UNIVERSIDAD DE SONORA.
Departamento de Matemáticas.

La propiedad de Kelley y contractibilidad de hiperespacios.

TESIS

que presenta

Francisco Jesús Soufflé Ramos.

para obtener el titulo de

Licenciado en Matemáticas.

Director de Tesis: M.C. Carlos Alberto Robles Corbala.

Hermosillo, Sonora
Junio de 2012

I

SINODALES:

M.C. Carlos Alberto Robles Corbala.

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa.

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida.

M.C. Jesús Francisco Espinoza Fierro.

III

AGRADECIMIENTOS.

Quiero agradecer en primer lugar al M.C. Carlos Alberto Robles Corbala por dirigir este trabajo de tesis.

Por el tiempo que me dedico y por compartir conmigo su conocimiento.

También quiero agradecer a mis padres y a mi hermano por creer en mi, estar a mi lado y apoyarme siempre.

Índice general

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Los hiperespacios de X son:

$2^X = \{A \subset X : A\, es\ cerrado\ y\ no\ vacio\}$,

$C(X) = \{A \in 2^X : A\, es\ conexo\}$.

A estos hiperespacios se les da una métrica H que se llama métrica de Hausdorff. El estudio de los hiperespacios aparece muy temprano en la Topología, a saber alrededor del año 1900 con los trabajos de Hausdorff y Vietoris.

En las décadas de los veinte y treinta, los hiperespacios cobran vida propia. Aparecen los primeros resultados sobre su estructura topológica. En 1922, Vietoris prueba que 2^X es compacto. Es de particular importancia el trabajo que en 1931 publicaron Borsuk y Mazurkiewicz, en el cual prueban que 2^X y $C(X)$ son conexos por trayectorias.

En 1942, aparece el importante articulo de Kelley. En este articulo discute una variedad de tópicos referentes a los hiperespacios. Muchos resultados que ya se habían obtenido tomaron un tratamiento sistemático, además aparecen otros nuevos. Se considera que este articulo ha sido una de las contribuciones mas significativas a la teoría de los hiperespacios.

La contractibilidad es un concepto topológico muy importante. Entonces una pregunta natural en el ámbito de los hiperespacios es:

¿Qué propiedades topológicas debe tener el continuo X para que sus hiperespacios sean contraibles?

La primer persona en investigar al respecto fue Wojdyslawski quien probo, en su articulo, que la conexidad local del continuo X es una condición suficiente para asegurar la contractibilidad de 2^X.

La siguiente persona en investigar la contractibilidad de los hiperespacios fue Kelley, en el articulo que publico en 1942. En el define una propiedad que ahora se llama propiedad de Kelley, y que cuando X la tiene, entonces sus hiperespacios son contraibles.

La propiedad de Kelley es una propiedad muy simple que es suficiente, pero no necesaria para garantizar la contractibilidad de los hiperespacios. En 1985, Rhee encontró una propiedad en X que es necesaria y suficiente para que sus hiperespacios sean contraibles, sin embargo, la propiedad de Rhee es mas sofisticada.

La simplicidad de la propiedad de Kelley ha hecho que sea objeto de estudio de muchos autores.

El objetivo de este trabajo es presentar condiciones en X, que nos impliquen que sus hiperespacios sean contraibles, donde X es un continuo.

Capítulo 1

La topología métrica

1.1. Métrica para el producto.

En este capítulo estudiaremos la topología métrica asociada a productos de espacios topológicos así como propiedades elementales de la conexidad y compacidad.

Definición 1. *Una distancia en un conjunto X es una función $d : X \times X \longrightarrow R$ que satisface las siguientes propiedades:*

(1)$d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$; la igualdad se da si, y solo si, $x = y$.

(2)$d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.

(3)(Desigualdad triangular) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Dada una distancia d en X, el numero $d(x, y)$ se llama a menudo distancia entre x e y en la distancia d. Dado $\epsilon > 0$, consideremos el conjunto $B^d_\epsilon(x) = \{y/d(x, y) < \epsilon\}$ de todos los puntos y cuya distancia a x es menor que ϵ, que se denomina bola de radio ϵ centrada en x. Cuando no entren mas de una distancia en juego se omitirá la distancia d de la notación, y escribiremos simplemente $B_\epsilon(x)$.

Observación. Si d es una distancia en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_\epsilon(x)$ de radio ϵ, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada topología métrica inducida por d.

La primera condición para una base es trivial, puesto que $x \in B_\epsilon(x)$, para cualquier $\epsilon > 0$. Antes de comprobar la segunda condición para una base, demostraremos que si y es un punto del elemento básico $B_\epsilon(x)$, entonces existe un elemento básico $B_\delta(y)$ centrado en y que esta contenido en $B_\epsilon(x)$. Definamos δ como el numero positivo $\epsilon - d(x,y)$. Entonces $B_\delta(y) \subset B_\epsilon(x)$, ya que si $z \in B_\delta(y)$, entonces $d(y,z) < \epsilon - d(x,y)$, con lo que concluimos que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon$. Para comprobar la segunda condición para una base, sean B_1 y B_2 dos elementos básicos y sea $y \in B_1 \cap B_2$. Acabamos de ver que podemos elegir numeros positivos δ_1 y δ_2 de tal modo que $B_{\delta_1}(y) \subset B_1$ y $B_{\delta_2}(y) \subset B_2$. Tomando δ como el mínimo de δ_1 y δ_2, concluimos que $B_\delta(y) \subset B_1 \cap B_2$. Usando lo que acabamos de probar, podemos reformular la definición de topología métrica como sigue: Un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por d si , y solo si, para cada $y \in U$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subset U$. Claramente, esta condición implica que U es abierto. Recíprocamente, si U es abierto, contiene un elemento básico $B = B_\epsilon(x)$ que contiene a y, y B, a su vez, contiene un elemento básico $B_\delta(y)$ centrado en y.

Definición 2. *Si X es un espacio topológico, se dice que X es metrizable si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X. Un espacio métrico es un espacio metrizable X junto a una distancia especifica d que da la topología de X.*

Definición 3. *Sea X un espacio métrico con una distancia d. Un subconjunto A de X se dice que esta acotado si existe algún numero M tal que $d(a_1, a_2) \leq M$ para todo par a_1, a_2 de puntos de A. Si A es un conjunto acotado y no vacío, el diámetro de A se define como el numero $diam A = sup\{d(a_1, a_2)/a_1, a_2 \in A\}$.*

Teorema 1. *Sea X un espacio métrico con una distancia d. Se define $\overline{\mathrm{d}} : X \times X \longrightarrow R$ mediante la ecuación $\overline{\mathrm{d}}(x,y) = min\{d(x,y), 1\}$. Entonces $\overline{\mathrm{d}}$ es una distancia que induce la misma topología que d.*

La distancia $\overline{\mathrm{d}}$ se denomina distancia acotada correspondiente a d.

Demostración.

La comprobación de las primeras dos condiciones de una distancia es trivial.

Comprobemos la desigualdad triangular:

$$\overline{\mathrm{d}}(x,z) \leq \overline{\mathrm{d}}(x,y) + \overline{\mathrm{d}}(y,z).$$

Ahora bien, si $d(x, y) \geq 1$ o $d(y, z) \geq 1$, entonces la parte derecha de esta desigualdad es, al menos, 1; puesto que la parte derecha de esta desigualdad se satisface. Queda estudiar el caso en el que $d(x, y) < 1$ y $d(y, z) < 1$. En este caso, tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z)$$

.

Como $\overline{d}(x, z) \leq d(x, z)$ por definición, la desigualdad triangular se cumple para $\overline{d}$. Ahora bien, recordemos que, en cualquier espacio métrico, la colección de bolas de radio ε con $\varepsilon < 1$ forma una base para la topología métrica, puesto que cada elemento básico que contiene a x contiene una bola de esa forma, centrada en x y de radio ε. Se sigue que d y $\overline{d}$ inducen la misma topología sobre X, porque las colecciones de bolas de radio ε, con $\varepsilon < 1$, para estas dos distancias son idénticas. ■

Definición 4. *Dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se definen la norma de x mediante la ecuación $\|x\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, y la distancia euclidiana d sobre $\mathbb{R}^n$ por la ecuación $d(x, y) = \|x - y\| = [(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$. Definimos la distancia del supremo ρ por la ecuación $\rho(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$.*

Lema 1. *Sean d y $d^{'}$ dos distancias sobre el conjunto X, y T y $T^{'}$ las topologías que inducen, respectivamente. Entonces $T^{'}$ es mas fina que T si, y solo si, para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}^{d^{'}}(x) \subset B_{\epsilon}^{d}(x)$.*

Demostración.

Supongamos que $T^{'}$ es mas fina que T.

Dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$ tomemos el elemento básico $B_{\epsilon}^{d}(x)$ para T, como $T^{'}$ es mas fina que T entonces existe un elemento básico $B^{'}$ para la topología $T^{'}$ tal que $x \in B^{'} \subset B_{\epsilon}^{d}(x)$. Dentro de $B^{'}$ podemos tomar una bola $B_{\delta}^{d^{'}}(x)$ centrada en x, por tanto para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}^{d^{'}}(x) \subset B_{\epsilon}^{d}(x)$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición $\delta - \epsilon$. Dado un elemento básico B para T que contenga a x, podemos tomar dentro de B una bola $B_{\epsilon}^{d}(x)$ centrada en x. Por la condición dada, existe δ tal que $B_{\delta}^{d^{'}}(x) \subset B_{\epsilon}^{d}(x)$, entonces $B^{'} = B_{\delta}^{d^{'}}(x) \subset B_{\epsilon}^{d}(x) \subset B$, entonces $T^{'}$ es mas fina que T. ■

Teorema 2. *Las topologías sobre $\mathbb{R}^n$ inducidas por la distancia euclidiana d y la distancia del supremo ρ son la misma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$.

Afirmación $\rho(x, y) \leq d(x, y)$

En efecto supongamos $\rho(x, y) > d(x, y)$ luego sin perdida de generalidad supongamos $\rho(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = |x_n - y_n|$ entonces $|x_n - y_n| > d(x, y)$ entonces $|x_n - y_n| > [(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$ luego elevando al cuadrado ambos lados $|x_n - y_n|^2 > (x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2$ lo cual es una contradicción.

Por tanto $\rho(x, y) \leq d(x, y)$

Ahora sean $B^d_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / d(x, y) < \epsilon\}$ y $B^\rho_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / \rho(x, y) < \epsilon\}$, tomemos $y \in B^d_\epsilon(x)$ entonces $d(x, y) < \epsilon$ como $\rho(x, y) \leq d(x, y)$ entonces $\rho(x, y) < \epsilon$ por tanto $y \in B^\rho_\epsilon(x)$ entonces $B^d_\epsilon(x) \subset B^\rho_\epsilon(x)$, por tanto T_d es mas fina que T_ρ.

$(T_\rho \subset T_d)$....(1)

Afirmación $d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y)$

En efecto supongamos sin perdida de generalidad $\rho(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = |x_n - y_n|$ luego $n(x_n - y_n)^2 \geq (x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2$ sacando raíz en ambos lados $\sqrt{n}\sqrt{(x_n - y_n)^2} \geq [(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$ entonces $\sqrt{n}|x_n - y_n| \geq d(x, y)$ entonces $\sqrt{n}\rho(x, y) \geq d(x, y)$

Sean $B^\rho_{\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / \rho(x, y) < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{n}}\}$ y

$B^d_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / d(x, y) < \epsilon\}$,

Ahora sea $y \in B^\rho_{\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}}(x)$

Entonces $\rho(x, y) < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{n}}$, entonces $\sqrt{n}\rho(x, y) < \epsilon$ como $d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y)$ entonces $d(x, y) < \epsilon$ por tanto $y \in B^d_\epsilon(x)$, luego $B^\rho_{\epsilon/\sqrt{n}}(x) \subset B^d_\epsilon(x)$ por tanto T_ρ es mas fina que T_d.

$(T_d \subset T_\rho)$....(2)

De (1) y (2) se sigue que $T_d = T_\rho$.

Ahora demostraremos que la topología producto es la misma que la dada por la distancia ρ.

En efecto, sea $B = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ un elemento básico para la topología producto, y sea $x = (x_1, ..., x_n)$ un elemento de B. Para cada i existe ϵ_i tal que $(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset (a_i, b_i)$, sea $\epsilon = min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$. Sea $B_\epsilon^\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / \rho(x, y) < \epsilon\}$ y Sea $y = (y_1, ..., y_n) \in B_\epsilon^\rho(x)$, tomemos y_i con $i = 1, ..., n$, luego

$|x_i - y_i| \leq max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \rho(x, y) < \epsilon$,

por tanto $|x_i - y_i| < \epsilon \leq \epsilon_i$, entonces

$y_i \in (x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset (a_i, b_i)$ con $i = 1, ..., n$,

por tanto $y \in B$.

Entonces $B_\epsilon^\rho(x) \subset B$, Por tanto T_ρ es mas fina que la topología producto.

$(T_{prod} \subset T_\rho)$...(3)

Ahora sea $B_\epsilon^\rho(x)$ un elemento básico para la ρ topología.

Luego necesitamos un básico B para la topología producto tal que $B \subset B_\epsilon^\rho(x)$, lo cual es trivial ya que

$B_\epsilon^\rho(x) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times ... \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$

es un básico en la topología producto.

Por tanto T_{prod} es mas fina que T_ρ,$(T_\rho \subset T_{prod})$...(4)

De (3) y (4) $T_\rho = T_{prod}$

Por tanto $T_\rho = T_d = T_{prod}$

■

Definición 5. *Dado un conjunto de índices J, y puntos dados*

$x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ *e* $y = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ *de* $\mathbb{R}^J$,

definimos una distancia $\overline{\rho}$ *sobre* $\mathbb{R}^J$ *por la ecuación*

$\overline{\rho}(x, y) = sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) / \alpha \in J\}$

donde $\overline{\mathrm{d}}$ es la distancia sobre $\mathbb{R}$. Es fácil comprobar que $\overline{\rho}$ es, efectivamente, una distancia; se denomina distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^J$, y la topología que induce se denomina topología uniforme.

Ahora consideraremos el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ infinitas veces denotado por $\mathbb{R}^w$.

Teorema 3. *Sea $\overline{\mathrm{d}}(a,b) = min\{|a-b|, 1\}$ la distancia acotada usual sobre $\mathbb{R}$. Si x e y son dos puntos de $\mathbb{R}^w$, definimos*

$$D(x,y) = sup\left\{\frac{\overline{\mathrm{d}}(x_i, y_i)}{i}\right\}.$$

Entonces D es una distancia que induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^w$.

Demostración. Las propiedades de una distancia se satisfacen trivialmente excepto para la desigualdad triangular, que se prueba al observar que, para todo i:

$$\frac{\overline{\mathrm{d}}(x_i, z_i)}{i} \leq \frac{\overline{\mathrm{d}}(x_i, y_i)}{i} + \frac{\overline{\mathrm{d}}(y_i, z_i)}{i} \leq D(x,y) + D(y,z)$$

de manera que $sup\left\{\frac{\overline{\mathrm{d}}(x_i, z_i)}{i}\right\} \leq D(x,y) + D(y,z)$.

Para demostrar que D induce la topología producto; Sea U abierto en la topología métrica y sea $x \in U$; encontraremos un conjunto abierto V en la topología producto tal que $x \in V \subset U$. Elegimos una bola $B_\epsilon^D(x)$ que este en U. Después elegimos N suficientemente grande para que $\frac{1}{N} < \epsilon$.

Finalmente, sea V el elemento básico para la topología producto

$$V = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times ... \times (x_N - \epsilon, x_N + \epsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...$$

Afirmamos que $V \subset B_\epsilon^D(x)$. En efecto dado cualquier y de $\mathbb{R}^w$, $\frac{\overline{\mathrm{d}}(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{1}{N}$ para $i \geq N$.

Por lo tanto,

$$D(x,y) \leq max\left\{\frac{\overline{\mathrm{d}}(x_1, y_1)}{1}, ..., \frac{\overline{\mathrm{d}}(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N}\right\}$$

Si y esta en V, esta expresión es menor que ϵ, por lo que $V \subset B^D_\epsilon(x)$, como se deseaba.

Recíprocamente, consideremos un elemento básico $U = \prod_{i\in\mathbb{Z}_+} U_i$ para la topología producto, donde U_i es abierto en $\mathbb{R}$ para $i = \alpha_1, ..., \alpha_n$ y $U_i = \mathbb{R}$ para el resto de los índices i. Dado $x \in U$, podemos tomar un conjunto abierto V en la topología métrica tal que $x \in V \subset U$. Tomemos un intervalo $(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)$ en $\mathbb{R}$ centrado en x_i y contenido en U_i para $i = \alpha_1, ..., \alpha_n$; elijamos cada $\epsilon_i \leq 1$. Entonces definimos $\epsilon = min\{\epsilon_i/i | i = \alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Afirmamos que $x \in B^D_\epsilon(x) \subset U$.

Sea y un punto de $B^D_\epsilon(x)$. Entonces, para todo i, $\dfrac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(x, y) < \epsilon$. Ahora bien, si $i = \alpha_1, ..., \alpha_n$, entonces $\epsilon \leq \epsilon_i/i$, por lo que $\overline{d}(x_i, y_i) < \epsilon_i \leq 1$; se sigue que $|x_i - y_i| < \epsilon_i$. Por tanto, $y \in \prod U_i$, como se deseaba.

■

Lema 2. *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x, entonces $x \in \overline{A}$; el recíproco se cumple si X es metrizable.*

Demostración. Supongamos que $x_n \longrightarrow x$, donde $x_n \in A$.

Entonces cada entorno U de x contiene un punto de A, por lo que $x \in \overline{A}$.

Recíprocamente supongamos que X es metrizable y que $x \in \overline{A}$. Sea d una distancia para la topología de X. Para cada entero positivo n, tomemos el entorno $B_{1/n}(x)$, y elijamos x_n como el punto de su intersección con A. Afirmación: la sucesión x_n converge a x:

Sea U abierto que contenga a x, luego U contiene una bola $B_\epsilon(x)$, si elegimos N de forma que $1/N < \epsilon$, entonces U contiene a x_i, para todo $i \geq N$, por tanto $x_n \longrightarrow x$. ■

Ejemplo 1. $\mathbb{R}^w$ *con la topología por cajas no es metrizable.*

Probaremos que el lema de la sucesión no se cumple para $\mathbb{R}^w$. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^w$ formado por aquellos puntos cuyas coordenadas son todas positivas:

$$A = \{(x_1, x_2, ...) \mid x_i > 0 \ \ para \ \ todo \ \ i \in \mathbb{Z}_+\}$$

. Sea $\overline{0}$ el origen en $\mathbb{R}^w$, esto es, el punto $(0, 0, ...)$ con cada una de sus coordenadas cero. En la topología por cajas, $\overline{0}$ pertenece a $\overline{A}$; pues si $B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots$ es cualquier

elemento básico que contiene a $\overline{0}$, entonces B intersecta a A; ya que el punto $(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, ...)$ pertenece a $B \cap A$. Pero afirmamos que no existe sucesión alguna de puntos de A que converja a $\overline{0}$.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ una sucesión de puntos de A, donde $a_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{in}, ...)$. Cada coordenada x_{in} es positiva, por lo que podemos construir un elemento básico B' para la topología por cajas sobre $\mathbb{R}$ haciendo

$$B' = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times \cdots.$$

Entonces B' contiene al origen $\overline{0}$, pero no contiene termino alguno de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$; ya que el punto a_n no puede pertenecer a B' por que su coordenada n-esima x_{nn} no pertenece al intervalo $(-x_{nn}, x_{nn})$.

De aquí se deduce que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ no puede converger a $\overline{0}$ en la topología por cajas. Luego $\mathbb{R}^w$ no es metrizable con la topología por cajas.

1.2. Espacios conexos.

Definición 6. *Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos ajenos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación de X.*

La conexión es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la colección de los conjuntos abiertos de X. Entonces, si X es un espacio conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X.

Lema 3. *Un espacio X es conexo si, y solo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.*

Demostración. Sea A subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X lo cual contradice que X es conexo.

Recíprocamente, si U y V forman una separación de X, entonces $U \cup V = X$, con U y V ajenos, por tanto $U = X - V$ que es cerrado, entonces U un subconjunto de X no trivial es abierto y cerrado, lo cual contradice la suposición. ∎

Lema 4. *Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subespacio conexo de X, entonces Y esta contenido en C, o en D, pero no en ambos.*

Demostración. Sea C y D una separación de X, luego C y D son abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son ajenos y su unión es Y; si fueran ambos no vacíos, constituirían una separación de Y. De esta forma uno de ellos es vacío,

caso 1. $C \cap Y = \varnothing$, como $(C \cap Y) \cup (D \cap Y) = Y$, entonces $D \cap Y = Y$, por tanto $Y \subset D$.

caso 2. $D \cap Y = \varnothing$, como $(C \cap Y) \cup (D \cap Y) = Y$, entonces $C \cap Y = Y$, por tanto $Y \subset C$.

■

Teorema 4. *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\cap A_\alpha$. Probemos que el espacio $Y = \cup A_\alpha$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. El punto p esta en C o en D pero no en ambos, supongamos que $p \in C$. Como A_α es conexo, $A_\alpha \subset C$ o $A_\alpha \subset D$, aunque esta ultima se descarta pues $p \in A_\alpha$ y $p \in C$.

Por tanto, $A_\alpha \subset C$ para cada α, y así $\cup A_\alpha \subset C$ contradiciendo el hecho de que D era no vacío. ■

Teorema 5. *Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es también conexo.*

Demostración. Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \overline{A}$.

Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B. Luego $A \subset C$ o $A \subset D$; supongamos que $A \subset C$. Entonces $\overline{A} \subset \overline{C}$. Como $\overline{C}$ y D son ajenos, y $C \cup D \subset \overline{A} \subset \overline{C}$, entonces $D = \varnothing$, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 6. *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.*

Demostración.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y supongamos que X es conexo.

Queremos probar que el espacio imagen $Z = f(X)$ es conexo. Como la aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio Z es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación, continua y sobreyectiva $g : X \longrightarrow Z$. Supongamos que $Z = A \cup B$ es una separación de Z en dos conjuntos ajenos no vacíos y abiertos en Z. Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos ajenos cuya unión es X. Además son abiertos en X, pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituye una separación de X, contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. ■

Teorema 7. *El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.*

Demostración.

Vamos a demostrar primero el resultado para el producto de dos espacios conexos X e Y. La prueba es sencilla de visualizar. Elijamos un punto base (a, b) en el producto $X \times Y$. Obsérvese que la rebanada horizontal $X \times \{b\}$ es conexa, ya que es homeomorfa a X y que también lo es cada rebanada vertical ya que estas son homeomorfas a Y. Como consecuencia, cada espacio $T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$ es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto (x, b) en común. Ahora, consideremos la unión $\cup_{x \in X} T_x$ de todos estos espacios. Como todos tienen al punto (a, b) en común, esta unión es conexa. Finalmente, al coincidir esta unión con el propio espacio $X \times Y$, se concluye que $X \times Y$ es conexo.

La prueba para cualquier colección finita de espacios conexos puede realizarse por inducción, utilizando el hecho de que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{(n-1)}) \times X_n$.
■

Es natural preguntarse cuando puede extenderse este teorema a productos arbitrarios de espacios conexos. La respuesta depende de la topología que utilizamos para dicho producto, tal y como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. *Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{R}^w$ definido anteriormente, con la topología por cajas. Podemos escribir $\mathbb{R}^w$ como la unión de un conjunto A constituido por todas las sucesiones acotadas de numeros reales, y de un conjunto B formado por las sucesiones no acotadas. Estos conjuntos son ajenos y además son abiertos en la topología por cajas ya que si $\{a_n\}_n$ es un punto de $\mathbb{R}^w$, el conjunto abierto $U = (a_1 - 1, a_1 + 1) \times (a_2 - 1, a_2 + 1) \times \cdots$ esta ya formado por sucesiones acotadas si $\{a_n\}_n$ es una sucesión acotada, o por sucesiones no* *acotadas si $\{a_n\}_n$ no lo esta. De esta forma, incluso a pesar de que $\mathbb{R}$ es conexo, el producto $\mathbb{R}^w$ no es conexo con la topología por cajas.*

Ejemplo 3. *Consideremos ahora $\mathbb{R}^w$ con la topología producto y supongamos que $\mathbb{R}$ es conexo. Entonces probaremos que $\mathbb{R}^w$ también es conexo. Denotemos por $\tilde{R^n}$ el subespacio de $\mathbb{R}^w$ formado por todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$ tales que $x_i = 0$ para $i > n$. El espacio $\tilde{R^n}$ es claramente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y utilizando el teorema anterior concluimos que es conexo. Se sigue entonces que el espacio $\mathbb{R}^\infty$ es conexo, pues es la unión de los espacios $\tilde{R^n}$ que tienen el punto $\overline{0} = (0, 0, ...)$ en común. Veamos ahora que la adherencia de $\mathbb{R}^\infty$ coincide con $\mathbb{R}^w$ de lo cual se deduce que este también es un espacio conexo. Sea $\{a_n\}_n = (a_1, a_2, ...)$ un punto de $\mathbb{R}^w$. Sea $U = \prod U_i$ un abierto básico de la topología producto que contiene a $\{a_n\}_n$. Veamos que U intersecta a $\mathbb{R}^\infty$. Existe un entero N tal que $U_i = \mathbb{R}$ para $i > N$. Entonces el punto $x = (a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$ de $\mathbb{R}^\infty$ pertenece a U ya que $a_i \in U_i$ para $i > N$.*

1.3. Componentes y conexión local.

Dado un espacio X, existe una manera natural de dividirlo en varios trozos que son conexos (o conexos por caminos). Vamos a considerar este proceso a continuación.

