"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciado en Matemáticas

Algebras de Lie 3-dimensionales y Grupos de Lie exponenciales

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Gabriel Alejandro Orozco Casillas

Director de Tesis: Dr. Guillermo Dávila Rascón

Hermosillo, Sonora, México, 15 de Diciembre, 2011.

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora.

Dr. Yury Vorobev
Universidad de Sonora.

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora.

M. C. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora.

Dedicatoria

Esta tesis la dedico a mis padres.

Su apoyo incondicional me ha permitido lograr una meta más en mi vida.

Gracias.

Agradecimientos

Agradezco a todos mis maestros del Departamento de Matemáticas por sus valiosas enseñanzas durante mi estancia en la licenciatura en Matemáticas, sin duda cada uno de sus enseñanzas me han ayudado a seguir adelante en mi formación. Agradezco a mi asesor el Dr. Guillermo Dávila Rascón por su gran apoyo y sus enseñanzas como mi profesor en la licenciatura en matemáticas y durante el período de elaboración de este proyecto de tesis.

A mis maestros sinodales, Dr. Rubén Flores Espinoza, Dr. Yuri M. Vorobiev, Dr. Guillermo Dávila Rascón y M. C. Misael Avendaño Camacho, por sus importantes críticas y observaciones las cuales me fueron de gran ayuda para mejorar este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyarme para la realización de esta tesis como becario del proyecto “Mecanismos de Promedios en Sistemas de Evolución Clásicos y Cuánticos”.

A mi familia y amigos que siempre me han apoyado a lo largo de mi vida.

Índice

Introducción

La Teoría de Grupos y de Algebras de Lie ha sido un área de constante investigación desde que fue introducida por el matemático noruego Marius Sophus Lie (1842-1899), a finales de 1873, cuya intención era construir una teoría para las ecuaciones diferenciales, análoga a la Teoría de Galois para ecuaciones algebraicas.

Recordemos que en esta última, con cada ecuación algebraica polinomial se asocia un grupo, el llamado grupo de Galois de la ecuación y las condiciones de solubilidad de la ecuación se reflejan en las propiedades del grupo, de tal manera que una ecuación algebraica polinomial (en una variable) es soluble si y sólo si su grupo de Galois es soluble.

En el caso de las ecuaciones diferenciales es posible asociar con cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales (digamos en $\mathbb{R}^n$) un grupo que es el *grupo de simetrías* de la ecuación que es el grupo formado por todas las transformaciones que dejan invariante la ecuación. El conocimiento de las simetrías de una ecuación diferencial nos permite, la mayoría de las veces, reducir el orden de la ecuación por lo que, en teoría, sería más fácil de integrar. De esta manera, en su estudio de los *grupos de transformaciones*, Lie se vio en la necesidad de clasificar dichos grupos. De hecho, el problema de la clasificación era un problema central de sa Teoría de Grupos de Transformaciones [11, 12].

Si tratamos de elaborar, sólo para fines ilustrativos, un "diccionario" para mostrar la correspondencia entre las dos teorías, podríamos comparar los logros de Galois y de Lie a través de la tabla siguiente [3]:

Teoría de Galois	Simetrías infinitesimales
Grupos finitos	Grupos continuos
Ecuaciones polinomiales	Ecuaciones diferenciales
Solubilidad por radicales	Solubilidad por cuadraturas.

Por otra parte, el problema de determinar, salvo isomorfismo, todos los grupos de transformaciones en n variables, para cualquier n, resulta ser muy complejo y Lie se dió cuenta de ello. Sin embargo tuvo éxito en clasificarlas ágebras de Lie de dimensión menor o igual a 6, sobre $\mathbb{C}$, por lo que el problema de clasificación era muy importante en el ambiente matemático de la época. Así, poco después del éxito de Lie, Luigi Bianchi publica en 1898 un trabajo bastante extenso en el que clasifica las álgebras de Lie reales de dimensión tres [2]. Tal artículo no llamó mucho la atención sino hasta que alrededor de los 1950's, Kurt Gödel utilizó el esquema de Bianchi para proponer modelos cosmológicos relativistas de un universo en rotación [14].

Esta línea de ideas se continuaron en la década de los 1960's y llevaron a D. Farnsworth y R. Kerr a la introducción de la descripción moderna de los espacios homogéneos utilizando los grupos de Lie, por una lado, mientras que C. G. Behr introdujo la versión moderna de la clasificación de Bianchi de las álgebras de Lie 3-dimensionales [14].

En otro orden de ideas, dado un grupo de Lie G con $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, veremos en el Capítulo 2 que automáticamente queda definida una función $\exp : \mathfrak{g} \to G$, llamada la *función exponencial* y un problema que ha sido abordado por varios matemáticos desde los tiempos de Lie, pero que no ha sido resuelto, es el problema de determinar todos los grupos de Lie para los cuales la función exp es sobreyectiva. Los grupos para los cuales esto se cumple son los llamados *grupos de Lie exponenciales.*

En los últimos años se han tenido avances en este problema. Así por ejemplo, D. T. Djoković y T. Q. Nguyen clasificaron todos los grupos de Lie *lineales simples* que son exponenciales [7] y M. Wüstner ha clasificado todos los grupos de Lie simples, exponenciales [20]. Si bien se han tenido éxitos parciales, varias cuestiones sobre los grupos de Lie exponenciales permanecen aún como problemas abiertos en la Teoría de Lie [7].

Nuestro objetivo en esta tesis es presentar una introducción al estudio de los grupos y álgebras de Lie, así como presentar algunos de los grupos de Lie exponenciales más conocidos. La manera en que se organiza este trabajo es la siguiente:

En el primer capítulo estudiaremos la definición general de álgebra de Lie como un espacio vectorial en el cual está definido el corchete de Lie e introduciremos ejemplos generales de álgebras de Lie. Posteriormente estudiaremos resultados básicos sobre álgebras de Lie y presentaremos algunos ejemplos importantes de álgebras de Lie: las *álgebras de Lie clásicas*, que son álgebras de matrices. Cerramos este capítulo con el estudio de las representaciones de álgebras de Lie y la forma de Killing. Además, presentamos varios ejemplos sencillos en los cuales se calculan las matrices de la representación y la correspondiente forma de Killing.

En el segundo capítulo estudiaremos la definición general de grupo de Lie ya que nuestro interés es mostrar la relación que existe entre las álgebras de Lie y sus grupos de Lie. Proporcionaremos, además, varios ejemplos para ilustrar esta relación y posteriormente introduciremos los grupos de Lie clásicos, que son grupos de Lie de matrices y nos servirán para enfatizar su relación con las álgebras de Lie clásicas.

En el tercer capítulo es donde se estudia, de manera más general, la relación entre álgebras de Lie y grupos de Lie: Dado un grupo de Lie, éste tiene una álgebra de Lie asociada y se probará que esta álgebra de Lie es el álgebra de los campos vectoriales invariantes por la izquierda, la cual es isomorfa al espacio tangente a la identidad del grupo de Lie. Se verá que esto define, de manera natural, una función del álgebra de Lie en su correspondiente grupo de Lie: la llamada función exponencial. Es precisamente a través de esta función como se introduce el concepto de *grupo de Lie exponencial*, el cual es uno de los conceptos que dan sustento a este trabajo. Además, veremos que en el caso de las álgebras y grupos de Lie clásicos, la función exponencial coincide con la exponencial de matrices por lo que también se prueban varias propiedades de esta función matricial, que de cierta manera, se puede estudiar de forma independiente al formalismo de la teoría de grupos y álgebras de Lie.

En el capítulo final se introducen las nueve álgebras de Lie de la clasificación de Bianchi, definiéndolas por el valor de su corchete en los elementos de una base para posteriormente calcular la representación adjunta y la forma de Killing para cada álgebra de Lie en la clasificación de Bianchi. Por último, se calculará la exponencial para los elementos de la base de cada una de estas álgebras.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

En el álgebra lineal se estudian diferentes estructuras en espacios vectoriales tales como son las métricas que induce un producto interior positivo definido o la estructura simpléctica inducida por una forma bilineal antisimétrica, no-degenerada. En el caso de las álgebras de Lie, la estructura algebraica en el espacio vectorial viene dada por el llamado *corchete de Lie* $[\,,\,]$.

En este capítulo se estudiará la teoría básica de las álgebras de Lie y presentaremos las llamadas *álgebras de Lie clásicas* así como varios conceptos importantes de la teoríde álgebras de Lie, tales como representaciones, la representación adjunta y la forma de Killing. Para abundar más en esta teoría, se pueden consultar [4], [5], [9], [13] .

1.1 Definición general de álgebra de Lie

Primeramente daremos la definición de álgebra de Lie.

Definición 1.1 *Una álgebra de Lie es un espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *sobre un campo* $\mathbb{F}$*, junto con una operación binaria*

$$\begin{aligned}[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g}\\ (x, y) &\mapsto [x, y],\end{aligned}$$

llamada corchete de Lie*, tal que para cualesquiera* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

(AL1) Linealidad:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z].$$

(AL2) Antisimetría:

$$[x, y] = -[y, x].$$

(AL3) Identidad de Jacobi:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

La propiedad (AL1) nos dice que $[\alpha x+\beta y, z] = \alpha[x, z]+\beta[y, z]$, de esto y usando (AL2) obtenemos

$$-[z, \alpha x + \beta y] = -\alpha[z, x] - \beta[z, y],$$

lo cual es equivalente a

$$[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y].$$

Por lo tanto el corchete de Lie no sólo es lineal sino que también es bilineal. Además, cuando el campo $\mathbb{F}$ no es de caracteristica 2, aplicando la propiedad (AL2) a $x \in \mathfrak{g}$ tenemos que $[x, x] = -[x, x]$ y de aquí se obtiene

$$[x, x] = 0$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de álgebras de Lie.

Ejemplo 1.2 *Consideremos cualquier espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$, si dotamos al espacio vectorial con el corchete de Lie trivial, este se convierte en una álgebra de Lie, y el corchete de Lie trivial esta dado como sigue:*

$$[x, y] = 0$$

para cualesquiera $x, y \in V$. Es bastante obvio que este corchete satisface las condiciones (AL1), (AL2) y (AL3) y esta álgebra de Lie es llamada una álgebra de Lie abeliana*.*

Ejemplo 1.3 *Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio euclidiano y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ su base canónica. Para cualesquiera dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$, definimos su producto vectorial por:*

$$x \times y = (\Lambda \circ x)y$$

donde

$$\Lambda \circ x = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $\Lambda \circ x$ se llama la matriz del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ para el vector $x = (x_1, x_2, x_3)$. Vamos a mostrar que $\mathbb{R}^3$ con la operación 1.3 es una álgebra de Lie.

De las propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ tenemos ya la linealidad y la antisimetría así que sólo nos faltaría ver que se cumple la identidad de Jacobi. Para ver esto vamos a utilizar una propiedad muy importante del producto cruz llamada el producto cruz triple *la cual nos dice lo siguiente:*

$$(x \times y) \times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x$$

Calculemos ahora la identidad de Jacobi.

$$\begin{aligned}(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y &= \langle x, z\rangle\, y - \langle y, z\rangle\, x + \langle y, x\rangle\, z \\ &\quad - \langle z, x\rangle\, y + \langle z, y\rangle\, x - \langle x, y\rangle z \\ &= 0\end{aligned}$$

El Ejemplo 1.2 es muy importante ya que nos dice que todo espacio vectorial se puede convertir en una álgebra de Lie si usamos el corchete de Lie trivial. Cabe mencionar que los ejemplos anteriores son solamente para ilustrar la definición de álgebra de Lie, más adelante en la Sección 1.3 abordaremos algunos ejemplos de álgebras de Lie mucho mas interesantes y que son conocidas como las álgebras de Lie clásicas.

Sea $(\mathfrak{g}, [,])$ una álgebra de Lie. Un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es llamado una *subálgebra* de Lie de $\mathfrak{g}$ si

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

En este caso, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ denota al subespacio generado por todos los corchetes $[x, y]$, donde x e y son elementos de $\mathfrak{h}$, es decir,

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \langle \{[x, y] | x, y \in \mathfrak{h}\} \rangle$$

Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son dos subálgebras de $\mathfrak{g}$, es fácil ver que $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$ es también una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y la unión de dos álgebras de Lie no necesariamente es una subálgebra de Lie.

Definimos el *normalizador* de $\mathfrak{h}$ como el conjunto

$$N(\mathfrak{h}) = \{v \in \mathfrak{g} | [v, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

Es claro que $N(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ ya que si $v, w \in N(\mathfrak{h})$, entonces para todo $u \in \mathfrak{h}$ se tiene $[v, u], [w, u] \in \mathfrak{h}$ y por la identidad de Jacobi

$$[[v, w], u] = -[[w, u], v] - [[u, v], w] \in \mathfrak{h},$$

con lo que $[v, w] \in N(\mathfrak{h})$. Diremos que $\mathfrak{h}$ es *auto-normalizada* si $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

El *centralizador* de $\mathfrak{h}$ es el conjunto

$$C(\mathfrak{h}) = \{v \in \mathfrak{g} | [v, \mathfrak{h}] = 0\}.$$

Utilizando la identidad de Jacobi es claro que $C(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.4 *Una subálgebra $\mathfrak{h}$ de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice un* ideal *si*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Definición 1.5 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. El* centro *de $\mathfrak{g}$ es el ideal*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{w \in \mathfrak{g} | [w, v] = 0, \forall v \in \mathfrak{g}\}.$$

Es claro que $Z(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{g})$ y que $\mathfrak{g}$ es abeliana si y sólo si $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

1.2 Constantes de estructura

Definición 1.6 *Sea* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ *una álgebra de Lie, definimos la dimensión del álgebra de Lie como la dimensión del espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *sobre el campo* $\mathbb{F}$ *y la denotaremos por* $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$*.*

Consideremos una álgebra de Lie de dimensión finita, digamos $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) = n$ y fijemos una base $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para $\mathfrak{g}$. Podemos calcular el corchete de Lie para cualesquiera dos elementos de esta base y ya que $[e_i, e_j] \in \mathfrak{g}$. Del álgebra lineal sabemos que cada vector $[e_i, e_j]$ se puede expresar de manera única como una combinación lineal de elementos de la base β, esto es:

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{ij}^{s} e_s$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. A las constantes λ_{ij}^{s} les llamaremos *constantes de estructura.* Usando la propiedad de antisimetría y la identidad de Jacobi, se obtienen las siguientes identidades:

$$\lambda_{ij}^{s} = -\lambda_{ji}^{s} \tag{1.1}$$

$$\sum_{s=1}^{n} (\lambda_{ij}^{s}\lambda_{sk}^{l} + \lambda_{jk}^{s}\lambda_{si}^{l} + \lambda_{ki}^{s}\lambda_{sj}^{l}) = 0, \tag{1.2}$$

para cada $l = 1, 2, \ldots, n$.

