UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Elemetos de Álgebra Homológica

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Dante Rafael Terán Ramírez

Director de tesis: Prof. Jesús F. Espinoza

Hermosillo, Sonora, México 2011

Índice general

Introducción

El Álgebra homológica empezó a estudiarse en el siglo XIX gracias a estudios hechos por Beti y Riemann sobre homologí de números. Poincaré fue el primero de formalizar esta teoría haciendo aplicaciónes a la topología. Posteriormente, Noether dio aportaciones sobre homología de grupos, que es el estudio que abordamos.

Esta tesis se presenta on el fin de proponer una manera didáctica para enseñar la Teoía de Homología y Cohomología de Grupos, para ello se expondrán los resultados detalladamente lo cual facilitará el aprendizaje. Para esto el lector deberá tener nociones de Teoría de Grupo, Algebra Lineal, y Topología.

Primero hay que definir un Λ-módulo, donde Λ es un anillo, que de igual manera, se puede ver como un espacio vectorial con coeficientes en un anillo en vez de un campo. Del mismo modo que en Teoría de Grupo, veremos los Teoremas de Isomorfismos. Posteriormente introducimos la definición de sucesión exacta de Λ-módulos, en donde hay un resultado que se utiliza mucho, esto es, dada una sucesión excata corta es posible contruir una sucesión exacta larga.

Se aborda la definicíon Λ-módulos libre, que al igual que un espacio vectorial, tienen una base, y sus elementos del Λ-módulo se representan con los de la base. También veremos Módulos proyectivos que nos sirven para definir la Homología, y módulos inyectivos (su dual). En la sección 5 del primer capítulo introducimos el Hom y en la sección 9 del mismo vemos a $\otimes$, dos funtores muy importantes para está teoría, de igual estudiaremos estudiaremos y verificamos en que casos son covariantes o contravariantes.

El el capitulo 2 veremos un poco de teoría categórica, que nos sirve para simplificar, y relacionar algunas estructuras. Esta consta de objetos como los conjuntos, los grupos, los espacios topológicos, etc; y morfismos, por ejemplo en el caso de los conjuntos sus morfismos son las funciones, y en el caso de los grupos sus morfismos son los homomorfismos de grupo. Es muy útil saber categorías ya que te ofrece una amplia gama de opciones de estudios. En este desarrollo lo veremos con la intensión de entender los conceptos necesarios para definir tranformaciones naturales, que nos sirven para relacionar los funtores.

Con lo anterior, vemos que dado un Λ-módulo es posible asociarle una resolución proyectiva, y un caso que utilizaremos mucho es en el que asociamos una resolución proyectiva reducida, de aqui ya es posible introducir la definición de Homología de una cadena, y la Cohomología de una cocadena. Construiremos de manera natural dos funtores importantes llamados Tor y Ext, donde estos calculan la homología y cohomologia de un Λ-módulo.

Capítulo cinco vemos la cohomología de grupo, y ciertas caracterizaciones de ella, en la cual vemos propiedades que generalizan a H_0, H^0, H_1, H^1, y al final terminamos con una aplicación que es un teorema que relaciona la Topología Algebraica, y el Álgebra Abstracta, dicho teorema se encuentra en algunos libros como una definición, nosotros veremos su demostración, y lo que involucran está.

Capítulo 1

Teoría de Módulos

La teorá de Λ sirve como base para poder construir los grupos de homología, para ello promero se deberán introducir algunos conceptos y algunas propiedades con respecto al tema.

1.1. Módulos

Iniciaremos está sección introduciendo la definición de Λ-módulo, que es la estructura algebraica que utilizaremos más a lo largo de este escrito.

Definición 1.1.1. *Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Un* ***Λ-módulo*** *o un* ***módulo sobre Λ*** *es una pareja (M, μ) donde M es un grupo abeliano aditivo y μ: $\Lambda \times M \longrightarrow M$ es una acción del anillo sobre el grupo de la forma $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ tal que los siguientes axiomas se cumplen:*

1. *Para toda $\alpha \in \Lambda$ y cualquiera $x, y \in M$*

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

2. *Para toda $\alpha, \beta \in \Lambda$ y cualquiera $x \in M$*

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

3. *Para toda $\alpha, \beta \in \Lambda$ y cualquiera $x \in M$*

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

4. *Para todo $x \in M$*

$$1x = x.$$

En otras palabras un Λ-módulo es una estructura algebraica con dos operaciones, una operación suma $+ : M \times M \longrightarrow M$ y una multiplicación por escalar $\mu : \Lambda \times M \longrightarrow M$.

Observación. Sin el axioma 4, cualquier grupo abeliano M se podría convertir en un Λ-módulo trivialmente definiendo $\alpha x = 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$.

Ejemplo 1.1.2. Veamos que todo grupo abeliano G es un $\mathbb{Z}$-módulo. Primero definimos la acción

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathbb{Z} \times G & \longrightarrow & G \\ (n, x) & \longmapsto & nx \end{array}$$

donde nx es sumar n veces x. emostraremos que cumple con los axiomas de módulo

1. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} n(x+y) & \underbrace{(x+y)+\ldots+(x+y)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{x+\ldots+x}_{n \text{ veces}} + \underbrace{y+\ldots+y}_{n \text{ veces}} \\ & nx + ny \end{aligned}$$

2. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ y $x \in G$, entonces

$$\begin{aligned} (n+m)x &= \underbrace{x+\ldots+x}_{(n+m) \text{ veces}} = \underbrace{x+\ldots+x}_{(n) \text{ veces}} + \underbrace{x+\ldots+x}_{(m) \text{ veces}} \\ &= nx + mx \end{aligned}$$

3. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ y $x \in G$, entonces

$$\begin{aligned} (nm)x &= \underbrace{x+\ldots+x}_{nm \text{ veces}} = \underbrace{\underbrace{x+\ldots+x}_{n \text{ veces}} + \ldots + \underbrace{x+\ldots+x}_{m \text{ veces}}}_{n \text{ veces}} \\ &= \underbrace{mx+\ldots+mx}_{n \text{ veces}} = n(mx) \end{aligned}$$

4. Existe $1 \neq 0$ en $\mathbb{Z}$, para toda $x \in G$ vemos que

$$1x = x$$

Por lo tanto todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo. Para más explicación de Teoría de grupos se recomienda leer [5], y [1], que son muy explicativos y contienen una basta sección de ejercicios.

Ejemplo 1.1.3. Si Λ es un campo, entonces un Λ-módulo es un espacio vectorial. Para más información vease en [3]

Ejemplo 1.1.4. Sea Γ un subanillo conmutativo de un anillo Λ,con $1 \in \Gamma$. Entonces Λ es un Γ-módulo. Primero definamos $\mu : \Gamma \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ dada por $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ para toda $\alpha \in \Gamma$ y para toda $x \in \Lambda$. Demostraremos que cumple con la Definición 1.1.1

1. Sea $\alpha \in \Gamma$, y sea $x, y \in \Lambda$. Por la estructura del anillo se cumple que

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

2. Sea $\alpha, \beta \in \Gamma$, y sea $x \in \Lambda$. Por propiedades del anillo se tiene que

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

3. Sea $\alpha, \beta \in \Gamma$, y sea $x \in \Lambda$. Por propiedades del anillo se tiene que

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

4. Como $1 \in \Gamma$ y para toda $x \in \Lambda$ se tiene que

$$1x = x$$

.

Por lo tanto Λ es un Γ-módulo

Definición 1.1.5. *Sean M y N dos Λ-módulos. Una función $f : M \longrightarrow N$ se llama* ***homomorfismo de Λ-módulos*** *si f satisface:*

1. Para $x, y \in M$ se tiene que

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. Para $x \in M$ y $\alpha \in \Lambda$ se tiene que

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

En otras palabras que cumpla que $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ para toda $\alpha, \beta \in \Lambda$ y para toda $x, y \in M$.

Proposición 1.1.6. *La composición de homomorfismos de Λ-módulos es un homomorfismo de Λ-módulos.*

Demostración. Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ dos homomorfismos

1. Para cada $x, y \in M$ se tiene

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

2. Para toda $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$ satisface que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha x) = \quad & \quad g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) \\ = \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f)(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto $g \circ f$ es un homomorfismo de Λ-módulos. ■

Si Λ es un campo, un homorfismo entre dos Λ-módulos se llama **transformación lineal** entre espacios vectoriales. La función identidad $1_M : M \longrightarrow M$ es un homomorfismo de Λ-módulos. En efecto para cualquier $x, y \in M$ se tiene

$$\begin{aligned} 1_M(x+y) &= x+y \\ &= 1_M(x) + 1_M(y). \end{aligned}$$

Para $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$ se tiene

$$\begin{aligned} 1_M(\alpha x) &= \alpha x \\ &= \alpha 1_M(x). \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que 1_M es Λ-homomorfismo de módulos.

En el caso en que $f : M \longrightarrow N$ es inyectivo o suprayectivo (o bien, sobreyectivo), lo denotamos como

$$f : M \rightarrowtail N \qquad o \qquad f : M \twoheadrightarrow N$$

respectivamente. Diremos que f es **isomorfismo** y lo escribiremos $f : M \xrightarrow{\cong} N$, si existe un homomorfismo $g : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$. El homomorfismo g es único, ya que si suponemos que existe $g' : N \longrightarrow M$ tal que $g' \circ f = 1_M$ y $f \circ g' = 1_N$, se tendría que $g \circ f = g' \circ f$, entonces $g = g'$. Denotaremos tal homomorfismo por f^{-1} y se llamará **inverso** de f. Se tiene que f es biyectivo si, y sólo si f es inyectivo y sobreyectivo.

Definición 1.1.7. *Un homomorfismo entre Λ-módulos $f : M \longrightarrow N$ se llamará **monomorfismo** si $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica que $g_1 = g_2$ para todo $g_1, g_2 : M' \longrightarrow M$. Un homomorfismo entre módulos se llamará **epimorfismo** si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica que $g_1 = g_2$ para todo $g_1, g_2 : N \longrightarrow N'$.*

Sea M un Λ-módulo , diremos que un subgrupo N de M es un submódulo de M si N es un Λ-módulo con respecto a las operaciones de M. Esto lo definimos de la siguiente manera:

Definición 1.1.8. *Un subconjunto N de un Λ-módulo M se llama **submódulo** del Λ-módulo M si N es un subgrupo de M y para toda $\alpha \in \Lambda$, $\alpha N = \{\alpha x | x \in N\} \subset N$.*

En otras palabras, N va a ser un submódulo de M, si N es un subgrupo abeliano del grupo M y es cerrado bajo la multiplicación por escalar, esto es, si $\alpha \in \Lambda$ y $x \in N$, entonces $\alpha x \in N$.

En el caso de que el Λ-módulo corresponde a su anillo, sus subódulos corresponden a los ideales de anillo.

Definición 1.1.9. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos. El **núcleo** de f, denotado por Ker f es*

$$Ker\ f = \{x \in M | f(x) = 0\}$$

Definición 1.1.10. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos. La **imagen** de f, denotada por Im f, es el conjunto de valores de f, es decir,*

$$Im\ f = \{y \in N | f(x) = y,\ \ para\ algún\ x \in M\}$$

Proposición 1.1.11. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos. Si M' es un submódulo de M entonces $f(M')$ es un submódulo de N. Si N' es un submódulo de N entonces f^{-1}(N') es un submódulo de M.*

Demostración. Veamos que $f(M') = \{f(x)|x \in M'\}$ es un submódulo de N. Sea $u, v \in f(M')$, luego, existen $x, y \in M'$ tales que $f(x) = u,\ f(y) = v$. Como M' es un submódulo de M, $x + y \in M'$ y $\alpha x \in M'$. Como f es un homomorfismo se tiene :

$$u + v = f(x) + f(y) = f(x + y) \in f(M')$$

y que

$$\alpha u = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in f(M')$$

Con esto queda probada la cerradura, ahora falta ver que cumplen los axiomas de Λ-módulo.

1. Sean $f(x), f(y) \in f(M')$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(f(x) + f(y)) &= \alpha f(x + y) \\ &= f(\alpha(x + y)) \\ &= f((\alpha x) + (\alpha y)) \\ &= f(\alpha x) + f(\alpha y) \\ &= \alpha f(x) + \alpha f(y) \end{aligned}$$

2. Sean $f(x) \in f(M')$ y $\alpha, \beta \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) f(x) &= f((\alpha + \beta)x) \\ &= f(\alpha x + \beta x) \\ &= f(\alpha x) + f(\beta x) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x) \end{aligned}$$

3. Sean $f(x) \in f(M')$ y $\alpha, \beta \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) f(x) &= f((\alpha\beta)x) \\ &= f(\alpha(\beta x)) \\ &= \alpha(f(\beta x)) \\ &= \alpha(\beta f(x)) \end{aligned}$$

4. Sean $f(x) \in f(M')$ y $1 \in \Lambda$, entonces

$$1f(x) = f(1x) = f(x)$$

De esta manera $f(M')$ es un submódulo de N

Ahora veamos que $f^{-1}(N') = \{x \in M | f(x) \in N'\}$ es un submódulo de M. Sean $x, y \in f^{-1}(N')$, entonces $f(x)$ y $f(y)$ estan en N'. Como N' es un submódulo de N y f es homomorfismo,

$$f(x) + f(y) \;=\; f(x+y) \in N'$$

$$\alpha f(x) \;=\; f(\alpha x) \in N'$$

Con esto $f^{-1}(N')$ es cerrado. Se tiene que $f^{-1}(N')$ tiene estructura de grupo, pues N' contiene el elemento 0, así si tomamos $0 \in M$, $f(0) = 0$. También $f^{-1}(N')$ es asociativo, pues lo hereda de M. Solo falta la existencia de inversos, sea $x \in f^{-1}(N')$, esto es, $f(x) \in N'$, como N' es un subgrupo, exite $f(y)$ tal que es inverso de $f(x)$, asi tenemos que $f(x) + f(y) = f(x+y) = 0$, entonces $y \in f^{-1}(N')$ y es inverso de x. Con esto tenemos que $f^{-1}(N')$ es un submódulo de M ■

Corolario 1.1.12. *La imagen de $f : M \longrightarrow N$, Im f, es un submódulo de N; y el núcleo de f, Ker f, es un submódulo de M.*

Demostración. Utilicemos la Proposición 1.1.11, tomemos $M = M'$. Se cumple la definición de submódulo con $M \subset M$, entonces $f(M)$ es un submódulo de N, y $f(M) = \{y \in N | f(x) = y \text{ con } x \in M\} = \text{Im } f$. Apliquemos la Proposición 1.1.11 tomando $N' = 0$, entonces $f^{-1}(0) = \{x \in M | f(x) = 0\} = \text{Ker } f$. ■

Definición 1.1.13. *Llamaremos **endomorfismo** a un homomorfismo $f : M \longrightarrow M$ y diremos que es un **autormorfismo** si f es una biyección, es decir, inyectivo y sobreyectivo.*

1.2. Teoremas de isomorfismos

En esta sección estudiaremos tres teoremas análogos a los Teoremas de isomorfismos de la teoría de grupos que nos van a ayudar a identificar facilmente si dos módulos son isomorfos.

Proposición 1.2.1. *Sea $(N_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un Λ-módulos M, con I una familia arbitraria de subíndices. Entonces $\bigcap_{i\in I} N_i$ es un submódulo de M.*

Demostración. Primero veamos que se cumple con N_1 y N_2. Sea $\alpha \in \Lambda; x, y \in N_1 \bigcap N_2$ se cumple. Con esto sabemos que $x, y \in N_1$ y $x, y \in N_2$, entonces como N_1 y N_2 son submódulos, se tiene que, $x + y \in N_1$ y que $x + y \in N_2$, de aquí tenemos que $x + y \in N_1 \bigcap N_2$, también se cumple que para todo $\alpha \in \Lambda$ por que N_1 y N_2 son submódulos se tiene que $\alpha x \in N_1 \bigcap N_2$.

Lo anterior se extiende de manera natural para una familia arbitraria de subódulos $(N_i)_{i\in I}$. Sea $\alpha \in \Lambda$; $x, y \in \bigcap_{i\in I} N_i$, Como $\bigcap_{i\in I} N_i \subset N_j$ para todo $j \in I$,tenemos que $x, y \in N_j$. Debido a que N_j es un submódulo de M se tiene que $x + y \in N_j$ y que $\alpha x \in N_j$ para toda $j \in I$. Por lo tanto, $x + y \in \bigcap_{i\in I} N_i$ y $\alpha x \in \bigcap_{i\in I} N_i$. ■

Sea S un subconjunto de un Λ-módulo M. S está contenido en al menos un submódulo de M. Entonces tomemos a todos los submódulos que contienen a S, por la Proposicion 1.2.1, la intersección de todos los submódulos que contienen a S, es también un submódulo de M. Dicha intersección es el submódulo más pequeño de M que contiene a S.

Cuando utilicemos la indexacíon de subíndices $i \in I$, nor referimos siempre a I como una familia arbitraria de subíndices.

Definición 1.2.2. *Sea M un Λ-módulo y S un subconjunto de M diferente del vacío. El submódulo generado por S es la intersección de todos los submódulos de M que contienen a S y lo denotaremos por $\langle S \rangle$, esto es,*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset N} N$$

con N submódulo de M.

Definición 1.2.3. *Decimos que un elemento x de un Λ-módulo M es una **combinación lineal** de elementos de un subconjunto S de M si existe un número finito de elementos $\{x\}_{i=1}^{n}$ de S tal que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \alpha_i \in \Lambda$. Los términos α_i se llaman **coeficientes**.*

Definición 1.2.4. *Sea N un submódulo de un Λ-módulo M. El **módulo cociente** M/N se define como el grupo cociente abeliano M/N*

Proposición 1.2.5. *El módulo cociente M/N es un Λ-módulo.*

Demostración. Definamos la acción $\nu : \Lambda \times M/N \longrightarrow M/N$ como $n(x+N) \longmapsto nx+N$. Esta operación está bien definida, ya que si tomamos $x+N = y+N$, entonces $(x-y) \in N$, como N es un submódulo, para cualquier $n \in \Lambda$ vemos que $n(x-y) \in N$, es decir, $nx - ny \in N$. Por lo tanto $nx + N = ny + N$. Ahora probemos los axiomas de módulo

1. Sean $x + N.y + N \in M/N$ y $n \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} n((x+N)+(y+N)) &= n((x+y)+N) = n(x+y)+N \\ &= (nx+ny)+N = (nx+N)+(ny+N) \\ &= n(x+N)+n(x+N) \end{aligned}$$

2. Sean $m, n \in \Lambda$ y $x + N \in M/N$, vemos que

$$\begin{aligned} (n+m)(x+N) &= (n+m)x+N = (nx+mx)+N \\ &= (nx+N)+(mx+N) = n(x+N)+m(y+N) \end{aligned}$$

3. Sean $m, n \in \Lambda$ y $x + N \in M/N$, tenemos que

$$\begin{aligned} (nm)(x+N) &= (nm)x+N = n(mx)+N \\ &= n(mx+N) = n(m(x+N)) \end{aligned}$$

4. Para cualquier $n + N$, se tiene

$$1(x+N) = 1x+N = x+N.$$

Por lo tanto el módulo cociente M/N es un Λ-módulo ■

Definición 1.2.6. *Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos, llamamos **coimagen** y **cokernel** de f a los Λ-módulos:*

$$\begin{aligned} Coim\ f &= M/Ker\ f \\ Coker\ f &= N/Im\ f \end{aligned}$$

respectivamente.

Proposición 1.2.7. *Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo, entonces*

1. *f es monomorfismo si, y sólo si f es inyectiva.*
2. *f es epimorfismo si, y sólo si f es suprayectiva.*

Demostración.

1. Primero veremos que si f es inyectivo entonces es monomorfismo. Definamos $g_1, g_2 : M' \longrightarrow M$ tal que $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Sea $x \in M'$, entonces $(f \circ g_1)(x) = (f \circ g_2)(x)$, esto es $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$, como f es inyectivo se tiene que $g_1(x) = g_2(x)$ y ya que tomamos una x arbitraria tenemos que $g_1 = g_2$.
   Si f es monomorfismo y tenemos los homomorfismos g_1, g_2 como los definimos anteriormente, sea $x \in M'$, entonces $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$, como f es monomorfismo se tiene que $g_1 = g_2$, por lo tanto $g_1(x) = g_2(x)$

2. Supongamos que f es sobreyectivo. Definamos $h_1, h_2 : N \longrightarrow N'$ tal que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$. Sea $y \in N$, como f es sobreyectivo existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$, entonces

   $$\begin{aligned} h_1(y) &= h_1(f(x)) \\ &= h_2(f(x)) \\ &= h_2(y) \end{aligned}$$

   por lo tanto f es epimorfismo.

   Demostraremos que si f epimorfismo entonces es sobreyectiva. Supongamos que f es un epimorfismo y no es sobreyectiva. Definamos $h_1 : N \longrightarrow \text{Coker } f$ como $h_1(y) = 0$ para toda $y \in N$, y $h_2 : N \longrightarrow \text{Coker } f$ como $h_2(y) = y + \text{Coker } f$ con $y \in N$. Sea $x \in M$, se tiene que $h_1(f(x)) = 0$, y $h_2(f(x)) = 0$ para toda $x \in M$, pero $h_1 \neq h_2$ porque al menos existe un $z \neq 0 \in N$ que no está en $\text{Im } f$. Por lo tanto si f es epimorfismo entonces es sobreyectiva.

■

Proposición 1.2.8. *Un homomorfismo de Λ-módulos $f: M \longrightarrow N$ es*

1. *monomorfismo si, y sólo si, $Ker\ f = 0$.*
2. *epimorfismo si, y sólo si, $Coker\ f = 0$.*

Demostración.

1. Supongamos que f es monomorfismo, entonces que $f(0) = 0$, por lo tanto $0 \in f^{-1}(0) = \text{Ker } f$. Como f es inyectiva, Ker f solo puede contener un elemento. Por lo tanto Ker $f = 0$. Supongamos que el Ker $f = 0$. Sean $x, y \in M$ tal que $f(x) = f(y)$. Como f es un homomorfismo, $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, entonces $x - y \in \text{Ker } f$, pero Ker $f = 0$, de modo que $x - y = 0$, y por lo tanto $x = y$. Así f es inyectivo y por lo tanto es monomorfismo.

2. Supongamos que $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo. Entonces f es suprayectiva e Im $f = f(M) = N$, entonces Coker $f = N/\text{Im } f = N/N = 0$. Supongamos que Coker $f = 0$, entonces $f(M) = \Im f = N$. Luego f es epimorfismo.

■

Proposición 1.2.9. *Sean $f : M' \longrightarrow M$, $g : M \longrightarrow M''$ dos homomorfismos de Λ-módulos y $h = g \circ f$*

1. *Si h es monomorfismo, entonces f es monomorfismo*

2. *Si h es epimorfismo, entonces g es epimorfismo.*

Demostración.

1. Supongamos que h es monomorfismo. Entonces $f(x) = f(y)$ implica que $h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y)$, como h es monomorfismo tenemos que $x = y$.

2. Supongamos que h es epimorfismo.Entonces

$$M'' = h(M') = g(f(M')) \subseteq g(M) \subseteq M''.$$

Entonces, $g(M) = M''$.

■

Sea M un Λ-módulo y N un submódulo de M, le llamaremos proyección natural $\rho : M \longrightarrow M/N$ a la aplicacón dada por $x \longmapsto x+N$, para todo $x \in M$. Se tiene que ρ es un epimorfismo de Λ -módulos, pues $\rho(x+y) = (x+y)+N = (x+N)+(y+N) = \rho(x)+\rho(y)$ y $\rho(\alpha x) = \alpha x+N = \alpha(x+N) = \alpha\rho(x)$, solo falta ver que es sobreyectiva. Sea $x + N \in M/N$, entonces tomemos $x \in M$, de aquí aplicamos ρ y notemos, $\rho(x) = x + N$, por lo tanto ρ es un epimorfismo.

El primer teorema de isomorfismos hace una relacón entre la imagen de un hommorfismo f, y los submódulos que están contenidos en el kernel del mismo. Esto se realiza mediante el módulo cociente como veremos a continuación.

Teorema 1.2.10. *(Primer teorema de isomorfismo) Sea N un submódulo del Λ-módulo M, $f : M \longrightarrow M'$ un homomorfismo de Λ-módulos y $\rho : M \longrightarrow M/N$ tal que $N \subset$ Ker f. Entonces* *existe un homomorfismo único* $h : M/N \longrightarrow M'$ *tal que* $h \circ \rho = f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & M/N \arrow[d, "h"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Además, Im h = *Im* f *y Ker* h = *Ker* f/N

Demostración. Por hipotesis $f(N) = 0$, por lo que un elemento $f(x+N) = f(x) + f(N) = f(x)$. Definamos la función $h : M/N \longrightarrow M'$ como $h(x+N) = f(x)$. Con esto tenemos que h es un homomorfismo de grupos, pues

$$\begin{aligned} h(x+N) + h(y+N) &= h(\rho(x)) + h(\rho(x)) = f(x) + f(y) \\ &= f(x+y) = h(\rho(x+y)) \\ &= h((x+y)+N) \end{aligned}$$

y también es homomorfismo de Λ-módulos, pues

$$\begin{aligned} \alpha h(x+N) &= \alpha h(\rho(x)) = \alpha f(x) \\ &= f(\alpha x) = h(\rho(\alpha x)) \\ &= h(\alpha x). \end{aligned}$$

Como $h(\rho(x)) = f(x)$, y ρ es suprayectiva, se tiene que Im h = Im f, entonces $x + N \in$ Ker f/N. Por lo tanto, Ker h = Ker f/N.

Supongamos que existe h' tal que $h' \circ \rho = f$. Para cualquier $x + N \in M/N$ vemos que

$$\begin{aligned} h'(x+N) &= h'(\rho(x)) = f(x) \\ &= h(\rho(x)) = h(x+N) \end{aligned}$$

esto nos dice que $h' = h$, por lo tanto el homomorfismo es único. ∎

Veamos que en el teorema anterior, si tomamos a N = Ker f y $\rho : M \longrightarrow M/\text{Ker } f$, entonces h es un monomorfismo. Para probar esto tenemos que ver que Ker $h = 0$. Suponemos que Ker $h \neq 0$, entonces tomamos $x \in$ Ker h tal que $x \notin$ Ker f, entonces $h(x+N) = h(\rho(x)) = f(x) = 0$, lo cual es una contradicción por que tomamos una $x \notin$ Ker f, entonces Ker $h = 0$, por lo tanto h es monomorfismo. Así que $f(M) = \text{Im } f \cong M/\text{Ker } f = \text{Coim } f = M/N$.

Notación. El submódulo generado por la unión $\bigcup_{i \in I} N_i$ de submódulos N_i de un Λ-módulo M se denotará con $\sum\limits_{i \in I} N_i$. En particular, el submódulo generado por $N_1 \cup N_2$ lo denotaremos con $N_1 + N_2$. Así que

$$N_1 + N_2 = \{x + y | x \in N_1,\ y \in N_2\}.$$

El homomorfismo de **inclusión** de un submódulo N de un Λ-módulo M se denotará con $\iota : N \longrightarrow M$.

Teorema 1.2.11. *(Segundo teorema de isomorfismo) Sean N y N' submódulos de un Λ-módulo M, Entonces*

1. *Para el homomorfismo de inclusión $\iota : N \longrightarrow N + N'$, se tiene que $\iota(N \cap N') \subset N'$.*
2. *ι induce un isomorfismo $\varphi : N/N \cap N' \xrightarrow{\cong} (N + N)/N'$*

Demostración.

1. Como ι es el homomorfismo inclusión, se tiene que $x \in N \cap N'$, eso quiere decir que $x \in N$ y $x \in N'$, entonces $N \cap N' \subset N'$, de modo que por ser el homomorfismo inclusión $\iota(N \cap N') \subset N'$.
2. De (1), ι induce un homomorfismo $\varphi : N/N \cap N' \longrightarrow N + N'/N'$ Veamos que φ es monomorfismo, sea $[x] \subset N/N \cap N'$ tal que $\varphi([x]) = 0$.
   Sea $x \in [x] \subset N$. Luego $x = \iota(x) \in N'$ por ser inclusión y , por lo tanto, $x \in \cap N'$. Entonces $[x] = 0$ y φ es monomorfismo.
   Veamos que φ es epimorfismo. Consideramos $[x] \subset (N + N')/N'$. Sea $x \in N$, $y \in N'$ tal que $x + y \in [z] \subset N + N'$. Como $-y \in N'$, $x = (x + y) + (-y) \in [z]$. Por lo tanto φ manda elementos de $x + (N + N') \in N/N \cap N'$ en $[z]$. Luego φ es epimorfismo. Por lo tanto φ es isomomorsmismo.

■

Teorema 1.2.12. *(Tercer teorema de isomorfismo). Sean $M'' \subset M' \subset M$ Λ-módulos, entonces $(M/M'')/(M'/M'') \cong (M/M')$.*

Demostración. Definamos $\varphi : M/M'' \longrightarrow M/M'$ mediante $\varphi(x + M'') = x + M'$. Se tiene que φ es un homomorfismo de Λ-módulos que está bien definido, ya que es una proyección natural, a demás se tiene que Ker $\varphi = M'/M''$, ya que M'' es un submódulo de M'. ■

1.3. Sucesiones exactas

Estudiaremos las sucesiones de homomorfismos de Λ-módulos, por ejemplo

$$\cdots \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \cdots$$

Primero estudiaremos las sucesiones en las cuales el kernel del homomorfismo "saliente" contiene la imagen del homomorfismo "entrante".

Definición 1.3.1. *Diremos que una sucesión de Λ-módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

es ***semiexacta*** *en M_i si Im $f_{i-1} \subset$ Ker f_i. Si la sucesión es semiexacta en cada Λ-módulo, la llamaremos* ***sucesión semiexacta****.*

Enseguida veremos que en una sucesión semiexacta la composición de los homomorfismos, el "entrante" y el "saliente", es el homomorfismo trivial.

Proposición 1.3.2. *Una sucesión de Λ-módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

es semiexacta en M_i si, sólo si, la composición $f_i \circ f_{i-1} = 0$.