Definición 7. *Dado X, se define la siguiente relación de equivalencia en X:*

$x \leq y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos.

Las clases de equivalencia se denominan componentes

(o componentes conexas) de X.

La simetría y la reflexividad de la relación son obvias. La transitividad se sigue del siguiente hecho: si A es un subespacio conexo que contiene a x y a y, y B es un subespacio conexo que contiene a y y a z, entonces $A \cup B$ es un subespacio que contiene a x y a z que además es conexo pues A y B tienen el punto y en común.

Las componentes de X también se pueden describir como sigue:

Teorema 8. *Las componentes de X son subespacios ajenos y conexos de X cuya unión es X de forma que cada subespacio conexo de X no trivial intersecta solo a una de ellas.*

Demostración.

Por tratarse de una relación de equivalencia y ser cada componente una clase, esta claro que son disjuntas y que su unión es el espacio X. Además, cada subespacio conexo A de X intersecta únicamente a una de ellas. Pues si A intersecta a las componentes C_1 y C_2 en X, tomando $x_1 \in C_1 \cap A$ y $x_2 \in C_2 \cap A$ se tiene que $x_1 \leq x_2$ por definición y esto no puede ocurrir a menos que $C_1 = C_2$. Para demostrar que cada componente C es conexa elijamos un punto x_0 de C. Para cada punto x de C, sabemos que $x \leq x_0$, luego existe un subespacio A_x que contiene a ambos puntos. Tal y como acabamos de probar, $A_x \subset C$ y así $C = \cup_{x \in C} A_x$. Como los subespacios A_x son conexos y tienen al punto x_0 en común, se tiene que C es conexo. ■

Definición 8. *Dado un espacio topológico Y y un punto $p \in Y$, se define la casi componente $Q(p)$ de p en Y como:*

$$Q(p) = \bigcap \{E \subset Y : E \text{ es abierto y cerrado en } Y \text{ y } p \in E\}.$$

Teorema 9. *Sea Y un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces para cada punto $p \in Y$, la componente $C(p)$ de p en Y coincide con la casi componente $Q(p)$ de p en Y.*

Demostración.

($\subset$) Sea $x \in C(p)$ entonces existe D conexo en Y tal que $\{x, p\} \in D$, sea E abierto y cerrado en Y tal que $p \in E$. Luego $Y - E$ y E forman una separación para Y, entonces $D \subset E$ o $D \subset Y - E$ como $p \in D \cap E$ entonces $D \subset E$. Entonces $x \in E$, por tanto $x \in \bigcap \{ E \subset Y : E$ es abierto y cerrado en $Y, p \in E\} = Q(p)$

Por tanto $C(p) \subset Q(p)$......(1)

($\supset$) Para probar esta contención basta con mostrar que $Q(p)$ es conexo pues $C(p)$ contiene a todos los conexos que tienen al punto p. Lo demostraremos por contradicción, supongamos $Q(p)$ es no conexo. Notemos que $Q(p)$ es cerrado pues es intersección de cerrados. De manera que existen dos subconjuntos no vacíos cerrados y ajenos K y L de Y tales que $Q(p) = K \cup L$. Como los espacios compactos y Hausdorff son normales, tenemos que existen dos abiertos y ajenos U y V en Y tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. Como $p \in Q(p)$, podemos suponer que $p \in K$. El conjunto $Z = Y - (U \cup V)$ es compacto y

$$Z = Y - (U \cup V) \subset Y - (K \cup L) = Y - Q(p)$$

$$= Y - \left(\bigcap \{E \subset Y : E \text{ es abierto y cerrado en } Y, p \in E\}\right)$$

$$= \bigcup \{Y - E : E \text{ es abierto y cerrado en } Y, p \in E\}.$$

De manera que la familia $\{Y - E : E$ es abierto y cerrado en $Y, p \in E\}$ es una cubierta abierta del compacto Z por lo que existen $m \in \mathbb{N}$ y existen subconjuntos abiertos y cerrados $E_1, ..., E_m$ de Y tales que $p \in E_i$ para cada $i \in 1, ..., m$ y $Y - (U \cup V) \subset (Y - E_1) \cup ... \cup (Y - E_m) = Y - (E_1 \cap ... \cap E_m)$ De aquí que $E_1 \cap ... \cap E_m \subset U \cup V$. Sea $E = E_1 \cap ... \cap E_m$. Entonces E es abierto y cerrado en Y y $p \in E \subset U \cup V$. Notemos que $E \cap U = E \cap (Y - V)$ lo cual nos dice que $E \cap U$ es abierto y cerrado en Y. Como $p \in E \cap K \subset E \cap U$, entonces $Q(p) \subset E \cap U$. Luego como $Q(p) = K \cup L$ entonces $L \subset K \cup L \subset E \cap U$, por tanto $L \subset (E \cap U) \cap V = E \cap (U \cap V) = \varnothing$ lo cual es una contradicción pues L es diferente del vacío.

Por tanto $Q(p)$ es conexo, por tanto $Q(p) \subset C(p)$.............(2)

Por (1) y (2) $C(p) = Q(p)$. ■

Definición 9. *Definimos otra relación de equivalencia en el espacio X dada por: $x \leq y$ si existe un camino en X uniendo x con y. Las clases de equivalencia se denominan componentes conexas por caminos de X.*

Antes de ver que es una relación de equivalencia, observemos que si existe un camino $f : [a, b] \longrightarrow X$ que une x con y y cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, entonces también existe un camino g uniendo x con y y con dominio $[c, d]$. (cualquier pareja de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ son homeomorfos).

Veamos que se trata de una relación de equivalencia:

(-)Reflexividad: Consideremos el camino $f : [a, b] \longrightarrow X$ dado por $f(t) = x$ para todo t, es un camino que une x con x, por tanto $x \leq x$.

(-)Simetría: Si $f : [0, 1] \longrightarrow X$ es un camino que une x con y, entonces el camino contrario $g : [0, 1] \longrightarrow X$ dado por $g(t) = f(1 - t)$ es un camino que une y con x.

(-)Transitividad: Sea $f : [0, 1] \longrightarrow X$ un camino que une x con y y sea $g : [1, 2] \longrightarrow X$ un camino que une y con z. Podemos pegar los caminos f y g y obtener un nuevo camino $h : [0, 2] \longrightarrow X$ que une x con z; el camino h será una aplicación continua.

Teorema 10. *Las componentes conexas por caminos de X son subespacios ajenos conexos por caminos de X cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo por caminos de X no trivial intersecta solo una de ellas.*

Obsérvese que cada componente de un espacio X es cerrada en X ya que la adherencia de un subespacio conexo de X es conexo. Si X tiene solo un numero finito de componentes, entonces cada componente es también un abierto en X, pues su complementario es una unión finita de cerrados; en general, las componentes de X no son abiertas en X.

No podemos afinar tanto cuando hablamos de las componentes conexas por caminos ya que, en general, no son ni abiertas ni cerradas en X. Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4. *Si consideramos $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, entonces cada componente de $\mathbb{Q}$ es un único punto. Ninguna de las componentes de $\mathbb{Q}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{Q}$.*

Ejemplo 5. *Sea S el siguiente subconjunto del plano $S = \{(x, sen(1/x)) | 0 < x \leq 1\}$.*

Como S es la imagen del conjunto conexo $(0, 1]$ bajo una aplicación continua, S es conexo. De esta forma su adherencia $\overline{S}$ en $\mathbb{R}^2$ también es conexa. El conjunto $\overline{S}$ se conoce como curva del topólogo. Este es un espacio con una componente pues es conexo, y dos componentes conexas por caminos, una es S y la otra es el intervalo vertical $V = 0 \times [0, 1]$. Observe que S es abierto en $\overline{S}$ pero no es cerrado, mientras que V es cerrado pero no abierto.

Definición 10. *Un espacio X se dice que es localmente conexo en x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo V de x contenido en U. Si X es localmente conexo en cada punto, se dice que X es localmente conexo. De manera análoga, se dice que un espacio X es localmente conexo por caminos en x, si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U. Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo por caminos.*

Ejemplo 6. *Cada intervalo y cada rayo de la recta real son conexos y localmente conexos. El subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ no es conexo, pero es localmente conexo. La curva seno del topólogo es conexa pero no localmente conexa por caminos. Los racionales $\mathbb{Q}$ no son ni conexos, ni localmente conexos.*

Teorema 11. *Un espacio X es localmente conexo si, y solo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es abierta en X.*

Demostración.

Supongamos que X es localmente conexo;

sean U un abierto de X y C una componente de U. Si x es un punto de C, podemos elegir un entorno conexo V de x tal que $V \subset U$. Como V es conexo, debe estar enteramente contenido en la componente C de U. Así, C es abierto en X.

Recíprocamente, supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertos. Dado un punto x de X y un entorno U de x, sea C la componente de U que contiene a x. Ahora, C es conexo y como es abierto en X por hipótesis, X es localmente conexo en x. ∎

Teorema 12. *Un espacio X es localmente conexo por caminos si, y solo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente conexa por caminos de U es abierta en X.*

La demostración de este Teorema es análoga al anterior.

La relación entre componentes conexas y componentes conexas por caminos esta dada por el siguiente resultado:

Teorema 13. *Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por caminos de X esta contenida en una componente de X. Si X es localmente conexo por caminos, entonces las componentes y las componentes conexas por caminos de X coinciden.*

Demostración.

Sean C una componente de X, x un punto de C y P la componente conexa por caminos de X que contiene a x. Como P es conexa, $P \subset C$. Queremos demostrar que si X es localmente conexo por caminos, entonces $P = C$. Supongamos que $P \subsetneq C$. Denotemos por Q a la unión de todas las componentes conexas por caminos de X que son distintas de P y que intersectan a C; cada una de ellas esta contenida necesariamente en C, así que $C = P \cup Q$. Como X es localmente conexo por caminos, cada componente conexa por caminos de X es un abierto de X. Así P y Q son abiertos en X y, por tanto, constituyen una separación de C, lo cual contradice la conexión de C. ∎

1.4. Espacios compactos

Definición 11. *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que cubre X o que es un cubrimiento de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$*

es un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 12. *Un espacio X se dice que es compacto si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcoleccion finita que también cubre X.*

Lema 5. *Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si, y solo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcoleccion finita que cubre Y.*

Demostración.

Supongamos que Y es compacto y que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X. Entonces la colección $\{A_\alpha \cap Y | \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y; como Y es compacto, existirá una subcoleccion finita de la forma $\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$ cubriendo Y. Entonces $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ es una subcoleccion finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y.

Recíprocamente, sea $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos de Y. Para cada α, podemos elegir un conjunto A_α abierto en X tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$. La colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcoleccion finita $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ cubre Y. Entonces $\{A'_{\alpha_1}, ..., A'_{\alpha_n}\}$ es una subcoleccion finita de $\mathcal{A}'$ que cubre Y. ■

Teorema 14. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración.

Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X.

Dado un cubrimiento $\mathcal{A}$ de Y por conjuntos abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X uniendo $\mathcal{A}$ con el conjunto abierto $X - Y$, esto es, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}$. Como X es compacto, alguna subcoleccion finita cubre X, llamemosle $\mathcal{B}'$. Si $X - Y$ pertenece a $\mathcal{B}'$ se lo quitamos, si no es así lo dejamos como esta. La colección resultante en cualquier caso es una subcoleccion finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y. ■

Teorema 15. *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración.

Sea Y un subespacio compacto del espacio de Hausdorff X.

Probaremos que $X-Y$ es abierto, luego Y será cerrado. Sea $x_0 \in X-Y$, luego para cada punto $y \in Y$, elijamos entornos ajenos U_y y V_y de los puntos x_0 e y respectivamente, esto se puede pues x_0 e y pertenecen a X y este es de Hausdorff. La colección $\{V_y | y \in Y\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X; luego como Y es compacto podemos cubrir Y con un numero finito de estos conjuntos, por ejemplo $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$. El conjunto abierto $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ contiene a Y, y es disjunto del abierto $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ ya que si $z \in V$, entonces $z \in V_{y_i}$ para algún i, entonces, $z \notin U_{y_i}$ y así $z \notin U$ por lo que U es un entorno de x_0 tal que $U \subset X-Y$, por tanto Y es cerrado. ■

Lema 6. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y x_0 no esta en Y, entonces existen abiertos ajenos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.*

Teorema 16. *La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua con X compacto.

Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La colección $\{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto, un numero finito de ellos, por ejemplo $f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)$ cubren X. Entonces los conjuntos $A_1, ..., A_n$ cubren $f(X)$. ■

Teorema 17. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva.*

Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Probaremos que f es un mapeo cerrado.

Si A es cerrado en X, entonces A es compacto, por el Teorema 14, luego por el Teorema anterior $f(A)$ es compacto. Ahora como Y es Hausdorff, $f(A)$ es cerrado en Y, por el Teorema 15. Por tanto f es un mapeo cerrado, luego f es un homeomorfismo. ■

Teorema 18. *El producto de un numero finito de espacios compactos es compacto.*

Demostración.

Demostraremos que el producto de dos espacios compactos es compacto; el teorema se sigue por inducción sobre cualquier producto finito.

Paso 1. Sean X, Y espacios con Y compacto. Sea x_0 un punto de X, y sea N un abierto de $X \times Y$ que contiene la rebanada $\{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$.

Probaremos el siguiente resultado:

Existe un entorno W de x_0 en X tal que N contiene al conjunto completo $W \times Y$.

Cubramos $\{x_0\} \times Y$ por elementos básicos $U \times V$ de modo que $U \times V \subset N$. El espacio $\{x_0\} \times Y$ es compacto ya que es homeomorfo a Y. De esta forma, podemos cubrir $\{x_0\} \times Y$ con un numero finito de tales elementos básicos: $U_1 \times V_1, ..., U_n \times V_n$. descartando los elementos superfluos. Definamos $W = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. El conjunto W es abierto, y contiene a x_0 pues cada conjunto $U_i \times V_i$ intersecta a $\{x_0\} \times Y$.

Afirmación: Los conjuntos $U_i \times V_i$, que fueron elegidos para cubrir la rebanada $\{x_0\} \times Y$, también cubren el tubo $W \times Y$.

En efecto, Sea $(x, y) \in W \times Y$, consideremos $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$ que contiene la misma y-coordenada en ese punto. Ahora $(x_0, y) \in U_i \times V_i$ para algún i, así que $y \in V_i$. Luego $x \in U_j$ para toda j ya que $x \in W$. Así, se tiene que $(x, y) \in U_i \times V_i$, luego como todos los $U_i \times V_i \subset N$, y como cubren al conjunto $W \times Y$, se tiene que $W \times Y \subset N$.

Paso 2. Vamos a probar a continuación el teorema.

Sean X e Y espacios compactos. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Dado $x_0 \in X$, la rebanada $\{x_0\} \times Y$ es compacta y estará cubierta por un numero finito de elementos $A_1, ..., A_m$ de $\mathcal{A}$. La unión $N = A_1 \cup ... \cup A_m$ es un abierto que contiene a $\{x_0\} \times Y$; por el Paso 1, el abierto N contiene un tubo $W \times Y$ sobre $\{x_0\} \times Y$ donde W es un abierto de X. Entonces $W \times Y$ esta cubierto por un numero finito de elementos $A_1, ..., A_m$ de $\mathcal{A}$. De esta forma, para cada $x \in X$, podemos elegir un entorno W_x de x tal que el tubo $W_x \times Y$ puede ser cubierto por un numero finito de elementos de $\mathcal{A}$. La colección de todos los entornos W_x es un cubrimiento abierto de X; por la compacidad de X, existe una subcoleccion finita $\{W_1, ..., W_k\}$ cubriendo X. La unión de los tubos $W_1 \times Y, ..., W_k \times Y$ es el espacio $X \times Y$, Luego ya que cada uno de ellos puede ser cubierto por un numero finito de elementos de $\mathcal{A}$, $X \times Y$ es compacto. ■

Definición 13. *Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene*

la propiedad de la intersección finita si cada subcoleccion finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de $\mathcal{C}$

tiene la intersección no vacía, es decir, $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ es no vacía.

Teorema 19. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y solo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

es no vacía.

Demostración.

Sea $\mathcal{A}$ una colección de X, sea $\mathcal{C} = \{X - A | A \in \mathcal{A}\}$ la colección de sus complementarios.

(1) $\mathcal{A}$ es una colección de abiertos si, y solo si, $\mathcal{C}$ es una colección de cerrados.

(2) $\mathcal{A}$ cubre X si, y solo si, $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es vacía.

En efecto, $\mathcal{A}$ cubre $X \Leftrightarrow X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Leftrightarrow \varnothing = X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} X \setminus A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

(3) La subcoleccion finita $\{A_1, ..., A_n\}$ de $\mathcal{A}$ cubre X si, y solo si, $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ es vacía.

En efecto, $\{A_1, ..., A_n\}$ de $\mathcal{A}$ cubre $X \Leftrightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \varnothing = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ Luego X es compacto $\Leftrightarrow$ Dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de abiertos de X, si $\mathcal{A}$ cubre X, $\Rightarrow$ existe una subcoleccion finita que también cubre X $\Leftrightarrow$ Dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de abiertos de X, si ninguna subcoleccion finita de $\mathcal{A}$ cubre $X \Rightarrow$ la colección no cubre X usando $(1), (2) y (3)$

$\Leftrightarrow$ Dada cualquier colección $\mathcal{C}$ de cerrados en X con la propiedad de intersección finita $\Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es no vacía.

■

Definición 14. *Dado un conjunto A, una relación $\leq$ sobre A se denomina orden parcial estricto sobre A si tiene las siguientes propiedades:*

(1) *(No-reflexiva) la relación $a \leq a$ nunca se cumple.*

(2) *(Transitividad) si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*

Definición 15. *Sean A un conjunto y $\leq$ un orden parcial estricto sobre A. Si B es un subconjunto de A, una cota superior sobre B es un elemento c de A tal que para todo b de B*

bien $b = c$, o bien $b \leq c$. Un elemento maximal de A es un elemento m de A tal que ningún elemento a de A verifica la relación $m \leq a$.

El siguiente Lema se demuestra en [3], lo mencionamos pues en demostraciones posteriores lo necesitaremos.

Lema 7. *(De Zorn) Sea A un conjunto con orden parcial estricto.*

Si todo subconjunto simplemente ordenado de A tiene una cota superior en A,

entonces A tiene un elemento maximal.

Lema 8. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X verificando la propiedad de intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita tal que $\mathcal{D}$ contiene $\mathcal{A}$. Además, ninguna colección de subconjuntos de X verificando dicha propiedad contiene a $\mathcal{D}$ propiamente.*

Demostración.

Por hipótesis tenemos una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que tiene la propiedad de intersección finita.

Denotemos por:

$\mathbb{A} = \{\mathcal{B} \subset P(X) | \mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de la intersección finita$\}$

Consideremos como orden parcial estricto en $\mathbb{A}$ la inclusión propia $\subsetneq$. Para demostrar nuestro lema, necesitamos demostrar que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$. Sea $\mathbb{B}$ un subconjunto de $\mathbb{A}$ que esta simplemente ordenado por la inclusión propia, ahora tomemos $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$, que es cota superior de $\mathbb{B}$.

Afirmación $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathbb{A}$.

En efecto, Como cada elemento de $\mathbb{B}$ contiene a $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$, para demostrar que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita, sean $C_1, ..., C_n$ elementos de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es la unión de los elementos de $\mathbb{B}$, existe, para cada i, un elemento $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{B}$ tal que $C_i \in \mathcal{B}_i$. El conjunto $\{\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n\}$ esta contenido en $\mathbb{B}$, así que esta simplemente ordenado por la relación de inclusión propia. Siendo finito, tiene un elemento máximo; esto es, existe un índice k tal que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_k$ para $i = 1, ..., n$. Entonces todos los conjuntos $C_1, ..., C_n$ son elementos de $\mathcal{B}_k$. Como $\mathcal{B}_k$ tiene la propiedad de intersección finita, la intersección de los conjuntos $C_1, ..., C_n$ es no vacía.

Por tanto $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, Aplicando el lema 7 (De Zorn); $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal denotado $\mathcal{D}$. ■

Lema 9. *Sea X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Entonces:*

(a) *Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.*

(b) *Si A es un subconjunto de X que intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A*

es un elemento de $\mathcal{D}$

Demostración.

(a) Sea B la intersección de un numero finito de elementos de $\mathcal{D}$.

Definamos una colección $\xi = \mathcal{D} \cup \{B\}$. Vamos a demostrar que ξ tiene la propiedad de intersección finita; entonces la maximalidad de $\mathcal{D}$ implica que $\mathcal{D} = \xi$, luego $B \in \mathcal{D}$, tal y como se quería demostrar. Escojamos un numero finito de elementos de ξ. Si ninguno de ellos es el conjunto B, entonces su intersección es no vacía ya que $\mathcal{D}$ verifica dicha propiedad. Si alguno de ellos es el conjunto B, entonces su intersección es de la forma $D_1 \cap \cdots \cap D_m \cap B$. Como B es una intersección de un numero finito de elementos de $\mathcal{D}$, este conjunto es no vacío.

(b) Dado A, como en el enunciado del Teorema, definamos $\xi = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Veamos que ξ verifica la propiedad de la intersección finita y concluimos así que A pertenece a $\mathcal{D}$. Escojamos un numero finito de elementos de ξ, si ninguno de ellos es el conjunto A, su intersección es no vacía pues $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita, si alguno de ellos es el conjunto A, su intersección es de esta forma:

$D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap A$, Ahora $D_1 \cap \cdots \cap D_n$

pertenece a $\mathcal{D}$, por (a), luego como A intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$ entonces esta intersección es no vacía.

■

Teorema 20. *(Teorema de Tychonoff). Un producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, donde cada espacio X_α es compacto.

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita. Probaremos que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ es no vacía, de lo que se sigue por el Teorema 19, que X es compacto. Aplicando el lema 8, podemos elegir una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ maximal con respecto a la propiedad de intersección finita. Entonces será suficiente probar que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ es no vacía. Dado $\alpha \in J$, sea $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ el mapeo proyección, como es usual. Consideremos la colección $\{\pi_\alpha(D) | D \in \mathcal{D}\}$ de subconjuntos de X_α. Esta colección tiene la propiedad de intersección finita.

En efecto,(Contradicción) supongamos $\{\pi_\alpha(D) | D \in \mathcal{D}\}$ no tiene la propiedad de intersección finita, entonces existen $D_1, ..., D_n \in \mathcal{D}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_\alpha(D_i) = \varnothing_{X_\alpha}$, luego como $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_\alpha(D_i) = \pi_\alpha(D_1 \cap ... \cap D_n)$ entonces $\pi_\alpha(D_1 \cap ... \cap D_n) = \varnothing_{X_\alpha}$ aplicando π_α^{-1} a ambos lados

$\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(D_1 \cap ... \cap D_n)) = \pi_\alpha^{-1}(\varnothing_{X_\alpha})$

tenemos $D_1 \cap ... \cap D_n = \varnothing_X$, lo cual es una contradicción, ya que $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por la compacidad de X_α, podemos elegir para cada α un punto $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}$. Sea $\mathbf{x}$ el punto $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de X. Demostraremos que $\mathbf{x} \in \overline{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$; entonces nuestra prueba estará terminada. Primero mostraremos que si $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es cualquier subbasico conteniendo a $\mathbf{x}$, entonces $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$. El conjunto U_β es una vecindad de x_β en X_β. Como $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ por definición, U_β intersecta $\pi_\beta(D)$ en algún punto $\pi_\beta(\mathbf{y})$, donde $\mathbf{y} \in D$. Entonces se sigue que $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$. De la parte (b) del lema anterior se sigue que $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{D}$, por tanto cada subbasico que contenga a $\mathbf{x}$ pertenece a $\mathcal{D}$, de la parte (a) del mismo lema se sigue que cada básico que contenga a $\mathbf{x}$ pertenece a $\mathcal{D}$. Luego como $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita cada básico que contenga a $\mathbf{x}$ intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$; por tanto $\mathbf{x} \in \overline{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$, por tanto $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ es no vacía.

