nos referimos siempre a un subconjunto abierto del espacio euclideano n - dimensional, en ocasiones añadiremos condiciones adicionales a Ω. La mayoría del tiempo consideraremos funciones con dominio en algún conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tomando valores reales, cuando no sea así se especificará con oportunidad. Presentamos gran parte de la notación requerida a continuación. En caso de aparecer nueva notación en el desarrollo de este trabajo, será aclarada inmediatamente.

Notación básica

- $\partial\Omega$ es la frontera de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ es la cerradura de Ω.
- Si Ω' y Ω son abiertos de $\mathbb{R}^n$, escribimos $\Omega' \subset\subset \Omega$ si $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y $\overline{\Omega'}$ es compacto, y decimos que Ω' está compactamente contenido en Ω.
- $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ es la bola con centro en x y radio $r > 0$.
- Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ son puntos en $\mathbb{R}^n$, escribimos

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$$

- $\alpha(n) = \lambda(B(0,1)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. λ es la medida de Lebesgue y Γ es la función gamma.
- $\alpha(n)r^n = \lambda(B(x,r))$ es el volumen de la bola $B(x,r)$.
- $\omega_n = n\alpha(n) = \lambda(\partial B(0,1))$ es el área de la superficie de la esfera unitaria $\partial B(0,1)$ en $\mathbb{R}^n$.
- $n\alpha(n)r^{n-1} = \lambda(\partial B(x,r))$ es el área de la superficie de la esfera $\partial B(x,r)$.

Notación para derivadas

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$.

- $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$, siempre que este límite exista. A veces escribimos u_{x_i} en vez de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.
- De manera análoga se definen $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = u_{x_i x_j x_k}$, etc.
- Adoptamos la notación multi - índice.
  - Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde cada α_i es un entero positivo es llamado multi - índice de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
  - Dado un multi - índice α definimos
  $$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$
  - Si k es un entero positivo, $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ es el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k, y definimos
  $$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
  - Si $k = 1$, $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ es el vector gradiente de u.
  - Si $k = 2$
  $$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$
  es la matriz hessiana.
- A veces usamos D_x para denotar las variables que se están derivando. Por ejemplo, si $u = u(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$, entonces $D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ y $D_x u = (u_{y_1}, \dots, u_{y_m})$.

Notación para espacios de funciones

- $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es continua}\}$

  $C(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es uniformemente continua}\}$

  $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha u \text{ es continua siempre que } |\alpha| \leq k\}$

  $C^k(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha u \text{ es uniformemente continua siempre que } |\alpha| \leq k\}$

  Si $u \in C^k(\overline{\Omega})$, entonces $D^\alpha u$ se puede extender continuamente a $\overline{\Omega}$ para cada multi - índice α, $|\alpha| \leq k$.

- Decimos que Ω tiene frontera de clase C^k si para cada $z \in \partial\Omega$, existe una vecindad B de z y una función $\psi \in C^k(B),\ k \in \mathbb{N}$ tal que

    1. $\Omega \cap B = \{x : \psi(x) < 0\}$
    2. $\partial\Omega \cap B = \{x : \psi(x) = 0\}$
    3. $D\psi(x) \neq 0$ para cada $z \in \partial\Omega \cap B$

- $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es infinitamente diferenciable}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$

  $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$

- $\mathrm{sop}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$

  $C_c(\Omega),\ C_c^k(\Omega)$, etc. denotan las funciones en $C(\Omega),\ C^k(\Omega)$, etc. con soporte compacto.

- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es Lebesgue medible}, \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, donde

  $$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$

  $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es Lebesgue medible}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$, donde

  $$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \mathrm{esssup}_\Omega \, |u|$$

  $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega') \text{ para todo } \Omega' \subset\subset \Omega\}$

- $\|Du\|_{L^p(\Omega)} = \||Du|\|_{L^p(\Omega)}$

  $\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} = \||D^2u|\|_{L^p(\Omega)}$

Capítulo 1

El Problema Clásico de Dirichlet en el Disco del plano $\mathbb{R}^2$

El objetivo de este capítulo es resolver el problema clásico de Dirichlet cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un disco, el cual denotaremos desde este momento por D.

No abordaremos este problema en discos del plano usando coordenadas rectangulares, pues encontraremos que es más conveniente replantearlo con coordenadas polares. Para hacer esto exhibiremos la forma polar del Laplaciano, que resulta ser bastante sencilla debido a que este operador es invariante bajo movimientos rígidos en el plano, es decir, bajo composiciones de rotaciones y traslaciones.

Una vez conseguida la forma polar del Laplaciano buscaremos soluciones de esta ecuación con condición en la frontera utilizando separación de variables. Por último, demostraremos que si el dato es una función lo suficiente suave, entonces podremos asegurar la existencia de una solución para el Problema de Dirichlet en el disco. La unicidad será cubierta cuando exploremos posteriormente algunas propiedades de las funciones armónicas.

Para este capítulo seguimos las referencias [11] y [3].

1.1. La invarianza de la Ecuación de Laplace y la forma polar del Laplaciano

Definición 1.1.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $u \in C^2(\Omega)$. La ecuación de Laplace en el plano es*

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.1.1}$$

A Δu se le conoce como el Laplaciano de u. Una función u que cumple la ecuación de Laplace se le llama función armónica.

Definición 1.1.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Diremos que Δ es invariante bajo T en Ω si $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$, para cualquier $u \in C^2(\Omega)$.*

Una traslación en el plano es una transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$(x, y) \overset{f}{\longmapsto} (x', y') = (x + a, y + b) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Una rotación en el plano es una transformación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(x, y) \overset{g}{\longmapsto} (x', y') = (x \cos\alpha + y \sin\alpha, -x \sin\alpha + y \cos\alpha)$$

para algún ángulo $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Se puede verificar fácilmente la invarianza de Δ para una traslación. Veamos la invarianza bajo rotaciones. Derivando tenemos

$$\begin{aligned} u_x(x', y') &= u_{x'}(x', y') \cos\alpha - u_{y'}(x', y') \sin\alpha \\ u_y(x', y') &= u_{x'}(x', y') \sin\alpha + u_{y'}(x', y') \cos\alpha \end{aligned}$$

Tomando segundas derivadas parciales

$$\begin{aligned} u_{xx}(x', y') = {} & [u_{x'}(x', y') \cos\alpha - u_{y'}(x', y') \sin\alpha]_{x'} \cos\alpha \\ & - [u_{x'}(x', y') \cos\alpha - u_{y'}(x', y') \sin\alpha]_{y'} \sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy}(x', y') = {} & [u_{x'}(x', y') \sin\alpha + u_{y'}(x', y') \cos\alpha]_{x'} \sin\alpha \\ & + [u_{x'}(x', y') \sin\alpha + u_{y'}(x', y') \cos\alpha]_{y'} \cos\alpha \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_{xx}(x', y') + u_{yy}(x', y') &= u_{x'x'}(x', y') \cos^2\alpha - u_{x'y'}(x', y') \sin\alpha \cos\alpha \\ &\quad - u_{x'y'}(x', y') \sin\alpha \cos\alpha + u_{y'y'}(x', y') \sin^2\alpha \\ &\quad + u_{x'x'}(x', y') \sin^2\alpha + u_{x'y'}(x', y') \sin\alpha \cos\alpha \\ &\quad + u_{x'y'}(x', y') \sin\alpha \cos\alpha + u_{y'y'}(x', y') \cos^2\alpha \\ &= u_{x'x'}(x', y') + u_{y'y'}(x', y') \end{aligned}$$

Hemos demostrado el siguiente

Teorema 1.1.1. Δ *es invariante bajo movimientos rígidos en el plano. Esto es,* Δ *es invariante bajo cualquier transformación que sea la composición de rotaciones y traslaciones.*

Esto da pie a intentar resolver el Problema de Dirichlet en coordenadas polares. Con este objetivo encontraremos la forma del laplaciano en coordenadas polares. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ la función

$$(r, \theta) \overset{f}{\longmapsto} (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Haciendo la composicón $u \circ f$ y calculando $\nabla(u \circ f)$ tenemos

$$\nabla(u \circ f(r,\theta)) = \nabla u(x,y)\, Df(r,\theta) = (u_x(x,y), u_y(x,y)) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}[u(f(r,\theta))] &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}[u(f(r,\theta))] &= -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden escribirse usando notación de operadores como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Componiendo operadores

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ &= \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\left(\cos\theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &+ \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ &= \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}
$$

Sumando obtenemos el siguiente

Teorema 1.1.2. *Si* $u \in C^2(\Omega)$ *donde* Ω *es un abierto de* $\mathbb{R}^2$*, entonces*

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}u(f(r,\theta)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(f(r,\theta)) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(f(r,\theta)) \tag{1.1.2}
$$

donde $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*.*

1.2. La Fórmula de Poisson

Nos enfocaremos en el disco de radio $a > 0$, $D = \{re^{i\theta} : 0 \leq r < a \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Haremos la identificación de $\partial D = \{ae^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ con $[0, 2\pi)$, de modo que una función $f : \partial D \to \mathbb{R}$ puede ser vista también como $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$. Consideremos el problema

$$
\left\{\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < a^2 \\ u = f(\theta) & x^2 + y^2 = a^2 \end{array}\right. \tag{1.2.1}
$$

Por separación de variables, suponemos soluciones de la forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Sustituyendo esta expresión en la forma polar de la ecuación de Laplace (1.1.2) tenemos

$$
0 = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' \tag{1.2.2}
$$

De esto

$$
r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}
$$

Lo cual solo es posible si ambos lados son iguales a una constante, digamos λ, así obtenemos dos ecuaciones lineales ordinarias

$$
r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{1.2.3}
$$

$$
\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{1.2.4}
$$

Para $\Theta(\theta)$ imponemos periodicidad, $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$. La constante λ no admite cualquier valor, de hecho λ es el cuadrado de un entero. Primero veamos que $\lambda \geq 0$. Supongamos que $\lambda < 0$, entonces $-\lambda = \alpha^2$ para algún $\alpha > 0$. Sabemos que una solución particular a (1.2.4) es $\Theta_1(\theta) = e^{\alpha\theta}$, esta función debe ser periódica, entonces $1 = e^{\alpha 0} = e^{2\pi\alpha}$, una contradicción a la elección de α. Ya que $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda = \alpha^2$ para algún $\alpha \geq 0$ y observamos que $\Theta_2(\theta) = \cos\alpha\theta$ es una solución, de nuevo por la periodicidad $1 = \cos\alpha 0 = \cos\alpha 2\pi$, entonces α es un entero, que es lo que buscabamos. Por lo anterior, la solución general a (1.2.4) es

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \qquad A_n, B_n \in \mathbb{R} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Resolvemos (1.2.3) proponiendo las soluciones $R(r) = r^a$. Sustituyendo vemos que $a = \pm n$, por lo que la solución general es

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n \frac{1}{r^n} \qquad C_n, D_n \in \mathbb{R} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Y conseguimos soluciones a (1.2.1) de la forma

$$u_n(r,\theta) = (C_n r^n + D_n \frac{1}{r^n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Si $n = 0$, las soluciones que hemos dado a (1.2.1) son constantes, pero un cálculo directo muestra que $\log r$ es solución, y en este caso la solución general a (1.2.1) toma la forma

$$u(r,\theta) = C + D\log r \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

Algunas de las soluciones crecen o decrecen indefinidamente cuando $r \to 0$. Aún no hemos impuesto condiciones en $R(r)$. Convenientemente el nuevo requisito será que $R(r)$ tenga un valor finito en $r = 0$. Las soluciones restantes son

$$u_n(r,\theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

También sumas finitas de estas soluciones de la forma

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{m} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{1.2.5}$$

son solución. Haciendo $r \to a$ se tendría la condición a la frontera

$$f_u(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{m} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Ahora nos preguntamos que restricciones debemos exigir a f para que admita la representación por medio de la serie uniformemente convergente

$$f(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{1.2.6}$$

Esta pregunta la responderemos en la siguiente sección, por lo pronto supongamos que h se puede respresentar como en (1.2.6). La nueva tarea es calcular los coeficientes A_n y B_n, la observación clave para esto son las siguientes igualdades

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \cos m\phi \, d\phi = 0 \quad n, m \in \mathbb{N}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \sin m\phi \, d\phi = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos n\phi \cos m\phi \, d\phi = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

Calculemos ahora los coeficientes A_n:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\phi \, d\phi &= \frac{1}{2} A_0 \int_0^{2\pi} \cos m\phi \, d\phi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(A_n \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi \, d\phi \right. \\ &\qquad\qquad \left. + B_n \int_0^{2\pi} \cos m\phi \sin n\phi \, d\phi \right) \\ &= A_m a^m \pi\end{aligned}$$

Por tanto

$$A_m = \frac{1}{\pi a^m} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\phi \, d\phi \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2.7}$$

Y los coeficientes B_n:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\phi) \sin m\phi \, d\phi &= \frac{1}{2} A_0 \int_0^{2\pi} \sin m\phi \, d\phi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(A_n \int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos n\phi \, d\phi \right. \\ &\qquad\qquad \left. + B_n \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin n\phi \, d\phi \right) \\ &= B_m a^m \pi\end{aligned}$$

Así

$$B_m = \frac{1}{\pi a^m} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin m\phi \, d\phi \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2.8}$$

La solución a (1.2.1) estará dada en términos de la ecuación 1.2.5 y de los coeficientes A_n y B_n, los cuales ya hemos encontrado bajo la suposición de que f se represente como en (1.2.6). El problema (1.2.1) estará resuelto encontrando propiedades concretas del dato en la frontera f que garanticen su representación por medio de una serie uniformemente convergente como en (1.2.6) y que dichas propiedades impliquen que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

satisfaga (1.2.1). Dejaremos momentáneamente este problema. Supondremos que u se representa por medio de una serie uniformemente convergente como arriba y derivaremos una representación alternativa para u, la fórmula de Poisson para el disco.

Aclarado este punto procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\left(\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\,d\phi\right)\cos n\theta + \left(\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\,d\phi\right)\sin n\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\phi)(\cos n\phi\cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta)\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi) + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\int_0^{2\pi} 2f(\phi)\cos n(\theta-\phi)\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\theta-\phi)\right\}d\phi
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\theta-\phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}e^{in(\theta-\phi)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}e^{-in(\theta-\phi)} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{1-\frac{r}{a}e^{i(\theta-\phi)}} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{r}{a}e^{-i(\theta-\phi)}} - 1\right) \\
&= 1 + \left(\frac{re^{i(\theta-\phi)}}{a - re^{i(\theta-\phi)}}\right) + \left(\frac{re^{-i(\theta-\phi)}}{a - re^{-i(\theta-\phi)}}\right) \\
&= 1 + \frac{re^{i(\theta-\phi)}\left(a - re^{-i(\theta-\phi)}\right) + re^{-i(\theta-\phi)}\left(a - re^{i(\theta-\phi)}\right)}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2} \\
&= 1 + \frac{2a\cos(\theta-\phi) - 2r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2}\,d\phi \qquad 0 \le r < a,\ 0 \le \theta < 2\pi \tag{1.2.9}$$

1.3. Series de Fourier

En la sección anterior obtuvimos soluciones al Problema Clásico de Dirichlet en el Disco del plano $\mathbb{R}^2$, de la forma

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{m} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

donde los coeficientes A_n y B_n están dados por (1.2.7) y (1.2.8). Luego asumíamos que una suma infinita era solución también y terminábamos con una fórmula de representación integral para una solución de este tipo, la Fórmula de Poisson. En esta sección atenderemos a las condiciones bajo las cuáles esta fórmula es válida, es decir, las propiedades que el dato en la frontera debe cumplir para poder obtener esta representación en serie. Comenzaremos dando los preliminares necesarios para ello.

Definición 1.3.1. *Si* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *es una función integrable en* $[0, 2\pi]$*, entonces el n-ésimo coeficiente de Fourier se define como*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad n \in \mathbb{Z}$$

y la serie formal de Fourier de f *es*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

En ocasiones usaremos a_n *para los coeficientes de Fourier de* f *y adoptaremos la notación*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

para indicar que la serie de la derecha es la serie de Fourier de f*.*

La N *- ésima suma parcial de la serie de Fourier de* f*, para un entero positivo* N *está dada por*

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

Cuando f sea integrable en algún intervalo de longitud 2π y f sea 2π - periódica, diremos que f es integrable en el círculo. Por la periodicidad se sigue que f es integrable en cualquier intervalo de longitud 2π. Así, cuando impongamos esta hipótesis usaremos el intervalo que más nos convenga. Esto es válido pues los coeficientes de Fourier de f no se alteran si cambiamos el intervalo donde f está definida. Dada la definición que hemos admitido de coeficientes de Fourier; solo en esta sección asumiremos que f tome valores en $\mathbb{C}$.

Nuestro objetivo en este momento es encontrar condiciones bajo las cuales se de la convergencia uniforme de $S_N(f)$ a f. El siguiente lema es la piedra angular para cumplir esta meta.

Lema 1.3.1. *Si f es integrable en el círculo y $\widehat{f}(k) = 0$ para toda $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(\theta_0) = 0$ siempre que f sea continua en θ_0.*

Demostración. Supongamos que f toma valores reales y que f está definida en $[-\pi, \pi]$, $f(\theta_0) > 0$ y $\theta_0 = 0$. Por la continuidad de f en 0 existe $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ tal que $f(x) > \frac{f(0)}{2} > 0$ si $|x| < \delta$. Sean $\epsilon = \frac{2}{3}(1 - \cos\delta)$ y $p(\theta) = \epsilon + \cos\theta$. Si $\delta \leq |\theta| \leq \pi$, entonces $\cos\theta < \cos\delta$ y obtenemos

$$\begin{aligned} p(\theta) = \epsilon + \cos\theta < 1 - \frac{\epsilon}{2} &\iff \frac{3\epsilon}{2} + \cos\theta < 1 \\ &\iff 1 - \cos\delta + \cos\theta < 1 \\ &\iff \cos\theta < \cos\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{2} - 1 < \epsilon + \cos\theta = p(\theta) &\iff 1 + \frac{\epsilon}{2} + \cos\theta > 0 \\ &\iff 1 + \frac{1 - \cos\delta}{3} + \cos\theta > 0 \\ &\iff 3 + 1 - \cos\delta + 3\cos\theta > 0 \end{aligned}$$

así $|p(\theta)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $\eta < \text{mín}\{\delta, \cos^{-1}(1 - \frac{\epsilon}{2})\}$, si $|\theta| < \eta$ entonces

$$p(\theta) = \epsilon + \cos\theta \geq \epsilon + 1 - \frac{\epsilon}{2} = 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

Finalmente definamos $p_k(\theta) = [p(\theta)]^k$ y sea $B > 0$ tal que $|f(\theta)| \leq B$. Luego

$$\left| \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} f(\theta) p_k(\theta)\, d\theta \right| \leq \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |f(\theta)||p_k(\theta)|\, d\theta \leq 2\pi B \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^k$$

Además, por la elección de $\delta > 0$

$$\int_{\eta \leq |\theta| < \delta} f(\theta) p_k(\theta)\, d\theta \geq 0$$

$$\int_{|\theta| < \eta} f(\theta) p_k(\theta)\, d\theta \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^k$$

Por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\,d\theta \geq -2\pi B\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^k + 2\eta\frac{f(0)}{2}\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^k \to \infty \quad si \quad k\to\infty \tag{1.3.1}$$

Veamos que lo último es una contradicción. Como

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = 0, \quad k\in\mathbb{Z}$$

también se debe tener que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(\cos\theta)^k d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^k d\theta = 0, \quad k\in\mathbb{Z}$$

consecuentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\,d\theta = 0, \quad k\in\mathbb{Z}$$

por esto (1.3.1) es imposible. Si $f(0) < 0$ aplicamos el mismo razonamiento a $-f$ para llegar a una contradicción similar y concluir que $f(0) = 0$. Si $\theta_0 \neq 0$, $f_0(\theta) = f(\theta_0 - \theta)$ es continua en 0, por el razonamiento anterior $f(\theta_0) = f_0(0) = 0$. Así queda demostrado el caso en el que f toma valores en $\mathbb{R}$. Si $f(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$, sea $\overline{f}(\theta) = \overline{f(\theta)}$. Recordando que

$$u(\theta) = \frac{f(\theta)+\overline{f}(\theta)}{2}, \quad v(\theta) = \frac{f(\theta)-\overline{f}(\theta)}{2i}$$

y observando que

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)}e^{-ik\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)e^{ik\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{ik\theta}d\theta} = \overline{\widehat{f}(-k)}$$

concluimos que $\widehat{u}(k) = \widehat{v}(k) = 0$, $k\in\mathbb{Z}$. Aplicando lo demostrado a u y v obtenemos que $f(0) = 0$. □

Corolario 1.3.1. *Si f es continua en $[0,2\pi]$ y $\widehat{f}(n) = 0$, $n\in\mathbb{Z}$, entonces $f = 0$.*

Corolario 1.3.2. *Suponga que f es continua en $[0,2\pi]$ y que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)| < \infty$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f.*

Demostración.

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{in\theta}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)| < \infty$$

Por tanto $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{in\theta}$ converge uniformemente a una función $g(\theta)$, dicha función es continua porque $S_N(f)$ lo es para cada $n\in\mathbb{N}$. Los coeficientes de Fourier de f y g son los mismos, así $\widehat{(f-g)}(n) = 0$ para cada $n\in\mathbb{N}$, además $f-g$ es continua, entonces el corolario anterior afirma que $f = g$. □

Teorema 1.3.1. *Si f tiene segunda derivada continua en $[0, 2\pi]$, entonces existe $C > 0$ tal que $|\widehat{f}(n)| \leq Cn^{-2}$ para $|n|$ suficientemente grande, y como consecuencia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$, es decir, la serie de Fourier de f converge uniformemente a f.*

Demostración. Utilizando integración por partes

$$\begin{aligned}
2\pi\widehat{f}(n) &= \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= \left[f(\theta)\frac{-e^{-in\theta}}{in} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(\theta)\frac{-e^{-in\theta}}{in}\, d\theta \\
&= \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(\theta)e^{-in\theta} = \frac{1}{in}\left[f'(\theta)\frac{-e^{-in\theta}}{in} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f''(\theta)\frac{-e^{-in\theta}}{in}\, d\theta \\
&= \frac{-1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta
\end{aligned}$$

Entonces

$$2\pi n^2|\widehat{f}(n)| = \left| \int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |f''(\theta)|\, d\theta \leq 2\pi B$$

donde $B > 0$ es cota de $f''(\theta)$ en $[0, 2\pi]$. Finalmente

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| \leq B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Por tanto $S_N(f) \to f$ uniformemente en $[0, 2\pi]$. □

1.4. Solución al Problema Clásico de Dirichlet en el Disco

Sabemos que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{m} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

es armónica si $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ son arbitrarios. Ahora quisieramos que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{1.4.1}$$

sea una solución al Problema de Dirichlet en el disco con dato en la frontera f, donde los coeficientes A_n y B_n ya no son arbitrarios, sino que se calculan como en (1.2.7) y (1.2.8). Como vimos, esto obliga a que f se represente por medio de la serie

$$f(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Sabiendo esto, usaremos los resultados sobre series de Fourier para encontrar las condiciones que debe satisfacer f para hacer válida la representación de arriba. Además, mostraremos que (1.4.1) es armónica en el disco y que coincide con el dato en la frontera f. Esto es algo que aún no habíamos hecho y merece especial atención.