Demostración. Supongamos que la sucesión es semiexacta en M_i. Entonces Im $f_{i-1} \subset$ Ker f_i. Para toda $x \in M_{i-1}$ se tiene que $f_{i-1}(x) \in$ Im $f_{i-1} \subset$ Ker f_i, nos queda que $f_i(f_{i-1}(x)) = 0$, y como pasa eso toda $x \in M_{i-1}$, $f_i \circ f_{i-1} = 0$.
Supongamos ahora que $f_i \circ f_{i-1} = 0$, y sean $y \in$ Im f_{i-1} arbitraria, $x \in M_{i-1}$ tal que $f_{i-1}(x) = y$. Entonces $f_i(y) = f_i(f_{i-1}(x)) = 0$, por lo que $y \in$ Ker f_i, entonces se tiene que Im $f_{i-1} \subset$ Ker f_i. ∎

Definición 1.3.3. *Diremos que una sucesión de Λ-módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

*es **exacta** en M_i si es semiexacta y además Im $f_{i-1} \supset$ Ker f_i. Si es exacta en cada Λ-módulo, la sucesión se llamará **sucesión exacta**.*

Lo anterior es equivalente a decir que una sucesión es exacta en M_i, si, y sólo si Im f_{i-1} = Ker f_i. Claramente podemos notar que toda sucesión exacta es una sucesión semiexacta, pero no toda sucesión semiexacta es exacta.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

la llamaremos **sucesión exacta corta.**

Ejemplo 1.3.4. Sea N un submódulo de un Λ-módulo M. Sea $\iota : N \longrightarrow M$ el monomorfismo inclusión y $\rho : M \longrightarrow M/N$ el epimorfismo proyección. Entonces se tiene que

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\rho} M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, porque $\iota(N) = N =$ Im ι, luego, $\rho(N) = 0 =$ Ker ρ, entonces tenemos que Im i = Ker ρ.

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \xrightarrow{h} M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{k} 0$$

Se tiene que Im f = Ker g, entonces f es monomorfismo por que $h(0) = 0 =$ Im h = Ker f. Además g es epimorfismo, por que Im g = Ker k, y en este caso M'' = Ker k, entonces Im $g = M''$. Sea N = Im f = Ker g, como antes vimos, la Im f es un submódulo de M, entonces N es submódulo de M. Por el primer teorema de isomorfismos tenemos que se puede establece un isomorfismo $M'/\text{Ker } f \xrightarrow{\cong} N$. Como Ker $f = 0$ se tiene que $N \xrightarrow{\cong} M'$. También g establece un otro isomorfismo $M/N \xrightarrow{\cong} M''$, por el mismo argumento anterior. Con esto podemos concluir que una sucesión exacta corta es una sucesión con un submódulo y el módulo cociente de un Λ-módulo.

Proposición 1.3.5. *Sea*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M'$$

es una sucesión exacta de Λ-módulos, entonces h es monomorfismo si sólo si g es trivial; g es trivial si, sólo si, f es epimorfismo

Para demostrar esta proposición la separaremos en 2 partes:

1. h es monomorfismo si, sólo si $g = 0$

2. $g = 0$ si, sólo si f es epimorfismo,

Demostración.

1. Supongamos que h es monomorfismo, entonces Ker $f = 0$, por ser una sucesión exacta se tiene que Ker $h =$ Im $g = 0$, entonces $g = 0$.
   Supongamos que $g = 0$ entonces Im $g = 0$, como es una sucesión exacta se tiene que Im $h =$ Ker $g = 0$, y como Ker $g = 0$, entonces g es un monomorfismo.

2. Como $g = 0$ se tiene que $g(N) = 0$, entonces Ker $g = N$, por ser una sucesión exacta se tiene que Ker $g =$ Im $f = N$, entonces f genera N, por lo tanto f es epimorfismo.
   Supongamos que f es epimorfismo, $f(N') = N$, entonces Im $f = N$ y por ser una sucesión exacta Im $f =$ Ker $g = N$, por lo tanto $g = 0$.

■

Ejemplo 1.3.6. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos, entonces:

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \text{Coker } f \longrightarrow 0$$

es exacta.

Definición 1.3.7. *Sean M, M', N, N' Λ-módulos, con f, f', g, g' homomorfismos de Λ-módulos. Decimos que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[d, "f"] \\ M' \arrow[r, "g"] & N' \end{tikzcd}$$

conmuta *si $f \circ f' = g \circ g' : M \longrightarrow N'$*

Proposición 1.3.8. *Sean*

$$M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M'' \qquad y \qquad N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$$

dos sucesiones exactas cortas, y supongamos que en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, two heads, "f''"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[d, "h''"] \\ N' \arrow[r, tail, "g'"] & N \arrow[r, two heads, "g''"] & N'' \end{tikzcd}$$

dos de tres homomorfismos h', h, h'' son isomorfismos. Entonces el tercero también es isomorfismo.

Demostración. Supongamos que h' y h'' son isomorfismos. Veamos que h es monomorfismo, para esto probaremos que Ker $h = 0$. Sea $x \in$ Ker h, entonces como el diagrama es comnutativo $g''(h(x)) = h''(f''(x)) = 0$, entonces $f''(x) = 0$. Con esto sabemos que existe una $x' \in M'$ tal que $f'(x') = x$, por ser una sucesión exacta. De aqui tenemos que $h(f'(x')) = h(x) = 0$ y como el diagrama es conmutativo tenemos que $g'(h'(x')) = h(f'(x')) = 0$. Sabemos que h' es isomorfismo entonces $g'(x') = 0$, pero g' es inyectiva, por lo tanto $x' = 0$. Luego $f'(x') = x = 0$.
Ahora veremos que h es epimorfismo. Sea $y \in N$. Como h'' es isomorfismo, entonces existe $x'' \in M''$, tal que $g(y) = h''(y)$, ahora como f'' es sobreyectiva se tiene que existe una $z \in M$ tal que $f''(z) = x''$. Luego

$$\begin{aligned} g(y - h(z)) &= g(y) - g(h(z)) \\ &= g(y) - h''(f(z)) \\ &= g(y) - h''(x'') \\ &= g(y) - g(y) = 0. \end{aligned}$$

Con esto sabemos que $y - h(z) \in$ Ker g, y como la sucesión es exacta, se tiene que existe $y' \in N'$ tal que $g'(y') = y - h(z)$. Como h' es isomorfismo, existe $x' \in M'$ tal que $h'(x') = y'$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} h(f'(x') + z) &= h(f'(x')) + h(z) \\ &= g'(h'(x')) + h(z) \\ &= y - h(z) + h(z) \\ &= y. \end{aligned}$$

Si definimos a $x = f'(x') + z$, se tiene que $h(x) = y$. Los otros dos isomorfismos se demuestran de la misma manera.

■

Lema 1.3.9. *Sea*

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' & \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo con reglones exactos, entonces

$$Ker\ h' \xrightarrow{\kappa'} Ker\ h \xrightarrow{\kappa} Ker\ h''$$

es una sucesión exacta.

Demostración.
Definamos $\kappa' : \text{Ker } h' \longrightarrow \text{Ker } h$ como $f'|_{\text{Ker } h'}$, como f es homomorfismo solo falta ver que la imagen de κ' esta contenida Ker h, sea $x \in$ Ker h' entonces

$$\begin{aligned} h(\kappa'(x)) &= h(f'(x)) \\ &= g'(h'(x)) \\ &= g'(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto es $\kappa'(x) \in \text{Ker } h$, y como x es arbitraria podemos asegurar que la imagen de los elemenos de Ker h' bajo el homomorfismo κ' están contenido en Ker h. Ahora definamos $\kappa : \text{Ker } h \longrightarrow \text{Ker } h''$ como $g|_{\text{Ker } h}$, como g es homomorfismo falta ver que la imagen es un subconjunto de Ker h. Sea $y \in \text{Ker } h$ entonces

$$\begin{aligned} h''(\kappa(y)) &= h''(f(y)) \\ &= g(h(y)) \\ &= g(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $\kappa(y) \in \text{Ker } h''$ y como y es arbitraia podemos aseguar que la imagen de los elemenos de Ker h bajo el homomorfismo κ están contenidos en Ker h''.

Probaremos que es una sucesión exacta, sea $y \in \text{Im } \kappa'$ entonces existe $x \in \text{Ker } h$ tal que $\kappa'(x) = y$ entonces

$$\begin{aligned} \kappa(y) &= \kappa(\kappa'(x)) \\ &= f(f'(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $y \in \text{Ker } \kappa'$.

Sea $x \in \text{Ker } \kappa$ entonces $\kappa(x) = 0$, es decir, $f(x) = 0$, por exatitud de la cadena se tiene que existe $y' \in M'$ tal que $f'(y') = x$. Veamos que $y' \in \text{Ker } h'$. Como $h(x) = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(x) &= h(f'(y')) \\ &= g'(h'(y')) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y como g' es monomorfismo se tiene que $h'(y') = 0$, es decir, $y' \in \text{Ker } h'$. Por lo tanto $x \in \text{Im } \kappa$ y la sucesión

$$\text{Ker } h' \xrightarrow{\kappa'} \text{Ker } h \xrightarrow{\kappa} \text{Ker } h''$$

es exacta. ■

Lema 1.3.10. *Sea*

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' & \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo con reglones exactos, entonces

$$\textit{Coker } h' \xrightarrow{\nu'} \textit{Coker } h \xrightarrow{\nu} \textit{Coker } h''$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Definamos $\nu' : \text{Coker } h' \longrightarrow \text{Coker } h$ como $\nu'(x + \text{Im } h') = g'(x) + \text{Im } h$, y $\nu : \text{Coker } h \longrightarrow \text{Coker } h''$ como $\nu(x + \text{Im } h) = g(x) + \text{Im } h''$, se tiene que ν' y ν son homomorfismos bien definidos, veamos que la sucesión es exacta, es decir, $\text{Im } \nu' = \text{Ker } \nu$.

Sea $x + \text{Im } h' \in \text{Coker } h'$ entonces

$$\begin{aligned} \nu(\nu'(x + \text{Im } h')) &= \nu(g'(x) + \text{Im } h) \\ &= g(g'(x)) + \text{Im } h'' \\ &= 0 + \text{Im } h''. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\text{Im } \nu' \supset \text{Ker } \nu$. Sea $x + \text{Im } h \in \text{Ker } \nu$ una clase no trivial, entonces

$$\begin{aligned} \nu(x + \text{Im } h) &= g(x) + \text{Im } h'' \\ &= 0 + \text{Im } h''. \end{aligned}$$

esto es que $g(x) \in \text{Im } h''$ entonces existe $y'' \in M''$ tal que $h''(y'') = g(x)$. Como f es un epimorfismo se tiene que existe $y \in M$ tal que $f(y) = y'$ de aqui tenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= h''(y'') \\ &= h''(f(y)) \\ &= g(h(y)) \end{aligned}$$

esto es, los elementos de $\text{Im } h''$ están caracterizados por los elementos de $\text{Im } h$ bajo g. De aquí $x \in \text{Im } h$, lo cual contradice que $x + \text{Im } h$ es diferente del trivial, por lo tanto $g(x) = 0$.

Por la exactitud de la cadena $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N''$ se tiene que existe $x' \in N'$ tal que $g(x') = x$.

Tenemos que ver que x' no está en $\text{Im } h'$, supongamos que $x \in \text{Im } h'$, entonces existe $t' \in M'$ tal que $h'(t') = x'$, entonces

$$\begin{aligned} h(f'(t')) &= g'(h'(t)) \\ &= g'(x') \\ &= x \end{aligned}$$

esto es que $x \in \text{Im } h$, lo cual no es cierto. Por lo tanto $x' \notin \text{Im } h'$.

Teniendo lo anterior y tomando la proyección $\rho' : N' \longrightarrow N'/\text{Im } h' = \text{Coker } h'$, se tiene que $\rho'(x') = x' + \text{Im } h'$, y aplicando ν se tiene que

$$\begin{aligned} \nu'(x' + \text{Im } h') &= g'(x') + \text{Im } h \\ &= x + \text{Im } h \end{aligned}$$

de aqui obtenemos que $x \in \text{Im } \nu'$.

■

Teorema 1.3.11. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con reglones exactos*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta : Ker\ h'' \longrightarrow Coker\ h'$ *tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$Ker\ h' \xrightarrow{\kappa'} Ker\ h \xrightarrow{k} Ker\ h'' \xrightarrow{\delta} Coker\ h' \xrightarrow{\nu'} Coker\ h \xrightarrow{\nu} Coker\ h''$$

Demostración.

Por los Lemas 1.3.9 y 1.3.10 tenemos los siguientes sucesiones exactas

$$\text{Ker } h' \xrightarrow{\kappa'} \text{Ker } h \xrightarrow{k} \text{Ker } h'' \qquad y \qquad \text{Coker } h' \xrightarrow{\nu'} \text{Coker } h \xrightarrow{\nu} \text{Coker } h''$$

Por lo cual tenemos que definir $\delta : \text{Ker } h'' \longrightarrow \text{Coker } h'$ y ver que la sucesión esexacta en Ker h'' y Coker h'. Para definir δ utilizaremos el siguiente diagrama conmutativo exacto por reglones para ilustrarnos,

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Ker } h' \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, "\iota'"] & \text{Ker } h \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\iota"] & \text{Ker } h'' \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "\iota''"] & {} \\
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\rho'"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"] & N'' \arrow[d, "\rho''"] & \\
{} \arrow[r, dashed, "\delta"] & \text{Coim } h' \arrow[r, "\nu'"] & \text{Coim } h \arrow[r, "\nu"] & \text{Coim } h'' &
\end{tikzcd}$$

donde ι', ι, ι'' son las inclusiones a M', M, M'' respectivamente y ρ', ρ, ρ'' las proyecciones a Coim h', Coim h, Coim h'' respectivamente.

Sea $c \in \text{Ker } h''$, entonces existe $b \in M$, tal que $f(b) = c$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
g(h(b)) &= h''(f(b)) \\
&= h''(c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y como

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N''$$

es exacta, es decir Ker g = Im g', entonces existe $a' \in N'$ tal que $g'(a') = h(b)$. Definamos

$$\delta : \text{Ker } h'' \longrightarrow \text{Coker } h' \text{ como } \delta(c) = a' + \text{Im } h'.$$

Hay que tener en cuenta que δ puede no estar bien definida, ya que puede existir $b' \in M$ tal que $f(b') = c$, pero al aplicar $\delta(c)$ sea otra clase distinta a la de $a + \text{Im } N$, tomando b' como referencia.

Veamos que δ está bien definida, sea $b' \in M$ tal que $f(b') = c$. Como $f(b - b') = f(b') - f(b) = c - c = 0$ entonces por la exactitud de

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$

existe $a \in M'$ tal que $f(a) = b' - b$, es decir $b' = b + f'(a)$, luego vemos que

$$\begin{aligned} h(b') &= h(b) + h(f'(a)) \\ &= g'(a') + g'(h'(a)) \end{aligned}$$

de aqui tenemos que $\delta(c) = a' + h'(a) + \mathrm{Im}\ h' = a' + \mathrm{Im}\ h'$ es decir, pertenecen a la misma clase en $N/\mathrm{Im}\ h = \mathrm{Coker}\ h$.

Exactitud en Ker h''

Sea $c \in \mathrm{Ker}\ h''$ es de la forma $c = \kappa(b)$ para alguna $b \in \mathrm{Ker}\ h$. Para ello observamos que la conmutatividad del diagrama implica $h'' \circ f = g \circ h$, de modo que si $c \in \mathrm{Ker}\ h''$, entonces existe $b \in \mathrm{Ker}\ h$ tal que $c = \kappa(b)$. Como $h(b) = 0$ y g' es monomorfismo, se tiene que existe $a' \in M'$ tal que $g'(a') = 0$ y que $a' = 0$. Utilizando la proyección ρ' se tiene que $\rho'(0) = 0 + \mathrm{Im}\ h'$. Por como está definida δ se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(\kappa(b)) &= \delta(c) \\ &= 0 + \mathrm{Im}\ h'. \end{aligned}$$

Sea $c \in \mathrm{Ker}\ h''$ tal que $\delta(c) = 0 + \mathrm{Im}\ h'$, como κ es epimorfismo $\kappa(b) = c$ se tiene que $h(b) = g'(a')$, como $a' + \mathrm{Im}\ h' = 0 + \mathrm{Im}\ h'$. Entonces $a' \in \mathrm{Im}\ h'$, por lo tanto existe $a \in M'$ tal que $h'(a) = a'$. Sea $b'' = b - f'(a) \in M$, entonces

$$\begin{aligned} f(b') &= f(b) - f(f'(a)) \\ &= f(b) - 0 \\ &= c \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} h(b') &= h(b) - h(f'(a)) \\ &= h(b) - g'(h'(a)) \\ &= h(b) - g'(a') \\ &= h(b) - h(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto existe $b' \in \mathrm{Ker}\ h$ tal que $c = f(b')$, es decir, $c \in \mathrm{Im}\ \kappa$. Entonces la sucesión es exacta en Ker h''.

Exactitud en Coker h'

Sea $\delta(c) = a' + \text{Im } h' \in \text{Coker } h'$, con $c = f(b)$ y $h(b) = g'(a')$ entonces

$$\begin{aligned} \nu'(a' + \text{Im } h') &= g'(a') + \text{Im } h \\ &= h(b) + \text{Im } h \\ &= 0 + \text{Im } h \end{aligned}$$

por lo tanto $a' + \text{Im } h' \in \text{Ker } \nu'$.

Sea $a' + \text{Im } h' \in \text{Ker } \nu'$, entonces

$$\begin{aligned} \nu'(a' + \text{Im } h') &= g'(a') + \text{Im } h \\ &= 0 + \text{Im } h \end{aligned}$$

entonces $g'(a') = h(b)$ para alguna $b \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned} g(g'(a')) &= g(h(b)) \\ &= h''(f(b)) \end{aligned}$$

y como $g(g'(a')) = 0$, se sigue que $f(b) \in \text{Ker } h''$, con $f(b) = c$, de inmediato se tiene que $\delta(c) = a' + \text{Im } h$. Por lo tanto la sucesión es exacta en Coker h', con esto se tiene que la sucesión

$$\text{Ker } h' \xrightarrow{\kappa'} \text{Ker } h \xrightarrow{\kappa} \text{Ker } h'' \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} \text{Coker } h' \xrightarrow{\nu'} \text{Coker } h \xrightarrow{\nu} \text{Coker } h''$$

es exacta.

■

1.4. Suma y Producto directos

En esá sección definimos la suma y el producto directo, así como resultados que son de suma importancia como las propiedades universales de suma y producto.

Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de Λ-módulos y $\prod_{i\in I} M_i$ su producto cartesiano, esto es

$$\prod_{i\in I} M_i = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i | f(i) \in M_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

Definición 1.4.1. *Definimos $\prod_{i\in I} M_i$ el* ***producto directo*** *de la familia $(M_i)_{i\in I}$ de Λ-módulos M_i, $i \in I$, con*

$$+ : \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$

mediante

$$\begin{array}{rcl} f+g:I & \longrightarrow & \bigcup_{i\in I} M_i \\ i & \longmapsto & (f+g)(i)=f(i)+g(i) \end{array}$$

como suma y

$$\mu:\Lambda\times\prod_{i\in I}M_i\longrightarrow\prod_{i\in I}M_i$$

mediante

$$\begin{array}{rcl} (\alpha,f)\longmapsto\mu(\alpha,f) & \overset{def}{=} & \alpha f:I\longrightarrow\bigcup_{i\in I}M_i \\ i\longmapsto(\alpha f)(i) & = & \alpha f(i) \end{array}$$

como producto por escalar.

Un elemento es una familia $(x_j)_{j\in I}\in\prod_{i\in I}M_i$ es una familia de elementos de $x_j\in M_j$ sin ninguna restricción, y las x_i pueden ser diferentes de cero para toda $j\in I$.

Definición 1.4.2. *Sea $\bigoplus_{i\in I}M_i=\{f\in\prod_{i\in I}M_i|f(i)=0$ excepto para un número finito de índices $i\in I\}$. Al conjunto $\bigoplus_{i\in I}M_i$ se llama **suma directa** de la familia $(M_i)_{i\in I}$*

Veamos que $\prod_{i\in I}M_i$ es un grupo.

1. Sean $f,g,h\in\prod_{i\in I}M_i$, entonces para cada $i\in I$ se tiene que

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(i)&=(f+g)(i)+h(i)=(f(i)+g(i))+h(i)\\&=f(i)+(g(i)+h(i))=f(i)+(g+h)(i)\\&=(f+(g+h))(i)\end{aligned}$$

ya que $f(i),g(i),h(i)\in M_i$ para toda $i\in I$.

2. Existe $f\in\prod_{i\in I}M_i$ tal que $0(i)=0_i$ para toda $i\in I$, donde 0_i es el neutro aditivo de M_i. Sea $f\in\prod_{i\in I}M_i$, entonces

$$\begin{aligned}(0+f)(i)&=0(i)+f(i)=0_i+f(i)\\&=f(i)\end{aligned}$$

3. Para cada $f\in\prod_{i\in I}M_i$ existe $g\in\prod_{i\in I}M_i$ definida por $g(i)=-f(i)$ para toda $i\in I$, donde $-f(i)$ es el inverso aditivo de $f(i)$, entonces

$$\begin{aligned}(f+g)(i)&=f(i)+g(i)=f(i)+(-f(i))\\&=0_i\end{aligned}$$

para toda $i\in I$, entonces $f+g=0$.

Ahora probemos que es un Λ-módulo

1. Sean $f, g \in \prod_{i\in I} M_i$ y $n \in \Lambda$, entonces para $i \in I$

$$\begin{aligned}(n(f+g))(i) &= n(f+g)(i) = n(f(i)+g(i))\\ &= nf(i)+ng(i) = (nf)(i)+(ng)(i)\end{aligned}$$

2. Sean $f \in \prod_{i\in I} M_i$ y $m, n \in \Lambda$, entonces para $i \in I$ vemos que

$$\begin{aligned}((n+m)f)(i) &= (n+m)f(i) = nf(i)+mf(i)\\ &= (nf)(i)+(mf)(i)\end{aligned}$$

3. Sean $f \in \prod_{i\in I} M_i$ y $m, n \in \Lambda$, entonces para $i \in I$ vemos que

$$\begin{aligned}((nm)f)(i) = (nm)f(i) = n(mf(i))\\ n((mf)(i)) = (n(mf))(i)\end{aligned}$$

4. Sea $1 \in \Lambda$, para cualquier $f \in \prod_{i\in I} M_i$, entonces para toda $i \in I$

$$(1f)(i) = 1f(i) = f(I)$$

Para cada $j \in I$ tenemos un epimorfismo de Λ-módulos

$$\begin{aligned}\rho_j : \prod_{i\in I} M_i &\longrightarrow M_j \text{ para toda } j \in I\\ f &\longmapsto f(j) \text{ para toda } f \in \prod_{i\in I} M_i\end{aligned}$$

al que llamaremos **proyección natural del producto directo** $\prod_{i\in I} M_i$ en M_j. La restricción de ρ_j a $\bigoplus_{i\in I} M_i$ se llamará **proyección natural de la suma directa** $\bigoplus_{i\in I} M_i$ en M_j.
También para cada $j \in I$ existe un monomorfismo $\iota_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$, dado por

$$x \longmapsto \iota_j(x)(i) = \begin{cases} x \text{ sí } i = j \\ 0 \text{ sí } i \neq j \end{cases}$$

que se llama **inclusión natural** del Λ-módulo M_j a la suma directa $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

Por comodidad denotaremos $f(i)$ con f_i. Entonces los elementos de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ son la familia $(f_i)_{i\in I}$. De está manera podemos ver la suma como $(f_i)_{i\in I} + (g_i)_{i\in I}$, y multiplicación como $\alpha(f_i)$.

Teorema 1.4.3. *(Propiedad universal de la suma directa) Si M es un Λ-módulo y $\{\varphi_j : M_j \longrightarrow M\}_{j\in J}$ es una familia de homomorfismos de Λ-módulos, entonces existe un homomorfismo único $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ \iota_j = \varphi_j$. Dicho de otra manera, existe φ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_j \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[r, "\iota_j"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ definido como $\varphi((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i)$ con $\varphi(x_i) = 0$ excepto para una cantidad finita. Tenemos que ver que es un homomorfismo. Sea $x = \sum_{i\in I} x_i, y = \sum_{i\in I} y_i \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi((\sum_{i\in I} x_i) + (\sum_{i\in I} y_i)) = \varphi(\sum_{i\in I} x_i + y_i) \\ &= \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i) + \varphi_i(y_i) \\ &= \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i) + \sum_{i\in I} \varphi_i(y_i) = \varphi(\sum_{i\in I} x_i) + \varphi(\sum_{i\in I} y_i) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

De igual manera esta bien definida para el producto escalar. En efecto, sea $\alpha \in \Lambda$, y $x \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x) &= \varphi(\alpha(\sum_{i\in I} x_i)) = \varphi(\sum_{i\in I} \alpha x_i) \\ &= \sum_{i\in I} \varphi_i(\alpha x_i) = \sum_{i\in I} \alpha\varphi_i(x_i) \\ &= \alpha \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i) = \alpha\varphi(\sum_{i\in I} x_i) \\ &= \alpha\varphi(x) \end{aligned}$$

Veamos que es única. Sea φ' un homomorfismo que también hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_j \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[r, "\iota_j"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[u, shift right, "\varphi"'] \arrow[u, shift left, "\varphi'"] \end{tikzcd}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi'(x) &= \varphi(\sum_{i\in I} x_i) - \varphi'(\sum_{i\in I} x_i) \\ &= (\sum_{i\in I} \varphi(\iota_i(x_i))) - (\sum_{i\in I} \varphi'(\iota_i(x_i))) \quad \text{como el diagrama conmuta} \\ &= \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i) - \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de modo que $\varphi = \varphi'$. En consecuencia existe un homomorfismo que hace conmutar el diagrama ■

Ahora estableceremos la propiedad universal del producto directo $\prod_{i \in I} M_i$.

Teorema 1.4.4. *Si M es un Λ-módulo y $\{\psi_j : M \longrightarrow M_j\}_{j \in I}$ es una familia de homomorfismos, entonces existe un único homomorfismo $\psi : M \longrightarrow \prod_{j \in I} M_j$ tal que $\rho_j \circ \psi = \psi_j, j \in I$. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\psi_j"'] \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
M_j & \prod_{j \in I} M_j \arrow[l, "\rho_j"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos a $\psi : M \longrightarrow \prod_{I \in I} M_j$ como, $\psi(x) = \sum_{j \in I} \psi_j(x)$. Veamos que ψ es un homomorfismo, y es Λ-lineal. Sean $x, y \in M$ entonces

$$\begin{aligned}
\psi(x + y) &= \prod_{j \in I} \psi_j(x + y) = \prod_{j \in I} \psi_j(x) + \psi_j(y) \\
&= \prod_{j \in I} \psi_j(x) + \prod_{j \in I} \psi_j(y) = \psi(x) + \psi(y).
\end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha x) &= \prod_{j \in I} \psi_{j \in I}(\alpha x) = \prod_{j \in I} \alpha \psi_{j \in I}(x) \\
&= \alpha \prod_{j \in I} \psi_{j \in I}(x) = \alpha \psi(x)
\end{aligned}$$

Solo falta ver que sea único. Sea ψ' tal que $\rho_j \circ \psi' = \psi'_j$. Entonces $\psi_j(x) = \rho_j(\psi(x)) = \rho_j(\psi'(x)) = \psi'_j(x)$, Por lo tanto $\psi = \psi'$ ■

Definición 1.4.5. *Diremos que una sucesión exacta corta*

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, tail, "f"] & M \arrow[r, two heads, shift left, "g"] & M'' \arrow[l, shift left, "g'"]
\end{tikzcd}$$

se ***escinde*** *si existe un homomorfismo $g' : M'' \longrightarrow M$ tal que $g \circ g' = 1_{M''}$*

Podemos ver que

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, tail, "\iota_{M'}"] & M' \bigoplus M'' \arrow[r, two heads, shift left, "\rho_{M''}"] & M'' \arrow[l, shift left, "\iota_{M''}"]
\end{tikzcd}$$

se escinde. En efecto, si definimos $\iota_{M''} : M'' \longrightarrow M' \bigoplus M''$ como la inclusión y $\rho : M'' \longrightarrow M' \bigoplus M''$ entonces $\iota_{M''} \circ \rho_{M''} = 1_{M''}$.

Ejemplo 1.4.6. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}$$

donde la inclusión ι se define como $\iota(x) = (x, 0)$, y la proyección ρ como $\rho(x, y) = y$. Esta sucesión es exacta y además se escinde, ya que existe $\iota' : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ definida como $\iota'(y) = (x, y)$, es decir, $\rho \circ \iota' = 1_{\mathbb{Z}}$, donde ι' no es el inverso de ρ.

Proposición 1.4.7. *Si*

$$M' \rightarrowtail^{f} M \xrightarrow{g} \twoheadrightarrow M''$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces $M \cong M' \bigoplus M''$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
M' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota'_M"'] & M' \bigoplus M'' & M'' \arrow[ul, "g'"'] \arrow[l, "\iota_{M''}"]
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 1.4.3 tenemos que existe un homomorfismo $h : M' \bigoplus M'' \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, tail, "\iota_{M'}"] \arrow[d, equal] & M' \bigoplus M'' \arrow[r, two heads, "\rho_{M''}"] \arrow[d, dashed, "h"] & M'' \arrow[d, equal] \\
M' \arrow[r, tail, "f"] & M \arrow[r, two heads, shift left, "g"] & M'' \arrow[l, shift left, "g'"]
\end{tikzcd}$$

De esta manera por la Proposición 1.3.8 tenemos que h es un isomorfismo. ∎

Teorema 1.4.8. *Si un Λ-módulo M posee submódulos N y N' tales que $N \cap N' = 0$ y $N \bigoplus N' = M$, entonces $\varphi : N \bigoplus N' \longrightarrow M$, dado por $\varphi(y, y') = y + y'$, es isomorfismo.*

Demostración. Sean $\psi : N \longrightarrow M$, $\psi' : N' \longrightarrow M$ las inclusiones. Entonces existe un único homomorfismo $\varphi : N \bigoplus N' \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ \iota = \psi$, $\varphi \circ \iota' = \psi'$, donde ι y ι' son las inclusiones a la suma directa de N y N', respectivamente. Entonces $\varphi(y, y') = \varphi(y, 0) + \varphi(0, y') = \varphi(\iota(y)) + \varphi(\iota'(y')) = \psi(y) + \psi'(y') = y + y'$. Si $y + y' = 0$, entonces $y = -y' \in N \cap N' = 0$, entonces φ es inyectiva. Como $N \oplus N' = M$, entonces φ es suprayectiva. ∎

Corolario 1.4.9. *Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ tales que $g \circ f$ es un isomorfismo. Entonces $M \cong Im\ f \oplus Ker\ g$.*

Demostración. Veamos que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = M$. Sean $x \in M$ y $g(x) \in M''$. Como $g \circ f : M' \longrightarrow M''$ es isomorfismo, existe $y \in M'$ tal que $g(f(y)) = g(x)$. Sean $z = f(y)$ y $z' = x - z$, entonces

$$\begin{aligned}
g(z') &= g(x - z) = g(x) - g(z) \\
&= g(x) - g(f(y)) = g(x) - g(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, $z' \in \text{Ker } g$, por lo tanto $z + z' \in \text{Im } f + \text{Ker } g$, y ya que x era arbitraria tenemos que $\text{Im } f + \text{Ker } g = M$.

