



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Bifurcaciones de codimensión uno en sistemas discretos

## T E S I S

Que para obtener el título de:

**Licenciado en  
Matemáticas**

Presenta:

María de los Ángeles Mata González

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, 11 de Enero del 2013.



## SINODALES

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro  
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

M.C. Horacio Leyva Castellanos  
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Dr. Daniel Olmos Liceaga  
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.



# *Agradecimientos*

Deseo agradecer al Departamento de Matemáticas, su administración y su planta docente por el apoyo que se me brindó en el transcurso de mi carrera por momentos de satisfacción y difíciles que surgieron en el transcurso de esta. Deseo también agradecer a los jefes de Departamento que lo lideraron en el transcurso de mis estudios.

Aprovecho para mostrar mis agradecimientos especialmente a mi director de tesis, Dr. Fernando Verduzco González, quien fue pilar fundamental en la realización del presente trabajo, así como a Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro, Dr. Daniel Olmos Liceaga, M.C. Horacio Leyva Castellanos, quienes fueron integrantes del comité revisor de mi tesis, por el tiempo brindado para la corrección y comentarios.

Cuando un sueño se hace realidad no siempre se le atribuye al empeño que pongamos en realizarlo. Detrás de cada sueño siempre hay personas que nos apoyan y que creen en nosotros. Son seres especiales que nos animan a seguir adelante en nuestros proyectos brindándonos, de diferentes maneras, su solidaridad.

En lo personal, quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional. Mis padres, Ma. Elena González Morales y Joaquín Mata Castro, que en las buenas y en las malas siempre han estado conmigo, porque gracias a su apoyo y consejos he llegado a realizar una de mis grandes metas, lo cual constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir. Mis hermanos, Maricarmen Mata González y Joaquín Mata González,

que han sabido entender lo difícil que es estar fuera de casa sin compartir momentos familiares importantes, que al igual he recibido su apoyo incondicional como solo ellos lo saben hacer. Mis tíos, Edna Consuelo Camacho Moreno y Miguel González Morales, por su valioso apoyo para realizar mis estudios profesionales.

Quiero agradecer a todos mis amigos, por que gracias a su apoyo, a su compañía, y sus buenos consejos me han hecho saber que siempre están conmigo y que forman parte también de mi familia. También quiero mostrar mis agradecimientos a mis compañeros de clases, quienes han compartido grandes experiencias en el transcurso de nuestro recorrido por la vida y carrera.

Por último, y no menos importante, mis grandes agradecimientos a mi esposo Jorge Antonio López Rentería por su gran apoyo amoroso y momentos agradables que hemos logrado juntos, por todos los buenos momentos vividos y los que aún nos quedan por vivir, por demostrarme que si se puede, así como su influencia para lograr terminar mis estudios a pesar de las adversidades que han surgido para lograrlo. A mi hija Ma. de los Ángeles López Mata que me ha impulsado a seguir adelante para tener un mejor futuro para ella. A todos aquellos quienes por descuido, no han sido incluidos y estuvieron brindandome su apoyo, les pido disculpas al igual que mis agradecimientos por todo lo que lograron en mi.

# *Índice general*

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Sistemas Dinámicos Discretos</b>	<b>1</b>
1.1. Geometría de mapeos escalares . . . . .	1
1.2. Mapeos lineales en el plano . . . . .	7
1.2.1. Valores propios reales distintos . . . . .	8
1.2.4. Valores propios reales repetidos . . . . .	10
1.2.5. Valores propios complejos . . . . .	12
1.2.6. Mapeos no lineales en el plano . . . . .	14
1.3. Bifurcaciones de codimensión uno en sistemas discretos . . . . .	16
<b>2. Bifurcación silla-nodo</b>	<b>19</b>
2.1. Forma normal de la bifurcación silla-nodo . . . . .	19
2.2. Teorema de bifurcación silla-nodo . . . . .	20
<b>3. Bifurcación duplicación de período</b>	<b>25</b>
3.1. Forma normal de la bifurcación duplicación de período . . . . .	25
3.2. Teorema de duplicación de período . . . . .	31

<b>4. Bifurcación Neimark-Sacker</b>	<b>37</b>
4.1. Forma normal de la bifurcación Neimark-Sacker . . . . .	37
4.2. Teorema de Neimark-Sacker . . . . .	44
<b>5. Ejemplos</b>	<b>55</b>
5.1. Duplicación de período . . . . .	55
5.2. Neimark-Sacker . . . . .	58
<b>Apéndice</b>	<b>67</b>



# *Introducción*

Un sistema dinámico consiste de un conjunto de posibles estados, junto con una regla que determina el estado presente (de población, por ejemplo) en términos de estados pasados. A esta regla se le conoce como *determinística*. Debemos enfatizar en dos tipos de sistemas dinámicos. Si la regla se aplica a tiempos discretos, entonces lo llamaremos *sistema dinámico en tiempo discreto*. Un sistema discreto toma estados actuales como entradas y renueva la situación para producir un nuevo estado como salida. Por estado del sistema entenderemos como toda la información necesaria para que la regla se pueda aplicar.

Otro tipo de sistema dinámico muy importante es, esencialmente, el límite de sistemas discretos con pasos de tiempo cada vez más y más pequeños. La regla que gobierna en este caso, viene a ser un conjunto de *ecuaciones diferenciales* y comúnmente se utiliza el término de *sistemas en tiempo continuo*.

Hay una rama de estudio de los sistemas dinámicos en el cual se analizan los cambios en la estructura cualitativa o topológica de tales sistemas. A este tipo de estudio se le conoce como *teoría de bifurcaciones* y se encarga de analizar el comportamiento de familias de soluciones paramétricas cuando una pequeña variación de los parámetros de un sistema (parámetros de bifurcación) causa un “cambio cualitativo brusco” o topológico en su comportamiento. Para ser un poco más precisos, los sistemas dinámicos pueden sufrir cambios en la estructura de sus órbitas cuando varían

sus parámetros. Esas modificaciones pueden incluir el nacimiento o muerte de puntos fijos y ciclos, o transformaciones en el tipo de esas órbitas. A este fenómeno se le conoce como una *bifurcación*. Las bifurcaciones pueden producirse tanto en sistemas continuos, como en discretos. En el presente trabajo estaremos interesados en estudiar cómo cambia la dinámica de sistemas discretos (también llamados *ecuaciones en diferencias*) cuando cambia el parámetro.

El estudio de las bifurcaciones se podría decir que se originó con el trabajo del matemático francés Henri Poincaré a finales del siglo XIX. Su motivación fue particularmente alimentada al estudiar el problema de las órbitas de tres cuerpos celestes que presentan atracción gravitacional mutua (por ejemplo, una estrella y dos planetas). Al considerar el comportamiento de las órbitas resultantes del conjunto de puntos iniciales (en lugar de centrarse en órbitas individuales), Poincaré fué capaz de mostrar que había órbitas demasiado complicadas (ahora llamadas caóticas). Sus técnicas fueron aplicables a una enorme cantidad de sistemas físicos.

La teoría de sistemas dinámicos discretos y las ecuaciones en diferencias se desarrolló mayormente durante los últimos 25 años del siglo XX, siguiendo la publicación del artículo “Period Three Implies Chaos”, por J. Yorke y Y. Li en 1975. En 1986, Robert Devaney publicó “*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*”, el primer libro del tema (ver [3]). Las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias ha tenido un enorme crecimiento en muchas áreas, por ejemplo, en Biología, siguiendo el artículo “Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamical”, de R. May en 1976, entre muchos otros.