Teorema 1.4.1. *Sea f una función con segunda derivada continua en el círculo $\{ae^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $a > 0$. Entonces f admite la representación en serie*

$$f(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

donde los coeficientes A_n y B_n se calculan como en (1.2.7) *y* (1.2.8). *Además el problema*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < a^2 \\ u = f(\theta) & x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

tiene como solución a

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Y tenemos una fórmula de representación de Poisson

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi$$

para $0 \leq r < a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Demostración. Como f tiene segunda derivada continua en el círculo, por el Teorema 1.3.1

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&r^n(A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta)\\
&\quad= \frac{r^n}{\pi a^n}\left(\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi\right)\cos n\theta + \frac{r^n}{\pi a^n}\left(\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\, d\phi\right)\sin n\theta\\
&\quad= \frac{r^n}{2\pi a^n}\left(\int_0^{2\pi} f(\phi)\left(e^{in\phi}+e^{-in\phi}\right)\, d\phi\right)\frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right)\\
&\quad+ \frac{r^n}{2\pi a^n i}\left(\int_0^{2\pi} f(\phi)\left(e^{in\phi}-e^{-in\phi}\right)\, d\phi\right)\frac{1}{2i}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)\\
&\quad= \frac{r^n}{2\pi a^n}\left(\int_0^{2\pi} f(\phi)e^{in\phi}\, d\phi + \int_0^{2\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\, d\phi\right)\frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right)\\
&\quad- \frac{r^n}{2\pi a^n}\left(\int_0^{2\pi} f(\phi)e^{in\phi}\, d\phi - \int_0^{2\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\, d\phi\right)\frac{1}{2}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)\\
&\quad= \left(\frac{r^n}{2\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\, d\phi\right)e^{in\theta} + \left(\frac{r^n}{2\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\phi)e^{in\phi}\, d\phi\right)e^{-in\theta}\\
&\quad= \frac{r^n}{a^n}\widehat{f}(n)e^{in\theta} + \frac{r^n}{a^n}\widehat{f}(-n)e^{-in\theta}
\end{aligned}
$$

para $0 \le r \le a$. De aquí se sigue que

$$
f(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) \tag{1.4.3}
$$

Asumiendo esta representación en serie de f ya probamos la fórmula de representación de Poisson en (1.2.9), por lo que será suficiente mostrar que (1.4.1) es armónica en el disco y que coincide con el dato en la frontera f. Veamos primero la armonicidad. Definamos

$$
u_m(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{m} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)
$$

Cada u_m es armónica por la forma en que fue encontrada. Utilicemos otra vez que f tiene segunda derivada continua. De nuevo, por el Teorema 1.3.1

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| < \infty
$$

lo cual podemos reescribir como

$$
\left|\widehat{f}(0)\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\widehat{f}(n)\right| + \left|\widehat{f}(-n)\right|\right) < \infty
$$

Luego, los mismos cálculos con los que deducimos (1.4.3) nos permiten concluir que

$$
|r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)| \le \left|\widehat{f}(n)\right| + \left|\widehat{f}(-n)\right|
$$

y como consecuencia resulta la convergencia uniforme de (u_m) a u en $\{re^{i\theta} : 0 \leq r < a\, , 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, dicha función debe ser armónica por ser el límite uniforme de funciones armónicas, como probaremos en un capítulo posterior (ver Teorema 4.2.1). Finalmente

$$u(a,\theta) \;= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \;= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta} = f(\theta)$$

terminando la demostración. $\square$

Capítulo 2

Ecuación de Laplace y Ecuación de Poisson

En este capítulo mostraremos la solución fundamental del Laplaciano para luego resolver la ecuación de Poisson. Después de esto, nos enfocaremos en algunas de las muchas propiedades de las funciones armónicas. Como veremos, la Propiedad del valor medio revela un número considerable de consecuencias acerca del comportamiento de las funciones armónicas. Durante el desarrollo de este capítulo las identidades de Green probarán su fuerza apareciendo en pasos claves de varias de las deducciones presentadas.

Como referencia a este capítulo véase [3].

2.1. Solución fundamental del Laplaciano

De entre las ecuaciones diferenciales parciales más importantes se pueden destacar a la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0 \tag{2.1.1}$$

y a la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f \tag{2.1.2}$$

Recordemos que el laplaciano de u es $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. En (2.1.1) y (2.1.2), $x \in \Omega$ donde Ω es un abierto en $\mathbb{R}^n$ y la función desconocida es $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$. En (2.1.2) f es conocida. Como antes, una función $u \in C^2(\Omega)$ es armónica si cumple (2.1.1).

Derivaremos una solución explícita de (2.1.1). Buscamos primero una solución radial, pues el laplaciano es invariante bajo rotaciones (El caso 2 - dimensional fue hecho a detalle en la sección 1.1, para el caso n - dimensional véase [1] pp. 2 - 4). Intentemos encontrar una solución de la forma $u(x) = v(|x|) = v(r)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y v se selecciona, si es posible, de manera que se cumpla $\Delta u = 0$. Notemos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2x_i) = \frac{x_i}{r}$$

Luego

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}v(r) = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v'(r)\frac{x_i}{r}\right) = v'(r)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) + v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} \\ &= v'(r)\left(\frac{r - x_i\left(\frac{x_i}{r}\right)}{r^2}\right) + v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} \\ &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\end{aligned}$$

Por lo que el laplaciano de u toma la forma

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$$

De aquí $\Delta u = 0$ si y solo si

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0$$

Si $v' \neq 0$ se deduce

$$\left(\log v'\right)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$$

Consecuentemente $v'(r) = ar^{1-n}$ para alguna constante a, por lo que si $r > 0$, obtenemos

$$v(r) = \begin{cases} b\log r + c & n = 2 \\ br^{2-n} + c & n \geq 3 \end{cases}$$

A partir de estas consideraciones damos la siguiente

Definición 2.1.1. *La función*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & n = 2 \\ \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

definida para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, es la solución fundamental a la Ecuación de Laplace.

Observación 2.1.1. *A partir de la definición de Φ logramos las estimaciones*

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C_1}{|x|^{n-1}} \quad x \neq 0 \tag{2.1.4}$$

$$|D^2\Phi(x)| \leq \frac{C_2}{|x|^{n}} \quad x \neq 0 \tag{2.1.5}$$

para algunas constantes $C_1, C_2 > 0$

Demostración. Probemos solamente la estimación (2.1.4), pues (2.1.5) se demuestra a través de cálculos semejantes.

Si $n = 2$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{|x|^2} \quad i = 1, 2$$

$$|D\Phi(x)| = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1^2}{|x|^4} + \frac{x_2^2}{|x|^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}$$

y si $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x) &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{2-n}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\left(\frac{2-n}{2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}} (2x_i) \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{x_i}{|x|^n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

$$|D\Phi(x)| = \frac{1}{n\alpha(n)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{|x|^{2n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-1}}$$

□

2.2. Ecuación de Poisson

La solución fundamental de la ecuación de Laplace es armónica para $x \neq 0$ por construcción. Si cambiamos el origen a un nuevo punto y también tenemos una solución a (2.1.1), esto es, $x \mapsto \Phi(x-y)$ es armónica si $x \neq y$. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ notamos que también $x \mapsto f(y)\Phi(x-y)$ es una función armónica para cada $y \in \mathbb{R}^n$, asimismo cualquier suma finita de funciones de este tipo para distintos puntos y. Este razonamiento sugiere que la convolución

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy \tag{2.2.1}$$

resolverá la ecuación de Laplace. Sin embargo, esto es falso. En efecto, como lo sugiere la estimación (2.1.5), $D^2\Phi(x-y)$ no es integrable, y por tanto diferenciar a través del signo de integral es incorrecto. No obstante, si f si suficientemente buena podemos decir algo sobre (2.2.1), pero necesitaremos un resultado antes.

Proposición 2.2.1. *Si* $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Hagamos $i = 1$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $r > 0$ suficientemente grande para que $\operatorname{sop}(f) \subset B(0,r)$. Demostraremos la convergencia uniforme en $\overline{B(0,r+2)}$ y $\overline{B(0,r+2)}^c$. En $\overline{B(0,r+2)}^c$ basta tomar $\delta = 1$ para tener dicha convergencia. Veamos en $\overline{B(0,r+2)}$. Como f tiene soporte compacto, entonces todas las parciales de f son uniformemente continuas en $\mathbb{R}^n$, pues se anulan en cada punto fuera de $\operatorname{sop}(f)$. Ahora, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{B(0,r+2)} \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(y) \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $0 < \delta(x) < \delta$ de manera que

$$|h| < \delta(x) \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Luego, existen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \overline{B(0,r+2)}$ cumpliendo

$$\overline{B(0,r+2)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$$

Sea $x \in \overline{B(0,r+2)}$, existe x_j tal que $|x-x_j| < \frac{\delta(x_j)}{2}$, si

$$|h| < \frac{1}{2} \min\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_k)\} := \delta_0$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)-\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h}\right| \\
&\qquad\qquad \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_j)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_j)-\frac{f(x_j+he_1)-f(x_j)}{h}\right| \\
&\qquad\qquad\qquad +\left|\frac{f(x_j+he_1)-f(x_j)}{h}-\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h}\right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{2\epsilon}{3}+\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_j+\theta_j he_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x+\theta he_1)\right|
\end{aligned}
$$

donde $\theta, \theta_j \in (0,1)$, de modo que

$$|(x_j+\theta_j he_1)-(x+\theta he_1)| \le |x_j-x|+|h||\theta_j-\theta| < \frac{\delta(x_j)}{2}+\frac{\delta(x_j)}{2} < \delta$$

por lo que

$$|h|<\delta_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)-\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h}\right| < \epsilon$$

y δ_0 no depende de la elección de x en $\overline{B(0,r+2)}$, concluyendo la prueba. □

Ahora estamos listos para hallar una solución a la ecuación de Poisson.

Teorema 2.2.1. *Sea* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy \tag{2.2.2}$$

entonces

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$
2. $-\Delta u = f \quad en\, \mathbb{R}^n$

Por consiguiente, dicha u *provee de una solución a la Ecuación de Poisson* (2.1.2) *en* $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. La expresión (2.2.2) tiene sentido pues f es de soporte compacto y por tanto la integral de la derecha siempre es un número real. Notemos que, por un cambio de variable

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f(x-y)\,dy$$

De aquí

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\left[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\right] dy$$

Pero

$$\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) \qquad i=1,2,\dots,n$$

uniformemente en la variable $y \in \mathbb{R}^n$, y así

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\,dy \qquad i=1,2,\dots,n$$

Similarmente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\,dy \qquad i,j=1,2,\dots,n$$

y como la expresión del lado derecho es continua porque las segundas derivadas parciales de f lo son en la variable x, se sigue que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Φ crece sin control cerca de 0, por esto aislaremos esta singularidad en una bola pequeña. Sea $\epsilon > 0$, por lo recién demostrado

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \left(\int_{B(0,\epsilon)} + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)}\right)\Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \\ &:= I_\epsilon + J_\epsilon\end{aligned}$$

El término I_ϵ no contribuye cuando ϵ es pequeño. Si $n=2$, usando integración en coordenadas polares (véase [5] p. 79)

$$\begin{aligned}|I_\epsilon| &\le \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} 2\pi \frac{1}{2\pi}\int_0^\epsilon |\log r| r\,dr \\ &\le \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \epsilon^2(1+|\log \epsilon|)\end{aligned}$$

Si $n \ge 3$

$$\begin{aligned}|I_\epsilon| &\le \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} n\alpha(n)\int_0^\epsilon \frac{1}{r^{n-2}} r^{n-1}\,dr \\ &\le \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{n-2}\frac{\epsilon^2}{2}\end{aligned}$$

Usando las Fórmulas de Green para J_ϵ (véase [3] pp. 627 - 628 Teorema 3 (ii))

$$\begin{aligned}
J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)} D\Phi(y)\cdot D_x f(x-y)\,dy \\
&\qquad + \int_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial v}(x-y)\,dS(y) \\
&:= K_\epsilon + L_\epsilon
\end{aligned}$$

v denotando el vector normal unitario interior a lo largo de $\partial B(0,\epsilon)$. Luego tenemos

$$|L_\epsilon| \leq \begin{cases} \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\dfrac{1}{2\pi}|\log\epsilon|2\pi\epsilon & n=2 \\ \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\dfrac{1}{\epsilon^{n-2}}\epsilon^{n-1}n\alpha(n) & n\geq 3 \end{cases}$$

Entonces el término L_ϵ tampoco contribuye cuando ϵ es pequeño. Continuando con integración por partes

$$\begin{aligned}
K_\epsilon &= -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)} D\Phi(y)\cdot D_x f(x-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)} \Delta\Phi(y) f(x-y)\,dy - \int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial v}(y) f(x-y)\,dS(y) \\
&= -\int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial v}(y) f(x-y)\,dS(y)
\end{aligned}$$

dado que Φ es armónica lejos del origen. Ahora, por los cálculos de la estimación (2.1.4)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}(y) = D\Phi(y)\cdot v = \frac{-y}{n\alpha(n)\epsilon^n}\cdot\frac{-y}{\epsilon} = \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}$$

en $\partial B(0,\epsilon)$. Así K_ϵ queda

$$\begin{aligned}
K_\epsilon &= \frac{-1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B(0,\epsilon)} f(x-y)\,dS(y) \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\epsilon)} f(y)\,dS(y) \to -f(x)
\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ en I_ϵ, L_ϵ, y K_ϵ hallamos lo requerido. $\square$

2.3. Propiedades de las funciones armónicas

Comenzamos estudiando algunas de las Propiedades de las funciones armónicas. La Propiedad del valor medio será la que desencadene cada una de las propiedades que presentamos en esta sección.

2.3.1. Fórmulas del valor medio

Teorema 2.3.1 (Propiedad del valor medio)**.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica, entonces*

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) \tag{2.3.1}$$

para cada bola $B(x,r) \subset\subset \Omega$. A la identidad (2.3.1) *se le conoce como Propiedad del valor medio (P.V.M.).*

Demostración. Sea $B(x,r) \subset\subset \Omega$. Definamos

$$\phi(t) = \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} u(y)\, dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x+tz)\, dS(z) \tag{2.3.2}$$

Como u es continua en $\overline{B(x,r)}$, existe $K > 0$ tal que $u \leq K$ en $\overline{B(x,r)}$ y por tanto $u(x+tz) \leq K$ si $z \in \partial B(0,1)$. Como consecuencia del teorema de convergencia dominada podemos derivar bajo el signo de integral

$$\phi'(t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} Du(x+tz) \cdot z\, dS(z)$$

Entonces, por las Fórmulas de Green (véase [3] pp. 627 - 628 Teorema 3 (i))

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{t}\, dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} \frac{\partial u}{\partial v}(y)\, dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{B(x,t)} \Delta u(y)\, dy = 0 \end{aligned}$$

De modo que ϕ es constante, así que

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x+tz)\, dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \lim_{t\to 0} u(x+tz)\, dS(z) = u(x) \end{aligned}$$

De aquí conseguimos (2.3.1). □

Nótese que la Propiedad del valor medio dice que $u(x)$ iguala al promedio de u sobre la esfera $\partial B(x,r)$ sabiendo que $B(x,r) \subset\subset \Omega$. El siguiente teorema afirma que el promedio puede de hecho tomarse en la bola sólida $B(x,r)$.

Teorema 2.3.2. *Dado Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega)$. Entonces u cumple la Propiedad del valor medio* (2.3.1) *si y solo si*

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} u(y)\,dy \tag{2.3.3}$$

para cada bola $B(x,r) \subset\subset \Omega$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que u cumple la Propiedad del valor medio (2.3.1) en Ω, advertimos que

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u(y)\,dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y)\,dS(y)\right) ds \\ &= u(x)\int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}\,ds = \alpha(n)r^n u(x)\end{aligned}$$

siempre que $B(x,r) \subset\subset \Omega$ llegando a la representación (2.3.3).

($\Leftarrow$) Supongamos que para toda bola $B(x,r) \subset\subset \Omega$ se cumple

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} u(y)\,dy$$

o equivalentemente

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_0^r s^{n-1}\int_{\partial B(0,1)} u(x+sz)\,dS(z)\,ds$$

Derivando en ambos miembros de la ecuación con respecto a r

$$\begin{aligned}0 = \frac{1}{\alpha(n)r^n}r^{n-1}&\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS(z) \\ &- \frac{n}{\alpha(n)r^{n+1}}\int_0^r s^{n-1}\int_{\partial B(0,1)} u(x+sz)\,dS(z)\,ds\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha(n)r}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS(z) &= \frac{n}{\alpha(n)r^{n+1}}\int_0^r s^{n-1}\int_{\partial B(0,1)} u(x+sz)\,dS(z)\,ds \\ &= \frac{n}{\alpha(n)r^{n+1}}\int_{B(x,r)} u(y)\,dy = \frac{n}{\alpha(n)r^{n+1}}\alpha(n)r^n u(x) \\ &= \frac{n}{r}u(x)\end{aligned}$$

que reescribiendo queda como

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS(z)$$

que es lo mismo que

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y)$$

como deseabamos. $\square$

Ahora nos referiremos a (2.3.1) y (2.3.3) invariablemente como la Propiedad del valor medio, o bien las llamaremos Fórmulas del valor medio. Nos valemos de estas observaciones y de los cálculos del Teorema 2.3.1 para presentar su recíproco que será mejorado un poco después.

Teorema 2.3.3. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C^2(\Omega)$ satisface la P.V.M.*

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^{n}} \int_{B(x,r)} u(y)\, dS(y)$$

para cada bola $B(x,r) \subset\subset \Omega$, entonces u es armónica.

Demostración. Supongamos que existe $x \in \Omega$ tal que $\Delta u(x) > 0$, por continuidad $\Delta u(y) > 0$ con $y \in B(x,r) \subset\subset \Omega$ para algún $r > 0$. Pero, definiendo ϕ como en (2.3.2)

$$0 = \phi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy > 0$$

lo cual es una contradicción. Por tanto u debe ser armónica. $\square$

2.3.2. Principio del Máximo

He aquí la primera importante consecuencia de las Fórmulas del valor medio, que será transcendental para la unicidad de problemas como el de Dirichlet para ciertos dominios, sobre los cuales nos enfocaremos luego.

Teorema 2.3.4 (Principio del Máximo)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Suponga que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es armónica. Entonces*

1. *Si existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, entonces u es constante.*

2. $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

Demostración.

1. Sea $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ y suponga que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$. Sea $r > 0$ suficientemente pequeño para que $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Luego, la Propiedad del valor medio asegura que

$$0 = u(x_0) - M = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} (u(y) - M)\, dy \leq 0$$

lo que implica que $u(y) = M$ si $y \in B(x_0, r)$. Esto prueba que

$$\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$$

es abierto en Ω. Basta notar que $\Omega_M = \Omega \cap u^{-1}(\{M\})$ para ver que Ω_M es cerrado en Ω. Además Ω_M es no vacío pues $x_0 \in \Omega_M$. Todo esto junto con la conexidad de Ω nos lleva a que $\Omega = \Omega_M$ y así u es constante.

2. Si u es constante esto es obvio. Si u no es constante, u no puede tomar su valor máximo en Ω, forzosamente lo hace en $\partial\Omega$ por 1.

□

Como es de esperarse, también tenemos un principio fuerte del mínimo.

Teorema 2.3.5 (Principio del Mínimo)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Suponga que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es armónica. Entonces*

1. *Si existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$, entonces u es constante.*

2. $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

Demostración. Aplique el teorema anterior a $-u$. □

Una aplicación del Principio del Máximo es establecer la unicidad de soluciones para ciertos problemas de valores a la frontera de la Ecuación de Poisson.

Teorema 2.3.6 (Unicidad del Problema Clásico de Dirichlet)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Suponga que $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Entonces existe a lo más una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema de valor a la frontera*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Demostración. Si u y v resuelven (2.3.4), entonces $u - v$ y $v - u$ son funciones armónicas en Ω cumpliendo $u - v = v - u = 0$ en $\partial\Omega$, por el principio fuerte del máximo $u = v$. □

2.3.3. Regularidad

El Teorema de Regularidad afirma que toda función armónica es infinitamente diferenciable. Lo interesante es como la estructura algebraica de la ecuación de Laplace conduce a la deducción analítica de que todas las derivadas parciales de cualquier orden existen. Antes de demostrar esto, introducimos una función que nos permitirá regularizar otras funciones. Definimos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ como

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Aquí $C > 0$ es elegida de manera que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$.

Observación 2.3.1. *Si para cada $\epsilon > 0$ definimos*

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

entonces $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cada $\epsilon > 0$, y se satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\, dx = 1 \qquad \mathrm{sop}(\eta_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$$

Definición 2.3.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable definimos su suavizamiento f^ϵ en $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$ como*

$$f^\epsilon(x) = (\eta_\epsilon * f)(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)f(y)\, dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)\, dy \qquad x \in \Omega_\epsilon$$

Lema 2.3.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable, entonces $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, $x \in \Omega_\epsilon$, $i \in \{1, 2, , \ldots, n\}$ y $h > 0$ tan pequeño para que $x + he_i \in \Omega_\epsilon$. Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x+he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\Omega'} \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\, dy \end{aligned}$$

para algún abierto $\Omega' \subset \Omega$. Como

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

uniformemente en Ω', entonces

$$\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f(y)\,dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)\,f(y)\,dy$$

Un argumento similar muestra que $D^\alpha f^\epsilon(x)$ existe para cada $x \in \Omega_\epsilon$ y cada multi - índice α. Por tanto $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. $\square$

Teorema 2.3.7. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C(\Omega)$ satisface la Propiedad del valor medio para cada bola $B(x,r) \subset\subset \Omega$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ mostraremos que $u = u^\epsilon$ en Ω_ϵ. Si $x \in \Omega_\epsilon$

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \left(\int_{\partial B(x,r)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y)\,dS(y)\right) dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)\right) dr
\end{aligned}$$

pues $\eta(z) = \eta(|z|)$. Ahora, por hipótesis $d(x,\partial\Omega) > \epsilon$, entonces $B(x,r) \subset\subset \Omega$ si $0 \le r < \epsilon$ y la Propiedad del valor medio asegura que

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) u(x) n\alpha(n) r^{n-1}\,dr \\
&= u(x)\left(n\alpha(n)\int_0^\epsilon \eta_\epsilon(r) r^{n-1}\,dr\right) \\
&= u(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(y)\,dy\right) = u(x)
\end{aligned}$$

esto muestra que $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ para cada $\epsilon > 0$, por tanto $u \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Como consecuencia inmediata tenemos

Corolario 2.3.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Como se podía anticipar, ya podemos mejorar el Teorema 2.3.3.

Teorema 2.3.8. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C(\Omega)$ satisface la P.V.M.*

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dS(y)$$

para cada bola $B(x,r) \subset\subset \Omega$, entonces u es armónica.