Veamos que $\text{Im } f \cap \text{Ker } g = 0$. Sea $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } g$. Entonces, como $x \in \text{Im } f$, existe $y \in M'$ tal que $f(y) = x$. Como $x \in \text{Ker } g$, $g(x) = 0$. Luego, $g(f(y)) = g(x) = 0$. Debido a que $g \circ f$ es un isomorfismo $x = 0$, y del Teorema 1.4.8se tiene que $M \cong \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$. ■

1.5. $Hom_\Lambda(M, N)$

En la teoría categórica existe un funtor llamado *Hom*, el cual estudiaremos en esta sección, asi como la covarianza y contravarianza del mismo.

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Denotaremos con $Hom_\Lambda(M, N)$ el conjunto de homomorfismos del Λ-módulo M en el Λ-módulo N. Sean $f, g : M \longrightarrow N$ Λ-homomorfismos y definamos $f + g : M \longrightarrow N$ como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ para toda $x \in M$. Veremos que $Hom_\Lambda(M, N)$ tiene una estructura de Λ-módulo.

1. Sea $x \in M$ y $f, g, h \in Hom_\Lambda(M, N)$, entonces $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$, debido a que N también cumple con la estructura de grupo, por lo tanto es asociativo.

2. Existe un homomorfismo $h : M \longrightarrow N$ tal que $h(x) = 0$ para toda $x \in M$ tal que $f(x)+h(x) = f(x)+0 = f(x)$ para toda $x \in M$. Tenemos que ver que h está en $Hom_\Lambda(M, N)$. Sea $x, y \in M$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces $h(x + y) = 0$ y $h(x) + h(y) = 0$, también $h(\alpha x) = 0$ y $\alpha h(x) = \alpha 0 = 0$, con esto tenemos que h es el elemento neutro.

3. Para cada $f \in Hom_\Lambda(M, N)$ definimos $g(x) : M \longrightarrow N$ como $g(x) = -f(x)$ tal que $f(x) + g(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0$. Solo tenemos que ver que g es homomorfismo de Λ-módulos. Sean $x, y \in M$ entonces

$$\begin{aligned} g(x+y) &= -f(x+y) = -(f(x) + f(y)) \\ &= -f(x) - f(y) = g(x) + g(y) \end{aligned}$$

   Sea $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$

$$\begin{aligned} g(\alpha x) &= -f(\alpha x) = -(\alpha f(x)) \\ &= \alpha(-f(x)) = \alpha g(x) \end{aligned}$$

   Con esto tenemos que $g \in Hom_\Lambda(M, N)$. De modo que para todo f existe un inverso el cual denotaremos por $-f$.

4. Sean $f, g \in Hom_\Lambda(M, N)$, tenemos que $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, debido a que N es un Λ-módulo y cumple con la conmutatividad.

Ahora definamos el producto por escalar como $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$.

1. Sean $f, g \in Hom_\Lambda(M, N), \alpha \in \Lambda, x \in M$, entonces
$$\begin{aligned}(\alpha(f+g))(x) &= \alpha((f+g)(x)) = \alpha(f(x)+g(x))\\ &= \alpha(f(x)) + \alpha(g(x)) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)\\ &= ((\alpha f) + (\alpha g))(x)\end{aligned}$$
debido a que N es Λ-módulo. En otras palabras se cumple que $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.

2. Sean $f \in Hom_\Lambda(M, N), \alpha, \beta \in \Lambda, x \in M$, entonces
$$\begin{aligned}((\alpha+\beta)f)(x) &= (\alpha+\beta)(f(x)) = (\alpha f(x)) + (\beta f(x))\\ &= (\alpha f)(x) + (\beta f(x))(x)\end{aligned}$$
debido a que N es Λ-módulo.

3. Sean $f \in Hom_\Lambda(M, N), \alpha, \beta \in \Lambda, x \in M$, como N es Λ-módulo se tiene que $(\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x))$.

4. Sean $f, g \in Hom_\Lambda(M, N), x \in M$, como Λ es un anillo conmutativo con 1, entonces $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$.

Con esto se tiene que $Hom_\Lambda(M, N)$ es un Λ-módulo.

Para definir un homomorfismo de $Hom_\Lambda(M, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$ tomemos $\psi : N \longrightarrow N'$y $f : M \longrightarrow N'$, podemos ver que $\psi \circ f : M \longrightarrow N$, podemos ver que $f \in Hom_\Lambda(M, N')$ y $\psi \circ f \in Hom_\Lambda(M, N')$. De aqui definimos
$$\psi_* : Hom_\Lambda(M, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$
dada por $\psi_*(f) = \psi \circ f$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi_*(f)=\psi\circ f"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ & N' \end{tikzcd}$$

Este homomorfismo es llamado el **homomorfismo inducido por** ψ.

De igual modo para definir un homomorfismo de $Hom_\Lambda(M', N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$ tomemos $\varphi : M' \longrightarrow M$y $g : M' \longrightarrow N$, podemos ver que $g \circ \varphi : M \longrightarrow N$, podemos ver que $g \in Hom_\Lambda(M', N)$ y $g \circ \varphi \in Hom_\Lambda(M', N)$. De aqui definimos
$$\varphi^* = Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M', N),$$
dada por $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$. Al homomorfismo φ^* se le llama homomorfismo llamado **homomorfismo inducido por** φ. En otras palabras hace conmutar el siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(g)=g\circ\varphi"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Proposición 1.5.1. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ y $\{N_i\}_{i\in I}$ familias de Λ-módulos, M y N Λ-módulos. Entonces*

1. $Hom_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$

2. $Hom_\Lambda(M, \prod_{i\in I} N_i) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$

Demostración.

1. Definamos a $\nu : Hom_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$ como $\nu(\varphi) = (\varphi\circ\iota_i)_{i\in I}$ donde ι_i es la inclusión de M_i en $\bigoplus_{i\in I} M_i$. Tenemos que ν va a ser un homomorfismo porque está definido como composición de homomorfismos de Λ-módulos. Para ver que ν es monomorfismo, supongamos que $\nu(\varphi) = 0$, eso quiere decir que $(\varphi\circ\iota_i)(\varphi) = 0$ para toda $i \in I$, esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_i \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\iota_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

   El homomorfismo 0 es tal que $(\varphi\circ\iota_i)_{i\in I} = 0$, entonces $\varphi = 0$, por lo tanto Ker $\nu = 0$ y tenemos que ν es monomorfismo. Para ver que ν es epimorfismo, sea $(\varphi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$. Luego, tenemos que $\varphi_i : M_i \longrightarrow N$ para cada $i \in I$ por el Teorema 1.4.4 se tiene que existe un homomorfismo $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ tal que $\varphi\circ\iota_i = \varphi_i$ para cada $i \in I$. Luego $\nu(\varphi) = (\varphi_i)_{i\in I}$, entonces ν es epimorfismo.

2. Definamos $\eta : Hom_\Lambda(M, \prod_{i\in I} N_i) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$ como $\eta(\varphi) = (\varphi\circ\rho_i)_{i\in I}$, entonces tenemos que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\eta(\varphi)=\rho_i\circ\varphi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ N_i & \prod_{i\in I}(N_i) \arrow[l, "\rho_i"'] \end{tikzcd}$$

   Se tiene que η es un homomorfismo debido a la manera que lo hemos definido. Veamamos que η es un monomorfismo. Supongamos que $\eta(\varphi) = 0$ para toda $i \in I$, es decir:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\rho_i\circ\varphi=0"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ N_i & \prod_{i\in I}(N_i) \arrow[l, "\rho_i"'] \end{tikzcd}$$

   como ρ_i es la proyección para toda $i \in I$ y para toda $x \in M$ se tiene que $\rho_i\circ\varphi(x) = 0$, se concluye que $\varphi = 0$, por lo tanto η es un monomorfismo. Ahora veamos que η es un epimorfismo, sea $\varphi_i \in \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$, por el Teorema 1.4.4 existe un homomorfismo $\varphi \in Hom_\Lambda(M, N_i)$ tal que $\rho_i\circ\varphi = \varphi_i$, se tiene que η es un epimorfismo.

■

Proposición 1.5.2. *Sea*

$$N' \overset{\psi'}{\rightarrowtail} N \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} N''$$

una sucesión exacta de Λ-módulos. Entonces, para cualquier Λ-módulo M, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N') \xrightarrow{\psi'_*} Hom_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\psi_*} Hom_\Lambda(M, N'')$$

es exacta.

Demostración.
Demostremos que ψ_* es inyectiva. Supongamos que $\psi' * (f) = 0$, es decir, $\psi'(f(y)) = 0$ para $f \in Hom_\Lambda(M, N')$ y para toda $y \in M$. Como ψ es un monomorfismo, se tiene que $f(y) = 0$ para toda $y \in M$, esto nos dice que $f = 0$. Por lo tanto ψ'_* es inyectiva.

Nos falta ver que $\Im\psi'_* = \mathrm{Ker}\ \psi_*$. Sean $f \in Hom_\Lambda(M, N')$ y $x \in M$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_*(\psi'_*(f(x))) &= \psi_*(\psi'(f(x))) \\ &= \psi(\psi'(f(x))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $\psi \circ \psi' = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Im}\ \psi'_* \subset \mathrm{Ker}\ \psi_*$.
Sea $g \in \mathrm{Ker}\ \psi_*$, es decir, $\psi \circ g = 0$. Veremos que g es de la forma $\psi'_*(f) = \psi' \circ f$ para alguna $f \in Hom_\Lambda(M, N')$. Sea $x \in M$ y $\psi(g(x))$ entonces existe $g(x) \in \mathrm{Ker}\ \psi = \mathrm{Im}\ \psi'$, es decir existe una única $y \in N'$ tal que $\psi(y) = g(x)$ ya que ψ' es monomorfismo, así definamos $f : M \longrightarrow N'$ mediante $f(x) = y = \psi'^{-1}(g(x))$, entonces $\psi'(f) = g$, es decir, $\mathrm{Im}\ \psi'_* \supset \mathrm{Ker}\ \psi_*$.
■

Proposición 1.5.3. *Sea*

$$M' \overset{\varphi'}{\rightarrowtail} M \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} M''$$

una sucesión exacta de Λ-módulos. Entonces, para cualquier Λ-módulo N, la sucesion inducida

$$Hom_\Lambda(M', N) \xleftarrow{\varphi^*} Hom_\Lambda(M, N) \xleftarrow{\varphi'^*} Hom_\Lambda(M'', N) \longleftarrow 0$$

es exacta

Demostración. Veamos que φ'^* es monomorfismo. Sea $f \in Hom_\Lambda(M'', N)$ tal que $\varphi'^*(f) = 0$, es decir, $f \circ \varphi(x) = 0$ para toda $x \in M''$, notemos que M'' es diferete al Λ-módulo trivial, entonces como φ' es epimorfismo se tiene que $f = 0$, por lo tanto φ'^* es un monomorfismo.

Falta ver que $\mathrm{Im}\ \varphi'^* = \mathrm{Ker}\ \varphi^*$. Sea $f \in Hom_\Lambda(M'', N)$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi^*(\varphi'^*(f)) &= \varphi^*(f \circ \varphi') = (f \circ \varphi') \circ \varphi \\ &= f \circ (\varphi' \circ \varphi) = f \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

de modo que $\Im\ \varphi'^* \supset \mathrm{Ker}\ \ \varphi$ ■

1.6. Módulos libres

Consideremos la suma directa $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ de una familia de anillos $\Lambda_j, j \in J$, donde cada Λ_j es isomorfo a un anillo fijo Λ. Sea $\iota_i : \Lambda_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ la inclusión natural. Escribamos a $\iota_i(1_i) = (e_i)_{i\in J}$, e_i es una sucesión donde en la i-ésima entrada es 1 y en las demas es cero.
A la función $J \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$, dada por $j \longmapsto e_j$, la llamaremos **función canónica**. Para cada $x \in \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ puede escribirse de forma única como $x = \sum_{j\in J} x_j e_j$.

Proposición 1.6.1. *Para todo Λ-módulo M y para toda función $f : J \longrightarrow M$, existe un homomorfismo único $\phi : \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j \longrightarrow M$ tal que $f = \phi \circ g$, con g la función canónica $g : J \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$. En otras palabras hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} M & \\ \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j \arrow[u, "\phi"] & J \arrow[ul, "f"'] \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Demostración. Se tiene que la condición $f = \phi \circ g$, esto es $f(j) = \phi \circ g(j) = \phi(e_j)$, para toda $j \in J$, lo cual sería equivalente decir que $\phi(\lambda e_j) = f(j)$, para toda $\lambda \in \Lambda$. Lo cual es equivalente a decir que $\phi \circ \iota_j : \Lambda_j \longrightarrow M$, dada por $\lambda \longmapsto \lambda f(j)$ para toda $j \in J$, es homomorfismo. En otras palabras que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} & M & \\ \Lambda_j \arrow[ur, "\phi\circ\iota_j"] \arrow[r, "\iota_j"] & \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j \arrow[u, "\phi"] & J \arrow[ul, "f"'] \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

por el Teorema 1.4.3 se tiene que ϕ existe.
■

Definición 1.6.2. *En la Proposición 1.6.1 diremos que la familia $(x_j)_{j\in J}$ de elementos de un Λ-módulo M es:*

1. ***linealmente independiente*** *si ϕ es inyectiva,*
2. *una familia de **generadores** si ϕ es sobreyectiva,*
3. *una **base** si ϕ es biyectiva.*

Dicho de otra forma, la familia $(x_j)_{j\in J}$ es linealmente independiente si $\phi(\sum_{j\in J}\lambda_j e_j) = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para toda $j \in J$, $\lambda_j \in \Lambda$. Cuando se dice que ϕ es sobreyectiva, cualquier elemento $x \in M$ se puede escribir de la forma $\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$, es decir como combinación lineal. Cuando ϕ es biyectiva quiere decir que $x \in M$ se puede escribir de una y sólo una manera en la forma $x = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j$.

Tendremos por definición que $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ es libre, y la familia $(e_j)_{j\in J}$ es una base que llamamamos **base canónica**. Frecuentemente se identifica al conjunto J con la familia $(e_i)_{i\in J}$ mediante una biyección dada por $i \longmapsto e_i$. Diremos que un subconjunto X de M es **linealmente independiente** si la familia definida por la función identidad de X es linealmente independiente, y X será una base de M, si la familia definida por la identidad de X es una base para M. Entonces se tiene que toda familia definida por una función biyectiva de un conjuno J de índices, en un conjunto X de M es linealmente independiente o base, respectivamente. También diremos que el subconjunto X es linealmente dependiente si no es linealmente independiente.

Diremos que un Λ-módulo L es **libre** con base en el conjunto X, si X es una base para L. Si un Λ-módulo posee un conjunto finito de generadores, diremos que es **finitamente generado**

Proposición 1.6.3. *Sea $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ una familia de Λ-módulos, entonces*

1. *la suma directa $\bigoplus_{i\in J}\Lambda_j$ es un Λ-módulo libre con base $\{e_j\}_{j\in J}$.*

2. *si L es un Λ-módulo libre con base X, entonces es isomorfo a $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$.*

Demostración.

1. Se puede definir una función $f : J \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ como $f(j) \longmapsto e_j$ donde e_j es el 1 de Λ_j, también se tiene que f es biyectiva. Por lo tanto $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ tiene base $(e_j)_{j\in J}$.

2. Como L es un Λ-módulo que tiene base en X todos los elementos de L se expresan de la forma $x = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j$. También como $\bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ es un Λ-módulo libre con base $(e_j)_{j\in J}$, sea $\varphi : L \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\Lambda_j$ definido por $\varphi(x) = \varphi(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j) = (\lambda_j e_j)_{j\in J}$. Ademas tenemos que φ es homomorfismo,ya que para $x = \sum_{j\in J}\lambda_j x_j, y = \sum_{j\in J}\lambda'_j x_j \in L$ tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi((\sum_{j\in J}\lambda_j x_j) + (\sum_{j\in J}\lambda'_j x_j)) = \varphi(\sum_{j\in J}(\lambda_j + \lambda'_j)x_j) \\ &= \sum_{j\in J}(\lambda_j + \lambda'_j)e_j = (\sum_{j\in J}\lambda_j e_j) + (\sum_{j\in J}\lambda'_j e_j) \\ &= \varphi(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j) + \varphi(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j)\end{aligned}$$

Además para todo $\kappa \in \Lambda$ se tiene

$$\begin{aligned}\varphi(\kappa\sum_{j\in J}\lambda_j x_j) &= \varphi(\sum_{j\in J}\kappa\lambda_j x_j) = \sum_{j\in J}\kappa\lambda_j e_j \\ &= \kappa\sum_{j\in J}\lambda_j e_j = \kappa\varphi(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j)\end{aligned}$$

Con esto se tiene que φ es un homomorfismo de Λ-módulos, ahora veremos que es inyectivo. Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j) &= \varphi(\sum_{j\in J}\lambda'_j x_j) \\ \sum_{j\in J}\lambda_j e_j &= \sum_{j\in J}\lambda'_j e_j\end{aligned}$$

Como $\bigoplus_{j\in J} \Lambda_j$ es un Λ-módulo libre cada elemento se escribe de una única forma, entonces $\lambda_j = \lambda'_j$ para cada $j \in J$. Como $x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j = \sum_{j\in J} \lambda'_j x_j = y$, entonces es monomofismo. Para ver que es epimorfismo, sea $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j \in \bigoplus_{j\in J} \Lambda_j$ entonces se tiene que existe $x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \in L$ tal que $\varphi(x) = \varphi(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j) = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, por lo tanto φ es un isomorfismo.

∎

Corolario 1.6.4. *Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ una familia de Λ-módulos libres. Entonces $\bigoplus_{i\in I} L_i$ es un Λ-módulo libre.*

Demostración. Se tiene que L_i es libre, entonces es isomorfo a un $\bigoplus_{j\in J} \Lambda_{i,j}$, entonces si se toma $\bigoplus_{i\in I} L_i \cong \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{j\in J} \Lambda_{i,j})$, y se tiene por la Proposición 1.6.3 que es un Λ-módulo libre. ∎

Teorema 1.6.5. *Todo Λ-módulo M es cociente de un Λ-módulo libre.*

Demostración. Sea X un subconjunto de M tal que X genera a M. Tomemos particularmente $X = M$. Consideremos el Λ-módulo libre generado por X y lo denotaremos con L. Entonces la inclusión $\iota : X \longrightarrow M$ se extiende Λ-linealmente a un homomorfismo $\phi : L \longrightarrow M$. De modo que $X = \iota(X) \subset \phi(L) \subset M$, y como tomamos $X = M$, entonces $\phi(L) = M$. Luego, ϕ es un epimorfismo, y el Primer Teorema de Isomorfismos tenemos que $M \cong L/\text{Ker } \phi$.

∎

1.7. Módulos Proyectivos

En está sección introduccidemos la definición de módulo proyectivo, la cual es fundamenta la Terоría de Anillos y tiene importantes aplicaciones en el estudio de la K-teoría algebráica. En particular, veremos que también es importanteen el contexto del álgebra homológic como veremos en el Capitulo 5.

Definición 1.7.1. *Un Λ-módulo P se llama **proyectivo** si para todo homomorfismo $f : P \longrightarrow N''$ y para todo epimorfismo $\varphi : N \longrightarrow N''$ de Λ-módulos, existe un homomorfismo $h : P \longrightarrow N$ tal que $\varphi \circ h = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\varphi"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.7.2. Sea $\mathbb{Z}$ un $\mathbb{Z}$-módulo, entonces sea $f : M' \longrightarrow M$ un epimorfismo entre $\mathbb{Z}$-módulos, para cualquier homomorfismo $g : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ vemos que están caracterizados por el 1 del anillo, ya que para $\lambda \in \mathbb{Z}$ se tiene que $g(\lambda) = g(\lambda 1) = \lambda g(1)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De esta manera si $g(1) = x$, entonces existe $y \in M'$ tal que $f(y) = x$. Definimos $h : \Lambda \longrightarrow M'$ como $h(1) = y$, donde $h(\lambda) = \lambda h(1) = \lambda y$ y para $\lambda, \beta \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} h(\lambda + \beta) &= (\lambda + \beta)h(1) = (\lambda + \beta)y \\ &= \lambda y + \beta y = \lambda h(1) + \beta h(1) \\ &= h(\lambda) + h(\beta) \end{aligned}$$

además $f \circ h = g$.

Proposición 1.7.3. *Si L es un Λ-módulo libre, entonces, para todo homomorfismo $f : L \longrightarrow N''$ y para todo epimorfismo $\psi' : N \longrightarrow N''$, existe un homomorfismo $h : L \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h$. Es decir, si L es libre, entonces L es proyectivo.*

Demostración.
Si L es un Λ-módulo libre con base en el conjunto $X \subset L$, entonces para cada elemento $f(x_i) \in N''$, con $x_i \in X$ e $i \in I$, se tiene que existe $y_i \in N$ tal que $\psi'(y_i) = f(x_i)$, por que ψ' es epimorfismo, con esto definamos $g : X \longrightarrow N$ como $g(x_i) = y_i$. De esta manera g se extiende a un homomorfismo único $h : L \longrightarrow N$ definido como $h(x) = h(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i g(x_i)$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi(h(x)) &= \psi(h(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i)) = \psi(\sum_{i\in I} \lambda_i g(x_i)) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \psi(y_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) \\ &= f(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i) = f(x) \end{aligned}$$

de modo que $\psi \circ h = f$, y como x era arbitraria, entonces L es un Λ-módulo proyectivo.

■

Por la proposición anterior es posible encontrar varios λ-módulos proyectivos por ejemplo tenemos que $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}_i$ es un $\mathbb{R}$-módulo proyectivo ya que tiene base $(e_i)_{1\in I}$, donde e_i es una sucesión donde la i-ésima entrada es 1 y las demas 0.

Proposición 1.7.4. *$P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ es un Λ-módulo proyectivo si sólo si, P_i es proyectivo.*

Demostración. Supongamos que $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$, entonces para cada P_i se tiene que existe su homomorfismo $\iota_i : P_i \longrightarrow P$ y $\rho_i : P \longrightarrow P_i$, también tenemos un homomorfismo $f_i : P_i \longrightarrow N''$ y un epimorfismo $\psi : N \longrightarrow N''$. Como P es proyectivo existe $h : P \longrightarrow N$ tal que $\psi \circ h = f_i \circ \rho_i$, y también definimos $k_i = h \circ \iota_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "k_i"'] & P \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "h"] & P_i \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, "k_i"'] \\ & N \arrow[r, "\psi"] & N'' \end{tikzcd}$$

De está manera tenemos que $\psi \circ k_i = \psi \circ (h \circ \iota_i) = (\psi \circ h) \circ \iota_i = (f_i \circ \rho_i) \circ \iota_i = f_i \circ (\rho_i \circ \iota_i) = f_i$. Así se tiene que P_i es proyectivo para cada $i \in I$.

■

Proposición 1.7.5. *Si P es Λ-módulo proyectivo y*

$$N' \xrightarrow{\varphi'} N \xrightarrow{\varphi} N''$$

es una sucesión exacta, entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \xrightarrow{\varphi'_*} Hom_\Lambda(P, N) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Por la Proposicion 1.5.2 se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \xrightarrow{\varphi'_*} Hom_\Lambda(P, N) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_\Lambda(P, N'')$$

es exacta. Solo falta ver que φ_* es epimorfismo. Sea $f \in Hom_\Lambda(P, N'')$, como φ es un epimorfismo se tiene que existe $g : P \longrightarrow N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de modo que $f = \varphi \circ g = \varphi_*(g)$. Por lo tanto φ_* es epimorfismo. ■

Teorema 1.7.6. *Sea P un Λ-módulo. Entonces los siguientes postulados son equivalentes:*

1. *P es proyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ se escinde.*
3. *P es un sumando directo de un Λ-módulo libre.*
4. *Para cualquier sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$, la suceción inducida es exacta:*

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

Demostración. (1 $\Rightarrow$ 2). Supongamos que P es proyectivo. Entonces, para todo epimorfismo $g : N \longrightarrow P$ y $1_P : P \longrightarrow P$, entonces existe una $h : P \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N' \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $1_P = g \circ h$. Por lo tanto, la sucesión se escinde.

(2 ⇒ 3). Del Teorema 1.6.5 P es isomorfo al cociente de un Λ-módulo libre L y existe un epimorfismo $g : L \longrightarrow P$, de aqui se tiene que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker } g \longrightarrow L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

Por hipotesis existe $h : P \longrightarrow L$ tal que $1_P = g \circ h$, por la Proposición 1.2.9, h es un monomorfismo, y por el Corolario 1.4.9 tenemos que $L = \mathfrak{I}\ h \oplus \text{Ker } g$. Por lo tanto, P es isomorfo al sumando directo imh de el Λ-módulo libre L.

(3 ⇒ 1). Sabemos que todo Λ-módulo libre es un Λ-módulo proyectivo y como todo sumando directo de un Λ-módulo proyectivo es un Λ-módulo proyectivo, se tiene que P es proyectivo.

(1 ⇒ 4). Como P es un Λ-módulo proyectivo, por la Proposición 1.7.5 tenemos que

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

De 4 a 1. Se obtiene directo de la Definición 1.7.1. ■

1.8. Módulos Inyectivos

En esta sección estudaremos a los módulos inyectivos.

Definición 1.8.1. *Un Λ-módulo I se llamará* ***inyectivo*** *si, para cada homomorfismo $f : M' \longrightarrow I$ y para cada monomorfismo $\varphi' : M' \longrightarrow M$ de Λ-módulo, existe un homomorfismo $h : M \longrightarrow I$ tal que $h \circ \varphi = f$. En otras palabras hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & & I
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.8.2. *Si $I = \bigoplus_{j \in J} I_j$ es un Λ-módulo inyectivo, entonces I_j es inyectivo para $j \in J$.*

Demostración.

Supongamos que $I = \bigoplus_{j \in J} I_j$ es un Λ-módulo inyectivo. Veamos que I_j es inyectivo. Sea $f_j : M' \longrightarrow I_j$ un homomorfismo y $\varphi : M' \longrightarrow M$ un monomomorfismo. Sea $\iota_j : I_j \longrightarrow I$ la inclusión y $\rho_j : I \longrightarrow I_j$ la proyección. Como I es inyectivo existe un homomorfismo $\kappa : M \longrightarrow I$ tal que $\kappa \circ \varphi = \iota_j \circ f$. De tal manera que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_j"] & M \arrow[d, dashed, "\kappa"] \arrow[dr, "h"] & \\
 & I_j \arrow[r, "\iota_j"] & I \arrow[r, "\rho_j"] & I_j
\end{tikzcd}$$

Definamos a $h_j = \rho_j \circ \kappa : M \longrightarrow I_j$. Como $\rho_j \circ \iota_j = 1_{I_j}, h \circ \varphi = \rho_j \circ \kappa_j \circ \varphi = \rho_j \circ \iota_j \circ f_j = f_j$. Por lo tanto I_j es inyectivo, esto se extiende para todo $j \in J$. ■

Nota. La suma directa de Λ-módulos inyectivos o siempre es un Λ-módulo inyectivo.

Proposición 1.8.3. *Si I es un Λ-módulo inyectivo y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi'} M \xrightarrow{\varphi} M'' \longrightarrow 0$$

es una suceción exacta, entonces la suceción inducida

$$0 \longleftarrow Hom_\Lambda(M', I) \xleftarrow[\varphi'^*]{} Hom_\Lambda(M, I) \xleftarrow[\varphi'^*]{} Hom_\Lambda(M'', I) \longleftarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Veamos que φ'^* es sobreyectiva. Sea $f \in Hom_\Lambda(M', I)$, como I es un Λ-módulo inyectivo existe $h : M' \longrightarrow I$ tal que $f = h \circ \varphi' = \varphi'^*(h)$. Con lo anterior y la Proposición 1.5.3 se obtiene el resultado querido. ■

Proposición 1.8.4. *Sea $\{I_j\}_{j \in J}$ una familia de Λ-módulos inyectivos, entonces el producto directo $I = \prod_{j \in J} I_j$ es inyectivo.*

Demostración. Sea $f : M' \longrightarrow I$ un homomorfismo, $\varphi : M' \longrightarrow M$ un monomomorfismo, $\iota_j : I_j \longrightarrow I$ la inclusión y $\rho_j : I \longrightarrow I_j$ es la proyección. Como I_j es inyectivo para cada $j \in J$, se tiene que existe $h_j : M \longrightarrow I_j$ tal que $h_j \circ \varphi = \rho_j \circ f$, entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, dashed, "h_j"] \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & I \arrow[r, "\rho_j"] & I_j \arrow[r, "\iota_j"] & I
\end{tikzcd}$$

Definamos $h : M \longrightarrow I$ como $\{\iota_j \circ h_j\}_{j \in J}$. Entonces

$$\begin{aligned}
h \circ \varphi &= \{\iota_j \circ \rho_j\}_{j \in J} \circ f \\
\{\iota_j \circ \rho_j \circ f\}_{j \in J} & \\
\{f\}_j &= f
\end{aligned}$$

entonces I es inyectivo. ■

Teorema 1.8.5. *Sea I un Λ-módulo. Entonces los siguientes postulados son equivalentes:*

1. *I es inyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ se escinde.*
3. *I es isomorfo a un sumando directo de un Λ-módulo inyectivo.*
4. *Para cualquier sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, la siguiente sucesión inducida es exacta:*

$$0 \longleftarrow Hom_\Lambda(M', I) \longleftarrow Hom_\Lambda(M, I) \longleftarrow Hom_\Lambda(M', I'') \longleftarrow 0$$

Demostración. Es análoga a la demostración del Teorema 1.7.6, salvo de 2 a 3, donde se admite que todo Λ-módulo es isomorfo a un submódulo de un Λ-módulo inyectivo, esto se puede ver en [4] pág. 93. ■

1.9. Producto Tensorial de Λ-módulos

Es muy importante el producto tensorial ya que al igual que Hom, este es un funtor que utilizaremos mas adelante, al además que veremos que es covariante.