El campo de los sistemas dinámicos es muy rico en referencias acerca de la teoría de bifurcaciones como ruta hacia sistemas caóticos tal como se estudia en [9, 10, 16]. Debido a su importancia, muchos investigadores se han dado a la tarea de estudiar, de manera detallada y precisa (sus formas normales y la geometría de la dinámica), los tipos de bifurcaciones más interesantes e importantes tales como la bifurcación silla nodo y doble período [5, 7, 16]. La formulación explícita de los teoremas de las formas normales topológicas de esas bifurcaciones fué hecha por Arnold [1]. Una prueba completa de que en el truncamiento de términos de orden superior en las formas normales resultan sistemas localmente topológicamente equivalentes la podemos ver en [13]. La aparición de una curva cerrada invariante que rodea al punto fijo mientras un par de multiplicadores complejos cruzan el círculo unitario fué conocido gracias a Andronov y estudiado por Neimark [12] (sin establecer explícitamente las condiciones de generacidad). Una prueba de la misma fué dada por Sacker [14], quien descubrió la bifurcación independientemente. Un tratamiento moderno de la bifurcación Neimark-Sacker para mapeos en el plano lo podemos encontrar en [8], donde se calcula el coeficiente  $a(0)$  de la forma normal (ver también [15]).

En este trabajo se estudiará, además de la dos bifurcaciones antes mencionadas, la bifurcación Neimark-Sacker [16].

El resto de este trabajo está distribuído como sigue: En el capítulo 1 se presentan conceptos básicos de mapeos escalares, así como la geometría que se genera con la dinámica. Se lleva a una analogía para mapeos lineales en el plano y no lineales y, finalmente, se hace un análisis local de sistemas no lineales en el plano. Además se presentan las condiciones más simples en los cuales ocurren las bifurcaciones doble período, silla-nodo y Neimark-Sacker. En los capítulos 2, 3 y 4, presentamos las formas normales y las formas normales truncadas de las bifurcaciones doble período, silla-nodo y Neimark-Sacker, siendo ésta última bifurcación el resultado principal de este trabajo. Realizamos un análisis de la dinámica de estas formas normales alrededor de los puntos fijos.



# Capítulo 1

---

## Sistemas Dinámicos Discretos

En este capítulo comenzamos con el análisis de las ecuaciones en diferencias, también llamadas mapeos, pues son la base del estudio de dinámicas y bifurcaciones de mapeos. En particular, estudiaremos los mapeos escalares y la geometría que se genera a partir de la dinámica que surge de componer sucesivamente tales mapeos en algún punto fijo de interés. Tal proceso de composición sucesiva de mapeos es comúnmente llamado *iteración*.

El objetivo de la segunda sección es dar una introducción al estudio de la dinámica de sistemas en el plano. Por tal motivo, se analizan sistemas discretos lineales y se introducen conceptos básicos, pero muy importantes en nuestro estudio de bifurcaciones.

### 1.1. Geometría de mapeos escalares

Empezaremos considerando una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y un valor inicial  $x_0$ . Considere también la sucesión de puntos que se obtienen al iterar  $f$  a partir de  $x_0$  :

$$\{x_0, f(x_0), f(f(x_0)) = f^2(x_0), f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \dots\}$$

**Definición 1.** Una órbita positiva de  $x_0$  es el conjunto de puntos

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\},$$

y se denota por  $\gamma^+(x_0)$ .

**Definición 2.** Si  $f$  es invertible, una órbita negativa de  $x_0$  es el conjunto de puntos

$$\{x_0, f^{-1}(x_0), f^{-2}(x_0), \dots\},$$

y se denota por  $\gamma^-(x_0)$ .

**Definición 3.** Si  $f$  es invertible, una órbita de  $x_0$  es el conjunto de puntos

$$\{\dots, f^{-2}(x_0), f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\},$$

y se denota por  $\gamma(x_0)$ .

**Definición 4.** El punto  $\bar{x}$  es llamado un punto fijo de  $f$  si  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

**Definición 5.** Un punto fijo  $\bar{x}$  de  $f$  es estable si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x_0$ , con  $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ , las iteraciones de  $x_0$  satisfacen la desigualdad

$$|f^n(x_0) - \bar{x}| < \epsilon,$$

para todo  $n \geq 0$ . El punto fijo  $\bar{x}$  es inestable si no es estable.

**Definición 6.** Un punto fijo  $\bar{x}$  es asintóticamente estable si es estable y, además existe  $r > 0$  tal que  $f^n(x_0) \rightarrow \bar{x}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  para todo  $x_0$  satisfaciendo  $|x_0 - \bar{x}| < r$ . Diremos que  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  es un atractor.

Diremos que el punto fijo  $\bar{x}$  es un repulsor para  $f$ , si es un atractor para  $f^{-1}$ , cuando  $f$  es invertible.

**Definición 7.** Un función  $f$  se dice ser de clase  $C^k$ , si existen sus derivadas de orden  $k$ , y son continuas.

**Definición 8.** Un punto fijo  $\bar{x}$  se dice ser hiperbólico si  $|f'(\bar{x})| \neq 1$ . En caso contrario diremos que es no-hiperbólico.

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para la estabilidad de los puntos fijos.

**Teorema 1.** Sea  $f$  un mapeo de clase  $C^1$ . Un punto fijo  $p$  punto aislado de  $f$  es atractor si  $|f'(p)| < 1$  y es repulsor si  $|f'(p)| > 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|f'(p)| < 1$ .  
Sea  $a > 0$  tal que  $|f'(p)| < a < 1$ . Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|,$$

es decir, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - p| < \delta$ , entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} - |f'(p)| \right| < \epsilon \\ \iff & -\epsilon < \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} - |f'(p)| < \epsilon \\ \iff & |f'(p)| - \epsilon < \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < |f'(p)| + \epsilon, \end{aligned}$$

para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño se tiene que  $|f'(p)| + \epsilon < a$ , por lo tanto,

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a.$$

Entonces para todo  $x \in N_\delta(p)$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a \\ \iff & |f(x) - f(p)| < a|x - p|, \\ \iff & |f(x) - p| < a|x - p|, \end{aligned} \tag{1.1}$$

por lo tanto

$$|f(x) - p| < a\delta < \delta, \tag{1.2}$$

es decir,  $f(x) \in N_\delta(p)$ . Observemos que  $\delta > 0$  se puede elegir de tal forma que  $N_\delta(p)$  no posea más puntos fijos de  $f$ .

Hagamos  $f(x) = x_2 \in N_\delta(p)$ , entonces, de (1.1) se tiene que

$$|f(x_2) - p| < a|x_2 - p| \iff |f^2(x) - p| < a|f(x) - p|. \tag{1.3}$$

Ahora bien, de (1.2) concluimos que

$$|f^2(x) - p| < a|f(x) - p| < a^2\delta < \delta,$$

es decir,  $f^2(x) \in N_\delta(p)$ .

Sea  $x_3 = f^2(x)$ , entonces de (1.1),

$$|f(x_3) - p| < a|x_3 - p| \iff |f^3(x) - p| < a|f^2(x) - p|.$$

De (1.3) y (1.2),

$$|f^3(x) - p| < a|f^2(x) - p| < a^2|f(x) - p| < a^3\delta < \delta.$$

En general,

$$\left| f^k(x) - p \right| < a^k \delta < \delta,$$

y como  $0 < a < 1$ , entonces

$$f^k(x) \longrightarrow p, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Por lo tanto  $p$  es un *atractor*.