Analizando la primera identidad nos damos cuenta que al momento de calcular las constantes de estructura para una álgebra de Lie no es necesario hacer todos los cálculos ya que las constantes en las cuales $i \geq j$ las podemos obtener de las que satisfacen $i < j$.

Para ilustrar mejor este concepto vamos a calcular las contantes de estructura para una álgebra de Lie.

Ejemplo 1.7 *Sea* $(\mathbb{R}^3, \times)$ *el álgebra de Lie del Ejemplo 1.3. Por la propiedad de antisimetría vemos rápidamente que*

$$[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = [e_3, e_3] = 0$$

después de hacer cálculos directos obtenemos los corchetes para la base

$$\begin{array}{lll} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, e_3] = -e_2, \\ [e_3, e_1] = e_2, & [e_2, e_3] = e_1, & [e_3, e_2] = -e_1. \end{array}$$

A partir de estos corchetes vemos que las constantes de estructura distintas de cero para el álgebra de Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$ son

$$\lambda_{12}^{3} = 1, \quad \lambda_{21}^{3} = -1, \quad \lambda_{13}^{2} = -1, \quad \lambda_{31}^{2} = 1, \quad \lambda_{23}^{1} = 1, \quad \lambda_{32}^{1} = -1.$$

Mediante las constantes de estructura también podemos definir álgebras de Lie simplemente mencionando el valor de cada una de las constantes λ_{ij}^{s} y verificando que se cumplen las condiciones en (1.1), (1.2). Veamos ejemplos de álgebras de Lie que podemos construir de esta manera.

Ejemplo 1.8 *Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión 2 y consideremos una base $\{e_1, e_2\}$, definimos las constantes de estructura como $\lambda_{e_1 e_2}^{e_1} = 1 = -\lambda_{e_2 e_1}^{e_1}$ y las demás constantes de estructura iguales a cero, después de hacer algunos cálculos sencillos podemos verificar que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie.*

Otro ejemplo importante es el siguiente.

Ejemplo 1.9 *Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión 3 y consideremos la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Definimos las constantes de estructura por $\lambda_{e_1 e_2}^{e_3} = \lambda_{e_1 e_3}^{e_2} = 1 = -\lambda_{e_2 e_1}^{e_3} = -\lambda_{e_3 e_1}^{e_2}$ y todas las demás constantes de estructura iguales a cero, facilmente verificamos que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie.*

Al igual que como en la teoría de grupos se estudian funciones entre dos grupos que preservan las operaciones de los grupo,s en la teoría de las álgebras de Lie se estudian funciones entre álgebras de Lie que preservan el corchete de Lie de cada una de las álgebras.

Definición 1.10 *Sean $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}})$ y $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ dos álgebras de Lie, un* homomorfismo *entre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es una transformación lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene*

$$\phi([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{h}}.$$

Cuando un homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es uno a uno y además sobreyectivo entonces se dice que ϕ es un *isomorfismo*; en este caso decimos que las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfas, lo cual denotamos por $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Probar que dos álgebras de Lie son isomorfas puede resultar un proceso largo y tedioso el tener que realizar todos los cálculos directamente. Sin embargo, por medio de las constantes de estructura podemos caracterizar cualesquiera dos álgebras de Lie isomorfas, lo cual se establece en el resultado siguiente.

Teorema 1.11 *Sean $\mathfrak{g}$ y $\tilde{\mathfrak{g}}$ dos álgebras de Lie de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$. Entonces $\mathfrak{g}$ y $\tilde{\mathfrak{g}}$ son isomorfas si y sólo si existe una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ para $\mathfrak{g}$ y una base $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ para $\tilde{\mathfrak{g}}$ tales que las correspondientes constantes de estructura coinciden, esto es,*

$$\lambda_{ij}^s = \tilde{\lambda_{ij}^s},$$

con $i, j, s = 1, \ldots, n$.

Demostración. Si $L : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ es un isomorfismo y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base para $\mathfrak{g}$, entonces se define

$$\tilde{e}_i = Le_i,$$

por lo que el conjunto $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ es una base para $\tilde{\mathfrak{g}}$ y las correspondientes constantes de estructura coinciden. Recíprocamente, si las correspondientes constantes de estructura coinciden para las bases $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{g}$ y $\tilde{\mathfrak{g}}$ respectivamente, entonces la función $L : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ definida por

$$Le_i = \tilde{e}_i,$$

para $i = 1, \ldots, n$, es un isomorfismo. ■

1.3 Álgebras de Lie clásicas asociadas a formas bilineales

En esta sección abordaremos ejemplos muy importantes de álgebras de Lie; estos ejemplos son las álgebras de Lie de matrices, las cuales son llamadas las *álgebras de Lie clásicas*.

Una álgebra asociativa es un espacio vectorial $(V, +, *)$ en el cual, además, está definida una multiplicación de vectores $(x, y) \mapsto x * y$ la cual es asociativa. Ejemplos de álgebras de Lie aparecen de una manera natural de las álgebras asociativas.

Sea $(\mathfrak{g}, *)$ una álgebra asociativa y sean $x, y \in \mathfrak{g}$. Definimos el *conmutador* de x e y por

$$[x, y] = x * y - y * x.$$

Es claro que el conmutador es una operación bilineal y antisimétrica en $\mathfrak{g}$, solo nos faltaría probar la identidad de Jacobi para asegurar que cada álgebra asociativa se puede convertir en una álgebra de Lie con el corchete de Lie dado por el conmutador. Usando la asociatividad y realizando los cálculos necesarios obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}[][x, y], z] &= (x * y - y * x) * z - z * (x * y - y * x) \\ &= x * y * z - y * x * z - z * x * y + z * y * x.\end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos:

$$\begin{aligned}[][y, z], x] &= y * z * x - z * y * x - x * y * z + x * z * y, \\ [[z, x], y] &= z * x * y - x * z * y - y * z * x + y * x * z.\end{aligned}$$

Por tanto

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Por otra parte, un álgebra de Lie no puede ser un álgebra asociativa ya que de ser así tendríamos la siguiente igualdad

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]]$$

para $x, y, z \in \mathfrak{g}$.
Por la propiedad de antisimetría, la igualdad anterior implica la siguiente

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] = 0$$

lo cual no todo el tiempo puede ser cierto ya que el corchete de Lie debe cumplir la identidad de Jacobi

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

El álgebra de Lie general lineal
Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, de ahora en adelante escribiremos $\mathfrak{gl}(V)$ en lugar de $End(V)$ considerado como una álgebra de Lie con el corchete $[X, Y] = XY - YX$, y escribiremos $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ para denotar $M_n(\mathbb{F})$ como una álgebra

de Lie bajo el conmutador de matrices. Si $\dim V = n$ podemos fijar una base para V y entonces la correspondencia entre las tranformaciones lineales y sus respectivas matrices nos da un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$. A esta álgebra de Lie se le llama el *álgebra de Lie general lineal*.

El álgebra de Lie especial lineal

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, entonces su traza viene dada por $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Además, notemos que la traza cumple que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. De esto se sigue que si A es la matriz de $T \in \mathfrak{gl}(V)$ con respecto a alguna base entonces la $\mathrm{tr}(A)$ es independiente de la elección de la base. Definimos

$$\mathfrak{sl}(V) = \{T \in \mathfrak{gl}(V) : \mathrm{tr}(T) = 0\}.$$

Ya que $\mathrm{tr}([S, T]) = 0$ para todo $S, T \in \mathfrak{gl}(V)$, concluimos que $\mathfrak{sl}(V)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Fijando una base para V, podemos identificar esta álgebra de Lie con

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Esta álgebra de Lie se le conoce como el álgebra de Lie especial lineal.

El álgebra de Lie especial ortogonal

En esta parte nos guiaremos por [10].

Definición 1.12 *Una forma bilineal es una función $B : V \times V \to \mathbb{F}$ tal que*

$$B(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha B(v_1, u) + \beta B(v_2, u)$$

$$B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2)$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v_1, v_2, u \in V$.

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ y sea $B : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma bilineal. Definimos

$$\mathfrak{so}(V, B) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : B(Xv, w) = -B(v, Xw)\}.$$

Así $\mathfrak{so}(V, B)$ consiste de todas las tranformaciones lineales que son antisimétricas con respecto a la forma bilineal B. Si $X, Y \in \mathfrak{so}(V, B)$, entonces

$$B(XYv, w) = -B(Yv, Xw) = B(v, YXw).$$

De esto se sigue que

$$B([X, Y]v, w) = -B(v, [X, Y]w).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{so}(V, B)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Supongamos que V es de dimensión finita y fijemos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para V y sea Γ la matriz de $n \times n$ con entradas $\Gamma_{ij} = B(v_i, v_j)$. Entonces vemos que $T \in \mathfrak{so}(V, B)$ si y sólo si su matrix A relativa a esta base satisface

$$A^t\Gamma + \Gamma A = 0.$$

Cuando B es no degenerada entonces Γ es invertible y la ecuación anterior puede ser escrita como
$$A^t = -\Gamma A \Gamma^{-1}.$$
En particular, esto implica que $\operatorname{tr}(T) = 0$ para todo $T \in \mathfrak{so}(V, B)$.

Tomemos $V = \mathbb{F}^n$ y la forma bilineal B con matriz $\Gamma = I_n$ relativa a la base estándar de $\mathbb{F}^n$. Definamos
$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : X^t = -X\}.$$
Como B es no degenerada entonces $\mathfrak{so}(n, \mathbb{F})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$.

Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces tomamos enteros $p, q \geq 0$ tal que $p + q = n$ y sea B la forma bilineal en $\mathbb{R}^n$ cuya matriz relativa a la base estandar es $I_{p,q}$. Definimos
$$\mathfrak{so}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X^t I_{p,q} = -I_{p,q} X\}.$$
Como B es no degenerada, $\mathfrak{so}(p, q)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Para obtener una base para esta familia de álgebras de Lie, sea B una forma bilineal simétrica no degenerada en un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ la cual es orthonormal ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) o pseudo-orthonormal ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) relativa a B. Sea $\mu(T)$ la matriz de $T \in \mathfrak{gl}(V)$ relativa a esta base. Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces μ define un isomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{so}(V, B)$ en $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y B tiene signatura (p, q), entonces μ define un isomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{so}(V, B)$ a $\mathfrak{so}(p, q)$.

El álgebra de Lie simpléctica

Sea $\mathbb{J}$ la matriz antisimétrica de $2n \times 2n$ de la forma
$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$
donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Definimos
$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{F}) : X^t \mathbb{J} = -\mathbb{J} X\}.$$
Sean $A, B \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$ entonces:
$$\begin{aligned}
\mathbb{J}[A, B] + [A, B]^T \mathbb{J} &= \mathbb{J}(AB - BA) + (AB - BA)^T \mathbb{J} \\
&= \mathbb{J}AB - \mathbb{J}BA + B^T A^T \mathbb{J} - A^T B^T \mathbb{J} \\
&= \mathbb{J}AB + B^T \mathbb{J} A + B^T A^T \mathbb{J} + A^T \mathbb{J} B^T \\
&= (\mathbb{J}A + A^T \mathbb{J})B + B^T (\mathbb{J}A + A^T \mathbb{J}) \\
&= 0B + B^T 0 = 0,
\end{aligned}$$
Por tanto $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ la cual llamaremos el álgebra de Lie simplectica.

Para obtener una base para esta familia de álgebras de Lie, sea B una forma bilineal antisimetrica no degenerada en un espacio vectorial V de dimensión $2n$ sobre el campo $\mathbb{F}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ una base B-simplectica para V. La función μ que asigna a un endomorfismo de V su matriz relativa a esta base define un isomorfismo de $\mathfrak{so}(V, B)$ en $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$.

El álgebra de Lie unitaria

Sea $p, q \geq 0$ enteros tales que $p + q = n$ y sea $I_{p,q}$ la matriz de $n \times n$ de la forma

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Definimos

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X^* I_{p,q} = -I_{p,q} X\}$$

Este espacio es un subespacio real de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ y además uno puede verificar directamente que $\mathfrak{u}(p, q)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ considerada como álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Definimos

$$\mathfrak{su}(p, q) = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

Para obtener una base para esta familia de álgebras de Lie, sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{C}$, y sea B una forma Hermitiana no degenerada en V. Definimos

$$\mathfrak{u}(V, B) = \{T \in End_{\mathbb{C}}(V) : B(Tv, w) = -B(v, Tw), \forall v, w \in V\}.$$

Consideremos $\mathfrak{su}(V, B) = \mathfrak{u}(V, B) \cap \mathfrak{sl}(V)$. Si B tiene signatura (p, q) y si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base pseudo-ortogonal de V relativa a B, entonces la asignación $T \mapsto \mu(T)$ de T a su matriz relativa a esta base define un isomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{u}(V, B)$ con $\mathfrak{u}(p, q)$ y de $\mathfrak{su}(V, B)$ a $\mathfrak{su}(p, q)$.

A continuación presentaremos las álgebras de Lie cuaterniónicas.