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Sean M, N y T Λ-módulos.

Definición 1.9.1. *Una función $f : M \times N \longrightarrow T$ es bilineal si cumple las siguientes propiedades: Para cada $x,\ x_1,\ x_2 \in M;\ y,\ y_1,\ y_2 \in N;\ \lambda \in \Lambda$*

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
2. $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$
3. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y)$

Definición 1.9.2. *El producto tensorial de M y N es la pareja (T,f), donde $f : M \times N \longrightarrow T$ es bilineal, tal que*

1. *$f(M \times N)$ genera a T*
2. *Si U es un Λ-módulo y $g : M \times N \longrightarrow U$ es bilineal, entonces existe un homomorfismo único de Λ-módulos $h : T \longrightarrow U$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, dashed, "h"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

el producto tensorial de M y N se denotará con $M \otimes_\Lambda N$.

Teorema 1.9.3. *El producto tensorial de dos Λ-módulos M y N es único.*

Demostración.

Sean (T, f) y (T', f) dos productos tensoriales de M y N. Mostraremos que existe un isomorfismo entre T y T'. Como T por ser producto tensorial de M y N existe un homomorfismo $h : T \longrightarrow T'$ tal que $f' = h \circ f$. Análogamente, como T' es producto tensorial de M y N, existe $h' : T' \longrightarrow T$ tal que $f = h' \circ f'$. Como se muestra en los siguientes dos diagramas.

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dd, bend left=60, "1_T"] \\
M \times N \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"] & T' \arrow[d, dashed, "h'"] \\
& T
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& T' \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dd, bend left, "1_{T'}"] \\
M \times N \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & T' \arrow[d, dashed, "h"] \\
& T'
\end{tikzcd}$$

Por ser T un producto tensorial, y como 1_T es tal que $1_T \circ f = f$, se tiene que $(h' \circ h) \circ f = f$, por la unicidad de la identidad se sigue que $h' \circ h = 1_T$. Del mismo modo tenemos que $h \circ h' = 1_{T'}$, entonces h es un isomorfismo. Por lo tanto el producto tensorial es único ■

Dados dos Λ-módulos M y N, construiremos un nuevo Λ-módulo T con las propiedades de que las funciones bilineales $f : M \times N \longrightarrow T$ estén en correspondencia uno a uno con los homomorfismos (funcionales lineales) $T \longrightarrow U$ para todo Λ-módulo U.

Teorema 1.9.4. *Dados dos Λ-módulos M y N, siempre es posible contruir su producto tensorial.*

Demostración. Sean M y N dos Λ-módulos, y sea L el Λ-módulo libre con base $M \times N$, es decir, los elementos de L son combinaciones lineales de parejas (x, y) con $x \in M$ y $y \in N$, con coeficientes en Λ. Sea K el submódulo de L generado por los elementos de la forma:

1. $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$
2. $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$
3. $(\lambda x, y) - (x, \lambda y)$

con $x, x' \in M, y, y' \in N, \lambda \in \Lambda$.

Tendremos que $L/K = M \otimes_\Lambda N$, donde $x \otimes_\Lambda y$ denotará la clase lateral $(x, y) + K$. Para ver que L/K es el producto tensorial de M y N se tiene que K es un submódulo de M, entonces $M \otimes_\Lambda N$ es un Λ-módulo. Sea el homomorfismo $f : M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$, dado por $f(x, y) = x \otimes_\Lambda y$, demostraremos que f es bilineal.

Sean $(x, y_1), (x, y_2), (x, y_1 + y_2) \in M \times N$, se tiene que

$$f(x, y_1 + y_2) = x \otimes_\Lambda (y_1 + y_2) = (x, y_1 + y_2) + K$$

$$f(x, y_1) = x \otimes_\Lambda y_1 = (x, y_1) + K$$

$$f(x, y_2) = x \otimes_\Lambda y_2 = (x, y_2) + K$$

De aqui la pregunta es, ¿$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$?, lo cual es equivalente de demostrar que $f(x, y_1 + y_2) - f(x, y_1) - f(x, y_2) = 0$.

$$f(x,y_1+y_2)-f(x,y_1)-f(x,y_2) = ((x,y_1+y_2)+K)-((x,y_1)+K)-((x,y_2)+K)$$
$$= (x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2)+K$$
$$= 0+K = 0$$

Análogamente se demuestra que $f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y)+f(x_2,y)$, nos falta verificar que $\lambda f(x,y) = f(\lambda x,y) = f(x,\lambda y)$. Sean $(x,y) \in N$, y $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\lambda f(x,y) = \lambda(x \otimes_\Lambda y) = \lambda(x,y)+K$$

$$f(\lambda x,y) = (\lambda x \otimes_\Lambda y) = (\lambda x,y)+K$$

$$f(x,\lambda y) = \qquad (x \otimes_\Lambda \lambda y) = (x,\lambda y)+K$$

tengamos en cuenta que $\lambda(x,y)$, es equivalente a sumar λ veces (x,y), de igual manera con λx. Entonces

$$\begin{aligned}
\lambda f(x,y)-f(\lambda x,y) &= \lambda(x \otimes_\Lambda y)-\lambda x \otimes_\Lambda y \\
&= (\lambda(x,y)+N)-((\lambda x,y)+N) \\
&= (\underbrace{(x,y)+\ldots+(x,y)}_{\lambda \text{ veces}}+N) \\
&- ((\underbrace{x}_{\lambda \text{ veces}}+,y)+N) \\
&= (\underbrace{(x,y)+\ldots+(x,y)}_{\lambda \text{ veces}}+N) \\
&- (\underbrace{(x,y)+\ldots+(x,y)}_{\lambda \text{ veces}}+N) \\
&= 0+N
\end{aligned}$$

con esto tenemo que $\lambda f(x,y) = f(\lambda x,y)$, también vemos que

$$\begin{aligned}
f(\lambda x,y)-f(x,\lambda y) &= \lambda x \otimes_\Lambda y - x \otimes_\Lambda \lambda y \\
&= ((\lambda x,y)+N)-((x,\lambda y)+N) \\
&= (\lambda x,y)-(x,\lambda y)+N \\
&= 0+N
\end{aligned}$$

por lo tanto $\lambda f(x,y) = f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y)$.

Veamos ahora que $M \otimes_\Lambda N$ es un producto tensorial. Para ello, sea U un Λ-módulo cualquiera, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "g"'] & L \arrow[d, dashed, "h'"] \\ & U \end{tikzcd}$$

donde g es bilineal. Como L es libre con base $M \times N$, existe el homomorfismo $h' : L \longrightarrow U$ tal que $g = h' \circ f$. Veamos que h' se anula en los elementos que pertenecen a K. Sea $(x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2) \in K$ entonces

$$\begin{aligned} h' \circ \iota((x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)) &= h' \circ \iota(x, y_1 + y_2) - h' \circ \iota(x, y_1) - h' \circ \iota(x, y_2) \\ &= g(x, y_1 + y_2) - g(x, y_1) - g(x, y_2) \\ &= g(x, y_1) + g(x, y_2) - g(x, y_1) - g(x, y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2) \in \text{Ker} \;\; h'$. De forma analoga los elementos de la forma $(x +_1 +x_2, y)$ y $(\lambda x, y) - (x, \lambda y)$ también están en el Ker h' por el Primer Teorema de Isomorfismo se tiene que existe un homomorfismo $h : L/K \longrightarrow U$ tal que el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "g"'] & L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "h'"] & L/K \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Para ver que h es única supongamos que h'' hace conmutar el diagrama, entonces

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "g"'] & L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "h'"] & L/K \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "g"'] & L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "h'"] & L/K \arrow[dl, dashed, "h''"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos que para $(x, y) \in M \times N$, $h(f(x, y)) = g(x, y)$ y $h''(f(x, y)) = g(x, y)$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{gathered} h(f(x,y)) = h''(f(x,y)) \\ h(\rho(\iota(x,y))) = h''(\rho(\iota(x,y))) \\ h(\rho(x,y)) = h''(\rho(x,y)) \\ h((x,y) + K) = h''((x,y) + K) \end{gathered}$$

Por lo tanto $h = h''$ t concluimos que h es única.

■

Nota. Vemos que $f(M \times N)$ genera a $M \otimes_\Lambda N$, todo elemento $t \in M \otimes_\Lambda N$ puede escribirse de la forma $t = \sum_{i \in I} \lambda_i(x_i) \otimes y_i, \lambda_i \in \Lambda$. Esta expresión no es única pues se pueden escoger diferentes representantes de una clase lateral. De ahora en adelante los elementos de $M \otimes_\Lambda N$ los excribiremos de la forma $x \otimes y$.

Sean $\varphi : M' \longrightarrow M$ y $\psi : N' \longrightarrow N$ homomorfismos de Λ-módulos y $\varphi \times \psi : M' \times N' \longrightarrow M \times N$ dado por $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Sean $f : M' \times N' \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N'$ y $g : M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$ las funciones bilineales respectivas. Consideremos la funcón bilineal $g \circ (\varphi \times \psi) : M' \times N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$. Como $M' \otimes_\Lambda N'$ es un producto tensorial, existe un homomorfismo único $h : M' \otimes_\Lambda N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$, que denotaremos con $\varphi \otimes \psi$ tal que el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{tikzcd}
M' \times N' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\times\psi"] & M' \otimes_\Lambda N' \arrow[d, dashed, "\varphi\otimes_\Lambda\psi"] \\
M \times N \arrow[r, "g"] & M \otimes_\Lambda N
\end{tikzcd}$$

Es decir $(\varphi \otimes_\Lambda \psi) \circ f(x, y) = g \circ (\varphi \times_\Lambda \psi)$, con $(x, y) \in M' \times N'$. Luego $(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$, con $x \in M', y \in N'$.

Proposición 1.9.5. *1. Sean M y N dos Λ-módulos con $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$, entonces*

$$M \otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i)$$

2. Sean M y N dos Λ-módulos y $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_\Lambda N \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_\Lambda N)$$

Demostración.

1. Sea $f : M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \longrightarrow M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i)$ bilineal. Definamos $g : M \times (\bigotimes_{i\in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i)$ como $g(x, (y_i)) = (x \otimes y_i)$. Veamos que g es bilineal, sea $x_1, x_2 \in M$ y $(y_i) \in \bigoplus_{i\in I} N_i$, entonces

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2, (y_i)) &= (x_1 + x_2) \otimes (y_i) = x_1 \otimes (y_i) + x_2 \otimes (y_i) \\ &= g(x_1 \otimes (y_i)) + g(x_2 \otimes (y_i)) \end{aligned}$$

Sea $(y_i), (y_i') \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ y $x \in M$, entonces

$$\begin{aligned} g(x, (y_i) + (y_i')) &= x \otimes (y_i) + (y_i') = x \otimes (y_i) + x \otimes (y_i') \\ &= g(x, (y_i)) + g(x, (y_i')) \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \Lambda, x \in M, (y_i) \in \bigoplus_{i\in I} N_i$

$$\begin{aligned} g(\lambda x, y_i) &= \lambda x \otimes y_i = x \otimes \lambda y_i \\ &= g(x, \lambda y_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto g es bilineal, lo cual implica que existe el homomorfismo $h: M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i)$ único tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i) \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi_i : M \otimes_\Lambda N_i :\longrightarrow M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i)$ dada por $x \otimes y_i \longmapsto x \otimes \iota_{N_i}(y_i)$ donde $\iota_{N_i} : N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$ es la inclusión. Luego por 4.5, existe un homomorfismo único

$$\varphi : \bigoplus i \in I(M \otimes_\Lambda N_i) \longrightarrow M \otimes (\bigoplus_{i\in I} N_i)$$

tal que si $\iota_{M\otimes_\Lambda N_i} : M\otimes_\Lambda \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i)$ es la inclusión, entonces $\varphi_i = \varphi \circ \iota_{M\otimes_\Lambda N_i}$, es decir que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in I$

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i) \\ M \otimes_\Lambda N_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, "\iota_{M\otimes_\Lambda N_i}"] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Juntando los dos diagramas tenemos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_\Lambda (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[d, shift right, "h"'] & M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "g"] \\ M \otimes_\Lambda N_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, "\iota_{M\otimes_\Lambda N_i}"] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_\Lambda N_i) \arrow[u, shift right, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De está manera se tiene que $\varphi \circ h = 1_{M\otimes_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} N_i)}$ y $h \circ \varphi = 1_{\bigoplus_{i\in I}(M\otimes_\Lambda N_i)}$.

2. De manera análoga se realiza (2).

■

Proposición 1.9.6. *1. Sea*

$$N' \overset{\psi'}{\rightarrowtail} N \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} N'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de Λ-módulos y M un Λ-módulo, entonces

$$M \otimes_\Lambda N' \xrightarrow{1_M\otimes\psi'} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_M\otimes\psi} M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

2. Sea

$$M' \overset{\varphi'}{\rightarrowtail} M \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de Λ-módulos y N un Λ-módulo, entonces

$$M' \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi'\otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi\otimes 1_N} M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Demostración.

1. Veamos que $1_N \otimes \psi$ es un epimorfismo. Sea $x \otimes y \in M \otimes_\Lambda N''$ con $x \in M$ y $y \in M''$. Como ψ es epimorfismo existe $y \in N$ tal que $\psi(y) = y''$, entonces

$$\begin{aligned} (1_M \otimes \psi)(x \otimes y) &= 1_M(x) \otimes \psi(y) \\ &= x \otimes y'' \end{aligned}$$

Veamos que Im $(1_M \otimes \psi') =$ Ker $(1_M \otimes \psi)$. Sea $x \otimes y' \in M \otimes_\Lambda N'$, de modo que

$$\begin{aligned} (1_M \otimes \psi) \circ (1_M \otimes \psi')(x \otimes y') &= (1_M \otimes \psi \circ \psi')(x \otimes y) \\ &= 1_M(x) \otimes \psi(\psi'(y')) \\ &= x \otimes 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

con esto tenemos Im $(1_M \otimes \psi') \subset$ Ker $(1_M \otimes \psi)$, nos falta ver que Im $(1_M \otimes \psi') \supset$ Ker $(1_M \otimes \psi)$. Sea $x \otimes y \in$ Ker $(1_M \otimes \psi)$, entonces

$$\begin{aligned} (1_M \otimes \psi)(x \otimes y) &= 1_M(x) \otimes \psi(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de aqui $\psi(y) = 0$ ya que 1_M es la identidad y suponemos que $x \neq 0$. Por exactitud de la cadena

$$M' \xrightarrow{\varphi'} M \xrightarrow{\varphi} M'' \longrightarrow 0$$

existe $y' \in N'$ tal que $\psi'(y') = y$. Con esto para $x \otimes y' \in M \otimes_\Lambda N'$, se tiene que

$$\begin{aligned} (1_M \otimes \psi')(x \otimes y') &= 1_M(x) \otimes \psi'(y') \\ &= x \otimes y \end{aligned}$$

Por lo tanto Im $(1_M \otimes \psi') =$ Ker $(1_M \otimes \psi)$, y la sucesión

$$M' \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi' \otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi \otimes 1_N} M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es exacta.

■

Proposición 1.9.7. *Sean M un Λ-módulo, entonces*

$$\Lambda \otimes_\Lambda M \cong M$$

Definamos $\varphi : \Lambda \otimes_\Lambda M \cong M$ mediante $\varphi(\lambda \otimes g) = \lambda g$. Tenemos que este es un homomorfismo bien definido, y ademas es facil comprobar que es un isomorfismo.

Capítulo 2

Categorías y Funtores

La teoría de categorías fue introducida por Samuel Eilenberg y Saunders ,MacLane en 1942, en una importante transición de la homología a la Teorúa de la homología. Este estudio trata de axiomatizar d manera abstrata diversas estructuras como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos. Dichas estructuras son los conjuntos, espacios topológicos, grupos, etc. Está teoría siver para simplificar algunos resultados de diversas áreas, y así ampliar su estudio.

2.1. Categorías y Funtores

Definición 2.1.1. *Una **categoría** $\boldsymbol{C}$ esta estructurada por:*

1. *Una clase de **objetos** $A, B, C, ...$ que están en la categoría, que se denota por $\boldsymbol{C_0}$.*

2. *Para cada par de objetos $A, B \in \boldsymbol{C_0}$, un conjunto $\boldsymbol{C_1}(A, B)$ cuyos elementos se llaman **morfismos** f de A en B, denotados con $f : A \longrightarrow B$. En general el conjunto con los morfismos de la categoría lo denotamos con $\boldsymbol{C}_1$.*

3. *Para cada terna de objetos $A, B, C \in \boldsymbol{C_0}$, una ley de composición $\boldsymbol{C_1}(A, B) \times \boldsymbol{C_1}(B, C) \longrightarrow \boldsymbol{C_1}(A, C)$ que satisfacen los siguientes axiomas:*

   a) *$\boldsymbol{C_1}(A, B) = \boldsymbol{C_1}(D, E)$ si, sólo si, $A = D, B = E$.*
   b) *Si $f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*
   c) *Para todo objeto $A \in \boldsymbol{C_1}$ existe un morfismo $1_A : A \longrightarrow A$ tal que para cualquier $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow A$, se tiene que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.*

Al morfismo 1_A se llamará **morfismo identidad**. Notemos que hablamos de clases de objetos y no hablamos de conjuntos, ya que estaría mal definido según la teoría usual de conjuntos. Esto es, si una categoría **C** donde su clase de objetos son conjuntos que contienen a todos los conjuntos y no a si mismos, se tendría que uno de los conjuntos contendría a la categoría, lo cual no puede ser posible, es como la paradoja de Russel. Sin embargo, según los axiomas de clase de Neumann-Bernays-Gödel para teoría de conjuntos, es posible hablar de clases de objetos.

En $\mathrm{C}_1(A, B)$ diremos que A es el **dominio** y B el **rango**. La composición de dos morfismos f y g, denotada por $f \circ g$, estará definida si, y sólo si, el rango de f es igual al domino de g. Diremos que un morfismo $f \in \mathbf{C_1}(A,B)$ es **invertible o isomorfismo** si existe un morfismo $g \in \mathbf{C_1}(B,A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Entonces diremos que los objetos A y B son isomorfos y se escribe $A \cong B$.

Ejemplo 2.1.2. **Conj** denotará la categoría de los conjuntos. Sus objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones de un conjunto a otro, donde se tiene lo siguiente:

1. Si $\mathbf{Conj_1}(A,B) = \mathbf{Conj_1}(C,D)$ entonces para cada $f \in \mathbf{Conj_1}(A,B)$ existe $g \in \mathbf{Conj_1}(C,D)$ tal que $f = g$, de aqui como las funciones son iguales deben tener el mismo dominio y el mismo rango, por lo tanto $\mathbf{Conj_1}(A,B) = \mathbf{Conj_1}(C,D)$, lo cual es $A = C$ y $B = D$.

   Ahora si se tiene que $A = C$ y $B = D$, sustituyendo se tiene que $\mathbf{Conj_1}(A,B) = \mathbf{Conj_1}(C,D)$.

2. Sean $f \in \mathbf{Conj_1}(A,B)$, $g \in \mathbf{Conj_1}(B,C)$, $h \in \mathbf{Conj_1}(C,D)$, entonces como la composición de funciones está bien definida se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

3. Sea $A \in \mathbf{Conj_0}$ entonces existe una función $1_A \in \mathbf{Conj_1}(A,A)$ tal que para todo elemento $a \in A$ se tiene $1_N(a) = (a)$.

Ejemplo 2.1.3. **Top** denotará la categoía de los espacios topológicos. Sus objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas, los cuales cumplen con las mismas propiedades que en la categoría de los conjuntos **Conj**, pero con funciones continuas.

Ejemplo 2.1.4. Simultaneamente, denotaremos por **Gr**, **Ab**, **An**, $\mathbf{An_1}$, $_{\mathbf{\Lambda}}$, **Mod** y $\mathbf{EV_k}$ las categorías de grupos abelianos, anillos, anillos con elementos de identidad y homomorfismos que preservan la identidad, Λ-módulos y espacios vectoriales sobre un camplo k con morfismos los homomorfismos correspondientes, respectivamente, los cuales cumplen con las mismas propiedades que en la categoría de los conjuntos **Conj**, nada más que ahora en vez de ser funciones, son morfismos.

Ejemplo 2.1.5. La categoría de **Λ-módulos graduados** la cual denotaremos como $\mathbf{Mod}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$, cuyos objetos son familias de Λ-módulos $M = \{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, con morfismos $\rho : M \longrightarrow N$ de grado j entre objetos M y N dados como familias de morfismos

$$\{\rho_i : M_i \longrightarrow N_{i+j}\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

. Solo hay que ver que se cumplen los axiomas de la composición. Sea $M, N, M', N' \in \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 0}^{\mathbb{Z}}$

1. Si se tiene que $\mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M,N) = \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M',N')$ para cada homomorfismo $f \in \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M,N)$ de grado j existe un morfismo $g \in \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M',N')$ tal que $f = g$, entonces g debe de ser de grado j y el dominio e imagen de g son iguales a los de f.
   Si se tiene que $M = M'$ y $N = N'$, de inmediato se concluye que $\mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M,N) = \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M',N')$.

2. Sean $f \in \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(M,N)$ un homomorfismo de grado j, $g \in \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(N,N')$ un homomorfismo de grado j', $h \in \mathbf{Mod}_{\Lambda\ 1}^{\mathbb{Z}}(N',N'')$ un homomorfismo de grado j'', se tiene que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, donde no hay problema con los subindices ya que la suma es asociativa.

3. Definimos para cada $M \in \mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda\ 0}$ la familia de homomorfismos 1_M de grado 0 como

$$\{1_{M_i} : M_i \longrightarrow M_i\}$$

donde 1_{M_i} es el morfismo identidad para el Λ-módulo M_i.

Ejemplo 2.1.6. Sea X un espacio topológico, definimos a la categoría de subconjuntos del espacio topológico $\mathbf{O}(X)$, donde los objetos son todos los subconjuntos de X, y los morfismos son inclusiones de un subconjunto abierto de X a otro subconjunto abierto de X. Se tiene que es una categoría por el mismo argumento de la categoría **Conj**, con la diferencia que no todo $\mathbf{O}(X)(A,B)_1$ con $A, B \in \mathbf{O}(X)_0$, diferente del vacio, es decir, puede no existir un morfismo del objeto A al obteto B.

Definición 2.1.7. *Sean* $\boldsymbol{C}$ *y* $\boldsymbol{C'}$ *dos categorías. Un **funtor covariante*** $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C'}$ *es una regla que asocia*

1. *a cada objeto* $A \in \boldsymbol{C}$*,* $A' \in \boldsymbol{C'}$
2. *a cada morfismo* $(f : A \longrightarrow B) \in \boldsymbol{C}(A,B)$*, existe un morfismo*

$$(F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)) \in \boldsymbol{C'(F(A),\ F(B))}$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Definición 2.1.8. *Sean* $\boldsymbol{C}$ *y* $\boldsymbol{C'}$ *dos categorías. Un **funtor contravariante*** $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C'}$ *es una regla que asocia*

1. *a cada objeto* $A \in \boldsymbol{C_0}$*, un objeto* $A' \in \boldsymbol{C'_0}$
2. *a cada morfismo* $(f : A \longrightarrow B) \in \boldsymbol{C_1}(A,B)$*, un morfismo*

$$(F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)) \in \boldsymbol{C'(F(B),\ F(A))}$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$
b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Ejemplo 2.1.9. Definamos un funtor $F : \mathbf{Conj} \longrightarrow {}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ tal que cada conjunto X que le asocie el Λ-módulo libre $F(X)$ con base X. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre conjuntos entonces, como $F(X)$ es un Λ-módulo libre, f se extiende a un homomorfismo único $F(X) \longrightarrow F(Y)$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[d, dashed, "F(g)"] \\ Y \arrow[r, "F"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto es un funtor covariante.

2.1.0.1. Ejemplos de funtores

Retomaremos la los homomorfismo inducidos que se utilizaron en el Capítulo 1 sección 5, sea $\psi : N' \longrightarrow N$ un homomorfismo de Λ-módulos y f un elemento de $Hom_\Lambda(M, N')$.

$$\psi_* = Hom_\Lambda(M, \psi) : Hom_\Lambda(M, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

dada por $\psi_*(f) = \psi \circ f$, En otra palabras hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi_*(f)=\psi\circ f"'] & N' \arrow[d, "\psi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

donde en función del lenguaje categórico se tiene que $\psi_{ast} = Hom_\Lambda(M, \psi)$.

Proposición 2.1.10. *Sean $\psi' : N' \longrightarrow N$ y $\psi : N \longrightarrow N''$ homomorfismos de Λ-módulos y M un Λ-módulo.*

1. *si $1_N : N \longrightarrow N$ es la identidad, entonces*

$$1_{N_*} : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

es la identidad.

2. $(\psi \circ \psi')_* = \psi_* \circ \psi'_*$.

Demostración.

1. Sea $g \in Hom_\Lambda(M, N)$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_{N_*}(g)=1_N\circ g"'] & N \arrow[d, "1_N"] \\ & N \end{tikzcd}$$

De aquí se tiene que 1_{N_*} es el homomorfismo inducido por 1_N, solo tenemos que ver que es la identidad en $Hom_\Lambda(M, N)$, en este caso tomamos una g arbitraria, con esto tenemos que $1_{N_*}(g) = 1_N \circ g = g$. Por lo tanto 1_{N_*} es la identidad.

2. Para la segunda parte de la demostración consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N') \arrow[d, "\psi'"] \arrow[dd, bend left, "\psi\circ\psi'"] & \in & Hom_\Lambda(M, N') \arrow[d, "\psi'_*"] \arrow[dd, bend left, "(\psi\circ\psi')_*"] \\ (M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & N) \arrow[d, "\psi"] & \in & Hom_\Lambda(M, N) \arrow[d, "\psi_*"] \\ (M \arrow[r, "h"] & N'') & \in & Hom_\Lambda(M, N) \end{tikzcd}$$

Se tiene que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi_*(f)=\psi\circ f"'] & N' \arrow[d, "\psi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

De aquí se tiene que $\psi'_*(f) = \psi' \circ f = g$. También tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\psi'_*(f)=\psi'\circ f"'] & N \arrow[d, "\psi'"] \\ & N'' \end{tikzcd}$$

Con esto tenemos que $\psi_*(g) = \psi \circ g = h$. y concluimos que $(\psi_* \circ \psi'_*)(f) = \psi_*(\psi'_*)(f) = \psi_*(g) = h$. Ahora consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "(\psi\circ\psi')_*(f)=(\psi\circ\psi')\circ f"'] & N' \arrow[d, "\psi\circ\psi'"] \\ & N \end{tikzcd}$$

De igual modo se tiene que $(\psi \circ \psi')_*(f) = (\psi \circ \psi') \circ f = \psi(\psi'(f)) = \psi(g) = h$. Por lo tanto $(\psi \circ \psi')_* = \psi_* \circ \psi'_*$.

■

Sea $\varphi : M' \longrightarrow M$ un homomorfismo de Λ-ódulos y $g \in Hom_\Lambda(M, N)$. Su morfismo asociado es

$$\varphi^* = Hom_\Lambda(\varphi, N) : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M', N),$$

dada por $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$. φ^* es un homomorfismo llamado **homomorfismo inducido por** φ. En otras palabras hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(g)=g\circ\varphi"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

donde en lenguaje categórico $\varphi^{ast} = Hom_\Lambda(\varphi, N)$.

Proposición 2.1.11. *Sean $\varphi' : M' \longrightarrow M$ y $\varphi : M \longrightarrow M''$ homomorfismo de Λ-módulos y N un Λ- módulo.*

1. *Si $1_M : M \longrightarrow M$ es la identidad, entonces*

$$1_M^* : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

es la identidad.

2. $(\varphi \circ \varphi')^* = \varphi'^* \circ \varphi^*$.

Demostración.

1. Sea $g \in Hom_\Lambda(M,N)$ y $1_M : M \longrightarrow M$ la identidad. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "1_M"'] \arrow[dr, "1_{M^*}(g)=1_M\circ g"] & \\
M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

Donde 1_{M^*} es el homomorfismo inducido por 1_M. Se tiene que $1_{M_*}(g) = 1_M \circ g = g$. Por lo tanto 1_{M^*} es la identidad de $Hom_\Lambda(M,N)$

2. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dd, bend right, "\varphi\circ\varphi'"'] & N) \arrow[d, equal] & \in & Hom_\Lambda(M',N) \\
(M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & N) \arrow[d, equal] & \in & Hom_\Lambda(M,N) \arrow[u, "\varphi'^*"] \\
(M'' \arrow[r, "h"] & N) & \in & Hom_\Lambda(M,N) \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[uu, bend right, "(\varphi\circ\varphi')^*"']
\end{tikzcd}$$

De aqui tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi'^*(h)=h\circ\varphi'"] & \\
M'' \arrow[r, "h"] & N
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi'^*(h) = h \circ \varphi = g$, también

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi'^*(g)=g\circ\varphi'"] & \\
M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

tenemos que $\varphi'^*(g) = g \circ \varphi' = f$, entonces $(\varphi^* \circ \varphi'^*)(h) = \varphi^*(\varphi'^*)(h) = \varphi^*(g) = h$. Ahora veamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\varphi\circ\varphi'"'] \arrow[dr, "(\varphi\circ\varphi')^*(h)=h\circ(\varphi\circ\varphi')"] & \\
M'' \arrow[r, "h"] & N
\end{tikzcd}$$

Por último, $(\varphi \circ \varphi')^*(h) = h \circ (\varphi \circ \varphi') = (h \circ \varphi) \circ \varphi' = g \circ \varphi' = f$. Por lo tanto $(\varphi' \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \varphi'^*$.