Demostración. Si u cumple con estas hipótesis, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ por el Teorema 2.3.7 y cumple la Propiedad del valor medio. Por el Teorema 2.3.3, u es armónica en Ω. □

2.3.4. Estimaciones para derivadas

Para evidenciar la analiticidad de una función armónica derivaremos estimaciones precisas para las derivadas parciales de una función armónica haciendo uso de la Propiedad del valor medio.

Teorema 2.3.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si u es armónica en Ω, entonces*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \tag{2.3.5}$$

para cada bola $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$ y cada multi - índice α de orden $|\alpha| = k$, donde

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)} \qquad C_k = \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^k}{\alpha(n)} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.3.6}$$

Demostración. Si u es armónica también lo serán todas sus derivadas $D^\alpha u$ para cualquier multi - índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, esto gracias a que toda función armónica es infinitamente diferenciable de acuerdo al corolario 2.3.1. Sea $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$. Procedamos inductivamente sobre $|\alpha| = k$.

Si $k = 0$

$$|u(x_0)| = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \left| \int_{B(x_0,r)} u(y)\, dy \right| \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Si $k = 1$, gracias a las Fórmulas de Green (véase [3] pp. 627 - 628 Teorema 3 (i)) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\right| &= \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n}\left|\int_{B(x_0,\frac{r}{2})}\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\,dy\right| \\
&= \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n}\left|\int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})}(uv_i)(y)\,dS(y)\right| \\
&\leq \frac{2n}{r}\left(\frac{1}{n\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})}dS(y)\right)\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \\
&= \frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}
\end{aligned}$$

donde v_i es la i - ésima componente del vector normal unitario a $\partial B(x_0,\frac{r}{2})$.

Si $x \in \partial B(x_0,\frac{r}{2})$, entonces $B(x,\frac{r}{2}) \subset B(x_0,r) \subset\subset \Omega$ y así

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n}\|u\|_{L^1(B(x,\frac{r}{2}))} \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Lo cual implica que

$$\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

de este modo

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\right| \leq \frac{2n}{r}\frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} = \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Ahora supongamos que la estimación (2.3.5), (2.3.6) es válida para cualquier multi - índice de orden menor que un entero positivo k. Sea $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ un multi-índice de orden k. Es claro que $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ para algún $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ y multi-índice β con $|\beta| = k-1$. Luego estimamos

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x_0)| &= |(D^\beta u)_{x_i}(x_0)| \\
&= \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{k}\right)^n}\left|\int_{B(x_0,\frac{r}{k})}(D^\beta u)_{x_i}(y)\,dy\right| \\
&= \frac{k^n}{\alpha(n)r^n}\left|\int_{\partial B(x_0,\frac{r}{k})}(D^\beta uv_i)(y)\,dS(y)\right| \\
&\leq \frac{nk}{r}\left(\frac{1}{n\alpha(n)\left(\frac{r}{k}\right)^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,\frac{r}{k})}dS(y)\right)\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{k}))} \\
&= \frac{nk}{r}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{k}))}
\end{aligned}$$

Si $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$, entonces $B(x, \frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Por hipótesis inductiva

$$
\begin{aligned}
|D^\beta u(x)| &\leq \frac{\left(2^{n+1}n(k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x,\frac{k-1}{k}r))} \\
&\leq \frac{\left(2^{n+1}n(k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}
\end{aligned}
$$

Combinando estas desigualdades

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{nk}{r} \frac{\left(2^{n+1}n(k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{nk(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}k^{n+k-1}}{r\alpha(n)(k-1)^{n+k-1}r^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&= \frac{k^n}{(k-1)^n} \frac{(2^{n+1})^{k-1}(nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}
\end{aligned}
$$

Probando lo requerido. □

2.3.5. Teorema de Liouville

Teorema 2.3.10 (Liouville). *Toda función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armónica y acotada debe ser constante.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, por el Teorema 2.3.9

$$
\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\right| \leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \leq \frac{C_1 \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n
$$

cuando $r \to \infty$, por lo que $Du(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y así u es constante. □

Teorema 2.3.11. *Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Entonces cualquier solución acotada a*

$$
-\Delta u(x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.3.7}
$$

tiene la forma

$$
u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy + C \tag{2.3.8}
$$

para alguna constante C.

Demostración. Sabemos que

$$\widetilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\,dy$$

es una solución a (2.3.7). Veamos que es acotada, sea $r>0$ tal que $\operatorname{sop}(f) \subset B(0,r)$

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\,dy \right| \\ &= \left| \int_{B(0,r)} \Phi(x-y)f(y)\,dy \right| \\ &\leq M \int_{B(0,r)} |\Phi(y-x)|\,dy \end{aligned}$$

donde $M>0$ es una cota para f en $\mathbb{R}^n$. Si u es otra solución acotada, entonces $u-\widetilde{u}$ es armónica y acotada en $\mathbb{R}^n$, por el Teorema 2.3.10 se sigue que $u = C + \widetilde{u}$ para alguna constante C. $\square$

Observación 2.3.2. *Si $n=2$, $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|$ no esta acotada, así que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y-x)f(y)\,dy$$

puede estar no acotada.

2.3.6. Analiticidad

Definición 2.3.2 (Analiticidad)**.** *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice analítica en x_0 si existe $r>0$ y $\{f_\alpha\}_\alpha \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\geq 0} f_\alpha (x-x_0)^\alpha$$

si $|x-x_0|<r$.

Lema 2.3.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C^\infty(\Omega)$ y $B(x_0,r)\subset\Omega$, entonces para $x \in B(x_0,r)$*

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0+s(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{2.3.9}$$

para algún $s\in[0,1]$ dependiendo de x.

Demostración. Sea $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$. Tomemos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B(x_0, r)$ y definamos

$$g(t) = u(x_0 + t(x - x_0))$$

donde los valores de t varían en un intervalo abierto $(-a, a)$ que contiene a $[-1, 1]$. El intervalo $(-a, a)$ tiene además la propiedad de que si $t \in (-a, a)$, entonces $x_0 + t(x - x_0) \in B(x_0, r)$. Es claro que $g \in C^\infty((-a, a))$. La idea de la prueba es aplicar el Teorema de Taylor para funciones reales a g con puntos adecuados de $(-a, a)$ y luego encontrar la relación entre las derivadas de g y las derivadas de u. Veamos primero cual es esta relación, la cual probaremos por inducción sobre el orden de la derivada de g. Afirmamos que

$$\frac{g^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \qquad t \in (-a, a)$$

Si $k = 1$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_0^i)$$

Supongamos que la afirmación es válida para k, probemos para $k + 1$

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) = (g^{(k)}(t))' &= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} u(x_0 + t(x - x_0))}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0^i)^{\alpha_i} \right)' \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|+1} u(x_0 + t(x - x_0))}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_i+1} x_i \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_0^j)^{\alpha_j} \right) (x_i - x_0^i)^{\alpha_i+1} \right\} \end{aligned}$$

si $t \in (-a, a)$. Cada multi - índice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n)$ proviene a lo más de los multi-índices

$$\begin{gathered} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \\ (\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n) \\ \vdots \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n - 1) \end{gathered}$$

Entonces la constante acompañando a la derivada de u que corresponde al multi-índice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n)$ es

$$\begin{aligned} k! \Bigg(&\frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_i! \cdots \alpha_n!} + \frac{1}{(\alpha_1 - 1)! \cdots (\alpha_i + 1)! \cdots \alpha_n!} \\ &+ \cdots + \frac{1}{\alpha_1! \cdots (\alpha_i + 1)! \cdots (\alpha_n - 1)!} \Bigg) \end{aligned}$$

que sumando queda

$$k!\left(\frac{\alpha_i + 1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \cdots (\alpha_i + 1)! \cdots \alpha_n!}\right) = \frac{k!(k+1)}{\beta!} = \frac{(k+1)!}{\beta!}$$

donde $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \cdots, \alpha_n)$. De este modo

$$g^{(k+1)}(t) = \sum_{|\beta|=k+1} \frac{(k+1)!}{\beta!} D^\beta u(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\beta$$

quedando probada nuestra afirmación. Si $t = 0$, lo que acabamos de probar se ve como

$$\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

Ahora apliquemos el Teorema de Taylor a g para encontrar $s \in [0,1]$ tal que

$$g(1) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{g^{(N)}(s)}{N!}$$

que finalmente queda

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + s(x - x_0))(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

como deseabamos. $\square$

Teorema 2.3.12 (Analiticidad)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si u es armónica en Ω, entonces u es analítica en Ω.*

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$. Debemos mostrar que u se puede representar como una serie de potencias en una vecindad de x_0. Sea $r > 0$ tal que $B(x_0, 4r) \subset \Omega$ y $M = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,2r))}$, por el Teorema 2.3.9 sabemos que

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x,r))}\left(\frac{2^{n+1}n|\alpha|}{r}\right)^{|\alpha|} \\ &\leq M\left(\frac{2^{n+1}n|\alpha|}{r}\right)^{|\alpha|} \end{aligned}$$

si $x \in B(x_0, r)$, así

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq M\left(\frac{2^{n+1}n|\alpha|}{r}\right)^{|\alpha|}$$

Ahora nótese que $\frac{k^k}{k!} \leq e^k \quad k \in \mathbb{N}$, así $|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}|\alpha|!$. Además, del Teorema Multinomial $n^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!}$ y así $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!$. Luego $|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha!$ y logramos la estimación

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha! = M\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!$$

La serie de Taylor de u en x_0 es

$$\sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

Afirmamos que esta serie converge a condición de que

$$|x-x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3e}$$

Para verificar esto, para cada $N \in \mathbb{N}$ calculemos el Residuo de Taylor

$$\begin{aligned}
R_N(x) &= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\
&= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0+s(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \qquad x \in B(x_0,r)
\end{aligned}$$

para algún $s \in [0,1]$ dependiendo de x, gracias al Lema 2.3.2. Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
|R_N(x)| &\leq M\sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^N \alpha!\left(\frac{r}{2^{n+2}n^3e}\right)^N \\
&= M\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{(2n)^N} = \frac{M}{2^N} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, uniformemente en $\{x : |x-x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3e}\}$. $\square$

2.3.7. Desigualdad de Harnack

Teorema 2.3.13 (Desigualdad de Harnack)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si u es armónica en Ω y no negativa, entonces para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$ abierto conexo, existe una constante $C > 0$, dependiendo solo de Ω', tal que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \tag{2.3.10}$$

Demostración. Sea $r = \frac{1}{4}d(\Omega', \partial\Omega)$. Si $x, y \in \Omega'$ y $|x-y| < r$ entonces

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(x,2r)} u(z)\, dz \\ &\geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(y,r)} u(z)\, dz \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(y,r)} u(z)\, dz \right) = \frac{1}{2^n} u(y) \end{aligned}$$

porque $B(y,r) \subset B(x,2r)$ y u es no negativa. Análogamente $u(y) \geq \frac{1}{2^n} u(x)$. Por consiguiente

$$2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y) \qquad |x-y| < r$$

Sean $x_0, y_0 \in \Omega'$. Como $\overline{\Omega'}$ es compacto, podemos encontrar puntos $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \overline{\Omega'}$ de manera que

$$\overline{\Omega'} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r)$$

y

$$B(x_i, r) \cap B(x_{i+1}, r) \neq \emptyset$$

De esto, se deduce que

$$u(x_0) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y_0)$$

Por tanto

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \qquad C = 2^{nN}$$

□

Observación 2.3.3. *De la afirmación del teorema, se cumple en particular*

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$$

para todo $x, y \in \Omega'$, y una constante $C > 0$ que sólo depende de Ω'. Estas desigualdades nos dicen que los valores de una función armónica no negativa dentro de Ω' son todos comparables, u no puede tener valores muy grandes o muy pequeños en todo Ω'.

Capítulo 3

Funciones de Green

En esta capítulo asumiremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, además $\partial\Omega$ es de clase C^1. Propondremos una fórmula de representación que provea una solución al problema

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega \tag{3.0.1}$$

sujeto a la condición a la frontera

$$u(x) = g(x) \quad x \in \partial\Omega \tag{3.0.2}$$

Con este propósito, primeramente usaremos las Identidades de Green en un dominio donde la solución fundamental sea armónica, esto es, aislaremos la singularidad de la solución fundamental quitando una vecindad muy pequeña de dicha singularidad. Luego pasaremos al límite haciendo la vecindad en cuestión cada vez más pequeña. Al llegar a este paso, habremos obtenido una fórmula de representación que exige conocer más información con la que contamos. Aquí es donde entrará la sobresaliente idea de introducir una función correctora y una función de Green. Estos conceptos dependen exclusivamente del dominio en el que estemos y estarán definidos en cada punto donde exista la singularidad de la solución fundamental. La función correctora gozará de propiedades apropiadas para obtener una nueva fórmula de representación que solo necesita de datos ya conocidos. Surgirá aquí el problema de encontrar esta función correctora.

Finamente estudiaremos el problema (3.0.1), (3.0.2) en el caso en que $f = 0$ para dominios concretos con geometría sencilla. Específicamente daremos la solución explícita al problema de Dirichlet para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y para una Bola en $\mathbb{R}^n$. La referencia para este capítulo es [3].

3.1. Derivación de la Función de Green

Suponga que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Sea $x \in \Omega$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \epsilon_0) \subset\subset \Omega$. Apliquemos las Fórmulas de Green (véase [3] pp. 627 - 628 Teorema 3 (iii)) a $\Omega_\epsilon = \Omega - B(x, \epsilon)$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, con las funciones $u(y)$ y $\Phi(y - x)$ para tener

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y))\, dy \\ = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial v}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y)\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

donde v es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega_\epsilon$ y $\frac{\partial u}{\partial v} = \nabla u \cdot v$. Analicemos el primer miembro de (3.1.1). Dado que

$$\left| \int_{B(x,\epsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy \right| \leq \|D^2 u\|_{L^\infty(B(x,\epsilon_0))} \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(y)|\, dy \to 0$$

cuando $\epsilon \to 0$, entonces

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\epsilon} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y))\, dy \\ &\quad = -\int_{\Omega_\epsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy \\ &\quad = \left(\int_{B(x,\epsilon)} - \int_{\Omega} \right) [\Phi(y-x)\Delta u(y)]\, dy \to -\int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy\end{aligned}$$

cuando $\epsilon \to 0$, porque la solución fundamental es armónica en Ω_ϵ. Ahora veamos el segundo miembro de (3.1.1). Observemos que

$$\left| \int_{\partial B(x,\epsilon)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y)\, dS(y) \right| \leq \|Du\|_{L^\infty(B(x,\epsilon_0))} n\alpha(n)\epsilon^{n-1} \max_{y \in \partial B(x,\epsilon)} |\Phi(y-x)| \to 0$$

si $\epsilon \to 0$. Además

$$\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial v}(y-x)\, dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y) \to u(x)$$

si $\epsilon \to 0$. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y) \\
&\quad = \int_{\partial B(x,\epsilon)} \left(u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y) \\
&\qquad\qquad + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y) \\
&\quad \to u(x) + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y)
\end{aligned}$$

si $\epsilon \to 0$. Por lo que, haciendo $\epsilon \to 0$ en (3.1.1) nuestros cálculos arrojan la igualdad

$$\begin{aligned}
u(x) = &\int_{\partial\Omega} \left(\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(y-x) \right) dS(y) \\
&- \int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

La ecuación (3.1.2) nos permitiría calcular $u(x)$ si solo supieramos los valores de Δu dentro de Ω, y los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial v}$ en $\partial\Omega$. No obstante, no contamos con los valores de $\frac{\partial u}{\partial v}$ en $\partial\Omega$. Resultaría conveniente desaparecer este término modificando (3.1.2) de alguna manera. Introducimos entonces una función correctora $\phi^x = \phi^x(y)$ resolviendo el problema de valores a la frontera

$$\begin{cases} \Delta\phi^x(y) = 0 & y \in \Omega \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x) & y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.3}$$

y definimos a la Función de Green

Definición 3.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Definimos la Función de Green para el dominio Ω como*

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y) \qquad x, y \in \overline{\Omega} \quad x \neq y \tag{3.1.4}$$

Ahora apliquemos las Fórmulas de Green (véase [3] pp. 627 - 628 Teorema 3 (iii)) a u y ϕ^x obteniendo

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \phi^x(y)\Delta u(y)\, dy &= \int_{\Omega} \left(u(y)\Delta\phi^x(y) - \phi^x \Delta u(y) \right) dy \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \phi^x}{\partial v}(y) - \phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \phi^x}{\partial v}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) \right) dS(y)
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Con esta nueva terminología sumamos (3.1.5) y (3.1.2) para obtener

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial\Omega}\left(\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(y-x)\right) dS(y) - \int_{\Omega}\Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy \\
&\quad + \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial \phi^x}{\partial v}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y)\right) dS(y) + \int_{\Omega}\phi^x(y)\Delta u(y)\,dy \\
&= -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial v}(x,y)\,dS(y) - \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\,dy \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial G}{\partial v}(x,y) = D_y G(x,y)\cdot v$ es la derivada normal exterior de G respecto a la variable y. Nos damos cuenta que en (3.1.6) no aparece más el término $\frac{\partial u}{\partial v}$. El introducir ϕ^x nos permitió representar de otra forma a $u(x)$, pero surge el problema de determinar ϕ^x con tan buenas características, como veremos un poco más adelante, una geometría sencilla para Ω nos facilita la tarea de encontrar a ϕ^x.

Volviendo a nuestra fórmula de representación, si suponemos además que $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ resuelve

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

para $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$, podemos añadir esto a (3.1.6) obteniendo el siguiente

Teorema 3.1.1 (Representación mediante la Función de Green)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Si $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ resuelve el problema de valor a la frontera*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{en } \Omega \\ u = g & \textit{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad (3.1.7)$$

Entonces

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial v}(x,y)\,dS(y) + \int_{\Omega} G(x,y)f(y)\,dy \qquad (3.1.8)$$

Bajo el requisito que u cumpla (3.1.7) y siempre que podamos construir explícitamente una función de Green para un dominio dado, entonces podremos representar a u por medio de la función de Green, la derivada normal de la función de Green, y las funciones f y g. La Fórmula de Representación mediante la Función de Green (3.1.8) fue posible gracias a la introducción de la función correctora ϕ^x que es la solución al problema (3.1.3). En este momento no podemos garantizar que ϕ^x existe cuando Ω es abierto, conexo y acotado y además tiene frontera de clase C^1. En el siguiente capítulo salvaremos este contratiempo.

Antes de ir más lejos, analizaremos una propiedad esencial de la función de Green, su simetría en las variables x y y.

3.2. Simetría de la Función de Green

Teorema 3.2.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y acotado tal que* $\partial\Omega$ *es de clase* C^1. *Si* $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, *entonces* $G(x, y) = G(y, x)$

Demostración. Sean $x, y \in \Omega \quad x \neq y$. Definimos

$$\begin{aligned} w_x(z) &= G(x,z) = \Phi(z-x) - \phi^x(z) \quad z \neq x \\ w_y(z) &= G(y,z) = \Phi(z-y) - \phi^y(z) \quad z \neq y \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta w_x(z) &= 0 \quad z \in \Omega - \{x\} \\ \Delta w_y(z) &= 0 \quad z \in \Omega - \{y\} \\ w_x(z) = w_y(z) &= 0 \quad z \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Sea $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño para que $B(x,\epsilon_0) \subset\subset \Omega$, $B(y,\epsilon_0) \subset\subset \Omega$ y $\overline{B(x,\epsilon_0)} \cap \overline{B(y,\epsilon_0)} = \emptyset$. Si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, usando las Fórmulas de Green (véase [3] pp. 627 - 628 Teorema 3 (iii)) en $\Omega_\epsilon = \Omega - (B(x,\epsilon) \cup B(y,\epsilon))$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\epsilon} (w_x(z)\Delta w_y(z) - w_y(z)\Delta w_x(z))\, dz \\ &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} w_x(z)\frac{\partial w_y}{\partial v}(z) - w_y(z)\frac{\partial w_x}{\partial v}(z)\, dS(z) \\ &= \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B(x,\epsilon)} + \int_{\partial B(y,\epsilon)}\right)\left(w_x(z)\frac{\partial w_y}{\partial v}(z) - w_y(z)\frac{\partial w_x}{\partial v}(z)\right) dS(z) \\ &= \left(\int_{\partial B(x,\epsilon)} + \int_{\partial B(y,\epsilon)}\right)\left(w_x(z)\frac{\partial w_y}{\partial v}(z) - w_y(z)\frac{\partial w_x}{\partial v}(z)\right) dS(z) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B(x,\epsilon)} \left(w_y(z)\frac{\partial w_x}{\partial v}(z) - w_x(z)\frac{\partial w_y}{\partial v}(z)\right) dS(z) \\ &\qquad = \int_{\partial B(y,\epsilon)} \left(w_x(z)\frac{\partial w_y}{\partial v}(z) - w_y(z)\frac{\partial w_x}{\partial v}(z)\right) dS(z) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

si $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Ambos lados de (3.2.1) se estudian de la misma manera. Veamos el lado izquierdo.

$$\left|\int_{\partial B(x,\epsilon)} w_x(z)\frac{\partial w_y}{\partial v}(z)\, dS(z)\right| \leq \|Dw_y\|_{L^\infty(B(x,\epsilon_0))} n\alpha(n)\epsilon^{n-1} \max_{\partial B(x,\epsilon)} |w_x| \to 0$$

cuando $\epsilon \to 0$, pues w_y es suave cerca de x. Por otro lado

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\epsilon)} w_y(z) \frac{\partial w_x}{\partial v}(z)\, dS(z) \\
&\quad = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\epsilon)} w_y(z) \frac{\partial \Phi}{\partial v}(z-x)\, dS(z) - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\epsilon)} w_y(z) \frac{\partial \phi^x}{\partial v}(z-x)\, dS(z) \\
&\quad = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x,\epsilon)} w_y(z)\, dS(z) = w_y(x)
\end{aligned}
$$

pues w_y y ϕ^x son suaves cerca de x. Haciendo $\epsilon \to 0$, el lado izquierdo de (3.2.1) tiende a $w_y(x)$. Similarmente, el lado derecho tiende a $w_x(y)$, de este modo

$$G(x,y) = w_x(y) = w_y(x) = G(y,x)$$

$\square$

3.3. Función de Green para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$

Consideremos el semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^n : t > 0\}$. A pesar de que $\mathbb{R}^{n+1}_+$ no es una región acotada usaremos las ideas desarrolladas en la sección anterior para construir una función de Green, solo restará comprobar que la fórmula de representación (3.1.8) sirve como solución a (3.1.7) con $f = 0$. La idea para construir la función correctora es, dado un punto $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, cambiar $\Phi(y-x)$ por $\phi^x(y) = \Phi(y-\widetilde{x}\,)$ donde $\widetilde{x}$ resulta de reflejar a x a través de $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Definición 3.3.1. *Si $x = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ su reflexión en el plano $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ es $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_n, -t)$*

Hemos reflejado la singularidad $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ de $\Phi(y-x)$ a la singularidad $\widetilde{x} \notin \mathbb{R}^{n+1}_+$ de $\phi^x(y) = \Phi(y - \widetilde{x}\,)$. Esta nueva función es efectivamente una función correctora. Claramente se verifica la primera condición en (3.1.3) y

$$|y - \widetilde{x}\,|^2 = |y|^2 - 2(y \cdot \widetilde{x}\,) + |\widetilde{x}|^2 = |y|^2 - 2(y \cdot x) + |x|^2 = |y-x|^2$$

si $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y $y \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$, por lo que se cumple la segunda condición en (3.1.3).