Álgebras de Lie general cuaterniónica y especial lineal

Consideremos el conjunto de las matrices de $n \times n$ sobre los cuaterniones con el conmutador usual de matrices. Denotaremos esta álgebra de Lie por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$, considerada como una álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Podemos identificar a $\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{C}^{2n}$ usando una de las copias isomorfas de $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R}1 + \mathbb{R}i, \mathbb{R}1 + \mathbb{R}j, \mathbb{R}1 + \mathbb{R}k)$ en $\mathbb{H}$. Definimos

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) : \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Entonces $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ es una álgebra de Lie real la cual es usualmente denotada por $\mathfrak{su}^*(2n)$.

Álgebra de Lie cuaterniónica unitaria

Para $n = p + q$ con p, q enteros no negativos, definimos

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) : X^* I_{p,q} = -I_{p,q} X\}.$$

Entonces $\mathfrak{sp}(p, q)$ es una subálgebra de Lie real de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$. Sea $B(x, y)$ una forma Hermitiana cuaterniónica, entonces $\mathfrak{sp}(p, q)$ consiste de todas las matrices $X \in M_n(\mathbb{H})$ que satisfacen

$$B(Xx, y) = -B(x, X^* y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}^*(2n)$
Sea θ el automorfismo de $M_{2n}(\mathbb{C})$ definido por

$$\theta(A) = -JAJ.$$

Definimos

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) : \theta(\overline{X}) = X\}.$$

Este subespacio vectorial real de $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ es una subálgebra de Lie real de $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ (considerada como una álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$). Identificamos $\mathbb{C}^{2n}$ con $\mathbb{H}^n$ y sea $C(x, y)$ una forma anti-Hermitiana quaternionica. Entonces $\mathfrak{so}^*(2n)$ corresponde a las matrices $X \in M_n(\mathbb{H})$ que satisfacen

$$C(Xx, y) = -C(x, X^*y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$.

1.4 Representaciones

Existen herramientas muy importantes en la teoría de las álgebras de Lie; a continuación presentaremos una herramienta muy útil ya que nos relaciona una álgebra de Lie con un espacio vectorial mediante un operador lineal.

Definición 1.13 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre el campo $\mathbb{F}$ y sea V un espacio vectorial sobre el mismo campo. Una* representación *del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V es un operador lineal*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(V) \\ x &\mapsto \varphi(x), \end{aligned}$$

el cual es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el álgebra general lineal $\mathfrak{gl}(V)$.

La representación φ se dice *fiel* si $Ker\varphi = 0$, es decir la representación es fiel si es un monomorfismo; y si $Ker\varphi = \mathfrak{g}$ entonces la representación se dice ser *trivial.*

Diremos que un subespacio $W \subset V$ es *invariante* con respecto a φ si se tiene que

$$\varphi(W) \subseteq W.$$

En tal caso, existe una *representación inducida* en el espacio cociente V/W.

Consideremos una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un campo $\mathbb{F}$. Para cada $x \in \mathfrak{g}$ definimos la función $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y].$$

Sean $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie podemos realizar los siguientes calculos:

$$\mathrm{ad}_{x+y}(z) = [x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$\mathrm{ad}_{\alpha x}(y) = [\alpha x, y] = \alpha[x, y].$$

Por lo tanto, ad_x es un operador lineal en $\mathfrak{g}$. En el estudio de las álgebras de Lie este operador resulta ser muy importante y le llamaremos el *operador adjunto*.

El resultado siguiente nos será de utilidad para definir una nueva representación muy importante.

Proposición 1.14 *Para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene que*

$$[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]},$$

donde $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x$.

Demostración. Sean $x, y, z \in \mathfrak{g}$, haciendo uso de la identidad de Jacobi podemos realizar los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{[x,y]}(z) &= [[x, y], z] \\
&= -[[y, z], x] - [[z, x], y] \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= \mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_y(z)) - \mathrm{ad}_y(\mathrm{ad}_x(z)) \\
&= (\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x)(z) \\
&= [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z).
\end{aligned}$$

y esto prueba nuestra proposición. ■

Con esta proposición concluimos que la correspondencia $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por

$$x \mapsto \mathrm{ad}_x,$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, y a la que llamaremos *representación adjunta*.

Ahora podemos definir una nueva álgebra de Lie la cual vendrá dada por la imagen de $\mathfrak{g}$ bajo la adjunta. A esta álgebra de Lie se le conoce como el *álgebra adjunta* la cual denotaremos por

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{ad}_x | x \in \mathfrak{g}\}.$$

El centro del álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ viene dado por

$$Z(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = \{w \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) : [w, v] = 0, \forall v \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})\}.$$

Consideremos la función $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, además notemos que $\mathrm{Ker}(\phi) = Z(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$. De esta manera, vemos que la función ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie cuando $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, esto es, un álgebra de Lie es isomorfa a su álgebra adjunta cuando $Z(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = 0$.

Un operador que es de suma importancia ya que satisface una regla muy conocida del cálculo diferencial es el que presentaremos en la siguiente definición.

Definición 1.15 *Una derivación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un operador lineal $\mathfrak{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfface la siguiente ecuación:*

$$\mathfrak{D}([x, y]) = [\mathfrak{D}x, y] + [x, \mathfrak{D}y].$$

Al conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ lo denotamos por $Der(\mathfrak{g})$.

Ahora probaremos que la ad_x es una derivación de $\mathfrak{g}$, usando la definición de ad_x y la identidad de Jacobi podemos realizar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_x[y, z] &= [x, [y, z]] \\ &= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\ &= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\ &= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)] \end{aligned}$$

A este tipo de derivación le llamaremos derivación interior.

Consideremos una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, a partir de la adjunta podemos definir una nueva función

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R},$$

la cual se define como

$$\kappa(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y),$$

a la cual llamaremos la *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$.

Notemos que usando la bilinealidad de la adjunta y mediante sencillos cálculos vemos que la forma de Killing es una forma bilineal y simétrica pero no necesariamente es no-degenerada.

Fijemos una base $\{e_1, \ldots e_n\}$ para $\mathfrak{g}$ y denotemos por Ax y Ay las matrices de representaciones para ad_x y ad_y relativas a esta base, entonces la forma de Killing vendrá dada por

$$\kappa(x, y) = \mathrm{tr}\left((Ax)(Ay)\right).$$

A continuación presentaremos un ejemplo para ilustar los conceptos presentados en esta sección.

Ejemplo 1.16 *Consideremos el álgebra especial lineal $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ y sea β la base para esta álgebra dada por*

$$\beta = \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ya que el corchete de Lie que esta definido para el álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ es el conmutador, entonces calculamos directamente el corchete en cada par de elementos de la base, un cálculo directo nos permite obtener las matrices de la representación adjunta, las cuales son:

$$\mathrm{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \mathrm{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora sea $z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$. Entonces podemos escribir $z = ax+bh+cy$ donde $a,b,c \in \mathbb{F}$, similarmente a como se obtienen las matrices anteriores podemos realizar los cálculos para encontrar la matriz de la transformación para cualquier z arbitrario. Nuestra matriz queda así:

$$\mathrm{ad}_z = \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix}$$

Ahora encontraremos la matriz de la forma de Killing, esto simplemente lo hacemos calculando cada $\kappa(e_i,e_j)$ y este valor será la entrada a_{ij} de la matriz de la forma de Killing. Haciendo los cálculos directos y aplicando la simetría de la forma de Killing llegamos a que la matriz es:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego para encontrar $\kappa(u,v)$ para $u,v \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ arbitrarios hacemos cálculos similares para obtener, en este caso, la siguiente expresión para la forma de Killing en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$:

$$\kappa(u,v) = 8u_2v_2 + 4u_1v_3 + 4u_3v_1.$$

Capítulo 2

Grupos de Lie

En este capítulo se introduce la definición general de grupo de Lie y estudiaremos la representación Adjunta para posteriormente introducir y estudiar algunos aspectos de los llamados *grupos de Lie clásicos*.

Para profundizar más en la Teoría de Grupos de Lie se recomiendan los siguientes textos: [4], [9].

2.1 Definición general de Grupo de Lie

En un grupo de Lie G se tienen dos estructuras: una algebraica, determinada por una multiplicación asociativa en el grupo G y otra diferenciable, definida por la estructura de la variedad diferenciable G. Ambas estructuras deben ser compatibles, por lo que es necesario que las funciones que definen la multiplicación en el grupo y la asignación de inverso para cada elemento del grupo deben ser diferenciables, esto es,

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G & \qquad\qquad \iota : G &\to G \\ \mu(g,h) &= gh & \iota(g) &= g^{-1}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

son dos funciones diferenciables en el sentido de diferenciabilidad de funciones entre variedades.

Otra manera de decir lo anterior es mediante las funciones μ y ι, en los términos siguientes:

(1) Existe $e \in G$, tal que

$$\mu(g,e) = \mu(e,g) = g, \qquad \forall\, g \in G.$$

(2) Para cada $g \in G$, y $\iota(g) \in G$ se tiene que

$$\mu(g, \iota(g)) = \mu(\iota(g), g) = e.$$

(3) Para cualesquiera $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$\mu(g_1, \mu(g_2, g_3)) = \mu(\mu(g_1, g_2), g_3).$$

Al elemento $e \in G$ de (1) se le llama la *identidad* (o *neutro*) del grupo G y al elemento $\iota(g) \in G$ en (2) se le llama el *inverso* de $g \in G$. Dado que el inverso de cada elemento es único, lo denotaremos por g^{-1}. Asimismo, el neutro e del grupo es único. Notemos además que (3) es simplemente la asociatividad de la operación del grupo.

Podemos resumir las condiciones anteriores en la siguiente definición:

Definición 2.1 *Un grupo de Lie es un par (G, μ) donde G es una variedad diferenciable y $\mu : G \times G \to G$ es la operación que define el producto del grupo, de tal manera que la función*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto \mu(g, h^{-1}) = gh^{-1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

es diferenciable. La dimensión del grupo es la dimensión de la variedad diferenciable G.

Es claro que esta definición es equivalente a las condiciones de diferenciabilidad de las funciones definidas en (2.1).

Algunos grupos de Lie muy conocidos son los números reales $\mathbb{R}$ con la suma usual; el círculo unitario $\mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ con la multiplicación usual de complejos. Por otra parte, cualquier grupo discreto es un grupo de Lie, por ejemplo, $\mathbb{Z}$ con la suma de enteros. Más adelante se verán varios ejemplos de grupos de Lie.

En adelante, usaremos la notación $\mu(g, h) = gh$ para referirnos al producto en un grupo de Lie (G, μ) y simplemente diremos que G es un grupo de Lie, tomando en cuenta que se tiene una operación binaria en G que define el producto del grupo. Sólo en ejemplos concretos será necesario dar la multiplcación del grupo de manera explícita.

2.2 Los grupos de Lie clásicos

El grupo general lineal.
Los grupos de Lie clásicos son los grupos de tranformaciones lineales invertibles de espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo de los reales, los complejos o los cuaternios, junto con los subgrupos que preservan una forma bilineal o una forma sesquilineal.

Sea $\mathbb{F}$ el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, y sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$. El conjunto de las transformaciones lineales invertibles de V en V lo denotaremos por $GL(V)$. Este conjunto tiene estructura de grupo bajo la composición de transformaciones, con elemento identidad la transformación identidad $I(x) = x$ para todo $x \in V$. El grupo $GL(V)$ es el primero de los grupos clásicos.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$ con base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Si $T : V \to V$ es una función lineal escribimos $\mu(T)$ para la matriz de T con respecto a esta base. Si $T, S \in GL(V)$ entonces $\mu(S \circ T) = \mu(S)\mu(T)$. Además, si $T \in GL(V)$, entonces $\mu(T \circ T^{-1}) = \mu(T^{-1} \circ T) = \mu(Id) = I$.

Recordemos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ es invertibles si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Usaremos la notación $GL(n, \mathbb{F})$ para el conjunto de las matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$. Bajo la multiplicación de matrices $GL(n, \mathbb{F})$ es un grupo con la matriz identidad como elemento identidad. Notemos que si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$ con base $\{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces la función $\mu : GL(V) \to GL(n, \mathbb{F})$ correspondiente a esta base es un isomorfismo de grupos. El grupo $GL(n, \mathbb{F})$ es llamado el grupo general lineal de rango n.

Si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es otra base de V, entonces existe una matriz $g \in GL(n, \mathbb{F})$ tal que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} v_i$$

y

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} w_i$$

para $j = 1, \ldots, n$, con $[h_{ij}]$ la matriz inversa de $[g_{ij}]$. Supongamos que T es una tranformación lineal de V en sí mismo y que $A = [a_{ij}]$ es la matriz de T respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B = [b_{ij}]$ es la matriz de T respecto a la base $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Entonces

$$T_{w_j} = T(\sum_i g_{ij} v_i) = \sum_i g_{ij} T v_i = \sum_i g_{ij} (\sum_k a_{ki} v_k) = \sum_l (\sum_k \sum_i h_{lk} a_{ki} g_{ij}) w_l$$

para $j = 1, \ldots, n$. Así, $B = g^{-1} A g$ es similar a la matriz A.

El grupo especial lineal.
El grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{F})$ es el conjunto de todos los elementos $A \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $\det(A) = 1$. Como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y $\det(I) = 1$, vemos que el grupo especial lineal es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{F})$.

Notamos que si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$ con base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y si $\mu : GL(V) \to GL(n, \mathbb{F})$ es la función previamente definida, entonces el grupo

$$\mu^{-1}(SL(n, \mathbb{F})) = \{T \in GL(V) : \det(\mu(T)) = 1\}$$

es independiente de la elección de la base. Denotaremos este grupo por $SL(V)$.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$, y sea $B : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma bilineal. Denotamos por $O(V, B)$ (o simplemente $O(B)$ cuando se sobreentiende el espacio V), al conjunto de todos los $g \in GL(V)$ tal que $B(gv, gw) = B(v, w)$ para todo $v, w \in V$. Notemos que $O(V, B)$ es un subgrupo de $GL(V)$, el cual es llamado el *grupo isométrico* de la forma B.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $\Gamma \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz con $\Gamma_{ij} = B(v_i, v_j)$. Si $g \in GL(V)$ tiene matriz $A = [a_{ij}]$ relativa a esta base, entonces

$$B(gv_i, gv_j) = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} B(v_k, v_l) = \sum_{k,l} a_{ki} \Gamma_{kl} a_{lj}.$$

Así, si A^t denota la matriz transpuesta $[c_{ij}]$ con $c_{ij} = a_{ji}$, entonces la condición de que $g \in O(B)$ es:

$$\Gamma = A^t \Gamma A.$$

Recordemos que una forma bilineal B es no degenerada si $B(v, w) = 0$ para todo w implica que $v = 0$, y si $B(v, w) = 0$ para todo v implica que $w = 0$.