■

Lema 10. *(Del cable cortado) Sea Y un espacio métrico y compacto. Si D es una componente de Y y F un subconjunto cerrado de Y tales que $F \cap D = \varnothing$, entonces existe un subconjunto abierto y cerrado A de Y tal que $D \subset A$ y $A \cap F = \varnothing$.*

Demostración.

Sean Y, D y F como en el enunciado del lema. Por el Teorema 9, D es una casicomponente de X. Para cada $x \in F$ se tiene $x \notin D$, y por la definición de casicomponente existe un abierto y cerrado A_x en X tal que $D \subset A_x$ y $x \notin A_x$. Para cada $x \in F$ sea $B_x = X - A_x$. Entonces B_x es abierto y cerrado en X y contiene a x. Por lo tanto $\{B_x \backslash x \in F\}$ es una cubierta abierta de F, que por ser cerrado en un compacto, es compacto, y por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ y existen n elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ de F tales que $F \subset \cup_{i=1}^{n} B_{x_i}$. Entonces si $A = \cap_{i=1}^{n} A_{x_i}$, A es intersección finita de subconjuntos abiertos y cerrados, por lo que es abierto y cerrado en X. Además $D \subset A_x$ para toda x, de donde $D \subset A$, y $X - A = \cup_{i=1}^{n} B_{x_i} \supset F$, por lo que A cumple con las condiciones del lema. ■

Capítulo 2

Teoría de continuos y la metrica de Hausdorff en hiperespacios.

2.1. Teoría de continuos.

Definición 16. *Un continuo es un espacio topológico metrizable, compacto, conexo y no vacío.*

Ahora daremos algunos ejemplos especiales de continuos.

(1) El continuo mas sencillo, por muchas razones, es el intervalo $[0, 1]$, o cualquier copia topológica de el, a ellas se les llama arcos.

(2) El disco relleno o lo que es lo mismo las 2-celdas $[0, 1]^2$.

(3) Las $n-$celdas también son ejemplos de continuos.

Podemos construir continuos uniendo un numero finito de continuos que se vayan intersectando, para que el resultado sea conexo.

(4) Por ejemplo, uniendo arcos, podemos construir las llamadas gráficas finitas, que son aquellos continuos que son una unión finita de arcos tales que cada dos de ellos se intersectan solo en un numero finito de puntos. Algunas gráficas finitas significativas son: el intervalo $[0,1]$, la circunferencia y los $n-$odos simples. Estos últimos son una unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto, llamado el vértice del $n-$odo, dicho vértice tiene que ser un extremo de cada uno de los n arcos y los otros extremos de los arcos se llaman extremos del $n-$ono.

(5)Otro ejemplo es el continuo $sen(\frac{1}{x})$ que es la cerradura en $\mathbb{R}^2$ de la gráfica de la función $sen(\frac{1}{x})$, definida en el intervalo $(0,1]$.

Cuando a este continuo se le agrega un arco como en la figura 2.1, se obtiene el continuo llamado circulo de Varsovia.

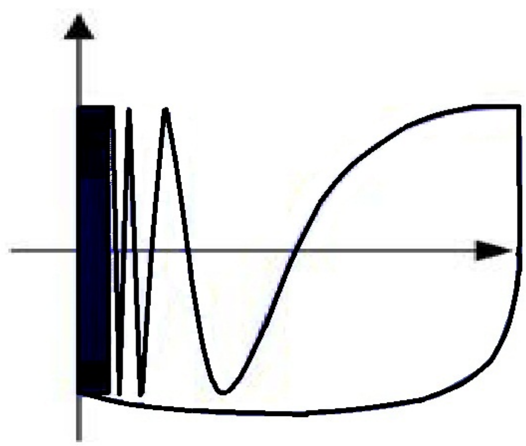


Figura 2.1: Circulo de Varsovia.

También se pueden construir continuos uniendo una infinidad de segmentos, teniendo cuidado de que lo que resulte sea compacto.

(6)Dos ejemplos importantes de este tipo son la escoba y el peine. Estos continuos están representados en la figura 2.2, en cada uno de estos continuos hay una infinidad de segmentos que se aproximan al segmento horizontal de la parte de abajo.

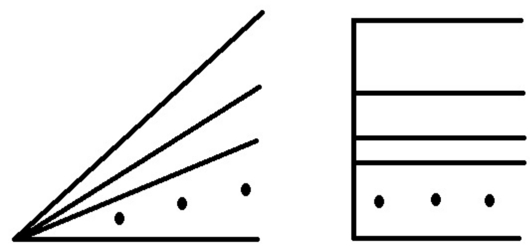


Figura 2.2: Escoba y Peine.

Diremos que los árboles son las gráficas finitas que no contienen circunferencias.

(7)Lo que sigue en dificultad a los árboles son las dentritas, ellas son los continuos localmente conexos que no contienen circunferencias. A primera vista podría uno pensar que las dentritas son muy simples, sin embargo, algunas de ellas pueden ser muy interesantes. Una de las mas simples, que no es un árbol, es la dentrita que nada mas tiene un punto de ramificación pero tiene una infinidad de segmentos saliendo de el, ella esta ilustrada en la figura 2.3 y se acostumbra a denotar por F_w.

Definición 17. *Un subcontinuo es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo. Es decir, es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo.*

Ahora bien el siguiente ejemplo ilustra como la intersección anidada de conexos no necesariamente es conexo.

Ejemplo 7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$X_n = [-1, 1] \times [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \setminus \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{0\}\}$.

Observemos que cada X_n es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero

$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = [-1, -\frac{1}{2}] \times \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$,

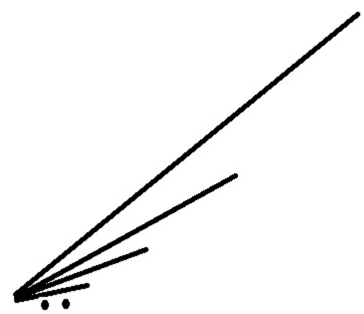


Figura 2.3: F_w.

el cual no es conexo.

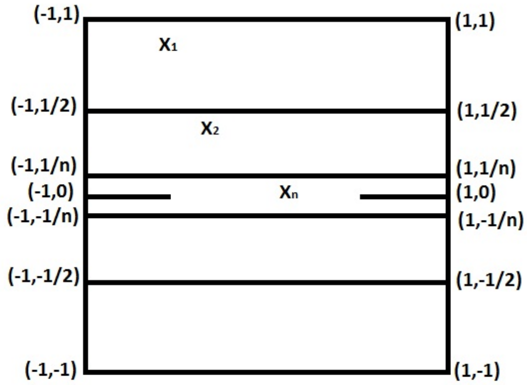
Por el ejemplo anterior vemos que la intersección anidada de conjuntos conexos no es, necesariamente, conexa. Pero si agregamos la hipótesis de compacidad a cada uno de los intersectados, entonces la intersección si resulta conexa, lo cual se muestra en el siguiente Teorema:

Teorema 21. *Si X es un continuo y $A_1, A_2, ...$ son subcontinuos anidados*

$(A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...)$, *entonces el conjunto*

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ...$ *es un subcontinuo de X*

Demostración. El conjunto A es cerrado pues es intersección de cerrados. Y como el espacio X es compacto, A también es compacto. Al ser los conjuntos A_n compactos, se tiene que ellos son cerrados. De modo que los conjuntos $X - A_n$ son abiertos.Por las leyes de De Morgan, $X - A = X - (A_1 \cap A_2 \cap ...) = (X - A_1) \cup (X - A_2) \cup ...$ si por pura mala suerte A es vacío, se tiene que la familia $\{X - A_1, X - A_2, ...\}$ es una cubierta de X y, como X es compacto, debe haber una subfamilia finita $X - A_{n_1}, X - A_{n_2}, ..., X - A_{n_m}$ que cubra también a X. Podemos entonces suponer que $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$.



De modo que

$X = (X - A_{n_1}) \cup (X - A_{n_2}) \cup ... \cup (X - A_{n_m})$

$= X - (A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap ... \cap A_{n_m})$

$= X - A_{n_m}$.

Lo que implica que $A_{n_m} = \varnothing$. Esto es imposible pues A_{n_m} es un subcontinuo y, por definición, tiene que ser diferente del vacío. Esto nos da una contradicción que demuestra que A es no vacío. Lo que nos falta para poder concluir que A es un subcontinuo es mostrar que A es conexo. Supongamos que esto no ocurre. Entonces A se puede escribir como $A = K \cup L$ son cerrados ajenos y no vacíos. Como el espacio X es normal, existen abiertos ajenos U y V de X tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. Entonces $(X - A_1) \cup (X - A_2) \cup ... = X - A = X - (K \cup L) \supset X - (U \cup V)$. De modo que la familia $\{X - A_1, X - A_2, ...\}$ es una cubierta abierta del conjunto cerrado $X - (U \cup V)$. Procediendo como hicimos arriba, existe entonces un numero natural n_m tal que $X - (U \cup V) \subset X - A_{n_m}$. O, lo que es lo mismo, $A_{n_m} \subset U \cup V$. Así que A_{n_m} es un conjunto conexo que esta contenido en la unión de dos conjuntos abiertos ajenos U y V. Esto solo puede ocurrir si $A_{n_m} \subset U$ o $A_{n_m} \subset V$. Pero $K \subset A \subset A_{n_m}$ y $L \subset A \subset A_{n_m}$, entonces $\varnothing \neq K \subset A_{n_m} \cap U$ y $\varnothing \neq L \subset A_{n_m} \cap V$, lo que nos lleva a que A_{n_m} intersecta a U y también a V. Esto es un absurdo que nos hace concluir que A es conexo. Por tanto A es un subcontinuo de X. ■

El teorema anterior ayuda a construir continuos, por ejemplo tomemos una $2-celda$ C. Podemos tomar cualquier sucesión de abiertos $U_1, U_2, ...$ de C con la propiedad de que $C - U_1, C - (U_1 \cup U_2), ...$ sean conexos. Entonces $C - (U_1 \cup U_2 \cup ...)$ es un continuo.

Ejemplo 8. *Un continuo famoso que se construye de esta manera es la llamada Carpeta de Sierpinski. La cual se construye empezando con $C = [0,1]^2$. Dividimos a C en 9 cuadrados de lado $1/3$ y quitamos el interior del cuadrado central (U_1). A cada uno de los 8 cuadrados restantes le hacemos lo mismo. Esto es lo dividimos en 9 cuadrados iguales de lado $1/9$ y le quitamos el interior del central (a la unión de ellos le llamamos U_2). De esta manera nos quedan $8^2 = 64$ cuadrados de lado $1/9$. A cada uno de estos cuadrados le hacemos lo mismo y continuamos este proceso, una cantidad numerable de pasos. El resultado de los primeros tres pasos lo mostramos en la figura 2.4.*

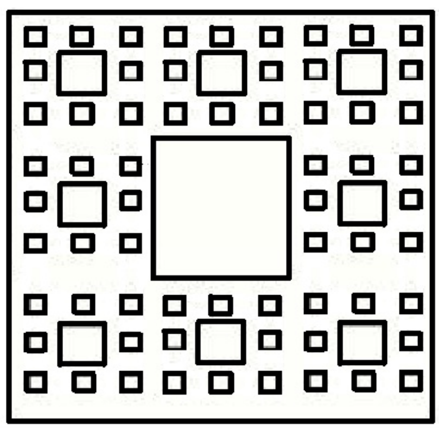


Figura 2.4: Carpeta de Sierpinski.

La Carpeta de Sierpinski tiene muchas propiedades interesantes.

Quizá la mas importante es que todo subcontinuo del plano, con interior vacío, tiene una copia homeomorfa dentro de esta curva. Esto se expresa diciendo que la carpeta de Sierpinski es universal para los continuos del plano de dimensión 1.

Ejemplo 9. *Otro continuo famoso es la Esponja de Menger.*

Esta se construye haciendo túneles en el cubo solido $[0,1]^3$. Para construirla, dividamos cada cara del cubo en 9 cuadrados iguales, nos fijamos en el de enmedio y le quitamos el *paralelepípedo que tiene como base a ese cuadrado. Con esto se le quita al cubo un abierto que es la unión de 3 paralelepípedos y así se obtiene el continuo A_1 que es la unión de 20 cubos de lado 1/3. A cada uno de estos cubos se les hace el mismo proceso, es decir, se les cavan 3 paralelepípedos y entonces, en cada uno de ellos nos quedamos ahora con 400 cubos de lado 1/9, a la unión de ellos le llamamos A_2. Proseguimos con este proceso para obtener una sucesión anidada de continuos*

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$

El continuo $M = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ se le llama la esponja de Menger. En la figura 2.5 se muestran los primeros 2 pasos en la construcción de M.

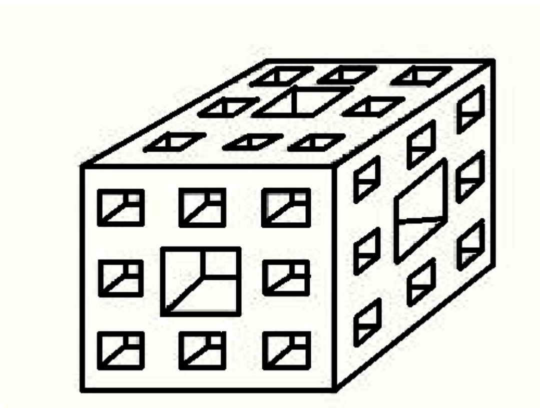


Figura 2.5: Esponja de Menger

Teorema 22. *(De los golpes en la frontera) Sean X un continuo y U un subconjunto abierto y no vacío de X. Si K es componente de $\overline{U}$ entonces $K \cap Fr(U) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sean X, K y U como en el enunciado del teorema.

Supongamos que $K \cap Fr(U) = \varnothing$. Como subespacio de X, $\overline{U}$ es un espacio métrico y compacto. Además $Fr(U)$ es cerrado en $\overline{U}$ y no intersecta a la componente K de $\overline{U}$. Entonces por el lema del cable cortado existe un subconjunto abierto y cerrado Z de $\overline{U}$ que contiene a K y no intersecta a $Fr(U)$. Como $\overline{U}$ es cerrado en X, Z también es cerrado en X. Veremos que Z también es abierto en X. Como Z es abierto en $\overline{U}$, $Z = W \cap \overline{U}$ para algún abierto W en X.

Como $\overline{U} = U \cup Fr(U)$ se tiene $Z = (W \cap U) \cup (W \cap Fr(U))$, y como $Z \cap Fr(U) = \varnothing$, se sigue que $W \cap Fr(U) \subset Z \subset X - Fr(U)$. Pero por otra parte es claro que $W \cap Fr(U) \subset Fr(U)$, por lo que $W \cap Fr(U) = \varnothing$ y por tanto $Z = W \cap U$. Como W y U son abiertos en X, se tiene que Z es abierto en X. Luego tenemos que $K \subset Z \subset U$ Como además U es subconjunto propio de X, y K es no vacío, entonces $Z \neq \varnothing$, y $Z \neq X$, también se tiene que Z es abierto y cerrado en X, contradiciendo la conexidad de X. Por lo tanto $K \cap Fr(U) \neq \varnothing$. ■

2.2. Continuos hereditariamente indescomponibles.

Definición 18. *Un continuo X es hereditariamente indescomponible si ningún subcontinuo de X puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios.*

Teorema 23. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces para todo A, $B \in C(X)$ se tiene que $A \cap B = \varnothing$, o $A \supset B$ o $A \subset B$.*

Demostración.

Supongamos que X es hereditariamente indescomponible y sean A, $B \in C(X)$ tal que $A \cap B \neq \varnothing$. Si $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, entonces $C = A \cup B$ es un subcontinuo y es la unión de dos subcontinuos propios, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis X es un continuo hereditariamente indescomponible. Por tanto $A \subset B$ o $B \subset A$. ■

2.3. Métrica de Hausdorff.

A partir de ahora, la letra X denotara un continuo no degenerado con métrica d, los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular.

$2^X = \{A \subset X : A$ es cerrado y no vacío$\}$,

$C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$,

$F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo mas n puntos$\}$ $(n \in \mathbb{N})$,

$C_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo mas n componentes $\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Como se puede notar, todos estos espacios se definen como subespacios de 2^X, además $C(X)$ es lo mismo que $C_1(X)$, $F_1(X) = \{\{p\} \in 2^X : p \in X\}$, es isométrico a X, $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y como el conjunto que tiene a un solo punto p puede escribirse en la forma $\{p, p\}$, entonces $F_2(X)$ puede escribirse de la siguiente manera: $F_2(X) = \{\{p, q\} \in 2^X : p, q \in X\}$ Como 2^X contiene a todos los demás hiperespacios, para darle una métrica a todos ellos, bastara dársela a 2^X. Esto es lo que haremos a continuación. Dadas $\epsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$, se define: $N(\epsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \epsilon\}$. Este conjunto se llama la nube de radio ϵ centrada en A. Estamos listos para definir la métrica para 2^X (se llama métrica de Hausdorff). Dados $A, B \in 2^X$, definimos $H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$ La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno en el otro. No es difícil demostrar que $H(A, B) \leq \epsilon$, si y solo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Antes de seguir adelante tenemos que verificar que H es efectivamente una métrica.

Proposición 1. *Dados elementos A, B, C de 2^X, se cumple que:*

(*a*) $H(A, B)$ *esta bien definida,*

(*b*) $H(A, B) \geq 0$,

(*c*) $H(A, B) = H(B, A)$,

(*d*) $H(A, B) = 0$ *si y solo si* $A = B$,

(*e*) $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Demostración.

Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$, definimos el conjunto:

$E(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$.

Por la definición de $H(A, B)$, $H(A, B) = \inf E(A, B)$. Para ver que $H(A, B)$ esta bien definida, tenemos que mostrar que el conjunto $E(A, B)$ es diferente del vacío y esta acotado inferiormente. Para ver que es no vacío, notemos que $d(p, q) < \text{diam}(X) + 1$ para cualesquiera $p, q \in X$. Así que $A \subset N(diam(X) + 1, B)$ y $B \subset N(diam(X) + 1, A)$. De manera que el numero $diam(X) + 1$ pertenece a $E(A, B)$. Esto muestra que el conjunto $E(A, B)$ es no vacío. Claramente este conjunto esta acotado inferiormente por el 0, por tanto, $H(A, B)$ esta bien definido. Además $H(A, B) \geq 0$. La prueba de (c) es inmediata pues en la definición del conjunto $E(A, B)$ pueden intercambiarse los conjuntos A y B sin que cambie el conjunto

$E(A,B)$. Para demostrar (d), primero veamos que $H(A,A)=0$. Para esto observemos que, para cualquier $\epsilon>0$, $A\subset N(\epsilon,A)$, de modo que $E(A,A)=(0,\infty)$ y como el ínfimo de este conjunto es el 0, concluimos que $H(A,A)=0$. Ahora supongamos que $H(A,B)=0$, tenemos que probar que $A=B$. Tomemos un punto $a\in A$ y un numero positivo cualquiera ϵ. Entonces estamos suponiendo que inf$E(A,B)=0<\epsilon$, por lo que existe $\delta\in E(A,B)$ tal que $\delta<\epsilon$ y entonces $A\subset N(\delta,B)$. Así que existe $b\in B$ tal que $d(a,b)<\delta<\epsilon$. Con esto hemos probado que $B_\epsilon(a)\cap B\neq\varnothing$ y como esto ocurre para cualquier ϵ, concluimos que a pertenece a la cerradura de B en X, pero B es cerrado, así que $a\in B$. Ya tenemos entonces que $A\subset B$, la contención $B\subset A$ se prueba en forma similar. Por tanto $A=B$. Esto termina la prueba de (d). Finalmente probaremos (e). De acuerdo con la definición de H, tenemos que probar que: inf$E(A,C)\leq$ inf$E(A,B)+$ inf$E(B,C)$ Recordemos que el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo que tenemos que probar que: inf$E(A,C)\leq$ inf$\{\delta+\eta:\delta\in E(A,B)$ y $\eta\in E(B,C)\}$. Para hacer esto, tomemos dos elementos cualesquiera $\delta\in E(A,B)$ y $\eta\in E(B,C)$. Por definición, $A\subset N(\delta,B)$ y $B\subset N(\eta,C)$. Dada $a\in A$, existe $b\in B$ tal que $d(a,b)<\delta$, además existe $c\in C$ tal que $d(b,c)<\eta$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(a,c)<\delta+\eta$. Hemos probado que $A\subset N(\delta+\eta,C)$. En forma similar se puede probar que $C\subset N(\delta+\eta,A)$. De manera que $\delta+\eta\in E(A,C)$. Y entonces inf$E(A,C)\leq\delta+\eta$. Con esto podemos concluir que el numero inf$E(A,C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta+\eta:\delta\in E(A,B)$ y $\eta\in E(B,C)\}$ y, por tanto inf$E(A,C)\leq$ inf$E(A,B)+$ inf$E(B,C)$ Esto es precisamente lo que teníamos que ver para completar la prueba de (e).

■

Las propiedades mostradas en la proposición nos dicen que 2^X es un espacio métrico y, entonces también lo son sus subespacios. Por lo que todos los hiperespacios que definimos son espacios métricos, con la métrica de Hausdorff. Ahora demostraremos que 2^X es conexo.

Lema 11. *El conjunto* $F(X)=\cup\{F_n(X):n\in\mathbb{N}\}$ *es denso en* 2^X.

Demostración.

Tenemos que probar que todas las bolas alrededor de todos los elementos de 2^X intersectan a $F(X)$. Tomemos entonces un elemento cualquiera $A\in 2^X$ y un numero positivo ϵ. Como el conjunto A es compacto y la familia $\{B_\epsilon(a):a\in A\}$ es una cubierta abierta de A, tenemos que existen $n\in\mathbb{N}$ y $a_1,a_2,...,a_n\in A$ tales que $A\subset B_\epsilon(a_1)\cup...\cup B_\epsilon(a_n)=N(\epsilon,\{a_1,a_2,...,a_n\})$.

Por otra parte, como $\{a_1, ..., a_n\} \subset A \subset N(\epsilon, A)$, podemos concluir que $H(A, \{a_1, ..., a_n\}) < \epsilon$. De manera que $\{a_1, ..., a_n\} \in B_\epsilon(A) \cap F(X)$. Por tanto $F(X)$ es denso en 2^X. ■

Lema 12. *Sea X^n el producto topológico de n copias del continuo X por si mismo. Sea $g : X^n \longrightarrow F_n(X)$ la función definida por $g(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$. Entonces g es continua y suprayectiva.*

Demostración. Podemos considerar que la métrica para X^n esta dada por:

$$D((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\}$$

ya que induce la topología producto. Probaremos que g es continua. De hecho, mostraremos directamente que es uniformemente continua. Para esto, tomemos $\epsilon > 0$ y tomemos elementos $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)$ en X^n tales que $D((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\} < \epsilon$. Entonces $d(x_i, y_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. De modo que $\{x_1, ..., x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, ..., y_n\})$ y $\{y_1, ..., y_n\} \subset N(\epsilon, \{x_1, ..., x_n\})$. Así que $H(g(x_1, ..., x_n), g(y_1, ..., y_n)) < \epsilon$. Por tanto g es uniformemente continua. Para ver que g es suprayectiva, basta con observar que cada elemento de $F_n(X)$ se puede escribir en la forma $(x_1, ..., x_n)$, pues si empezamos con un conjunto de menos de n elementos, bastara con repetir algunos y esto no cambia al conjunto. ■

Teorema 24. *El hiperespacio 2^X es conexo.*

Demostración. Dada $n \in \mathbb{N}$, $F_1(X) \subset F_n(X)$ y el conjunto $F_n(X)$ es conexo pues es la imagen del conjunto X^n bajo una función continua (Por el lema anterior). De manera que el conjunto $F(X) = \cup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es una unión de conjuntos conexos con intersección común, y por tanto, dicho conjunto es conexo. Y como su cerradura es 2^X, por el Lema 11, concluimos que 2^X también es conexo. ■

Otra forma de convergencia en 2^X

Si $(A_n)_n \subset 2^X$, definimos

lim inf$A_n = \{x \in X$: para toda $\epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$, para todas salvo quizá un

numero finito de las n's$\}$ y,

lim sup$A_n = \{x \in X$: para toda $\epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's\}$.

Proposición 2. (a) *lim inf$A_n \subset$ lim supA_n.*

(b) *lim infA_n y lim supA_n son conjuntos cerrados.*

(c) *lim sup$A_n \neq \varnothing$ para toda sucesión $(A_n)_n$.*

Demostración.