Veamos ahora que si  $|f'(p)| > 1$ , entonces  $p$  es repulsor. Sea  $g$  la inversa de  $f$  es decir,  $(f \circ g)(x) = x$  y  $g(p) = p$ . Entonces por la regla de la cadena se tiene que

$$f'(g(p))g'(p) = f'(p)g'(p) = 1 \iff |f'(p)| |g'(p)| = 1,$$

luego entonces,

$$|g'(p)| = \frac{1}{|f'(p)|} < 1$$

Por lo que  $g^k(x) \rightarrow p$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , concluimos entonces que  $p$  es un atractor para  $g$ , por lo tanto es un *repulsor* para  $f$ .  $\square$

Apliquemos el teorema anterior en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.1.1** (Calculando  $\sqrt{n}$ ). *Considere la ecuación en diferencias*

$$x \mapsto f(x) = ax + \frac{n(1-a)}{x},$$

donde  $|2a - 1| < 1$ . *Probaremos que tiene los puntos fijos estables  $\pm\sqrt{n}$ .*

Solución. Para ver los puntos fijos tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= ax + \frac{n(1-a)}{x} \\ x &= \frac{ax^2 + n(1-a)}{x} \\ x^2 &= ax^2 + n(1-a) \\ x^2 - ax^2 &= n(1-a) \\ x^2 &= n \\ x &= \pm\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Enseguida, para calcular  $|f'(\bar{x})|$  tenemos que

$$|f'(x)| = \left| a - \frac{n(1-a)}{x^2} \right|,$$



entonces

$$|f'(\pm\sqrt{n})| = \left| a - \frac{n(1-a)}{(\pm\sqrt{n})^2} \right| = |2a-1| < 1,$$

luego, por el teorema anterior tenemos que los puntos fijos  $\pm\sqrt{n}$  son *asintóticamente estables*. La figura 1.1 muestra la dinámica de  $f$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.1.2.** *Analice el siguiente mapeo cuadrático*

$$f(x) = x + x^2.$$

Solución. Los puntos fijos son:

$$x + x^2 = x \iff x = 0$$

entonces el punto fijo es  $\bar{x} = 0$ .

La derivada del mapeo es

$$|f'(x)| = |1 + 2x|,$$

y evaluada en el punto fijo obtenemos

$$|f'(\bar{x})| = |1 + 2(0)| = |1| = 1,$$

entonces el punto es *no-hiperbólico*. Por lo tanto el teorema no aplica.

Sin embargo, gráficamente podemos observar que el punto fijo es inestable (ver figura 1.2).  $\diamond$

**Ejemplo 1.1.3.** *Analice la dinámica del siguiente mapeo cuadrático*

$$f(x) = -x - 3x^2.$$

Solución. Los puntos fijos son:

$$\begin{aligned} -x - 3x^2 &= x \\ -x - 3x^2 - x &= 0 \\ -2x - 3x^2 &= 0 \\ x(-2 - 3x) &= 0, \end{aligned}$$

entonces tenemos dos puntos fijos que son  $\bar{x} = 0$  y  $\bar{x} = -\frac{2}{3}$ .

La derivada es

$$|f'(x)| = |-1 - 6x|,$$

y evaluada primeramente en el punto  $\bar{x} = 0$ , tenemos

$$|f'(0)| = |-1 - 6(0)| = |-1| = 1,$$

por la definición anterior tenemos que el punto fijo igual a uno es *no-hiperbólico*. Ahora veremos en el punto fijo  $\bar{x} = -\frac{2}{3}$ , tenemos

$$\left| f' \left( -\frac{2}{3} \right) \right| = \left| -1 - 6 \left( -\frac{2}{3} \right) \right| = \left| -1 + \frac{12}{3} \right| = |-1 + 4| = |3| = 3,$$

luego entonces es *repulsor*.  $\diamond$

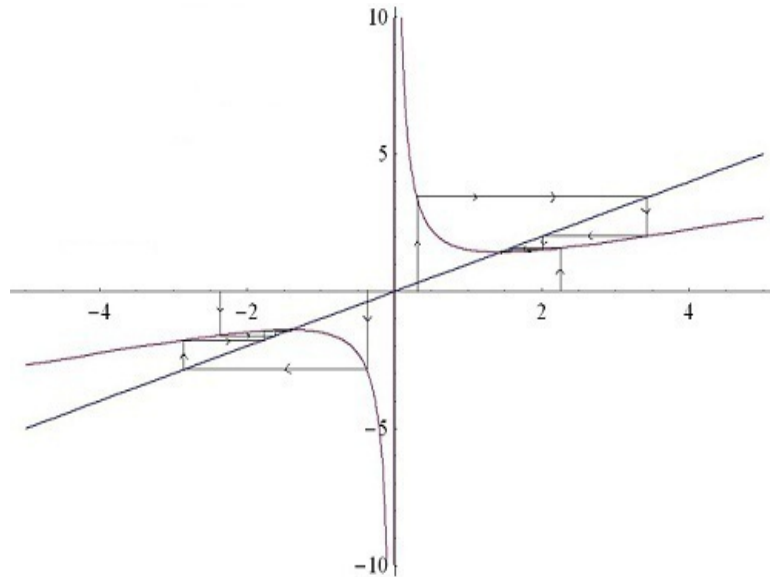


Figura 1.1: Diagrama para  $f(x) = ax + \frac{n(1-a)}{x}$ , caso  $n = 2$ .

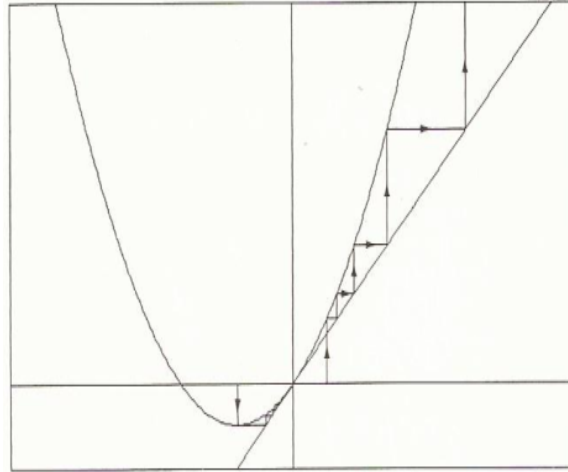


Figura 1.2: El punto fijo  $x = 0$  de  $f(x) = x + x^2$  es inestable.

## 1.2. Mapeos lineales en el plano

Considere el mapeo lineal

$$x \mapsto Ax, \quad (1.4)$$

con  $A$  una matriz  $2 \times 2$  con entradas reales. La órbita positiva de  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  es la sucesión de imágenes de  $x_0$  bajo  $A$

$$\gamma^+(x_0) = \{x_0, Ax_0, \dots, A^n x_0, \dots\},$$

como en el caso de las Ecuaciones Diferenciales Lineales podemos usar la forma normal de Jordan para calcular las órbitas del mapeo lineal (1.4), y encontrar condiciones para la convergencia de las mismas.

Si  $J$  es la forma normal de Jordan de  $A$ , entonces existe una matriz invertible  $P$  tal que

$$J = P^{-1}AP.$$

Además, es claro que

$$J^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP,$$

por lo tanto

$$A^n = PJ^nP^{-1}.$$

Se sigue entonces que

$$\gamma^+(x_0) = \{x_0, PJ^1P^{-1}x_0, PJ^2P^{-1}x_0, \dots, PJ^nP^{-1}x_0, \dots\}.$$

### 1.2.1. Valores propios reales distintos

Sean  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$  valores propios de  $A$  diferentes, con vectores propios  $v_1, v_2$ , respectivamente. Sean  $P = (v_1 \ v_2)$  y

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix},$$

entonces

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} x_n &= PJ^n P^{-1}x_0 \\ &= (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} x_0 \\ &= (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} x_0 \\ x_n &= \lambda_1^n (w_1^T x_0) v_1 + \lambda_2^n (w_2^T x_0) v_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Esto nos prueba el siguiente Lema.

**Lema 2.** Si  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ , entonces  $x_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

□

**Corolario 1.** Si al menos uno  $|\lambda_i| > 1$ , entonces  $x_n$  diverge.

□

Sea  $E_{v_i}$  el espacio vectorial generado por el vector propio  $v_i$ ,

$$E_{v_i} = \{\alpha v_i | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Diremos que el conjunto  $V \subset \mathbb{R}^2$  es *invariante* bajo el mapeo lineal (1.4), si para toda  $x_0 \in V$ ,  $A^n x_0 \in V$ , para toda  $n = 1, 2, \dots$

**Lema 3.** Los espacios  $E_{v_1}$  y  $E_{v_2}$  son invariantes.

*Demostración.* Observe que:

$$J = P^{-1}P = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} w_1^T v_1 & w_1^T v_2 \\ w_2^T v_1 & w_2^T v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir

$$w_i^T v_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ahora bien, sea  $x_0 \in E_{v_1}$ , es decir, existe  $\alpha$  tal que  $x_0 = \alpha v_1$ . Probaremos que  $x_n = A^n x_0 \in E_{v_1}$ , para toda  $n$ .