En este caso tenemos que $\det \Gamma \neq 0$. Supongamos que B es no degenerada. Si $T : V \to V$ es lineal y satisface que $B(Tv, Tw) = B(v, w)$ para todo $v, w \in V$, entonces $\det(T) \neq 0$, por tanto, $T \in O(B)$.

A continuación discutiremos algunos de los casos especiales más importantes de este tipo de grupos.

Grupos ortogonales.
Empezaremos introduciendo los grupos de matrices, después identificaremos estos grupos con grupos isométricos de ciertas clases de formas bilineales.

Denotemos por $O(n, \mathbb{F})$ el conjunto de todos los $g \in GL(n, \mathbb{F})$ tal que $gg^t = I$, esto es, $g^t = g^{-1}$. Notemos que $(AB)^t = B^t A^t$ y que si $A, B \in GL(n, \mathbb{F})$ entonces $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, por lo que $O(n, \mathbb{F})$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{F}$. Este grupo es llamado el grupo ortogonal de matrices de $n \times n$ sobre el campo $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ introducimos el grupo ortogonal $O(p, q)$, con $p + q = n$ y $p, q \in \mathbb{N}$. Sea

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

y definamos

$$O(p, q) = \{g \in M_n(\mathbb{R}) : g^t I_{p,q} g = I_{p,q}\}.$$

Notemos que $O(n, 0) = O(0, n) = O(n, \mathbb{R})$. También, si

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz con entrada 1 en la antidiagonal ($j = n+1-i$) y todas las otras entradas cero, entonces $s = s^{-1} = s^t$ y $sI_{p,q}s^{-1} = sI_{p,q}s = sI_{p,q}s = -I_{q,p}$. Así la función

$$\phi : O(p, q) \to GL(n, \mathbb{R})$$

dado por $\phi(g) = sgs$ define un isomorfismo de $O(p, q)$ en $O(q, p)$.

Ahora describiremos estos grupos de terminos de formas bilineales.

Definición 2.2 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea M una forma bilineal simétrica en V. La forma M es positiva definida si $M(v,v) > 0$ para todo $v \in V$ con $v \neq 0$.*

Lema 2.3 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$ y sea B una forma bilineal simétrica no degenerada sobre $\mathbb{F}$.*
1. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $B(v_i, v_j) = \delta_{ij}$.
2. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces existen enteros $p, q \geq 0$ con $p + q = n$ y una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $B(v_i, v_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$ con $\epsilon_i = 1$ para $i \leq p$ y $\epsilon_i = -1$ para $i > p$. Además, si tenemos otra base entonces los correspondientes enteros (p, q) son los mismos.

Proposición 2.4 *Sea B una forma bilineal simétrica no degenerada sobre un espacio vectorial V de dimensión n sobre el campo $\mathbb{F}$.*

1. *Sea $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal para V con respecto a B, entonces $\mu : O(V, B) \to O(n, \mathbb{F})$ define un isomorfismo de grupos.*

2. *Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Si B tiene signatura $(p, n-p)$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base pseudo-ortonormal de V, entonces $\mu : O(V, B) \to O(p, n-p)$ es un isomorfismo de grupos.*

Aquí $\mu(g)$, para $g \in GL(V)$, es la matriz de g respecto a una base dada.

El grupo especial ortogonal sobre $\mathbb{F}$ es el subgrupo

$$SO(n, \mathbb{F}) = O(n, \mathbb{F}) \cap SL(n, \mathbb{F})$$

de $O(n, \mathbb{F})$. Los grupos especiales ortogonales indefinidos son los grupos

$$SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(p + q, \mathbb{R}).$$

El grupo simpléctico.
Consideremos la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

con I la matriz identidad de $n \times n$. El grupo simpléctico de rango n sobre $\mathbb{F}$ se define como

$$Sp(n, \mathbb{F}) = \{g \in M_{2n}\mathbb{F} : g^t J g = J\}.$$

Como en el caso de los grupos ortogonales también se tiene que $Sp(n, \mathbb{F})$ es un subgrupo de $GL(2n, \mathbb{F})$.

Una forma bilineal B es llamada antisimétrica si $B(v, w) = B(w, v)$. Si B es antisimétrica y no degenerada, entonces $m = \dim(V)$ debe ser par, ya que la matriz B relativa a cualquier base de V es antisimétrica y tiene determinante distinto de cero.

Lema 2.5 *Sea V un espacio vectorial de dimensión $2n$ sobre $\mathbb{F}$ y sea B una forma bilineal antisimétrica no degenerada en V. Entonces existe una base $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ para V tal que la matriz $[B(v_i, v_j)]$ es igual a J (esta base se llama base B-simpléctica).*

Proposición 2.6 *Sea V un espacio vectorial de dimensión $2n$ sobre $\mathbb{F}$ y sea B una forma bilineal antisimétrica no degenerada en V. Fijamos una base $B-simplectica$ de V y sea $\mu(g)$, para $g \in GL(V)$, la matriz de g respecto a esta base. Entonces $\mu : O(V, B) \to Sp(n, \mathbb{F})$ es un isomorfismo de grupos.*

Grupos unitarios.
Otra familia de subgrupos clásicos de $GL(n, \mathbb{C})$ consiste de los grupos unitarios y los grupos especiales unitarios para formas Hermitianas definidas e indefinidas. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ usaremos la notación $A^* = \overline{A}^t$ para su matriz adjunta. El grupo unitario de rango n es el grupo

$$U(n) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) : g^*g = I\}.$$

El grupo especial unitario es

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}).$$

Consideremos la matriz $I_{p,q}$, definimos el grupo unitario indefinido de signatura (p, q) como

$$U(p, q) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) : g^*I_{p,q}g = I_{p,q}\}.$$

El grupo especial indefinido de signatura (p, q) es $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(n, \mathbb{C})$. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$. Una función $\mathbb{R}$ bilineal $B : V \times V \to \mathbb{C}$ (donde V es visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$), se dice una forma Hermitiana si satisface
1. $B(av, w) = aB(v, w)$ para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todo $v, w \in V$.
2. $B(w, v) = \overline{B(v, w)}$ para todo $v, w \in V$.

Definimos $U(V, B)$ como el grupo de todos los elementos $g \in GL(V)$ tal que $B(gv, gw) = B(v, w)$ para todo $v, w \in V$. Llamamos a $U(V, B)$ el grupo unitario de B.

Lema 2.7 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ y sea B una forma Hermitiana no degenerada en V. Entonces existe un entero p con $n \geq p \geq 0$, y una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $B(v_i, v_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$, con $\epsilon_i = 1$ para $i \leq p$ y $\epsilon_i = -1$ para $i > p$. El número p solamente depende de B y no de la elección de la base.*

Proposición 2.8 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ y sea B una forma Hermitiana no degenerada en V de signatura (p, q). Fijamos una base pseudo-ortonormal de V relativa a B y sea $\mu(g)$, para $g \in GL(V)$ la matriz de g respecto a esta base. Entonces $\mu : U(V, B) \to U(p, q)$ es un isomorfismo de grupos.*

Grupos cuaterniónicos
Antes de introducir los siguientes tipos de grupos recordaremos algunas propiedades

básicas de los cuaternios. Consideremos el espacio vectorial real $\mathbb{H}$ de dimensión 4 que está formado por las matrices complejas de 2×2

$$w = \begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \overline{x} \end{pmatrix}$$

con $x, y \in \mathbb{C}$.
Uno puede verificar directamente que $\mathbb{H}$ es cerrado bajo multiplicación en $M_2(\mathbb{C})$. Si $w \in \mathbb{H}$ entonces $w^* \in \mathbb{H}$ y

$$w^* w = ww^* = (|x|^2 + |y|^2)I.$$

Por lo tanto todo elemento distinto de cero en $\mathbb{H}$ es invertible. Así, $\mathbb{H}$ es un álgebra de división sobre $\mathbb{R}$. Esta álgebra de división es una realización de los cuaternios.

La forma más usual de introducir los cuaternios es considerar el espacio vectorial $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{R}$ con base $\{1, i, j, k\}$. Definimos una multiplicación tal que 1 es la identidad y

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ ki = -ik &= j \\ jk = -kj &= i \end{aligned}$$

entonces extendemos la multiplicación a $\mathbb{H}$ por linealidad relativa a los escalares reales. Para obtener un isomorfismo entre esta versión de $\mathbb{H}$ y la versión de matrices complejas de 2×2, tomamos

$$1 = I, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

donde i es igual a $\sqrt{-1}$. La conjugación $w \mapsto w^*$ satisface $(uv)^* = v^* u^*$. En términos de componentes reales, $(a + bi + cj + dk)^* = a - bi - cj - dk$ para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es usual escribir los cuaternios en la forma compleja como $x + jy$ con $x, y \in \mathbb{C}$; sin embargo, note que entonces la conjugación viene dada como

$$(x + jy)^* = \overline{x} + \overline{y}j = \overline{x} - jy$$

En el espacio vectorial real $\mathbb{H}^n$ de dimensión $4n$ definimos la multiplicación por $a \in \mathbb{H}$ por la derecha por

$$(u_1, \ldots, u_n) \cdot a = (u_1 a, \ldots, u_n a).$$

Notemos que $u \cdot 1 = u$ y que $u \cdot (ab) = (u \cdot a) \cdot b$. Entonces podemos pensar a $\mathbb{H}^n$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{H}$. Viendo los elementos de $\mathbb{H}^n$ como vectores columna de $n \times 1$, definimos Au para $u \in \mathbb{H}^n$ y $A \in M_n(\mathbb{H})$ por multiplicación de matrices. Entonces $A(u \cdot a) = (Au) \cdot a$ para $a \in \mathbb{H}$; por tanto A define una función lineal cuaterniónica.

Podemos pensar a $\mathbb{H}^n$ como un espacio vectorial de dimensión $2n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ en varias maneras, por ejemplo, podemos meter $\mathbb{C}$ en $\mathbb{H}$ en cualquiera de los subcampos

$$\mathbb{R}1 + \mathbb{R}i, \mathbb{R}1 + \mathbb{R}j, \mathbb{R}1 + \mathbb{R}k.$$

Usando el primero de estos encrustamientos, escribimos $z = x + jy \in \mathbb{H}^n$ con $x, y \in \mathbb{C}^n$, y igualmente $C = A + jB \in M_n(\mathbb{H})$ con $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Las funciones

$$z \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} yC \mapsto \begin{pmatrix} A & -\bar(B) \\ B & \bar(A) \end{pmatrix}$$

identifican $\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{C}^{2n}$ y $M_n(\mathbb{H})$ con la subaálgebra real de $M_{2n}(\mathbb{C})$ consistiendo de las matrices T tales que

$$JT = \overline{T}J$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos $GL(n, \mathbb{H})$ como el grupo de todas las matrices invertibles de $n \times n$ sobre $\mathbb{H}$. Si usamos el encrustamiento de $M_n(\mathbb{H})$ en $M_{2n}(\mathbb{C})$ recien descrito, vemos que

$$GL(n, \mathbb{H}) = \{g \in GL(2n, \mathbb{C}) : Jg = \overline{g}J\}.$$

El grupo especial lineal cuaterniónico

Podemos definir $SL(n, \mathbb{H})$ como el conjunto de todas las matrices de determinante uno en $GL(n, \mathbb{H})$ con respecto a cualquiera de las estructuras complejas anteriores. Este grupo es usualmente denotado por $SU^*(2n)$.

Los grupos unitarios cuaterniónicos

Para $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{H})$ definimos $X^* = (x^*_{ji}) \in M_n(\mathbb{H})$. Consideremos la matriz diagonal $I_{p,q}$ con $p+q = n$. Definimos los grupos unitarios cuaterniónicos indefinidos como

$$Sp(p, q) = \{g \in GL(p + q, \mathbb{H}) : g^* I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

Este conjunto es un subgrupo de $GL(p + q, \mathbb{H})$. El grupo $Sp(p, q)$ es un grupo isométrico de la forma Hermitiana cuaterniónica no degenerada

$$B(w, z) = w^* I_{p,q} z$$

donde $w, z \in \mathbb{H}^n$. Si escribimos $w = u + jv$ y $z = x + jy$ con $u, v, x, y \in \mathbb{C}^n$ y sea $K_{p,q} = diag[I_{p,q} I_{p,q}] \in M_{2n}\mathbb{R}$, entonces

$$B(w, z) = [u^* v^*] K_{p,q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + j[u^t v^t] K_{p,q} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Así los elementos de $Sp(p, q)$, vistos como tranformaciones lineales de $\mathbb{C}^{2n}$, preservan una forma Hermitiana de signatura $(2p, 2q)$ y una forma antisimétrica no degenerada.

El grupo $SO^*(2n)$

Sea J la matriz antisimétrica de $2n \times 2n$ como se ha definido anteriormente. Como $J^2 = -I_{2n}$, la función de $GL(2n, \mathbb{C})$ en si misma dada por $\theta(g) = -JgJ$ define un automorfismo cuyo cuadrado es la identidad. Nuestra última familia de grupos clásicos es

$$SO^*(2n) = \{g \in SO(2n, \mathbb{C}) : \theta(\overline{g}) = g\}$$

Identificamos $\mathbb{C}^{2n}$ con $\mathbb{H}^n$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ por la función

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + jb,$$

donde $a, b \in \mathbb{C}^n$. Entonces el grupo $SO^*(2n)$ se convierte en el grupo isométrico de la forma anti-Hermitiana cuaterniónica no degenerada

$$C(x, y) = x^* jy$$

para $x, y \in \mathbb{H}^n$.
Esta forma satisface $C(x, y) = -C(y, x)^*$ y $C(x\alpha, y\beta) = \alpha^* C(x, y)\beta$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$.