Definición 3.3.2. *La Función de Green para el semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ es*

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y - \widetilde{x}\,) \tag{3.3.1}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_{n+1}}(x,y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+1}}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+1}}(y-\widetilde{x}\,) \\ &= -\frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)}\left(\frac{y_{n+1}-t}{|y-x|^{n+1}} - \frac{y_{n+1}+t}{|y-\widetilde{x}\,|^{n+1}}\right) \\ &= -\frac{1}{\omega_{n+1}}\left(\frac{y_{n+1}-t}{|y-x|^{n+1}} - \frac{y_{n+1}+t}{|y-\widetilde{x}\,|^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Consecuentemente si $y \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$, la derivada normal de G es

$$\frac{\partial G}{\partial v}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y_{n+1}}(x,y) = \frac{-2t}{\omega_{n+1}|y-x|^{n+1}}$$

Ahora, supongamos que u resuelve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u = g & \text{en} \quad \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \end{cases} \tag{3.3.2}$$

De (3.1.8) esperamos que

$$u(x) = \frac{2t}{\omega_{n+1}} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{g(y)}{|x-y|^{n+1}}\, dS(y) \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

sea una fórmula de representación para nuestra solución. La función

$$K(x,y) = \frac{2t}{\omega_{n+1}} \frac{1}{|x-y|^{n+1}} \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \quad y \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$$

es el *núcleo de Poisson* para $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Entonces podemos expresar a u como

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(x,y)g(y)\, dS(y) \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

Si escribimos a $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ como (z,t) donde $z \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, entonces $K(x,y)$ toma la forma

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{|x-y|^{n+1}} \\ &= \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{(|z-y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \quad y \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \\ &:= K(z-y,t) \end{aligned}$$

Así, también podemos escribir a u como

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(z-y,t)g(y)\, dS(y) \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

La notación $K(x,y)$ es más comoda y útil de usar, pero la notación $K(z-y,t)$ revela más propiedades del núcleo de Poisson, esto será claro cuando abordemos el Problema de Dirichlet cuando el dato g sea solo integrable. Ahora probamos que el núcleo de Poisson es integrable, esto nos será útil en esta sección, pero también más adelante.

Lema 3.3.1. *Si $x=(z,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$, entonces*

$$\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(z-y,t)\,dS(y) = 1 \tag{3.3.3}$$

Demostración. Sea $x=(z,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(z-y,t)\,dS(y) &= \frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{t}{(|z-y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dS(y)\\
&= \frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{t}{(|y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dS(y)\\
&= \frac{2}{\omega_{n+1}t^n}\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{1}{\left(1+\left|\frac{y}{t}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,dS(y)\\
&= \frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dS(y)\\
&= \frac{2}{\omega_{n+1}}\omega_n\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dr\\
&= \frac{2}{\omega_{n+1}}\omega_n\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}\right)\\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})} = 1
\end{aligned}$$

(véase [4] pp. 139 - 141 (A.1, A.2)). De hecho, observando la secuencia de igualdades también hemos mostrado que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(y,t)\,dy = 1 \quad \forall t>0$$

y que

$$\frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dy = 1$$

□

3.3.1. Solución al Problema Clásico de Dirichlet en el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$

Teorema 3.3.1 (Fórmula de Poisson para el Semi - espacio)**.** *Sea $g \in C(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap L^\infty(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Entonces u representada mediante la Fórmula de Poisson*

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(x,y)g(y)\,dS(y) = \frac{2t}{\omega_{n+1}} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}} \frac{g(y)}{|x-y|^{n+1}}\,dS(y) \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \tag{3.3.4}$$

satisface

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$
- $\Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^{n+1}_+$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}^{n+1}_+}} u(x) = g(x_0)$ *para todo* $x_0 \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, $y \mapsto G(x,y)$ es una función armónica, excepto en $y = x$, entonces $x \mapsto G(y,x) = G(x,y)$ es una función armónica excepto en $x = y$. De este modo $x \mapsto -\frac{\partial G}{\partial y_{n+1}}(x,y) = K(x,y)$ es una función armónica en la variable $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ para cada $y \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$. De lo anterior, gracias al Teorema de convergencia dominada podemos derivar bajo el signo de integral y conseguir

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_x K(x,y)g(y)\,dS(y) = 0$$

Por tanto u es armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y así $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Por otra parte, como $g \in L^\infty(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)$, entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ por la ecuación (3.3.4) y el Lema 3.3.1.

Para demostrar el último punto sea $x_0 \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ y $\epsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |y - x_0| < \delta \quad y \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$$

Entonces si $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(x,y)g(y)\,dS(y) - \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(x,y)g(x_0)\,dS(y) \right| \\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dS(y) \\
&= \left(\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \cap B(x_0,\delta)} + \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ - B(x_0,\delta)} \right) K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dS(y) \\
&:= I + J
\end{aligned}$$

Como $K(x,y)$ es positivo y por el lema 3.3.1

$$I \leq \epsilon \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(x,y)\, dS(y) = \epsilon$$

Por otra parte, si $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ y $|y - x_0| \geq \delta$, tenemos

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|$$

consecuentemente $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|$, luego

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ - B(x_0,\delta)} K(x,y)\, dS(y) \\ &= \frac{4\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)} t}{\omega_{n+1}} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ - B(x_0,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{n+1}}\, dS(y) \\ &\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)} t}{\omega_{n+1}} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ - B(x_0,\delta)} \frac{1}{|y-x_0|^{n+1}}\, dS(y) \xrightarrow{t \to 0} 0 \end{aligned}$$

Con estas estimaciones logramos que $|u(x) - g(x_0)| < 2\epsilon$ si $|x - x_0|$ es suficientemente pequeño. $\square$

3.4. Función de Green para una bola en $\mathbb{R}^n$

Construiremos una función de Green para la bola $B(0,1)$. La idea es similar a la usada para la función de Green para el semi - espacio. Partimos de un punto $x \in B(0,1)$ y consideramos $\Phi(y - x)$ que tiene su singularidad en $y = x$. Cambiamos a $\Phi(y - x)$ por $\Phi(y - \widehat{x})$ donde $\widehat{x} = \frac{x}{|x|^2} \notin B(0,1)$, así hemos removido la singularidad de la bola $B(0,1)$.

Definición 3.4.1. *Si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, el punto*

$$\widehat{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

es llamado el punto dual de x respecto a $\partial B(0,1)$. El mapeo

$$x \longmapsto \widehat{x}$$

es la inversión a través de la esfera unitaria $\partial B(0,1)$.

Asumimos momentáneamente que $n \geq 3$. Como se observó anteriormente $y \mapsto \Phi(y - \widehat{x}\,)$ es una función armónica si $y \neq \widehat{x}$, por lo que $y \mapsto |x|^{2-n}\Phi(y - \widehat{x})$ es una función armónica si $y \neq \widehat{x}$, y por tanto $\phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \widehat{x}\,))$ es una función armónica en $B(0,1)$. Además si $y \in \partial B(0,1)$ y $x \neq 0$

$$|x|^2|y - \widehat{x}\,|^2 = |x|^2 \left(|y|^2 - 2\frac{y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) = |x|^2 - 2(y \cdot x) + 1 = |x - y|^2$$

por lo que se deduce $\phi^x(y) = \Phi(y - x)$ si $y \in \partial B(0,1)$.

Definición 3.4.2. *La Función de Green para la bola unitaria $B(0,1)$ es*

$$G(x,y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \widehat{x}\,)) \tag{3.4.1}$$

La misma fórmula también es válida para $n = 2$.

De acuerdo a (3.4.1)

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y - x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y - \widehat{x}\,))$$

Pero

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y - x) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i - x_i}{|x - y|^n} \quad n \geq 2$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y - \widehat{x}\,)) &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(y_j - \frac{x_j}{|x|^2} \right)^2 \right)^{\frac{2-n}{2}} \\
&= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{2-n}{2} \left(\sum_{j=1}^n \left(y_j - \frac{x_j}{|x|^2} \right)^2 \right)^{-\frac{n}{2}} 2 \left(y_i - \frac{x_i}{|x|^2} \right) \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x|^n|y - \widehat{x}\,|^n} = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|y - x|^n} \quad n \geq 3
\end{aligned}$$

si $y \in \partial B(0,1)$. Se obtiene el mismo resultado para $n = 2$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n} \left((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i \right) \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n} \left(y_i(1 - |x|^2) \right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial G}{\partial v}(x,y) = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}$$

Si suponemos que u resuelve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad B(0,1) \\ u = g & \text{en} \quad \partial B(0,1) \end{cases} \tag{3.4.2}$$

se seguirá de (3.1.8) que

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \quad x \in B(0,1)$$

proporciona una Fórmula de Representación para la solución de (3.4.2).

Cambiemos un poco el problema, en vez de (3.4.2) supongamos que u satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad B(0,r) \\ u = g & \text{en} \quad \partial B(0,r) \end{cases} \tag{3.4.3}$$

para algún $r > 0$.

Entonces $\widetilde{u}(x) = u(rx)$ cumple (3.4.2) con $\widetilde{g}(x) = g(rx)$. Luego, por un cambio de variable llegamos a

$$\begin{aligned} u(x) = \widetilde{u}\left(\frac{1}{r}x\right) &= \frac{1-\left|\frac{x}{r}\right|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\widetilde{g}(y)}{|\frac{1}{r}x-y|^n}\, dS(y) \\ &= \frac{r^{n-2}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{r^2-|x|^2}{|x-ry|^n} g(ry)\, dS(y) \\ &= \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \quad x \in B(0,r) \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

La función

$$K(x,y) = \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x-y|^n} \quad x \in B(0,r) \quad y \in \partial B(0,r)$$

es el *núcleo de Poisson* para la bola $B(0,r)$.

3.4.1. Solución al Problema Clásico de Dirichlet para una bola en $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.4.1 (Fórmula de Poisson para una bola)**.** *Sea $g \in C(\partial B(0,r))$. Entonces*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial B(0,r)} K(x,y) g(y)\, dS(y) \\ &= \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \quad x \in B(0,r) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

cumple lo siguiente

- $u \in C^\infty(B(0,r))$
- $\Delta u = 0 \quad en \quad B(0,r)$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B(0,r)}} u(x) = g(x_0)$ *para todo* $x_0 \in \partial B(0,r)$

Demostración. Para cada $x \in B(0,r)$, $y \mapsto G(x,y)$ es armónico, excepto en $y = x$. Entonces $x \mapsto G(y,x) = G(x,y)$ es armónico excepto en $x = y$. Por consiguiente $x \mapsto -\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)$ es armónico en la variable $x \in B(0,r)$ para cada $y \in \partial B(0,r)$. Aplicando (3.4.4) con $u = 1$, sabemos que $K(x,y)$ es integrable en $\partial B(0,r)$ e integra 1. Como en el teorema 3.3.1, usando el Teorema de convergencia dominada se demuestra que $\Delta u = 0$ en $B(0,r)$, entonces también $u \in C^\infty(B(0,r))$. Para lo que resta, sea $x_0 \in \partial B(0,r)$ y $\epsilon > 0$. Sea $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \epsilon \quad \text{si} \quad y \in \partial B(0,r) \quad |y - x_0| < \delta$$

Si $x \in B(0,r) \quad |x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned}|u(x) - g(x_0)| &\leq \left(\int_{\partial B(0,r)\cap B(x_0,\delta)} + \int_{\partial B(0,r)-B(x_0,\delta)}\right) K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\, dS(y) \\ &:= I + J\end{aligned}$$

Primero $I \leq \epsilon$ por la continuidad de g y porque $K(x,y)$ es positivo e integra 1 en $\partial B(0,r)$. Después, si $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ y $|y - x_0| \geq \delta$, entonces $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0| \geq \frac{1}{2}\delta$, y se tiene

$$\begin{aligned}J &\leq \frac{2\|g\|_{L^\infty(\partial B(0,r))}}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)-B(x_0,\delta)} \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\, dS(y) \\ &\leq 2\|g\|_{L^\infty(\partial B(0,r))}(r^2 - |x|^2)\frac{2^n}{\delta^n} r^{n-2} \leq 2\|g\|_{L^\infty(\partial B(0,r))}\frac{2^n r^{n-1}}{\delta^n}\epsilon\end{aligned}$$

porque

$$r^2 - |x^2| = (r + |x|)(r - |x|) \leq 2r(|x_0| - |x|) \leq 2r|x_0 - x| \leq 2r\frac{\delta}{2} < r\epsilon$$

Por tanto $u(x) \to g(x_0)$ si $x \to x_0$. $\square$

Como es de esperar, también podemos resolver el problema de Dirichlet para cualquier bola.

Corolario 3.4.1. *Sea* $g \in C(\partial B(x_0,r))$. *Entonces*

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{g(z)}{|x-z|^n}\, dS(z) \quad x \in B(x_0,r)$$

satisface

- $u \in C^\infty(B(x_0, r))$
- $\Delta u = 0 \quad en \quad B(x_0, r)$
- $\lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in B(x_0,r)}} u(x) = g(x')$ *para todo* $x' \in \partial B(x_0, r)$

Demostración. Si $x \in B(x_0, r)$, podemos escribir $x = x_0 + y$ con $y \in B(0, r)$. Si u resuelve el Problema de Dirichlet en $B(x_0, r)$ con función frontera g, entonces la función $\widetilde{u}(x) = u(x_0 + x)$ resuelve (3.4.3) con función frontera $\widetilde{g}(x) = g(x_0 + x)$. Luego encontramos que la solución al problema de Dirichlet en $B(x_0, r)$ viene dada como

$$\begin{aligned} u(x) = \widetilde{u}(x - x_0) &= \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\widetilde{g}(y)}{|x - x_0 - y|^n}\, dS(y) \\ &= \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(x_0 + y)}{|x - x_0 - y|^n}\, dS(y) \\ &= \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{g(z)}{|x - z|^n}\, dS(z) \end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{u}(x) = u(x_0 + x)$ cada uno de los puntos a demostrar claramente se satisfacen. $\square$

Capítulo 4

Problema Clásico de Dirichlet para dominios con frontera regular

En este capítulo resolvemos el Problema de Dirichlet para dominios en $\mathbb{R}^n$ con frontera regular por medio del *Método de Perron de funciones subarmónicas*. Posteriormente presentamos condiciones geométricas sobre la frontera de nuestro dominio en cuestión que aseguren su regularidad.

Para este capítulo nos hemos basado fundamentalmente en [6] y [1].

4.1. Funciones subarmónicas y superarmónicas

Para resolver el Problema de Dirichlet en dominios más generales, introduciremos las funciones subarmónicas y su contraparte, las funciones superármonicas. Estas funciones son versiones debilitadas de las funciones armónicas, aún así, gozan de algunas de las propiedades de las funciones armónicas. Es conveniente estudiarlas pues, como veremos, de una manera excepcional, podemos generar funciones armónicas a partir de funciones subarmónicas o superarmónicas. Las demostraciones de los resultados de esta sección se omiten, pues son esencialmente las mismas que se presentaron en el capítulo sobre la Ecuación de Laplace y la Ecuación de Poisson.

Definición 4.1.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $u \in C(\Omega)$ es subarmónica (superarmónica) si para cada $x \in \Omega$ existe $R > 0$ tal que*

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y)$$

o equivalentemente

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy$$

siempre que $0 < r \leq R$.

Para funciones armónicas teníamos un Principio del Máximo y un Principio del Mínimo. Para funciones subarmónicas (superarmónicas) solo tendremos un Principio fuerte del Máximo (Mínimo).

Teorema 4.1.1 (Principio del Máximo para funciones subarmónicas)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto, conexo y acotado. Si* $u \in C(\overline{\Omega})$ *es una función subarmónica en* Ω *y si existe* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ *entonces* u *es constante. Como consecuencia tenemos*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Teorema 4.1.2 (Principio del Mínimo para funciones superarmónicas)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto, conexo y acotado. Si* $u \in C(\overline{\Omega})$ *es una función superarmónica en* Ω *y si existe* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$ *entonces* u *es constante. Como consecuencia tenemos*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Corolario 4.1.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto, conexo y acotado. Si* $u \in C(\Omega)$ *es armónica en* Ω*, entonces*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad x \in \Omega$$

4.2. Convergencia de funciones armónicas

Una función $u \in C(\Omega)$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ es armónica si y solo si satisface la Propiedad del valor medio para cada bola compactamente contenida en Ω. Como consecuencia de esta sobresaliente caracterización, obtendremos algunos resultados sobre convergencia de sucesiones de funciones armónicas.

Teorema 4.2.1. *El límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones armónicas es una función armónica. De manera precisa, si* $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones armónicas en* Ω *y si* $u_m \to u$ *uniformemente en* Ω*, entonces* u *es armónica en* Ω*.*

Demostración. Como $u_m \to u$ uniformemente en Ω y cada $u_m \in C(\Omega)$, entonces $u \in C(\Omega)$. Sea $x \in \Omega$ y $B(x,r) \subset\subset \Omega$. Cada u_m es armónica, entonces cada u_m cumple

$$u_m(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u_m(y) dy$$

Probaremos que u también satisface la P.V.M. para $B(x,r)$. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq N \quad \Rightarrow \quad |u_m(y) - u(y)| < \frac{\epsilon}{\alpha(n)r^n}$$

para todo $y \in B(x,r)$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\left| \int_{B(x,r)} u_m(y)\, dy - \int_{B(x,r)} u(y)\, dy \right| &\leq \int_{B(x,r)} |u_m(y) - u(y)| dy \\ &\leq \alpha(n)r^n \|u_m - u\|_{L^\infty(B(x,r))} \leq \epsilon \quad n \geq N\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}u(x) = \lim_{m\to\infty} u_m(x) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u_m(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \lim_{m\to\infty} u_m(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy\end{aligned}$$

Concluyendo entonces que u es armónica en Ω. $\square$

Teorema 4.2.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sea $(u_m)_{m=1}^\infty$ una sucesión creciente de funciones armónicas en Ω y suponga que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(u_m(x_0))_{m=1}^\infty$ es acotada. Entonces $(u_m)_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a una función armónica en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ que contenga a x_0.*

Demostración. Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$ y $x_0 \in \Omega$ como en la hipótesis. Bastará probar que $(u_m)_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy uniforme en Ω'. Por hipótesis $(u_m(x_0))_{m=1}^\infty$ es monótona y acotada, por tanto convergente y también de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq u_r(x_0) - u_s(x_0) < \epsilon \quad r \geq s > N$$

Si $r \geq s$, entonces $u_r - u_s$ es armónica y positiva. Por la desigualdad de Harnack sabemos que

$$\sup_{\Omega'} |u_r - u_s| \leq C \inf_{\Omega'} |u_r - u_s| < C\epsilon \quad m \geq n > N$$

para alguna constante $C > 0$ dependiendo solamente de Ω'. Así $(u_m)_{m=1}^\infty$ es de Cauchy uniforme en Ω', luego uniformemente convergente en Ω' y su límite es una función armónica por el Teorema 4.2.1. $\square$

4.3. Solución al problema Clásico de Dirichlet en dominios con frontera regular

Las funciones subarmónicas son el objeto que nos permitirá encontrar teóricamente la solución al Problema de Dirichlet. La técnica a utilizar se le conoce como *Método de Perron de funciones subarmónicas.* La idea es adaptar progresivamente una sucesión de funciones subarmónicas en un dominio hasta convertirla en una sucesión uniformemente convergente de funciones armónicas al menos en una bola dentro del dominio. En la construcción de dicha sucesión es fundamental conocer la solución al Problema Clásico de Dirichlet para bolas en $\mathbb{R}^n$. El siguiente resultado justifica de alguna manera porque las funciones subarmónicas son sub - armónicas y será usado en repetidas ocasiones durante este capítulo.

Lema 4.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Suponga que $u \in C(\overline{\Omega})$ es subarmónica en Ω y que $v \in C(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω. Si $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. $u - v \leq 0$ en $\partial\Omega$. Dado que $u - v$ es subarmónica en Ω, el Principio del Máximo muestra que $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$. □

Podemos construir una función subarmónica a partir de otra función subarmónica, pero mejorandola un poco. Podemos hacerla armónica en una bola pequeña y subarmónica fuera de dicha bola.

Definición 4.3.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Para $u \in C(\Omega)$ y $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ definimos*

$$u_{x_0,r}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega - B(x_0, r) \\ \dfrac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha(n)r} \displaystyle\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} dS(y) & x \in B(x_0, r) \end{cases} \tag{4.3.1}$$

a $u_{x_0,r}$ se le llama la modificación de Poisson de u para $B(x_0, r)$.

Teorema 4.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Si $u \in C(\Omega)$ es subarmónica en Ω y $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$, entonces $u_{x_0,r}$ es subarmónica en Ω y $u \leq u_{x_0,r}$ en Ω.*

Demostración. Claramente $u_{x_0,r} \in C(\Omega)$. Para $u \leq u_{x_0,r}$ en Ω solo basta ver que $u \leq u_{x_0,r}$ en $B(x_0, r)$. Esto es inmediato del Lema 4.3.1, pues u es subarmónica en $B(x_0, r)$, $u_{x_0,r}$ es armónica en $B(x_0, r)$ y $u - u_{x_0,r} = 0$ en $\partial B(y, r)$. Mostremos que $u_{x_0,r}$ es subarmónica en Ω.

Sea $x \in \Omega$. Si $x \in B(x_0, r)$

$$u_{x_0,r}(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,s)} u_{x_0,r}(y)\, dS(y)$$

para s suficientemente pequeña . Si $x \notin B(x_0, r)$

$$\begin{aligned} u_{x_0,r}(x) &= u(x) \\ &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,s)} u(y)\, dS(y) \\ &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,s)} u_{x_0,r}(y)\, dS(y) \end{aligned}$$

para s pequeña. □

Proposición 4.3.1. *Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son funciones subarmónicas en Ω, entonces $u = \text{máx}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es subarmónica en Ω.*

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ y $R > 0$ como en la definición 4.1.1 para cada una de las funciones $u_1, u_2, ..., u_k$. Si $0 < r \leq R$, tenemos

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \max_{1\leq i\leq k} \{u_i(x_0)\} \\ &\leq \max_{1\leq i\leq k} \left\{ \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u_i(y)\, dS(y) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u(y)\, dS(y) \end{aligned}$$

□

Definición 4.3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $g \in C(\partial\Omega)$ definimos*

$$S_g = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u \text{ es subarmónica en } \Omega \text{ y } u \leq g \text{ en } \partial\Omega\}$$

Si $u \in S_g$ decimos que u es una subfunción relativa a g. De este modo, S_g es el conjunto de subfunciones relativas a g. A S_g también se le conoce como la familia de Perron para g.

La función $\omega_g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\omega_g(x) = \sup\{u(x) : u \in S_g\}$$

es la función de Perron relativa a g.