Observe que:

$$\begin{aligned} w_1^T x_0 &= w_1^T (\alpha v_1) = \alpha (w_1^T v_1) = \alpha \\ w_2^T x_0 &= w_2^T (\alpha v_1) = \alpha (w_2^T v_1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (1.5)

$$\begin{aligned} x_n &= \lambda_1^n (w_1^T x_0) v_1 + \lambda_2^n (w_2^T x_0) v_2 \\ &= (\lambda_1^n \alpha) v_1, \end{aligned}$$

es decir,  $x_n \in E_{v_1}$  para toda  $n$ .

La demostración para  $E_{v_2}$  es análoga. □

**Ejemplo 1.2.2** (Un atractor hiperbólico). *Considere la siguiente matriz de coeficientes en forma normal de Jordan:*

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

*Analice la dinámica del mapeo lineal  $x \mapsto Ax$ .*

Solución. Primero necesitamos encontrar los puntos fijos del mapeo  $x \mapsto Ax$ , esto es, determinar las soluciones del sistema lineal  $(A - I)\bar{x} = 0$ . Dado que  $A - I$  es invertible, el origen  $\bar{x} = 0$  es el único punto fijo del mapeo lineal. Las potencias de  $A$  están dadas por

$$A^n = \begin{pmatrix} 0.9^n & 0 \\ 0 & 0.8^n \end{pmatrix}.$$

Es evidente que  $A^n$  se aproxima a la matriz cero cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Así pues, el origen es un punto fijo asintóticamente estable.

Al examinar los retratos fase de mapeos en el plano, debemos tener en cuenta que una órbita es una sucesión discreta de puntos, y no una curva continua.

**Ejemplo 1.2.3** (Un atractor hiperbólico con reflexión). *Analice la dinámica del mapeo lineal con matriz de coeficientes*

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

Solución. De (1.5) se sigue que

$$x_n = A^n x_0 = (0.9)^n x_{01} v^1 + (-1)^n (0.8)^n x_{02} v^2,$$

donde

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}.$$

Así que,  $x_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  para cada  $x_0$ . Sin embargo, debido a la presencia de los valores propios negativos, la órbita positiva a través de  $x_0$  da saltos hacia abajo y hacia arriba cruzando el eje horizontal.  $\square$

#### 1.2.4. Valores propios reales repetidos

Sea  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  valor propio de  $A$  con vector propio  $v_0$  y vector propio generalizado  $v_1$ .

Sean  $P = (v_0 \ v_1)$  y  $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix}$ , entonces

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$J = \lambda_0 I + N,$$

con  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $N^k = 0$ ,  $k = 2, \dots$ . Entonces

$$\begin{aligned} J^n &= (\lambda_0 I + N)^n = \lambda_0^n I + n\lambda_0^{n-1}N \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} x_n &= PJ^n P^{-1} x_0 \\ &= (v_0 \ v_1) \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0^T x_0 \\ w_1^T x_0 \end{pmatrix} \\ x_n &= (\lambda_0^n (w_0^T x_0) + n\lambda_0^{n-1} (w_1^T x_0)) v_0 + (\lambda_0^n w_1^T x_0) v_1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Lema 4.** Si  $|\lambda_0| < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_0^{n-1} = 0$$

*Demostración.* Usando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_0^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_0^{1-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\lambda_0^{1-n} \ln(\lambda_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\lambda_0^{n-1}}{\ln(\lambda_0)} = 0$$

□

Hemos probado entonces el siguiente lema.

**Lema 5.** Si  $|\lambda_0| < 1$  entonces  $x_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

□

**Corolario 2.** Si  $|\lambda_0| > 1$  entonces  $x_n$  diverge.

□

Al igual que en el caso anterior, el espacio vectorial

$$E_{v_0} = \{\alpha v_0 | \alpha \in \mathbb{R}\},$$

es un espacio invariante bajo el mapeo (1.4).

**Lema 6.**  $E_{v_0}$  es invariante.

*Demostración.* Sea  $x_0 \in E_{v_0}$ , es decir,  $x_0 = \alpha v_0$ , para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} w_0^T x_0 &= w_0^T (\alpha v_0) = \alpha (w_0^T v_0) = \alpha \\ w_1^T x_0 &= w_1^T (\alpha v_0) = \alpha (w_1^T v_0) = 0. \end{aligned}$$

Luego, de (1.6)

$$x_n = \lambda_0^n (\alpha) v_0 \in E_{v_0}.$$

□

### 1.2.5. Valores propios complejos

Sean  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  los valores propios de  $A$ . Sea  $v = v_1 + iv_2$  un vector propio asociado a  $\lambda_1$ . Sean  $P = (v_2 \ v_1)$  y  $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix}$ , entonces

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Consideremos la forma polar de  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1 = |\lambda_1|e^{i\theta} = |\lambda_1|(\cos \theta + i \sin \theta) = |\lambda_1| \cos \theta + i|\lambda_1| \sin \theta,$$

con

$$|\lambda_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ y } \tan(\theta) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Luego

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} |\lambda_1| \cos \theta & -|\lambda_1| \sin \theta \\ |\lambda_1| \sin \theta & |\lambda_1| \cos \theta \end{pmatrix} = |\lambda_1| \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= |\lambda_1| R_\theta, \end{aligned}$$

donde  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  es la rotación por  $\theta$  radianes.

**Propiedad 1.**  $R_\theta^n = R_{n\theta}$

*Demostración.* Por inducción matemática.

Sea  $n = 2$

$$\begin{aligned} R_\theta^2 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -(2 \cos \theta \sin \theta) \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= R_{2\theta}. \end{aligned}$$

Supongamos que se vale para  $n$ :

$$R_\theta^n = R_{n\theta}.$$

Debemos probar que

$$R_\theta^{n+1} = R_{(n+1)\theta}.$$



Pero,

$$\begin{aligned}
 R_\theta^{n+1} = R_\theta^n R_\theta = R_{n\theta} R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta & -(\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta) \\ \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta & \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix} \\
 &= R_{(n+1)\theta}.
 \end{aligned}$$

□

Tenemos entonces que

$$J^n = |\lambda_1|^n R_\theta^n = |\lambda_1|^n R_{n\theta},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 x_n &= A^n x_0 \\
 &= P J^n P^{-1} x_0 \\
 x_n &= |\lambda_1|^n P R_{n\theta} P^{-1} x_0.
 \end{aligned}$$

Hemos probado entonces el siguiente Lema.

**Lema 7.** Si  $|\lambda_1| < 1$ , entonces  $x_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

□

**Corolario 3.** Si  $|\lambda_1| > 1$ , entonces  $x_n$  diverge.

□

Los anteriores lemas nos prueban el siguiente resultado.

**Teorema 8.** Considere el mapeo lineal en el plano

$$x \mapsto Ax,$$

y suponga que  $A$  tiene valores propios con módulo menor a uno, entonces el punto fijo  $x = 0$  es asintóticamente estable. Si al menos un valor propio tiene módulo mayor a uno, entonces el origen es inestable.

□

**Observación 1.** Este resultado es válido para sistemas en  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.2.6. Mapeos no lineales en el plano

Considere el sistema no lineal en el plano

$$x \mapsto f(x), \quad (1.7)$$

y sea  $\bar{x}$  un punto fijo de  $f$ ,  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Llamaremos la *linealización* de (1.7) en  $x = \bar{x}$ , al sistema lineal

$$x \mapsto Df(\bar{x})x, \quad (1.8)$$

donde, si  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ , entonces la matriz Jacobiana evaluada en el punto fijo esta dada de la siguiente manera

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

**Definición 9.** Diremos que el punto fijo  $\bar{x}$  del sistema (1.7) es hiperbólico, si los valores propios de  $Df(\bar{x})$  tienen módulo distinto de uno. En caso contrario diremos que es no-hiperbólico.