(a) Sea $x \in$ lim infA_n. Tenemos que mostrar que $x \in$ lim supA_n, es decir, tenemos que probar que si $\epsilon > 0$, entonces $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$. Como $x \in$ lim infA_n, por definición tenemos que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para casi toda n, es decir, existe un numero $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$, para toda $n > N$ y, por tanto $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$ de esto concluimos que $x \in$ lim supA_n.

(b) Demostraremos que lim supA_n coincide con su cerradura, es decir que $\overline{limsupA_n} \subset$ lim supA_n. Sea pues $x \in \overline{limsupA_n}$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces tenemos que lim sup $A_n \cap B_\epsilon(x) \neq \varnothing$, de manera que podemos tomar un punto $z \in$ lim sup$A_n \cap B_\epsilon(x)$. Como $z \in B_\epsilon(x)$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset B_\epsilon(x)$ y como $z \in$ lim supA_n, entonces $B_\delta(z) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$. De aquí que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$ y por tanto $x \in$ lim supA_n.

(c) Tomemos $a_n \in A_n$. Como X es compacto existen un punto $x \in X$ y una subsucesión $(a_n)_k$ de la sucesión $(a_n)_n$, tales que $a_{n_k} \longrightarrow x$. Dada $\epsilon > 0$, existe un numero natural K tal que $a_{n_k} \in B_\epsilon(x)$ para toda $k \geq K$. De aquí que $B_\epsilon(x)$ intersecta a una infinidad de $A_{n's}$. Por tanto $x \in$ lim supA_n. Hemos probado entonces que lim sup$A_n \neq \varnothing$ para cualquier sucesión $(A_n)_n$ en 2^X.

■

Proposición 3. (a) *$x \in$ lim infA_n si y solo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de X*

tal que $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

(b) *$x \in$ lim supA_n si y solo si existe una sucesión de numeros naturales*

$n_1 < n_2 < ...$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ (para toda k) tales que $x_{n_k} \longrightarrow x$.

Demostración.

(a) $\Leftarrow$) Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para demostrar que $x \in$ lim infA_n, tomemos $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, para toda $n \geq N$. De manera que $x_n \in A_n \cap B_\epsilon(x)$ para toda $n \geq N$. Así que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Por tanto, $x \in \lim \inf A_n$.

$\Rightarrow$) Sea x en $\lim \inf A_n$, para cada n elegimos $x_n \in A_n$ de tal forma que $d(x, x_n) = \min\{d(x,y) : y \in A_n\}$ luego x_n esta bien definido para cada n porque la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(y) = d(x,y)$ (x esta fijo) es continua y como A_n es compacto, f alcanza un mínimo en A_n. Esto significa que existe $x_n \in A_n$ tal que $f(x_n) = \min\{f(y) \in \mathbb{R} : y \in A_n\}$, donde d es la métrica de X. Vamos a demostrar que $x_n \longrightarrow x$. Para esto tomamos $\epsilon > 0$, como $x \in \lim \inf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. De modo que, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \epsilon$, pero $d(x, x_n) = \min\{d(x,y) : y \in A_n\} \leq d(x, a_n) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. De manera que $d(x, x_n) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Por tanto $x_n \longrightarrow x$.

(b) $\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de numeros naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ (para toda k) tales que $x_{n_k} \longrightarrow x$. Tenemos que demostrar que $x \in \lim \sup A_n$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \epsilon$ para toda $k \geq K$, esto implica que $x_{n_k} \in A_{n_k} \cap B_\epsilon(x)$ para toda $k \geq K$, de manera que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$ $(n_k, n_{k+1}, \ldots)$. Por tanto $x \in \lim \sup A_n$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in \lim \sup A_n$. Entonces, para toda $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$. En particular para $\epsilon = 1$ se tiene que $B_1(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$. Elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ y $x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}$, entonces $d(x, x_{n_1}) < 1$ y $x_{n_1} \in A_{n_1}$. Para $\epsilon = 1/2, B_{1/2}(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$, entonces podemos elegir $n_2 > n_1$ tal que $B_{1/2}(x) \cap A_{n_2} \neq \varnothing$. Escogemos $x_{n_2} \in B_{1/2}(x) \cap A_{n_2}$, entonces $d(x, x_{n_2}) < 1/2$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$. Continuando este procedimiento, se pueden construir numeros naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que $d(x, x_{n_k}) < 1/k$. De aquí se sigue fácilmente que $x_{n_k} \longrightarrow x$ cuando $k \longrightarrow \infty$. ■

Teorema 25. *Sea $(A_n)_n \subset 2^X$, entonces A_n converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$ si y solo si $\lim \inf A_n = A = \lim \sup A_n$.*

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que A_n converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$. Demostraremos que $\lim \inf A_n = A = \lim \sup A_n$. Sabemos que $\lim \inf A_n \subset \lim \sup A_n$, entonces solo tenemos que demostrar que

$(a) A \subset \lim \inf A_n$ y, (b) $\lim \sup A_n \subset A$.

En efecto, (a) Sean $a \in A$ y $\epsilon > 0$. Como A_n converge a A (con la métrica de Hausdorff) se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$, para toda $n \geq N$. Esto implica que $A \subset N(\epsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\epsilon, A)$. Sea $n \geq N$ entonces $a \in N(\epsilon, A_n)$. Esto implica que existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \epsilon$. De manera que $x_n \in A_n \cap B_\epsilon(a)$. Hemos probado que $A_n \cap B_\epsilon(a) \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Esto muestra que $a \in \liminf A_n$. Por tanto $A \subset \liminf A_n$.

En efecto, (b) Supongamos que $\limsup A_n$ no esta contenido en A, entonces existe $x \in \limsup A_n$ tal que $x \notin A$. Como A es cerrado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A = \varnothing$. Ya que $x \in \limsup A_n$, tenemos que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n's$. Dado que A_n converge a A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\epsilon/2, A)$ y $A \subset N(\epsilon/2, A_n)$ para toda $n \geq N$. Entonces podemos elegir $M \geq N$ tal que $B_{\epsilon/2}(x) \cap A_M \neq \varnothing$. Elijamos $z \in B_{\epsilon/2}(x) \cap A_M$, entonces $d(x, z) < \epsilon/2$ y $z \in A_M \subset N(\epsilon/2, A)$. De aquí que $d(x, z) < \epsilon/2$ y existe $a \in A$ tal que $d(z, a) < \epsilon/2$. Esto implica que $d(x, a) < \epsilon$ donde $a \in A$. Por tanto $B_\epsilon(x)$ intersecta a A. Esto contradice la elección de ϵ y prueba que $\limsup A_n \subset A$.

$(\Leftarrow)$ Ahora supongamos que $\limsup A_n = \liminf A_n$. Definimos $A = \limsup A_n$, $A \in 2^X$ pues en la Proposición 2 se vio que $\limsup A_n$ es cerrado y no vacío. Entonces hay que demostrar que A_n converge a A (con la métrica de Hausdorff). Sea $\epsilon > 0$, probaremos que:

(a) Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para toda $n \geq M_1$ y,

(b) Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\epsilon, A)$, para toda $n \geq M_2$.

En efecto, (b) Supongamos que no se cumple el enunciado. Esto es, supongamos que para toda $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que A_n no esta contenido en $N(\epsilon, A)$. Para $N = 1$, existe $n_1 \geq 1$ tal que A_{n_1} no esta contenido en $N(\epsilon, A)$, Para $N = n_1 + 1$, existe $n_2 > n_1$ tal que A_{n_2} no esta contenido en $N(\epsilon, A)$. Para $N = n_2 + 1$, existe $n_3 > n_2$ tal que A_{n_3} no esta contenido en $N(\epsilon, A)$. Procediendo de esta manera se prueba que existe una sucesión de numeros naturales $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ tal que A_{n_k} no esta contenido en $N(\epsilon, A)$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in A_{n_k} - N(\epsilon, A)$. Como X es compacto, existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $(x_{n_{k_I}})_I$ de $(x_{n_k})_k$ tales que $x_{n_{k_I}} \longrightarrow x_0$. Ya que para toda I, $x_{n_{k_I}} \in X - N(\epsilon, A)$ y este conjunto es un cerrado (es el complemento de un abierto) tenemos que $x_0 \in X - N(\epsilon, A)$, lo cual implica que $x_0 \notin A$ pero $x_{n_{k_I}} \longrightarrow x_0$ y $(A_{n_{k_I}})$ es una subsucesión de $(A_n)_n$. Por la caracterización que dimos antes de limite superior tenemos entonces que $x_0 \in \limsup A_n = A$. Entonces $x_0 \in A$. Esta contradicción demuestra (b).

En efecto, (a) Ya que la familia $\{B_{\epsilon/2}(a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto pues es igual a lim supA_n, entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_m \in A$ tales que $A \subset B_{\epsilon/2}(a_1) \cup ... \cup B_{\epsilon/2}(a_m)$. como $A =$ lim infA_n, cada a_i es elemento de lim infA_n. De manera que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_i$, entonces $A_n \cap B_{\epsilon/2}(a_i) \neq \varnothing$. Definimos $M_1 = \max\{N_1, ..., N_m\}$. Dadas $n \geq M_1$ para toda $i \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $A_n \cap B_{\epsilon/2}(a_i) \neq \varnothing$. Afirmamos que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para toda $n \geq M_1$. Tomemos pues $n \geq M_1$ y tomemos $a \in A \subset B_{\epsilon/2}(a_1) \cup ... \cup B_{\epsilon/2}(a_m)$. Entonces existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $a \in B_{\epsilon/2}(a_i)$. Como $n \geq M_1$ entonces existe $x \in B_{\epsilon/2}(a_i) \cap A_n$ Por tanto $d(a, x) \leq d(a, a_i) + d(a_i, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Por tanto $a \in N(\epsilon, A_n)$. De manera que $A \subset N(\epsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$. Con esto terminamos la prueba de (a) Ahora que ya tenemos probadas (a) y (b), hacemos $N = \max\{M_1, M_2\}$, entonces si $n \geq N$, tenemos que $A \subset N(\epsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\epsilon, A)$. De aquí que $H(A, A_n) \leq \epsilon$ para $n \geq N$. Esto muestra que $A_n \longrightarrow A$ con la métrica de Hausdorff.

■

Lema 13. *Si $(A_n)_n \subset 2^X$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(A_n)_n$ converge a un $A_0 \in 2^X$.*

Demostración.

De acuerdo con el teorema anterior, el único candidato que se puede proponer para el limite es $A_0 =$ lim supA_n. Y para probar que $A_n \longrightarrow A_0$ (con la métrica de Hausdorff) tenemos que probar que lim inf$A_n =$ lim supA_n. De manera que tenemos que demostrar que lim sup$A_n \subset$ lim infA_n. Sea $x \in$ lim supA_n. Sea $\epsilon > 0$, hay que mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Como $(A_n)_n$ es de Cauchy, para $\epsilon/2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A_m) < \epsilon/2$, si $n, m \geq N$. Como $x \in$ lim supA_n, entonces $B_{\epsilon/2}(x)$ intersecta a una infinidad de $n's$, elijamos una $M_0 \geq N$ tal que $B_{\epsilon/2}(x) \cap A_{M_0} \neq \varnothing$. Dada $n \geq N$ cualquiera, $H(A_{m_0}, A_n) < \epsilon/2$ pues ambos índices son mayores o iguales a N, lo cual implica que $A_{M_0} \subset N(\epsilon/2, A_n)$. Eligimos $y \in A_{M_0} \cap B_{\epsilon/2}(x)$, entonces $y \in A_{M_0} \subset N(\epsilon/2, A_n)$. Así que existe $z \in A_n$ tal que $d(y, z) < \epsilon/2$ y por tanto $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Hemos probado entonces que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Esto prueba que $x \in$ lim infA_n. Y termina la prueba de que $A_n \longrightarrow A_0$. ■

Teorema 26. 2^X *es compacto.*

Demostración.

Recordemos que un espacio métrico es compacto si y solo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Tomemos pues una sucesión cualquiera $(A_n)_n \subset 2^X$. Por el lema anterior solo tenemos que mostrar que $(A_n)_n$ tiene una subsucesión de Cauchy. Construiremos inductivamente la subsucesión, pero para esto necesitamos probar primero la siguiente afirmación:

$(*)$ Dados $\epsilon > 0$ y un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$, existe otro subconjunto infinito J_1 de J tal que $H(A_n, A_r) \leq \epsilon$ para todos los elementos n, r de J_1. Sean pues $\epsilon > 0$ y J un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como X es compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_m \in X$ tales que $X = B_{\epsilon/2}(x_1) \cup ... \cup B_{\epsilon/2}(x_m)$. Para cada $n \in J$ hacemos $k_n = \{i \in \{1, ..., m\} : A_n \cap B_{\epsilon/2}(x_i) \neq \varnothing\}$. Sea $\mathbb{A} = \{F : F \subset \{1, ..., m\}\}$. Entonces $\mathbb{A}$ es finito (tiene 2^m elementos). Consideremos la función $f : J \longrightarrow \mathbb{A}$ dada por $f(n) = k_n$. Entonces $J = \cup\{f^{-1}(\{k\}) \subset J : k \in \mathbb{A}\}$. Como J es infinito y $\mathbb{A}$ es finito, entonces algún conjunto de la forma $f^{-1}(\{k\})$ debe ser infinito. Definimos $J_1 = f^{-1}(\{k\})$. Entonces $J_1 \subset J$ y es infinito. Vamos a probar que este J_1 sirve. Sea $G = \{x_i \in X : i \in k\} \in 2^X$. Veremos que dada $n \in J_1$, se tiene que $H(A_n, G) \leq \epsilon/2$. Sea pues $n \in J_1$. Entonces $f(n) = k$, de manera que $k_n = k$. De modo que $\{i \in \{1, ..., m\} : A_n \cap B_{\epsilon/2}(x_i) \neq \varnothing\} = k$. De aquí que $G = \{x_i \in X : A_n \cap B_{\epsilon/2}(x_i) \neq \varnothing\}$. Si $x_i \in G$, entonces $A_n \cap B_{\epsilon/2}(x_i) \neq \varnothing$. De modo que existe $a \in A_n$ tal que $d(a, x_i) \leq \epsilon/2$. Así que $x_i \in N(\epsilon/2, A_n)$. Esto prueba que $G \subset N(\epsilon/2, A_n)$. Ahora tomemos $x \in A_n$. Entonces $x \in X = B_{\epsilon/2}(x_1) \cup ... \cup B_{\epsilon/2}(x_m)$. Así que existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $x \in B_{\epsilon/2}(x_i)$. De manera que $A_n \cap B_{\epsilon/2}(x_i) \neq \varnothing$. De aquí que $x_i \in G$ y $d(x, x_i) < \epsilon/2$. Esto muestra que $A_n \subset N(\epsilon/2, G)$. Después de esto ya podemos asegurar que $H(A_n, G) < \epsilon/2$ para toda $n \in J_1$. Y como G es un conjunto fijo, tenemos que $H(A_n, A_r) \leq \epsilon$ para todas $n, r \in J_1$

Ahora si podemos construir la sucesión. Para empezar, escogemos un subconjunto infinito J_1 de $\mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A_r) \leq 1$ para todas $n, r \in J_1$. Ahora podemos conseguir un subconjunto infinito J_2 de J_1 tal que $H(A_n, A_r) \leq 1/2$ para todas $n, r \in J_2$. Repitiendo este proceso es posible obtener una sucesión $(J_n)_n$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tales que $J_1 \supset J_2 \supset ...$ y que además, para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $H(A_n, A_r) \leq 1/k$ para todas $n, r \in J_k$.

Para construir la subsucesión:

Elegimos $n_1 \in J_1$. Como J_2 es infinito, existe $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$. Escogemos $n_3 \in J_3$ tal que $n_2 < n_3$. Siguiendo de esta manera, se puede construir una sucesión $n_1 < n_2 < ...$ de numeros naturales tal que $n_k \in J_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Para probar que la sucesión $(A_{n_k})_k$ es de Cauchy, tomemos $\epsilon > 0$. Elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \epsilon$. Aseguramos que si $s, r \geq k$, entonces $H(A_{n_s}, A_{n_r}) < \epsilon$. Sean pues $s, r \geq k$. Entonces $J_s, J_r \subset J_k$, de manera que $n_s, n_r \in J_k$ y, por la elección de J_k, tenemos que $H(A_{n_s}, A_{n_r}) < 1/k < \epsilon$. Esto prueba que la sucesión $(A_{n_k})_k$ es de Cauchy y termina la prueba de que 2^X es compacto. ∎

Corolario 1. *El hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Demostración.

Como ya vimos que 2^X es compacto, solo es necesario probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Para esto, tomemos una sucesión convergente cualquiera $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ y supongamos que $\lim A_n = A$, donde $A \in 2^X$. Tenemos que demostrar que $A \in C(X)$. O lo que es lo mismo, que A es conexo. Supongamos por el contrario que A es no conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos G y K de X tales que $A = G \cup K$. Sea $\epsilon = \inf\{d(p,q) : p \in G \text{ y } q \in K\}$. Debido a la compacidad de G y K, tenemos que $\epsilon > 0$. Para el numero $\epsilon/2$, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon/2$. De modo que $A \subset N(\epsilon/2, A_n)$ y $A_n \subset N(\epsilon/2, A) = N(\epsilon/2, G) \cup N(\epsilon/2, K)$. Notemos que, por la elección de ϵ, los conjuntos $N(\epsilon/2, G)$ y $N(\epsilon/2, K)$ son ajenos y abiertos. Ya que A_n es conexo, no puede intersectar a esos dos conjuntos, por lo que tiene que estar en solo uno de ellos. Supongamos, por ejemplo, que $A_n \subset N(\epsilon/2, G)$. Entonces $K \subset A \subset N(\epsilon/2, A_n) \subset N(\epsilon, G)$. Pero K es ajeno a $N(\epsilon, G)$ (por la elección de ϵ), así que no le queda mas que ser vacío, esto contradice la elección de K y termina la prueba de que A es conexo. Por tanto $C(X)$ es cerrado en 2^X y, entonces es compacto. ∎

2.4. Continuidad.

Teorema 27. *Sean $A, B \in 2^X$ y $(A_n)_n$, $(B_n)_n \subset 2^X$ tales que $A_n \longrightarrow A$, $B_n \longrightarrow B$ y $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sean $a \in A$ y $\epsilon > 0$. Como $\liminf A_n = A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(a) \cap A_n \neq \varnothing$ para todo $n \geq N$. Luego en particular $A_n \subset B_n$ para $n \geq N$, así que $B_\epsilon(a) \cap B_n \neq \varnothing$ para todo $n \geq N$. Por tanto $a \in \liminf B_n = B$, Por tanto $A \subset B$. ∎

Corolario 2. *Sean* $(A_n)_n \subset X$ *tal que* $A_n \longrightarrow A$ *para algún* $A \in 2^X$, *y* $(a_n)_n \subset X$ *tal que* $a_n \longrightarrow a$ *para algún* $a \in X$ *y* $a_n \in A_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $a \in A$.

Teorema 28. *Sea* $\upsilon \subset X$. *Entonces los conjuntos:*

$\mathcal{S} = \{A \in 2^X : A \subset \upsilon\}$ *y*

$\mathcal{R} = \{A \in 2^X : A \cap \upsilon \neq \varnothing\}$

(a) *Son abiertos en* 2^X *si* υ *es abierto en* X, *y*

(b) *Son cerrados en* 2^X *si* υ *es cerrado en* X.

Demostración.

(b) Supongamos υ es cerrado en X.

Sea $A \in \overline{\mathcal{S}}$, entonces $A \in 2^X$ y existe $(A_n)_n \subset \mathcal{S}$ tal que $A_n \longrightarrow A$. Como $A_n \in \mathcal{S}$ resulta que $A_n \subset \upsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $(B_n)_n \subset X$ como $B_n = \upsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A_n \longrightarrow A$ y $B_n \longrightarrow B$ y $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 27, $A \subset B = \upsilon$, luego $A \in \mathcal{S}$. Por tanto $\mathcal{S}$ es cerrado en 2^X. Sea $A \in \overline{\mathcal{R}}$, entonces $A \in 2^X$ y existe $(A_n)_n \subset \mathcal{R}$ tal que $A_n \longrightarrow A$. Como $A_n \in \mathcal{R}$ resulta que $A_n \cap \upsilon \neq \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $a_n \in A_n \cap \upsilon$, luego la sucesión $(a_n)_n \subset \upsilon$ y como υ es cerrado en X entonces es compacto, por tanto existe $(a_{n_k})_k$ subsucesión tal que $a_{n_k} \longrightarrow a$, para algún $a \in \upsilon$. Luego $a_{n_k} \longrightarrow a$, $A_{n_k} \longrightarrow A$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, Entonces por el corolario 2, $a \in A$. Luego $A \cap \upsilon \neq \varnothing$. Entonces $A \in \mathcal{R}$, por tanto $\mathcal{R}$ es cerrado.

(a) Supongamos ahora que υ es abierto en X.

Luego $2^X - \mathcal{S} = \{A \in 2^X : A \nsubseteq \upsilon\} = \{A \in 2^X : A \cap (X - \upsilon) \neq \varnothing\}$, Como υ es abierto en X, $X - \upsilon$ es cerrado en X, entonces por la primera parte $2^X - \mathcal{S}$ es cerrado en 2^X, por tanto $\mathcal{S}$ es abierto en 2^X. Sea ahora $2^X - \mathcal{R} = \{A \in 2^X : A \cap \upsilon = \varnothing\} = \{A \in 2^X : A \subset X - \upsilon\}$, como υ es abierto en X, entonces $X - \upsilon$ es cerrado en X, por la primera parte $2^X - \mathcal{R}$ es cerrado en 2^X, por tanto $\mathcal{R}$ es abierto en 2^X. ∎

Teorema 29. *Para todo* $A \in 2^X$ *tal que* $A \subset U$, *con* U *abierto en* X, *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $N(\epsilon, A) \subset U$.

Demostración.

Definamos $\mathcal{S} = \{A \in 2^X : A \subset U\}$. Entonces por el Teorema anterior $A \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es abierto en 2^X. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(A) \subset \mathcal{S}$. Sea $a \in N(\epsilon, A)$, definamos $B = A \cup \{a\}$.

Afirmación: $B \in B_\epsilon(A)$.

En efecto, Sea $b \in B$, luego:

Caso 1: $b = a$, entonces $b \in N(\epsilon, A)$, pues así escogimos a.

Caso 2: $b \in A$, entonces obviamente $b \in N(\epsilon, A)$.

Lo que implica que $B \subset N(\epsilon, A)$............(1). Ahora como $A \subset N(\epsilon, A)$, y $A \subsetneq B$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$..............(2). De (1) y (2), se tiene que $B \in B_\epsilon(A)$ y entonces $B \in \mathcal{S}$ lo que implica que $B \subset U$, y entonces $a \in U$. Por lo tanto $N(\epsilon, A) \subset U$. $\blacksquare$

Definición 19. *Dado un continuo (Y, d') y $g : X \longrightarrow 2^Y$, decimos que:*

- g es semicontinua por abajo en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $U \subset X$ vecindad de x_0 tal que $g(x_0) \subset N(\epsilon, g(x))$ para todo $x \in U$.

- g es semicontinua por arriba en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $U \subset X$ vecindad de x_0 tal que $g(x) \subset N(\epsilon, g(x_0))$ para todo $x \in U$.

Algunos autores dan como definición de semicontinuidad la siguiente:

Definición 20. *Sea (Y, d') un continuo y $g : X \longrightarrow 2^Y$, decimos que:*

- g es semicontinua por abajo en $x_0 \in X$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(x_0)$ y para todo $y \in g(x_0)$ existe $z \in g(x)$ tal que $d'(y, z) < \epsilon$.

- g es semicontinua por arriba en $x_0 \in X$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(x_0)$ y para todo $z \in g(x)$ existe $y \in g(x_0)$ tal que $d'(y, z) < \epsilon$.

No es difícil ver que las dos definiciones son equivalentes. Notemos también que g es semicontinua por arriba y por abajo en $x_0 \in X$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in B_\delta(x_0)$ resulta que $g(x) \subset N(\epsilon, g(x_0))$ y $g(x_0) \subset N(\epsilon, g(x))$, lo que implica que $H(g(x), g(x_0)) < \epsilon$. Por lo que tenemos que g es semicontinua por arriba y por abajo en $x_0 \in X$ si y solo si g es continua en x_0. Decimos que g es semicontinua por arriba o por abajo si lo es en cada punto de X. Luego entonces g es continua si y solo si g es semicontinua por arriba y por abajo.

Teorema 30. *Sea $g : X \longrightarrow 2^Y$. Entonces:*

1. g es semicontinua por abajo en $x_0 \in X$ si y solo si $g(x_0) \subset liminf g(x_n)$ para toda sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \longrightarrow x_0$.