■

Ejemplo 2.1.12. Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Definiremos

$$Hom_\Lambda(M,-): {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$$

mediante la regla

$$N \longmapsto Hom_\Lambda(M,N).$$

Por la Propoición 2.1.10 se tiene que $Hom_\Lambda(M,-)$ es un funtor covariante.

Ejemplo 2.1.13. Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Definiremos

$$Hom_\Lambda(-,N): {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$$

mediante la regla

$$M \longmapsto Hom_\Lambda(M,N).$$

Por la Proposición 2.1.11 se tiene que es $Hom_\Lambda(-,N)$ un funtor contravariante

Proposición 2.1.14. *Sean $\psi : N' \longrightarrow N$ y $\psi' : N \longrightarrow N''$ homomorfismos de Λ-módulos. Entonces*

1. *Si $1_N : M \longrightarrow M$ y $1_N : N \longrightarrow N$ son homomorfismos identidad entonces $1_M \otimes 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$.*
2. *$(1_M \otimes \psi') \circ (1_M \otimes \psi) = (1_M \otimes \psi' \circ \psi)$.*

Demostración.

1. Por lo que tenemos anteriormente podemos formar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_M \times 1_N"] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, dashed, "1_M \otimes 1_N"] \\
M \times N \arrow[r, "f"] & M \otimes_\Lambda N
\end{tikzcd}$$

Donde f es la función bilineal y $(1_M \otimes 1_N) \circ f(x,y) = f \circ (1_M \times 1_N)(x,y)$, como $1_M \times 1_N$ es la identidad en $M \times N$ se tiene que $(1_M \otimes 1_N) \circ f(x,y) = f(x,y)$, por lo tanto $1_M \otimes 1_N$ es la identidad en $M \otimes_\Lambda N$.

2. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "\iota_{N'}"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dd, bend right, "\psi' \times \psi"'] & M \times N' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_M \circ \psi"] & M \otimes_\Lambda N' \arrow[d, "1_M \otimes \psi"'] \arrow[dd, bend left, "1_M \otimes (\psi' \circ \psi)"] \\
N \arrow[r, "\iota_N"] \arrow[d, "\psi'"] & M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_M \times \psi'"] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, "1_M \otimes \psi'"'] \\
N'' \arrow[r, "\iota_{N''}"] & M \times N'' \arrow[r, "f''"] & M \otimes_\Lambda N''
\end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos que el diagrama es conmutativo, por lo tanto $(1_M \otimes \psi') \circ (1_M \otimes \psi) = 1_M \otimes (\psi' \circ \psi)$.

■

Proposición 2.1.15. *Sean $\varphi : M \longrightarrow M$ y $\varphi' : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de Λ-módulos . Entonces $(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes 1_N$*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "\iota_{M'}"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi' \circ \varphi"'] & M' \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\varphi \times 1_N"] & M' \otimes_\Lambda N \arrow[d, "\varphi \otimes 1_N"'] \arrow[dd, bend left=60, "(\varphi' \circ \varphi) \otimes 1_N"] \\
M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi' \circ 1_N"] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, "\varphi' \otimes 1_N"'] \\
M'' \arrow[r, "\iota_{M''}"] & M'' \times N \arrow[r, "g''"] & M'' \otimes_\Lambda N
\end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos que el diagrama es conmutativo, por lo tanto $(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes 1_N$. ■

Ejemplo 2.1.16. Sea Λ un anillo conmutativo. Definamos $M \otimes_\Lambda - : {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$ y $- \otimes_\Lambda N : {}_\Lambda\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_\Lambda\mathbf{Mod}$, dados por $N \longmapsto M \otimes_\Lambda N$ y $N \longmapsto M \otimes_\Lambda N$, respectivamente. Por 2.1.14 y 2.1.14 se tiene que ambos son funtores covariantes.

2.2. Transformaciones naturales

Definición 2.2.1. *Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ dos categorías y $F, G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ dos funtores. Una **transformación natural** de F a G, $t : F \longrightarrow G$, es una colección de morfismos $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ en $\boldsymbol{D}$, uno para cada objeto $A \in \boldsymbol{C}$, tal que para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\boldsymbol{C}$, $(G(f)) \circ t_A = t_B \circ (F(f))$, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "t_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

*Si esto sucede, diremos que $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es **natural** en A.*

Definición 2.2.2. *Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ categorías, $F, G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ funtores y $t : F \longrightarrow G$ una transformaciíon natural. Diremos que t es una **equivalencia natural** o **isomorfismo natural** si $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es isomorfismo para toda $A \in \boldsymbol{C}$. Si esto sucede, diremos que los funtores F y G son **equivalentes** en forma natural.*

Definición 2.2.3. *Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ categorías. Sea $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ un funtor. Diremos que F es una **equivalencia** si existe un funtor $G : \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ tal que $G \circ F, 1 : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ son son equivalentes, y $F \circ G, 1 : \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ también son equivalentes. Si F es una equivalencia, diremos que las categorías $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son **equivalentes**.*

Diremos que una categoría es **pequeña** si su clase de objetos es un conjunto. En el caso de que $\mathbf{C}$ sea una categoía pequeña y $\mathbf{D}$ cualquier otra categoría, es posible definir la categoría $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ de todos los funtores $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$

Definición 2.2.4. *Sean* $\boldsymbol{C}$ *y* $\boldsymbol{C'}$ *dos categorías. El* ***producto cartesiano*** $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C'}$ *consiste en parejas* (A, A')*, donde* $A \in \boldsymbol{C}, A' \in \boldsymbol{C'}$ *y los morfismos*

$$\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C'}((A, A'), (B, B')) = \boldsymbol{C}(A, B) \times \boldsymbol{C'}(A', B')$$

Definición 2.2.5. *Sea* $\boldsymbol{C}$ *una categoría, llamaremos a* $\boldsymbol{D}$ *una* ***subcategoría*** *de* $\boldsymbol{C}$ *si*

1. $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C}$

2. $\boldsymbol{D}(A, B) \subset \boldsymbol{C}$*, para toda pareja* $(A, B) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$

3. *La composición de cualesquiera dos morfismos en* $\boldsymbol{D}$ *es la misma que la composición en* $\boldsymbol{C}$

4. $1_{\boldsymbol{A}}$ *es la misma en* $\boldsymbol{D}$ *que en* $\boldsymbol{C}$.

   Además diremmos que la subcategoría $\boldsymbol{D}$ *es* ***plena*** *si* $\boldsymbol{D}(A, B) = \boldsymbol{C}(A, B)$ *para toda pareja* $(A, B) \in \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D}$.

Definición 2.2.6. *Sea* $\boldsymbol{C}$ *una categoría, definimos la* ***categoría opuesta*** $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{op}}$ *donde sus objetos son los mismos que* $\boldsymbol{C}$*, pero* $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{op}}(A, B) = \boldsymbol{C}(B, A)$.

Definición 2.2.7. *Sea* $\mathbf{C}$ *un producto de categorías* $\mathbf{C^1}, ..., \mathbf{C^n}$ *y* $\mathbf{D}$ *cualquier categoría. Un* ***multifuntor*** $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *satisface lo siguiente:*

1. *Para cada* $A \in \mathbf{C_0}$*, existe* $F(A) \in \mathbf{D}$*,*

2. *Para cada* $\alpha \in \mathbf{C_1}(A, B)$*, existe* $F(\alpha) \in \mathbf{D_1}(F(A), F(B))$*,*

3. *Existe una funcion* $\psi : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{id, op\}$*, donde id es el funtor identidad, y op es el funtor opuesto, con*

$$\bar{\mathbf{C}} := \phi(1)(\mathbf{C^1}) \times \cdots \times \phi(n)(\mathbf{C^n}) \text{ y } \bar{\alpha_i} := \psi(i)(\alpha_i)$$

   para cada morfismo $\alpha_i \in \mathbf{C^i_1}$ *con* $i = 1, ..., n$*, tal que el funtor* $\bar{F} : \bar{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbf{D}$ *dado por*

$$\bar{F}(A) = F(A) \text{ y } \bar{F}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = F(\bar{\alpha_1}, ..., \bar{\alpha_n})$$

   es un funtor covariante

La tercera condición dice que si F posiblemente no sea un funtor convariante en todas las entradas, por eso, cuando el funtor F es contravariante en la categoria C_i es apropiado cambiarla a la categoría opuesta, así el nuevo funtor definido $\bar{F}$ es el que utilizaremos. Cuando el funtor F es covariante en cada entrada se tiene que el $\bar{F} = F$. En particular cuando se defina el producto entre dos categorías $A \times B$ a otra categoría C, un multifuntor es llamado **bifuntor**.

2.3. Producto

Definición 2.3.1. *Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría y sean A, B dos objetos en $\boldsymbol{C}$. El **producto** de A y B en $\boldsymbol{C}$ consta de un objeto P en $\boldsymbol{C}$ y dos morfismos, $p : P \longrightarrow A$ y $q : P \longrightarrow B$, tales que, para cualquiera dos morfismos $f : X \longrightarrow A$ y $g : X \longrightarrow B$ en $\boldsymbol{C}$, existe un morfismo único $h : X \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & B \end{tikzcd}$$

es decir, $f = p \circ h$ y $g = q \circ h$.

De igual manera podemos definir el dual del producto.

Definición 2.3.2. *Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría y sean A, B dos objetos de $\boldsymbol{C}$. El **coproducto** de A de B en $\boldsymbol{C}$ consta de un objeto Q en $\boldsymbol{C}$ y dos morfismos $i : A \longrightarrow Q$ y $j : B \longrightarrow Q$, tales que, para cualesquiera dos morfismos $f : A \longrightarrow X$ y $g : B \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"] & Q \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

es decir, $f = h \circ i$ y $g = h \circ j$.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos la categoría **Conj**, sea $A, B \in \mathbf{Conj_0}$, tomemos el producto cartesiano $A \times B$ habitual, y se tiene que $A \times B$ pertenece a **Conj**, de aquí tomemos las funciones $\rho_A : A \times B \longrightarrow A$ y $\rho_B : A \times B \longrightarrow B$, donde ρ_A y ρ_B son las proyecciones. Tomemos un conjunto que tenga un morfismo $f \in \mathbf{Conj_1}$ y un morfismo $g \in \mathbf{Conj}_1$, de tal manera que es posible definir $h : X \longrightarrow A \times B$ como $h(x) = (f(x), g(x))$, tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\rho_A"'] \arrow[r, "\rho_B"] & B \end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} (\rho_A \circ h)(x) &= \rho_A(h(x)) \\ &= \rho_A((f(x), g(x))) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

y tambíen

$$\begin{aligned} (\rho_B \circ h)(x) &= \rho_B(h(x)) \\ &= \rho_B((f(x), g(x))) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

entonces se tiene que $A \times B$ es un producto.

Proposición 2.3.4. *Sean P y P' dos productos para A y B, objetos de $\boldsymbol{C}$. Entonces existe un isomorfismo único $h' : P \longrightarrow P'$ tal que $f : p \circ h'$ y $g = q \circ h'$.*

Demostración. Como P y P' son productos se tiene que para los morfismo $p : P \longrightarrow A$, $q : P \longrightarrow B$, $f : P' \longrightarrow A$ y $g : P' \longrightarrow B$ van a existir los morfismos $h : P \longrightarrow P'$ y $h' : P' \longrightarrow P$ hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, shift left, "h'"] & \\
A & P \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] \arrow[u, shift left, "h"] & B
\end{tikzcd}$$

De aqui se tiene que $f = p \circ h'$, $g = q \circ h'$ y también que $p = f \circ h$, $q = g \circ h$. Luego sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned}
f &= p \circ h' && (2.1)\\
&= (f \circ h) \circ h' && (2.2)\\
&= f \circ (h \circ h') && (2.3)
\end{aligned}$$

entonces $f = f \circ (h \circ h')$, entonces $h \circ h' = 1_{P'}$. ■

Definición 2.3.5. *Sean $f : X \longrightarrow A$ y $g : Y \longrightarrow A$ morfismos en una categoría $\boldsymbol{C}$. El **producto fibrado o cuadro cartesiano** de (f, g) es una pareja de morfismos $\varphi : B \longrightarrow X$, $\gamma : B \longrightarrow Y$ tal que, si $\varphi' : C \longrightarrow X$ y $\gamma' : C \longrightarrow Y$ son tales que $f \circ \varphi' = g \circ \gamma'$, entonces existe una única $h : C \longrightarrow B$ tal que $\varphi' = \varphi \circ h$ y $\gamma' = \gamma \circ h$.*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\varphi'"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma'"'] & & \\
& B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & A
\end{tikzcd}$$

Al producto fibrado de (f, g) lo denotamos con $B = X \wedge Y$.

Definición 2.3.6. *Sean $f : A \longrightarrow X$ y $g : A \longrightarrow Y$ morfismos en una categoría $\boldsymbol{C}$. El **coproducto fibrado o cuadro cocartesiano** de (f, g) es una pareja de morfismos $\varphi : X \longrightarrow B$, $\gamma : Y \longrightarrow B$ tal que, si $\varphi' : X \longrightarrow C$ y $\gamma' : Y \longrightarrow C$ son tales que $\varphi' \circ f = \gamma' \circ g$, entonces existe una única $h : B \longrightarrow C$ tal que $\varphi' = h \circ \varphi$ y $\gamma' = h \circ \gamma$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi'"] & \\
Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr, bend right, "\gamma'"'] & B \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Al coproducto fibrado de (f, g) lo denotamos con $B = X \vee Y$.

Definición 2.3.7. *Una **categoría aditiva** $\mathbf{A}$ es una categoría con objeto cero en la cual cualesquiera dos objetos poseen un producto y un conjunto de morfismo $\mathbf{A_1}(X,Y)$ es un grupo abeliano tal que la composición*

$$\mathbf{A_1}(X,Y) \times \mathbf{A_1}(Y,Z) \longrightarrow \mathbf{A_1}(X,Z)$$

es bilineal.

Definición 2.3.8. *Diremos que el funtor $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es **aditivo** si, para todo par de morfismos $f, g \in \mathbf{C_1}(A,B)$, se tiene que $F(f+g) = F(f) + F(g)$.*

Proposición 2.3.9. *Los funtores $M \otimes_\Lambda -, - \otimes_\Lambda N, Hom_\Lambda(M,-)$ y $Hom_\Lambda(-,N)$ son funtores aditivos.*

Demostración.

1. Sea $M \otimes_\Lambda - :_\Lambda \mathbf{Mod} \longrightarrow_\Lambda \mathbf{Mod}$. Sean $f, g : M \longrightarrow M'$ dos homomorfismos con $M, M' \in_\Lambda \mathbf{Mod}_0$, entonces

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "M\otimes_\Lambda -"] \arrow[d, "(f+g)"'] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, "(f+g)\otimes 1_N"] \\ M' \arrow[r, "M\otimes_\Lambda -"'] & M' \otimes_\Lambda N \end{tikzcd}$$

De aqui tenemos que

$$\begin{aligned} (M \otimes_\Lambda -)(f+g)(x,y) &= ((f+g) \otimes 1_N)(x,y) \\ &= (f+g)(x) \otimes 1_N(y) \\ &= f(x) + g(x) \otimes 1_N(y) \\ &= f(x) \otimes 1_N(y) + g(x) \otimes 1_N(y) \\ &= (f \otimes 1_N)(x,y) + (f \otimes 1_N)(x,y) \\ &= (M \otimes_\Lambda -)(f)(x,y) + (M \otimes_\Lambda -)(g)(x,y) \end{aligned}$$

para $x \in M$ y $y \in N$.

2. Para el funtor $- \otimes_\Lambda N$ se realiza de la misma manera que 1.

3. Veamos que $Hom_\Lambda(M,-)$ es un funtor aditivo. Sean $f, g : N \longrightarrow N'$ entonces

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "Hom_\Lambda(M{,}-)"] \arrow[d, "(f+g)"'] & Hom_\Lambda(M,N) \arrow[d, "(f+g)_*"] \\ N' \arrow[r, "Hom_\Lambda(M{,}-)"] & Hom_\Lambda(M,N') \end{tikzcd}$$

donde cada $\varphi \in Hom_\Lambda(M,N)$ se tiene que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "(f+g)"'] \arrow[dr, "(f+g)_*(\varphi)=(f+g)\circ\varphi"] & \\ N \arrow[r, "\varphi"] & N' \end{tikzcd}$$

entonces

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(M,-)(f+g)(\varphi) &= (f+g)_*(\varphi) \\ &= (f+g)\circ\varphi \\ &= f\circ\varphi + g\circ\varphi \\ &= f_*(\varphi) + g_*(\varphi) \\ &= Hom_\Lambda(M,-)(f)(\varphi) + Hom_\Lambda(M,-)(g)(\varphi) \end{aligned}$$

Con esto tenemos que $Hom_\Lambda(M,-)$ es un funtor aditivo.

4. Para funtor $Hom_\Lambda(-,N)$ su demostración es análoga a 3.

■

Capítulo 3

Elementos del Álgebra Homológica

El estudio de la homología fue introducido por Henri Poincaré, en 1895. En matemáticas Dado un espacio topológico es posible, bajo una serie de prosedimientos, encontrar el grupo o modulo de homología correspondiente a él.

3.1. Homología

En está sección introducimos el concepto de homoloía, así como algunas propiedades importantes.

Definición 3.1.1. *Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de Λ-módulos y una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{\delta_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$. Llamaremos* ***complejo de cadenas*** *sobre Λ a la pareja $C = \{C_n, \delta_n\}$, y se escribe:*

$$C : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

En otras palabras un complejo de cadenas es una sucesión semiexacta de Λ-módulos indexada con $\mathbb{Z}$.

Definición 3.1.2. *Sean $C = \{C_n, \delta_n\}$ y $D = \{D_n, \delta'_n\}$ dos complejos de cadenas. Un* ***morfismo de cadenas*** *$\varphi : C \longrightarrow D$es una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{\varphi_n : C_n \longrightarrow D_n\}$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
C : \cdots \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
D : \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En base a lo anterior es posible contruir la categoría de complejos de cadenas **Cad** donde los objetos son cadenas semiexactas y los morfismos son morfismos de cadenas, sea $f \in \mathbf{Cad_1}(A, B)$, $g \in \mathbf{Cad_1}(B, C)$, definimos la composición $\circ_* : \mathbf{Cad_1}(A, B) \times \mathbf{Cad_1}(B, C) \longrightarrow \mathbf{Cad_1}(A, C)$ como $g \circ_* f = \{g_n \circ f_n : A_n \longrightarrow C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, esta ley de composición cumple los axiomas de categoría.

1. Supongamos $\mathbf{Cad_1}(A,B) = \mathbf{Cad_1}(C,D)$, entonces para cada
$$f = \{f_n : A_n \longrightarrow B_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{Cad_1}(A,B)$$
existe
$$g = \{g_n : C_n \longrightarrow D_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{Cad_1}(C,D)$$
tal que $f = g$, esto es que $f_n = g_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, esto es que el dominio y la imagen de f_n y g_n son el mismo para cada $n \in \mathbb{Z}$, así tenemos que $A_n = C_n$ y $B_n = D_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto se tiene que $A = C$ y $B = D$.
Si $A = C$ y $B = D$ de inmediato se tiene que $\mathbf{Cad_1}(A,B) = \mathbf{Cad_1}(C,D)$.

2. Sean $f \in \mathbf{Cad_1}(A,B)$, $g \in \mathbf{Cad_1}(B,C)$, $h \in \mathbf{Cad_1}(C,D)$, entonces bajo la composición de homomorfismos de cadenas y por propiedades de composición de homomorfismos se tiene que
$$\begin{aligned}(h \circ_* g) \circ_* f &= \{(h_n \circ g_n) \circ f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \{h_n \circ (g_n \circ f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= h \circ_* (g \circ_* f).\end{aligned}$$

3. Para cada $A \in \mathbf{Cad_0}$ existe un morfismo $1_A = \{1_{A_n}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{Cad_1}(A,A)$ donde para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que 1_{A_n} es la identidad de A_n.

Definición 3.1.3. *Sea $C = \{C_n, \delta_n\}$ un complejo de cadenas. Llamaremos y denoteremos al **módulo de homología** de grado n en C, $H_n(C)$ se define como el cocinete*
$$H_n(C) = Ker\ \delta_n / Im\ \delta_{n+1}.$$

Observación. Vemos que $H_n(C)$ es un Λ-módulo, ya que es un cociente de Λ-módulos.

Ejemplo 3.1.4. Tomemos en cuenta el siguiente complejo de cadenas
$$C : 0 \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_1} 0$$

Donde δ_3, δ_1 son el morfismo cero, y $\delta_2(x) = 2x$. Si calculamos la homología en la tercera entrada :

$$\begin{aligned}H_3(C) &= \text{Ker } \delta_3/\text{Im } \iota \\ &= \mathbb{Z}/0 \\ &\cong \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_2(C) &= \text{Ker } \delta_2/\text{Im } \delta_3 \\ &= 0/0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(C) &= \text{Ker } \delta_1/\text{Im } \delta_2 \\ &= \mathbb{Z}/0 \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se tiene que cuando el morfismo entrante es δ_3 el morfismo cero y el morfismo saliente es $\delta_2(x) = 2x$ se tiene que la homología es cero, es decir que es esta parte de la cadena se tiene que es exacta, pero cuando el morfismo entrante es $\delta_2(x) = 2x$ y el saliente es δ_1 el morfismo cero se tiene que la homología es isomorfa a $\mathbb{Z}$.

La homología mide la inexactitud de un complejo de cadenas, si la cadena es exacta se tendria que $H_n(C) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.
A los elementos C_n se conocen como **cadena de grado n**, y los homomorfismos δ_n se llaman **diferenciales** o **operador frontera**, en donde el nucleo de δ_n se les llama **ciclos de grado n**, denotado por $Z_n(C)$ y los elementos de la imagen de δ_{n+1} se llaman **frontera de grado n**, denotado por $B_n(C)$.
Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos el módulo de homología de $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$, el Λ-módulo graduado

$$H_*(C) = \{H_n(C)\}$$

se denomina **homología de la cadena** C.
Con esto hemos asociado a cada cadena C un Λ-módulo graduado $H_*(C)$, de dicha manera por la Definicón 3.1.2 se tiene que si $\varphi : C \longrightarrow D$ induce un homomorfismo $H_*(\varphi) = \varphi_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$donde se tiene que $H_*(\_)$ es un funtos covariante de la categoría de complejo de cadenas en la categoría de Λ-módulos graduados. Esto es

1. Para cada $C \in \mathbf{Cad_0}$ existe un Λ-módulo graduado $H_*(C) = \{H_n(C)\} \in \mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda\ 0}$, donde está bien definida la homología en cada entrada.

2. Para cada morfismo $\varphi \in \mathbf{Cad_1}(C, D)$, existe un morfismo $H_*(\varphi) = \varphi_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$, donde se cumple que para los morfismos $\varphi \in \mathbf{Cad_1}(C, D)$ y $\psi \in \mathbf{Cad_1}(D, E)$ se tiene

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "H_*(-)"] \arrow[d, "\varphi"] & H_*(C) \arrow[d, "H_*(\varphi)=\varphi_*"] \\ D \arrow[r, "H_*(-)"] \arrow[d, "\psi"] & H_*(D) \arrow[d, "H_*(\psi)=\psi_*"] \\ E \arrow[r, "H_*(-)"] & H_*(E) \end{tikzcd}$$

Es decir que $H_*(\psi \circ \varphi) = \psi_* \circ \varphi_*$.

3. Para el morfismo identidad $1_C : C \longrightarrow C$, existe $H_*(1_C) = 1_{H_*(C)}$.

Definición 3.1.5. *Sea $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de Λ-módulos y*

$$\left\{\delta^n : C^n \longrightarrow C^{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

una familia de homomorfismos de Λ-módulos tales que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. Llamaremos ***complejo de cocadenas*** *sobre Λ a la pareja $C = \{C^n, \delta^n\}$, y se escribe:*

$$\begin{tikzcd} C : \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\delta^n"] & C^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Definición 3.1.6. *Sean $C = \{C^n, \delta^n\}$ y $D = \{D^n, \delta'^n\}$ dos complejos de cocadenas. Un* ***morfismo de cocadenas*** *$\psi : C \longrightarrow D$ es una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{\psi^n : C^n \longrightarrow D^n\}$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
C : \cdots \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & C^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}"] \arrow[d, "\psi^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "\psi^n"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi^{n+1}"] & \cdots \\
D : \cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\delta'^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\delta'^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

De la misma manera que definimos la categoría de los complejos de cadenas **Cad**, se define la categoría de cocadenas **Cocad**, donde los objetos son cocadenas y los morfismos son homomorfismos de cocadenas.

Definición 3.1.7. *Sea $C = \{C^n, \delta^n\}$ un complejo de cocadenas. Llamaremos por* ***módulo de cohomología*** *de grado n en C, al cociente*

$$H^n(C) = Ker\ \delta^n / Im\ \delta^{n-1}.$$

De manera análoga al concepto de homología, para la cohomología hablaremos de los **cociclos** $Z^n(C)$ de una cadena C, del conjunto de **cofronteras** que denotaremos por $B^n(C)$ y de **clases de homología**. Llamaremos **cohomología de la cocadenas** C al módulo graduado $H^*(C) = \{H^n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y podemos considerar al funtor covariante $H^*(\_)$ de la categoría de cocadenas a la categoria de Λ-módulos graduados.

Los resultados obtenidos de la homología es posible dualizarlos para la cohomología, ya que si $C = \{C_n, \delta_n\}$ es posible construir su cocadena $D = \{D^n, \delta^n\}$ poniendo $D^n = C_{-n}$ y $\delta^n = \delta_{-n}$.

Definición 3.1.8. *Sean $C = \{C_n, \delta_n\}$ y $D = \{D_n, \delta'_n\}$ dos cadenas y $\varphi, \varphi' : C \longrightarrow D$ dos morfismos de cadenas. Diremos que φ es* ***homotópico*** *a φ' si existe una familia de homomorfismos de Λ-módulos $h = \{h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $\delta'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta_n = \varphi_n - \varphi'_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. De tal manera tenemos que conmute el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
C : & \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi'_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\varphi'_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi'_{n-1}"] & \cdots \\
D : & \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta'_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*La familia $h = \{h_n\}$ se llama **homotopía de cadena**, y diremos que φ es homotópica a φ', lo cual denotaremos por $h : \varphi \sim \varphi' : C \longrightarrow D$.*

Proposición 3.1.9. *La relación de homotopía $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean $C = \{C_n, \delta_n\}$ y $D = \{D_n, \delta'_n\}$ dos cadenas entonces:

1. Sean $\varphi, \varphi : C \longrightarrow D$ dos morfismos de cadenas, de tal manera que el siguien te diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C : \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\ D : \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta'_{n-1}"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

   entonces definimos $h = 0$ y se tiene que

$$\begin{aligned} \delta'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta_n &= \varphi_n - \varphi'_n \\ \delta'_{n+1} \circ 0 + 0 \circ \delta_n &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

   entonces $\sim$ es reflexiva.

2. Supongamos que $\varphi \sim \varphi'$ entonces se tiene que $\delta'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta_n = \varphi_n - \varphi'_n$ de aqui, definimos la $h' : C \longrightarrow D$ definida como $h'_n(x) = -h_n(x)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \delta'_{n+1} \circ h'_n + h'_{n-1} \circ \delta_n &= \delta'_{n+1} \circ (-h_n) + (-h_{n-1}) \circ \delta_n \\ &= -(\delta'_{n+1} \circ h_n) - (h_{n-1} \circ \delta_n) \\ &= -(\delta'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta_n) \\ &= -(\varphi_n - \varphi'_n) \\ &= \varphi'_n - \varphi_n \end{aligned}$$

   Entonces se tiene que h' es la relación de equivalencia de φ' y φ. De aqui que $\sim$ es simétrica.

3. Supongamos que $\varphi \sim \varphi'$ y $\varphi' \sim \varphi''$, entonces tenemos sus homotopías h, h' respectivamente donde se cumple que

$$\delta'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta_n = \varphi_n - \varphi'_n$$

   y

$$\delta'_{n+1} \circ h'_n + h'_{n-1} \circ \delta_n = \varphi_n - \varphi''_n$$

   sumandolas tenemos que

$$
\begin{aligned}
\delta'_{n+1}\circ h'_n + \delta'_{n+1}\circ h_n + h'_{n-1}\circ\delta_n + h_{n-1}\circ\delta_n &= \varphi_n - \varphi'_n + \varphi' c_n - \varphi''_n \\
\delta'_{n+1}\circ(h'_n + h_n) + (h'_{n-1} + h_{n-1})\circ\delta_n &= \varphi_n - \varphi''_n.
\end{aligned}
$$

de está manera definimos $h'' : C \longrightarrow D$ como $h''_n = h'_n + h_n$. Con esto se tiene que es transitiva la relación $\sim$.

■

Nota. Las operaciones algebraicas que se hacen con las funciones son gracias que son son Λ-homomorfismos.

Teorema 3.1.10. *Si $\varphi \sim \varphi' : C \longrightarrow D$ entonces*

$$H_*(\varphi) = H_*(\varphi') : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$$

Demostración. Sea $h : \varphi \sim \varphi'$ la homotopía. Sea $x \in H_n(C)$ arbitraria y $z \in Z_n(C) = \operatorname{Ker}\delta_n$ tal que $\rho_n(z) = x$, donde $\rho_n : Z_n \longrightarrow H_n$ es su proyección en su cociente. Entonces

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(z) - \varphi'(z) &= \delta'_{n+1}\circ h_n(z) + h_{n-1}\circ\delta_n(z) \\
&= \delta'_{n+1}\circ h_n(z)
\end{aligned}
$$

ya que $\delta_n(z) = 0$. Como $\delta'_{n+1}\circ h_n(z) \in B_n(D)$, tenemos que $H_*(\varphi)(x) = H_*(\varphi')(x)$, entonces $H_n(\varphi) = H_n(\varphi')$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Consideremos C, D, E cadenas en **Cad**, podemos formar sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas,

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "\varphi"] & D \arrow[r, two heads, "\varphi'"] & E
\end{tikzcd}
$$

Si colocamos las cadenas de forma vertical, la sucesión exacta corta se vería de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\varphi"] & D \arrow[r, "\varphi'"] & E \arrow[r] & 0 \\
 & // & // & // & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] \arrow[d, "\delta_{n+1}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\varphi'_{n+1}"] \arrow[d, "\delta'_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\delta_n"] & D_n \arrow[r, "\varphi'_n"] \arrow[d, "\delta_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\delta''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d, "\delta_{n-1}"] & D_{n-1} \arrow[r, "\varphi'_{n-1}"] \arrow[d, "\delta'_{n-1}"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta''_{n-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

es de utilidad poder representar el complejo de cadenas de esta forma. A continuación utilizaremos el Teorema 1.3.11.