Más adelante consideraremos a la Jacobiana para dimensión mayor.

**Teorema 9.** (Hartman-Grobman) Sea  $f$  una función  $C^1$  con un punto fijo  $\bar{x}$ .

- i) Si todos los valores propios de la matriz  $Df(\bar{x})$  tienen módulo menor que uno, entonces el punto fijo  $\bar{x}$  es asintóticamente estable.
- ii) Si al menos uno de los valores propios de  $Df(\bar{x})$  tiene módulo mayor que uno, entonces  $\bar{x}$  es inestable.

□

**Ejemplo 1.2.7** (Mapeo logístico con retardo). Considere la ecuación escalar en diferencias de segundo orden

$$y_{n+1} = \lambda y_n(1 - y_{n-1}), \quad (1.9)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro real positivo. Este es el modelo logístico discreto de una sola población, salvo que el término no lineal que regula el crecimiento de la población contiene un retardo en el tiempo de una generación. Explique la geometría de la dinámica de la ecuación en diferencias.

Solución. Para explicar la geometría de la dinámica de la ecuación diferencial de segundo orden, es conveniente convertirlo a un mapeo en el plano equivalente de primer orden. Con este fin, si hacemos

$$x_1^n = y_{n-1}, \quad x_2^n = y_n,$$

entonces obtenemos el sistema de primer orden equivalente

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= x_2^n \\ x_2^{n+1} &= \lambda x_2^n (1 - x_1^n). \end{aligned}$$

Para evitar el exceso de supraíndices, preferimos escribir este sistema de ecuaciones en diferencias como la iteración del mapeo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda x_2 (1 - x_1) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

al cual se le conoce como *mapeo logístico con retardo*.

El mapeo (1.10) tiene dos puntos fijos, uno es el  $(0, 0)$  y el otro es  $(1 - \frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda})$ . La matriz jacobiana en el origen está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

con valores propios 0 y  $\lambda$ , ya que la matriz es diagonal superior. Por tanto, el origen es asintóticamente estable si  $0 < \lambda < 1$  e inestable si  $\lambda > 1$ .

Ahora, la matriz jacobiana evaluada en el punto fijo  $(1 - \frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda})$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

con valores propios  $\mu(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5 - 4\lambda})$ ,  $\bar{\mu}(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5 - 4\lambda})$ . Para  $1 < \lambda < 2$  los valores propios tienen módulo menor que 1. Luego, el punto fijo es asintóticamente estable (ver figura 1.3).

Para  $\lambda = 2$ , los valores propios en el punto fijo  $(1 - \frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  tienen módulo igual a uno (está sobre el círculo unitario complejo) y por lo que el punto fijo es no-hiperbólico. En consecuencia, la estabilidad del punto fijo no puede ser determinada por linealización y depende de términos no lineales.

□

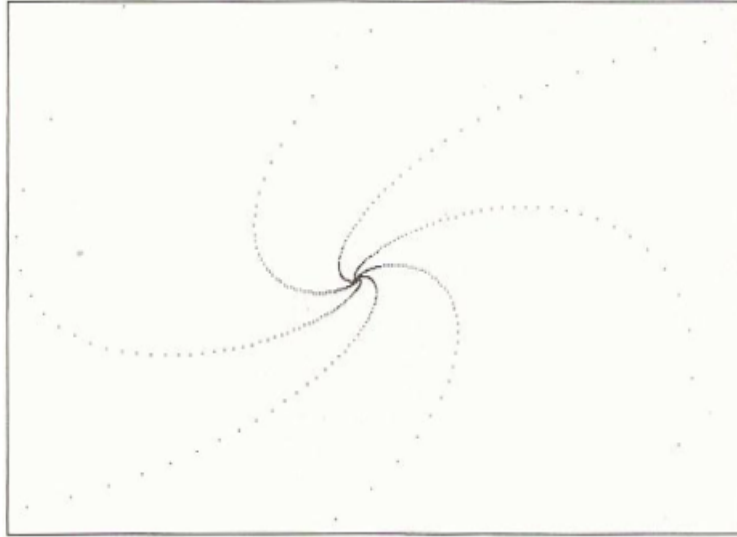


Figura 1.3: Punto fijo asintóticamente estable del mapeo logístico con retardo (1.10) en  $(1 - \frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda})$  para el valor del parámetro  $\lambda = 1.98$ . Esta es una órbita simple, se obtuvo de una condición inicial.

### 1.3. Bifurcaciones de codimensión uno en sistemas discretos

En esta sección haremos sólo la presentación de tres bifurcaciones de codimensión uno de puntos fijos de sistemas dinámicos discretos: la silla-nodo, duplicación de período y Neimark-Sacker. La presentación se hace en las dimensiones más bajas en que éstas ocurren.

Consideremos un sistema dinámico discreto, el cual depende de un parámetro

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde el mapeo  $f$  es suave con respecto a  $x$  y  $\alpha$ . Sea  $x = x_0$  un punto fijo hiperbólico del sistema para  $\alpha = \alpha_0$ . Vamos a analizar este punto fijo y sus valores propios  $\mu$  mientras varía el parámetro  $\alpha$ . Es claro que hay, genéricamente, tres formas en las cuales puede ser violada la condición de hiperbolicidad. Una forma es que un simple valor propio positivo aproxima el círculo unitario y tenemos  $\mu_1 = 1$  (ver fig 1.4 (a)), ó un simple multiplicador negativo aproxima al círculo unitario y tenemos  $\mu_1 = -1$  (ver fig 1.4 (b)), ó una pareja simple de multiplicadores complejos alcanza al círculo unitario y tenemos  $\mu_{1,2} = e^{i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$  (ver fig 1.4 (c)), para algún valor del parámetro.

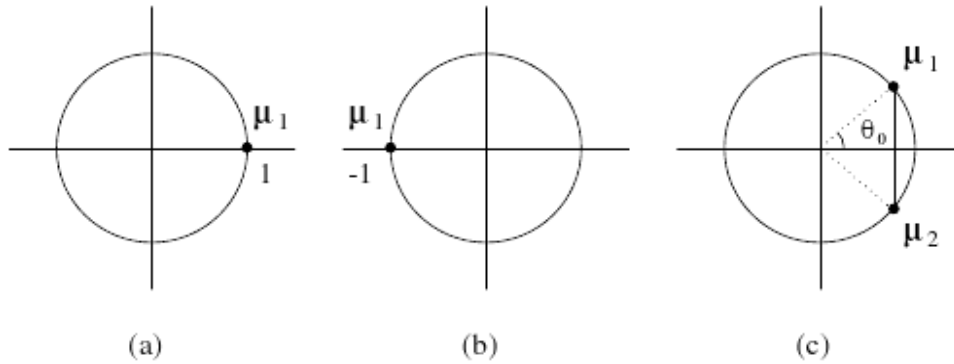


Figura 1.4: (a) silla-nodo, (b) duplicación de período, (c) Neimark-Sacker

**Definición 10.** La bifurcación asociada con la aparición de  $\mu_1 = 1$  es llamada bifurcación silla-nodo.

**Definición 11.** La bifurcación asociada con la aparición de  $\mu_1 = -1$  es llamada bifurcación duplicación de período.

**Definición 12.** La bifurcación correspondiente a la presencia de  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$ , es llamada bifurcación Neimark-Sacker.

Note que las bifurcaciones silla-nodo y duplicación de período son posibles si  $n \geq 1$ , pero para la bifurcación Neimark-Sacker se necesita que  $n \geq 2$ .



# Capítulo 2

---

## *Bifurcación silla-nodo*

Uno de los tipos más simples de bifurcación ocurre cuando, repentinamente, aparecen o desaparecen los puntos fijos. En este tipo de fenómenos nace un punto fijo y se escinde inmediatamente en un par de puntos fijos, uno atractor y uno repulsor. Cualquier bifurcación de puntos fijos o ciclos que proceden de esta manera se llama *bifurcación tangente* ó *bifurcación silla nodo*. Esta separación (o unión) es bastante similar a algunas bifurcaciones de los puntos de equilibrio que encontramos en ecuaciones diferenciales. En este capítulo presentamos la forma normal de esta bifurcación, la dinámica alrededor de los puntos fijos y se establecen las condiciones para que ocurra la bifurcación.