2. g es semicontinua por arriba en $x_0 \in X$ si y solo si $limsup g(x_n) \subset g(x_0)$ para toda sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \longrightarrow x_0$.

..

Demostración.

En efecto, 1. ($\Rightarrow$) Sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Por demostrar: $g(x_0) \subset liminf g(x_n)$. Sea $z \in g(x_0)$ y $\epsilon > 0$. Como g es semicontinua por abajo existe $\delta > 0$ tal que $g(x_0) \subset N(\epsilon, g(x))$ para cada $x \in B_\delta(x_0)$, y como $x_n \longrightarrow x_0$, para esa δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\delta(x_0)$ para cada $n \geq N$. Entonces $g(x_0) \subset N(\epsilon, g(x_n))$ para cada $n \geq N$ por lo que $z \in N(\epsilon, g(x_n))$. Luego existe $y_n \in g(x_n)$ tal que $y_n \in B_\epsilon(z)$. Por lo que $y_n \in B_\epsilon(z) \cap g(x_n)$ para cada $n \geq N$. Por tanto $B_\epsilon(z) \cap g(x_n) \neq \varnothing$ para cada $n \geq N$, entonces $z \in liminf g(x_n)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que g no es semicontinua por abajo en $x_0 \in X$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $x \in B_\delta(x_0)$ tal que $g(x_0) \nsubseteq N(\epsilon, g(x))$. Sean $\delta_n = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $x_n \in B_{1/n}(x_0)$ tal que $g(x_0) \nsubseteq N(\epsilon, g(x_n))$. Entonces podemos tomar $z_n \in g(x_0) - N(\epsilon, g(x_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $g(x_0)$ es compacto, pues es la imagen continua de un cerrado en un Hausdorff, existe una subsucesión $(z_{n_k})_k$ de $(z_n)_n$ tal que $z_{n_k} \longrightarrow z_0$, para algún $z_0 \in g(x_0)$. Luego por construcción $x_{n_k} \longrightarrow x_0$, entonces por la hipótesis $g(x_0) \subset liminf g(x_{n_k})$, por lo que $z_0 \in liminf g(x_{n_k})$. Entonces para $\epsilon/2$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\epsilon/2}(z_0) \cap g(x_{n_k}) \neq \varnothing$ para toda $k \geq N_1$, y como $z_{n_k} \longrightarrow z_0$, para $\epsilon/2$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_k} \in B_{\epsilon/2}(z_0)$ para cada $k \geq N_2$. Sea d' la métrica en Y y $N = max\{N_1, N_2\}$. Sea $m \geq N$, entonces existe $y \in B_{\epsilon/2}(z_0) \cap g(x_{n_m})$ y $d'(z_{n_m}, z_0) < \epsilon/2$. Por tanto $d'(z_{n_m}, y) \leq d'(z_{n_m}, z_0) + d'(z_0, y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Luego entonces $z_{n_m} \in N(\epsilon, g(x_{n_m}))$ lo que es una contradicción. Por tanto g es semicontinua por abajo en x_0.

En efecto, 2. ($\Rightarrow$) Sea $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Sea $z \in limsup g(x_n)$. Por demostrar: $z \in g(x_0) = \overline{g(x_0)}$. Sea $\epsilon > 0$ por hipótesis para $\epsilon/2$ existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \subset N(\epsilon/2, g(x_0))$ para toda $x \in B_\delta(x_0)$. Luego como $x_n \longrightarrow x_0$ para esa δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\delta(x_0)$ para cada $n \geq N$, por lo que $g(x_n) \subset N(\epsilon/2, g(x_0))$ para cada $n \geq N$. Ahora como $z \in limsup g(x_n)$ existe $M \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $B_{\epsilon/2}(z) \cap g(x_n) \neq \varnothing$ para cada $n \in M$. Sea $m \in M$ tal que $m \geq N$; entonces $g(x_m) \subset N(\epsilon/2, g(x_0))$ y $B_{\epsilon/2}(z) \cap g(x_m) \neq \varnothing$.

Sea pues $y \in B_{\epsilon/2}(z) \cap g(x_m)$, por lo que $y \in N(\epsilon/2, g(x_0))$, entonces existe $x \in g(x_0)$ tal que $d^{'}(y,x) < \epsilon/2$. Entonces $d^{'}(z,x) \leq d^{'}(z,y) + d^{'}(y,x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Por tanto $B_\epsilon(z) \cap g(x_0) \neq \varnothing$, entonces $z \in \overline{g(x_0)} = g(x_0)$. Por lo que $limsupg(x_n) \subset g(x_0)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que g no es semicontinua por arriba en $x_0 \in X$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in B_\delta(x_0)$ tal que $g(x) \nsubseteq N(\epsilon, g(x_0))$. Sean $\delta_n = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $x_n \in B_{1/n}(x_0)$ tal que $g(x_n) \nsubseteq N(\epsilon, g(x_0))$. Sea $z_n \in g(x_n) - N(\epsilon, g(x_0))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $z_n \in Y - N(\epsilon, g(x_0))$ que es compacto, pues $N(\epsilon, g(x_0))$ es abierto. Entonces existe $(z_{n_k})_k$ subsucesión tal que $z_{n_k} \longrightarrow z_0$, para algún $z_0 \in Y - N(\epsilon, g(x_0))$. Por lo que $z_0 \nsubseteq N(\epsilon, g(x_0))$, que implica que $z_0 \notin g(x_0)$....(*) Luego como $z_{n_k} \in g(x_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $z_{n_k} \longrightarrow z_0$, entonces por la hipótesis $z_0 \in limsupg(x_n) \subset g(x_0)$. Por lo tanto $z_0 \in g(x_0)$ lo cual contradice (*). Por tanto g es semicontinua por arriba en $x_0 \in X$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Propiedad de Kelley y contractibilidad.

3.1. Mapeos de Whitney.

Definición 21. *Sea 2^X. Un mapeo de Whitney en 2^X es una función continua $\mu : 2^X \longrightarrow [0, \infty)$ que satisface:*

(a)$\mu(\{p\}) = 0$ para todo $p \in X$.

(b)$\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

Analogamente se define mapeos de Whitney en $C(X)$.

Definición 22. *Sea 2^X. Un mapeo de Whitney normalizado en 2^X, es un mapeo de Whitney μ tal que $\mu(X) = 1$.*

Teorema 31. *Todo mapeo de Whitney se puede normalizar.*

Demostración. Sea μ un mapeo de Whitney, sea $p \in X$ entonces $\mu(\{p\}) = 0$. Luego como X es no degenerado $\{p\} \subsetneq X$, luego $\mu(\{p\}) < \mu(X)$. Por tanto $\mu(X) > 0$. Así que podemos tomar la función $\frac{\mu}{\mu(X)} : \phi \longrightarrow [0, 1]$, Afirmación $\frac{\mu}{\mu(X)}$ es un mapeo de Whitney normalizado.

En efecto si $p \in X$,

$\frac{\mu}{\mu(X)}(\{p\}) = \frac{\mu(\{p\})}{\mu(X)} = \frac{0}{\mu(X)} = 0.$

Y si $A \subsetneq B$, $\mu(A) < \mu(B)$ entonces $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} < \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$. Por tanto $\frac{\mu}{\mu(X)}$ es un mapeo de Whitney. Como $\frac{\mu}{\mu(X)}(X) = \frac{\mu(X)}{\mu(X)} = 1$ Entonces $\frac{\mu}{\mu(X)}$ es un mapeo de Whitney normalizado.

■

Teorema 32. *Sea X un continuo, entonces 2^X admite mapeos de Whitney.*

Demostración.

Como X es continuo entonces es métrico y compacto lo que implica que existe $D = \{r_1, r_2, ...\}$ subconjunto denso y numerable de X, si d' es la métrica en X, podemos tomar $d(x, y) = min\{d'(x, y), 1\}$ para cualesquiera $x, y \in X$ la cual genera la misma topología que d' en X. Luego $d(x, y) \leq 1$ para cualesquiera $x, y \in X$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\mu_n : 2^X \longrightarrow [0, 1]$, como $\mu_n(A) = max\{d(a, r_n) : a \in A\} - min\{d(a, r_n) : a \in A\}$, Y definamos $\mu : 2^X \longrightarrow [0, 1]$ por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$.

Afirmación μ es un mapeo de Whitney.

Para demostrar esto necesitamos probar que μ satisface:

(a) μ esta bien definida y es continua.

(b) $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$.

(c) $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subsetneq B$,

En efecto, (a) Primero veamos que μ_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon > 0$ por demostrar existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \epsilon$ entonces $| \mu_n(A) - \mu_n(B) | < \delta$. Como A es compacto existen $a_1, a_2 \in A$ tal que: $d(a_1, r_n) = min\{d(a, r_n) : a \in A\}$ $d(a_2, r_n) = max\{d(a, r_n) : a \in A\}$. Debido a que $H(A, B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$, entonces $a_1, a_2 \in N(\epsilon, B)$, por lo que existen $b_1, b_2 \in B$ tal que $d(a_1, b_1) < \epsilon$ y $d(a_2, b_2) < \epsilon$. Por tanto

$$\begin{aligned} max\{d(a, r_n) : a \in A\} = d(a_2, r_n) &\leq d(a_2, b_2) + d(b_2, r_n) \\ &< \epsilon + max\{d(b, r_n) : b \in B\}....(1) \end{aligned}$$

$$min\{d(b,r_n) : b \in B\} \leq d(b_1,r_n) \leq d(b_1,a_1) + d(a_1,r_n)$$
$$< \epsilon + min\{d(a,r_n) : a \in A\}....(2)$$

Veamos ahora

$$\mu_n(A) - \mu_n(B) = (max\{d(a,r_n) : a \in A\} - min\{d(a,r_n) : a \in A\})$$
$$-(max\{d(b,r_n) : b \in B\} - min\{d(b,r_n) : b \in B)\}),$$

sustituyendo (1) y (2):

$$\mu_n(A) - \mu_n(B) < (\epsilon + max\{d(b,r_n) : b \in B\} - min\{d(a,r_n) : a \in A\})$$
$$-(max\{d(b,r_n) : b \in B\} - (\epsilon + min\{d(a,r_n) : a \in A\})) = 2\epsilon$$

Análogamente partiendo ahora de $B \subset N(\epsilon, A)$, obtenemos $\mu_n(B) - \mu_n(A) < 2\epsilon$.

Por tanto $\mid \mu_n(A) - \mu_n(B) \mid< 2\epsilon$. Luego $\delta = 2\epsilon$. Por tanto μ_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora podemos usar el criterio M de Weierstrass. Como $\{\frac{\mu_n}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas, falta encontrar una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mid \frac{\mu_n(A)}{2^n} \mid\leq M_n(A)$, para toda $A \in 2^X$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, también que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converja. Sea $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $0 \leq \mu_n(A) \leq max\{d(a,r_n) : a \in A\} \leq 1$ (Por la elección de d). Entonces $\mid \frac{\mu_n(A)}{2^n} \mid\leq \frac{1}{2^n}$, Tomemos $M_n = \frac{1}{2^n}$, falta ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converja.

En efecto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = 1,$$

por tanto converge.

Luego $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{2^n}$ esta bien definida y es continua.

En efecto, (b) $\mu_n(\{p\}) = max\{d(a,r_n) : a \in \{p\}\} - min\{d(a,r_n) : a \in \{p\}\}$

$$= d(p,r_n) - d(p,r_n) = 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\mu(\{p\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(\{p\})}{2^n} = 0$.

En efecto, (c) -Afirmación; si $A \subset B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En efecto como $A \subset B$, $\{d(a,r_n) : a \in A\} \subset \{d(b,r_n) : b \in B\}$, entonces $max\{d(a,r_n) : a \in A\} \leq max\{d(b,r_n) : b \in B\}$ y

$min\{d(a, r_n) : a \in A\} \geq min\{d(b, r_n) : b \in B\}$.

Por tanto $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

-Afirmación; Si $A \subsetneq B$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_{n_0}(A) < \mu_{n_0}(B)$. Sea $b_0 \in B - A$. Como A es cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{2\epsilon}(b_0) \cap A = \varnothing$ como D es denso existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_0, r_{n_0}) < \epsilon$. Luego si $d(a, r_{n_0}) \leq \epsilon$ para alguna $a \in A$, entonces $d(a, b_0) \leq d(a, r_{n_0}) + d(r_{n_0}, b_0) < 2\epsilon$ por tanto $a \in B_{2\epsilon}(b_0)$ entonces $a \in B_{2\epsilon}(b_0) \cap A$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\epsilon < min\{d(a, r_{n_0}) : a \in A\}$, además $min\{d(b, r_{n_0}) : b \in B\} \leq d(b_0, r_{n_0}) < \epsilon$ Por tanto $min\{d(b, r_{n_0}) : b \in B\} < min\{d(a, r_{n_0}) : a \in A\}$ Como $A \subsetneq B$ entonces $\{d(a, r_{n_0}) : a \in A\} \subset \{d(b, r_{n_0}) : b \in B\}$, entonces

$max\{d(a, r_{n_0}) : a \in A\} \leq max\{d(b, r_{n_0}) : b \in B\}$

Luego $\mu_{n_0}(A) < \mu_{n_0}(B)$ Ahora combinando las dos afirmaciones anteriores tenemos que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Hemos demostrado $(a), (b)$ y (c) entonces μ es un mapeo de Whitney.

■

Teorema 33. *Sea μ un mapeo de Whitney en 2^X. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ entonces $H(A, B) < \epsilon$.*

Demostración.

Supongamos que el teorema no se cumple.

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $A, B \in 2^X$ con $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ entonces $H(A, B) \geq \epsilon$. Sean $\delta_n = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces existen $A_n, B_n \in 2^X$ tal que $A_n \subset B_n$, $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \delta_n = 1/n$ tal que $H(A, B) \geq \epsilon$. Como $(A_n)_n$, $(B_n)_n \subset 2^X$ y 2^X es compacto entonces existen $(A_{n_k})_k$ y $(B_{n_k})_k$ subsucesiones tales que $A_{n_k} \longrightarrow A$ y $B_{n_k} \longrightarrow B$, para algunos $A, B \in 2^X$ como $A_{n_k} \subset B_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por el Teorema 27, $A \subset B$. Luego como μ es continua $\mu(A_{n_k}) \longrightarrow \mu(A)$ y $\mu(B_{n_k}) \longrightarrow \mu(B)$, entonces $\mu(B_{n_k}) - \mu(A_{n_k}) \longrightarrow \mu(B) - \mu(A)$, pero por construcción $\mu(B_{n_k}) - \mu(A_{n_k}) \longrightarrow 0$. Por unicidad de limite $\mu(B) - \mu(A) = 0$, por tanto $\mu(B) = \mu(A)$, Como $A \subset B$ y $\mu(B) = \mu(A)$ entonces $A = B$. Por tanto $H(A, B) = 0$, pero $H(A_{n_k}, B_{n_k}) \geq \epsilon$ Luego

$$\begin{aligned} \epsilon \leq H(A_{n_k}, B_{n_k}) &\leq H(A_{n_k}, A) + H(A, B_{n_k}) \\ &\leq H(A_{n_k}, A) + H(A, B) + H(B, B_{n_k}) = H(A, B), \end{aligned}$$

Esto ultimo pues cuando $k \longrightarrow \infty$,

$H(A_{n_k}, A) \longrightarrow 0$ y $H(B_{n_k}, B) \longrightarrow 0$, entonces $H(A, B) \geq \epsilon$, luego $\epsilon \leq 0$, lo cual es una contradicción. ■

3.2. El mapeo unión.

Teorema 34. *Si $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y $\psi(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces:*

1. $\psi(\mathcal{A}) \in 2^X$.
2. *Si $\mathcal{A}$ es conexo y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \varnothing$, entonces $\psi(\mathcal{A}) \in C(X)$.*
3. $\psi : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ *es una función continua.*

Demostración.

(1) : Sea $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, luego $\mathcal{A}$ es no vacío, entonces existe $A_0 \in \mathcal{A}$, luego $A_0 \in 2^X$ por tanto $A_0 \neq \varnothing$, entonces $\varnothing \neq A_0 \subset \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \psi(\mathcal{A})$. Claramente $\psi(\mathcal{A}) \subset X$, Sea $a \in \overline{\psi(\mathcal{A})}$, entonces $a \in X$, luego existe $(a_n)_n \subset \psi(\mathcal{A})$ tal que $a_n \longrightarrow a$, como $a_n \in \psi(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces existe $A_n \in \psi(\mathcal{A})$ tal que $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{A}$ es compacto existe $(A_{n_k})_k$ subsucesión de $(A_n)_n$ tal que $A_{n_k} \longrightarrow A$, para algún $A \in \mathcal{A}$, por el Corolario 2 $a \in A$, entonces $a \in \psi(\mathcal{A})$, por tanto $\psi(\mathcal{A})$ es cerrado en X. Hemos probado que $\psi(\mathcal{A})$ es no vacío y cerrado en X, por tanto $\psi(\mathcal{A}) \in 2^X$.

(2) Sea $\mathcal{A}$ conexo y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \varnothing$. Supongamos $\psi(\mathcal{A})$ es no conexo. Entonces existen $H, K \in 2^X$ tal que $\psi(\mathcal{A}) = H \cup K$ tal que $H \cap K = \varnothing$, sea $B \in \mathcal{A} \cap C(X)$, entonces B es conexo y $B \subset H \cup K$, por tanto $B \subset H$ o $B \subset K$ pero no ambos, sin perdida de generalidad podemos suponer que $B \subset H$. Ahora definamos $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset H\}$ y

$\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap K \neq \varnothing\}$.

Por el Teorema 28 $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ son cerrados en 2^X. $\mathcal{S}$ es distinta del vacío pues $B \in \mathcal{S}$.

-Afirmación $\mathcal{R} \neq \varnothing$.

Supongamos que $\mathcal{R} = \varnothing$, entonces todo elemento de $\mathcal{A}$ esta en $\mathcal{S}$, por tanto $\psi(\mathcal{A}) \subset H$ entonces $K = \varnothing$ lo cual es una contradicción.

-Afirmación $\mathcal{S} \cap \mathcal{R} = \varnothing$.

Supongamos que $\mathcal{S} \cap \mathcal{R} \neq \varnothing$, sea $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}$ entonces $\varnothing \neq A \cap K \subset H \cap K$, lo cual es una contradicción.

-Afirmación $\mathcal{S} \cup \mathcal{R} = \mathcal{A}$.

Por construcción $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{S} \cup \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$, solo falta ver que $\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$, sea pues $A \in \mathcal{A}$, si $A \in \mathcal{S}$ ya esta, si $A \notin \mathcal{S}$, entonces $A \not\subset H$, y como $A \subset \psi(\mathcal{A}) = H \cup K$ entonces $A \cap K \neq \varnothing$, por tanto $A \in \mathcal{R}$, por tanto $\mathcal{S} \cup \mathcal{R} = \mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ forman una disconexion para $\mathcal{A}$, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto $\psi(\mathcal{A})$ es conexo.

(3) Sean $\mathcal{A} \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Sea ahora $\mathcal{B} \in B_\epsilon(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \mathcal{B})$ y $\mathcal{B} \subset N(\epsilon, \mathcal{A})$.

Afirmación: $\psi(\mathcal{A}) \subset N(\epsilon, \psi(\mathcal{B}))$.

Sea $a \in \psi(\mathcal{A})$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. Como $\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \mathcal{B})$ entonces $A \in N(\epsilon, \mathcal{B})$, luego existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$, como $a \in A \subset N(\epsilon, B)$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$, entonces $a \in N(\epsilon, \psi(\mathcal{B}))$. Por tanto $\psi(\mathcal{A}) \subset N(\epsilon, \psi(\mathcal{B}))$, por un proceso análogo $\psi(\mathcal{B}) \subset N(\epsilon, \psi(\mathcal{A}))$, luego entonces $H(\psi(\mathcal{A}), \psi(\mathcal{B})) < \epsilon$. Por tanto ψ es uniformemente continua.

■

A la función ψ definida en el Teorema anterior se le conoce como el mapeo unión en 2^{2^X}. Luego $\xi = \psi_{|C^2(X)} : C^2(X) \longrightarrow C(X)$, esta bien definida y es continua, ya que si $\mathcal{A} \in C^2(X) \subset 2^{2^X}$, entonces $\mathcal{A}$ es conexo, además $\mathcal{A} \in 2^{C(X)}$, entonces $\mathcal{A} \subset C(X)$, por lo que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \varnothing$, aplicando la segunda parte del Teorema anterior tenemos que $\xi(\mathcal{A}) \in C(X)$, entonces ξ esta bien definida, además es continua pues es la restricción de una función continua. A la función ξ se le conoce como el mapeo unión en $C^2(X)$.

3.3. Arcos Ordenados.

Definición 23. *Sea 2^X. Dados $A, B \in 2^X$ con $A \subset B$, un arco ordenado de A a B en 2^X es una función continua $\beta : I \longrightarrow 2^X$ tal que $\beta(0) = A$, $\beta(1) = B$ y $\beta(s) \subsetneq \beta(t)$ si $s < t$.*

Analogamente se define un arco ordenado en $C(X)$.

Teorema 35. *Si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Sean A, $B \in C(X)$, tal que $A \subsetneq B$, y sea $\mu : C(X) \longrightarrow I$ un mapeo de Whitney normalizado. Denotemos $I^{'} = [\mu(A), \mu(B)]$. Ahora para cada $t \in I^{'}$ definamos:

$\mathcal{C}(t) = \{C \in C(X) : \mu(C) \leq t$ y $A \subset C \subset B\}$, y

$\beta(t) = \cup\{C : C \in \mathcal{C}(t)\}$.

Afirmación: β es un arco ordenado en $C(X)$.

Entonces necesitamos probar lo siguiente:

$(a)\beta(t) \in C(X)$ para cada $t \in I^{'}$.

$(b)\beta(\mu(A)) = A$, $\beta(\mu(B)) = B$

y $\beta(s) \subset \beta(t)$ para cada $s \leq t$.

$(c)\beta$ es continua.

En efecto, (a) Por la construcción de $\mathcal{C}(t)$ tenemos que $A \in \mathcal{C}(t)$ para cada $t \in I^{'}$, luego $A \in \beta(t)$ para cada $t \in I^{'}$. Por tanto $\beta(t) \neq \varnothing$ para cada $t \in I^{'}$.

Afirmación: $\beta(t)$ es cerrado en X.

Sea $p \in \overline{\beta(t)}$ entonces existe $(p_n)_n \subset \beta(t)$ tal que $p_n \longrightarrow p$, como $p_n \in \beta(t)$ entonces existe $C_n \in \mathcal{C}(t)$ tal que $p_n \in C_n$, esto para cada $n \in \mathbb{N}$, por tanto $(C_n)_n$ es una sucesión en $C(X)$ que es compacto, entonces existe $(C_{n_k})_k$ subsucesión tal que $C_{n_k} \longrightarrow C$, para algún $C \in C(X)$. Luego $p_{n_k} \longrightarrow p$, $C_{n_k} \longrightarrow C$, con $p_{n_k} \in C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces por el corolario 2, $p \in C$.

Falta ver que $C \in \mathcal{C}(t)$, y así tendremos que $p \in \beta(t)$.

En efecto sea $A_{n_k} = A$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego $A_{n_k} \longrightarrow A$, $C_{n_k} \longrightarrow C$ y como $C_{n_k} \in \mathcal{C}(t)$, entonces $A_{n_k} \subset C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego por el Teorema 27, $A \subset C$. Ahora sea $B_{n_k} = B$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $B_{n_k} \longrightarrow B$, $C_{n_k} \longrightarrow C$ y como $C_{n_k} \in \mathcal{C}(t)$ entonces $C_{n_k} \subset B_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego por el Teorema 27 $C \subset B$. También como $C_{n_k} \longrightarrow C$, por la continuidad de μ se tiene que $\mu(C_{n_k}) \longrightarrow \mu(C)$, y como $C_{n_k} \in \mathcal{C}(t)$, entonces $\mu(C_{n_k}) \leq t$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego sea $t_{n_k} = t$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por tanto $\mu(C_{n_k}) \leq t_{n_k}$, entonces $lim(\mu(C_{n_k})) \leq lim(t_{n_k})$, por lo que $\mu(C) \leq t$. Entonces tenemos que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) \leq t$, por tanto $C \in \mathcal{C}(t)$, entonces $C \in \beta(t)$. Luego $p \in \beta(t)$, por tanto $\beta(t)$ es cerrado en X, lo que implica que $\beta(t) \in 2^X$. Por ultimo, como $\beta(t)$ es una unión no vacía de conexos con intersección no vacía, pues todos contienen a A, entonces $\beta(t)$ es conexo. Por tanto $\beta(t) \in C(X)$ para cada $t \in I^{'}$.