Los ejemplos que hemos abordado anteriormente todos son de grupos de Lie de matrices, aunque en este trabajo no requeriremos otro tipo de grupos. Sin embargo, no todos los grupos de Lie son grupos de matrices, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Sea H el grupo real de Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

y sea Γ el grupo discreto

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El subgrupo Γ es central, y el grupo de Lie H/Γ no tiene representaciones fieles finitas sobre $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

El álgebra de Lie de un grupos de Lie y la función exponencial

3.1 El álgebra de Lie de un grupo de Lie

En esta sección definiremos el álgebra de Lie de un grupo de Lie G. Esta álgebra de Lie resulta ser espacio tangente a la identidad del grupo G, T_eG, por lo que es necesario coocer la escructura de espacio vectorial para este espacio. También necesitamos definir un corchete de Lie para T_eG y vamos a probar que en el grupo de Lie G existe una álgebra de Lie muy importante que consiste de los campos vectoriales invariantes por la izquierda en G, $\mathfrak{X}_L(G)$. Para probar que T_eG es el álgebra de Lie del grupo de Lie G, precisamente tenemos que probar que el álgebra de los campos invariantes por la izquierda es isomorfa a el espacio tangente en la identidad del grupo G.

Sea G un grupo de Lie y $g \in G$ un elemento fijo. Definimos la *traslación por la izquierda* en el grupo G como

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ h &\mapsto L_g(h) = gh. \end{aligned}$$

Asimismo, definimos la traslación por la derecha en el grupo G como

$$\begin{aligned} R_g : G &\to G \\ h &\mapsto R_g(h) = hg. \end{aligned}$$

Por medio de un cálculo directo es fácil probar las siguientes propiedades para estas funciones:

$$L_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ L_{g_1}$$

para cada $g_1, g_2 \in G$. Además, L_g y R_g son difeomorfismos y

$$(L_g)^{-1} = L_g^{-1}$$

Ahora probaremos que efectivamente la función traslación por la izquierda L_g es biyectiva y que además la inversa es como se ha dicho.

Inyectividad:
Supongamos que

$$L_g(h_1) = L_g(h_2)$$

y de aquí tenemos

$$gh_1 = gh_2$$
$$g^{-1}(gh_1) = g^{-1}(gh_2)$$

por lo tanto, $h_1 = h_2$.
Sobreyectividad:
Sea $y \in G$ entonces existe $g^{-1}y \in G$ tal que

$$L_g(g^{-1}y) = g(g^{-1}y) = y.$$

Esto prueba que L_g es biyectiva por lo que existe su inversa, y por unicidad de la inversa, tenemos que

$$(L_g)^{-1} = L_g^{-1}$$

De la misma manera, para la función R_g probamos que es una función biyectiva cuya inversa viene dada por

$$(R_g)^{-1} = R_g^{-1}$$

Como el producto del grupo G y la signación de inversos son funciones suaves, entonces L_g y R_g son también suaves, esto es, L_g y R_g son difeomorfismos.

A continuación probaremos un lema muy importante el cual es necesario para nuestro desarrollo.

Lema 3.1 *Sean $g, h \in G$ y sea L_g la función de traslación por la izquierda entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$(d_h L_g)^{-1} = d_{gh} L_{g^{-1}}.$$

Demostración. Tenemos que

$$L_g \circ L_{g^{-1}} = id = L_{g^{-1}} \circ L_g$$

derivando en ambos lados obtenemos

$$d_h(L_{g^{-1}} \circ L_g) = d_h(id)$$

por la regla de la cadena obtenemos

$$dL_{g^{-1}}(L_g(h)) \circ dL_g(h) = I$$

de lo anterior obtenemos

$$d_{gh} L_{g^{-1}} \circ d_h L_g = I$$

y multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por $(d_h L_g)^{-1}$ llegamos al resultado deseado. ∎

Consideremos ahora dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la suma $X + Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ de la manera usual:

$$(X + Y)(f) : M \to \mathbb{R},$$

$$(X+Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f).$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$ entonces definimos el campo vectorial $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ por

$$(fX)(g) : M \to \mathbb{R},$$

$$(fX)(g)(p) = f(p)X_p(g).$$

Sean X, Y dos campos vectoriales diferenciables sobre la variedad M entonces existe un único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda función $f \in C^\infty(M)$. A este campo Z se le llama el corchete de Lie de X e Y denotado como $[X, Y]$.

Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice ser *invariante por la izquierda* si

$$(\mathrm{d}_h L_g)(X(h)) = X(gh) \qquad \forall\, g, h \in G. \tag{3.1}$$

Notemos que $X(h) \in T_h G$ por lo que $\mathrm{d}_h L_g : T_h G \to T_{gh} G$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}_L(G)$ al conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda en G. Es claro que la suma de dos campos invariantes por la izquierda es de nuevo un campo invariante por la izquierda. Ademas, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, entonces $\lambda X \in \mathfrak{X}_L(G)$. Por lo tanto, $\mathfrak{X}_L(G)$ es un espacio vectorial real.

Otra manera de escribir la ecuación (3.1) es por medio del *pull-back* del campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ bajo el difeomorfismo L_g. Así, $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante por la izquierda si y sólo si

$$L_g^* X = X,$$

donde

$$(L_g^* X)(h) \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{d}_{gh} L_g^{-1})(X(L_g(h))) = (\mathrm{d}_{gh} L_{g^{-1}})(X(gh)) = \big(\mathrm{d}_h L_g\big)^{-1}(X(gh)).$$

Una propiedad importante de los campos vectoriales invariantes por la izquierda es que su corchete es tambien un campo vectorial invariante por la izquierda. En efecto, si $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$, entonces

$$L_g^*[X, Y] = [L_g^* X, L_g^* Y] = [X, Y].$$

Definimos el conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda como

$$\mathfrak{X}_L(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) | X(gh) = d_h L_g(X(h))\}$$

Este conjunto es una álgebra de Lie ya que si $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$, entonces $[X, Y]$ es también un campo vectorial invariante por la izquierda en G

$$L_g^*[X, Y] = [L_g^* X, L_g^* Y] = [X, Y]$$

es decir, $[X, Y]$ es invariante por la izquierda.

Esto hace de $(\mathfrak{X}_L(G), [\,,])$ una *álgebra de Lie*. De hecho, esta álgebra de Lie es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G. Sin embargo, podemos identificar al espacio de los campos vectoriales invariantes por la izquierda con el espacio tangente al grupo G en $e \in G$, T_eG, de la siguiente manera: Si $v \in T_eG$, definimos el campo vectorial $X_v \in \mathfrak{X}(G)$ por

$$X_v(g) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{d}_e L_g)(v) \in T_gG. \tag{3.2}$$

Notemos que para cualquier $y \in G$ en una vecindad de $g \in G$,

$$(\mathrm{d}_g L_y)(X_v(g)) = (\mathrm{d}_g L_y) \circ (\mathrm{d}_e L_g)(v) = (\mathrm{d}_e L_{yg})(v) = X_v(yg),$$

lo cual establece que el campo vectorial X_v definido en (3.2) es invariante por la izquierda. Más aún, si $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, se tiene que $X(e) \in T_eG$ por lo que la correspondencia

$$\begin{aligned} T_eG &\to \mathfrak{X}_L(G) \\ v &\mapsto X_v, \end{aligned}$$

donde X_v esta definido por (3.2) es una biyección. Luego, $\mathfrak{X}_L(G)$ es un espacio finito dimensional y se tiene así la siguiente

Definición 3.2 *Sea G un grupo de Lie de dimensión finita. El álgebra de Lie de G, que denotaremos por $\mathfrak{g}$, se define como el espacio tangente a G en la identidad $e \in G$.*

Se tiene así que el ágebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo de Lie G es un espacio vectorial real en el cual está definida un operación

$$[\,,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

definida para cualesquiera $u, v \in \mathfrak{g} = T_eG$ por

$$[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} [X_u, X_v](e)$$

Se tiene que esta operación satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad

   $$[\lambda u + \mu v, \xi w + \zeta z] = \lambda\xi[u, w] + \lambda\zeta[u, z] + \mu\xi[v, w] + \mu\zeta[v, z],$$

   para cualesquiera $u, v, w, z \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$.

2. Antisimetría.

   $$[u, v] = -[v, u].$$

3. Identidad de Jacobi

   $$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Ahora ya estamos en condiciones de probar que existe un isomorfismo entre $\mathfrak{X}_L(G)$ y T_eG, para probar esto definimos la siguiente función

$$\begin{aligned}\Phi : T_eG &\to \mathfrak{X}_L(G)\\ v &\mapsto \Phi(v)\end{aligned}$$

donde $\Phi(v) = X_v$ con $X_v(g) = (d_eL_g)(v)$. Primero probaremos que Φ es lineal, Sean $v, w \in T_eG$

$$\begin{aligned}\Phi(v+w) &= X_{v+w}\\ X_{v+w}(g) &= (d_eL_g)(v+w)\\ &= d_eL_g(v) + d_eL_g(w)\\ &= X_v(g) + X_w(g)\end{aligned}$$

y por tanto $\Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$. Luego,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda v) &= X_{\lambda v}\\ X_{\lambda v}(g) &= (d_eL_g)(\lambda v)\\ &= \lambda(d_eL_g)(v)\end{aligned}$$

por lo tanto $\Phi(\lambda v) = \lambda\Phi(v)$. Ahora sólo falta probar que esta función es uno a uno y sobre para probar que la función es un isomorfismo.

Calculemos ahora el núcleo $\ker\Phi$

$$\ker\Phi = \{v \in T_eG | \Phi(v) = 0\},$$

luego, se sigue que

$$\ker\Phi = \{v \in T_eG | X_v = 0\}.$$

Esto significa que $X_v(g) = 0$ para toda $g \in G$, de aquí $\ker(d_eL_g) = \{0\}$ y esto prueba que Φ es uno a uno.

Sea $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, entonces existe $u \in T_eG$ tal que $\Phi(u) = X_u$. Como $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, tenemos que $(d_hL_g)(X(h)) = X(gh)$ para cada $g, h \in G$, en particular, si $h = e$ entonces $(d_eL_g)(X(e)) = X(g)$. Esto prueba que la función Φ es un isomorfismo.

3.2 La función exponencial

Definición 3.3 *Un subgrupo 1-paramétrico de un grupo de Lie G es un homomorfismo de grupos de Lie*

$$\varphi : \mathbb{R} \to G$$

Definición 3.4 *Sea G un grupo de Lie, y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea $X \in \mathfrak{g}$. Entonces*

$$\lambda\frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$$

es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathbb{R}$ *en* $\mathfrak{g}$*. Debido a que la recta real es simplemente conexa, entonces existe un único subgrupo 1-paramétrico*

$$\exp_X : \mathbb{R} \to G$$

tal que

$$d\exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X.$$

En otras palabras, $t \mapsto \exp_X(t)$ *es el único subgrupo 1-paramétrico de* G *cuyo vector tangente en* 0 *es* $X(e)$*. Ahora definimos la función exponencial*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

por

$$\exp(X) = \exp_X(1).$$

A continuación estudiaremos algunos resultados generales muy interesantes sobre la función exponencial.

Teorema 3.5 *Sea* X *en el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de el grupo de Lie* G*. Entonces*
a) $\exp(tX) = \exp_X(t)$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$*.*
b) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X)$ *para todo* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$*.*
c) $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$*.*
d) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *es* C^∞ *y* $d\exp : \mathfrak{g}_o \to G_e$ *es la función identidad. Así,* $\exp$ *envía un difeomorfismo de una vecindad de* 0 *en* $\mathfrak{g}$ *en una vecindad de* e *en* G*.*
e) $L_\sigma \circ \exp_X$ *es la única curva integral de* X *la cual toma el valor* σ *en* 0*. Como consecuencia, los campos vectoriales invariantes por la izquierda en grupos de Lie compactos son siempre completos.*
f) El grupo 1-paramétrico de difeomorfismos X_t *asociado con los campos vectoriales invariantes por la izquierda* X *esta dado por*

$$X_t = r_{\exp_X(t)}.$$

Demostración. $\frac{d}{dr}$ y $d\exp_X \frac{d}{dr}$ estan $\exp_X$-relacionados. Así $\exp_X$ es una curva integral de X y es la única para la cual $\exp_X(0) = e$. Como X es invariante por la izquierda, $L_\sigma \circ \exp_X$ es también una curva integral de X y es la única que toma el valor σ en 0, esto prueba la parte e) y de aquí la parte f) es inmediata. Ahora definimos las funciones φ y ψ de $\mathbb{R}$ a G por

$$\psi(t) = \exp_{sX}(t)$$

y

$$\varphi(t) = \exp_X(st)$$

donde $s \in \mathbb{R}$. Hemos observado que ψ es la única curva integral de sX tal que $\psi(0) = e$. Luego,

$$d\varphi \left(\frac{d}{dr}|_t \right) = d\exp_X \left(s \frac{d}{dr}|_{st} \right) = sX|_{\exp_X(st)}.$$