### 2.1. Forma normal de la bifurcación silla-nodo

Consideremos el siguiente sistema dinámico unidimensional dependiente de un parámetro

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad (2.1)$$

el cual es invertible para  $|\alpha|$  pequeña en una vecindad del origen. El sistema tiene el punto fijo no hiperbólico  $x_0 = 0$ , para  $\alpha = 0$ , ya que

$$f_x(x, \alpha) = 1 + 2x,$$

y por lo tanto,

$$\mu = f_x(0, 0) = 1.$$

El comportamiento del sistema cerca de  $x = 0$  para  $|\alpha|$  pequeña se muestra en la figura 2.1. Para  $\alpha < 0$  hay dos puntos fijos en el sistema:

$$\begin{aligned}\alpha + x + x^2 &= x \\ \alpha + x^2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{-\alpha},\end{aligned}$$

y como se observa en el diagrama, el punto  $x_1$  es inestable y el  $x_2$  es estable. Cuando  $\alpha$  cruza el cero desde valores negativos hacia valores positivos, los dos puntos fijos (estable e inestable) se colapsan en el origen en  $\alpha = 0$  un punto fijo inestable, y después desaparece.

Para  $\alpha > 0$  no hay puntos fijos en el sistema. Esta es una bifurcación silla-nodo en el sistema dinámico de tiempo discreto.

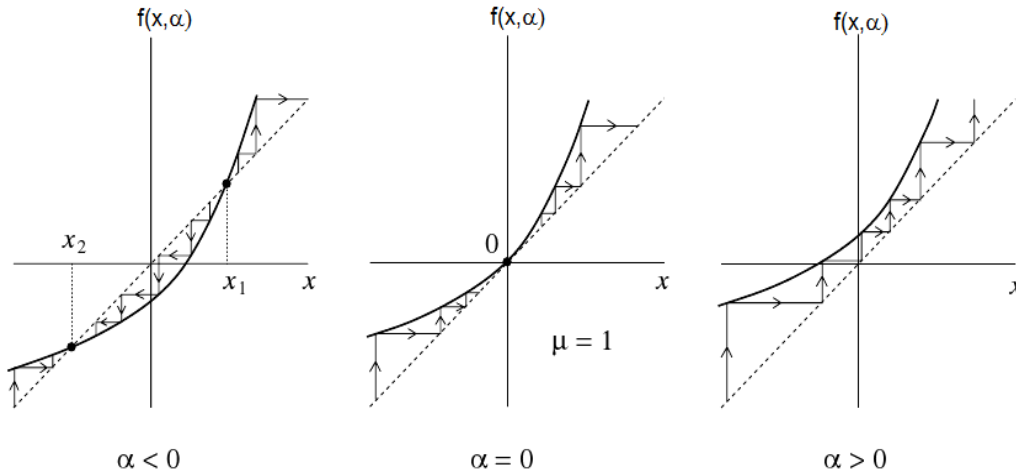


Figura 2.1: Bifurcación silla-nodo.

Existe otra forma usual de presentar esta bifurcación, el cual consiste en hacer un diagrama de bifurcación en el producto directo de la fase y los espacios de parámetros, a saber, en el plano  $(x, \alpha)$ . El conjunto de puntos fijos  $x - f(x, \alpha) = 0$  es simplemente la parábola  $\alpha = -x^2$ . Ver fig 2.2. Fijando algún  $\alpha$ , podemos determinar el número de puntos fijos en el sistema para este valor del parámetro.

## 2.2. Teorema de bifurcación silla-nodo

Mostraremos que el sistema (2.1) (con un posible cambio de signo del término  $x^2$ ) es una forma normal topológica de un sistema discreto unidimensional genérico que tiene una bifurcación silla-nodo.



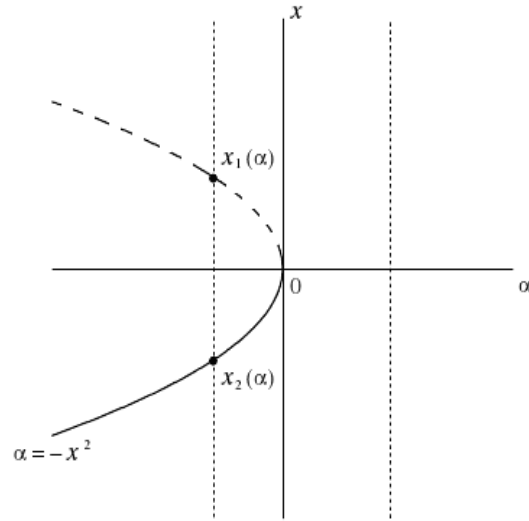


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación.

**Teorema 10** (silla-nodo). *Considere el sistema unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

con  $f$  suave, tal que en  $\alpha = 0$  tiene un punto fijo  $x_0 = 0$ . Supóngase que las siguientes condiciones se satisfacen:

- |                             |                                |
|-----------------------------|--------------------------------|
| H1) $f_x(0, 0) = 1$         | Condición de no-hiperbolicidad |
| H2) $f_{xx}(0, 0) \neq 0$   | Condición de no-degeneracidad  |
| H3) $f_\alpha(0, 0) \neq 0$ | Condición de transversalidad   |

Entonces, existen coordenadas suaves y cambios de parámetros que transforman el sistema en

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \eta^2 + O(|\eta, \beta|^3).$$

*Demostración.* Expandiendo  $f(x, \alpha)$  en serie de Taylor alrededor de  $(x, \alpha) = (0, 0)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + O(|x, \alpha|^3) \end{aligned}$$

Por  $H1$ ) y  $H2$ ) tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x, \alpha) &= x + f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + O(|x, \alpha|^3) \\
&= x + \left[ f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + O(|\alpha|^3) \right] + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \left( x + \frac{f_{x\alpha}(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)}\alpha \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \left( \frac{f_{x\alpha}(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \right)^2 \alpha^2 + O(|x, \alpha|^3) \\
&= x + \left[ f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 - \frac{1}{2} \frac{f_{x\alpha}^2(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \alpha^2 + O(|\alpha|^3) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \left( x + \frac{f_{x\alpha}(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)}\alpha \right)^2 + O(|x, \alpha|^3).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
x \mapsto x + \left[ f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 - \frac{1}{2} \frac{f_{x\alpha}^2(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \alpha^2 + O(|\alpha|^3) \right] \\
+ \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \left( x + \frac{f_{x\alpha}(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)}\alpha \right)^2 + O(|x, \alpha|^3).
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= x + \left[ f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 - \frac{1}{2} \frac{f_{x\alpha}^2(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \alpha^2 + O(|\alpha|^3) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \left( x + \frac{f_{x\alpha}(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)}\alpha \right)^2 + O(|x, \alpha|^3).
\end{aligned}$$

Consideremos la transformación  $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por

$$\begin{aligned}
y &= x + \frac{f_{x\alpha}(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)}\alpha \\
\mu &= f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2} \left( f_{\alpha\alpha}(0, 0) - \frac{f_{x\alpha}^2(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \right) \alpha^2 + O(|\alpha|^3)
\end{aligned}$$

Probaremos utilizando el teorema de función implícita que esta transformación es un cambio de coordenadas, es decir, que existe  $T^{-1}$ . En efecto, sea

$$F(\alpha, \mu) = f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2} \left( f_{\alpha\alpha}(0, 0) - \frac{f_{x\alpha}^2(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \right) \alpha^2 + O(\alpha^3) - \mu.$$

Observemos que  $F(0, 0) = 0$  y

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, \mu) = f_\alpha(0, 0) + \alpha \left( \frac{f_{x\alpha}^2(0, 0)}{f_{xx}(0, 0)} \right) + O(\alpha^2),$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = f_{\alpha}(0,0) \neq 0.$$