En efecto, (b)

- Sea $C \in \mathcal{C}(\mu(A))$, entonces $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) \leq \mu(A)$. Si $A \subsetneq C$, por la segunda propiedad de los mapeos de Whitney $\mu(A) < \mu(C)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $A = C$, luego entonces $\beta(\mu(A)) = A$.

- Sea $C \in \mathcal{C}(\mu(B))$, entonces $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) \leq \mu(B)$, como se puede ver $B \in \mathcal{C}(\mu(B))$ y como $C \subset B$, entonces $B = \cup\{C : C \in \mathcal{C}(\mu(B))\} = \beta(\mu(B))$.

- Sean $s, t \in I^{'}$ tal que $s \leq t$ entonces:

$$\begin{aligned}
\beta(t) = \cup\{C : C \in \mathcal{C}(t)\} &= \cup\{C \in C(X) : \mu(C) \leq t \; y \; A \subset C \subset B\} \\
&= (\cup\{C \in C(X) : \mu(C) \leq s \; y \; A \subset C \subset B\}) \\
&\quad \cup(\cup\{C \in C(X) : s < \mu(C) \leq t \; y \; A \subset C \subset B\}) \\
&= \beta(s) \cup (\cup\{C \in C(X) : s < \mu(C) \leq t \; y \; A \subset C \subset B\}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\beta(s) \subset \beta(t)$.

En efecto, (c)

Sea $t \in I^{'}$ y $(t_n)_n$ una sucesión en $I^{'}$ tal que $t_n \longrightarrow t$, y $\beta(t_n) \longrightarrow D$, $D \in C(X)$, necesitamos demostrar que $D = \beta(t)$ para que β sea continua.

(1) $D \subset \beta(t)$.

Sea $p \in D = liminf \beta(t_n)$, entonces existe $(p_n)_n$ en X tal que $p_n \in \beta(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $p_n \longrightarrow p$, Luego como $p_n \in \beta(t_n)$, entonces existe $C_n \in \mathcal{C}(t_n)$ tal que $p_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(C_n)_n \subset C(X)$ que es compacto, entonces existe $(C_{n_k})_k$ subsucesión tal que $C_{n_k} \longrightarrow C$, para algún $C \in C(X)$, como $p_{n_k} \longrightarrow p$ y $C_{n_k} \longrightarrow C$ con $p_{n_k} \in C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por el Corolario 2, $p \in C$.

Afirmación: $C \in \mathcal{C}(t)$.

Sea $A_{n_k} = A$ para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces $A_{n_k} \longrightarrow A$, $C_{n_k} \longrightarrow C$ y como $C_{n_k} \in \mathcal{C}(t_{n_k})$ entonces $A_{n_k} \subset C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego por el Teorema 27, $A \subset C$. Ahora sea $B_{n_k} = B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces $B_{n_k} \longrightarrow B$, $C_{n_k} \longrightarrow C$ y como $C_{n_k} \in \mathcal{C}(t_{n_k})$ entonces $C_{n_k} \subset B_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego por el Teorema 27, $C \subset B$. Como $C_{n_k} \longrightarrow C$, por la continuidad de μ, $\mu(C_{n_k}) \longrightarrow \mu(C)$, Luego como $C_{n_k} \in \mathcal{C}(t_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(C_{n_k}) \leq t_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y como $t_{n_k} \longrightarrow t$, entonces $\mu(C) \leq t$. Por lo tanto $C \in \mathcal{C}(t)$, luego $C \in \beta(t)$, y como $p \in C$, entonces $p \in \beta(t)$. Por tanto $D \subset \beta(t)$.

(2) $\beta(t) \subset D$.

Sea $p \in \beta(t)$, entonces $p \in C$ para algún $C \in \mathcal{C}(t)$.

Definamos:

$\mathcal{C}_2(t) = \{E \in C(X) : \mu(E) < t \; y \; A \subset E \subset C\}$,

tomemos $F = \overline{\cup\{E : E \in \mathcal{C}_2(t)\}}$.

Afirmación $F = C$.

Como cada elemento de $\mathcal{C}_2(t)$ esta contenido en C que es cerrado, $F \subset C$. Si $F \subsetneq C$, entonces existe $G \in C(X)$ tal que $F \subsetneq G \subsetneq C$. Luego por las propiedades de los mapeos de Whitney, $\mu(G) < \mu(C)$ y como $C \in \mathcal{C}(t)$ entonces $\mu(C) \leq t$, por tanto $\mu(G) < t$. Por lo que $G \subset F$, lo cual es una contradicción. Entonces $F = C$, por lo que $p \in F$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, sea p_n el punto del conjunto:

$F_n = \cup\{E \in C(X) : \mu(E) \leq t_n \; y \; A \subset E \subset C\}$

mas cercano a p.

Afirmación F_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esto se demuestra de forma análoga a lo que se hizo para demostrar que $\beta(t)$ es cerrado, simplemente cambiando t por t_n y la B por la C. Luego como $F_n \subset C(X)$, entonces F_n es compacto, por lo que p_n existe. Claramente se ve que $F_n \subset \beta(t_n)$, por lo que $p_n \in \beta(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación: $p_n \longrightarrow p$.

En efecto como $p \in F$, entonces para $\epsilon > 0$ se tiene que $B_\epsilon(p) \cap (\cup\{E : E \in \mathcal{C}_2(t)\}) \neq \varnothing$. Sea $q \in B_\epsilon(p) \cap (\cup\{E : E \in \mathcal{C}_2(t)\})$, entonces $d(p, q) < \epsilon$ y $q \in (\cup\{E : E \in \mathcal{C}_2(t)\})$. Entonces existe $E_0 \in \mathcal{C}_2(t)$ tal que $q \in E_0$. Como $E_0 \in \mathcal{C}_2(t)$, entonces $\mu(E_0) < t$ y $A \subset E_0 \subset C$, Ahora sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $\mu(E_0) \leq t_n$, esto pues $t_n \longrightarrow t$. Luego $E_0 \subset F_n$, entonces $q \in F_n$. Como p_n es el punto de F_n mas cercano a p entonces $d(p, p_n) \leq d(p, q) < \epsilon$. Por tanto $p_n \longrightarrow p$. Luego como $p_n \in \beta(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in liminf \beta(t_n) = D$. Por lo tanto $\beta(t) \subset D$. De (1) y (2) tenemos que $D = \beta(t)$, por tanto β es continua.

■

Corolario 3. *$C(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean A, $B \in C(X)$. Como $A \subset X$ y $B \subset X$, por el Teorema anterior existe una trayectoria de A a X en $C(X)$ y una trayectoria de B a X en $C(X)$. Ahora si conectamos estas trayectorias obtenemos una nueva trayectoria pero ahora de A a B en $C(X)$. Por tanto $C(X)$ es conexo por trayectorias. ■

Corolario 4. *2^X es conexo por trayectorias.*

Demostración.

Sea $A \in 2^X$, y sea C una componente de A, entonces $C \subset X$ y por el Teorema anterior existe una trayectoria $\lambda_C : I \longrightarrow C(X)$ de C a X.

Definamos: $\lambda(t) = A \cup \lambda_C(t)$ para cada $t \in I$.

Afirmación. $\lambda : I \longrightarrow 2^X$ es una trayectoria de A a X.

En efecto, $\lambda(0) = A \cup \lambda_C(0) = A \cup C = A$, pues $C \subset A$. $\lambda(1) = A \cup \lambda_C(1) = A \cup X = X$. Falta ver que λ es continua, sea pues $t \in I$ y $(t_n)_n \subset I$ tal que $t_n \longrightarrow t$. Como λ_C es continua, entonces $\lambda_C(t_n) \longrightarrow \lambda_C(t)$, Ahora $\lambda(t_n) = A \cup \lambda_C(t_n) \longrightarrow A \cup \lambda_C(t) = \lambda(t)$. Por tanto λ es continua. ■

Teorema 36. *Sea X un continuo y $0 < t_0 < \mu(X)$ donde μ es un mapeo de Whitney. Si A, $B \in \mu^{-1}(t_0)$, $A \cap B \neq \varnothing$ y $A \neq B$, entonces existe una trayectoria g de A a B cuya imagen esta contenida en $\mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$. Si K es una componente de $A \cap B$, entonces g puede ser escogida con la propiedad adicional de que $K \subset L$ para todo L en la imagen de g.*

Demostración.

Podemos suponer que μ es un mapeo de Whitney normalizado. Entonces $0 < t_0 < 1$. Sean A, $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $A \cap B \neq \varnothing$ y $A \neq B$. Luego A, $B \in C(X)$ tales que $A \cap B \in 2^X$, pues es la intersección de cerrados. Sea K una componente de $A \cap B$. Luego K, $A \in C(X)$ y $K \subset A \cap B \subset A$, así que por el Teorema 35, existe un arco ordenado $\beta_1 : I \longrightarrow C(X)$ de K a A. Como para cada $t \in I$ $\beta_1(t) \subset A$ entonces $\beta_1(t) \subset C(A)$, por lo que: $\beta_1 : I \longrightarrow C(A)$. Análogamente existe un arco ordenado $\beta_2 : I \longrightarrow C(B)$ de K a B. Notemos que para t, $s \in I$, $\beta_1(t) \subset A$ y $\beta_2(s) \subset B$, entonces $\beta_1(t) \cup \beta_2(s) \subset A \cup B$, y como $K \subset \beta_1(t)$ y $K \subset \beta_2(t)$, entonces $\beta_1(t) \cup \beta_2(s)$ es una unión de conexos con intersección distinta del vacío; por tanto

$\beta_1(t)\cup\beta_2(s) \subset C(A\cup B)$.........(1) Si fijamos $t \in I$ y consideramos $\beta_1(t)\cup\beta_2(s)$ para cada $s \in I$, Entonces tenemos que $\beta_1(t)\cup\beta_2 : I \longrightarrow C(A\cup B)$, luego $\beta_1(t)\cup\beta_2(0) = \beta_1(t)\cup K \subset A\cup K = A$, lo que implica que:

$\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(0)) \leq \mu(A) = t_0$,

Además $\beta_1(t) \cup \beta_2(1) = \beta_1(t) \cup B \supset B$, por lo que $\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(1)) \geq \mu(B) = t_0$,

Lo que implica que

$t_0 \in I' = [\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(0)), \mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(1))]$.

Luego entonces $\mu \circ (\beta_1(t)\cup\beta_2) : I \longrightarrow I'$, y es continua pues es la composición de continuas. Ahora utilizando el Teorema del valor intermedio, existe $s \in I$ tal que $\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(s)) = t_0$, Como s depende de t, entonces para cada $t \in I$ existe $s_t \in I$ tal que: $\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(s_t)) = t_0$

Luego entonces $\beta_1(t) \cup \beta_2(s_t) \in \mu^{-1}(t_0)$............(2)

Por (1) y (2) tenemos que $\beta_1(t) \cup \beta_2(s_t) \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$.

Afirmación: $g : I \longrightarrow \mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$ definida como: $g(t) = \beta_1(t) \cup \beta_2(s_t)$ es una trayectoria de B a A cuya imagen esta en $\mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$.

En efecto $g(0) = \beta_1(0)\cup\beta_2(s_0) = K\cup\beta_2(s_0) \subset K\cup B = B$, entonces $g(0) \subset B$, por lo tanto $\mu(g(0)) \leq \mu(B)$ pero $\mu(g(0)) = t_0$ pues así construimos g, y $\mu(B) = t_0$ pues a B la tomamos en $\mu^{-1}(t_0)$, Luego entonces $t_0 = \mu(g(0)) \leq \mu(B) = t_0$, Por lo tanto $\mu(g(0)) = \mu(B)$ y entonces $g(0) = B$. Por otro lado $g(1) = \beta_1(1) \cup \beta_2(s_1) = A \cup \beta_2(s_1) \supset A$, Luego $\mu(A) \leq \mu(g(1))$ y como $\mu(A) = t_0$, pues A la tomamos en $\mu^{-1}(t_0)$, y $\mu(g(1)) = t_0$ por construcción, entonces $t_0 = \mu(A) \leq \mu(g(1)) = t_0$, Por lo tanto $\mu(A) = \mu(g(1))$, entonces $A = g(1)$. Falta ver que g es continua: Sea pues $t \in I$ y $(t_n)_n \subset I$ tal que $t_n \longrightarrow t$. Luego para cada t_n existe $s_{t_n} \in I$ tal que $\mu(\beta_1(t_n) \cup \beta_2(s_{t_n})) = t_0$, Podemos suponer sin perdida de generalidad que $s_{t_n} \longrightarrow r$ para algún $r \in I$. Tenemos entonces que: $t_n \longrightarrow t$ y $s_{t_n} \longrightarrow r$ en el intervalo I. De la continuidad de β_1 y β_2 tenemos que $\beta_1(t_n) \longrightarrow \beta_1(t)$ y $\beta_2(s_{t_n}) \longrightarrow \beta_2(r)$, Por lo que $\beta_1(t_n) \cup \beta_2(s_{t_n}) \longrightarrow \beta_1(t) \cup \beta_2(r)$, Entonces $g(t_n) \longrightarrow \beta_1(t_n) \cup \beta_2(r)$, Luego por la continuidad de μ, $\mu(g(t_n)) \longrightarrow \mu(\beta_1(t_n) \cup \beta_2(r))$, y como $\mu(g(t_n)) = t_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(r)) = t_0 = \mu(g(t))$........(3)

- Si $r \leq s_t$, entonces $\beta_2(r) \subset \beta_2(s_t)$ pues β_2 es un arco ordenado, luego $\beta_1(t) \cup \beta_2(r) \subset \beta_1(t) \cup \beta_2(s_t) = g(t)$, y como $\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(r)) = \mu(g(t))$ por (3), entonces $\beta_1(t) \cup \beta_2(r) = g(t)$.

- Ahora si $s_t \leq r$, entonces $\beta_2(s_t) \subset \beta_2(r)$ pues β_2 es un arco ordenado, lo que implica que $\beta_1(t) \cup \beta_2(r) \supset \beta_1(t) \cup \beta_2(s_t) = g(t)$, y como $\mu(\beta_1(t) \cup \beta_2(r)) = \mu(g(t))$ por (3), entonces $\beta_1(t) \cup \beta_2(r) = g(t)$, Luego entonces $g(t_n) \longrightarrow g(t)$, por tanto g es continua. Ahora, notemos que para cada $t \in I$: $K = K \cup K \subset \beta_1(t) \cup \beta_2(s_t) = g(t)$, Entonces $K \subset L$ para cada L en la imagen de g.

■

Teorema 37. *Sean A, $B \in C(X)$ tal que $A \subset B$, y $\mu : C(X) \longrightarrow I$ un mapeo de Whitney. Si $\beta : I \longrightarrow C(X)$ es un arco ordenado de A a B, entonces para todo $t \in [\mu(A), \mu(B)]$ existe $s \in I$ tal que $(\mu \circ \beta)(s) = t$.*

Demostración.

La función $(\mu \circ \beta) : I \longrightarrow I$ es continua pues μ y β lo son. Luego $(\mu \circ \beta)(0) = \mu(\beta(0)) = \mu(A)$ y

$(\mu \circ \beta)(1) = \mu(\beta(1)) = \mu(B)$,

Por lo que la imagen de $\mu \circ \beta$ es el intervalo $[\mu(A), \mu(B)]$. Por el teorema del valor intermedio tenemos que para $t \in [\mu(A), \mu(B)]$ existe $s \in I$ tal que $(\mu \circ \beta)(s) = t$. ■

3.4. Contractibilidad.

Definición 24. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una homotopía es una función continua $h : X \times I \longrightarrow Y$, Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X \longrightarrow Y$ son dos funciones continuas tales que $h(x, 0) = f(x)$ y $h(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, entonces decimos que h es una homotopía de f a g, o que f y g son homotópicos.*

Podemos interpretar esta definición como que f y g son homotópicos si podemos deformar f continuamente hasta llegar a g.

Definición 25. *Un espacio topológico X es contraible si la identidad $i : X \longrightarrow X$ es homotópica a una función constante.*

Podemos interpretar la definición anterior diciendo que un espacio topológico X es contraible si podemos comprimirlo continuamente hasta llevarlo a un punto de X.

Definición 26. *Sea Y un espacio topológico y X un subespacio de Y. Decimos que X es contraible en Y si la función inclusión $i : X \longrightarrow Y$ dada por $i(x) = x$ es homotópica a una función constante de X en Y.*

En [1] se prueba el siguiente teorema:

Teorema 38. *(Wojdyslawski). Si X es un continuo localmente conexo entonces 2^X y $C(X)$ son contraibles.*

Teorema 39. *Si λ es un arco ordenado en 2^X tal que $\lambda(0) \in C(X)$.*

Entonces $\lambda(t) \in C(X)$ para toda $t \in I$.

Demostración. Observemos que para todo $t \in I$, $\lambda(0) \subset \lambda(t)$. Supongamos que existe $t \in I$ tal que $\lambda(t)$ no es conexo. Entonces existen U, $V \in 2^X$ tales que $\lambda(t) = U \cup V$ y $U \cap V = \varnothing$. Dado que $\lambda(0)$ es conexo, podemos suponer sin perder generalidad que $\lambda(0) \subset U$.

Sean: $\mathcal{S} = \{A \in 2^X : A \subset U\}$, y

$\mathcal{R} = \{A \in 2^X : A \cap V \neq \varnothing\}$,

Y consideremos $H = \lambda^{-1}(\mathcal{S})$, $K = \lambda^{-1}(\mathcal{R})$. Entonces H y K son cerrados en I. Además, $0 \in H$ y $t \in K$ por lo que H y K son no vacíos. Supongamos $H \cap K \neq \varnothing$, y tomemos $s \in H \cap K$, entonces $\varnothing \neq \lambda(s) \cap V \subset U \cap V = \varnothing$, lo cual es un absurdo. Por tanto $H \cap K = \varnothing$. Afirmamos que $H \cup K = I$.

En efecto sea $s \in I$. Si $s \leq t$, entonces $\lambda(s) \subset \lambda(t) = U \cup V$ por lo que $\lambda(s) \subset U$, o $\lambda(s) \cap V \neq \varnothing$, así que $s \in H \cup K$. Si $s \geq t$, entonces $\lambda(0) \subset \lambda(t) = U \cup V \subset \lambda(s)$, así que $\varnothing \neq V \subset \lambda(s)$, de aquí que $s \in K$. Por tanto $H \cup K = I$. Concluimos entonces que $H \cup K$ es una disconexion de I, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $\lambda(t) \in C(X)$. ■

Lema 14. *Si X es contraible en Y, Y es conexo por trayectorias y $y_0 \in Y$. Entonces existe una homotopía $h : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $h(x, 0) = x$ y $h(x, 1) = y_0$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que X es contraible en Y. Entonces existe una homotopía $h_1 : X \times I \longrightarrow Y$ y $y_1 \in Y$ tales que $h_1(x, 0) = x$ y $h_1(x, 1) = y_1$ para todo $x \in X$. Sea $y_0 \in Y$, como Y es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $h_2 : I \longrightarrow Y$ tal que $h_2(0) = y_1$ y $h_2(1) = y_0$. Para cada $(x, t) \in X \times I$ definimos:

$h(x,t) = h_1(x, 2t)$ *si* $0 \leq t \leq 1/2$

y

$h(x,t) = h_2(2t-1)$ *si* $1/2 \leq t \leq 1$

entonces $h(x,0) = h_1(x,0) = x$ y $h(x,1) = h_2(1) = y_0$ para toda $x \in X$, luego claramente h es continua, pues h esta formada por funciones continuas pegadas en un punto, por tanto h es una homotopía. ■

El siguiente teorema fue demostrado por kelley en [5].

Teorema 40. *Para todo continuo X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $F_1(X)$ *es contraible en* $C(X)$.
2. $F_1(X)$ *es contraible en* 2^X.
3. $C(X)$ *es contraible.*
4. 2^X *es contraible.*

Demostración.

(1. $\Rightarrow$ 2.). Supongamos que $F_1(X)$ es contraible en $C(X)$, luego existe una homotopía $h : F_1(X) \times I \longrightarrow C(X)$ y $A_0 \in C(X)$ tal que $h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h(\{x\}, 1) = A_0$, para todo $x \in F_1(X)$. Como $C(X) \subset 2^X$ la función h es también una función $h : F_1(X) \times I \longrightarrow 2^X$, por tanto $F_1(X)$ es contraible en 2^X.

(4. $\Rightarrow$ 2.). Supongamos 2^X es contraible. Luego existe una homotopía $h : 2^X \times I \longrightarrow 2^X$ y $A_0 \in 2^X$ tal que $h(A, 0) = A$ y $h(A, 1) = A_0$ para todo $A \in 2^X$. Restringiendo h a $F_1(X) \times I$ obtenemos $h_1 = h_{|F_1(X) \times I} : F_1(X) \times I \longrightarrow 2^X$. Luego $h_1(\{x\}, 0) = h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h_1(\{x\}, 1) = h(\{x\}, 1) = A_0$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$. Por tanto $F_1(X)$ es contraible en 2^X.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Supongamos $C(X)$ es contraible, entonces existe una homotopía $h : C(X) \times I \longrightarrow C(X)$ y $A_0 \in C(X)$ tal que $h(A, 0) = A$ y $h(A, 1) = A_0$ para todo $A \in C(X)$. Restringiendo h a $F_1(X) \times I$ obtenemos $h_1 = h_{|F_1(X) \times I} : F_1(X) \times I \longrightarrow C(X)$. Luego $h_1(\{x\}, 0) = h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h_1(\{x\}, 1) = h(\{x\}, 1) = A_0$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$. Por tanto $F_1(X)$ es contraible en $C(X)$.

(2. $\Rightarrow$ 4.) y (2. $\Rightarrow$ 3.)Supongamos $F_1(X)$ es contraible en 2^X. Como 2^X es conexo por

trayectorias, por el lema 14, existe una homotopía $h : F_1(X) \times I \longrightarrow 2^X$ tal que $h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h(\{x\}, 1) = X$ para todo $\{x\} \in F_1(X)$. Ahora definamos para cada $(A, t) \in 2^X \times I$:

$F(A, t) = \bigcup\{h(a, s) \in 2^X : a \in A \ y \ 0 \leq s \leq t\}$.

Luego:

(a) $F(A, t) \in 2^X$ para toda $(A, t) \in 2^X \times I$.

Sea $(A, t) \in 2^X \times I$ y $a \in A$, luego $\varnothing \neq \{a\} = h(a, 0) \subset F(A, t)$ entonces $F(A, t) \neq \varnothing$. $F(A, t) \subset X$, falta probar que es cerrado en X. Como $\{h(a, s) \in 2^X : a \in A \ y \ 0 \leq s \leq t\} = h(A \times [0, t])$ y $A \times [0, t]$ es cerrado en $X \times I$ y entonces compacto, luego $h(A \times [0, t])$ es la imagen continua de un compacto en un Hausdorf por tanto es cerrada, entonces $h(A \times [0, t]) \in 2^{2^X}$. De manera que $F(A, t) = \bigcup(h(A \times [0, t])) = \psi(h(A \times [0, t])) \in 2^X$ por el Teorema 34. Por tanto $F : 2^X \times I \longrightarrow 2^X$.

(b) $F(A, 0) = A$ para toda $A \in 2^X$. Sea $A \in 2^X$. Luego $F(A, 0) = \bigcup\{h(a, s) : a \in A \ y \ 0 \leq s \leq 0\}$

$$= \bigcup\{h(a, 0) : a \in A\} = \bigcup\{\{a\} : a \in A\} = A.$$

(c) $F(A, 1) = X$ para toda $A \in 2^X$ Sea $A \in 2^X$, entonces $F(A, 1) = \bigcup\{h(a, s) : a \in A \ y \ 0 \leq s \leq 1\} \supset h(a, 1) = X$. Por tanto $F(A, 1) = X$.