Observación 4.3.1. *Bajo las mismas hipótesis de la definición 4.3.2*

- *El conjunto S_g es no vacío porque S_g contiene a todas las funciones constantes menores que el mínimo de g en $\partial\Omega$.*

- *La función w_g está bien definida. Si $u \in S_g$, entonces para todo $x \in \Omega$*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} g < \infty$$

Por tanto

$$\omega_g(x) = \sup\{u(x) : u \in S_g\} \leq \max_{\partial\Omega} g < \infty$$

- *$\omega_g \leq g$ en $\partial\Omega$. Si $x \in \partial\Omega$ y $u \in S_g$ se tiene que $u(x) \leq g(x)$, entonces*

$$\omega_g(x) = \sup_{u \in S_g} u(x) \leq g(x)$$

- *Si m y M son el mínimo y el máximo de g en $\partial\Omega$, entonces $m \leq \omega_g \leq M$ en $\overline{\Omega}$.*
    - *Si $u \in S_g$, entonces $u \leq M$ en $\partial\Omega$, el Principio del Máximo muestra que $u \leq M$ en $\overline{\Omega}$, luego $\omega_g \leq M$ en $\overline{\Omega}$.*
    - *$m \in S_g$, entonces $m \leq \omega_g$ en $\overline{\Omega}$.*

- *Si u_1 y u_2 son subfunciones relativas a una función g, entonces* $\max\{u_1, u_2\}$ *estambién una subfunción relativa a g. Esto es claro pues* $\max\{u_1, u_2\}$ *es subarmónica en Ω por la Proposición 4.3.1 y si $u_1 \leq g$, $u_2 \leq g$ en $\partial\Omega$, entonces* $\max\{u_1, u_2\} \leq g$ *en $\partial\Omega$.*

- *Si u es una subfunción relativa a g y $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$, entonces $u_{x_0,r}$ también es una subfunción relativa a g.*

Teorema 4.3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Suponga que v resuelve el Problema Clásico de Dirichlet para Ω con dato en la frontera $g \in C(\partial\Omega)$. Entonces $v = \omega_g$.*

Demostración. Por hipótesis, v es armónica en Ω y $v = g$ en $\partial\Omega$, entonces $v \in S_g$ y así $v \leq \omega_g$ en $\overline{\Omega}$. Por otro lado, $u \leq g = v$ en $\partial\Omega$ siempre que $u \in S_g$, del Lema 4.3.1 se sigue que $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$ para toda $u \in S_g$, por tanto $\omega_g \leq v$. □

Aunque no siempre se cumplan las hipótesis del Teorema 4.3.2, ω_g siempre es armónica en Ω.

Teorema 4.3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $g \in C(\partial\Omega)$, entonces ω_g es armónica en Ω.*

Demostración. Probaremos que w_g es armónica en cualquier bola $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Por definición de w_g podemos elegir una sucesión $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset S_g$ tal que

$$w_g(x_0) = \lim_{k \to \infty} u_k(x_0) \tag{4.3.2}$$

Reemplazando u_k por $\text{máx}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ obtenemos

$$0 < w_g(x_0) - \text{máx}\{u_1(x_0), u_2(x_0), \dots, u_k(x_0)\} \leq w_g(x_0) - u_k(x_0) \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Denotando a esta nueva sucesión también como $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ se sigue conservando (4.3.2). Cambiemos ahora u_k por la modificación de Poisson de u_k para $B(x_0, r)$. Esta nueva sucesión también verifica la ecuación (4.3.2) por el Teorema 4.3.1. Sigamos denotando esta sucesión como $(u_k)_{k=1}^{\infty}$.

Hemos construido una sucesión creciente de funciones en S_g, además cada u_k es armónica en $B(x_0, r)$ y $\text{lím}_{k\to\infty} u_k(x_0) = w_g(x_0) < \infty$. Por el Principio de Harnack, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos a una función u armónica en $B(x_0, r)$. Si mostramos que $u = w_g$ en $B(x_0, r)$, habremos terminado.

Claramente $u \leq w_g$ en $B(x_0, r)$ pues $u_k \leq w_g$ en $B(x_0, r)$. Para la otra desigualdad tomemos $v \in S_g$, y veamos que $v \leq u$ en $B(x_0, r)$. Sea v_k la modificación de Poisson de $\text{máx}\{u_k, v\}$ para $B(x_0, r)$. $v_k \in S_g$ por las observaciones hechas anteriormente y $u(x_0) = w_g(x_0)$ por (4.3.2), entonces $v_k(x_0) \leq u(x_0)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Aún más v_k es armónica en $B(x_0, r)$ y $\text{máx}\{u_k, v\} \leq v_k$ en $\overline{B(x_0, r)}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ por el Teorema 4.3.1. Luego, para $0 \leq s < r$

$$\begin{aligned} u(x_0) &\geq v_k(x_0) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)s^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,s)} v_k(y)\, dS(y) \\ &\geq \frac{1}{n\alpha(n)s^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,s)} \text{máx}\{u_k(y), v(y)\}\, dS(y) \end{aligned}$$

Haciendo $k \to \infty$, la P.V.M. asegura que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\alpha(n)s^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,s)} u(y)\, dS(y) &= u(x_0) \\ &\geq \frac{1}{n\alpha(n)s^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,s)} \text{máx}\{u(y), v(y)\}\, dS(y) \end{aligned}$$

Por tanto $u \geq v$ en $\partial B(x_0, s)$ para toda $0 \leq s < r$. Así $u \geq v$ en $B(x_0, r)$. Esto prueba que $\omega_g \leq u$ en $B(x_0, r)$, como se deseaba. □

Con este teorema hemos asociado a cada función g continua en $\partial\Omega$ una función w_g armónica en Ω. Si queremos que $w_g = g$ en $\partial\Omega$ necesitamos imponer una condición adicional a $\partial\Omega$.

Definición 4.3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado.*

- *Una función barrera o simplemente barrera en $z \in \partial\Omega$ es una función $Q_z \in C(\overline{\Omega})$ subarmónica en Ω tal que $Q_z(z) = 0$ y $Q_z(x) < 0$ si $x \in \overline{\Omega} - \{z\}$.*

- *Un punto $z \in \partial\Omega$ es regular si existe una función barrera en z. Si cada $z \in \partial\Omega$ es regular, decimos que Ω tiene frontera regular.*

Teorema 4.3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Si $g \in C(\partial\Omega)$ y $z \in \partial\Omega$ es regular, entonces*

$$\lim_{x \to z} \omega_g(x) = g(z)$$

Demostración. Sea $z \in \partial\Omega$ un punto regular y Q_z una función barrera. Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \partial\Omega \quad |z - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(z) - g(x)| < \epsilon$$

Sean

$$M_Q = \max_{|x-z| \geq \delta} Q_z(x) < 0 \quad \text{y} \quad M = \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)|$$

Es posible elegir $\kappa > 0$ tal que $\kappa M_Q \leq -2M$. Entonces $\kappa Q_z(x) \leq -2M$ para $|z - x| \geq \delta$. Consideremos la función subarmónica $u_-(x) = g(z) - \epsilon + \kappa Q_z(x)$.

Si $|x - z| < \delta$

$$u_-(x) = g(z) - \epsilon + \kappa Q_z(x) < g(x) + \kappa Q_z(x) \leq g(x) \quad x \in \partial\Omega$$

Si $|x - z| \geq \delta$

$$u_-(x) = g(z) - \epsilon + \kappa Q_z(x) \leq g(z) - \epsilon - 2M \leq g(x) \quad x \in \partial\Omega$$

Entonces $u_- \leq g$ en $\partial\Omega$, luego $u_- \leq w_g$ en $\overline{\Omega}$, es decir

$$g(z) - \epsilon + \kappa Q_z(x) \leq w_g(x) \quad x \in \overline{\Omega}$$

Ahora consideremos la función superarmónica $u_+(x) = g(z) + \epsilon - \kappa Q_z(x)$.

Si $|x - z| < \delta$

$$-u_+(x) = -g(z) - \epsilon + \kappa Q_z(x) < -g(x) + \kappa Q_z(x) \leq -g(x) \quad x \in \partial\Omega$$

Si $|x - z| \geq \delta$

$$-u_+(x) = -g(z) - \epsilon + \kappa Q_z(x) \leq g(z) - \epsilon - 2M \leq -g(x) \quad x \in \partial\Omega$$

Entonces $-u_+ \leq -g$ en $\partial\Omega$. Si $u \in S_g$, $u - u_+$ es subarmónica en Ω y $u - u_+ \leq g - g = 0$ en $\partial\Omega$, así $u \leq u_+$ en $\overline{\Omega}$ para cualquier $u \in S_g$, por lo que $w_g \leq u_+$ en $\overline{\Omega}$. Esto es

$$w_g(x) \leq g(z) + \epsilon - \kappa Q_z(x) \quad x \in \overline{\Omega}$$

Hemos mostrado que

$$|w_g(x) - g(z)| \leq \epsilon - \kappa Q_z(x) \quad x \in \overline{\Omega}$$

De la continuidad de Q_z se sigue que

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in \overline{\Omega}}} |w_g(x) - g(z)| = 0$$

concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 4.3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. El problema de Dirichlet tiene solución para Ω si y solo si Ω tiene frontera regular.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que el Problema de Dirichlet es soluble para Ω y que $z \in \partial\Omega$. La función $f(x) = -|x - z|$ definida en $\partial\Omega$ es continua. La solución al Problema de Dirichlet para Ω con dato en la frontera f es una función barrera en z.

($\Leftarrow$) Si Ω tiene frontera regular los Teoremas 4.3.3 y 4.3.4 muestran que el Problema de Dirichlet es soluble para Ω con dato en la frontera f. $\square$

4.3.1. Condición de la Bola Exterior

Teorema 4.3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Si $z \in \partial\Omega$ pertenece a una bola cerrada contenida en el complemento de Ω, entonces z es regular.*

Demostración. Supongamos que $\overline{B(y,r)}$ es una bola cerrada contenida en el complemento de Ω tal que $\partial B(y,r) \cap \partial\Omega = \{z\}$. La función $u : \mathbb{R}^n - \{y\} \to \mathbb{R}$ definida como

$$u(x) = \begin{cases} \log r - \log|x - y| & n = 2 \\ \dfrac{1}{|x - y|^{n-2}} - \dfrac{1}{r^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$$

es una barrera en z. $\square$

El Teorema 4.3.6 nos permite resolver el Problema de Dirichlet para Ω, cuando $\partial\Omega$ es suficientemente suave, lo cual precisamos a continuación.

Teorema 4.3.7. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\partial\Omega$ es de clase C^2, entonces satisface la Condición de la Bola Exterior. Además, si Ω es conexo y acotado, entonces el Problema de Dirichlet es soluble para Ω.*

Demostración. Ver [1], pag. 230. $\square$

4.3.2. Condición del Cono Exterior

Si Ω tiene frontera de clase C^1, no necesariamente cumple la condición de la Bola Exterior. Ahora analizaremos una condición en $\partial\Omega$ que implica su regularidad. Omitiremos las pruebas de los siguientes Teoremas, esto se puede encontrar en [1], pp. 230 - 232 , 237.

Teorema 4.3.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Si $z \in \partial\Omega$ pertenece a una bola cerrada contenida en el complemento de Ω, entonces z es regular.*

Teorema 4.3.9. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\partial\Omega$ es de clase C^1, entonces satisface la Condición del Cono Exterior. Además, si Ω es conexo y acotado, entonces el Problema de Dirichlet es soluble para Ω.*

Ahora, la existencia de la función correctora ϕ^x cumpliendo (3.1.3) en el capítulo anterior está establecida, por lo que, al menos teóricamente, la Fórmula de Representación mediante la Función de Green (3.1.8) está bien fundamentada. Además la unicidad de la Función de Green para Ω abierto, conexo y acotado y con frontera de clase C^1 está dada gracias al Teorema 2.3.6.

Capítulo 5

Teorema de Diferenciación de Lebesgue y Función Maximal de Hardy - Littlewood

En este capítulo no estudiaremos alguna versión del Problema de Dirichlet, sino que desarrollaremos teoría necesaria para resolver el Problema de Dirichlet en el semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con dato L^p en la frontera. Este último proporcionará ideas claves para poder plantear el Problema de Dirichlet en su versión L^p.

El presente capítulo tiene como propósito establecer el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, que en su versión n - dimensional afirma que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x) \tag{5.0.1}$$

Necesitamos examinar cuidadosamente el cociente en la ecuación de arriba, esto lo haremos mediante la función máximal de Hardy - Littlewood. En el desarrollo que se hará a lo largo de este capítulo descansa una idea general, que a grandes rasgos dice que si queremos una convergencia casi en todas partes, es conveniente introducir una función máximal.

Por último, valiéndonos del Teorema de Diferenciación de Lebesgue presentaremos una generalización de un Teorema muy importante en Matemáticas, el Teorema Fundamental del Cálculo, que afirma que si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ a \leq x \leq b$, entonces F es diferenciable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x) \quad a \leq x \leq b$. La generalización de este Teorema considera la situación en la que f es solamente integrable, entonces F es una función continua, F es diferenciable casi en todas partes y $F'(x) = f(x)$ para casi todo $x \in [a,b]$.

Para referencia a este capítulo véase [7].

5.1. El Teorema de Cubierta de Vitali

La prueba que presentaremos del Teorema de Diferenciación de Lebesgue depende de un principio básico llamado el Teorema de Cubierta de Vitali. Aunque a primera vista no será obvio por qué este teorema tiene alguna relevancia, el Teorema de Cubierta de Vitali será imprescindible cuando estudiemos la función máximal de Hardy - Littlewood.

La puesta en escena del Teorema de Vitali involucra un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$, y para $x \in E$ una bola abierta centrada en x con algún radio, donde no imponemos nada a los radios de estas bolas. El objetivo de este teorema es conseguir las dos siguientes condiciones conflictivas

- Seleccionar bolas disjuntas entre las dadas
- Cubrir a E con esta colección de bolas.

Estos dos objetivos pueden ser logrados difícilmente a la vez, es por eso que cederemos levemente y nos conformaremos con menos. Podremos seleccionar bolas disjuntas, pero sin cubrir a todo E, pero con bolas concéntricas de mayor radio si lograremos cubrir todo E.

Teorema 5.1.1 (de Cubierta de Vitali)**.** *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Asuma que $\mathcal{F}$ es una colección de bolas abiertas, todas con centro en algún punto de E, de manera que para cada punto de E existe una bola en la colección $\mathcal{F}$. Entonces existe una colección de bolas (posiblemente finita) $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \ldots$ de $\mathcal{F}$ tal que*

- *$B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \ldots$ son disjuntas*
- *$E \subset \bigcup_{i \geq 1} B(x_i, 3r_i)$*

Demostración. La prueba se debe a Banach. Se basa en una idea muy sencilla, elegir inductivamente bolas, en cada paso la bola más grande que no intersecte a las anteriores. Sin embargo este proceder debe ser modificado pues al escoger la bola más grande buscamos el mayor radio, que puede no existir. Solo debemos estar seguros de haber seleccionado una bola cuyo radio sea casi el más grande.

Observemos primero que si $\{r : B(x, r) \in \mathcal{F}\}$ no tiene cota superior, entonces podemos tomar un radio muy grande r, correspondiente a un punto $x \in E$, tan grande que $E \subset B(x, r)$, terminando con lo deseado. Por tanto, supongamos que $\sup\{r : B(x, r) \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Sea $d_1 = \sup\{r : B(x,r) \in \mathcal{F}\}$. Tome $B(x_1, r_1) \in \mathcal{F}$ tal que $r_1 > \frac{d_1}{2}$. Pueden suceder dos cosas. Si no hay $B(x,r) \in \mathcal{F}$ tal que $B(x,r) \cap B(x_1,r_1) = \emptyset$ entonces $E \subset B(x_1, 3r_1)$. Veamos esto:

Sea $x \in E$, elija $r > 0$ tal que $B(x,r) \in \mathcal{F}$ y $y \in B(x,r) \cap B(x_1,r_1)$

$$|x - x_1| \leq |x - y| + |y - x_1| \leq r + r_1 \leq d_1 + r_1 < 3r_1$$

Cuando si hay $B(x,r) \in \mathcal{F}$ tal que $B(x,r) \cap B(x_1,r_1) = \emptyset$, definimos $d_2 = \sup\{r : B(x,r) \in \mathcal{F} \quad y \quad B(x,r) \cap B(x_1,r_1) = \emptyset\}$ y elegimos $B(x_2,r_2) \in \mathcal{F}$ tal que $r_2 > \frac{d_2}{2}$ y $B(x_2,r_1) \cap B(x_1,r_1) = \emptyset$.

Si no hay $B(x,r) \in \mathcal{F}$ de manera que $B(x,r) \cap \bigcup_{i<3} B(x_i,r_i) = \emptyset$ entonces $E \subset \bigcup_{i<3} B(x_i, 3r_i)$. Esto último se verifica como sigue:

Sea $x \in E$ y $B(x,r) \in \mathcal{F}$. Si $B(x,r) \cap B(x_1,r_1) \neq \emptyset$ entonces $x \in B(x_1, 3r_1)$. Si $B(x,r) \cap B(x_1,r_1) = \emptyset$ es posible tomar $y \in B(x,r) \cap B(x_2,r_2)$, luego

$$|x - x_2| \leq |x - y| + |y - x_2| \leq r + r_2 \leq d_2 + r_2 < 3r_2$$

entonces $x \in B(x_2, 3r_2)$.

En otro caso, seguimos con este proceso hasta terminar o conseguir una sucesión $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tal que

$$r_i > \frac{d_i}{2} \quad y \quad B(x_i,r_i) \cap \bigcup_{k<i} B(x_k,r_k) = \emptyset$$

donde $d_i = \sup\{r : B(x,r) \in \mathcal{F} \quad y \quad B(x,r) \cap \bigcup_{k<i} B(x_k,r_k) = \emptyset\}$ para cada $i \geq 2$.

Por construcción, esta es una sucesión de bolas disjuntas. Ahora veamos que $E \subset \bigcup_{i\geq 1} B(x_i, 3r_i)$. Sea $x \in E$ y $B(x,r) \in \mathcal{F}$. No puede pasar que $B(x,r)$ no se traslape con alguna de las bolas $B(x_i,r_i)$, porque si $B(x,r) \cap B(x_i,r_i) = \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N}$ entonces $r \leq d_i$ y $r_i \geq \frac{d_i}{2} \geq \frac{r}{2} > 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y esto implicaría que

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,r_i)\right) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,\frac{r}{2})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\left(B(x_i,\frac{r}{2})\right) = \infty$$

lo cual es imposible porque $\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,r_i)$ es acotado dado que E es acotado y tenemos control sobre los radios de cada una de estas bolas.

De lo anterior, existe $i_0 \in \mathbb{N}$, el más pequeño tal que $B(x,r) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \emptyset$, por consiguiente

$$B(x,r) \cap \bigcup_{i<i_0} B(x_i,r_i) = \emptyset$$

de donde se deduce que $x \in B(x_{i_0}, 3r_{i_0})$ de manera similar a como tratamos los primeros pasos del proceso inductivo. $\square$

Observación 5.1.1. *El factor* 3 *que aparece en el teorema 5.1.1 no es el más pequeño que funciona. Podemos modificar la demostración anterior y reemplazar* 3 *por* $2+\epsilon$ *para cualquier* $\epsilon > 0$*. Todo lo que hay que hacer es escoger* $B(x_i, r_i)$ *satisfaciendo* $\frac{1}{1+\epsilon} d_i < r_i$*.*

El factor $2+\epsilon$ *no se puede hacer más pequeño en el teorema 5.1.1, esto en el sentido de que no siempre* $E \subset \bigcup_{i\geq 1} B(x_i, 2r_i)$*.*

Basta mostrar un ejemplo. En $\mathbb{R}$*, sea* $E = (-1,1)$*. Para cada* $x \in E$ *definimos* $r(x) = \frac{1+2|x|}{3}$ *y* $B_x = (x - r(x), x + r(x))$*. Sea* $\mathcal{F} = \{B_x : x \in E\}$*. Una particularidad de esta colección de bolas es que todas tienen al* 0*.*

$$\begin{aligned}
0 \in B_x &\iff x - r(x) < 0 < x + r(x) \\
&\iff x - \frac{1+2|x|}{3} < 0 < x + \frac{1+2|x|}{3} \\
&\iff 3x - 1 - 2|x| < 0 < 3x + 1 + 2|x| \\
&\iff -(1+2|x|) < -3x < 1 + 2|x| \\
&\iff |-3x| < 1 + 2|x| \\
&\iff |x| < 1
\end{aligned}$$

Entonces si existiese tal colección de bolas disjuntas que verifican el teorema 5.1.1 con el factor 2 *en vez de* 3*, esta deberá constar solo de una bola por lo que acabamos de verificar, esto es, tendríamos que* $(-1,1) \subset B_x$ *para algún* $x \in E$*. Algo muy sencillo de ver, es que ningún* B_x *cubre todo* E*, lo cual es un absurdo. Por tanto el factor* 2 *en vez de* 3 *en el teorema 5.1.1 no sirve.*

5.2. Función Máximal de Hardy - Littlewood

Definición 5.2.1. *Sea* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, la función maximal de Hardy - Littlewood de* f *es la función* $Mf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *definida como*

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \tag{5.2.1}$$

Ahora derivamos algunas propiedades importantes de esta función.