Entonces φ también es una curva integral de sX tal que $\varphi(0) = e$. Por la unicidad de las curvas integrales, $\varphi = \psi$. Entonces

$$\exp_{sX}(t) = \exp_X(st)s, t \in \mathbb{R}; X \in \mathfrak{g}.$$

Tomando $t = 1$ y cambiando s a t obtenemos la parte a) y como $\exp_X$ es un homomorfismo de $\mathbb{R}$ en G de a) obtenemos rapidamente b) y c). Por último para probar la parte d), definamos un campo vectorial V en $G \times \mathfrak{g}$ por

$$V(\sigma, X) = (X(\sigma), 0)$$

Entonces V es un campo vectorial suave y acordando a la parte e), la curva integral de V a traves de (σ, X) es

$$t \mapsto (\sigma \exp tX, X),$$

o en otras palabras, el grupo 1-paramétrico local de transformaciones asociadas con el campo vectorial V esta dado por

$$V_t(\sigma, X) = (\sigma \exp tX, X).$$

En particular, V es completo; por tanto V_1 esta definido y es suave en todo $G \times \mathfrak{g}$. Ahora sea $\pi : G \times \mathfrak{g}$ la proyección sobre G. Entonces

$$\exp X = \pi \circ V_1(e, X).$$

Hemos exhibido a la exponencial como una composición de funciones C^∞, entonces la exponencial es C^∞. Es claro que $d\exp : \mathfrak{g}_0 \to G_e$ es la función identidad, tX es una curva en G cuyo vector tangente en $t = 0$ es X y por la parte a), $\exp tX$ es una curva en G cuyo vector tangente en $t = 0$ es $X(e)$. ■

Teorema 3.6 *Sea $\varphi : H \to G$ un homomorfismo. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \big\uparrow & & \exp \big\uparrow \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{h}$. Entonces $t \mapsto \varphi(\exp tX)$ es una curva suave en G cuya tangente en 0 es $d\varphi(X(e))$. Es decir también es un subgrupo 1-paramétrico de G ya que φ es un homomorfismo. Pero $t \mapsto \exp t(d\varphi(X))$ es el único subgrupo 1-paamétrico de G cuya tangente en 0 es $(d\varphi(X))(e)$. Entonces

$$\varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi(X)),$$

luego

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)).$$

■

Proposición 3.7 *Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G, y sea $X \in \mathfrak{g}$. Si $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$, entonces $\exp tX \in \varphi(H)$ para todo t. Reciprocamente, si $\exp tX \in \varphi(H)$ para t en algún intervalo abierto, entonces $X \in d\varphi((h))$.*

Demostración. Si $X \in d\varphi((h))$, entonces $\exp tX \in \varphi(H)$ para todo t, de acuerdo al teorema anterior. Por otro lado, si $\exp tX \in \varphi(H)$ para t en algún intervalo I, entonces para $t \in I$, la función $t \mapsto \exp tX$ puede ser expresada como una composición $\varphi \circ \alpha$ donde α es una función suave de I en H. Sea $t_0 \in I$, y sea $\tilde{X}$ el campo vectorial invariante por la izquierda en H determinado por $\alpha(t_0)$. Entonces $d\varphi(\tilde{X}) = X$. ■

Hasta aquí hemos estudiado resultados generales para la función exponencial de un álgebra de Lie en un grupo de Lie, en ocasiones en la práctica se puede estar trabajando con álgebras de Lie de matrices y resulta importante estudiar la exponencial de matrices. En la siguiente sección veremos que la exponencial que va del álgebra general lineal a el grupo general lineal viene dada por la exponencial de matrices.

Si V es un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita y $x \in L(V, V)$, entonces la serie de potencias:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

converge en $L(V, V)$. Se probará en la siguiente sección que cuando V es un espacio vectorial de matrices entonces la serie anterior converge.

Se verifica fácilmente que $A(t) = e^{tx}$ satisface:

$$\frac{dA}{dt}(t) = xA(t) = (T_I R(A(t)))(x) = x^R(A(t)), A(0) = I;$$

por tanto $t \mapsto e^{tx}$ es el homomorfismo: $(\mathbb{R}, +) \to (GL(V), \circ)$. Así, $x \mapsto e^x$ es igual a la función exponencial del álgebra de Lie $L(V, V)$ de $GL(V)$ a $GL(V)$.

3.3 Exponencial de una matriz

Dado un grupo de matrices G hemos definido un espacio vectorial $T_I G$ – el espacio tangente a G en la matriz identidad $I \in G$. En esta sección presentaremos la función exponencial la cual es una función del espacio $T_I G$ en el grupo G y estudiaremos sus propiedades. Aquí trabajaremos con matrices cuyas entradas estan en $\mathbb{F}$, primero daremos la definición de exponencial de una matriz.

Definición 3.8 *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, definimos la exponencial de la matriz A por*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Decimos que esta sucesión converge si cada una de las n^2 suseciones de números $\in \mathbb{F}$

$$(I)_{ij} + (A)_{ij} + \left(\frac{A^2}{2!}\right)_{ij} + \left(\frac{A^3}{3!}\right)_{ij} + \dots$$

converge.

Ya que e^A esta definida solo por operaciones elementales de matrices en $M_n(\mathbb{F})$ es claro que e^A es nuevamente una matriz en $M_n(\mathbb{F})$, lo que no es tan obvio es asegurar que esta susección converja, en la siguiente proposición probaremos que efectivamente la serie converge.

Proposición 3.9 *Sea $A \in M_n(F)$ y sea*

$$m = \max\{|a_{ij}|, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Si $A^p = (a_{ij}^{(p)})$, entonces

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq (nm)^p$$

para cualesquiera i, j, con $1 \leq i, j, \leq n$. En consecuencia la serie definida anteriormente converge y la matriz e^A está bien definida.

Demostración. La demostración es por inducción en p. Sea $A = (a_{ij})$. Entonces $A^2 = (a_{ij}^{(2)})$, donde $(a_{ij}^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$. Luego

$$|(a_{ij}^{(2)})| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} m^2 = nm^2 \leq n^2m^2.$$

Ahora, $A^3 = (a_{ij}^{(3)})$ donde $(a_{ij}^{(3)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(2)}a_{kj}$ y de esta manera

$$|(a_{ij}^{(3)})| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(2)}a_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}^{(2)}||a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} nm^2m = n^2m^3 \leq n^3m^3.$$

Supongamos que

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq (nm)^p$$

para todo i, j, donde $1 \leq i, j, \leq n$. Luego

$$|a_{ij}^{(p+1)}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)}a_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}^{(p)}||a_{kj}| \leq nm\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}^{(p)}| \leq nm(nm)^p = (nm)^{p+1},$$

para cualesquiera i, j con $1 \leq i, j, \leq n$. Ahora, como

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq (nm)^p,$$

tenemos que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(p)}|}{p!} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nm)^p}{p!} = e^{nm}$$

y por lo tanto cada una de las n^2 series $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(p)}|}{p!}$ converge absolutamente. Con esto mostramos que

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

está bien definida. ■

La exponencial e^A se comporta de manera muy similar a la exponencial e^x donde $x \in \mathbb{R}$, $e^0 = 1$ para $0 \in \mathbb{R}$, y naturalmente para la matriz 0 se cumple que

$$e^0 = I$$

Recordemos que si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $e^{a+b} = e^a e^b$, desafortunadamente esta igualdad no siempre se cumple para cualesquiera matrices A y B, en la siguiente proposición veremos bajo que condiciones la última igualdad se cumple para matrices.

Proposición 3.10 *Si las matrices A y B conmutan, entonces se cumple que*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Si las matrices A y B conmutan entonces podemos utilizar el teorema del binomio para desarrollar e^{A+B} de la siguiente manera

$$e^{A+B} = I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots$$

Ahora desarrollamos $e^A e^B$

$$\begin{aligned} e^A e^B &= (I + A + \frac{A^2}{2} + \dots)(I + B + \frac{B^2}{2} + \dots) \\ &= I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Y con esta probamos nuestra proposición.

Corolario 3.11 *Para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, e^A es no singular.*

Demostración. Notemos que las matrices A y $-A$ conmutan, entonces

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$$

Calculamos el determinante a ambos lados de la igualdad y usando las propiedades del determinante nos queda

$$1 = (\det e^A)(\det e^{-A})$$

y por tanto $\det e^A \neq 0$. ■

De este corolario observamos que la función $exp : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), exp(A) = e^A$ de hecho envía a $M_n(\mathbb{F})$ a el grupo $GL(n, \mathbb{F})$

Proposición 3.12 *Si A es una matriz antisimétrica en $M_n(\mathbb{F})$, entonces e^A es ortogonal.*

Demostración. Tenemos que $I = e^0 = e^{A+A^T} = e^A e^{A^T} = (e^A)(e^A)^T$, por tanto e^A es ortogonal. ■

Si $a \in \mathbb{R}$ entonces la igualdad $e^a = 1$ implica que forzosamente a tiene que ser 0. Pero en el caso de que tengamos la igualdad $e^A = I$ donde A es una matriz en $M_n(\mathbb{F})$ entonces A no necesariamente tiene que ser la matriz 0, por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

cumple que $e^A = I$. La siguiente proposición es muy util a la hora de realizar calculos.

Proposición 3.13 *Si A, B son matrices que estan en $M_n(\mathbb{F})$ y B es no singular, entonces*

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$$

Demostración. $(BAB^{-1})^n = (BAB^{-1})(BAB^{-1})\ldots(BAB^{-1}) = BA^nB^{-1}$ y además $B(C+D)B^{-1} = BCB^{-1} + BDB^{-1}$ de estos cálculos y de la definición de exponencial de una matriz se cumple la proposición. ■

Ahora que ya conocemos los resultados básicos para la exponencial de un álgebra de matrices a un grupo de matrices sería util conocer una formula general para calcular e^A donde A es una matriz de 2×2, veremos como calcular esto en los siguientes resultados.

Lema 3.14 *Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.*
i)Si $a = d$ entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii)Si $a \neq d$ entonces

$$e^A = \begin{pmatrix} e^a & \frac{b(e^a - e^d)}{(a-d)} \\ 0 & a^d \end{pmatrix}$$

El siguiente resultado es muy útil cuando se quiere calcular e^A usando los valores propios de la matriz A [1].

Teorema 3.15 *Sean λ y μ los valores propios de $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.*
i) Si $\mu = \lambda$ entonces

$$e^A = e^\lambda[(1-\lambda)I + A].$$

ii) Si $\mu \neq \lambda$ entonces

$$e^A = \frac{\mu e^\lambda - \lambda e^\mu}{\mu - \lambda} I + \frac{e^\mu - e^\lambda}{\mu - \lambda} A.$$

Demostración. i) Ya que $\mu = \lambda$, entonces existe una matriz invertible X tal que

$$A = X \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} X^{-1}$$

para algún x. Por tanto

$$e^A = e^\lambda X \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1} = e^\lambda[(1-\lambda)I + A].$$

ii) Ya que $\mu \neq \lambda$, entonces existe una matriz invertible X tal que

$$A = X \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} X^{-1}.$$

Por tanto

$$e^A = X \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} X^{-1}.$$

Entonces notando que

$$\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} = \frac{\mu e^\lambda - \lambda e^\mu}{\mu - \lambda} I + \frac{e^\mu - e^\lambda}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

de aquí se cumple la expresión en ii). ∎

Ahora vamos a caracterizar e^A, únicamente, en términos de las entradas de A.

Corolario 3.16 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.
i) Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ *entonces*

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Si $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ *entonces*

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} \cosh(\Delta) + \frac{a-d}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & b\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \\ c\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \cosh(\Delta) - \frac{a-d}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \end{pmatrix}$$

donde $\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$.

Demostración. Los eigenvalores de A son

$$\lambda = (a+d) - \frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

y

$$\mu = (a+d) + \frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.$$

Por tanto $\lambda = \mu$ si y sólo si $(a-d)^2 + 4bc = 0$. Entonces el resultado se sigue sustituyendo λ y μ en las fórmulas del teorema anterior. ■

El siguiente corolario nos da una fórmula para obtener e^A cuando A es una matriz real.

Corolario 3.17 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

i) Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ *entonces*

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ *entonces*

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} \cosh(\delta) + \frac{a-d}{2}\frac{\sinh(\delta)}{\delta} & b\frac{\sinh(\delta)}{\delta} \\ c\frac{\sinh(\delta)}{\delta} & \cosh(\delta) - \frac{a-d}{2}\frac{\sinh(\delta)}{\delta} \end{pmatrix}$$

iii) Si $(a-d)^2 + 4bc < 0$ *entonces*

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} \cosh(\delta) + \frac{a-d}{2}\frac{\sinh(\delta)}{\delta} & b\frac{\sinh(\delta)}{\delta} \\ c\frac{\sinh(\delta)}{\delta} & \cosh(\delta) - \frac{a-d}{2}\frac{\sinh(\delta)}{\delta} \end{pmatrix}$$

donde

Ilustraremos estas formulas con dos ejemplos.

Ejemplo 3.18 *Si A es una matriz real*

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{At} = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.19 *Si A es una matriz real*

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & -\sigma \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^A = \begin{pmatrix} \cosh(\delta) + \frac{\sigma}{\delta}\sinh(\delta) & \frac{\omega}{\delta}\sinh(\delta) \\ \frac{\omega}{\delta}\sinh(\delta) & \cosh(\delta) - \frac{\sigma}{\delta}\sinh(\delta) \end{pmatrix}$$

donde $\delta = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2}$.

Ahora presentaremos algunas fórmulas para calcular la exponencial de una matriz A de $n \times n$ cuando esta matriz satisface un polinomio cuadrático. Los resultados siguientes también funcionan para matrices de 2×2 pero están restringidos a casos especiales. En particular, estos resultados se aplican a matrices de $n \times n$ las cuales son involutivas, de rango 1, y matrices idempotentes.

Lema 3.20 *Sea* $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *y supongamos que* $A^2 = \rho I$*, donde* $\rho \in \mathbb{C}$*.*
i) Si $\rho = 0$ *entonces* $e^A = I + A$*.*
ii) Si $\rho \neq 0$ *entonces* $e^A = \cosh(\sqrt{\rho})I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}A$*.*

Demostración. i) Esta parte es trivial ya que $A^2 = 0$.
ii) Como $A^2 = \rho I$, $A^{2k} = \rho^k I$ y $A^{2k+1} = \rho^k A$ para $k \geq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\
&= \left[I + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots\right] + \left[A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots\right] \\
&= \left(1 + \frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^2}{4!} + \dots\right) I + \left(I + \frac{\rho}{3!} + \frac{\rho^2}{5!} + \dots\right) A \\
&= \cosh(\sqrt{\rho})I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}A.
\end{aligned}$$

y esto prueba la parte ii). ■
El lema anterior aplica a matrices nilpotentes e involutivas.