Teorema 3.1.11. *Sea* $C \overset{\varphi}{\rightarrowtail} D \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} E$ *una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces existe un homomorfismo* $\kappa_n : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\varphi_{*n}} H_n(D) \xrightarrow{\varphi'_{*n}} H_n(E) \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{\varphi_{*n-1}} H_{n-1}(D) \xrightarrow{\varphi'_{*n}} H_{n-1}(E) \xrightarrow{\kappa_{n-1}} \cdots$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\delta_n"] & D_n \arrow[r, "\varphi'_n"] \arrow[d, "\delta'_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\delta''_n"] & 0 \\
 & C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & D_{n-1} \arrow[r, "\varphi'_{n-1}"] & E_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 1.3.11 tenemos dos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \delta_n \longrightarrow \text{Ker } \delta'_n \longrightarrow \text{Ker } \delta''_n$$

y

$$\text{Coker } \delta_n \longrightarrow \text{Coker } \delta'_n \longrightarrow \text{Coker } \delta''_n \longrightarrow 0$$

Definamos la proyección $\rho_n : C_n \longrightarrow C_n/\text{Ker } \delta_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que δ_n induce un homomorfismo

$$i_n : \text{Coker } \delta_{n+1} = C_n/\text{Im } \delta_{n+1} \longrightarrow C_n/\text{Ker } \delta_n \cong \text{Im } \delta_n \subset \text{Ker } \delta_{n-1}$$

definido por

$$\begin{aligned}
i_n(x + \text{Im } \delta_n) &= \rho_n(x) + \text{Im } \delta_n \\
&= x + \text{Ker } \delta_n + \text{Im } \delta_n \\
&= x + \text{Ker } \delta_n
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que i_n está bien definido, ademas tenemos que Ker i_n = Ker δ_n/Im δ_{n+1} = $H_n(C)$ ya que los elementos de Ker i_n son elementos de C_n que pertenecen al Ker δ_n, debido a como está definido i_n. También tenemos que el $\mathit{coker} i_n$ = Ker δ_{n-1}/Im δ_n, ya que

$$\text{Im } i_n = C_n/\text{Ker } \delta_n \cong \text{Im } \delta_n$$

.

Análogamente, δ'_n y δ''_n inducen

$$i'_n : \text{Coker } \delta'_{n+1} \longrightarrow \text{Ker } \delta'_{n-1}, \quad i''_n : \text{Coker } \delta''_{n+1} \longrightarrow \text{Ker } \delta''_{n-1}$$

tales que Ker $i'_n = H_n(D)$, Coker $i'_n = H_n(D)$ y Ker $i''_n = H_n(E)$, Coker $i''_n = H_n(E)$, respectivamente. Entonces obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Coker } \delta_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & \text{Coker } \delta'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i'_n"] & \text{Coker } \delta''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \text{Ker } \delta_{n-1} \arrow[r] & \text{Ker } \delta'_{n-1} \arrow[r] & \text{Ker } \delta''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

por el Teoreman 1.3.11, existe un homomorfismo de conexión $\kappa_n : \text{Ker } \iota'' \longrightarrow \text{Coker } \iota'$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\text{Ker } i_n \longrightarrow \text{Ker } i'_n \longrightarrow \text{Ker } i''_n \xrightarrow{\kappa_n} \text{Coker } i_n \longrightarrow \text{Coker } i'_n \longrightarrow \text{Coker } i''_n$$

esto es,

$$H_n(C) \longrightarrow H_n(D) \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(D) \longrightarrow H_{n-1}(E)$$

es exacta. Esto se aplica para cada $n \in \mathbb{Z}$, y se obtiene el resultado. ■

3.2. Resoluciones

Introduciremos el concepto de resolución proyectiva y resolución proyectiva reducisa de un Λ-módulo M, donde la primera es mas de gusto topoógico y la segunda del lado del álgebra que es donde mas nos vamos a enfocar.

Definición 3.2.1. *Sea M un Λ-módulo. Una **resolución proyectiva** de M es una cadena exacta P de la forma*

$$P: \qquad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

donde P_n es un Λ-módulo proyectivo para toda $n \geq 0$.

Podemos describir la resolución proyectiva de M como una cadena de Λ-módulos proyectivos $P = \{P_n, \delta_n\}$. Cuando P_n es un Λ-módulo libre para cada n, diremos que P es una ***resolución libre*** de M.

Si para $i > n$ se tiene que $P_i = 0$, diremos que la resolución P tiene longitud n, y lo escribimos

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

Observación. Sea M un Λ-módulo. Una ***presentación proyectiva*** de M es una sucesión corta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\delta_0} P \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

tal que P es proyectivo. En otras palabras tenemos el segmento inicial de una resolución proyectiva donde $K = \text{Ker } p$, $P = P_0$. En el caso de que P sea un Λ-módulo libre, a la sucesión exacta corta le llamaremos ***presentación libre***.

Proposición 3.2.2. *Sea M un Λ-módulo. Entonces existe una resolución libre de M.*

Demostración. Por el Teorema 1.6.5 se tiene que M es cociente de un Λ-módulo libre. Entonces existe una sucesión exacta corta de la siguiente manera

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\mu_0} L_0 \xrightarrow{\nu_0} M \longrightarrow 0$$

donde $M_0 = \text{Ker } \mu_0$ y L_0 es el Λ-módulo libre.

Del mismo modo como M_0 es un Λ-módulo entonces es cociente de un Λ-módulo, por consiguente tenemos la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\mu_1} L_1 \xrightarrow{\nu_1} M_0 \longrightarrow 0$$

donde $M_1 = \text{Ker } \mu_1$ y L_1 es el Λ-módulo libre. Repitiendo este procedimiento, tenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} L_n \xrightarrow{\nu_n} M_{n-1} \longrightarrow 0$$

para $n \geq 1$. Así construimos un diagrama de la siguienteforma:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & & & \\
 & & 0 \arrow[r] & M_0 \arrow[u] \arrow[r, "\mu_0"] & L_0 \arrow[r, "\nu_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & L_1 \arrow[u, "\nu_1"] \arrow[ur, "\delta_1"'] & & & \\
 & M_2 \arrow[u] \arrow[r, "\mu_2"] & L_2 \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[ur, "\delta_2"] & M_1 \arrow[u, "\mu_2"'] \arrow[r] & 0 & & \\
 & L_3 \arrow[u, "\nu_3"] \arrow[ur, "\delta_3"'] & & 0 \arrow[u] & & & \\
 \cdots \arrow[r] & M_3 \arrow[u, "\mu_3"] \arrow[r] & 0 & & & & \\
 & 0 \arrow[u] & & & & &
\end{tikzcd}$$

de esta manera definimos la cadena $L = \{L_{n,\delta_n}\}$ con Λ módulos libres y con morfismos δ_n, donde

$$L = \begin{cases} M & \text{si } n = -1 \\ L_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < -1 \end{cases} \qquad \delta_n = \begin{cases} \nu_0 & \text{si } n = 0 \\ \mu_{n-1} \circ \nu_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Solo nesesitamos ver que L sea exacta, y ya que μ_n es monomorfismo y ν_n es epimorfismo temos que

$$\text{Im } \delta_{n+1} = \text{Im } \mu_n = \text{Ker } \nu_n = ker\delta_n$$

Entonces L es exacta. Por lo tanto, si M es un Λ-módulo entonces existe una resolución libre $L = \{L_n, \delta_n\}$ de M. ∎

Como todo Λ-módulo libre es un Λ-módulo proyectivo, entonces cualquier resolución libre es una resolución proyectiva.

Lema 3.2.3. *Sea $C = \{C_n, \delta_n\}$ y $D = \{D_n, \delta'_n\}$ dos complejos de cadenas. Sea $\varphi = \{\varphi_i : C_i \longrightarrow D_i\}_{i \geq n}$ una familia de homomorfismos de Λ-módulos tales que $\delta'_i \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ \delta_i$ para $i \geq n$. Suponga que C_i es proyectivo para $i > n$ y que $H_i(D) = 0$ para $i \geq n$. Entonces $\{\varphi_i\}_{i \geq n}$ se extiende a un morfismo de cadenas $\varphi : C \longrightarrow D$ y es único, salvo homotopía.*

Demostración. Supongamos que por inducción hemos definido φ_i para $i \geq k$ tal que $\delta'_i \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ \delta_i$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\delta_{k+1}"] \arrow[d, dashed, "\varphi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\delta_k"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{k+1} \arrow[r, "\delta'_{k+1}"] & D_k \arrow[r, "\delta'_k"] & D_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se tiene que φ_{k+1} existe por que C_{n+1} es proyectivo, lo cual se tiene que

$$\begin{tikzcd}
 & C_{k+1} \arrow[dl, dashed, "\varphi_{k+1}"'] \arrow[d, "(\delta_{k+1}\circ\delta_k)\circ\varphi_{k-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, two heads, "(\delta'_{k+1}\circ\delta'_k)"'] & 0
\end{tikzcd}$$

En otras palabras la familia de morfismos $\{\varphi_i\}_{i \leq k}$ puede extender un morfismo φ_{k+1}, y así sucesivamente.

Supongamos que $\psi = \{\psi_i\}$ otra extensión de $\{\varphi_i\}_{i \leq n}$. Construyamos una homotopía $h : \varphi \sim \psi$. Supongamos que por inducción tenemos $h_i : C_i \longrightarrow D_{i+1}$ para $i \leq k$ tal que $\delta'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ \delta_i = \varphi_i - \psi_i$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C : \cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\delta_{k+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{k+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\delta_k"] \arrow[dl, "h_k"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_k"'] \arrow[d, shift left, "\psi_k"] & D_{k-1} \arrow[r, "\delta_{k-1}"] \arrow[dl, "h_{k-1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{k-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{k-1}"] & \cdots \\
D : \cdots \arrow[r] & D_{k+1} \arrow[r, "\delta'_{k+1}"'] & D_k \arrow[r, "\delta'_k"'] & D_{k-1} \arrow[r, "\delta'_{k-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Entonces $\varphi_k - \psi_k = \delta'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \delta_k$. Luego

$$(\varphi_k - \psi_k) \circ \delta_{k+1} = \delta'_{k+1} \circ h_k \circ \delta_{k+1} + h_{k-1} \circ \delta_k \circ \delta_{k+1} = \delta'_{k+1} \circ h_k \circ \delta_{k+1}.$$

como C_{k+1} es un Λ-módulo proyectivo, va a existir h_{k+1} tal que

$$\delta'_{k+2} \circ h_{k+1} + h_k \circ \delta_{k+1} = \varphi_k - \psi_k.$$

■

Definición 3.2.4. *Sea P una resolución proyectiva de un Λ-módulo M*

$$P : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

*Una **resolución proyectiva reducida** de M es una resolución proyectiva de M, en la cual M es suprimido, lo que nos deja una cadena exacta de la forma*

$$P_M : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Nota. Si tomamos una resolución proyectiva reducida de M en lugar de tomar la resolución proyectiva de M no vamos a perder información de P, ya que $M = \text{Coker } \delta_1$. Entonces consideremos las resoluciones proyectivas como una generalización de una presentación de un Λ-módulo.

Teorema 3.2.5. *Sean P y P' resoluciones proyectivas de un Λ-módulos M. Entonces existe un morfismo de cadenas $\varphi : P \longrightarrow P'$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[r, "\delta_1"] & P'_0 \arrow[ur, "p'"'] & &
\end{tikzcd}$$

es decir, $p' \circ \varphi_0 = p$. Más aún, φ es única, salvo homotopía, y es una equivalencia homotópica.

Demostración. Del Lema 3.2.3 aplicando a $n = -1$, obtenemos un morfismo de cadena $\varphi : P \longrightarrow P'$ que satisface $p' \circ \varphi_0 = p$. Más aún, φ es única salvo homotopía por el Lema 3.2.3. ■

Proposición 3.2.6. *Sea*

$$M' \rightarrowtail^{\varphi} M \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} M''$$

una sucesión corta que se escinde, entonces se tiene que

$$P_{M'} \rightarrowtail P_M \twoheadrightarrow M''$$

es una sucesión exacta corta, con $P_{M'}, P_M$, y $P_{M''}$ resoluciones proyectivas reducidas de M', M y M''.

Demostración. Como la sucesión se escinde por la Proposicion 1.4.7, se tiene que $M \cong M' \oplus M''$. Partiendo de está idea sean $P_{M'}$ y $P_{M''}$ las resoluciones proyectivas de M' y M'', construyamos la resolcuion proyectiva de M como $P_M = P_{M'} \oplus P_{M''}$. De aqui como $M \cong M' \oplus M''$ entonces P_M es recolución proyectiva de M, y con esto se tiene que

$$P_{M'} \overset{\varphi'}{\rightarrowtail} P_M \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} P_{M''}$$

donde φ' es inclusión y ψ' es proyección. ■

3.3. $Tor_n^{\Lambda}(M,N)$

Sea $P_M : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva reducida del Λ-módulo M. Sea N un Λ-módulo y consideremos el producto tensorial $P_M \otimes_\Lambda N$, nos queda una sucesión de la siguiente manera

$$P_M \otimes_\Lambda N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_n \otimes 1_N} P_{n-1} \otimes_\Lambda N \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta_1 \otimes 1_N} P_0 \otimes_\Lambda 1_N \longrightarrow 0.$$

donde $P_M \otimes_\Lambda N$ es una sucesión semiexacta, pues para toda $n > 1$,

$$(\delta_{n-1} \otimes_\Lambda 1) \circ (\delta_n \otimes_\Lambda 1) = \delta_{n-1} \circ \delta_n \otimes_\Lambda 1 \circ 1 = 0 \otimes_\Lambda 1 = 0$$

Definición 3.3.1. *Para cada $n \geq 0$, definimos*

$$Tor_n^{\Lambda}(M,N) \;\; = \;\; H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$$

*y lo llamaremos **funtor de torsión** de grado n sobre Λ de M y N*

Veremos que $Tor_n^{\Lambda}(M,N)$ depende esencialmente de n, M y N, y no de la resolución que tomemos. Supongamos que

$$Q_M : \cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{\delta'_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \longrightarrow 0$$

es otra resolución proyectiva reducida de M. Por resultados que tenemos en la sección anterior existen morfismos de cadenas $\varphi : P_M \longrightarrow Q_M$ y $\varphi' : Q_M \longrightarrow P_M$. Tales que $\varphi' \circ \varphi = 1_P$ y $\varphi \circ \varphi = 1_Q$. Sea $1_N : N \longrightarrow N$ la identidad en N. Entonces los morfismos $\varphi \otimes 1_N$ y $\varphi' \otimes 1_N$, son morfismos de cadenas que inducen:

$$\varphi_* : H_n(P_n \otimes_\Lambda N) \longrightarrow H_n(Q_n \otimes_\Lambda N) \;\; \varphi'_* : H_n(Q_n \otimes_\Lambda N) \longrightarrow H_n(P_n \otimes_\Lambda N)$$

para cada $n \geq 0$. De aquí

$$\begin{aligned}(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) &= (\varphi' \circ \varphi \otimes 1_N \circ 1_N) \\ &= (1_P \otimes 1_N) \\ &= 1_{P \otimes N}\end{aligned}$$

también que

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes 1_N) \circ (\varphi' \otimes 1_N) &= (\varphi \circ \varphi' \otimes 1_N \circ 1_N) \\ &= (1_Q \otimes 1_N) \\ &= 1_{Q \otimes N}\end{aligned}$$

entonces $\varphi'_* \circ \varphi_*$ y $\varphi_* \circ \varphi'_*$ son automorfismos de $H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$ y $H_n(Q_M \otimes_\Lambda N)$ respectivamente. Entonces φ_* y φ'_* son isomorfismos, por lo tanto $H_n(P_n \otimes N) = 0$ para $n \geq 0$.

Ya teniendo definido el Tor_n^{Λ} a partir de una resolución proyectiva reducida P de M, veremos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.2. *Tor_n^Λ es un bifuntor covariante de la categoría de Λ-módulos en sí misma.*

Demostración.
Para verificar que es un bifuntor covariante, veremos que $Tor_n^\Lambda(M,-) y Tor_n^\Lambda(-,N)$ son funtores covariantes. Primero veamos que $Tor_n^\Lambda(-,N)$ es un funtor covariante. Sea M un Λ-módulo tomamos su resolución proyectiva reducida P_M, y a esta le aplicamos el funtor covarianre $-\otimes_\Lambda M$ en cada entrada de la resolucion proyectiva reducida y nos queda una sucesión de la siguiente forma

$$P_M \otimes_\Lambda N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_n \otimes_\Lambda 1_N} P_{n-1} \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_{n-1} \otimes_\Lambda 1_N} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_1 \otimes_\Lambda 1_N} P_0 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_0 \otimes_\Lambda 1_N} 0.$$

de aqui calculamos la homología en n, es decir, aplicamos el funtor covariante $H^n(P_M \otimes_\Lambda N)$y obtenemos $Tor_n^\Lambda(M,N)$, donde viene siendo la composcisión de un funtor contravariante y un funtor covariante.

Ahora veamos que $Tor_n^\Lambda(M,-)$ es un funtor covariante. Sea N un Λ-módulo, entonces apliquemos el funtor covariante $(P_n \otimes_\Lambda -$, donde P_n es la n-ésima entrada de la resolución proyectiva reducida P_M de M. Esto induce la cadena $P_M \otimes_\Lambda N$, en la cual usamos el funtor covariante $H_n(\_)$, entonces nos queda

$$H_n(P_M \otimes_\Lambda N) \quad = \quad Tor_n^\Lambda(M,N)$$

con esto tenemos que $Tor_n^\Lambda(-,N)$ es un funtor covariante. Por lo tanto $Tor_n^\Lambda(\_,\_)$ es un bifuntor, donde las dos entradas son covariantes.

■

Teorema 3.3.3. *Sea $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ una sucesión exacta corta de Λ-módulos y M un Λ-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N') \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N'') \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} Tor_{n-1}^\Lambda(M,N') \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M,N'') \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow N' \overset{g'}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de Λ-módulos y P_M una resolución proyectiva reducida de M. Entonces

$$0 \longrightarrow P_M \otimes_\Lambda N' \overset{1_{P_M}\otimes g'}{\rightarrowtail} P_M \otimes_\Lambda N \overset{1_{P_M}\otimes g}{\twoheadrightarrow} P_M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de cadenas. Por el Teorema 3.1.11 existe un homomorfismo $\kappa_n : H_n(P_M \otimes_\Lambda N'') \longrightarrow H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N')$, tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(P_M \otimes_\Lambda N') \xrightarrow{g'_{*\ n}} H_n(P_M \otimes_\Lambda N) \xrightarrow{g_{*\ n}} H_n(P_M \otimes_\Lambda N'') \xrightarrow{\kappa_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N') \xrightarrow{g'_{*\ n-1}} H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N) \longrightarrow H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N'') \xrightarrow{\kappa_{n-1}} \cdots$$

y esto es igual a

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N') \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N'') \xrightarrow{\kappa_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\kappa_n} Tor_{n-1}^\Lambda(M,N') \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M,N'') \longrightarrow \cdots$$

■

Teorema 3.3.4. *Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta que se escinde de Λ-módulos y N un Λ-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M',N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M'',N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M',N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Por la Proposición 3.2.6 podemos construir la sucesión exacta corta que se escinde,

$$P'_M \rightarrowtail P_M \twoheadrightarrow P''_M$$

donde P'_M, P_M y P''_M son las resoluciones proyectivas de M', M y M'', respectivamente. De aqui obtenemos que la sucesión

$$P'_M \otimes_\Lambda N \longrightarrow P_M \otimes_\Lambda N \longrightarrow P''_M \otimes_\Lambda N$$

es una sucesión exacta corta de cadenas que se escinde. De igual modo que en el teorema anterior utilizamos el Teorema 3.1.11 y obtenemos el resultado querido.

■

Sea Q_N una resolución proyectiva reducida de N, el produtcto tensorial $M \otimes_\Lambda Q_N$ con M Λ-módulo, resulta ser una sucesión semiexacta cuya homología $H_n(M \otimes_\Lambda Q_N)$ de grado n la denotaremos por $\overline{Tor}_n^\Lambda(M,N)$.

Proposición 3.3.5. *Los funtores $Tor_0^\Lambda(-,N)$ y $\overline{Tor}_0^\Lambda(M,-)$ son equivalentes naturalmente a los funtores $- \otimes_\Lambda N$ y $M \otimes_\Lambda -$, respectivamente.*

Demostración. Recordemos que decir que los funtores son equivalentes naturalmente es dar una transformación natural entre los funtores. Sea P_M una resolución proyectiva reducida de M,

$$P_M : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \longrightarrow 0$$

Consideramos

$$P_M \otimes_\Lambda N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \longrightarrow P_{n-1} \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_{n-1}\otimes 1_N} \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0.$$

Luego $Tor_0^{\Lambda}(M,N) = P_0 \otimes_\Lambda N/im(\delta_1 \otimes 1_N) = coker(\delta_1 \otimes 1_N)$. Por otro lado tomemos la resolución proyectiva de M

$$P : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

.

Aplicamos el funtor $- \otimes_\Lambda N$

$$P \otimes_\Lambda N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\delta_n \otimes 1_N} \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\epsilon \otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0.$$

De aqui tenemos que $M \otimes N \cong coker(\delta_1 \otimes 1_N)$. Definimos una transformaciona natural t entre $Tor_0^{\Lambda}(-,N)$ y $- \otimes_\Lambda N$, de tal manera que a cada Λ-módulo le asocia un morfismo $t_M : Tor_0^{\Lambda} \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$, donde t_M es el isomorfismo de $Tor_0^{\Lambda}(M,N)$ con $M \otimes_\Lambda N$, tal que para cualquier homorfismo $f : M \longrightarrow M'$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Tor_0^{\Lambda}(M,N) \arrow[r, "t_M"] \arrow[d, "Tor_0^{\Lambda}(f,1_N)"] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, "f \otimes 1_N"] \\
Tor_0^{\Lambda}(M',N) \arrow[r, "t_{M'}"] & M' \otimes_\Lambda N
\end{tikzcd}$$

.

Del mismo modo se obtiene este resultado con $\overline{Tor}_0^{\Lambda}(M,-)$ y $M \otimes_\Lambda -$.

■

Proposición 3.3.6. *Sea P un Λ-módulo proyectivo. Entonces, para los Λ-módulos M y N,*

$$Tor_n^{\Lambda}(P,N) = 0 = \overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,P)$$

para $n \geq 1$.

Demostración. Sea Q una resolución proyectiva de P. Como P es proyectivo, Q es de la forma

$$Q : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{1_P} P \longrightarrow 0$$

de aqui tenemos que $Q \otimes_\Lambda N$ es exacta, es decir,

$$Q \otimes_\Lambda N : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_P \otimes 1_N} P \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es exacta, por lo tanto se tiene que $Tor_n^{\Lambda}(P,N) = 0$ para toda $n \geq 1$.

Por otro lado, sea Q' una resolución proyectiva de P, por el mismo argumento anterior se tiene que $M \otimes_\Lambda Q'$ es exacta, es decir,

$$M \otimes_\Lambda Q' : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \otimes_\Lambda P \xrightarrow{1_M \otimes 1_P} M \otimes_\Lambda P \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(M,P) = 0$ para toda $n \geq 1$.

■

Teorema 3.3.7. $Tor_n^\Lambda(M,N) \cong \overline{Tor}_n^\Lambda(M,N)$

Demostración. Sea

$$K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M$$

una presentación proyectiva de M. Por el Teorema 3.3.4 tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(K,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(P,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

Se puede deducir del Teorema 3.3.3 un resultado análogo para $\overline{Tor}$, de está manera obtenemos la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(K,N) \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(P,N) \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

por la Proposición 3.3.6 tenemos que $Tor_n^\Lambda(P,N) = 0 = \overline{Tor}_n^\Lambda(P,N)$ para $n \geq 1$, entonces

$$0 \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow K \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N$$

y

$$0 \longrightarrow \overline{Tor}_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow K \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N$$

para $n = 1$, por otro lado tenemos

$$0 \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(K,N) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow \overline{Tor}_{n-1}^\Lambda(K,N) \longrightarrow 0$$

para $n \geq 2$.
Es evidente que $Tor_0^\Lambda(M,N) = \overline{Tor}_0^\Lambda(M,N) = M \otimes_\Lambda N$. De aqui a manera de inducción se tiene que el teorema es válido. ■

Teorema 3.3.8. *1. Si P es un Λ-módulo plano, entonces $Tor_n^\Lambda(P,N) = 0$ para $n \geq 1$ y para cualquier N.*

2. Si $Tor_n^\Lambda(P,N) = 0$ para toda N, entonces P es plano.

3.4. $Ext^n_\Lambda(M,N)$

Sea $P_M : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva reducida del Λ-módulo M. Sea N un Λ-módulo y consideremos la sucesión

$$Hom_\Lambda(P_M,N) : \cdots \xleftarrow[Hom_\Lambda(\delta_{n+1},1_N)]{} Hom_\Lambda(P_n,N) \xleftarrow[Hom_\Lambda(\delta_n,1_N)]{} \cdots$$

$$Hom_\Lambda(P_1,N) \xleftarrow[Hom_\Lambda(\delta_1,1_N)]{} Hom_\Lambda(P_0,N) \longleftarrow 0$$

Entonces $Hom_\Lambda(P_M,N)$ resulta ser una sucesión semiexacta porque para toda $n > 1$,

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(\delta_1,1) \circ Hom_\Lambda(\delta_{n-1},1) &= Hom_\Lambda(\delta_{n-1} \circ \delta_n,1) \\ &= Hom_\Lambda(0,1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego podemos formar el Λ-módulo $\mathbb{Z}$-graduado

$$H^*(Hom_\Lambda(P_M,N)) = \{H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Definición 3.4.1. *Para cada $n \geq 0$, denotaremos $H^n(Hom_\Lambda(P_M,N))$ por $Ext^n_\Lambda(M,N)$, y lo llamaremos* ***funtor de extensión*** *de grado n sobre Λ de M y N, y defiimos $H^n_\Lambda(M,N) = 0$ para $n < 0$.*

Se tiene que si Q_M es otra resolución proyectiva reducida de M, entonces

$$H^n(Hom_\Lambda(P_M,N)) \cong H^n(Hom_\Lambda(Q_M,N))$$

por lo que Ext^n_Λ depende solamente de M, N, y n.

Hemos definido Ext^n_Λ a partir de una resolución proyectiva reducida P_M de M, después le aplicamos el funtor contravariante $Hom(-,N)$ y luego calculamos su cohomología:

$$Ext^n_\Lambda(M,N) = H^n(Hom(P_M,N)).$$

Sean $f : M \longrightarrow M''$ y $g : N \longrightarrow N''$ homomorfismos de Λ-módulos. Sean P_M y $P_{M''}$ resoluciones proyectivas reducidas de M y M'', respectivamente. Por el Lema 3.2.3, existe un homomorfismo de cadenas $\varphi : P_M \longrightarrow M''$ que extiende a f. Entonces

$$Hom_\Lambda(\varphi,g) = \left\{Hom_\Lambda(\varphi_n,g) : Hom_\Lambda(P_{M''_n},N'') \longrightarrow Hom_\Lambda(P_{M_n},N)\right\}$$

es un homomorfismo de cocadenas que induce un homomorfismo

$$Hom_\Lambda(\varphi,g)^* : H^*(Hom_\Lambda(P_{M''},N'')) \longrightarrow H^*(Hom_\Lambda(P_M,N))$$

es decir que

$$Hom_\Lambda(\varphi,g)^* : Ext^*_\Lambda(M'',N'') \longrightarrow Ext^*_\Lambda(M,N)$$

Por el Lema 3.2.3 se tiene que no depende de φ, si no exclusivamente de n, f y g, y lo denotaremos por $Ext_{\Lambda}^{*}(f,g)$

Teorema 3.4.2. *$Ext_{\Lambda}^{n}(-,-)$ es un bifuntor de la categoría de Λ-módulos en sí misma. Es contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.*

Demostración. Primero veamos que $Ext_{\Lambda}^{n}(-,N)$ es un funtor contravariante. Sea M un Λ-módulo tomamos su resolución proyectiva reducida P_M, y a esta le aplicamos el funtor contravarianre $Hom(-,M)$ en cada entrada de la resolucion proyectiva reducida y nos queda una sucesión de la siguiente forma

$$Hom_{\Lambda}(P_M,N): \cdots \xleftarrow[Hom_{\Lambda}(\delta_{n+1},1_N)]{} Hom_{\Lambda}(P_n,N) \xleftarrow[Hom_{\Lambda}(\delta_n,1_N)]{} \cdots$$

$$Hom_{\Lambda}(P_1,N) \xleftarrow[Hom_{\Lambda}(\delta_1,1_N)]{} Hom_{\Lambda}(P_0,N) \longleftarrow 0$$

de aqui calculamos la homología en n, es decir, aplicamos el funtor covariante $H^n(Hom_{\Lambda}(P_M,N))$y obtenemos $Ext_{\Lambda}^{n}(M,N)$, donde viene siendo la composcisión de un funtor contravariante y un funtor covariante.