Proposición 5.2.1. *Si* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, entonces* Mf *es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Debemos probar que para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$ es abierto. Supongamos que $Mf(x_0) > t$. Por la definición de la función maximal existe $0 < r < \infty$ tal que

$$t < \frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|\, dy$$

Luego es posible elegir $r' > r$ de forma que

$$t < \frac{1}{\lambda(B(x_0,r'))}\int_{B(x_0,r)} |f(y)|\,dy < \frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\int_{B(x_0,r)} |f(y)|\,dy$$

Note que si $|x_0 - x'| < r' - r$, entonces $B(x_0,r) \subset B(x',r')$:

$$\begin{aligned} y \in B(x_0,r) \quad &\Rightarrow \quad |y - x'| \leq |y - x_0| + |x_0 - x'| < r + r' - r = r' \\ &\Rightarrow \quad y \in B(x',r') \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} t &< \frac{1}{\lambda(B(x_0,r'))}\int_{B(x_0,r)} |f(y)|\,dy \leq \frac{1}{\lambda(B(x_0,r'))}\int_{B(x',r')} |f(y)|\,dy \\ &= \frac{1}{\lambda(B(x',r'))}\int_{B(x',r')} |f(y)|\,dy \leq Mf(x') \qquad |x_0 - x'| < r' - r \end{aligned}$$

Por tanto $B(x_0, r' - r) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$. □

Corolario 5.2.1. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces Mf es Lebesgue medible, y como consecuencia, Mf es Borel medible. (Recuérdese que la σ - álgebra de Lebesgue contiene a la σ - álgebra de Borel, véase [9] pp. 50, 59 - 60)*

Proposición 5.2.2. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f = 0$.*

Demostración. Sea $a > 0$, veamos que $f(x) = 0$ para casi todo x en $B(0,a)$. Notemos que $B(0,a) \subset B(x, 2|x|)$ cuando $|x| > a$. Luego

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{\lambda(B(x,2|x|))}\int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\,dy \\ &\geq \frac{1}{\lambda(B(0,2|x|))}\int_{B(0,a)} |f(y)|\,dy \\ &= \frac{1}{\alpha(n)2^n|x|^n}\int_{B(0,a)} |f(y)|\,dy \end{aligned}$$

Integrando en $a < |x| < b$ para $b > a$

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{a<|x|} Mf(x)\,dx \geq \int_{a<|x|<b} Mf(x)\,dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\alpha(n)2^n}\int_{B(0,a)} |f(y)|\,dy\right)\int_{a<|x|<b} \frac{1}{|x|^n}\,dx \end{aligned}$$

Esto obliga a que

$$\int_{B(0,a)} |f(y)|\, dy = 0$$

Porque

$$\int_{a<|x|<b} \frac{1}{|x|^n}\, dx \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Como $a > 0$ fue arbitrario, se sigue que $f = 0$. $\square$

Observación 5.2.1. *La función Mf debe pensarse más grande que $|f|$ porque no es cierto que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Esto solo ocurre si $f = 0$ por la proposición anterior.*

Observación 5.2.2. *No es posible siquiera probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $Mf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$, la función*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\log^2 x} & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

es integrable en $\mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y\log^2 y}\, dy = \lim_{s\to 0}\left(\frac{-1}{\log y}\Big|_s^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{\log 2}$$

Pero, si $0 < x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{\lambda((0,2x))}\int_0^{2x} f(y)\, dy \geq \frac{1}{2x}\int_0^{x} f(y)\, dy \\ &= \frac{-1}{2x\log x} \end{aligned}$$

Como $\frac{-1}{2x\log x}$ no es integrable cerca de cero, se sigue que $Mf \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

A pesar de esta situación negativa, si podemos asegurar que Mf está en una versión debilitada de $L^1(\mathbb{R}^n)$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Hemos de apreciar esto por lo siguiente. Siempre que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene la desigualdad de Chebyshev

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \geq t\}\right) \leq \frac{\|g\|_1}{t} \quad 0 < t < \infty$$

Basta observar que si $t \in (0,\infty)$ y $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \geq t\}$

$$t\lambda(A_t) = \int_{A_t} t\, d\mu(x) \leq \int_{A_t} |g(x)|\, d\mu(x) \leq \|g\|_1$$

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Si g es medible en $\mathbb{R}^n$ y satisface

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \geq t\}\right) \leq \frac{C}{t} \quad 0 < t < \infty$$

para alguna constante $C > 0$, no siempre es verdadero que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo $|x|^{-n}$ no es integrable, pero

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-n} \geq t\}\right) = \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq t^{-\frac{1}{n}}\}\right) = \alpha(n)(t^{-\frac{1}{n}})^n = \alpha(n)t^{-1}$$

La siguiente propiedad de la función maximal de Hardy - Littlewood será esencial para el teorema de Diferenciación de Lebesgue. Esta descansa fuertemente en el Teorema de Vitali.

Teorema 5.2.1 (Hardy - Littlewood)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}\right) \leq \frac{3^n \|f\|_1}{t} \quad 0 < t < \infty \tag{5.2.2}$$

Demostración. Sea $t \in (0, \infty)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$. Si $E = \emptyset$ no hay nada que probar. Supongamos que $E \neq \emptyset$. Para cada $x \in E$ existe $0 < r_x < \infty$ tal que

$$\lambda(B(x, r_x)) < \frac{1}{t} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy$$

Quisiéramos aplicar el teorema de cubierta de Vitali porque tenemos una familia de bolas adecuada al teorema, pero no sabemos si E es acotado, sin embargo esto se soluciona considerando $E \cap B(0, k)$ en lugar de E y luego haciendo crecer k.

Sea

$$\mathcal{F}_k = \left\{ B(x, r_x) : x \in E \cap B(0, k) \quad \text{y} \quad \lambda(B(x, r_x)) < \frac{1}{t} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy \right\}$$

Todas las hipótesis del teorema 5.1.1 se satisfacen, de este modo, si $E \cap B(0, k) \neq \emptyset$ existen bolas $B(x_i, r_i) \in \mathcal{F}_k$ (posiblemente una cantidad finita) satisfaciendo

- $B(x_i, r_i) \cap B(x_{i'}, r_{i'}) = \emptyset \quad i \neq i'$
- $E \cap B(0, k) \subset \bigcup_{i \geq 1} B(x_i, 3r_i)$

De lo cual deducimos

$$\begin{aligned}
\lambda(E \cap B(0,k)) &\leq \sum_{i\geq 1} \lambda(B(x_i, 3r_i)) \\
&= 3^n \sum_{i\geq 1} \lambda(B(x_i, r_i)) \\
&\leq 3^n t^{-1} \sum_{i\geq 1} \int_{B(x_i,r_i)} |f(y)|\, dy \\
&= 3^n t^{-1} \int_{\bigcup_{i\geq 1} B(x_i,r_i)} |f(y)|\, dy \\
&\leq 3^n t^{-1} \|f\|_1
\end{aligned}$$

y haciendo $k \to \infty$

$$\lambda(E \cap B(0,k)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{E\cap B(0,k)}(x)\, d\mu(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E(x)\, d\mu(x) = \lambda(E)$$

por el Teorema de convergencia monótona (véase [7] pp. 126 - 127). Luego

$$\lambda(E) \leq 3^n t^{-1} \|f\|_1$$

$\square$

Observación 5.2.3. *En el Teorema de Cubierta de Vitali podiamos reemplazar* 3 *por* $2+\epsilon$ *para* $\epsilon > 0$*, por esta razón podemos concluir inmediatamente que*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{2^n \|f\|_1}{t}$$

Además, podemos aplicar esta desigualdad a $t - \frac{1}{j}$*, para obtener una estimación aún mejor. Hagamos* $E_j = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t - \frac{1}{j}\}$ *y* $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \geq t\}$*.* $E_0 \subset E_{j+1} \subset E_j$*,* $j \in \mathbb{N}$ *y*

$$\begin{aligned}
\lambda(E_j) \leq \frac{2^n \|f\|_1}{t - \frac{1}{j}} &\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{E_j}\, d\mu(x) \leq \frac{2^n \|f\|_1}{t - \frac{1}{j}} \\
&\overset{j\to\infty}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{E_0}\, d\mu(x) \leq \frac{2^n \|f\|_1}{t}
\end{aligned}$$

por el Teorema de convergencia dominada (véase [7] pp. 133 - 134, 147 - 149). Así

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \geq t\}) \leq \frac{2^n \|f\|_1}{t}$$

En el caso en que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p \leq \infty$ podremos afirmar más sobre Mf. Primero encontraremos otra forma de estimar a $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\})$ como consecuencia del Teorema de Hardy - Littlewood.

Corolario 5.2.2. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{2 \cdot 3^n}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2}\}} |f(x)|\, dx \quad 0 < t < \infty \tag{5.2.3}$$

Demostración. Para lograr este resultado, construiremos una nueva función g anulando a f cuando $|f|$ es cercano a cero, esta función resultará ser integrable. Después de encontrar una relación entre Mf y Mg aplicaremos el Teorema de Hardy - Littlewood a g y de ahí deduciremos (5.2.3).

Por la desigualdad de Hölder $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (véase [7] pp. 223 - 224), dando sentido a Mf. Sea $t \in (0, \infty)$. Defina

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| > \frac{t}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| \leq \frac{t}{2} \end{cases}$$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2}\}$. Como para $p > 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx = \int_A |f(x)|\, dx = \int_A |f(x)|^{1-p} |f(x)|^p\, dx \leq \frac{2^{p-1}}{t^{p-1}} \int_A |f(x)|^p\, dx < \infty$$

entonces $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora es factible aplicar el Teorema de Hardy - Littlewood a g y obtener

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mg(x) > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq \frac{2 \cdot 3^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx = \frac{2 \cdot 3^n}{t} \int_A |f(x)|\, dx$$

Ahora supongamos que $Mf(x) > t$, luego existe $0 < r < \infty$ cumpliendo

$$\frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy > t$$

que puede escribirse como

$$\int_{A \cap B(x,r)} |f(y)|\, dy + \int_{A^c \cap B(x,r)} |f(y)|\, dy > t\lambda(B(x,r))$$

para luego conseguir

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} |g(y)|\,dy &= \int_{A\cap B(x,r)} |f(y)|\,dy \\ &> t\lambda(B(x,r)) - \int_{A^c\cap B(x,r)} |f(y)|\,dy \\ &\geq t\lambda(B(x,r)) - \frac{t}{2}\lambda(A^c\cap B(x,r)) \\ &\geq t\lambda(B(x,r)) - \frac{t}{2}\lambda(B(x,r)) \\ &= \frac{t}{2}\lambda(B(x,r))\end{aligned}$$

de donde

$$Mg(x) \geq \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |g(y)|\,dy > \frac{t}{2}$$

Hemos probado que $Mf(x) > t$ implica $Mg(x) > \frac{t}{2}$, lo que permite concluir

$$\lambda(\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \lambda\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : Mg(x) > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq \frac{2\cdot 3^n}{t}\int_A |f(x)|\,dx$$

$\square$

Necesitaremos también del siguiente

Lema 5.2.1. *Sea* $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\quad 1 < p < \infty$, *entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})\,dt \tag{5.2.4}$$

Demostración. Claramente

$$\lambda(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{(t,\infty)}(|f(x)|)\,dx$$

y

$$|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}\,dt = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathcal{X}_{(0,|f(x)|)}(t)\,dt$$

Usando el Teorema de Fubini (véase [7] pp. 183 - 188, 268 - 269) y que $\mathcal{X}_{(0,|f(x)|)}(t) =$

$\mathcal{X}_{(t,\infty)}(|f(x)|)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty p t^{p-1} \mathcal{X}_{(0,|f(x)|)}(t) \, dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty p t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{(0,|f(x)|)}(t) \, dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty p t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{(t,\infty)}(|f(x)|) \, dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty p t^{p-1} \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) \, dt\end{aligned}$$

□

Ahora, la versión del Teorema de Hardy - Littlewood para $1 < p < \infty$.

Teorema 5.2.2. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y además*

$$\|Mf\|_p \leq 2(3^n q)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \tag{5.2.5}$$

donde p y q son exponentes conjugados.

Demostración. Por (5.2.4), (5.2.3) y el Teorema de Fubini (véase [7] pp. 183 - 188, 268 - 269)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \, dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > t\}) \, dt \\ &\leq 2 \cdot 3^n p \int_0^\infty t^{p-2} \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2}\}} |f(x)| \, dx \right) dt \\ &\leq 2 \cdot 3^n p \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} t^{p-2} |f(x)| \mathcal{X}_{\{x \in \mathbb{R}^n : 2|f(x)| > t\}}(x) \, dx \right) dt \\ &= 2 \cdot 3^n p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^\infty t^{p-2} \mathcal{X}_{(0,2|f(x)|)}(t) \, dt \right) dx \\ &= 2 \cdot 3^n p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{2|f(x)|} t^{p-2} \, dt \right) dx \\ &= 2 \cdot 3^n p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \frac{2^{p-1} |f(x)|^{p-1}}{p-1} \, dx \\ &= 2^p 3^n \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = 2^p 3^n q \|f\|_p^p\end{aligned}$$

como deseábamos. □

Observación 5.2.4. *El anterior teorema establece que el operador $Mf : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es acotado si $1 < p < \infty$. El caso $p = \infty$ es inmediato, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la definición de la función maximal se deduce que $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

5.3. Teorema de Diferenciación de Lebesgue

Introduciremos una versión local de la función maximal de Hardy Littlewood, analizando algunas de sus características será sencillo mostrar la afirmación que describíamos en la ecuación (5.0.1).

Lema 5.3.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. La función $f^* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ tal que*

$$f^*(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy$$

tiene las siguientes propiedades

1. $f^* \geq 0$
2. *Si $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f+g)^* \leq f^* + g^*$*
3. *Si g es continua en x, entonces $g^*(x) = 0$*
4. *Si g es continua en $\mathbb{R}^n$, entonces $(f-g)^* = f^*$*
5. $f^* \leq Mf + |f|$

Demostración. 1. Es obvia.

2. Usando las propiedades del $\limsup$ es claro que

$$\begin{aligned}
(f+g)^* &= \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) + g(y) - f(x) - g(x)|\, dy \\
&\leq \limsup_{r \to 0} \Bigg(\frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy \Bigg) \\
&\leq \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\qquad\qquad + \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy \\
&= f^*(x) + g^*(x)
\end{aligned}$$

3. Supongamos que g es continua en x. Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x)| < \epsilon \quad \text{si} \quad y \in B(x, \delta)$$

Por tanto

$$g^*(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy \le \epsilon$$

Así $g^*(x) = 0$.

4. De las propiedades 2 y 3

$$(f-g)^* \le f^* + (-g)^* = f^* \le (f-g)^* + g^* = (f-g)^*$$

de esta forma $(f-g)^* = f^*$.

5. Esto es una simple estimación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy &\le \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (|f(y)| + |f(x)|)\, dy \\
&= \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy + |f(x)| \\
&\le Mf(x) + |f(x)|
\end{aligned}$$

De aquí

$$f^*(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \le (Mf + |f|)(x)$$

□

Teorema 5.3.1 (Lebesgue)**.** *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \tag{5.3.1}$$

En particular, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x) \tag{5.3.2}$$

Demostración. La segunda afirmación se sigue de la primera ya que

$$\left| \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy - f(x) \right| \le \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \to 0$$

si $r \to 0$. Antes de continuar, advertimos que hasta este momento no sabemos si f^* es Lebesgue medible, por esta razón, en la siguiente argumentación no podemos utilizar la medida de Lebesgue λ para medir los conjuntos de la forma $\{x \in B : f^*(x) > t\}$, pero si podemos medirlos mediante la medida exterior de Lebesgue λ^* (Véase [9] pp. 54 - 56).

Volviendo a la prueba, veamos ahora la primera afirmación. Quisieramos modificar a f para que sea integrable en $\mathbb{R}^n$ y hacer que el Teorema de Hardy - Littlewood entre en acción. Sea B un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ definamos f_0 la función que coincida con f en B y que se anule fuera de B. Es claro que $f^* = f_0^*$ en B. Si $x \in B$ y $f_0^*(x) > t$, de la propiedad 5 del Lema 5.3.1 advertimos que $Mf_0(x) > \frac{t}{2}$ ó $|f_0(x)| > \frac{t}{2}$, de aquí se deduce

$$\begin{aligned}
&\lambda^*(\{x \in B : f^*(x) > t\}) \\
&\qquad = \lambda^*(\{x \in B : f_0^*(x) > t\}) \\
&\qquad \leq \lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_0(x) > \frac{t}{2}\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f_0(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&\qquad \leq \frac{3^n}{\frac{t}{2}}\|f_0\|_1 + \frac{1}{\frac{t}{2}}\|f_0\|_1 \\
&\qquad = \frac{2(3^n+1)}{t}\|f_0\|_1
\end{aligned}$$

Con esta estimación mostremos que $\lambda^*(\{x \in B : f^*(x) > t\}) = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Por la densidad de $C_c(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f_0 - g\|_1 < \epsilon$ (véase [7] pp.173 - 174). Luego, la propiedad 4 del lema 5.3.1 y lo anterior permite concluir que

$$\begin{aligned}
\lambda^*(\{x \in B : f^*(x) > t\}) &= \lambda^*(\{x \in B : (f-g)^*(x) > t\}) \\
&\leq \frac{2(3^n+1)}{t}\|(f-g)_0\|_1 \leq \frac{2(3^n+1)}{t}\|f_0 - g\|_1 \\
&< \frac{2(3^n+1)}{t}\epsilon
\end{aligned}$$

para $t > 0$ fijo. La función $(f-g)_0$ se define del mismo modo que f_0. Por tanto $\lambda^*(\{x \in B : f^*(x) > t\}) = 0$. Podemos pensar que B es una bola centrada en el origen con radio un número natural, por lo que $\lambda^*(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\}) = 0$ (De hecho, hemos probado que f^* es Lebesgue medible). De este modo, $\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \frac{1}{k}\}$ tiene medida cero para todo $k \in \mathbb{N}$. La unión de estos conjuntos es $\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > 0\}$ y tiene medida exterior cero, esto es, $f^*(x) \leq 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por la propiedad 1 del lema 5.3.1 concluimos que $f^*(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por las propiedades del $\limsup$ y $\liminf$ se obtiene lo deseado. $\square$

5.4. El conjunto de Lebesgue de una función

Definición 5.4.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto en el conjunto de Lebesgue de f si existe un número real $A_x \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - A_x| \, dy = 0 \tag{5.4.1}$$

Observación 5.4.1.

- *Bajo las condiciones de la definición. Si x es un punto en el conjunto de Lebesgue de f, no puede haber más de un número A_x cumpliendo la condición* (5.4.1). *Si $A_x, B_x \in \mathbb{R}$ cumplen con la definición para el mismo punto x tenemos*

$$|B_x - A_x| \leq \frac{1}{\lambda(B(x,r)} \left(\int_{B(x,r)} |f(y) - A_x| \, dy + \int_{B(x,r)} |f(y) - B_x| \, dy \right)$$

haciendo $r \to 0$ se ve que $B_x = A_x$.

- *Si x está en el conjunto de Lebesgue de f, el valor de A_x es independiente de $f(x)$, pues f no necesita estar definida en x.*

- *Si $f = g$ casi en todas partes, entonces los conjuntos de Lebesgue de f y g coinciden. La razón es porque la integral en la ecuación* (5.4.1) *no se altera si cambiamos f por g. Por consiguiente, el conjunto de Lebesgue esta bien definido para cada función en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Observación 5.4.2. *Con la introducción del concepto de Conjunto de Lebesgue de una función podemos enunciar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue de la siguiente manera:*

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Lebesgue de f.

Además, si f es un representante de la clase de equivalencia de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, el número A_x es $f(x)$. Por tanto, f puede ser modificado en un conjunto de medida cero de manera que para cada x en el conjunto de Lebesgue de f

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0$$

Convenimos por esta razón que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y x está en el conjunto de Lebesgue de f, entonces el valor de $f(x)$ será aquel que satisfaga (5.4.1).

Observación 5.4.3. *Nuevamente, bajo las condiciones de la definición 5.4.1 sabemos que*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \, dy = A_x$$

siempre que x esté en el conjunto de Lebesgue de f. Sin embargo, el recíproco no siempre es cierto.

En $\mathbb{R}$ considere H la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Se observa que

$$H(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} H(y)\,dy$$

Si $x = 0$

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} H(y)\,dy = \frac{1}{2r}\int_{0}^{r} dy = \frac{1}{2} \qquad \forall r > 0$$

Si $x \neq 0$ *y* $0 < 2r < |x|$

$$\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} H(y)\,dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2r}2r & x > 0 \end{cases} = H(x)$$

No obstante, 0 *no está en el conjunto de Lebesgue de* H*. Para cada* $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |H(y) - A|\,dy &= \frac{1}{2r}\int_{-r}^{0} |A|\,dy + \frac{1}{2r}\int_{0}^{r} |1 - A|\,dy \\
&= \frac{1}{2}(|A| + |1 - A|) = \begin{cases} \frac{1}{2}(A + A - 1) & A > 1 \\ \frac{1}{2}(A + 1 - A) & 0 \leq A \leq 1 \\ \frac{1}{2}(-A + 1 - A) & A < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} A - \frac{1}{2} & A > 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq A \leq 1 \\ -A + \frac{1}{2} & A < 0 \end{cases} \neq 0
\end{aligned}$$

El uso de bolas en la definición 5.4.1 no es crucial, hay muchas otras situaciones interesantes. Estudiaremos una convergencia como 5.3.2, pero tomando una sucesión de radios que tienden a cero y cambiaremos las bolas por conjuntos parecidos, cuyo tamaño sea comparable al de una bola.

Definición 5.4.2. *Decimos que una sucesión de conjuntos medibles* $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge regularmente a* x *si existe una constante* $C > 0$ *y una sucesión* $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *tal que*

- $E_k \subset B(x, r_k) \quad k \in \mathbb{N}$
- $r_k \to 0$
- $\lambda(B(x, r_k)) \leq C\lambda(E_k) \quad k \in \mathbb{N}$

Teorema 5.4.1. *Sea* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Suponga que* $x \in \mathbb{R}^n$ *está en el conjunto de Lebesgue de* f *y que* $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge regularmente a* x*. Entonces*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_k)}\int_{E_k} f(y)\,dy \tag{5.4.2}$$

Demostración. La afirmación es inmediata ya que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda(E_k)}\int_{E_k} f(y)\,dy - f(x)\right| &\le \frac{1}{\lambda(E_k)}\int_{E_k} |f(y)-f(x)|\,dy \\ &\le \frac{C}{\lambda(B(x,r_k))}\int_{B(x,r_k)} |f(y)-f(x)|\,dy \to 0\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$ para cada punto x en el conjunto de Lebesgue de f puesto que $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge regularmente a x. □

La idea básica es que los conjuntos E_k llenan una buena parte de $B(x,r_k)$. El recíproco de este teorema también es válido.

Teorema 5.4.2. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Suponga que para cada sucesión $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge regularmente a x existe*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_k)}\int_{E_k} f(y)\,dy \tag{5.4.3}$$

Entonces x pertenece al conjunto de Lebesgue de f.

Demostración. Primero, asegurémonos que para x en el conjunto de Lebesgue de f, el límite en (5.4.3) no depende de la sucesión que converge regularmente a x. Sean $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ dos sucesiones de conjunto medibles que convergen regularmente a x. Entonces existen sucesiones de números positivos $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(d_k)_{k=1}^{\infty}$ ambas convergiendo a cero. Considere la sucesión de conjuntos

$$\{C_l\}_{l=1}^{\infty} = \{E_1, D_1, E_2, D_2, E_3, D_3, \dots\}$$

y la sucesión de radios

$$\{c_l\}_{l=1}^{\infty} = \{e_1, d_1, e_2, d_2, e_3, d_3, \dots\}$$

$\{C_l\}_{l=1}^{\infty}$ converge regularmente a x.

- $C_l \subset B(x,c_l) \quad l \in \mathbb{N}$ porque $C_k \subset B(x,c_k)$ y $D_k \subset B(x,c_k) \quad k \in \mathbb{N}$.
- $c_l \to 0$ porque $e_k, d_k \to 0$
- Existe $K > 0$ tal que $\lambda(B(x,c_l)) \le K\lambda(C_l) \quad l \in \mathbb{N}$, pues si $K_1, K_2 > 0$ cumplen

  $$\begin{aligned}\lambda(B(x,e_k)) &\le K_1\lambda(E_k) \quad k \in \mathbb{N}\\ \lambda(B(x,d_k)) &\le K_2\lambda(D_k) \quad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

  basta tomar $K = \max\{K_1, K_2\}$.