Corolario 3.21 *Sea* $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$*.*
i) Si $A^2 = 0$ *entonces* $e^A = I + A$*.*
ii) Si $A^2 = I$ *entonces* $e^A = \cosh(1)I + \sinh(1)A$*.*

Teorema 3.22 *Sea* $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *y supongamos que* $A^2 + 2\lambda A + \mu I = 0$*, donde* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*.*
i) Si $\lambda^2 = \mu$ *entonces*

$$e^A = e^{-\lambda}[(1+\lambda)I + A].$$

ii) Si $\lambda^2 \neq \mu$ *entonces*

$$e^A = e^{-\lambda}\left\{\left[\cosh(\sqrt{\lambda^2-\mu}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})\right] I + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})A\right\}.$$

Demostración. Notemos que $B^2 = (\lambda^2 - \mu)I$ donde $B = A + \lambda I$. Por el lema, tenemos i)

$$\begin{aligned}
e^A &= e^{-\lambda}e^B \\
&= e^{-\lambda}[I + B] \\
&= e^{-\lambda}[(1+\lambda)I + A].
\end{aligned}$$

ii)

$$
\begin{aligned}
e^A &= e^{-\lambda}e^B \\
&= e^{-\lambda}\left[\cosh(\sqrt{\lambda^2-\mu}) + \frac{\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}B\right] \\
&= e^{-\lambda}\left\{\left[\cosh(\sqrt{\lambda^2-\mu}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})\right]I + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})A\right\}.
\end{aligned}
$$

■

A partir de este teorema obtenemos el siguiente corolario para matrices reales.

Corolario 3.23 *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ y supongamos que $A^2 + 2\lambda A + \mu I = 0$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
i) Si $\lambda^2 = \mu$ entonces

$$e^A = e^{-\lambda}[(1+\lambda)I + A].$$

ii) Si $\lambda^2 > \mu$ entonces

$$e^A = e^{-\lambda}\left\{\left[\cosh(\sqrt{\lambda^2-\mu}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})\right]I + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\sinh(\sqrt{\lambda^2-\mu})A\right\}.$$

iii) Si $\lambda^2 < \mu$ entonces

$$e^A = e^{-\lambda}\left\{\left[\cos(\sqrt{\mu-\lambda^2}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu-\lambda^2}}\sin(\sqrt{\mu-\lambda^2})\right]I + \frac{1}{\sqrt{\mu-\lambda^2}}\sin(\sqrt{\mu-\lambda^2})A\right\}.$$

Corolario 3.24 *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ y supongamos que el rango de A es 1.*
i) Si $trA = 0$ entonces $e^A = I + A$.
ii) Si $trA \neq 0$ entonces $e^A = I + ((e^{trA-1})/trA)A$.

Demostración. Ya que el rango de A es 1, $A^2 = (trA)A$. Por tanto, podemos aplicar el teorema 2.22 con $\lambda = (trA)/2$ y $\mu = 0$ para obtener el resultado. ■
Ahora consideremos el caso en que A es una matriz idempotente.

Corolario 3.25 *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ y supongamos que $A^2 = A$. Entonces $e^A = I + (e-1)A$.*

Demostración. Se aplica el teorema 2.22 con $\lambda = -(1/2)$ y $\mu = 0$. ■
De aquí en adelante los resultados que probaremos serán para calcular la exponencial de matrices de $n \times n$ las cuales satisfacen un polinomio cubico.

Teorema 3.26 *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ y supongamos que $A^3 = \rho A$, donde $\rho \in \mathbb{C}$.*
i) Si $\rho = 0$ entonces $e^A = I + A + \frac{A^2}{2}$.
ii) Si $\rho \neq 0$ entonces $e^A = I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}A + \frac{\cosh(\sqrt{\rho}-1)}{\rho}A^2$.

Demostración. El primer caso es fácil. Para el segundo caso, como $A^3 = \rho A$, $A^{2k+2} = \rho^k A^2$ y $A^{2k+1} = \rho^k A$ para $k \geq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\ &= I + \left[A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots\right] + \left[\frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots\right] \\ &= I + \left(1 + \frac{\rho}{3!} + \frac{\rho^2}{5!} + \dots\right) A + \left(\frac{1}{2!} + \frac{\rho}{4!} + \dots\right) A^2 \\ &= I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}} A + \frac{\cosh(\sqrt{\rho} - 1)}{\rho} A^2. \end{aligned}$$

■

Corolario 3.27 *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ y supongamos que $A^3 = A$, entonces*

$$e^A = I + \sinh(1)A + (\cosh(1) - 1)A^2.$$

Cuando el teorema se aplica a matrices reales obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.28 *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y supongamos que $A^3 = \rho A$, donde $\rho \in \mathbb{R}$. Entonces*
i) Si $\rho = 0$ entonces $e^A = I + A + \frac{A^2}{2}$.
ii) Si $\rho > 0$ entonces

$$e^A = I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}} A + \frac{\cosh(\sqrt{\rho} - 1)}{\rho} A^2.$$

iii) Si $\rho < 0$ entonces

$$I + \frac{\sin(\sqrt{-\rho})}{\sqrt{-\rho}} A + \frac{\cos(\sqrt{-\rho} - 1)}{\rho} A^2.$$

Enseguida aplicamos este resultado para matrices reales antisimetricas de 3×3.

Corolario 3.29 *Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Entonces $A^3 + \gamma^2 A = 0$, donde $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Si $\gamma \neq 0$ entonces*

$$e^A = I + \frac{\sin(\gamma)}{\gamma} A + \frac{1 - \cos(\gamma)}{\gamma^2} A^2.$$

3.4 La representacón Adjunta

Consideremos un grupo de Lie G y además consideremos un elemento $g \in G$ fijo. Definimos la función conjugación por

$$C_g : G \to G$$
$$C_g(h) = ghg^{-1}$$

Notemos que si queremos reescribir C_g en términos de las funciones de traslación por la izquierda L_g y traslación por la derecha R_g entonces la función C_g nos queda

$$C_g(h) = L_g \circ R_{g^{-1}}(h)$$

o también

$$C_g(h) = R_g^{-1} \circ L_g(h)$$

Definición 3.30 *Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G entonces definimos la adjunta de $\mathfrak{g}$ como*

$$Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$Ad_g = d_e C_g$$

Lema 3.31 *La función Ad_g es un homomorfismo, es decir*

$$Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h$$

para todo $g, h \in G$.

Demostración.

$$\begin{aligned} Ad_{gh} &= d_e C_{gh} \\ &= d_e(C_g \circ C_h) \\ &= d_{C_{h(e)}} C_g \circ d_e C_h \\ &= d_e C_g \circ d_e C_h \end{aligned}$$

y esto demuestra la afirmación. ■

A continuación probaremos que Ad_g además de ser una función lineal también es invertible cuya inversa estará dada por

$$Ad_{g^{-1}} = (Ad_g)^{-1}$$

Primeramente calcularemos $(Ad_g)^{-1}$, usando la regla de la cadena y las igualdades $(d_h L_g)^{-1} = d_{gh} L_{g^{-1}}$ y $(d_h R_g)^{-1} = d_{hg} R_{g^{-1}}$ tenemos

$$\begin{aligned} (Ad_g)^{-1} &= [(d_{g^{-1}} L_g) \circ (d_e R_{g^{-1}})]^{-1} \\ &= (d_e R_{g^{-1}})^{-1} \circ (d_{g^{-1}} L_g)^{-1} \\ &= (d_e R_{g^{-1}})^{-1} \circ (d_{gg^{-1}} L_{g^{-1}}) \\ &= (d_e R_{g^{-1}})^{-1} \circ (d_e L_{g^{-1}}) \\ &= (d_{g^{-1}} R_g)^{-1} \circ (d_e L_{g^{-1}}) \end{aligned}$$

Por otro lado calculamos $Ad_{g^{-1}}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Ad_{g^{-1}} &= d_e C_{g^{-1}} \\ &= de_e(R_g \circ L_{g^{-1}}) \\ &= d_{L_{g^{-1}(e)}} R_g(d_e L_{g^{-1}}) \\ &= (d_{g^{-1}} R_g)^{-1}(d_e L_{g^{-1}}) \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que Ad_g es una tranformación lineal, es decir $Ad_g \in End(\mathfrak{g})$, además hemos probado que la Ad_g es invertible por lo tanto $Ad_g \in GL(n,\mathbb{R})$ entonces podemos definir una nueva función del grupo de Lie G en el grupo general lineal $GL_(n,\mathbb{R})$.

Definición 3.32 *Sea G un grupo de Lie, entonces definimos la representación adjunta de G por*

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL(n,\mathbb{R}) \\ g &\mapsto Ad(g) = Ad_g \end{aligned}$$

Denotemos la diferencial de la representación adjunta por ad, es decir,

$$d(Ad) = ad,$$

entonces por el diagrama de la exponencial tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut((g)) \\ \exp\Big\uparrow & & \exp\Big\uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \end{array}$$

también aplicando el mismo teorema a los automorfismos C_g de G, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{C_g} & G \\ \exp\Big\uparrow & & \exp\Big\uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

En otras palabras,

$$\exp tAd_g(X) = g(\exp tX)g^{-1}$$

En el caso especial en el que $G = Aut(V)$, el anterior diagrama se convierte en

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{Ad} & Aut(End(V)) \\ \exp\Big\uparrow & & \exp\Big\uparrow \\ End(V) & \xrightarrow{ad} & End(End(V)) \end{array}$$

luego

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{C_y} & Aut(V) \\ \exp \Big\uparrow & & \exp \Big\uparrow \\ End(V) & \xrightarrow{Ad_y} & End(V) \end{array}$$

donde $y \in Aut(V)$. Además si $x \in End(V)$, entonces

$$Ad_y(x) = y \circ x \circ y^{-1}.$$

De los resultados de la exponencial obtenemos

$$\begin{aligned} Ad_y(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(C_y(\exp tx)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(y \circ e^{tx} \circ y^{-1}) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} e^{y \circ x \circ y^{-1}} \\ &= y \circ x \circ y^{-1}. \end{aligned}$$

Similarmente, en el caso en que $G = GL(n, \mathbb{R})$ o $G = GL(n, \mathbb{C})$ y $y \in GL(n, \mathbb{R})$ y $x \in GL(n, \mathbb{R})$, entonces

$$Ad_y(x) = y \circ x \circ y^{-1}.$$

Proposición 3.33 *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y sea $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces*

$$ad_X(Y) = [X, Y].$$

Demostración.

$$\begin{aligned} ad_X(Y) &= (\frac{d}{dt}|_{t=0} Ad(\exp tX))Y \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{\exp tX}(Y) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d(C_{\exp tX})(Y). \end{aligned}$$

De aquí si X_t denota el grupo 1-paramétrico de difeomorfismos asociados con X, entonces

$$\begin{aligned} ad_X Y(e) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d(r_{\exp(-tX)})(d(l_{\exp tX})(Y(e))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d(r_{\exp(-tX)})(Y|_{\exp tX}) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d(X_{-t})(Y_{X_t(e)}) \\ &= (L_X Y)(e) \\ &= [X, Y](e). \end{aligned}$$

Esto termina la demostración ya que $ad_X Y$ y $[X, Y]$ son ambos invariantes por la izquierda. ∎

Capítulo 4

Las álgebras de Lie de dimensión 3

En este capítulo se abordarán las álgebras de Lie de dimensión 3 según la clasificación de Bianchi. En la primera sección se expondrá sobre la clasificación de Bianchi de las álgebras de Lie de dimensión 3, en la segunda sección se estudiarán las representaciones de las 9 álgebras de Lie clasificadas por Bianchi y se calcularán las matrices de representación adjunta y la forma de Killing para estas álgebras. Por último, en la tercera sección se considerará la función exponencial de las álgebras de Lie en el esquema de Bianchi en respectivos grupos de Lie para entender más profundamente la función exponencial en estas álgebras.

4.1 El esquema de clasificación de Bianchi

En esta sección vamos a introducir las álgebras de Lie de dimensión tres según la clasificación de Bianchi, estas álgebras de Lie son llamadas desde Bianchi I a Bianchi IX y las definiremos según el valor del corchete de Lie en cada par de elementos de la base. A continuación presentamos las álgebras de Lie en la clasificación de Bianchi y una prueba de esta clasificación se puede consultar en [2].

Teorema 4.1 *Cada álgebra de Lie de dimensión tres es isomorfa a alguna de las siguientes nueve álgebras de Lie.*

Bianchi I . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$[x_1, x_2] = 0$$
$$[x_2, x_3] = 0$$
$$[x_3, x_1] = 0$$

Bianchi II . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$[x_1, x_2] = 0$$
$$[x_2, x_3] = x_1$$
$$[x_3, x_1] = 0$$

Bianchi III . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$[x_1, x_2] = x_1$$
$$[x_2, x_3] = 0$$
$$[x_3, x_1] = 0$$

Bianchi IV . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &= 0\\ [x_2, x_3] &= x_1 + x_2\\ [x_3, x_1] &= -x_1\end{aligned}$$

Bianchi V . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &= 0\\ [x_2, x_3] &= x_2\\ [x_3, x_1] &= -x_1\end{aligned}$$

Bianchi VI . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &= 0\\ [x_2, x_3] &= \lambda x_2\\ [x_3, x_1] &= -x_1\end{aligned}$$

Bianchi VII . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &= 0\\ [x_2, x_3] &= x_1 + \lambda x_2\\ [x_3, x_1] &= -\lambda x_1 + x_2\end{aligned}$$

Bianchi VIII . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &= x_1\\ [x_2, x_3] &= x_3\\ [x_3, x_1] &= -2x_2\end{aligned}$$

Bianchi IX . *Definimos esta álgebra de Lie mediante los corchetes siguientes:*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &= x_3\\ [x_2, x_3] &= x_1\\ [x_3, x_1] &= x_2\end{aligned}$$

4.2 Representaciones de las álgebras de Lie 3-dimensionales

A continuación calcularemos las matrices de representación adjunta y la forma de Killing para cada una de las álgebras de Lie de dimensión 3, estas álgebras estan definidas unicamente por el valor de los corchetes en los elementos de la base.