Ahora veamos que $Ext_{\Lambda}^{n}(M,-)$ es un funtor covariante. Sea N un Λ-módulo, entonces apliquemos el funtor covariante $Hom_{\Lambda}(P_n,M)$, donde P_n es la n-ésima entrada de la resolución proyectiva reducida P_M de M. Esto induce la cadena $Hom_{\Lambda}(P_M,N)$, en la cual usamos el funtor covariante $H^n(\_)$, entonces nos queda

$$H^n(Hom_{\Lambda}(P_M,N)) = Ext_{\Lambda}^{n}(M,N)$$

con esto tenemos que $Ext_{\Lambda}^{n}(-,N)$ es un funtor covariante. Por lo tanto $Ext_{\Lambda}^{n}(\_,\_)$ es un bifuntor, donde la primera entrada es contravariante y en la segunda es covariante. ■

Teorema 3.4.3. *Sea*

$$N' \overset{g'}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N''$$

una sucesión exacta corta de Λ-módulos y M un Λ-módulo. Entonces existe una sucesión larga

$$0 \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{0}(M,N') \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{n}(M,N'') \xrightarrow{\kappa^n}$$

$$\xrightarrow{\kappa^n} Ext_{\Lambda}^{n+1}(M'',N) \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{n+1}(M,N) \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{n+1}(M',N) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Sea

$$N' \overset{g'}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N''$$

una sucesión exacta de Λ-módulos y P_M una reolución proyectiva reducida de M. Entonces

$$Hom_{\Lambda}(P_M,N') \rightarrowtail Hom_{\Lambda}(P_M,N) \twoheadrightarrow Hom_{\Lambda}(P_M,N'')$$

es una sucesión exacta corta de cocadenas por la Proposición 1.5.3. Ahora aplicamos el Teorema 3.1.11, y obtenemos el resultado querido.

■

Proposición 3.4.4. *Sea I un Λ-módulo inyectivo. Entonces $Ext^n_\Lambda(M,I)=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, y para todo Λ-módulo M.*

Demostración. Sea P una reolución proyectiva de M. Como P es exacata e I es inyectivo, por el Teorema 1.8.5, se sigue que $Hom_\Lambda(P,I)$ es exacto. Luego tenemos que $H^n(Hom_\Lambda(P,I))=0$ para toda $n\geq 1$ y por lo tanto $Ext^n_\Lambda(M,I)=0$ para toda $n\geq 1$. ∎

3.5. Funtores Derivados

Em esta sección estudiaremos una generalización para los funtores, y la homología que inducen.

Definición 3.5.1. *Sea F un funtor covariante aditivo de la categoría de Λ-módulos $\boldsymbol{Mod_\Lambda}$ en la categoría de grupos abelianos $\boldsymbol{Ab}$. El funtor derivado izquierdo de grado n de F es*

$$L_n(F(M))=H_n(F(P_M))$$

donde P_M es una resolución proyectiva reducida del Λ-módulos M.

Con esto tenemos definido para cada funtor covariante aditivo F, una sucesión de funtor que van de la categoría ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ a $\mathbf{Ab}$. Estos funtores se calculan tomando la resolución proyectiva reducida P_M de $M\in{}_\Lambda\mathbf{Mod}$, luego aplicando el funtor F a cada entrada de la resolución y despues calculando la homología, es decir, sea P_M la resolución proyectiva de M

$$P_M:\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{\delta_n}P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{\delta_1}P_0\longrightarrow 0$$

aplicando el funtor F nos queda

$$F(P_M):\cdots\longrightarrow F(P_n)\xrightarrow{F(\delta_n)}F(P_{n-1})\longrightarrow\cdots\xrightarrow{F(\delta_1)}F(P_0)\longrightarrow 0$$

calculamos la homología y tenemos que

$$L_n(F(M))=H_n(F(P_M))=\mathrm{Ker}\ F(\delta_n)/\mathrm{Im}\ F(\delta_{n+1})$$

Ejemplo 3.5.2. Sea F el funtor covariante $-\otimes_\Lambda N$ y sea P_M la resolución proyectiva reducida de $M\in{}_\Lambda\mathbf{Mod}$, es decir,

$$P_M:\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{\delta_n}P_{n-1}\xrightarrow{\delta_{n-1}}\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{\delta_1}P_0\longrightarrow 0$$

aplicamos $-\otimes_\Lambda N$ a la resolución, y obtnemos

$$P_M\otimes_\Lambda N:\cdots\longrightarrow P_n\otimes_\Lambda N\xrightarrow{\delta_n\otimes 1_N}P_{n-1}\otimes_\Lambda N\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\otimes_\Lambda N\longrightarrow 0$$

entonces $L_n(-\otimes_\Lambda N(M))=H_n(P_M\otimes_\Lambda N)=Tor^\Lambda_n(M,N)$, es decir, $L_n(-\otimes_\Lambda N)=H_n(P_{\_}\otimes_\Lambda N)=Tor^\Lambda_n(\_,N)$ segun la Definición 3.3.1. Se dice que $Tor^\Lambda_n(-,N)$ es el funtor derivado izquierdo de grado n del funtor covarianteaditivo $-\otimes N$.

Proposición 3.5.3. *Se tiene que $L_n(F(M))$ no depende de la resolución proyectiva reducida de M.*

Demostración. Sea

$$Q_M : \cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{\delta_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \longrightarrow 0$$

otra resolución proyectiva de M. Por resultados anteriores se tiene que existen morfismos $\varphi : P_M \longrightarrow Q_M$ y $\varphi' : Q_M \longrightarrow P_M$ tales que $\varphi' \circ \varphi \sim 1_{P_M}$ y $\varphi \circ \varphi' \sim 1_{Q_M}$. Aplicando un funtor covariante aditivo F tenemos que $F(\varphi)$ y $F(varphi')$ inducen la familia de morfismos

$$H_*(\varphi) = \{H_n(F(\varphi)) : F(P_n) \longrightarrow F(Q_n)\}$$

y

$$H_*(\varphi') = \{H_n(F(\varphi')) : F(Q_n) \longrightarrow F(P_n)\}$$

esto es

$$\begin{tikzcd}
P_M : \cdots \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & P_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, shift left, "\varphi_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
Q_M : \cdots \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\varphi'"] & P_n \arrow[r, "\delta'_n"] \arrow[u, shift left, "\varphi'_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "\delta'_{n-1}"] \arrow[u, shift left, "\varphi'_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Aplicamos el funtor y tenemos

$$\begin{tikzcd}
F(P_M) : \cdots \arrow[r] \arrow[d, shift left, "F(\varphi)"] & F(P_n) \arrow[r, "F(\delta_n)"] \arrow[d, shift left, "F(\varphi_n)"] & F(P_{n-1}) \arrow[r, "F(\delta_{n-1})"] \arrow[d, shift left, "F(\varphi_{n-1})"] & \cdots \\
F(Q_M) : \cdots \arrow[r] \arrow[u, shift left, "F(\varphi')"] & F(P_n) \arrow[r, "F(\delta'_n)"] \arrow[u, shift left, "F(\varphi'_n)"] & F(P_{n-1}) \arrow[r, "F(\delta'_{n-1})"] \arrow[u, shift left, "F(\varphi'_{n-1})"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi' \circ \varphi \sim 1_{P_M}$ tenemos que $F(\varphi') \circ F(\varphi) = F(\varphi' \circ \varphi)$ por ser un funtor covariante entonces $F(\varphi' \circ \varphi) \sim F(1_{P_M}) = 1_{F(P_M)}$. De la misma forma como $\varphi \circ \varphi' \sim 1_{Q_M}$ tenemos que $F(\varphi) \circ F(\varphi') = F(\varphi \circ \varphi')$ y de aqui $F(\varphi \circ \varphi') \sim F(1_{Q_M}) = 1_{F(Q_M)}$. Entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
H_*(F(\varphi')) \circ H_*(F(\varphi)) & = & \{H_n(F(\varphi')) \circ H_n(F(\varphi))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
 & = & \{H_*(F(\varphi') \circ F(\varphi))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
 & = & \{H_*(F(\varphi' \circ \varphi))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
 & & \{H_n(F(1_{P_M}))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
 & = & \left\{H_n(1_{F(P_M)})\right\}_{n\in\mathbb{Z}}
\end{array}$$

donde $H_n(1_{F(P_M)})$ es el automorfismo identidad de $H_n(F(P_M))$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Del mismo modo vemos que

$$\begin{array}{rcl} H_*(F(\varphi)) \circ H_*(F(\varphi')) & = & \{H_n(F(\varphi)) \circ H_n(F(\varphi'))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ & = & \{H_*(F(\varphi) \circ F(\varphi'))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ & = & \{H_*(F(\varphi \circ \varphi'))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ & & \{H_n(F(1_{Q_M}))\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ & = & \left\{H_n(1_{F(Q_M)})\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

donde $H_n(1_{F(Q_M)})$ es un automorfismo identidad de $H_n(F(Q_M))$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto se tiene que $H_*(F(\varphi))$ y $H_*(F(\varphi'))$ son isomorfismos entonces $L_n(F(M))$ no depende de la resolución proyectiva. ■

Proposición 3.5.4. *Para cada* $n = 0, 1, 2...$, $L_n(F) : \mathbf{Mod_\Lambda} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ *es un funtor covariante aditivo.*

Demostración. Sean P_M y Q_N resoluciones proyectivas reducida de M y N, respectivamente. Entonces

$$P_M \otimes_\Lambda Q_N : \cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}\otimes\delta'_{n+1}} P_n \otimes_\Lambda Q_n \xrightarrow{\delta_n\otimes\delta'_n} \cdots \longrightarrow 0$$

es la resolución proyectiva reducida de $M \otimes_\Lambda N$. Luego $F(P_M \otimes_\Lambda Q_N) = F(P_M) \otimes_\Lambda F(Q_N)$ ya que es un funtor aditivo. Entonces

$$\begin{array}{rcl} L_n(F(M \otimes_\Lambda N)) & = & H_n(F(P_M) \otimes_\Lambda Q_N) \\ & = & H_n(F(P_M) \otimes_\Lambda F(Q_N)) \\ & = & H_n(F(P_M)) \otimes_\Lambda H_n(F(Q_N)) \\ & = & L_n(F(M)) \otimes_\Lambda L_n(F(N)) \end{array}$$

■

Proposición 3.5.5. *Sea* $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ *una sucesión exacta corta que se escinde de* Λ*-módulos y* F *un funtor covariante aditivo de la categoría de* Λ*-módulos en la categoría de grupos abelianos. Entonces existe un homomorfismo* $\kappa_n : L_n(F(M'')) \longrightarrow L_{n-1}(F(M'))$ *para* $n = 1, 2, 3, ...$ *tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \longrightarrow L_n(F(M')) \longrightarrow L_n(F(M)) \longrightarrow L_n(F(M'')) \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} L_{n-1}(F(M')) \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0(F(M')) \longrightarrow 0$$

Demostración. Por la Proposición 3.2.6 se tiene que

$$P_{M'} \rightarrowtail P_M \twoheadrightarrow P_{M''}$$

es una sucesión exacta corta. Como F es un funtor covariante aditivo y $P_M = P_{M'} \otimes P_{M''}$ se tiene que

$$\begin{aligned} F(P_M) &= F(P_{M'} \otimes P_{M''}) \\ &= F(P_{M'}) \otimes F(P_{M''}) \end{aligned}$$

entonces

$$F(P_{M'}) \rightarrowtail F(P_M) \twoheadrightarrow F(P_{M''})$$

es una sucesión exacta corta. Por la Proposición 3.1.11 se tiene que existe $k_n : L_n(F(P_{M''})) \longrightarrow L_{n-1}(F(P_{M'}))$ tal que

$$\cdots \longrightarrow L_n(F(M')) \longrightarrow L_n(F(M)) \longrightarrow L_n(F(M'')) \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} L_{n-1}(F(M')) \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0(F(M')) \longrightarrow 0$$

es exacta. ■

Teorema 3.5.6. *Si P es un Λ-módulo proyectivo, entonces $L_n(F(P)) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $L_0(F(P)) = F(P)$.*

Demostración. Sea

$$Q_P : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Q_0 = P \longrightarrow 0$$

otra resolución proyectiva de P. Entonces si tomamos cualquier otra resolución proyectiva de P tiene la misma homología en todos los puntos, entonces $H_n(F(Q_P)) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $H_0(F(Q_P)) = F(P_0)$

■

Teorema 3.5.7. *Sea F un funtor covariante aditivo exacto derecho, entonces $L_0(F) \cong F$.*

Demostración. Sea

$$P : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva. Luego

$$F(P) : \cdots \longrightarrow F(P_n) \xrightarrow{\delta_n} \cdots \longrightarrow F(P_1) \xrightarrow{\delta_1} F(P_0) \xrightarrow{\delta_0} F(M) \xrightarrow{\rho} 0$$

es exacta, entonces

$$\begin{aligned} H_0(F(P)) &= \text{Ker } \delta_0 / \text{Im } \delta_1 \\ &= F(P_0)/0 \\ &\cong F(P_0) \end{aligned}$$

De aqui tenemos que $F(P_0) \cong F(M)$ ya que Im $\delta_0 = 0$ y Ker $\rho = F(M)$ e Im $\rho = 0$.

■

Todos los resultados anteriores se pueden obtener análogamente de las demostraciónes de los funtores derivados izquierdos.

Capítulo 4

Cohomología de grupos

4.1. G-módulos

Estudiaremos el caso en que le asociamos al grupo G un anillo que denotaremos $\mathbb{Z}$ que será en esencia una suma de copias de $\mathbb{Z}$, tantas como elementos tiene G.

Definición 4.1.1. *Sea el anillo $\mathbb{Z}[G]$ del grupo G, el conjunto de sumas formales $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i$, $\lambda_i\in\mathbb{Z}$, $g_i\in G$, donde toda $\lambda_i=0$ excepto una cantidad finita, junto con operaciones binarias*

$$+:\mathbb{Z}[G]\times\mathbb{Z}[G]\longrightarrow\mathbb{Z}[G]\quad y\quad \cdot:\mathbb{Z}[G]\times\mathbb{Z}[G]\longrightarrow\mathbb{Z}[G]$$

dadas por

1. $(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)+(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)=\sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)g_i$
2. $(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)=\sum_{i\in I}(\sum_{g_j\cdot g_k=g_i}\lambda_j\mu_k)g_i$

Veamos que $\mathbb{Z}[G]$ es un anillo.

1. Por como se definió la suma se tiene que es cerrado.
2. Sean $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i,\sum_{i\in I}\mu_i g_i,\sum_{i\in I}\kappa_i g_i\in\mathbb{Z}[G]$, se cumple que

$$\begin{aligned}(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i+\sum_{i\in I}\mu_i g_i)+\sum_{i\in I}\kappa_i g_i &= \sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)g_i+\sum_{i\in I}\kappa_i g_i\\ &= \sum_{i\in I}((\lambda_i+\mu_i)+\kappa_i)g_i\\ &= \sum_{i\in I}(\lambda_i+(\mu_i+\kappa_i))g_i\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i g_i+\sum_{i\in I}(\mu_i+\kappa_i)g_i\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i g_i+(\sum_{i\in I}\mu_i g_i+\sum_{i\in I}\kappa_i g_i)\end{aligned}$$

es asociativo bajo la suma.

3. Sea $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i, \sum_{i\in I}\mu_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\lambda_i g_i + \sum_{i\in I}\mu_i g_i &= \sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)g_i\\ &= \sum_{i\in I}(\mu_i+\lambda_i)g_i\\ &= \sum_{i\in I}\mu_i g_i + \sum_{i\in I}\lambda_i g_i\end{aligned}$$

es conmutativo bajo la adición.

4. Existe $\sum_{i\in I} 0g_i \in \mathbb{Z}[G]$ tal que para toda $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$ se cumple que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}0g_i + \sum_{i\in I}\lambda_i g_i &= \sum_{i\in I}(0+\lambda_i)g_i\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i g_i\end{aligned}$$

es el neutro aditivo.

5. Para cada $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$ existe $\sum_{i\in I}(-\lambda_i)g_i \in \mathbb{Z}[G]$ tal que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\lambda_i g_i + \sum_{i\in I}(-\lambda_i)g_i &= \sum_{i\in I}(\lambda_i+(-\lambda_i))g_i\\ &= \sum_{i\in I}0g_i\end{aligned}$$

es inverso aditivo.

6. Es cerrado bajo la multiplicación por la definición anterior.

7. Sean $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i, \sum_{i\in I}\mu_i g_i, \sum_{i\in I}\kappa_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$, se tiene que

$$\begin{aligned}((\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i))\cdot(\sum_{i\in I}\kappa_i g_i) &= (\sum_{i\in I}(\sum_{g_j\cdot g_k=g_i}\lambda_j\mu_k)g_i)(\sum_{i\in I}\kappa_i g_i)\\ &= \sum_{i\in I}(\sum_{(g_j\cdot g_k)\cdot g_h=g_i}(\lambda_j\mu_k)\kappa_h)g_i\\ &= \sum_{i\in I}(\sum_{g_j(\cdot g_k\cdot g_h)=g_i}\lambda_j(\mu_k\kappa_h))g_i\\ &= (\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)(\sum_{i\in I}(\sum_{g_k\cdot g_h=g_i}\mu_k\kappa_h)g_i)\\ &= (\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot((\sum_{i\in I}\mu_i g_i)(\sum_{i\in I}\kappa_i g_i))\end{aligned}$$

es asociativo bajo la multiplicación.

8. Sean $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i, \sum_{i\in I}\mu_i g_i, \sum_{i\in I}\kappa_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$, se cumple que

$$\begin{aligned}
(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i + \sum_{i\in I}\kappa_i g_i) &= \sum_{i\in I}\lambda_i g_i(\sum_{i\in I}(\mu_i+\kappa_i)g_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\sum_{g_j\cdot g_k=g_i}\lambda_j(\mu_k+\kappa_k))g_i \\
&= \sum_{i\in I}(\sum_{g_j\cdot g_k=g_i}\lambda_j\mu_k+\lambda_j\kappa_k)g_i \\
&= \sum_{i\in I}(\sum_{g_j\cdot g_k=g_i}\lambda_j\mu_k)g_i + \sum_{i\in I}(\sum_{g_j\cdot g_k=g_i}\lambda_j\kappa_k)g_i \\
&= (\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i) + (\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\kappa_i g_i)
\end{aligned}$$

es distributivo.

De otra manera, podemos decir que el anillo $\mathbb{Z}[G]$ del grupo G consiste en el grupo abeliano libre generado por los elementos de G como base, y tal que el producto de dos elementos está dado por el producto de G. También existe una equivalencia para la multiplicación, esta es

$$(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i) = \sum_{j\in J, i\in I}\lambda_i\mu_j g_i g_j$$

Teorema 4.1.2. *Sea Λ un anillo con 1_Λ y $\varphi : G \longrightarrow \Lambda$ una función tal que $\varphi(1_\Lambda) = 1$ y $\varphi(g_i g_j) = \varphi(g_i)\varphi(g_j)$. Entonces existe un homomorfismo de anillos único $\psi : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \Lambda$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{Z}[G] \arrow[d, "\psi"] \\
& \Lambda
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos $\psi(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i\varphi(g_i)$. Veamos que es un morfismo de anillos

1. Sean $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i, \sum_{i\in I}\mu_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$ entonces

$$\begin{aligned}
\psi(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i + \sum_{i\in I}\mu_i g_i) &= \psi(\sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)g_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)\varphi(g_i) \\
&= \sum_{i\in I}\lambda_i\varphi(g_i) + \sum_{i\in I}\mu_i\varphi_i(g_i) \\
&= \psi(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i) + \psi(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)
\end{aligned}$$

2. Sean $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i, \sum_{i\in I}\mu_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$, con la equivalencia de la multiplicacíon anterior vemos que

$$\begin{aligned}
\psi((\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)) &= \psi(\sum_{j\in J, i\in I}\lambda_i\mu_j g_i g_j) \\
&= \sum_{j\in J, i\in I}\lambda_i\mu_j\varphi(g_i g_j) \\
&= \sum_{j\in J, i\in I}\lambda_i\mu_j\varphi(g_i)\varphi(g_j) \\
&= (\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi(g_i))\cdot(\sum_{i\in I}\mu_i\varphi(g_i)) \\
&= \psi(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i)\cdot\psi(\sum_{i\in I}\mu_i g_i)
\end{aligned}$$

3. Probemos la unicidad. Supongamos que existe un homomorfimo $\psi' : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \Lambda$, que de igual modo hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{Z}[G] \arrow[d, "\psi'"] \\
& \Lambda
\end{tikzcd}$$

esto es que $(\psi' \circ \iota) = \varphi = (\psi \circ \iota)$, tenemos que para $x \in G$

$$\begin{aligned}
\psi'(\iota(x)) &= \psi(\iota(x)) \\
\psi'(x) &= \psi(x)
\end{aligned}$$

y como tomamos una x arbitraria, entonces se tiene que $\psi' = \psi$. Por lo tanto es un homomorfismo de anillos.

■

Ejemplo 4.1.3. Sea G un grupo cíclico de orden n generado por x. Entonces G es de la forma

$$G = \left\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\right\}$$

donde $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[G]$ y se tiene que $x^n = 1$. Luego si tomamos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[t]$, y consideremos el cociente $\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$ donde sus elementos son de la forma $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$, tenemos que

$$Z[G] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$$

mediante ψ dada de la forma

$$\psi(x) = t$$

de esta manera son isomorfos.

Consideremos la función trivial φ de un grupo G al anillo $\mathbb{Z}$ que envía a cualquier elemento $g \in G$ en el $1 \in \mathbb{Z}$. Por el Teorema 4.1.2, φ da a lugar a un hommorfismo de anillos único $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$ al cual llamaremos **aumentación** de $\mathbb{Z}$. Entonces, si tomamos un elemento $\sum_{i\in I}\lambda_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$ nos queda

$$\epsilon(\sum_{i\in I}\lambda_i g_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i.$$

Definición 4.1.4. *El núcleo del homomorfismo de aumentación $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$ se llama **ideal de aumentación** de G y lo denotamos con IG.*

Definición 4.1.5. *Sea $(M,+)$ un grupo abeliano. Diremos que M es un **G-módulo izquierdo** si existe $\kappa : G \times M \longrightarrow M$ denotado por $k(g,x) = g \cdot x$, tal que*

1. *para toda $x \in M$ se cumple que*
$$1 \cdot x = x.$$

2. *para $g, g' \in G$ y $x \in M$ tenemos que*
$$(gg') \cdot x = g(g' \cdot x)$$

3. *para $g \in G$ y $x_1, x_2 \in M$ se cumple que*
$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$

Es decir, G opera en el grupo abeliano M por la izquierda, donde κ es la acción de G en M. De otra manera, podemos decir que un G-módulo M consiste de un grupo abeliano M junto con un homomorfismo
$$\kappa : G \longrightarrow Aut(M).$$

Por el Teorema 4.1.2, $\kappa : G \longrightarrow \Lambda = Aut(M) \subset End(M)$ determina un homomorfismo único
$$\psi : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow End(M),$$
proporcionando a M una estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo.

Definición 4.1.6. *Sea M un grupo abeliano aditivo y G un grupo multiplicativo. Diremos que M es un G-módulo **trivial** si*
$$gx = x$$
para toda $g \in G$ y $x \in M$.

En otras palabras, M es un G-módulo trivial si la accion $\kappa : G \times M \longrightarrow M$ es trivial, es decir, deja fijos a todos los elementos de M. Notemos que cualquier grupo abeliano M puede verse como un G-módulo trivial para cualquier grupo G. Por ejemplo, cuando consideremos los números enteros $\mathbb{Z}$, siempre los tomaremos como un G-módulo trivial, es decir, para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$
$$gn = n.$$

Ejemplo 4.1.7. Consideremos $Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$, M y N dos $\mathbb{Z}$-módulos. Definamos una estructura de G-módulo izquierdo en $Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$ como
$$\kappa : G \times Hom_{\mathbb{Z}}(M,N) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$$
mediante
$$(g,\varphi) \longmapsto g\varphi g^{-1}.$$
Veamos que efectivamente es un G-módulo

1. Para todo $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$ se cumple que

$$\begin{aligned}\kappa(1,\varphi) &= 1\varphi 1^{-1}\\ &= 1\varphi 1\\ &= \varphi\end{aligned}$$

2. Sean $g, g' \in G$ y $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$, entonces

$$\begin{aligned}\kappa(gg',\varphi) &= gg'\varphi(gg')^{-1}\\ &= gg'\varphi g'^{-1}g^{-1}\\ &= \kappa(g, g'\varphi g'^{-1})\\ &= \kappa(g,\kappa(g',\varphi))\end{aligned}$$

3. Sean $g \in G$ y $\varphi, \varphi' \in Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$, entonces

$$\begin{aligned}\kappa(g,\varphi+\varphi') &= g(\varphi+\varphi')g^{-1}\\ &= (g\varphi + g\varphi')g^{-1}\\ &= g\varphi g^{-1} + g\varphi' g^{-1}\\ &= \kappa(g,\varphi)+\kappa(g,\varphi')\end{aligned}$$

Con esto hemos construido un G-módulo izquierdo.

En adelante consideraremos las resoluciones proyectivas donde cada elemento de la cadena es un G-módulo proyectivo, a las cuales llamaremos **G-resoluciones proyectivas** o $\mathbb{Z}[G]$**-resoluciones proyectivas** de $\mathbb{Z}[G]$-módulos proyectivos.

4.2. Cohomología de grupos

Consideremos un caso especial de la Definicón 3.3.1, Λ será el anillo entero $\mathbb{Z}[G]$ de un grupo G, P una G-resolución proyectiva reducida del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y N un G-módulo izquierdo. Entonces se tiene que

$$P_{\mathbb{Z}} : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

consideremos $P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$, esto es

$$P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow 0$$

que es una cadena y, por lo tanto, podemos medir su exactitud mediante

$$H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)$$

Definición 4.2.1. *El* ***grupo de homología*** *de grado n de un grupo G con coeficientes en un G-módulo izquierdo N es*

$$H_n(G,N) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)$$

También es posible definir la homología de grado n de un grupo G con coeficientes en un G-módulo derecho N como:

$$H_n(G,N) \quad = \quad Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N)$$

Ahora veamos otro caso. Sea $\mathbb{Z}[G]$ un anillo entero, es decir que no tenga divisores de cero, P una G-resolución proyectiva del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y N un G-módulo izquierdo. Entonces se tiene la resolución proyectiva reducida

$$P_{\mathbb{Z}} : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

ahora consideremos $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}},N)$

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}},N) : \cdots \longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_n,N) \longleftarrow \cdots \longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_0,N) \longleftarrow 0$$

que es una cocadena a la cual podemor medir su inexactitud mediante

$$H^n(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(P_{\mathbb{Z}},N)) \quad = \quad Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N)$$

Definición 4.2.2. *El **grupo de cohomología** de grado n de un grupo G con coeficientes en un G-módulo izquierdo N es*

$$H^n(G,N)) \quad = \quad Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N)$$

Recordemos que $Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)$ y $Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}$ son funtores covariantes por los Teoremas 3.3.2 y 3.4.2, respectivamente. También tenemos que $H_n(G,-)$ y $H^n(G,-)$ son funtores covariantes de la categoría de G-módulos en la categoría de grupos abelianos. Además se tienen sucesiones exactas largas de homología en la segunda entrada únicamente, ya que, si tomamos dos G-módulos izquierdos G_1 y G_2 entonces $H_n(G_1,-), H_n(G_2,-)$ y $H^n(G_1,-), H^n(G_2,-)$ están definidos sobre distintos anillos $\mathbb{Z}[G_1]$ y $\mathbb{Z}[G_2]$, por lo cual se puede definir la sucesión exacta larga.

Teorema 4.2.3. *Sea*

$$N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N$$

una sucesión exacta corta de G-módulos. Entonces existen homomorfismos

$$\kappa_n : H_n(G,N'') \longrightarrow H_{n-1}(G,N') \qquad \kappa^n : H^n(G,N'') \longrightarrow H^{n+1}(G,N')$$

para cada $z \in \mathbb{Z}$, tales que las siguientes sucesiones son exactas

$$\cdots \longrightarrow H_n(G,N') \longrightarrow H_n(G,N) \longrightarrow H_n(G,N'') \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(G,N') \longrightarrow \cdots$$

y

$$\cdots \longrightarrow H_n(G,N') \longrightarrow H_n(G,N) \longrightarrow H_n(G,N'') \xrightarrow{\kappa^n} H_{n+1}(G,N') \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Como se tiene que $H_n(G,-) = Tor^{\mathbb{Z}_n(\mathbb{Z},-)}$, aplicamos el Teorema 3.3.3 obtenemos la primera sucesión.
Ahora, también se tiene que $H^n(G,-) = Ext^n_{\mathbb{Z}[\mathbb{G}]}$, aplicamos el Teorema 3.4.3 se tiene la segunda sucesión. ■

Proposición 4.2.4. *Sea P un $\mathbb{Z}[G]$-módulo proyectivo e I un $\mathbb{Z}[G]$-módulo inyectivo. Entonces*

$$H_n(G,P) = 0 \text{ y } H^n(G,I) = 0$$

para $n \geq 1$.

Demostración. Se obtiene de inmediato del Teorema 3.3.6 y del Teorema 3.4.4, respectivamente. ∎

Definición 4.2.5. *Sea G un grupo y N un G-módulo. El subgrupo de* ***invariantes*** *de N, denotaremos por N^G, consiste en todos los elementos $y \in N$ tales que la acción de G es trivial. Es decir*

$$N^G = \{y \in N | gy = y \text{ para toda } g \in G\}.$$

Definición 4.2.6. *Sea G un grupo y N un G-módulo. El grupo de* ***coinvariantes*** *de N, denotado por N_G, es el cociente de N por el subgrupo aditivo generado por los elementos de la forma $gy - y$, con $g \in G$ y $y \in N$*

En otras palabras $N_G = N/T$ donde $T = < gy - y >$ con $g \in G$ y $y \in N$.

Como $gy - y = (g-1)y$ y los elementos de la forma $g - 1 \in \mathbb{Z}[G]$ generan IG, entonces $T = IG \cdot N$ donde $\cdot$ es la acción de IG sobre N. Ahora si aplicamos el funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}} N$ a la sucesión exacta corta

$$IG \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

donde ι es la inclusión de IG en $\mathbb{Z}[G]$ y además es el Ker ϵ. Entonces obtenemos

$$IG \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$$

luego se tiene que

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \cong N.$$

Como N es un G-módulo, bajo este isomorfismo se tiene que Im $\iota = IG \cdot N$. Entonces por el Primer Teorema de Isomorfismos se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N &\cong N/IG \cdot N \\ &= N/T \\ &= N^G \end{aligned}$$

Teorema 4.2.7. *Sea G un grupo y N un G-módulo. Entonces*

$$H_0(G,N) = N_G \text{ y } H^0(G,N) = N^G$$

Demostración. Por definición se tiene que

$$\begin{aligned} H_0(G,N) &= Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \\ &= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \\ &\cong N_G \end{aligned}$$

Por lo tanto $H_0(G,N) = N_G$.