(d) F es continua. Sea $\epsilon > 0$, por la continuidad uniforme de h, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_1, x_2) < \delta$ y $\mid s_1 - s_2 \mid< \delta$ entonces $H(h(x_1, s_1), h(x_2, s_2)) < \epsilon$. Sean A y $B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta$ y sean $t_1, t_2 \in I$ tales que $\mid t_1 - t_2 \mid< \delta$, Por demostrar que $H(F(A, t_1), F(B, t_2)) < \epsilon$. Sea $x \in F(A, t_1)$, entonces $x \in h(a, s_1)$ para alguna $a \in A$ y $s_1 \in [0, t_1]$. Por hipótesis tenemos que $H(A, B) < \delta$ entonces $a \in A \subset N(\delta, B)$, por tanto existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Sea $s_2 = min\{s_1, t_2\}$, si $s_1 \leq t_2$, entonces $s_2 = s_1$, por tanto $\mid s_1 - s_2 \mid= 0 < \delta$, si $t_2 \leq s_1$, entonces $s_2 = t_2$ y $\mid s_1 - s_2 \mid=\mid s_1 - t_2 \mid= s_1 - t_2 \leq t_1 - t_2 =\mid t_1 - t_2 \mid< \delta$, entonces en ambos casos $\mid s_1 - s_2 \mid< \delta$, por tanto por hipótesis $H(h(a, s_1), h(b, s_2)) < \epsilon$, luego $x \in N(\epsilon, h(b, s_2)) \subset N(\epsilon, F(B, t_2))$, entonces $F(A, t_1) \subset N(\epsilon, F(B, t_2))$, análogamente $F(B, t_2) \subset N(\epsilon, F(A, t_1))$, por tanto $H(F(A, t_1), F(B, t_2)) < \epsilon$, por tanto F es uniformemente continua.

(e) Si $A \in 2^X$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, entonces $F(A, t_1) \subset F(A, t_2)$. Sean $A \in 2^X$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Entonces

$F(A, t_1) = \bigcup\{h(a, s) : a \in A \, y \, 0 \leq s \leq t_1\}$

$$\subset \bigcup\{h(a,s) : a \in A\ y\ 0 \leq s \leq t_2\} = F(A,t_2)$$

(f) Si $A \in C(X)$, entonces $F(A,t) \in C(X)$ para toda $t \in I$. Sea $A \in C(X)$, para cada $t \in I$ definamos $\lambda_A(t) = F(A,t)$, por las propiedades de la $(a)-(e)$ resulta que $\lambda_A : I \longrightarrow 2^X$ es un arco ordenado de A a X en 2^X. Pero $\lambda_A(0) = A \in C(X)$, entonces por el Teorema 39, $\lambda_A(t) \in C(X)$ para toda $t \in I$, luego $F(A,t) \in C(X)$ para toda $t \in I$. Por las propiedades de la $(a)-(d)$ tenemos que 2^X es contraible, y por las propiedades (e) y (f) $C(X)$ es contraible. ■

Corolario 5. *Si X es contraible, entonces 2^X y $C(X)$ son contraibles.*

Demostración.

Si X es contraible $F_1(X)$ es contraible pues son isométricas, luego $F_1(X)$ es contraible en cualquier espacio que lo contenga, por tanto $F_1(X)$ es contraible en $C(X)$ luego por el Teorema anterior, 2^X y $C(X)$ son contraibles. ■

3.5. Motivación de la propiedad de Kelley.

Nuestro interés se centra en encontrar condiciones en X que nos impliquen que sus hiperespacios sean contraibles. Sean pues A y $B \in C(X)$ tales que $A \subset B$, por el Teorema 35 podemos encontrar un arco ordenado de A a B en $C(X)$, $\lambda : I \longrightarrow C(X)$ tal que $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subset \lambda(t)$ si $s \leq t$, luego a $\lambda(s)$ tal que $0 < s < 1$ le llamaremos inflada de A, entonces lo que el Teorema 35 nos dice, es que dados dos subcontinuos A y B podemos inflar A hasta llegar a B.

Si para cada $A \in C(X)$ pudiéramos fijar una inflada de A a X, es decir fijar un arco ordenado $\lambda_A : I \longrightarrow C(X)$ de tal manera que a conjuntos cercanos A y B le toquen infladas también cercanas, a las cuales le llamaremos infladas parejas, entonces podemos definir $F : C(X) \times I \longrightarrow C(X)$ tal que $F(A,t) = \lambda_A(t)$, luego como las infladas son cercanas F seria continua, y $F(A,0) = \lambda_A(0) = A$ y $F(A,1) = X$ para toda $A \in C(X)$, por tanto F seria una contracción, luego $C(X)$ será contraible.

Ahora supongamos que $C(X)$ es contraible, luego por el Teorema 40 $F_1(X)$ es contraible en $C(X)$, entonces podemos definir la función F usada en la prueba (2. $\Rightarrow$ 4.), luego por la propiedad (e) para cada $A \in C(X)$, la función $\lambda_A : I \longrightarrow C(X)$ dada por $\lambda_A(t) = F(A,t)$

para cada $t \in I$ es un arco ordenado de A a X, entonces si $B \in C(X)$ esta cercano a A, por la continuidad de F, $\lambda_A(t)$ esta cercano de $\lambda_B(t)$ para toda $t \in I$, entonces podemos definir infladas parejas en $C(X)$.

Esto nos muestra que la contractibilidad de $C(X)$ equivale a tener infladas parejas para los elementos de $C(X)$.

Kelley en 1942, encontró una propiedad que nos garantiza que hay infladas parejas, dicha propiedad en su memoria es llamada propiedad de Kelley, la cual estudiaremos a continuación.

3.6. La propiedad de Kelley.

Definición 27. *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $a, b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.*

Cuando X tiene la propiedad de Kelley se dice que X es un continuo de Kelley. En 1977, Roger Wardle introduce una versión puntual de la propiedad de Kelley, la cual enunciamos a continuación:

Definición 28. *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley en $a \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon, a) > 0$ tal que para todo $b \in B_\delta(a)$ y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.*

Si X es un continuo que tiene la propiedad de Kelley en $a \in X$, diremos que X es de Kelley en a.

Teorema 41. *Si X es localmente conexo en $a \in X$, entonces X es de Kelley en a.*

Demostración.

Sea $a \in X$ y $\epsilon > 0$. Como X es localmente conexo en $a \in X$, entonces existe V abierto y conexo, tal que $a \in V \subset B_{\epsilon/2}(a)$, luego existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset V$ pues V es abierto. Sea $b \in B_\delta(a)$ y $A \in C(X)$ tal que $a \in A$, necesitamos demostrar que existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$. Sea $B = \overline{V} \cup A$, entonces $B \in C(X)$ y $b \in B$, luego $B \subset B_\epsilon(a) \cup A \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset B \subset N(\epsilon, B)$. Por tanto $H(A, B) < \epsilon$. Entonces X es de Kelley en a. ■

Corolario 6. *Si X es localmente conexo, entonces es de Kelley.*

Teorema 42. *Un continuo es de Kelley si y solo si, es de Kelley en todos sus puntos.*

Demostración.

($\Leftarrow$) Supongamos X no es de Kelley, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y existe $A \in C(X)$ con $a \in A$ tal que para todo $B \in C(X)$ con $b \in B$ se tiene que $H(A,B) \geq \epsilon$. Sea $\delta_n = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces existen $a_n, b_n \in X$ tal que $d(a_n, b_n) < 1/n$ y existe $A_n \in C(X)$ con $a_n \in A_n$ tal que para todo $B \in C(X)$ con $b_n \in B$, $H(A_n, B) \geq \epsilon$. Como X es compacto, existen subsucesiones $(a_{n_k})_k$ y $(b_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ respectivamente, tales que $a_{n_k} \longrightarrow a$ y $b_{n_k} \longrightarrow b$ para $a, b \in X$ Supongamos sin perdida de generalidad que la subsucesión $(A_{n_k})_k$ de $(A_n)_n$ converge a un elemento $A \in C(X)$. Luego $a_{n_k} \longrightarrow a$, $A_{n_k} \longrightarrow A$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$, entonces por el corolario 2, $a \in A$. Como X es de Kelley en a, para $\epsilon/2$, existe $\delta = \delta(a, \epsilon/2) > 0$ tal que para todo $d \in B_\delta(a)$ y para todo $D \in C(X)$ con $a \in D$, existe $E \in C(X)$ con $d \in E$ tal que $H(D,E) < \epsilon/2$. Luego como $\delta_n \longrightarrow 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \delta_{n_m} < \delta$. Entonces como $a_{n_k} \longrightarrow a$ y $b_{n_k} \longrightarrow b$, $d(a_{n_k}, b_{n_k}) \longrightarrow d(a,b)$, pero $d(a_{n_k}, b_{n_k}) < 1/n_k$ por tanto $d(a_{n_k}, b_{n_k}) \longrightarrow 0$. Luego por la unicidad del limite $d(a,b) = 0$, entonces $a = b$. Por tanto $b_{n_k} \longrightarrow a$ así pues para δ_{n_m} existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_k} \in B_{\delta_{n_m}}(a) \subset B_\delta(a)$ para todo $k \geq N_1$. Como $A_{n_k} \longrightarrow A$ para $\epsilon/2$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_{n_k}) < \epsilon/2$ para todo $k \geq N_2$. Sea $N = max\{N_1, N_2\}$, sea $k \geq N$, entonces $b_{n_k} \in B_\delta(a)$ y $A \in C(X)$ con $a \in A$, luego por la propiedad de Kelley en a, existe $B_{n_k} \in C(X)$ con $b_{n_k} \in B_{n_k}$ tal que $H(A, B_{n_k}) < \epsilon/2$.

Ahora:

$H(A_{n_k}, B_{n_k}) \leq H(A_{n_k}, A) + H(A, B_{n_k}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Lo cual es una contradicción a la elección de A_{n_k}. Por tanto X es de Kelley.

($\Rightarrow$) Sea $a \in X$ y $\epsilon > 0$. Como X es de Kelley existe $\delta > 0$ tal que para $c, d \in X$ con $d(c,d) < \delta$, y para todo $A \in C(X)$ con $c \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $d \in B$ y $H(A,B) < \epsilon$; En particular para todo $b \in X$ con $d(a,b) < \delta$, ($b \in B_\delta(a)$) y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \epsilon$, por tanto X es de Kelley en a.

■

3.7. Equivalencia con sucesiones.

Teorema 43. *Sea $a \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es de Kelley en a.*

(2) *Para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$ y para toda sucesión $(a_n)_n$ en X*

tal $a_n \longrightarrow a$, existe una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$

tal que $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \longrightarrow A$.

Demostración.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X no es de Kelley en a. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $b \in B_\delta(a)$ y existe $A \in C(X)$ con $a \in A$, tal que para todo $B \in C(X)$ con $b \in B$, $H(A, B) \geq \epsilon$. Sean $\delta_n = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $b_n \in B_{1/n}(a)$ y existe $A_n \in C(X)$ con $a \in A_n$ tal que para toda $B \in C(X)$ con $b_n \in B$ se tiene que $H(A_n, B) \geq \epsilon$.

Afirmación, sea $\text{sub}(a) = \{A \in C(X) : a \in A\}$, luego el $\text{sub}(a)$ es cerrado en $C(X)$.

En efecto $C(X)-$ $\text{sub}(a) = \{A \in C(X) : A \notin sub(a)\}$

$$= \{A \in C(X) : a \notin A\}$$

$$= \{A \in C(X) : A \subset C(X) \;\; y \;\; a \notin A\}$$

$$= \{A \in C(X) : A \subset X - \{a\}\}.$$

Como $\{a\}$ es cerrado en X entonces $X - \{a\}$ es abierto en X, entonces por el Teorema 28, $C(X) - sub(a)$ es abierto en $C(X)$, por tanto $sub(a)$ es cerrado en $C(X)$. Ahora como $(A_n)_n$ es una sucesión en el compacto $sub(a)$, existe una subsucesión $(A_{n_k})_k$ de $(A_n)_n$ tal que $A_{n_k} \longrightarrow A$ para algún $A \in C(X)$ con $a \in A$. Además $H(A_{n_k}, B) \geq \epsilon$ para todo $B \in C(X)$ con $b_{n_k} \in B$ y $b_{n_k} \in B_{1/n}(a)$.....(*) Tenemos que $A \in sub(a)$ y $(b_{n_k})_k \subset X$ es tal que $b_{n_k} \longrightarrow a$, por construcción, luego como se cumple (2) existe $(B_{n_k})_k \subset C(X)$ tal que $b_{n_k} \in B_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $B_{n_k} \longrightarrow A$. Como $A_{n_k} \longrightarrow A$ para $\epsilon/2$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_{n_k}, A) < \epsilon/2$ para toda $k \geq N_1$. Como $B_{n_k} \longrightarrow A$ para $\epsilon/2$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_{n_k}, A) < \epsilon/2$ para todo $k \geq N_2$. Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ y sea $k \geq N$,

$H(A_{n_k}, B_{n_k}) \leq H(A_{n_k}, A) + H(A, B_{n_k}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$

Entonces encontramos $B_{n_k} \in C(X)$ con $b_{n_k} \in B_{n_k}$ y $b_{n_k} \in B_{1/n_k}(a)$ tal que $H(A_{n_k}, B_{n_k}) < \epsilon$, lo cual contradice $(*)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sean $A \in C(X)$ con $a \in A$ y $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \longrightarrow a$. Queremos probar que existe $(A_n)_n \subset X$ tal que $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \longrightarrow A$.

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n \in C(X)$ como:

$H(A, A_n) = min\{H(A, B) : B \in C(X) \ \ y \ \ a_n \in B\}$

Afirmación:

1. El mínimo existe.

2. $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. $A_n \longrightarrow A$.

Demostración

(1): Como A_n se escoge de modo que $H(A, A_n)$ es igual a la distancia de A al conjunto $sub(a_n)$ el cual es compacto en $C(X)$, entonces el mínimo existe.

(2): Como el mínimo de $\{H(A, B) : B \in C(X) \ \ y \ \ a_n \in B\}$ existe, entonces existe $B_0 \in C(X)$ con $a_n \in B_0$, tal que $H(A, B_0) \leq H(A, B)$ para todo $B \in C(X)$ con $a_n \in B$, por tanto $A_n = B_0$ entonces $a_n \in A_n$.

(3): Sea $\epsilon > 0$, Como X es de Kelley en a, existe $\delta > 0$ tal que para todo $b \in B_\delta(a)$ existe $B \in C(X)$ con $b \in B$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Como $a_n \longrightarrow a$ para esta δ, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B_\delta(a)$ para todo $n \geq N_1$. Luego para todo $n \geq N_1$ existe $B_n \in C(X)$ con $a_n \in B_n$ tal que $H(A, B_n) < \epsilon$. Por como se construye A_n tenemos que $H(A, A_n) \leq H(A, B_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N_1$. Por tanto $A_n \longrightarrow A$.

■

3.8. La Función Sub.

Anteriormente definimos el $sub(a) = \{A \in C(X) : a \in A\}$, enseguida trabajaremos con que este conjunto. Mostraremos propiedades importantes que relacionan este conjunto con la propiedad de Kelley:

Teorema 44. *Para cada $a \in X$ el $sub(a) \in C^2(X)$.*

Demostración. Sea $a \in X$.

-Afirmación $sub(a) \subset C(X)$ y es no vacío. El conjunto $\{a\} \in C(X)$, y $\varnothing \neq \{a\} \subset sub(a)$, además claramente $sub(a) \subset C(X)$.

-Afirmación $sub(a)$ es cerrado en $C(X)$.

En efecto
$$\begin{aligned} C(X) - sub(a) &= \{A \in C(X) : A \notin sub(a)\} \\ &= \{A \in C(X) : a \notin A\} \\ &= \{A \in C(X) : A \subset X \ \ y \ \ a \notin A\} \\ &= \{A \in C(X) : A \subset X - \{a\}\}. \end{aligned}$$

Como $\{a\}$ es cerrado en X, entonces $X - \{a\}$ es abierto, luego por el Teorema 28, $C(X) - sub(a)$ es abierto en $C(X)$ entonces $sub(a)$ es cerrado en $C(X)$.

-Afirmación el $sub(a)$ es conexo por trayectorias.

Sean $A, B \in sub(a)$, Si $A \subset B$, entonces por el Teorema 35, existe un arco ordenado $\lambda : I \longrightarrow C(X)$ de A a B.

Afirmación λ es una trayectoria en $sub(a)$. En efecto, sea $C \in Im\lambda$, luego existe $s \in I$ tal que $\lambda(s) = C$. Como $0 \leq s$ y λ es un arco ordenado, tenemos que $a \in A = \lambda(0) \subset \lambda(s) = C$, luego $C \in sub(a)$, por tanto $Im\lambda \subset sub(a)$. Ahora supongamos $A \nsubseteq B$. Como $\{a\} \subset A$ y $\{a\} \subset B$ existe una trayectoria de $\{a\}$ a A en el $sub(a)$ y otra de $\{a\}$ a B en el $sub(a)$, esto por los párrafos anteriores, luego conectando estas trayectorias tenemos una de A a B contenida en el $sub(a)$, por tanto el $sub(a)$ es conexo por trayectorias. Por tanto es conexo. Luego el $sub(a) \in C^2(X)$, por tanto $sub(a) : X \longrightarrow C^2(X)$. ■

Ahora sabemos que Sub es una función de X en $C^2(X)$, es natural preguntarnos si Sub es una función continua, verifiquemos si es semicontinua por arriba y por abajo.

Teorema 45. *La función Sub es semicontinua por arriba en cada $a \in X$.*

Demostración.

Sean $a \in X$ y $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \longrightarrow a$. Por demostrar que $limsupSub(a_n) \subset Sub(a)$. Sea pues $A \in limsupSub(a_n)$, entonces $A \in C(X)$ y existen $n_1 < n_2 < ...$ y puntos $A_{n_k} \in$

$Sub(a_{n_k})$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_k} \longrightarrow A$. Entonces $a_{n_k} \longrightarrow a$ y $A_{n_k} \longrightarrow A$ con $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego por el Corolario 2, $a \in A$, entonces $A \in Sub(a)$, lo que implica que $limsupSub(a_n) \subset Sub(a)$. Por lo tanto Sub es una función semicontinua por arriba en cada $a \in X$. ■

Teorema 46. *Sea $a \in X$. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *Sub es semicontinua por abajo en a.*
2. *Sub es continua en a.*
3. *X es de Kelley en a.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2). Por el Teorema anterior Sub es semicontinua por arriba en a. Entonces Sub es semicontinua por arriba y por abajo en a, entonces Sub es continua en a.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por hipótesis tenemos que el Sub es continua en a, pero esto es si y solo si Sub es semicontinua por arriba y por abajo en a, entonces sub es semicontinua por abajo en a.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sea $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \longrightarrow a$, por hipótesis tenemos que $Sub(a) \subset liminf Sub(a_n)$, por lo que para toda $A \subset Sub(a)$ existe $A_n \in Sub(a_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \longrightarrow A$, luego por el Teorema 43, X es de Kelley en a.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que para cada $b \in B_\delta(a)$ y para todo $A \in Sub(a)$, existe $B \in Sub(b)$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Dicho de otra manera existe $\delta > 0$ tal que para cada $b \in B_\delta(a)$, $Sub(a) \subset N(\epsilon, Sub(b))$, la cual es la definición de semicontinuidad por abajo en a.

■

Del Teorema anterior vemos que, el que Sub sea semicontinua por abajo en a equivale a que X sea de Kelley en a. Lo cual nos dice que Sub no siempre es semicontinua por abajo, pues X puede no ser de Kelley en algunos puntos.

Ejemplo 10. *Sea X el continuo de abajo, afirmamos que X no es de Kelley en a.*

Con la sucesión $(a_n)_n$ y el $B \in Sub(a)$ tomados, vemos que no existe $(B_n)_n$ sucesión de subcontinuos tal que $B_n \longrightarrow B$ con $a_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto X no es de Kelley en a, y entonces por el Teorema anterior Sub no es semicontinua por abajo en a.

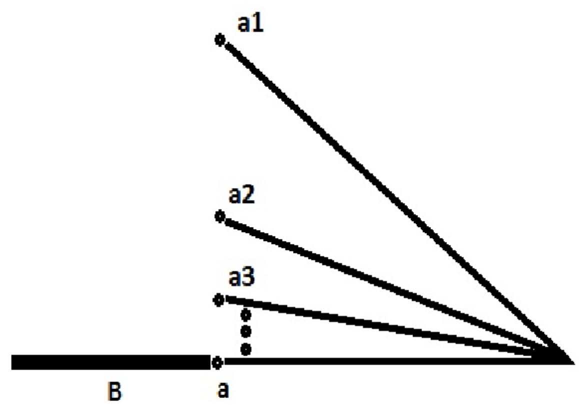


Figura 3.1: Figura 1.

3.9. Continuidad en un G_δ denso.

Definición 29. *Sea X un espacio topológico, un conjunto G_δ en X es un subconjunto A de X que es igual a una intersección numerable de abiertos en X.*

Teorema 47. *(De categoría de Baire). Sea X un espacio métrico completo. Si $(A_n)_n$ es una sucesión de cerrados en X con intersección vacía, entonces el conjunto $X - \cup A_n$ es denso en X.*

La demostración del Teorema anterior la podemos consultar en [3].

Observación: $X - \cup A_n = \cap(X - A_n)$ es G_δ y denso en X.

Definición 30. *Sean (X, d) y $(Y, d^{'})$ espacios métricos y $g : X \longrightarrow Y$. La oscilación de g en $x \in X$ se define como el numero:*

$O(g, x) = inf\{D(g(B_\delta(x))) : \delta > 0\}$,

donde $D(g(B_\delta(x)))$ representa el diámetro del conjunto $g(B_\delta(x))$.

Mientras no entren dos funciones en juego $O(g, x)$ se denotara simplemente como $O(x)$.

Teorema 48. *Sean (X, d) y $(Y, d^{'})$ dos espacios métricos y $g : X \longrightarrow Y$. Entonces:*

1. *g es continua en $x \in X$, si y solo si $O(x) = 0$.*
2. *Para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $A = \{x \in X : O(x) \geq \epsilon\}$ es cerrado en X.*

Demostración.

En efecto, (1):

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$. Luego como $0 = O(x) = inf\{D(g(B_\delta(x))) : \delta > 0\} < \epsilon$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $D(g(B_\delta(x))) < \epsilon$. Por lo que para toda $y \in B_\delta(x)$ se tiene que $d^{'}(g(x), g(y)) \leq D(g(B_\delta(x))) < \epsilon$. Por tanto g es continua en X.

($\Rightarrow$) Sea $\epsilon > 0$, como g es continua en x. Para $\epsilon/2$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $b \in B_\delta(x)$ se tiene que $g(b) \in B_{\epsilon/2}(g(x))$. Ahora, sean b, $c \in B_\delta(x)$, entonces $g(b)$, $g(c) \in B_{\epsilon/2}(g(x))$, por lo que $d^{'}(g(b), g(c)) \leq d^{'}(g(b), g(x)) + d^{'}(g(x), g(c)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Entonces ϵ es una cota superior del conjunto $S = \{d^{'}(g(m), g(n)) : m, n \in B_\delta(x)\}$, por lo que $\epsilon \geq supS = D(g(B_\delta(x))) \geq O(x)$. Por tanto $0 \leq O(x) \leq \epsilon$, por lo que $O(x) = 0$.

En efecto, (2): Sea $x \in X - A$, entonces $O(x) < \epsilon$ por lo que existe $\delta > 0$ tal que $D(g(B_\delta(x))) < \epsilon$. Ahora sea $z \in B_\delta(x)$, entonces existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(z) \subset B_\delta(x)$ pues $B_\delta(x)$ es abierto. Luego entonces $g(B_\eta(z)) \subset g(B_\delta(x))$, lo que implica que $D(g(B_\eta(z))) \leq D(g(B_\delta(x)))$. Entonces $O(z) \leq D(g(B_\eta(z))) \leq D(g(B_\delta(x))) < \epsilon$. Por tanto $O(z) < \epsilon$ y entonces $z \in X - A$. Lo que implica que $B_\delta(x) \subset X - A$. Por lo tanto $X - A$ es abierto, y entonces A es cerrado en X. ■

Teorema 49. *Sean (X, d), $(Y, d^{'})$ dos conjuntos y $g : X \longrightarrow Y$ una función semicontinua por arriba. Entonces el conjunto $A = \{x \in X : O(x) \geq \epsilon\}$ tiene interior vacío para todo $\epsilon > 0$.*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $intA \neq \varnothing$.

Afirmación 1: Existe el mínimo del conjunto

$\eta = \{n \in \mathbb{N} :$ *existe* $x \in$ *int* A *tal que* $g(x)$ *puede ser cubierto con* n *bolas de radio* $\epsilon/6\}$.

En efecto, Como $\eta \subset \mathbb{N}$, basta probar que $\eta \neq \varnothing$. Sea pues $x \in intA$, entonces $g(x) \subset$

$N(\epsilon/6, g(x)) = \cup_{y\in g(x)} B_{\epsilon/6}(y)$, como $g(x)$ es compacto, existen $y_1, y_2, ..., y_n \in g(x)$, tal que $g(x) \subset \cup_{i=1}^{n} B_{\epsilon/6}(y_i)$, entonces $n \in \eta$. Lo que implica que $\eta \neq \varnothing$, por tanto el mínimo existe. Ahora que sabemos que el mínimo de η existe tomemoslo, $m = min\, \eta$. Luego existe $x \in intA$ y $y_1, y_2, ..., y_m \in Y$ tal que $g(x) \subset \cup_{i=1}^{m} B_{\epsilon/6}(y_i) = U$. Además como $x \in intA$ que es abierto, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $B_{\epsilon_0}(x) \subset intA \subset A$............(1).