Bianchi I.
Ya que esta álgebra de Lie consiste de puros ceros en el corchete en los elementos

de la base, entonces las matrices de representación adjunta son todas iguales a cero, de igual manera la forma de Killing es igual a cero.

Bianchi III.

Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes estan definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2] &= x_1 \\
[x_2, x_3] &= 0 \\
[x_3, x_1] &= 0
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la adjunta para cada par de elementos de la base.

$$\begin{aligned}
ad_{x_1}(x_1) &= [x_1, x_1] = 0 \\
ad_{x_1}(x_2) &= [x_1, x_2] = x_1 \\
ad_{x_1}(x_3) &= [x_1, x_3] = 0 \\
ad_{x_2}(x_1) &= [x_2, x_1] = -x_1 \\
ad_{x_2}(x_2) &= [x_2, x_2] = 0 \\
ad_{x_2}(x_3) &= [x_2, x_3] = 0 \\
ad_{x_3}(x_1) &= [x_3, x_1] = 0 \\
ad_{x_3}(x_2) &= [x_3, x_2] = 0 \\
ad_{x_3}(x_3) &= [x_3, x_3] = 0
\end{aligned}$$

Así, con los datos anteriores formamos nuestras matrices de representación adjunta adx_1, adx_2, adx_3 las cuales son:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora tomemos z en el álgebra de Lie, entonces podemos escribir a z como $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, y realizamos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
ad_z(x_1) &= [ax_1 + bx_2 + cx_3, x_1] \\
&= a[x_1, x_1] + b[x_2, x_1] + c[x_3, x_1] \\
&= -bx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_z(x_2) &= [ax_1 + bx_2 + cx_3, x_2] \\
&= a[x_1, x_2] + b[x_2, x_2] + c[x_3, x_2] \\
&= ax_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_z(x_3) &= [ax_1 + bx_2 + cx_3, x_3] \\
&= a[x_1, x_3] + b[x_2, x_3] + c[x_3, x_3] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ya con estos calculos tenemos nuestra matriz de representación adjunta

$$adz = \begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora realizando los calculos directamente obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa(x_1, x_2) &= 0 = \kappa(x_2, x_1) \\ \kappa(x_1, x_3) &= 0 = \kappa(x_3, x_1) \\ \kappa(x_2, x_3) &= 0 = \kappa(x_3, x_2) \\ \kappa(x_1, x_1) &= 0 \\ \kappa(x_2, x_2) &= 1 \\ \kappa(x_3, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Y de estos datos formamos nuestra matriz de la forma de killing

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último para encontrar $\kappa(u, v)$ para u, v elementos en el álgebra de Lie arbitrarios se hacen los calculos directamente y al final obtenemos:

$$\kappa(u, v) = u_2 v_2.$$

Las álgebras de Bianchi restantes se resuelven de manera análoga, por eso mismo presentaremos sólo los resultados.

Bianchi II.
Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes estan definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= 0 \\ [x_2, x_3] &= x_1 \\ [x_3, x_1] &= 0 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, después de algunos cálculos rutinarios obtenemos

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = 0.$$

Bianchi V.
Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes estan definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= 0 \\ [x_2, x_3] &= x_2 \\ [x_3, x_1] &= -x_1 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último después de muchos calculos rutinarios obtenemos

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = 2u_3v_3.$$

Bianchi IV.
Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes están definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= 0 \\ [x_2, x_3] &= x_1 + x_2 \\ [x_3, x_1] &= -x_1 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} -c & -c & a+b \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último, después de algunos cálculos de rutina obtenemos

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = 2u_3v_3$$

Bianchi VI.
Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= 0 \\ [x_2, x_3] &= \lambda x_2 \\ [x_3, x_1] &= -x_1 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & -\lambda c & \lambda b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último después de los cálculos necesarios obtenemos

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = (1 + \lambda^2)u_3v_3.$$

Bianchi VII.
Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes están definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= 0 \\ [x_2, x_3] &= x_1 + \lambda x_2 \\ [x_3, x_1] &= -\lambda x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} -\lambda c & -c & \lambda a + b \\ c & -\lambda c & -a + \lambda b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, después de algunos cálculos rutinarios obtenemos

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = (2\lambda^2 - 2)u_3 v_3$$

Bianchi IX.
Consideremos el álgebra de Lie cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes están definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= x_3 \\ [x_2, x_3] &= x_1 \\ [x_3, x_1] &= x_2 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, después de hacer los cálculos necesarios obtenemos

$$\kappa = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = -2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3.$$

Bianchi VIII.
Consideremos el álgebra de Lie $sl(2) = sp(1)$ cuya base es $\{x_1, x_2, x_3\}$ y cuyos corchetes están definidos de la siguiente manera

$$[x_1, x_2] = x_1$$
$$[x_2, x_3] = x_3$$
$$[x_3, x_1] = -2x_2$$

Al realizar los cálculos nuestras matrices de representación adjunta nos quedan:

$$adx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, adx_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, adx_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual manera para $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$ donde $a, b, c \in \mathbb{F}$, nuestra matriz nos queda:

$$adz = \begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ -2c & 0 & 2a \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}.$$

Por último, después de realizar los cálculos requeridos se obtiene:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u, v) = -4u_3v_1 + 2u_2v_2 - 4u_1v_3$$

Cada álgebra de Bianchi la hemos definido de manera abstracta, es decir, los elementos x_1, x_2, x_3 son elementos que no necesariamente son matrices, más adelante fijaremos una base de matrices para cada álgebra de Bianchi lo cual nos será de gran ayuda al momento de hacer cálculos.

4.3 Los grupos exponenciales de las álgebras de Lie 3-dimensionales

Mediante la función exponencial podemos relacionar una álgebra de Lie con un grupo de Lie y estudiar las propiedades de esta función para conocer mas la relación que se guardan, probaremos que la función exponencial que va de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a el grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ no es sobreyectiva.

Consideremos:

$$\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$$
$$A \mapsto \exp A$$

Para probar que esta función no es sobreyectiva basta con encontrar un $g \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $e^A \neq g$ para todo $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Supongamos que la exp es sobreyectiva, y consideremos la siguiente matriz:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya que el determinante de esta matriz es 1 entonces $g \in SL(2, \mathbb{R})$ y entonces por hipotesis existe una matriz $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tal que $e^A = g$.
Sabemos que $\det(e^A) = e^{trA}$ y de aquí

$$1 = \det g = \det e^A = e^{trA}$$

de esto concluimos que la $trA = 0$, entonces $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Sean λ_1 y λ_2 los eigenvalores de A, ya que $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ y asi podemos suponer que los eigenvalores de A son λ y $-\lambda$. Es claro que los eigenvalores de g son e^λ y $e^-\lambda$, y para nuestra matriz particular $e^\lambda = -1$ para $\lambda \neq 0$, estos nos muestra que los eigenvalores de A son diferentes, de esto A es similar a una matriz diagonal con los eigenvalores en la diagonal, es decir, podemos entonces $B \in M_2(\mathbb{C})$ invertible tal que

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$BgB^{-1} = Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$(BAB^{-1})^2 = Bg^2 B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de aquí se sigue que $g^2 = I$, lo cual es una contradicción ya que

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La contradicción vino de suponer que la función era sobreyectiva, por lo tanto, la función no puede se sobreyectiva.

En la siguiente proposición probaremos que la exponencial del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$ a el grupo de Lie $SO(n)$ es una función sobreyectiva.

Proposición 4.2 *La función exponencial*

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$$

está bien definida y es sobreyectiva.

Demostración. Ya sabemos que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz antisimétrica entonces e^A es una matriz diagonal, además también sabemos la siguiente igualdad

$$\det(e^A) = e^{trA},$$

y como A es una matriz antisimétrica sus elementos de la diagonal son todos iguales a 0, es decir $trA = 0$ y por tanto $\det(e^A) = 1$. Así, $e^A \in SO(n)$.

Recordemos del álgebra lineal que para cada matriz antisimétrica A existe una matriz ortogonal P tal que $A = PDP^T$ donde D es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & D_p \end{pmatrix}$$

tal que cada bloque D_i es cero o una matriz de 2×2 de la forma

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\theta_i \in \mathbb{R}$, y $\theta_i > 0$. Otro resultado que usaremos nos dice que para toda matriz ortogonal R existe una matriz ortogonal P tal que

$$R = PEP^T,$$

donde E es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & E_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & E_p \end{pmatrix}$$

tal que el bloque E_i es $1, -1$ o una matriz de 2×2 de la forma

$$E_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}.$$

Si R es una matriz ortogonal, hay un número par de -1 en la matriz E y estos se pueden agrupar en bloques de 2×2 asociados con $\theta = \pi$. Sea D la matriz por bloques asociada con E donde una entrada es igual a 1 en E está asociado con un cero en la matriz D. Entonces tenemos

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1},$$

y ya que D es una matriz diagonal por bloques, obtenemos e^D calculando la exponencial de cada bloque. Si $D_i = 0$ tenemos que $E_i = e^0 = 1$,y si

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix},$$

entonces obtenemos

$$e^D = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

exactamente el bloque E_i. Así, $E = e^D$ y por tanto

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} = PEP^{-1} = PEP^T = R,$$

y con esto hemos probado que la función exponencial es una función sobreyectica. ∎

En la sección anterior hemos estudiado las álgebras de Lie de la clasificación de Bianchi de una menera abstracta. Ahora presentaremos una base para cada una de las álgebras de Lie de Bianchi en forma matricial ya que es más practico trabajar con matrices. Las bases que presentaremos a continuación son derivada de las matrices de representación adjunta que ya se han calculado en la sección anterior.

Bianchi III.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el capitulo anterior hemos estudiado fórmulas para obtener la exponencial de una matriz de $2x2$ en general y formulas para calcular la exponencial de una matriz de $n \times n$ que cumplen ciertas condiciones. Vemos que los elementos de la base son fáciles de calcular con estas fórmulas obteniendo así los siguientes resultados:

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_2} = e^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cosh(\frac{1}{2}) - \sinh(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \cosh(\frac{1}{2}) + \sinh(\frac{1}{2}) \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Bianchi II.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bianchi V.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} \cosh(1) - \sinh(1) & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(1) - \sinh(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bianchi IV.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} \cosh(1)-\sinh(1) & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(1)-\sinh(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bianchi VI.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} \cosh(1)-\sinh(1) & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(1)-\sinh(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bianchi VII.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} \cosh(1)-\sinh(1) & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(1)-\sinh(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bianchi VIII.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bianchi IX.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) \\ 0 & \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}, e^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos(1) & 0 & \sin(1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(1) & 0 & \cos(1) \end{pmatrix}, e^{x_3} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) & 0 \\ \sin(1) & \cos(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] D. S. Bernstein, W. So, Some Explicit Formulas for the Matrix Exponential, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 8 (August 1993), pp. 1228–1232.

[2] L. Bianchi, On the Three-dimensional Spaces Which Admit a Continuos Group of Motions, *General Relativity and Gravitation*, Vol. 33, No. 12, December 2001 (Traducido del original: Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze*, Serie Terza, Tomo XI, pp. 267352 (1898).

[3] R. L. Bryant, An Introducction to Lie Groups and Symplectic Geometry, University of Duke, Septiembre 1993, `www.math.duke.edu/ bryant`. Consultado el 14 de Octubre de 2011.

[4] T. Brocker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer, 1985.

[5] M. L. Curtis, *Matrix groups* (2nd ed.), Springer, New York, 1987.

[6] G. Dávila Rascón, R. Flores Espinoza, Yu. M. Vorobiev, *Álgebra Lineal Teoría y problemas*, Editorial Unison, 2006.

[7] D. Z. Djoković, T. Q. Nguyen, The exponential group of almost simple algebraic groups, *Journal of Lie Theory* Vol. 5 (1996), pp. 275–291.

[8] D. Z. Djoković, K. H. Hofmann The surjectivity question for the exponential function of real Lie groups: A status report, *Journal of Lie Theory*, Vol. 7 (1997), pp. 171-199.

[9] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Lie groups*, Springer, 1999.

[10] R. Goodman, N. R. Wallach, *Symmetry, Representations, and Invariants*, Springer, New York, 2009.

[11] T. Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics, (1869–1926)*, Springer, New York, 2000.

[12] G. G. Hinojosa Palafox, *Clasificación de las Algebras de Lie Simples sobre los complejos*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemáticas , Universidad de Sonora, 1993.

[13] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1987.

[14] R. Jantzen, Editor's Note: On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions by Luigi Bianchi, *General Relativity and Gravitation*, Vol. 33, No. 12, December, 2001. pp.

[15] A. Krasinski, C. G. Behr, E. Schucking, et al., *The Bianchi Classification in the Schucking-Behr Approach*, *General Relativity and Gravitation*, Vol. 35, No. 3, (2003), pp. 475-489.

[16] R. O. Popovich, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, *Realizations of Real Low dimensional Lie Algebras*, (2005), www.arXiv:math-ph/0301029v7, Consultado en Agosto de 2011.

[17] M. Rainer, H. J. Schmidt *The natural calssification of real Lie algebras*, *Differential Geometry and Applications*, Proc. Conf. Aug. 28 – Sept. 1, 1995, Brno, Czech Republic, Masaryk University, Brno 1996, pp. 73–79.

[18] E. Rodríguez Castillo, *Sistemas de Raíces abstractas y álgebras de Lie*, Tesis de Licenciatura,Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 2007.

[19] M. Wüstner, Exponential Lie Groups with Disconnected Near Cartan Subgroups, *Journal of Lie Theory*, Vol. 8 (1998), pp. 399–400.

[20] M. Wüstner, The classification of all simple Lie groups with surjective exponential map, *Journal of Lie Theory*, Vol. 15 (2005), pp. 269–278.