Luego, por hipótesis, existe el límite

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\lambda(C_l)} \int_{C_l} f(y)\, dy$$

Y por tanto

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\lambda(C_l)} \int_{C_l} f(y)\, dy = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_k)} \int_{E_k} f(y)\, dy = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(D_k)} \int_{D_k} f(y)\, dy$$

Ahora, para el mismo x denotemos al límite en (5.4.3) como A_x. Sea $(r_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ una sucesión que converge a cero. Definimos

$$\begin{aligned} E_k &= B(x, r_k) \cap \{y \in \mathbb{R}^n | f(y) \geq A_x\} \equiv B_k \cap A \quad \text{ó} \\ E_k &= B(x, r_k) \cap \{y \in \mathbb{R}^n | f(y) < A_x\} \equiv B_k \cap A^c \end{aligned}$$

dependiendo de la elección que satisfaga $\lambda(E_k) \geq \frac{1}{2}\lambda(B(x, r_k))$. Claramente $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge regularmente a x. Queremos calcular el límite

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} |f(y) - A_x|\, dy$$

y ver que es cero. Observemos que

$$\int_{B_k} = \int_{B_k\cap A} + \int_{B_k\cap A^c} = \begin{cases} \int_{E_k} + \int_{B_k\cap A^c} \\ \int_{B_k\cap A} + \int_{E_k} \end{cases}$$

dependiendo de la elección de E_k. Tomando esto en cuenta, si $E_k = B(x, r_k) \cap A$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} |f(y) - A_x|\, dy \\ &\quad = \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{E_k} (f(y) - A_x)\, dy + \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k\cap A^c} -(f(y) - A_x)\, dy \\ &\quad = \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{E_k} (f(y) - A_x)\, dy + \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} -(f(y) - A_x)\, dy \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{E_k} -(f(y) - A_x)\, dy \\ &\quad = \frac{2}{\lambda(B_k)} \int_{E_k} (f(y) - A_x)\, dy - \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} (f(y) - A_x)\, dy \\ &\quad \leq \frac{2}{\lambda(E_k)} \int_{E_k} (f(y) - A_x)\, dy - \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} (f(y) - A_x)\, dy \to 0 \end{aligned}$$

si $k \to \infty$, porque $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ convergen regularmente a x.

Si $E_k = B_k \cap A^c$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{B_k}|f(y)-A_x|\,dy\\
&\quad=\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{B_k\cap A}(f(y)-A_x)\,dy+\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{E_k}-(f(y)-A_x)\,dy\\
&\quad=\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{B_k}(f(y)-A_x)\,dy-\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{E_k}(f(y)-A_x)\,dy\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{E_k}-(f(y)-A_x)\,dy\\
&\quad=\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{B_k}(f(y)-A_x)\,dy+\frac{2}{\lambda(B_k)}\int_{E_k}-(f(y)-A_x)\,dy\\
&\quad\leq\frac{1}{\lambda(B_k)}\int_{B_k}(f(y)-A_x)\,dy+\frac{2}{\lambda(E_k)}\int_{E_k}-(f(y)-A_x)\,dy\to 0
\end{aligned}$$

si $k\to\infty$, por las mismas razones que en el caso anterior. Por tanto x es un punto en el conjunto de Lebesgue de f. □

Como un ejemplo del uso del Teorema 5.4.1 tenemos el Teorema de Diferenciación de Lebesgue en dimensión $n=1$.

Teorema 5.4.3. *Sea $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $a\in\mathbb{R}$. Defina*

$$F(x)=\int_a^x f(y)\,dy \tag{5.4.4}$$

Entonces f es diferenciable casi en todas partes y $F'=f$ casi en todas partes.

Demostración. Sea $x\in\mathbb{R}$ un punto en el conjunto de Lebesgue de f y $(r_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de números positivos que converge a cero. $\{(x,x+r_k)\}_{k=1}^\infty$ converge regularmente a x, se sigue que

$$\frac{1}{r_k}\int_x^{x+r_k}f(y)\,dy\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

Esto es

$$\frac{F(x+r_k)-F(x)}{r_k}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

Y como $(r_k)_{k=1}^\infty$ es arbitraria

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\overset{h\to0^+}{\longrightarrow}f(x)$$

Argumentando de modo análogo para $\{(x-r_k,x)\}_{k=1}^\infty$ obtenemos

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\overset{h\to0^-}{\longrightarrow}f(x)$$

Concluyendo así $F'(x)=f(x)$. □

Capítulo 6

Convoluciones e Identidades Aproximadas

El Problema de Dirichlet ha sido resuelto a lo largo de esta tesis siempre considerando un dato continuo, nuestro primer acercamiento a un Problema L^p - Dirichlet será el Problema de Dirichlet en el Semi - espacio $\mathbb{R}_+^{n+1}$ con dato L^1 en la frontera. La fórmula de representación mediante la Función de Green (3.1.8) fue útil para aproximarnos a un Problema fuera del campo de acción de esta fórmula, ahora también nos dará una gran ventaja para estudiar un Problema algo más complicado. Cambiaremos nuestra perspectiva en cuanto al método de solución, tomaremos la solución al Problema de Dirichlet para el Semi - espacio con dato $g \in C(\partial\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^{n+1})$ de la ecuación (3.3.4) y la manipularemos para que adquiera la forma de convolución con una identidad aproximada, pero admitiremos que $g \in L^p(\partial\mathbb{R}_+^{n+1})$. Por esta causa, desarrollaremos la teoría necesaria sobre convoluciones e identidades aproximadas que sirvan para afirmar hechos relevantes sobre esta nueva forma de expresar la solución al Problema de Dirichlet. El estudiar este caso particular será la idea que de un gran impulso a un planteamiento adecuado del Problema L^p - Dirichlet.

Para referencia a este capítulo véanse [7] y [5].

6.1. Convoluciones

Estudiaremos algunos hechos básicos sobre convoluciones, pues esta es una herramienta que nos será muy útil cuando deseemos aproximar funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$. También, el introducir la convolución nos permitirá enriquecer la estructura algebraica del espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 6.1.1. *Sean f y g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. La convolución de f y g es la función $f * g$ definida como*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \tag{6.1.1}$$

para cada x tal que esta integral exista.

Teorema 6.1.1. *Sean f, g y h funciones medibles. Asumiendo que las integrales en cuestión existen, entonces*

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
   $(g + h) * f = g * f + h * f$
4. *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$
5. $\operatorname{sop}(f * g) \subset \overline{\operatorname{sop}(f) + \operatorname{sop}(g)}$

Demostración. 1. Haciendo el cambio de variable $z = x - y$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x-z)\,dz = (g * f)(x)$$

2. Por 1 y el Teorema de Fubini (véase [7] pp. 183 - 188, 268 - 269)

$$\begin{aligned}
((f * g) * h))(x) &= (h * (f * g))(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h(y)(f * g)(x-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-y-z)\,dz \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(y)g(x-z-y)\,dy \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x-z)\,dz \\
&= (f * (g * h))(x)
\end{aligned}$$

Las propiedades 3 y 4 son directas a partir de la linealidad de la integral.

5. Sea $x \in (\mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g))^c$. Observamos que

$$\begin{array}{rcl} y \notin \mathrm{sop}(f) & \Rightarrow & f(y)g(x-y) = 0 \\ y \in \mathrm{sop}(f) & \Rightarrow & x - y \notin \mathrm{sop}(g) \\ & \Rightarrow & f(y)g(x-y) = 0 \end{array}$$

entonces $(f * g)(x) = 0$, esto es $x \in \{z \in \mathbb{R}^n : (f * g)(z) \neq 0\}^c$. Por tanto $\mathrm{sop}(f * g) \subset \overline{\mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g)}$. $\square$

Varias condiciones pueden ser impuestas a f y g para garantizar que $f * g$ exista al menos casi en todas partes. Por ejemplo, si f es acotada y tiene soporte compacto, g solo necesita ser localmente integrable. También podemos asumir otras condiciones en f y g, como las que se describen en el siguiente

Teorema 6.1.2. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $(f*g)(x)$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, además $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Demostración. Dadas f y g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$, el producto $f(y)g(x-y)$ es una función medible en $\mathbb{R}^{2n}$, así que al menos podemos aplicar el Teorema de Fubini (véase [7] pp. 183 - 188, 268 - 269) a $|f(y)||g(x-y)|$

$$\begin{aligned} \||f| * |g|\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)| \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \, dx \, dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx \right) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

Así $|f| * |g|$ existe casi en todas partes. De este modo $|f(y)g(x-y)|$ es integrable como función de la variable y para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, pero esto es precisamente que $f(y)g(x-y)$ es integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Finalmente

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \, dy \right| dx \\ &\leq \||f| * |g|\|_1 \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

$\square$

Presentamos una generalización útil del Teorema 6.1.2.

Teorema 6.1.3 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $p, q, r \in [1, \infty]$ tales que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \tag{6.1.2}$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g$ existe al menos casi en todas partes, también $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración.

- Cuando $p = \infty$ o $q = \infty$ se razona de la misma forma. Si $p = \infty$, entonces $r = \infty$ y $q = 1$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y)\, dy \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x - y)|\, dy \\ &\leq \|f\|_\infty \|g\|_1 \end{aligned}$$

  así $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

- Cuando $p = 1$ o $q = 1$ también procedemos del mismo modo. Si $q = 1$, entonces $r = p$. Por la desigualdad de Minkowski generalizada (véase [7] pp. 271 - 274)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(\cdot - y)\, dy \right\|_p \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y) g(y)\, dy \right\|_p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \|f\|_p\, dy = \|f\|_p \|g\|_1 \end{aligned}$$

- Si $r = \infty$, entonces p y q son exponentes conjugados. Por la desigualdad de Hölder (véase [7] pp. 223 - 224) vemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(y - x)|\, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y - x)|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

- Si $1 < p, q, r < \infty$. Si probamos el resultado para funciones no negativas tendremos en general que $|f|*|g|$ existe casi en todas partes. De este modo, para casi todo x la función $|f(y)g(x-y)|$ será integrable. Así $f(y)g(x-y)$ será integrable para casi todo x y tendremos

$$\begin{aligned}\|f*g\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy\right|^r dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy\right)^r dx\\ &= \||f|*|g|\|_r^r\end{aligned}$$

por lo que también $\|f*g\|_r \leq \||f|*|g|\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Supongamos entonces que $f, g \geq 0$ y que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Si denotamos como p' y q' a los exponentes conjugados de p y q respectivamente, podemos usar la desigualdad de Hölder para tres funciones (véase [7] pp. 224 - 225) para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}[f(y)^{\frac{p}{r}}g(x-y)^{\frac{q}{r}}][f(y)^{1-\frac{p}{r}}][g(y)^{1-\frac{q}{r}}]\,dy\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p g(x-y)^q\,dy\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^{(1-\frac{p}{r})q'}\,dy\right)^{\frac{1}{q'}}\\ &\quad\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)^{(1-\frac{q}{r})p'}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

Esto es correcto, ya que

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{r}+\left(1-\frac{1}{q}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{p}{r}\right)q' &= p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)q' = p\left(1-\frac{1}{q}\right)q' = p\\ \left(1-\frac{q}{r}\right)p' &= q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)p' = q\left(1-\frac{1}{p}\right)p' = q\end{aligned}$$

Entonces la desigualdad de arriba simplemente se convierte en

$$(f*g)(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p g(x-y)^q\,dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

o

$$(f*g)^r \leq f^p * g^q$$

y como f^p y g^q son integrables, del Teorema 6.1.2

$$\begin{aligned}\|f*g\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)^r(x)\,dx \\ &\leq \|f^p * g^q\|_1 \\ &= \|f^p\|_1\|g^q\|_1 \\ &= \|f\|_p^p\|g\|_q^q \\ &= 1\end{aligned}$$

Si f y g son solo positivas, basta notar que

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_p} * \frac{g}{\|g\|_q}\right\|_r \leq 1$$

Luego $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Concluyendo la prueba.

□

Bajo el contexto del teorema anterior, el caso $r=\infty$ arroja más propiedades para la convolución de f y g.

Teorema 6.1.4. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ donde p y p' son exponentes conjugados. Entonces $(f*g)(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $x \mapsto (f*g)(x)$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, y si $1<p<\infty$ se tiene*

$$\lim_{|x|\to\infty} (f*g)(x) = 0$$

Demostración. En el teorema anterior quedó probado que $(f*g)(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $(f*g)$ es uniformemente continua. En el caso general $p<\infty$ o $p'<\infty$ o ambos. Supongamos que $p'<\infty$. Sea $\epsilon>0$, por la continuidad del operador de traslación τ_y en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (véase [7] pp. 180, 245) existe $\delta>0$ tal que

$$\|\tau_y f - f\|_{p'} < \epsilon \quad \text{si} \quad |y|<\delta$$

donde $\tau_y f(x) = f(x+y)$. Por la desigualdad de Hölder (véase [7] pp. 223 - 224), si $|x-x'|<\delta$

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)-(f*g)(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)-g(x'-y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(z+x-x')-g(z)|\,dz \\ &\leq \|f\|_p\|\tau_{x-x'}g-g\|_{p'} \\ &< \epsilon\|f\|_p\end{aligned}$$

Si $1 < p < \infty$, podemos encontrar sucesiones $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ y $(g_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ tales que $f_k \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$y $g_k \to g$ en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ pues $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (véase [7] pp. 173 - 174). Luego, $f_k * g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ por la Proposición 6.1.1 y podemos estimar

$$\begin{aligned} \|f_k * g_k - f * g\|_\infty &\leq \|f_k * (g_k - g)\|_\infty + \|(f_k - f) * g\|_\infty \\ &\leq \|f_k\|_p \|g_k - g\|_{p'} + \|f_k - f\|_p \|g\|_{p'} \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

haciendo $k \to \infty$, obtenemos que $\|f_k * g_k - f * g\|_\infty \to 0$. De esta forma $f_k * g_k$ converge uniformemente a $f * g$.

Sea $\eta > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|(f_K * g_K)(x) - (f * g)(x)| < \eta$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, luego

$$|(f * g)(x)| \leq |(f_K * g_K)(x) - (f * g)(x)| + |(f_K * g_K)(x)| \leq \eta + |(f_K * g_K)(x)|$$

Entonces

$$\lim_{|x| \to \infty} |(f * g)(x)| \leq \eta$$

pues $f_K * g_K \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Como $\eta > 0$ fue arbitrario concluimos que

$$\lim_{|x| \to \infty} (f * g)(x) = 0$$

□

6.2. Identidades aproximadas

Los Teoremas 6.1.1 y 6.1.2 nos permiten dotar a $L^1(\mathbb{R}^n)$ de un producto asociativo y conmutativo, la convolución

$$* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$$

definida como

$$(f, g) \mapsto f * g$$

donde $f * g$ es como en (6.1.1). Es natural preguntarse si existe una identidad multiplicativa, esto es, ¿existe $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * \phi = f$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$?

Podemos ver fácilmente que no existe tal identidad multiplicativa, porque si existiese tal ϕ, tendríamos que $f * \phi = f$ para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pero el Teorema 6.1.4 aseguraría entonces que toda función en $L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es continua. De manera precisa, si f es medible y acotada con soporte compacto, entonces existe una función continua igual a f casi en todas partes. Esto claramente es falso, tomemos por ejemplo $f = \mathcal{X}_{B(0,1)}$. Por tanto, tal ϕ no existe.

Sin embargo $L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene una "identidad aproximada", en el sentido de que existe una familia de funciones $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{a\to 0} f * \phi_a = f \tag{6.2.1}$$

en $L^1(\mathbb{R}^n)$. De hecho, este límite se da también si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p < \infty$.

Definición 6.2.1. *Una identidad aproximada es una familia de funciones* $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ *en* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *que satisface las siguientes tres propiedades*

1. $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_a(y)\,dy \equiv c$ *existe.*
2. *Existe* $M > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_a(y)|\,dy \leq M$ *para toda* $a \in (0,\infty)$
3. *Para toda* $r > 0$, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_{|y|\geq r} |\phi_a(y)|\,dy = 0$

Teorema 6.2.1. *Sea* $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ *una identidad aproximada.*

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\quad 1 \leq p < \infty$, *entonces*

$$\lim_{a\to 0} \|f * \phi_a - cf\|_p = 0$$

donde la constante c es como en la definición 6.2.1.

Demostración. Hagamos $c_a = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_a(y)\,dy$ y usemos la misma notación de la definición 6.2.1. Notemos que

$$(f * \phi_a)(x) - c_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\phi_a(y)\,dy$$

Por la desigualdad generalizada de Minkowski (véase [7] pp. 271 - 274) obtenemos

$$\|f * \phi_a - c_a f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{-y} f - f\|_p |\phi_a(y)|\,dy$$

Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad de la traslación en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (véase [7] pp. 180, 245), existe $r > 0$ tal que

$$|y| < r \quad \Rightarrow \quad \|\tau_{-y} f - f\|_p \leq \frac{\epsilon}{3M}$$

De la desigualdad del triángulo $\|\tau_{-y} f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$. De este modo

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_a - c_a f\|_p &\leq \left(\int_{B(0,r)} + \int_{B(0,r)^c}\right) \|\tau_{-y} f - f\|_p |\phi_a(y)|\,dy \\
&\leq \frac{\epsilon}{3M}\int_{B(0,r)} |\phi_a(y)|\,dy + 2\|f\|_p \int_{B(0,r)^c} |\phi_a(y)|\,dy \\
&\leq \frac{\epsilon}{3M}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_a(y)|\,dy + 2\|f\|_p \int_{B(0,r)^c} |\phi_a(y)|\,dy
\end{aligned}$$

Como $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ es una identidad aproximada, para a suficientemente cerca de 0

$$\int_{B(0,r)^c} |\phi_a(y)|\,dy \leq \frac{\epsilon}{6(\|f\|_p+1)} \quad \text{y} \quad |c-c_a| \leq \frac{\epsilon}{3(\|f\|_p+1)}$$

En consecuencia, si a es suficientemente cercana a 0

$$\begin{aligned} \|f*\phi_a - cf\|_p &\leq \|f*\phi_a - c_a f\|_p + |c-c_a|\|f\|_p \\ &\leq \frac{\epsilon}{3M}M + 2\|f\|_p \int_{B(0,r)^c} |\phi_a(y)|\,dy + |c-c_a|\|f\|_p \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + 2\|f\|_p \frac{\epsilon}{6(\|f\|_p+1)} + \frac{\epsilon}{3(\|f\|_p+1)}\|f\|_p < \epsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 6.2.2. *Sea $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ una identidad aproximada. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y f es continua en x, entonces*

$$\lim_{a\to 0}(f*\phi_a)(x) = cf(x)$$

Si además f es uniformemente continua, entonces $f*\phi_a \to cf$ uniformemente, esto es

$$\lim_{a\to 0}\|f*\phi_a - cf\|_\infty = 0$$

Demostración. Veamos la primera parte. Supongamos que f es continua en x. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$|y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x-y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3M}$$

Luego, de manera semejante al Teorema 6.2.1, conseguimos la estimación

$$|(f*\phi_a)(x) - c_a f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3M}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_a(y)|\,dy + 2\|f\|_\infty \int_{B(0,\delta)^c} |\phi_a(y)|\,dy$$

Si a es suficientemente cercana a 0

$$\int_{B(0,r)^c} |\phi_a(y)|\,dy \leq \frac{\epsilon}{6(\|f\|_\infty+1)} \quad \text{y} \quad |c-c_a| \leq \frac{\epsilon}{3(\|f\|_\infty+1)}$$

Así, si a está suficiente cerca de 0

$$\begin{aligned} |(f*\phi_a)(x) - cf(x)| &\leq |(f*\phi_a)(x) - c_a f(x)| + |c-c_a|\|f\|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{3M}M + 2\|f\|_\infty \int_{B(0,r)^c} |\phi_a(y)|\,dy + |c-c_a|\|f\|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + 2\|f\|_\infty \frac{\epsilon}{6(\|f\|_\infty+1)} + \frac{\epsilon}{3(\|f\|_\infty+1)}\|f\|_\infty < \epsilon \end{aligned}$$

Para la segunda parte, observemos que la convergencia uniforme de f permite repetir exactamente el mismo cálculo para cada $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que

$$\|f * \phi_a - cf\|_\infty \leq \epsilon$$

si a esta suficiente cerca de 0. $\square$

Observación 6.2.1. *Hay situaciones concretas en donde los Teoremas 6.2.1 y 6.2.2 se pueden utilizar. La sucesión $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ puede surgir de solo una función $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada $a > 0$ hacemos $\phi_a(x) = a^{-n}\phi\left(\frac{x}{a}\right)$. Si $c = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_a(x)\,dx = a^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\,dy = c$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_a(x)|\,dx = a^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\phi\left(\frac{x}{a}\right)\right|\,dx = \|\phi\|_1$$

$$\int_{|x|\geq r} |\phi_a(x)|\,dx = \int_{|y|\geq \frac{r}{a}} |\phi(y)|\,dy \xrightarrow{a\to 0} 0$$

Aún no sabemos nada sobre la validez de la ecuación

$$\lim_{a\to 0}(f * \phi_a)(x) = cf(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Sin embargo, con una condición adicional para $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ podemos probar que este límite existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 6.2.1. *Sea $\psi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ una función decreciente. Si $\psi(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\frac{\omega_n}{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k)2^{kn} \leq \|\psi\|_1 \leq \frac{2^n\omega_n}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k)2^{kn} \tag{6.2.2}$$

donde $\omega_n = \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\})$ y

$$\|\psi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|)\,dx \tag{6.2.3}$$

Demostración. Integrando en coordenadas polares (véase [5] p. 79)

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_1 &= \omega_n \int_0^\infty \psi(r) r^{n-1}\, dr \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_n \int_{2^{k-1}}^{2^k} \psi(r) r^{n-1}\, dr \right\} \\
&\geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_n \psi(2^k) \int_{2^{k-1}}^{2^k} r^{n-1}\, dr \right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_n \psi(2^k) \left[\frac{2^{kn} - 2^{(k-1)n}}{n} \right] \right\} \\
&= \frac{\omega_n}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{kn} [1 - 2^{-n}] \\
&\geq \frac{\omega_n}{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{kn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_n \int_{2^k}^{2^{k+1}} \psi(r) r^{n-1}\, dr \right\} \\
&\leq \frac{\omega_n}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) [2^{(k+1)n} - 2^{kn}] \\
&= \frac{\omega_n}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{(k+1)n} [1 - 2^{-n}] \\
&\leq \frac{2^n \omega_n}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{kn}
\end{aligned}$$

□

Observación 6.2.2. *La Proposición 6.2.1 permite ver que no perdemos mucha información reemplazando* $\|\psi\|_1$ *por la serie*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{kn}$$

La anterior es una observación clave para establecer la convergencia casi en todas partes de $f * \phi_a$ a f.

Teorema 6.2.3. *Sea* $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ *una identidad aproximada. Suponga además que existe una función* $\psi : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *cumpliendo*

1. *ψ es decreciente*

2. *$\psi(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$*

3. *$|\phi_a(x)| \leq a^{-n}\psi\left(\frac{|x|}{a}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 < a < \infty$*

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\lim_{a\to 0}(f * \phi_a)(x) = cf(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Antes que nada, notemos que no importando el valor de $1 \leq p \leq \infty$, siempre tendrá sentido coniderar $(f * \phi_a)(x)$ al menos para casi todo x por el Teorema 6.1.3.