Afirmación 2: $g(x) \cap B_{\epsilon/6}(y_i) \neq \varnothing$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

En efecto, Supongamos que no. Entonces existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $g(x) \cap B_{\epsilon/6}(y_{i_0}) = \varnothing$. Lo que implica que $g(x)$ puede ser cubierto con k bolas de radio $\epsilon/6$ donde $k < m$, lo cual contradice el hecho de que $m = min\eta$. Luego entonces $g(x) \cap B_{\epsilon/6}(y_i) \neq \varnothing$ para toda $i \in \{1, ..., m\}$.

Afirmación 3: $U \subset N(\epsilon/3, g(x))$.

En efecto, Sea $y \in U$, luego existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $y \in B_{\epsilon/6}(y_{i_0})$. Por la afirmación anterior existe $z \in B_{\epsilon/6}(y_{i_0}) \cap g(x)$, entonces $d^{'}(y, z) \leq d^{'}(y, y_{i_0}) + d^{'}(y_{i_0}, z) < \epsilon/6 + \epsilon/6 = \epsilon/3$. Como $z \in g(x)$, entonces $y \in N(\epsilon/3, g(x))$, Por tanto $U \subset N(\epsilon/3, g(x))$. Por otro lado, U es abierto y $g(x) \subset U$. Luego por el Teorema 29, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $N(\epsilon_1, g(x)) \subset U$..........(2)

Afirmación 4: Para toda $\delta > 0$, existe $y \in B_\delta(x)$ tal que $H(g(x), g(y)) > \epsilon/3$.

En efecto, Como $x \in intA \subset A$, entonces $O(x) \geq \epsilon > 2\epsilon/3$. Por lo tanto para toda $\delta > 0$, $D(g(B_\delta(x))) > 2\epsilon/3$, Entonces existe $y, z \in B_\delta(x)$ tal que $H(g(y), g(z)) > 2\epsilon/3$. Supongamos que $H(g(y), g(x)) \leq \epsilon/3$ y que $H(g(x), g(z)) \leq \epsilon/3$, Entonces por la desigualdad del triángulo:

$$H(g(y), g(z)) \leq H(g(y), g(x)) + H(g(x), g(z)) \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 = 2\epsilon/3,$$

Lo cual es una contradicción, por tanto, uno por lo menos de $H(g(y), g(x))$ y $H(g(x), g(z))$ es mayor a $\epsilon/3$, Con lo cual se prueba la afirmación. Ahora, como g es semicontinua por arriba en X, entonces para el ϵ_1 usado en (2) existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B_\delta(x)$, entonces $g(y) \subset N(\epsilon_1, g(x))$...........(a). Sin perdida de generalidad podemos suponer $\delta < \epsilon_0$, (El ϵ_0 usado en (1)). Luego por la afirmación 4, para esta δ, existe $y \in B_\delta(x)$ tal que $H(g(x), g(y)) > \epsilon/3$..........(b). Entonces $y \in B_\delta(x) \subset B_{\epsilon_0}(x) \subset intA \subset A$, lo anterior es por (1), y por suponer que $\delta < \epsilon_0$. Por tanto $y \in A$..............(c). Además $g(y) \subset N(\epsilon_1, g(x)) \subset U \subset N(\epsilon/3, g(x))$, lo anterior es por ($a$), por (2) y por la afirmación 3. Entonces si $g(x) \subset N(\epsilon/3, g(y))$, tendremos que $H(g(x), g(y)) < \epsilon/3$ lo cual contradice (b). Por tanto $g(x) \nsubseteq N(\epsilon/3, g(y))$............(d). Luego tenemos que $g(x)$, $g(y) \subset U = \cup_{i=1}^{m} B_{\epsilon/6}(y_i)$.

Afirmación 5: $g(y)$ no intersecta a cada bola $B_{\epsilon/6}(y_i)$.

En efecto, Supongamos que si, entonces $B_{\epsilon/6}(y_i) \cap g(y) \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, entonces existe $z_i \in B_{\epsilon/6}(y_i) \cap g(y)$ para toda $i \in \{1, ..., m\}$. Tomemos ahora $z \in g(x) \subset U$, entonces existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $z \in B_{\epsilon/6}(y_{i_0})$, Por lo que

$d^{'}(z, z_{i_0}) \leq d^{'}(z, y_{i_0}) + d^{'}(y_{i_0}, z_{i_0}) < \epsilon/6 + \epsilon/6 = \epsilon/3.$

Por tanto $z \in N(\epsilon/3, g(y))$, ya que $z_{i_0} \in g(y)$. Por lo tanto $g(x) \subset N(\epsilon/3, g(y))$, lo cual contradice (d). Por tanto existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $B_{\epsilon/6}(y_{i_0}) \cap g(y) = \varnothing$. Por lo que $g(y)$ es cubierta por k bolas de radio $\epsilon/6$, con $k < m$. Entonces encontramos $y \in A$, (Por (c)) tal que $g(y)$ puede ser cubierta con $k < m$ bolas de radio $\epsilon/6$, lo cual contradice que $m = min\eta$. Y esta contradicción vino de suponer que $intA \neq \varnothing$. Por tanto $intA = \varnothing$. ■

Teorema 50. *Sean X, Y continuos y $g : X \longrightarrow 2^Y$ una función semicontinua por arriba. Entonces g es continua en un conjunto G_δ y denso de X.*

Demostración.

Definamos, $A_n = \{x \in X : O(x) \geq 1/n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 48, $(A_n)_n$ es una sucesión de cerrados y por el Teorema 49, tienen interior vacío. Luego por el Teorema 47, $A = X - \cup A_n$ es denso en X. Y como $X - \cup A_n = \cap(X - A_n)$, entonces A es G_δ.

Afirmación g es continua en A.

En efecto, Sea $a \in A$. Entonces $a \in \cap(X - A_n)$, por lo que $a \in X - A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $0 \leq O(a) \leq 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego como $1/n \longrightarrow 0$ entonces $O(a) = 0$, entonces por el Teorema 48, g es continua en a, lo que implica que g es continua en A. ■

Corolario 7. *Todo continuo X es de Kelley en cada punto de un conjunto G_δ y denso de X.*

Demostración.

Como sabemos la función Sub es semicontinua por arriba.(Teorema 45). Luego por el Teorema anterior Sub es continua en un conjunto G_δ y denso de X, Entonces por el Teorema 46, X es de Kelley en este conjunto. ■

3.10. Función F_μ.

Definición 31. *Sea μ un mapeo de Whitney normalizado. Para cada $(a,t) \in X \times I$, definamos:*

$F_\mu(a,t) = \{A \in Sub(a) : \mu(A) = t\}$.

Observacion 1:

Por como se definió la función F_μ, podemos ver que $F_\mu(a,t) = Sub(a) \cap \mu^{-1}(t)$, para cada $(a,t) \in X \times I$.

Teorema 51. $F_\mu(a,t) \in C^2(X)$ *para todo* $(a,t) \in X \times I$.

Demostración.

-Afirmación 1: $F_\mu(a,t) \neq \varnothing$ para cada $(a,t) \in X \times I$.

En efecto, Sea $(a,t) \in X \times I$. Luego como $\{a\} \subset X$, por el Teorema 35, existe un arco ordenado $\beta : I \longrightarrow C(X)$ de $\{a\}$ a X, Entonces por el Teorema 37, existe $s \in I$ tal que $(\mu \circ \beta)(s) = t$, Por lo que $\mu(\beta(s)) = t$, luego como $\beta(s) \in C(X)$, y además $a \in \beta(s)$, Entonces $\beta(s) \in F_\mu(a,t)$. Por tanto $F_\mu(a,t) \neq \varnothing$.

-Afirmación 2: $F_\mu(a,t)$ es cerrado en $C(X)$ para todo $(a,t) \in X \times I$.

En efecto, Sea $(a,t) \in X \times I$. Luego por la observación 1, $F_\mu(a,t) = Sub(a) \cap \mu^{-1}(t)$, Como μ es continua, $\mu^{-1}(t)$ es cerrada en $C(X)$, Y por el Teorema 44, $Sub(a)$ es cerrado en $C(X)$, Por tanto $F_\mu(a,t)$ es cerrado en $C(X)$.

-Afirmación 3: $F_\mu(a,t)$ es conexo por trayectorias para todo $(a,t) \in X \times I$.

En efecto, Sean A, $B \in F_\mu(a,t)$, supongamos $A \neq B$, Luego A, $B \in \mu^{-1}(t)$ y $A \cap B \neq \varnothing$ pues $a \in A \cap B$, sea k la componente de $A \cap B$ que contiene a a. Luego por el Teorema 36, existe una trayectoria β de A a B cuya imagen esta contenida en $\mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$ tal que $k \subset L$ para toda $L \in Im\beta$. Ahora tomemos $L \in Im\beta$, entonces $L \in \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$, por lo que $L \in C(X)$ y $\mu(L) = t$. Luego como $k \subset L$, y k es la componente de $A \cap B$ que contiene a a, Entonces $a \in L$. Por tanto $L \in F_\mu(a,t)$. Lo que implica que β es una trayectoria en $F_\mu(a,t)$. Por lo tanto $F_\mu(a,t)$ es conexo por trayectorias. Ahora por las afirmaciones 1 y 2, tenemos que

$F_\mu(a,t) \in 2^{C(X)}$ para cada $(a,t) \in X \times I$. Luego la afirmación 3, implica que $F_\mu(a,t)$ es conexo en $C(X)$ para cada $(a,t) \in X \times I$, Y como $C(C(X)) = \{A \in 2^{C(X)} : A \ es \ conexo \ en \ C(X)\}$, Entonces $F_\mu(a,t) \in C(C(X)) = C^2(X)$. ■

Teorema 52. *La función F_μ es semicontinua por arriba.*

Demostración.

Sea $(a,t) \in X \times I$. Por demostrar $limsup F_\mu(a_n, t_n) \subset F_\mu(a,t)$, para toda sucesión (a_n, t_n) en $X \times I$ tal que $(a_n, t_n) \longrightarrow (a,t)$. Sea pues $A \in limsup F_\mu(a_n, t_n)$. Entonces $A \in C(X)$ y existe $n_1 < n_2 < ...$ y puntos $A_{n_k} \in F_\mu(a_{n_k}, t_{n_k})$ tal que $A_{n_k} \longrightarrow A$. Luego $a_{n_k} \longrightarrow a$, $A_{n_k} \longrightarrow A$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, Entonces por el Corolario 2, $a \in A$, Además por la continuidad de μ, $\mu(A_{n_k}) \longrightarrow \mu(A)$, pero $\mu(A_{n_k}) = t_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, Por tanto $t_{n_k} \longrightarrow \mu(A)$, y como por hipótesis $t_{n_k} \longrightarrow t$, entonces $\mu(A) = t$. Lo que implica que $A \in F_\mu(a,t)$, y entonces $limsup F_\mu(a_n, t_n) \subset F_\mu(a,t)$. ■

Teorema 53. *Sean $t_1 \leq t_2$ en I y sea $x \in X$. Entonces:*

(1) *Para cada $A \in F_\mu(x, t_1)$ existe $B \in F_\mu(x, t_2)$ tal que $B \supset A$ y*

(2) *Para cada $B \in F_\mu(x, t_2)$ existe $A \in F_\mu(x, t_1)$ tal que $A \subset B$.*

Demostración.

(1) Sea $A \in F_\mu(x, t_1)$, luego $A \in C(X)$, entonces $A \subset X$ y por el Teorema 35, existe un arco ordenado λ de A a X en $C(X)$, Ahora por el Teorema 37, para t_2 existe $s \in I$ tal que $(\mu \circ \lambda)(s) = t_2$. Definamos $B = \lambda(s)$, entonces $\mu(B) = t_2$, además $B \in Im\lambda$, por lo que $B \in C(X)$ y $A \subset B$.

(2) Sea $B \in F_\mu(x, t_2)$, luego $B \in C(X)$ y $\{x\} \subset B$, Luego, por el Teorema 35, existe un arco ordenado β de $\{x\}$ a B en $C(X)$. Ahora por el Teorema 37, para t_1 existe $r \in I$ tal que $(\mu \circ \beta)(r) = t_1$, Definamos $A = \beta(r)$, entonces $A \in F_\mu(x, t_1)$ y $A \subset B$. ■

Teorema 54. *X es de Kelley en $a \in X$ si y solo si*

F_μ es continua en (a,t) para cada $t \in I$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como en el Teorema 52, demostramos que F_μ siempre es semicontinua por arriba, solo falta ver que F_μ es semicontinua por abajo. Sea $(a,t) \in X \times I$. Por demostrar, $F_\mu(a,t) \subset liminf F_\mu(a_n,t_n)$, para toda sucesión $(a_n,t_n)_n \in X \times I$, tal que $(a_n,t_n) \longrightarrow (a,t)$. Sea $A \in F_\mu(a,t)$, luego como X tiene la propiedad de Kelley en a, existe $(A_n)_n \subset C(X)$ tal que $A_n \longrightarrow A$ y $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dada $n \in \mathbb{N}$:

Caso 1: Si $\mu(A_n) \leq t_n$; Como $A_n \in F_\mu(a_n, \mu(A_n))$, entonces por el Teorema anterior parte 1, existe $B_n \in F_\mu(a_n,t_n)$ tal que $A_n \subset B_n$.

Caso 2: Si $\mu(A_n) \geq t_n$; Como $A_n \in F_\mu(a_n, \mu(A_n))$, entonces por el Teorema anterior parte 2, existe $B_n \in F_\mu(a_n,t_n)$ tal que $B_n \subset A_n$ Por tanto $B_n \in F_\mu(a_n,t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si demostramos que $B_n \longrightarrow A$, tendríamos que $A \in liminf F_\mu(a_n,t_n)$. Sea pues $\epsilon/2 > 0$ y $\eta(\epsilon/2) > 0$ que satisfaga el Teorema 33, Luego como $A_n \longrightarrow A$ y $t_n \longrightarrow t$, Entonces $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A) = t$, pues $A \in F_\mu(a,t)$, Por tanto $|\mu(A_n) - t_n| \longrightarrow 0$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu(A_n) - t_n| < \eta$ para toda $n \geq N_1$. También existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon/2$ para $n \geq N_2$. Sea $N = max\{N_1, N_2\}$, Luego para $n \geq N$, tenemos que $|\mu(A_n) - t_n| < \eta$ y como $\mu(B_n) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, Entonces $|\mu(A_n) - \mu(B_n))| < \eta$, también tenemos que $A_n \subset B_n$ o $B_n \subset A_n$, Ahora como η fue elegida satisfaciendo el Teorema 33, entonces $H(A_n, B_n) < \epsilon/2$, Además como $H(A_n, A) < \epsilon/2$ para $n \geq N$, Entonces $H(A, B_n) \leq H(A, A_n) + H(A_n, B_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, para $n \geq N$. Por tanto $B_n \longrightarrow A$, Luego entonces $A \in liminf F_\mu(a_n,t_n)$, Por lo tanto F_μ es semicontinua por abajo, lo que implica que F_μ es continua.

($\Leftarrow$) Sea $a \in X$. Por demostrar que X es de Kelley en a. Sea pues $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \longrightarrow a$ y $A \in Sub(a)$. Como F_μ es continua en (a,t) para cada $t \in I$, En particular para $t = \mu(A)$, tenemos que: $F_\mu(a,t) \subset liminf F_\mu(a_n,t)$, Luego como $A \in F_\mu(a,t)$, entonces $A \in liminf F_\mu(a_n,t)$, Por tanto existe $(A_n)_n$ en $C(X)$ tal que $A_n \in F_\mu(a_n,t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \longrightarrow A$. Hemos encontrado entonces $(A_n)_n \subset C(X)$ tal que $A_n \longrightarrow A$ y $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, Por tanto X es de Kelley en a.

■

Corolario 8. *X es de Kelley si y solo si F_μ es continua.*

Teorema 55. *Si X es de Kelley, entonces 2^X y $C(X)$ son contraibles.*

Demostración.

Como por hipótesis X es de Kelley entonces por el Teorema anterior F_μ es continua, Ahora definamos: $g : F_1(X) \longrightarrow X$, como $g(\{x\}) = x$ para cada $\{x\} \in F_1(X)$, Entonces g es continua pues $F_1(X)$ y X son isométricos. Luego para cada $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times I$;

Definamos:

$G : F_1(X) \times I \longrightarrow 2^X$, por $G(\{x\}, t) = \psi(F_\mu(g(\{x\}), t))$,

En donde $\psi : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ es el mapeo unión definido en el Teorema 34, donde también se demuestra que es continuo, Por tanto G es continua.

-Afirmación:

(1) $G(\{x\}, 0) = \{x\}$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$.

(2) $G(\{x\}, 1) = X$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$.

En efecto,

(1) Sea $\{x\} \in F_1(X)$. Luego $F_\mu(g(\{x\}), 0) = F_\mu(x, 0) = \{A \in Sub(x) : \mu(A) = 0\} = \{\{x\}\}$, (Pues $A = \{x\}$ es el único en Sub(x) tal que $\mu(A) = 0$). Entonces $G(\{x\}, 0) = \psi(F_\mu(g(\{x\}), 0)) = \psi(\{\{x\}\}) = \{x\}$

(2) Sea $\{x\} \in F_1(X)$. Luego $F_\mu(g(\{x\}, 1)) = F_\mu(x, 1) = \{A \in Sub(x) : \mu(A) = 1\} = \{X\}$, (Pues $A = X$ es el único en Sub(x) tal que $\mu(X) = 1$, ya que μ es un mapeo de Whitney normalizado). Entonces $G(\{x\}, 1) = \psi(F_\mu(g(\{x\}), 1)) = \psi(\{X\}) = X$. Por tanto G es una contracción de $F_1(X)$ en 2^X, entonces $F_1(X)$ es contraible en 2^X. Luego por el Teorema 40, 2^X y $C(X)$ son contraibles. ■

Teorema 56. *Si X es un continuo localmente conexo,*

entonces 2^X y $C(X)$ son contraibles.

Demostración.

Si X es un continuo localmente conexo, por el Corolario 6, X es de Kelley, Luego por el Teorema anterior 2^X y $C(X)$ son contraibles. ■

Teorema 57. *Supongamos que X es hereditariamente indescomponible*

y que A, $B \in C(X)$. Si $A \cap B \neq \varnothing$ y $\mu(A) = \mu(B)$, donde

μ es un mapeo de Whitney en $C(X)$, entonces $A = B$.

Demostración.

Como $A \cap B \neq \varnothing$ por el Teorema 23, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Supongamos sin perdida de generalidad que $A \subset B$. Ahora si $A \subset B \neq A$, Entonces por la segunda propiedad de los mapeos de Whitney $\mu(A) < \mu(B)$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis teníamos que $\mu(A) = \mu(B)$, Por lo tanto $A = B$. ■

Teorema 58. *Los continuos hereditariamente indescomponibles son de Kelley.*

Demostración.

Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Sea $(a,t) \in X \times I$ y tomemos $(a_n, t_n)_n \subset X \times I$ tal que $(a_n, t_n) \longrightarrow (a,t)$. Luego $F_\mu(a_n, t_n) \longrightarrow \mathcal{B}$ para algún $\mathcal{B} \in C^2(X)$.

Afirmación $\mathcal{B} = F_\mu(a,t)$.

En efecto, por el Teorema 52, F_μ es semicontinua por arriba, entonces $\mathcal{B} = limsup F_\mu(a_n, t_n) \subset F_\mu(a,t)$. Por tanto $\mathcal{B} \subset F_\mu(a,t)$....(1)

Tomemos ahora $A \in F_\mu(a,t)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos $A_n \in F_\mu(a_n, t_n)$. Entonces por la compacidad de $C(X)$ existe $(A_{n_k})_k$ subsucesión de $(A_n)_n$ tal que $A_{n_k} \longrightarrow B$ para algún $B \in C(X)$. Luego como $a_{n_k} \longrightarrow a$, $A_{n_k} \longrightarrow B$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $a \in B$. Por tanto $A \cap B \neq \varnothing$, entonces por el Teorema 23, $A \subset B$ o $B \subset A$. Supongamos sin perdida de generalidad que $B \subset A$. Si $B \subset A \neq B$, entonces tenemos que $\mu(B) < \mu(A) = t$. Pero $t_{n_k} = \mu(A_{n_k}) \longrightarrow \mu(B)$, y también $t_{n_k} \longrightarrow t$, por lo tanto $\mu(B) = t$, entonces tenemos $t < t$, lo cual es una contradicción, por tanto $A = B$, lo que implica que $A \in limsup F_\mu(a_n, t_n) = \mathcal{B}$, Luego $F_\mu(a,t) \subset \mathcal{B}$......(2)

De (1) y (2) tenemos que $F_\mu(a,t) = \mathcal{B}$.

Luego F_μ es continua en (a,t) y por el Teorema 54, X es de Kelley en a. Por tanto X es de Kelley.

■

Teorema 59. *Sea $f : X \longrightarrow Y$, homeomorfismo, si X es de Kelley en $p \in X$, entonces Y es de Kelley en $f(p)$.*

Demostración.

Supongamos que X es de Kelley en $p \in X$. Por demostrar Y es de Kelley en $f(p)$; sea pues $(b_n)_n \subset Y$ tal que $b_n \longrightarrow f(p)$, y sea $B \in C(Y)$ tal que $f(p) \in B$, Como f es biyectiva para b_n existe a_n tal que $b_n = f(a_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego como $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es continua y $f(a_n) \longrightarrow f(p)$, entonces $f^{-1}(f(a_n)) \longrightarrow f^{-1}(f(p))$, lo que implica que $a_n \longrightarrow p$, Además como B es subcontinuo, entonces es conexo y compacto, entonces por el Teorema 6 y 16, $f^{-1}(B)$ es conexo y compacto, por tanto subcontinuo, y como $f(p) \in B$, entonces $f^{-1}(f(p)) \in f^{-1}(B)$, por tanto $p \in f^{-1}(B)$, Ahora como X es de Kelley en p, existe $(A_n)_n \subset X$, tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \longrightarrow f^{-1}(B)$, Luego entonces $f(a_n) \in f(A_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como A_n es conexo y compacto, y f es continua, entonces por los Teoremas 6 y 16, $f(A_n)$ es conexo y compacto, entonces $f(A_n)$ es subcontinuo, para cada $n \in \mathbb{N}$, Luego como $A_n \longrightarrow f^{-1}(B)$, como f es continua $f(A_n) \longrightarrow B$, Por lo tanto Y es de Kelley en $f(p)$.

■

Definición 32. *Un continuo X es homogéneo si para cada par de puntos p y q de X, existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(p) = q$.*

Teorema 60. *Si X es un continuo homogéneo, entonces X es de Kelley.*

Demostración. Como X es continuo, por el Corolario 7, X tiene un subconjunto G_δ y denso donde es de Kelley. Sea $p \in G_\delta$ y $q \in X$, entonces como X es homogéneo, existe $f : X \longrightarrow X$ homeomorfismo, tal que $f(p) = q$, luego por el Teorema anterior X es de Kelley en q, Por tanto X es de Kelley. ■

Bibliografía

[1] Alejandro Illanes, Sam Nadler (1999). Hyperspaces. Fundamentals and Recent Result. Monographs and Texbooks in pure Aplied Mathematics, 216, Marcel Dekker. New York y Basel.

[2] Alejandro Illanes (2004). Hiperespacio de Continuos. Aportaciones Matematicas, Serie Textos Num. 28, Sociedad Matematica Mexicana.

[3] Benjamin T. Sims, Fundamentals of Topology, MacMillan Publishing Co., Inc., New York, 1976.

[4] Diederich Hinrichsen, Jose Fernandez, Andres Fraguela, Angel Alvarez (2003). Topologia General. Aportaciones Matematicas, Serie Texto Num 22, Sociedad Matematica Mexicana

[5] John Munkres (2002). Topologia. Prentice-Hall. Madrid, España.

[6] M. Wodjyslawski, Sur le contractibilite des hyperespaces des continus localement connexes, Fundamenta Mathematicae, 1938.

[7] Raul Escobedo, Sergio Macias, Hector Mendez (2006). Invitacion a la Teoria de los Continuos y sus Hiperespacios. Aportaciones Matematicas, Serie Textos Num 31, Sociedad Matematica Mexicana.

[8] Sam Nadler (1992).Continuum Theory An Introduction. Marcel Dekker. Inc

[9] Sam Nadler (2006). Hyperspaces of set. A test with Research Question. Aportaciones Matematicas, Serie de Textos Num 33. Sociedad Matematica Mexicana.