Se sigue del teorema de función implícita que existe una función suave  $h$  tal que  $\alpha = h(\mu)$  con  $h(0) = 0$ . Por lo tanto, la transformación  $T$  es invertible y

$$T^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \frac{f_{x\alpha}(0,0)}{f_{xx}(0,0)}h(\mu) \\ h(\mu) \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{y} - \frac{f_{x\alpha}(0,0)}{f_{xx}(0,0)}h(\mu) \\ \tilde{y} &= \tilde{x} + \frac{f_{x\alpha}(0,0)}{f_{xx}(0,0)}h(\mu) \\ &= x + \mu + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)y^2 + \frac{f_{x\alpha}(0,0)h(\mu)}{f_{xx}(0,0)} + O(|x, \alpha|^3) \\ &= \mu + y + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)y^2 + O(|y, \mu|^3), \end{aligned}$$

o bien,

$$y \mapsto \mu + y + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)y^2 + O(|y, \mu|^3). \quad (2.3)$$

Finalmente, consideremos el siguiente reescalamiento

$$\begin{aligned} \eta &= sy, \\ \beta &= s\mu, \end{aligned}$$

con  $s = \frac{1}{2} |f_{xx}(0,0)|$ . Al aplicarlo en (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= s(\mu + y + \frac{1}{2}f_{xx}y^2 + O(|y, \mu|^3)) \\ &= s\mu + sy + \frac{1}{2}f_{xx}sy^2 + O(y^3) \\ &= \beta + s \left( \frac{\eta}{s} \right) + \frac{s}{2}f_{xx} \left( \frac{\eta}{s} \right)^2 + O(\eta^3) \\ &= \beta + \eta + \frac{s\eta^2}{2s^2}f_{xx} + O(\eta^3) \\ &= \beta + \eta + \frac{\eta^2 f_{xx}}{2s^2} + O(\eta^3) \\ &= \beta + \eta + \eta^2 \frac{f_{xx}}{|f_{xx}|} + O(\eta^3), \end{aligned}$$

pero como  $\frac{f_{xx}}{|f_{xx}|} = \pm 1$ , entonces

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \eta^2 + O(|\eta, \beta|^3).$$

□

# Capítulo 3

---

## *Bifurcación duplicación de período*

Uno de los tipos de bifurcaciones más importantes en sistemas discretos, es aquella en la cual se produce un nuevo ciclo con período doble al del ciclo original. Cualquier bifurcación donde existe un punto fijo que cambia de atractor a repulsor (o viceversa) con la derivada pasando por -1, y acompañada por el nacimiento de un nuevo ciclo con el doble del período original, se llama *bifurcación duplicación de período*. Tal bifurcación se presenta en este capítulo.

### 3.1. Forma normal de la bifurcación duplicación de período

Consideremos el sistema dinámico unidimensional

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha), \quad (3.1)$$

el cual depende de un parámetro. El mapeo es invertible para  $|\alpha|$  pequeña en una vecindad del origen  $x = 0$ . El sistema (3.1) tiene los siguientes puntos fijos,

$$\begin{aligned} -x - x\alpha + x^3 &= x \\ x^3 - x\alpha - 2x &= 0 \\ x(x^2 - \alpha - 2) &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto  $x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{2 + \alpha}$ . Tenemos que

$$\mu = f_x(x, \alpha) = 3x^2 - \alpha - 1.$$

En el punto fijo  $x = 0$ , para toda  $\alpha$  lo suficientemente pequeña se tiene que, si  $\alpha \lesssim 0$ , entonces  $\mu > -1$ , y por lo tanto  $x = 0$  es estable. Si  $\alpha \gtrsim 0$ , entonces  $\mu < -1$ , por lo tanto  $x = 0$  es inestable. Tal como se muestra en la figura 3.1.

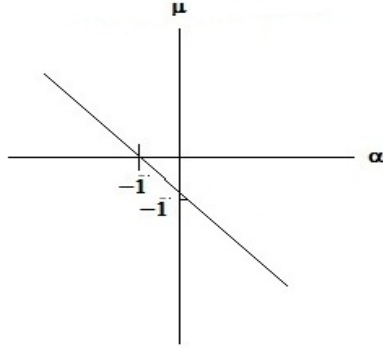


Figura 3.1:  $\mu(\alpha) = -\alpha - 1$ .

En  $\alpha = 0$  el punto fijo  $x = 0$  es no hiperbólico, dado que  $\mu = f_x(0, 0) = -1$ . Considere la segunda iteración  $f^2(x, \alpha)$  del mapeo (3.1). Si  $y = f(x, \alpha)$ , entonces

$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) &= f(y, \alpha) = -(1 + \alpha)y + y^3 \\ &= -(1 + \alpha)[-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 \\ &= (1 + \alpha)^2x - (1 + \alpha)x^3 - (1 + \alpha)^3x^3 - 3(1 + \alpha)^2x^5 - 3(1 + \alpha)x^7 + x^9 \\ &= (1 + \alpha)^2x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 - 3(1 + \alpha)^2x^5 + O(x^7) \end{aligned}$$

Para encontrar los puntos fijos de  $f^2(x, \alpha)$  debemos resolver la ecuación

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^2x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 - 3(1 + \alpha)^2x^5 + O(x^7) &= x \\ \Leftrightarrow (1 + \alpha)^2x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 - 3(1 + \alpha)^2x^5 + O(x^7) - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x [(1 + \alpha)^2 - 1 - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^2 - 3(1 + \alpha)^2x^4 + O(x^6)] &= 0, \end{aligned}$$

de donde vemos que  $x = 0$  es un punto fijo. Para encontrar los otros puntos fijos debemos resolver

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^2 - 1 - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^2 - 3(1 + \alpha)^2x^4 + O(x^6) &= 0 \\ x^2[(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2) - 3(1 + \alpha)^2x^2 + O(x^4)] &= (1 + \alpha)^2 - 1 \\ x^2[c_0(\alpha) + c_1(\alpha)x^2 + \dots] &= 2\alpha + \alpha^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_0(\alpha) &= (1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2) \\ c_1(\alpha) &= -3(1 + \alpha)^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2\alpha + \alpha^2}{c_0(\alpha) + c_1(\alpha)x^2 + \dots} \\ &= \frac{2\alpha + \alpha^2}{c_0(\alpha)} \left[ \frac{1}{1 + \tilde{c}_1(\alpha)x^2 + \dots} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde

$$\tilde{c}_j(\alpha) = \frac{c_j(\alpha)}{c_0(\alpha)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

si hacemos  $r = -(\tilde{c}_1(\alpha)x^2 + \tilde{c}_2(\alpha)x^3 + \dots)$  tendremos la serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-r} &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \\ &= 1 - (\tilde{c}_1(\alpha)x^2 + \tilde{c}_2(\alpha)x^3 + \dots) + (-\tilde{c}_1(\alpha)x^2 - \tilde{c}_2(\alpha)x^3 + \dots)^2 + \dots \end{aligned}$$

sustituyendo en (3.2)

$$x^2 = \frac{2\alpha + \alpha^2}{c_0(\alpha)} - \frac{\tilde{c}_1(\alpha)(2\alpha + \alpha^2)}{c_0(\alpha)}x^2 + O(x^3). \quad (3.3)$$