Análogamente por definición tenemos que

$$\begin{aligned} H^0(G,N) &= Ext^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \\ &= Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \end{aligned}$$

Un homomorfismo $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N)$ está determinado por $\varphi(1) = y \in N$. Como φ es un homomorfismo de G-módulos, y como $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial, tenemos que para toda $g \in G$

$$\begin{aligned} g\cdot y &= \varphi(g\cdot 1) \\ &= \varphi(1) \\ &= y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $H^0(G,N) = N^G$. ■

Corolario 4.2.8. *Si N es un G-módulos trivial, entonces*

$$H_0(G,N) \cong N \text{ y } H^0(G,N) \cong N$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned} H_0(G,N) &= N_G \\ &= N/T \end{aligned}$$

donde $T =< gy - y >$ con $y \in N$ y $g \in G$, pero como N es trivial tenemos que

$$\begin{aligned} < gy - y > &= < y - y > \\ &= < 0 > \end{aligned}$$

así tenemos $H_0(G,N) \cong N$.
Ahora como

$$H^0(G,N) \cong N^G$$

y $gy = y$ para toda $g \in G$ y para toda $y \in N$, por lo tanto $H^0(G,N) = 0$ ■

Proposición 4.2.9. *Sea*

$$H \rightarrowtail G \xrightarrow{\rho} \twoheadrightarrow Q$$

una sucesión exacta de grupos. Entonces

1. $\mathbb{Z}[Q] \cong \mathbb{Z}[H] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$ *como G-módulos derechos.*

2. $Tor_n^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z},N) \cong Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],N)$ *para N un G-módulo izquierdo.*

Demostración.

1. Los elementos $g_i \otimes 1$ forman una base para $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}$, donde $g_i \in G$ para $i \in I$. Tomemos en cuenta que la acción de $\mathbb{Z}[H]$ en $\mathbb{Z}$ es una acción trivial y la acción de $\mathbb{Z}[H]$ en $\mathbb{Z}[G]$ como un subanillo.
   Definimos el isomorfismo mediante
   $$\begin{array}{rcl} \eta : \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Q] \\ (g_i \otimes 1) & \longmapsto & 1\rho(g_i) = Hg_i \end{array}$$
   esto es, para cada elemento $\sum_{i \in I} \lambda_i (g_i \otimes 1) \in \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}$ se tiene que
   $$\begin{aligned} \eta(\sum_{i \in I} \lambda_i (g_i \otimes 1)) &= \eta(\sum_{i \in I} (g_i \otimes 1 \cdot \lambda_i)) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \rho(g_i) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i H g_i \end{aligned}$$
   y debido a que la cadena es exacta se tiene que $G/H \cong Q$, por lo que tenemos que $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[Q]$.

2. Sea P una G-resolución proyectiva de N, que también, se puede tomar su restricción para ser una G-resolución proyectiva. Partiendo de eso y de la primera parte tenemos
   $$\begin{aligned} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} P &\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P) \\ &= (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P \\ &= \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P \end{aligned}$$
   tomando la homología,
   $$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} P) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"] & Tor_n^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}, N) \arrow[d, "\cong"] \\ H_n(\mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P) \arrow[r, equal] & Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q], N) \end{tikzcd}$$

■

Lema 4.2.10. *Sea*
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, tail] & G \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$
una sucesión exacta corta de grupos. Entonces la siguiente sucesión de Q-módulos es exacta
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_1(H, Z) \arrow[r] & \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \arrow[r] & IQ \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta de G-módulos

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

consideramos el funtor $Tor_{*}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],-)$, el cual induce la siguiente sucesión exacta

$$\cdots Tor_{1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],IG) \longrightarrow Tor_{1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],\mathbb{Z}[G]) \longrightarrow Tor_{1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],\mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}[Q]\otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}[Q]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[Q]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{Z}[G]$ es un G-módulo proyectivo, tenemos que $Tor_{1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],\mathbb{Z}[G]) = 0$. Debido a que todos los elementos de la suceción también son Q-módulos se tiene que

$$\mathbb{Z}[Q] \cong \mathbb{Z}[Q]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G] \quad\longrightarrow\quad \mathbb{Z}[Q]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

es decir, es el homomorfismo aumentación de $\mathbb{Z}[Q]$ y por la exactitud de la cadena $\mathrm{Im}\,\kappa = \mathrm{Ker}\,\rho = IQ$, por último tenemos que por el inciso 2 de la proposición anterior

$$\begin{aligned} H_1(H,\mathbb{Z}) &= Tor_{1}^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \\ &= Tor_{1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[Q],\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Así obtenemos la sucesción exacta

$$0 \longrightarrow H_1(H,Z) \longrightarrow \mathbb{Z}[Q]\otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow IQ \longrightarrow 0$$

■

Proposición 4.2.11. *Consideremos la siguiente sucesión exacta corta*

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Entonces $H_n(G,N) \cong Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(IG,N)$ *y* $H^n(G,N) \cong Ext_{\mathbb{Z}[G]}^{n-1}(G,N)$ *para* $n > 1$.

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

por el Teorema 3.3.4 se le asocia una sucesión exacta larga

$$\longrightarrow Tor_{n}^{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) \longrightarrow Tor_{n}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \longrightarrow Tor_{n}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \longrightarrow Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \longrightarrow$$

como $\mathbb{Z}[G]$ es proyectivo tenemos que $Tor_{n}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) = 0 = Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N)$. De aquí tenemos que

$$H_n(G,N) \cong Tor_{n-1}^{\mathbb{Z}[G]}(IG,N)$$

El procedimiento se realiza de manera analoga para la cohomología. ■

4.3. $H_1(G,N)$ y $H^1(G,N)$

Lema 4.3.1. *Sea G un grupo, IG su ideal de aumentación. Entonces el grupo aditivo $IG/(IG)^2$ es isomorfo al grupo multiplicativo $G/[G,G]$, donde $[G,G]$ es el subgrupo conmutador de G.*

Demostración. Los elementos de la forma $g-1$, con $1 \neq g \in G$, forman una base de IG. Definamos $\varphi : G \longrightarrow IG/(IG)^2$ mediante $g \longmapsto (g-1)+(IG)^2$. Veamos que φ es un homomorfismo.

Sean $x, y \in G$ entonces tenemos que ver que

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

es decir,

$$\varphi(x \cdot y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 0 + (IG)^2$$

calculando vemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x \cdot y) - \varphi(x) - \varphi(y) &= (xy-1)-(x-1)-(y-1)+(IG)^2\\ &= xy-x-y+1+(IG)^2\\ &= (x-1)(y-1)+(IG)^2\end{aligned}$$

por lo tanto es un hommorfismo.

Notemos que $[G,G] \in ker\varphi$ ya que $IG/(IG)^2$ es abeliano, entonces φ induce

$$\begin{aligned}\psi : G/[G,G] &\longrightarrow IG/(IG)^2\\ g \cdot [G,G] &\longmapsto (g-1)+(IG)^2\end{aligned}$$

Por otro lado, definimos $\varphi' : IG \longrightarrow G/[G,G]$, donde $\varphi'(g-1) = g \cdot [G.G]$. Sea $x = (\sum_{i \in I} \lambda_i (g_i - 1))(\sum_{i \in I} \mu_i (g_i - 1)) \in (IG)^2$, entonces

$$\begin{aligned}(\sum_{i\in I} \lambda_i(g_i-1))(\sum_{i\in I}\mu_i(g_i-1)) &= \sum_{i,j\in I} \lambda_i\mu_j(g_i-1)(g_j-1)\\ &= \sum_{i,j\in I}\lambda_i\mu_j\left[(g_ig_j-1)-(g_i-1)-(g_j-1)\right]\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \varphi'(\sum_{i,j\in I}\lambda_i\mu_j\left[(g_ig_j-1)-(g_i-1)-(g_j-1)\right])\\ &= \prod_{i\in I}(g_ig_jg_i^{-1}g_j^{-1})^{\lambda_i\mu_j}\cdot[G,G]\\ &= [G,G]\end{aligned}$$

así tenemos que $(IG)^2 \subset \text{Ker } \varphi'$. Por lo tanto inducen un homomorfismo

$$\begin{aligned}\psi' : IG/(IG)^2 &\longrightarrow G/[G,G]\\ (g-1)+(IG)^2 &\longmapsto g \cdot [G,G]\end{aligned}$$

Tenemos que $\psi \circ \psi' = 1_{IG/(IG)^2}$ y $\psi' \circ \psi = 1_{G/[G,G]}$, entonces se tiene un isomorfismo entre $IG/(IG)^2$ y $G/[G,G]$. ■

Teorema 4.3.2. $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong IG/(IG)^2$.

Demostración. Por la Definición 4.2.1 $H_1(G,\mathbb{Z}) = Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Considerando la resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

aplicando el funtor $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} -$ y con los resultados obtenidos en el capítulo 3 sección 3, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, IG) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}[G]) \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa_1}$$

$$\xrightarrow{\kappa_1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{Z}[G]$ es proyectivo $H_1(G,\mathbb{Z}[G]) = Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}[G]) = 0$. Como $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial,

$$\begin{aligned} H_0(G,\mathbb{Z}[G]) &= Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}[G]) \\ &= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H_0(G,\mathbb{Z}) &= Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Así el homomorfismo

$$\varphi_0^* : H_0(G,\mathbb{Z}[G]) \longrightarrow H_0(G,\mathbb{Z})$$

es suprayectivo y, por lo tanto $\varphi_0^* \neq 0$. Además, cualquier morfismo $\varphi_0 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es, o bien monomorfismo o trivial, pero como el inducido φ_0^* es diferente del trivial, φ_0 es monomorfismo.

Luego por la exactitud,

$$\kappa_1 : Tor_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, IG) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG$$

es un isomorfismo, pero por la Definición 4.2.1 y el Teorema 4.2.7

$$\kappa_1 : H_1(G,\mathbb{Z}) \cong H_0(G, IG) = (IG)_G = IG/IG \circ IG$$

. ∎

Corolario 4.3.3. $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$.

Demostración. Como

$$\begin{aligned} H_1(G,\mathbb{Z}) &\cong IG/(IG)^2 \\ &\cong G/[G,G]. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.3.4. $H^1(G,\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(IG/(IG)^2,\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G/[G,G],\mathbb{Z})$

Demostración. Por definición tenemos que

$$H^1(G,\mathbb{Z}) = Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}).$$

Consideremos la G-resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

de aqui podemos considerar la siguiente cadena exacta

$$\longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\mathbb{Z}) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

Por resultados anteriores tenemos que $Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) = 0$, y también que

$$H^1(G,\mathbb{Z}) = Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\mathbb{Z})$$

Para cada $f \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\mathbb{Z})$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(x(y-1)) &= xf(y-1) \\ &= f(y-1) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} f(x(y-1)) &= f((xy-1)-(x-1)) \\ &= f(y-1) \end{aligned}$$

teniendo esto podemos ver que $f((x-1)(y-1)) = 0$ para todo $x,y \in G$, esto es

$$\begin{aligned} f((x-1)(y-1)) &= f((xy-1)-(x-1)-(y-1)) \\ &= f((xy-1)-(x-1)) - f(y-1) \\ &= f(y-1) - f(y-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto es para cualquier $f \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, \mathbb{Z})$ tenemos que $(IG)^2 \in \text{Ker } f$, entonces

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, \mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG/(IG)^2, \mathbb{Z}).$$

Teniendo esto en cuenta y por el Lema 4.3.1 tenemos que

$$H^1(G, \mathbb{Z}) = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(G/[G,G], \mathbb{Z}).$$

■

En seguida veremos una interpretación de $H^1(G, N)$ cuando N es un G-módulo trivial. Ahora introduciremos el concepto de derivación.

Definición 4.3.5. *Una* ***derivación*** *u* ***homomorfismo cruzado*** *es una función $f : G \longrightarrow N$, donde $(G, \cdot)$ es un grupo y N es un G-módulo tal que*

$$f(xy) = x \cdot f(y) + f(x)$$

donde $\cdot$ denota la acción de G en N.

Si N es un G-módulo trivial, entonces f es un homomorfismo del grupo multiplicativo G en el grupo abeliano N. Observese que $f(1) = 0$. Si definimos la suma de dos derivaciones f y g de G en N como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, tenemos que $(f+g)$ es una derivación, ya que

$$\begin{aligned}
(f+g)(xy) &= x \cdot (f+g)(y) + (f+g)(x) \\
&= x \cdot (f(y) + g(y)) + (f(x) + g(x)) \\
&= x \cdot f(y) + x \cdot g(y) + f(x) + g(x) \\
&= x \cdot f(y) + f(x) + x \cdot g(y) + g(x) \\
&= f(xy) + g(xy).
\end{aligned}$$

El conjunto de todas las derivaciones de G en N junto con la suma de derivaciones se denotará $Der(G, N)$. Tenemos que $Der(G, N)$ es un grupo abeliano bajo dicha operación ya que N es abeliano.

Definición 4.3.6. *El conjunto de derivaciones $f : G \longrightarrow N$ de la forma $f_a(x) = x \cdot a - a$ con $a \in N$ fija, se llama* ***conjunto de derivaciones principales*** *de G en N denotado por PDer(G,N).*

Tenemos que $PDer(G, N)$ es un subgrupo de $Der(G, N)$, ya que para $f_a, f_b \in PDer(G, N)$ y $x \in G$ vemos que

$$\begin{aligned}
f_a(x) + f_b(x) &= x \cdot a - a + x \cdot b - b \\
&= x \cdot (a+b) - (a+b) \\
&= f_{a+b}(x)
\end{aligned}$$

Sea $g : N \longrightarrow N'$ un homomorfismo de G- módulos y $f : G \longrightarrow N$ una derivación, entonces tenemos que $g \circ f$ es una derivacón, puesto a que para $x, y \in G$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x \cdot y) &= g(f(x \cdot y)) \\
&= g(x \cdot f(y) + f(x)) \\
&= g(x \cdot f(y)) + g(f(x)) \\
&= x \cdot g(f(y)) + g(f(x)) \\
&= x \cdot (g \circ f)(y) + (g \cdot f)(x)
\end{aligned}$$

Veamos que $Der(G, -) :_{\mathbb{Z}[G]}$**Mod**$\longrightarrow$ **Ab** es un funtor covariante

1. Para cada $N \in_{\mathbb{Z}[G]}$ **Mod** siempre se tiene que existe $Der(G, N) \in$ **Ab**.
2. Sea $f \in_{\mathbb{Z}[G]}$ $\mathbf{Mod}(M, N)$. Para cada $g \in Der(G, N)$ la composicón $f \circ g$ es una derivación, así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "Der(G,-)"] \arrow[d, "f"'] & Der(G, M) \arrow[d, "Der(G,f)=(f\circ g)"] \\
N \arrow[r, "Der(G,-)"] & Der(G, N)
\end{tikzcd}$$

3. Sean $f \in_{\mathbb{Z}[G]}$ $\mathbf{Mod}(N', N), g \in_{\mathbb{Z}[G]}$ $\mathbf{Mod}(N, N'')$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "Der(G,-)"] \arrow[d, "f"'] & Der(G, N') \arrow[d, "Der(G,f)"] \\
N \arrow[r, "Der(G,-)"] \arrow[d, "g"'] & Der(G, N) \arrow[d, "Der(G,g)"] \\
N'' \arrow[r, "Der(G,-)"] & Der(G, N'')
\end{tikzcd}$$

4. También tenemos que para $1_N : N \longrightarrow N$ vemos que

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "Der(G,-)"] \arrow[d, "1_N"] & Der(G, N) \arrow[d, "Der(G,1_N)"] \\
N \arrow[r, "Der(G,-)"] & Der(G, N)
\end{tikzcd}$$

donde $Der(G, 1_N) = (1_N \circ g) = g$, para toda $g \in Der(G, N)$. Por lo tanto es un funtor convariante.

Proposición 4.3.7. *Los funtores*

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, -) Der(G, -) : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[\mathbf{G}]} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

son equivalentes naturalmente.

Demostración. Queremos ver que, para cada $N \in_{\mathbb{Z}[G]} \mathbf{Mod}$ existe

$$t_N : Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N) \longrightarrow Der(G, N)$$

tal que t_N es un isomorfismo para cada N y que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,-)"] \arrow[d, "\varphi"] & Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N) \arrow[r, "t_N"] \arrow[d, "Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\varphi)"] & Der(G, N) \arrow[d, "Der(G,\varphi)"] \\
N' \arrow[r, "Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,-)"] & Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N') \arrow[r, "t_{N'}"] & Der(G, N')
\end{tikzcd}$$

Sea $h \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)$. Definimos

$$t_N(h) = f_h : G \longrightarrow N$$

mediante $f_h(x) = h(x-1)$. Tenemos que f_h es una derivación, ya que

$$\begin{aligned} f_h(x \cdot y) &= h(x \cdot y - 1) \\ &= h(x(y-1) + (x-1)) \\ &= x \cdot h((y-1)) + h((x-1)) \\ &= x \cdot f_h(y) + f_h(x) \end{aligned}$$

Inversamente, sea $f : G \longrightarrow N$ una derivación, definamos

$$h_f : IG \longrightarrow N$$

mediante $h_f(x-1) = f(x)$. Veamos que h_f es un homomorfismo de G-módulos

$$\begin{aligned} h_f(x \cdot (y-1)) &= h_f((x \cdot y - 1) - (x-1)) \\ &= f(x \cdot y) - f(x) \\ &= x \cdot f(y) + f(x) - f(x) \\ &= x \cdot f(y) \\ &= x \cdot h_f(y-1) \end{aligned}$$

Veamos que t_N es un isomorfismo de grupos bajo la suma. Sean $g, h \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} t_N(h+g)(x) & = & f_{h+g}(x) \\ & = & (h+g)(x-1) \\ & = & h(x-1)+g(x-1) \\ & = & f_h(x)+f_g(x) \\ & = & t_N(h)(x)+t_N(g)(x) \end{array}$$

entonces es un homomorfismo, también si $t_N(h) = t_N(g)$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t_N(h)(x) & = & t_N(g)(x) \\ f_h(x) & = & f_g(x) \\ h(x-1) & = & g(x-1) \end{array}$$

con esto vemos que $h = g$, por lo tanto es inyectivo. Solo nos falta ver que es sobreyectivo, para cada f_g existe g tal que $t_N(g) = f_g$. Por lo tanto t_N es un isomorfismo, y como tomamos una N arbitraria se tiene los mismos resultados para cada $N \in_{\mathbb{Z}[G]}$**Mod**

■

Teorema 4.3.8. *Sea G un grupo y N un G-módulo. Entonces*

$$H^1(G,N) \cong Der(G,N)/PDer(G,N).$$

Demostración. Por definición, $H^1(G,N) = Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N)$. Consideremos la $\mathbb{Z}[G]$ resolución libre de $\mathbb{Z}$

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Por los resultados del capitulo 3.4, obtenemos la siguiente sucesión larga.

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \xrightarrow{\rho^*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \xrightarrow{\iota^*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) \longrightarrow$$

Vemos que los elementos de $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N)$ dependen solamente de la imagen de 1, ya que estamos en el anillo $\mathbb{Z}[G]$, entonces $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) \cong N$ y como $\mathbb{Z}[G]$ es libre tenemos que $Ext^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],N) = 0$, entonces tenemos que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},N) \xrightarrow{\rho^*} N \xrightarrow{\iota^*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N) \longrightarrow H^1(G,N) \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego $H^1(G,N) \cong \operatorname{Coker} \iota^* = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG,N)/\iota^*(N)$, donde para $a \in N$ y $x \in G$ tenemos $\iota^*(a)(x-1) = x \cdot a - a$.

Por la Proposición 4.3.7 existe una derivación $f_{\iota^*} : G \longrightarrow N$ asociada a $\iota^*(a)$ de la forma

$$\begin{array}{rcl} f_{\iota^*}(x) & = & (x-1)\cdot a \\ & = & x \cdot a - a \end{array}$$

esto es que $\iota^*(N)$ es el subgrupo de derivaciones principales $PDer(G, N)$. De nuevo por la Proposición 4.3.7

$$\begin{aligned} H^1(G, N) &= Hom_{\mathbb{Z}[G]}(IG, N)/\iota^*(N) \\ &\cong Der(G, N)/PDer(G, N). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.3.9. Sea $G = \mathbb{Z}_n$ el grupo de los enteros módulo n. Entonces por el Corolario 4.3.3

$$H_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n / [\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$$

como $\mathbb{Z}_n$ es abeliano vemos que $[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n] = 1$, entonces

$$H_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$$

Ejemplo 4.3.10. Sea $G = \mathbb{Z}_n$. Entonces por el Teorema 4.3.4, y el Corolario 4.3.3, vemos que

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) &\cong Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ &= Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que no es posible definir un homomorfismo no trivial de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{Z}$.

Capítulo 5

Aplicación

Sea $C_n = \langle S_n(X) \rangle$ el grupo abeliano libre con base en el conjunto de n-simplejos singulares de X.

Un elemento en $\sigma \in C_n(X)$ es llamado una n-cadena singular y consiste en sumas formales

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i$$

con $\lambda_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X$

Definimos

$$\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

$$\delta_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^n \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_1]}$$

donde $\hat{v}_i$ significa que hemos quitado el vertice v_n. Observemos que al quitar el vertice v_n obtenemos un $(n-1)$-simplejo Δ^{n-1} con el orden de los vertices dados por el n-simplejo, por lo que podemos ver a $\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$ como una aplicación continua $\Delta^{n-1} \longrightarrow X$, es decir, como un $(n-1)$-simplejo singular.

Lema 5.0.11. *La cadena* $C_n(X) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C_{n-2}(X)$ *es semiexacta. Es decir,* $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$.

Demostración. Tenemos que

$$\delta_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_1]}$$

entonces

$$\begin{aligned} (\delta_{n-1} \circ \delta_n)(\sigma) &= \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_1]} \\ &+ \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_1]} \end{aligned}$$

Los términos de los dos sumandos se cancelan ya que al cambiar i y j en la segunda sumatoria, esta es igual a la primera solo con términos negativos.

■

Definición 5.0.12. *Definimos la homología de espacios topológicos, a la que llamaremos* ***homología singular****, como los cocientes*

$$H_*(X) = \{H_n(X) = Ker\ \delta_n / Im\ \delta_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

donde a $H_n(X) = 0$ *para* $n < 0$. *Cada cociente es llamado* n*-ésimo grupo de homología singular del espacio topológico* X.

Definición 5.0.13. *Dada una pareja* (X, A) *donde* X *es un espacio topológico y* A *un subespacio de* X, *definimos* $C_n(X, A)$ *por el cociente* $C_n(X)/C_n(A)$, *ya que la aplicación frontera manda* $C_n(A)$ *en* $C_{n-1}(A)$, *ésta induce una aplicación frontera* $\delta'_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$ *que defne el complejo de cadenas* $\{C_n(X, A), \delta'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definición 5.0.14. *La homología del complejo de cadenas* $\{C_n(X, A), \delta'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es llamado* ***homología singular relativa*** *y denotaremos los grupos de homología de dimensión* n *como* $H_n(X, A)$

Proposición 5.0.15. *La siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Con la inclusión $\iota_n : C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$ y la proyección cánonica de $\rho_n : C_n(X) \longrightarrow C_n(X, A)$ inducen la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{\iota_n} C_n(X) \xrightarrow{\rho_n} 0$$

entonces por el Teorema 3.1.11 obtenemos el resultado querido. ∎

Proposición 5.0.16. *Si* X *es un punto entonces* $H_n(X) = 0$ *para* $n \geq 1$ *y* $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. En este caso, nomás existe un único n-simplejo σ_n para cada n y $\delta(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\sigma_{n-1}$, una suma de $(n+1)$ térmnos los cuales son cero para n impar y σ_n para n par, con $n \neq 0$. Entonces tenemos el siguiente complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

con la aplicación frontera alternando con un isomorfismo y aplicación trivial, salvo la última entrada. De aqui se tiene que $H_0(X) = \mathbb{Z}$. ∎

Definición 5.0.17. *Sea* $\boldsymbol{E}(G)$ *un* Δ*-complejo donde los* n*-simplejos estan ordenados en* $(n+1)$*-tuplas* $[g_0, \cdots, g_n]$ *de elementos de* G. *Tal que a un* n*-simplejo le encajas un* $(n-1)$*-simplejo* $[g_0, ..., \hat{g}_i, ..., g_n]$ *de manera natural.*

Lema 5.0.18. $\boldsymbol{E}(G)$ *es contraible.*

Demostración. El espacio $\mathbf{E}(G)$ es contraible por la homotopía h_t que manda a cada $x \in [g_0, \cdots, g_n]$ a lo largo del segmento $[e, g_0, \cdots, g_n]$ hasta el vertice $[e]$, donde e es la identidad de G. Hecer esto está bien definicdo en $\mathbf{E}(G)$ ya que cuando nos restringimos a la cara $[g_0, ..., \hat{g}_i, ..., g_1]$ tenemos la deformación lineal en $[e, g_0, ..., \hat{g}_i, ..., g_1]$. Notemos que h_t manda a $[e]$ en el lazo $[e, e]$. Por lo tanto $\mathbf{E}(G)$ es contraible. ■

El grupo G actua por la izquierda en $\mathbf{E}(G)$, un elemento $g \in G$ manda el punto $(g_0, ..., g_n)$ en el punto $(gg_0, ..., gg_n)$. La identidad es el único que manda un punto en sí mismo. Esta acción se entiende de manera natural a $\mathbf{E}(G)$. De está manera definimos la aplicación $\mathbf{E}(G) \longrightarrow \mathbf{E}(G)/G$, donde la aplicación es un cubriente universal. Definimos el espacio $\mathbf{B}(G) = \mathbf{E}(G)/G$.

Definición 5.0.19. *Una aplicacón continua de espacios topológicos $\rho : E \longrightarrow B$ es llamada **fibración** si tiene la **propiedad del levantamiento** de homotopías, esto es, dada una homotopía $h : I \times X \longrightarrow B$ y una aplicación continua $H_0 : X \longrightarrow E$ tal que $h_0 = \rho \circ H_0$, es decir, que el siguiente diagrama conmute*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[ur, "h_0"] \arrow[r, "H_0"'] & B \end{tikzcd}$$

entonces existe una aplicación continua $H : I \times X \longrightarrow E$ con $H(x, 0) = H_0(x)$ y tal que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\rho"] \\ I \times X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

$\rho \circ H = h$. Llamaremos a H_0 y H como levntamientos de h_0 y h respectivamente

Observación. La aplicación continua $\mathbf{E}(G) \longrightarrow \mathbf{B}(G)$ es una fibración.

Definición 5.0.20. *Un espacio topológico X que tiene un solo grupo de homotopía no trivial $\pi_n(X) \cong G$ es llamado **Espacio de Eilenberg-Mac Lane** $K(G, n)$*

Proposición 5.0.21. *El espacio $\boldsymbol{B}(G)$ de un grupo G es un $K(G, 1)$.*

Demostración. Puede consultarse en [2], hay una secc'ón dedicada a este tipo de grupos. ■

Sea $C_*(X)$ un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}[G]$-módulos de X, definimos $C_*(X)_G = \{C_n(X)_G\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es el conplejo de cadenas de X/G, donde $C_n(X)_G$ es el espacio de órbitas de la acción por G.

Lema 5.0.22. $C_*(X)_G \cong C_*(X/G)$

Demostración. Sea S'_n el conjunto de aplicaciones continuas $\sigma' : \Delta^n \longrightarrow X/G$. Entonces, por el criterio del levantamiento único de un espacio cubriente, tenemos que todo $\sigma' : \Delta^n \longrightarrow X/G$ puede ser levantado a una única aplicación $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ y que cualquier otro levantamiento es una traslación $g\sigma$ para algún $g \in G$. Como los $g\sigma$ son distintos, esto prueba que $S_n \cong G \times S'_n$ como un G-conjunto. La elección de un levantamiento para cada σ' nos da una aplicación $S'_n \longrightarrow S_n$, por lo tanto una base para $C_n(X)$ como un $\mathbb{Z}$-módulo. Esto prueba que la aplicación natural $C_n(X) \longrightarrow C_n(X/G)$ induce un isomorfismo $C_n(X)_G \cong C_n(X/G)$ para toda n. ■

Teorema 5.0.23. *$H_n(\boldsymbol{B}(G),\mathbb{Z}) \cong H_n(G,\mathbb{Z})$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Debido a que $\mathbf{E}(G)$ es contraible vemos que

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{E}(G)) &\cong H_n(x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $n > 0$ y $H_0(\mathbf{E}(G)) = \mathbb{Z}$, entonces el complejos de cadena $C_*(\mathbf{E}(G))$ es una G-resolución libre de $\mathbb{Z}$. Además la aplicación

$$f : C_*(\mathbf{E}(G)) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow C_*(\mathbf{E}(G))_G$$

dada por $f(\sigma \otimes n) = [n\sigma]$ es un isomorfismo bien definido. Tengamos en cuenta que $C_*(\mathbf{E}(G))_G$ es una G-resolución proyectiva. Por lo tanto

$$\begin{aligned} H_n(G,\mathbb{Z}) &= Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{E}(G),\mathbb{Z}) \\ &= H_n(C_n(\mathbf{E}(G)) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}) \\ &= H_n(C_n(\mathbf{E}(G))_G) \\ &= H_n(C_n(\mathbf{B}(G))) \\ &= H_n(\mathbf{B}(G),\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

donde $H_n(C_n(\mathbf{E}(G))_G)$ al tomar su conciente con G es la misma G-resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$, y $H_n(C_n(\mathbf{B}(G))) = H_n(\mathbf{B}(G),\mathbb{Z})$ es la definición de homología singular. ■

Corolario 5.0.24. $H_1(K(G,1),\mathbb{Z}) = G/[G,G]$

Demostración. Por resultados en el capítulo de cohomología de grupos tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{B}G,\mathbb{Z}) &= H_1(\pi_1(X\mathbf{B}(G)),\mathbb{Z}) \\ &= H_1(G,\mathbb{Z}) \\ &= G/[G,G]. \end{aligned}$$

■

Si el lector gusta profundizar el tema, puede encontrar en [2] más al respecto.

Bibliografía

[1] J. B. Fraleigh. *Algebra Abstracta.* Addison Wesley, 1988.

[2] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge, New York, NY., 2002.

[3] S. Lang. *Introducción al Algebra Lineal.* Addison Wesley, 1990.

[4] M. L. S. *Homology.* Springer- Verlag, 1975.

[5] F. Zaldivar. *Introducción a la Teoría de Grupos.* SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA, 2006.