De manera precisa, probaremos que si x está en el conjunto de Lebesgue de f, entonces

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_a(y)\,dy = cf(x)$$

Fijemos x un punto en el conjunto de Lebesgue de f, definimos

$$g(r) = \frac{1}{r^n}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = \frac{1}{r^n}\int_{|y|<r} |f(x-y) - f(x)|\,dy$$

Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue $g(r) \to 0$ si $r \to 0$. Por esta razón, existe $\delta > 0$ tal que $g(r) \leq 1$ si $0 \leq r < \delta$. Y si $r \geq \delta$

$$\begin{aligned}
g(r) &\leq \frac{1}{r^n}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy + \alpha(n)|f(x)| \\
&\leq \frac{1}{r^n}\|f\|_p(\alpha(n)r^n)^{\frac{1}{p'}} + \alpha(n)|f(x)| \\
&= r^{\frac{-n}{p}}\|f\|_p\alpha(n)^{\frac{1}{p'}} + \alpha(n)|f(x)| \\
&\leq \delta^{\frac{-n}{p}}\|f\|_p\alpha(n)^{\frac{1}{p'}} + \alpha(n)|f(x)| && \text{si } 1 < p < \infty \\
g(r) &\leq \frac{1}{r^n}\|f\|_1 + \alpha(n)|f(x)| \leq \frac{1}{\delta^n}\|f\|_1 + \alpha(n)|f(x)| && \text{si } p = 1 \\
g(r) &\leq \alpha(n)(\|f\|_\infty + |f(x)|) && \text{si } p = \infty
\end{aligned}$$

Por tanto g es acotada en $(0, \infty)$ para cualquier $1 \leq p \leq \infty$.

Haciendo $c_a = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_a(y)\,dy$, advertimos que

$$\begin{aligned}
|(f * \phi_a)(x) - c_a f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)||\phi_a(y)|\,dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k \leq \frac{|y|}{a} < 2^{k+1}} |f(x-y) - f(x)||\phi_a(y)|\,dy \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k \leq \frac{|y|}{a} < 2^{k+1}} |f(x-y) - f(x)| a^{-n} \psi\left(\frac{|y|}{a}\right) dy \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) \int_{\frac{|y|}{a} < 2^{k+1}} |f(x-y) - f(x)|\,dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k)(2^{k+1}a)^n g(2^{k+1}a) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{(k+1)n} g(2^{k+1}a)
\end{aligned}$$

Cada término de esta serie es menor que $\psi(2^k)2^{(k+1)n}\|g\|_\infty$ y sabemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k)2^{(k+1)n} < \infty$$

Haciendo $a \to 0$ en la última desigualdad, gracias al Teorema de convergencia dominada (véase [7] pp. 133 - 134, 147 - 149) el límite de la suma es la suma de los límites y así

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} |(f * \phi_a)(x) - c_a f(x)| &\leq \lim_{a\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k)2^{(k+1)n} g(2^{k+1}a) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k)2^{(k+1)n} \lim_{a\to 0} g(2^{k+1}a) = 0
\end{aligned}$$

□

Observación 6.2.3. *Las hipótesis del teorema anterior son ciertamente más fuertes que las del Teorema 6.2.1 pues solo*

- $\psi(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $|\phi_a(x)| \leq a^{-n}\psi\left(\frac{|x|}{a}\right)$ *para todo* $a \in (0, \infty)$

implican que para toda $a \in (0, \infty)$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_a(x)|\, dx \leq M$ *para alguna* $M > 0$
- $\displaystyle\int_{|x|\geq r} \phi_a(y)\, dy = 0$ *para todo* $r > 0$

Teorema 6.2.4. *Sea* $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ *una identidad aproximada y* ψ *como en el Teorema 6.2.3. Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$, *entonces para todo* $x \in \mathbb{R}^n$

$$|(f * \phi_a)(x)| \leq 2^{n+1} Mf(x)\|\psi\|_1 \quad \textit{para todo} \quad 0 < a < \infty \tag{6.2.4}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|(f * \phi_a)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\phi_a(y)|\, dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k \leq \frac{|y|}{a} < 2^{k+1}} |f(x-y)||\phi_a(y)|\, dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k \leq \frac{|y|}{a} < 2^{k+1}} |f(x-y)| a^{-n}\psi\left(\frac{|y|}{a}\right) dy \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) \int_{|y|<a2^{k+1}} |f(x-y)|\, dy \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) 2^{(k+1)n} a^n \alpha(n) Mf(x) \\
&= 2^n Mf(x) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^k) 2^{kn}\right) \frac{\omega_n}{n} \\
&\leq 2^{n+1} Mf(x)\|\psi\|_1
\end{aligned}$$

□

En el caso en que ψ sea acotada, podemos garantizar un poco más sobre el comportamiento puntual de $(f * \phi_a)$. Deseamos saber si se da la convergencia $(f * \phi_a)(x') \to cf(x)$ cuando $a \to 0$ y $x' \to x$. Requeriremos que $x' \to x$ al menos tan rápido como $a \to 0$. Expresaremos esto pidiendo que para alguna constante $m > 0$ se verifique $|x' - x| < ma$. Se dirá en este caso que $(f * \phi_a)(x') \to cf(x)$ cuando $x' \to x$ *no tangencialmente*.

Teorema 6.2.5. *Sea* $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ *una identidad aproximada y* ψ *como en el Teorema 6.2.3. Suponga que* ψ *es acotada. Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y asuma que* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Si* $m > 0$, *entonces*

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ |x-x'|<ma}} (f * \phi_a)(x') = cf(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. La hipótesis de que ψ sea acotada significa que $\psi(0) < \infty$. Sea x un punto en el conjunto de Lebesgue de f y definamos g como en el Teorema 6.2.3. Observemos que

$$\begin{aligned}|(f * \phi_a)(x') - cf(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x'-y) - f(x)||\phi_a(y)|\, dy \\ &\leq \int_{|y|<a} |f(x'-y) - f(x)||\phi_a(y)|\, dy \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k a \leq |y| < 2^{k+1}a} |f(x'-y) - f(x)||\phi_a(y)|\, dy \\ &\equiv I_a + J_a\end{aligned}$$

Usando las hipótesis para ψ

$$\begin{aligned}I_a &\leq \int_{|y|<a} |f(x'-y) - f(x)| a^{-n} \psi\left(\frac{|y|}{a}\right) dy \\ &\leq a^{-n}\psi(0) \int_{|y|<a} |f(x'-y) - f(x)|\, dy\end{aligned}$$

Haciendo $x' - y = x - z$, vemos que $|z| \leq |y| + |x - x'| < |y| + ma$ y

$$\begin{aligned}I_a &\leq a^{-n}\psi(0) \int_{|z|<(1+m)a} |f(x-z) - f(x)|\, dz \\ &= \psi(0)(1+m)^n g((1+m)a) \to 0\end{aligned}$$

si $a \to 0$. Ahora

$$\begin{aligned}J_a &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k a \leq |y| < 2^{k+1}a} |f(x'-y) - f(x)| a^{-n} \psi\left(\frac{|y|}{a}\right) dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) \int_{2^k a \leq |y| < 2^{k+1}a} |f(x'-y) - f(x)|\, dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) \int_{|y| < 2^{k+1}a} |f(x'-y) - f(x)|\, dy\end{aligned}$$

Usando el mismo cambio de variable

$$\begin{aligned}J_a &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) \int_{|z|<(2^{k+1}+m)a} |f(x-z) - f(x)|\, dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi(2^k)(2^{k+1}+m)^n g((2^{k+1}+m)a)\end{aligned}$$

Razonando como en el Teorema 6.2.3 podemos concluir que $J_a \to 0$ cuando $a \to 0$. Así
$$|(f * \phi_a)(x') - cf(x)| \leq I_a + J_a \to 0 \quad |x - x'| < ma$$
cuando $a \to 0$, que es lo que queriamos probar. $\square$

Teorema 6.2.6. *Sea $(\phi_a)_{a\in(0,\infty)}$ una identidad aproximada y ψ como en el Teorema 6.2.5. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $m > 0$, entonces*
$$|(f * \phi_a)(x')| \leq (2+m)^n Mf(x) \left[\frac{\omega_n}{n}\psi(0) + 2\|\psi\|_1\right] \tag{6.2.5}$$
para $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x - x'| < ma$.

Demostración. De manera muy parecida al teorema anterior se puede ver que si $|x - x'| < ma$
$$\begin{aligned}|(f * \phi_a)(x')| \leq a^{-n}\psi(0) &\int_{|z|<(1+m)a} |f(x-z)|\, dz \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a^{-n}\psi(2^k) \int_{|z|<(2^{k+1}+m)a} |f(x-z)|\, dz\end{aligned}$$
Luego, por la definición de función maximal
$$|(f * \phi_a)(x')| \leq (1+m)^n \psi(0)\frac{\omega_n}{n} Mf(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}+m)^n\psi(2^k)\frac{\omega_n}{n}Mf(x)$$
Usando que $(1+m)^n < (2+m)^n$ y $(2^{k+1}+m)^n < (2^{k+1}+2^k m)^n = 2^{kn}(2+m)^n$ y la Proposición 6.2.1
$$\begin{aligned}|(f * \phi_a)(x')| &\leq (2+m)^n\psi(0)\frac{\omega_n}{n}Mf(x) + (2+m)^n\frac{\omega_n}{n}Mf(x)\sum_{k=0}^{\infty}2^{kn}\psi(2^k) \\ &\leq (2+m)^n Mf(x)\left[\frac{\omega_n}{n}\psi(0) + 2\|\psi\|_1\right]\end{aligned}$$
$\square$

6.3. Problema de Dirichlet en el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con dato en L^p

Sea $f \in L^p(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $1 \leq p < \infty$ y denotemos puntos $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ como $x = (z, t)$ donde $z \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Una solución a la Ecuación de Laplace para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ (como fue demostrado en el Teorema 3.3.1) es
$$u(z,t) = \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K(z-y,t) f(y)\, dS(y)$$

donde $K(z,t)$ es el núcleo de Poisson para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ dado de manera explícita como

$$K_t(z) = K(z,t) = \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{(|z|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{6.3.1}$$

Entonces

$$u(z,t) = (K_t * f)(z)$$

Notemos que para $t > 0$ fija, la convolución $(K_t * f)(z)$ existe para casi todo $z \in \mathbb{R}^n$ por el Teorema 6.1.3, así que tiene sentido considerar $u(z,t)$.

Teorema 6.3.1. *El núcleo de Poisson, $K_t(z)$ tiene las siguientes propiedades*

1. *Para cada $t > 0$, $K_t(z)$ es una función positiva, radial y*

$$K_t(z) \to 0 \quad si \quad |z| \to \infty$$

2. *Para cada $t > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(z,t) = 1$$

3. *Para cada $r > 0$*

$$K_t(z) \to 0 \quad si \quad t \to 0$$

uniformemente en $\{z \in \mathbb{R}^n : |z| \geq r\}$.

4. *Para cada $r > 0$*

$$\int_{|z| \geq r} K_t(z)\, dz \to 0 \quad si \quad t \to 0$$

Demostración. La propiedad 1 es clara. 2 ya fue probada en el Lema 3.3.1. Veamos 3. Sea $r > 0$, entonces para cualquier z tal que $|z| \geq r$ se tiene

$$\begin{aligned} K_t(z) &= \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{(|z|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\leq \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{|z|^{n+1}} \\ &\leq \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{r^{n+1}} \to 0 \quad \text{si} \quad t \to 0 \end{aligned}$$

Finalmente, 4 se sigue inmediatamente de 3. $\square$

Corolario 6.3.1. *La familia $(K_t)_{t>0}$ es una identidad aproximada en $\mathbb{R}^n$.*

Ya identificamos a $u(z,t)$ como la convolución de $f \in L^p(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)$ con la identidad aproximada $(K_t)_{t>0}$. Quisiéramos poner en uso muchos de los resultados de la sección anterior, para sacar el mayor provecho de ellos, observemos que podemos escribir a $(K_t)_{t>0}$ como

$$K_t(z) = \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{(|z|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} = t^{-n} \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{1}{\left(\left|\frac{z}{t}\right|^2+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Definiendo $\psi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ como

$$\psi(r) = \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{1}{(r^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

se tiene que

$$K_t(z) \le t^{-n}\psi\left(\frac{|z|}{t}\right)$$

Además ψ es decreciente, acotada (porque $\psi(0) = \frac{2}{\omega_{n+1}} < \infty$) y $\psi(|z|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e integra 1 por el Lema 3.3.1. Así, dado que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} K_t(z)\,dz = 1$$

para todo $t > 0$, concluimos primero que

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(z,t) - f(z)\|_p = 0$$

por el Teorema 6.2.1. Luego que

$$\lim_{t\to 0^+} u(z,t) = f(z) \quad \text{para casi todo } z \in \mathbb{R}^n$$

por el Teorema 6.2.3. Y por último, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface que para todo $m > 0$

$$\lim_{\substack{t\to 0^+ \\ |z'-z|<mt}} u(z',t) = f(z)$$

por el Teorema 6.2.5.

Esta última relación tiene una importante interpretación geométrica. Establece que $u(z',t)$ converge a $f(z)$ de manera no tangencial. Para $m > 0$ el conjunto $\{(z',t) : |z'-z| < mt\}$ es un cono en el semiespacio superior con vértice en x y generadores con pendiente $\frac{1}{m}$. Si $t \to 0^+$ con $m > 0$ fija, esto fuerza a que $z' \to z$ de manera que (z',t) no se aproxima a $(z,0)$ tangencialmente a $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \cong \mathbb{R}^n$.

Capítulo 7

Planteamiento del Problema L^p Dirichlet

El presente y último capítulo de esta tesis servirá como conclusión a todo el desarrollo matemático antes presentado, así como respuesta a la preguntas: ¿Qué sigue? ¿Qué más hay que saber, y qué se puede estudiar si uno deseara continuar por esta línea de conocimiento?

Recordemos que uno de nuestros objetivos era dar una propuesta para plantear el Problema de Dirichlet, la cual deberá tener sentido. Deberíamos de poder encontrar condiciones que garanticen el poder solucionar tal Problema. La otra meta era dar una propuesta de solución para el Problema L^p - Dirichlet recién planteado.

7.1. Planteamiento del Problema L^p Dirichlet

En el capítulo anterior, gracias a que conocemos la solución al Problema de Dirichlet para el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con dato en la frontera continuo y acotado:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u = f & \text{en} \quad \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \end{cases}$$

logramos dar una fórmula para la solución al Problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ \\ \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ |x-x'|<mt}} u(x',t) = f(x) \quad \text{para casi todo } x \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \end{cases} \tag{7.1.1}$$

donde el valor de $m > 0$ es el mismo para todos los puntos en $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ y $f \in L^p(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)$ y solo admitamos $1 < p < \infty$. Vimos que la solución a este último estaba dada como

$$u(z,t) = (f * K_t)(z) = \int_{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} f(y)K_t(z-y)\,dS(y)$$

donde $(z,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y

$$K_t(z) = \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{t}{(|z|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Mostramos que $(K_t)_{t>0}$ es una identidad aproximada, como en la definición 6.2.1. También demostramos que $\psi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ definida como

$$\psi(r) = \frac{2}{\omega_{n+1}} \frac{1}{(r^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

es decreciente, acotada, $\psi(|z|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y cumple

$$K_t(z) \leq t^{-n}\psi\left(\frac{|z|}{t}\right) \quad \text{para toda } t > 0$$

Estas propiedades de $(K_t)_{t>0}$ son precisamente las que garazantizaban poder resolver el Problema 7.1.1. El punto es que estas propiedades no fueron explotadas al máximo. Por el Teorema 6.2.5 sabemos que

$$|u(z',t)| = |(f * K_t)(z')| \leq (2+m)^n \left[\frac{\omega_n}{n}\psi(0) + 2\|\psi\|_1\right] Mf(z) \tag{7.1.2}$$

con (z',t) tal que $|z - z'| < mt$. Definamos la función $Nu : \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ por medio de

$$Nu(z) = \sup_{|z-z'|<mt} |u(z',t)|$$

La desigualdad (7.1.2) garantiza que Nu está bien definida y también que

$$Nu(z) \leq CMf(z), \quad C = (2+m)^n \left[\frac{\omega_n}{n}\psi(0) + 2\|\psi\|_1\right] \tag{7.1.3}$$

para cada $x \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$. Por otro lado, sabemos que existe $C' > 0$

$$\|Mf\|_p \leq C'\|f\|_p \tag{7.1.4}$$

por el Teorema 5.2.5. De (7.1.3) y (7.1.4) se sigue que

$$\|Nu\|_p \leq CC'\|f\|_p \tag{7.1.5}$$

Ahora, en el caso general, es decir, cuando tengamos un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo, acotado y con frontera de clase C^1, aparecerán muchos de los elementos que ahora observamos (nótese que partimos de un conjunto no acotado $\mathbb{R}^{n+1}_+$, aún así, esto da buena idea de lo que pasa en general para un conjunto acotado). Después de esto, la situación en general es muy parecida.

Definición 7.1.1. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y $x \in \partial\Omega$. Definimos la región no tangencial*

$$\Omega_\alpha(x) = \{x' \in \Omega : |x - x'| < (1+\alpha)d(x', \partial\Omega)\}$$

Decimos que u tiene límite no tangencial L en $x \in \partial\Omega$, si para cada $\alpha > 0$

$$L = \lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in \Omega_\alpha(x)}} u(x')$$

y escribimos

$$L = \lim_{\substack{x' \to x \\ N.T.}} u(x')$$

Usualmente, el valor de $\alpha > 0$ se mantiene fijo para cada $x \in \partial\Omega$.

Definición 7.1.2. *Sea Ω un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es acotada, la función maximal no tangencial de u es la función $Nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada como*

$$Nu(x) = \sup_{x' \in \Omega_\alpha(x)} |u(x')| \tag{7.1.6}$$

Teorema 7.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo, acotado y con frontera de clase C^1. Supongamos que para $1 < p < \infty$, el Problema Clásico de Dirichlet con dato $f \in C(\partial\Omega)$:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = f & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1.7}$$

tiene una única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ cumpliendo la estimación

$$\|Nu\|_p \leq C\|f\|_p \tag{7.1.8}$$

Entonces, para cualquier $g \in L^p(\partial\Omega)$, existe una única solución al Problema L^p - Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ N.T.}} u(x') = g(x) & \text{para casi todo } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Si la solución es u_0, se tiene la estimación

$$\|Nu_0\|_p \leq C\|g\|_p$$

Demostración. Véase [8] pp. 29 - 30 Theorem 1.7.7. □

Sabemos que las primeras dos condiciones en el Teorema se cumplen, la solución está dada por el Método de Perron (Teoremas 4.3.3 y 4.3.4). Pero la expresión de la solución es muy distinta de la que obteníamos para el Disco del Plano $\mathbb{R}^2$, la bola en $\mathbb{R}^n$ y el Semi - espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Ahora buscamos una expresión que se parezca más a las que mencionamos.

Sean u y f como en (7.1.7) y $x \in \Omega$, definamos la funcional $\Lambda_x : C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda_x(f) = u(x)$$

Observamos que

1. Λ_x es lineal

   Sean $f_1, f_2 \in C(\partial\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$ y u_1, u_2 las soluciones a los Problemas de Dirichlet con dato f_1 y f_2 respectivamente. Por la Unicidad del Problema Clásico de Dirichlet
   $$\Lambda_x(af_1 + f_2) = au_1(x) + u_2(x) = a\Lambda_x(f_1) + \Lambda_x(f_2)$$

2. Λ_x es acotado y $\|\Lambda_x\|_\infty \leq 1$

   Por el Principio del Máximo, para todo $f \in C(\partial\Omega)$
   $$|\Lambda_x(f)| = |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |f| = \|f\|_\infty$$

3. Λ_x es positivo.

   Si $f \geq 0$, por el Principio del Mínimo
   $$|\Lambda_x(f)| = |u(x)| \geq \min_{\partial\Omega} |f| \geq 0$$

Por el Teorema de Representación de Riesz (véase [2] pp. 106 - 108), para cada $x \in \partial\Omega$, existe una única medida de Borel (véase [2] p. 20) $d\mu^x$ tal que

$$u(x) = \Lambda_x(f) = \int_{\partial\Omega} f(y)\, d\mu^x(y) \qquad (7.1.9)$$

La identidad (7.1.9) se parece más a las fórmulas de representación de los distintos Problemas Clásicos de Dirichlet antes estudiados. En aquellas fórmulas siempre integrabamos sobre la frontera de nuestro dominio en cuestión con respecto a la medida de superficie dS. Para conseguir una fórmula similar necesitamos que $d\mu^x$ sea absolutamente continua respecto a dS (véase [12] pp. 40 - 47), si esto sucede, como consecuencia del Teorema de Radon - Nykodým (véase [2] pp. 85 - 87, 94 (8.N)) se sigue que

$$u(x) = \Lambda_x(f) = \int_{\partial\Omega} f\, d\mu^x = \int_{\partial\Omega} f(y) \frac{d\mu^x}{dS}(y)\, dS(y) \qquad (7.1.10)$$

La función $\frac{d\mu^x}{dS}$ se le llama la derivada de Radon - Nikodým de $d\mu^x$ respecto a dS, y esta determinada de manera única casi en todas partes por la relación

$$d\mu^x(E) = \int_E \frac{d\mu^x}{dS}(y)\, dS(y)$$

Nótese que la fórmula (7.1.10) puede considerarse una extensión de la fórmula (3.1.8) con $f = 0$, pues la derivada de Radon - Nikodým sustituye a la derivada normal de la Función de Green en (7.1.10). Esto sugiere que para dominios más generales (no necesariamente con frontera de clase C^1) la fórmula de representación para la solución al Problema Clásico de Dirichlet (7.1.7) sea precisamente (7.1.10). Además, basados en lo observado en el Teorema 7.1.1, si se logra establecer dicho Teorema para dominios con frontera regular, entonces el objetivo se reduce a establecer (7.1.8) por medio de la fórmula (7.1.10). Esto último fue logrado por Björn Dahlberg a finales de los años 1970 (véase [13] y [14]), basado en propiedades adecuadas de la medida $d\mu^x$, y la derivada de Radon - Nikodýn $\frac{d\mu^x}{dS}$. Un punto fundamental es obtener desigualdades del tipo (7.1.4) para la función maximal de Hardy - Littlewood, donde la medida de Lebesgue es sustituida por una medida con peso.

Bibliografía

[1] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer - Verlag (2001).

[2] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons (1966).

[3] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1997).

[4] Gabriel García Figueroa, Tesis de Maestría: *Teoremas de extensión armónica para funciones y distribuciones* , Universidad de Sonora (2006).

[5] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons (1999).

[6] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations Of Second Order*, Springer - Verlag(2001).

[7] Frank Jones, *Lebesgue Integration On Euclidean Space*, Jones and Bartlett Mathematics (2001).

[8] Carlos Kenig, Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems, CMBS Regional Conference series number 83, American Mathematical Society (1994).

[9] H.L. Royden, *Real Analysis* (2nd Ed.), Macmillan (1988).

[10] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press (2003).

[11] Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons (1992).

[12] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw - Hill (1970).

[13] *On estimates of harmonic measure*, Arch. Mat. Mech. Anal. 65 (1977), 272 - 288

[14] *On the Poisson Integral for Lipschitz and* C^1 *domains*, Acta math. 66 (1979), 13 - 24