Para  $x$  pequeña despreciamos los términos de orden mayor a 3 en (3.3), obteniendo

$$\begin{aligned} x^2 \left[ 1 + \frac{\tilde{c}_1(\alpha)(2\alpha + \alpha^2)}{c_0(\alpha)} \right] &= \frac{2\alpha + \alpha^2}{c_0(\alpha)} \\ x^2 \left[ 1 + \frac{c_1(\alpha)(2\alpha + \alpha^2)}{c_0^2(\alpha)} \right] &= \frac{2\alpha + \alpha^2}{2} \left( \frac{1}{1 + O(\alpha)} \right) \\ x^2 \left[ \frac{c_0^2(\alpha) + c_1(\alpha)(2\alpha + \alpha^2)}{c_0^2(\alpha)} \right] &= \left( \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \right) (1 - O(\alpha)) \\ x^2 \left[ \frac{4 - 6\alpha + O(\alpha^2)}{4 + O(\alpha^2)} \right] &= \alpha + O(\alpha^2) \\ x^2 \left[ \frac{4 - 6\alpha + O(\alpha^2)}{4} \left( \frac{1}{1 + O(\alpha^2)} \right) \right] &= \alpha + O(\alpha^2) \\ x^2 [1 + O(\alpha)] &= \alpha + O(\alpha^2) \\ x^2 &= \frac{\alpha + O(\alpha^2)}{1 + O(\alpha)} \\ x^2 &= \alpha + O(\alpha^2) \\ x &= \pm\sqrt{\alpha + O(\alpha^2)} \\ x &= \pm\sqrt{\alpha} + O(\alpha). \end{aligned}$$

Tenemos entonces, que para  $\alpha > 0$  tenemos otros dos puntos fijos. Tales puntos se pueden ver en la figura 3.2. Ahora utilizando el Teorema 1, veamos su estabilidad

$$\begin{aligned}
 f_x^2(x, \alpha) &= (1 + \alpha)^2 - 3[(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^2 + O(x^4) \\
 f_x^2(\pm\sqrt{\alpha}, \alpha) &= (1 + \alpha)^2 - 3[(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]\alpha + O(\alpha^2) \\
 &= (1 + \alpha)[(1 + \alpha) - 3(2 + 2\alpha + \alpha^2)\alpha] + O(\alpha^2) \\
 &= (1 + \alpha)[1 + \alpha - 6\alpha - 6\alpha^2 - 3\alpha^3] + O(\alpha^2) \\
 &= [1 - 5\alpha - 6\alpha^2 - 3\alpha^3 + \alpha - 5\alpha^2 - 6\alpha^3 - 3\alpha^4] + O(\alpha^2) \\
 &= 1 - 4\alpha + O(\alpha^2).
 \end{aligned}$$

para  $\alpha > 0$  pequeña los puntos esos dos puntos son estables.

Ahora bien,  $x = 0$  es punto fijo de  $f(x, \alpha)$  y  $f^2(x, \alpha)$ . Sean  $x_1 \neq 0$  y  $x_2 \neq 0$  los otros puntos fijos de  $f^2(x, \alpha)$ , es decir

$$\begin{aligned}
 f^2(\bar{x}_1, \alpha) &= \bar{x}_1 \\
 f^2(\bar{x}_2, \alpha) &= \bar{x}_2.
 \end{aligned}$$

Veamos que  $f(\bar{x}_j, \alpha) \neq 0$ ,  $j = 1, 2$ . Llamemos

$$\tilde{x} = f(\bar{x}_1, \alpha), \quad (3.4)$$

$\tilde{x}$  no puede ser cero pues

$$\begin{aligned}
 f(\tilde{x}, \alpha) &= f^2(\bar{x}_1, \alpha) = \bar{x}_1 \\
 f^2(\tilde{x}, \alpha) &= f(\bar{x}_1, \alpha) = \tilde{x},
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

entonces  $\tilde{x}$  es punto fijo de  $f^2(x, \alpha)$ .

°) Si  $\tilde{x} = 0$ ,

$$x_1 = f(\tilde{x}, \alpha) = f(0) = 0,$$

por 3.5 es decir  $\bar{x}_1 = 0$ !

°) Si  $\tilde{x} = \bar{x}_1$ ,

$$f(\tilde{x}, \alpha) = f(\bar{x}_1, \alpha) = \tilde{x},$$

es decir  $\tilde{x}$  sería punto fijo de  $f$ , lo cual no es cierto. Por tanto  $\tilde{x} = \bar{x}_2$ .

Y así de 3.4 tenemos que

$$f(\bar{x}_1, \alpha) = \bar{x}_2.$$

Luego,

$$\bar{x}_1 = f^2(\bar{x}_1, \alpha) = f(\bar{x}_2, \alpha).$$



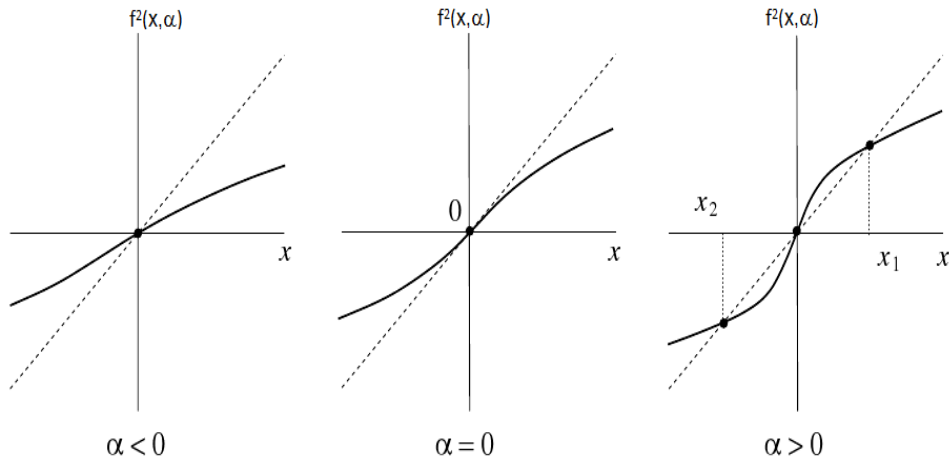


Figura 3.2: Segunda iteración del mapeo doble período.

Por lo tanto estos puntos constituyen un *ciclo de período dos* para el mapeo original  $f(x, \alpha)$ .

La figura 3.3 muestra el diagrama de bifurcación completo del sistema (3.1) con la ayuda del diagrama de **telaña**. Cuando  $\alpha$  se aproxima al cero por “arriba”, el período dos-ciclo “colapsa” y luego desaparece. Ésta es la bifurcación duplicación de período.

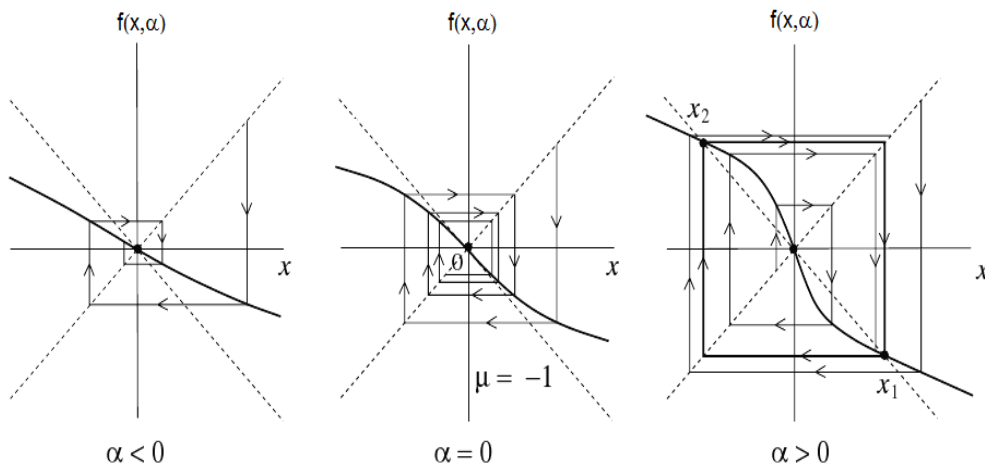


Figura 3.3: Bifurcación duplicación de período.

La otra forma de presentar esta bifurcación es usar el plano  $x-\alpha$  (ver figura 3.4). En esa figura, el eje horizontal corresponde al punto fijo del sistema (3.1) (estable para  $\alpha < 0$  e inestable para  $\alpha > 0$ ), mientras la “parábola” representa el ciclo estable de período dos  $\{x_1, x_2\}$  existente para  $\alpha > 0$ .

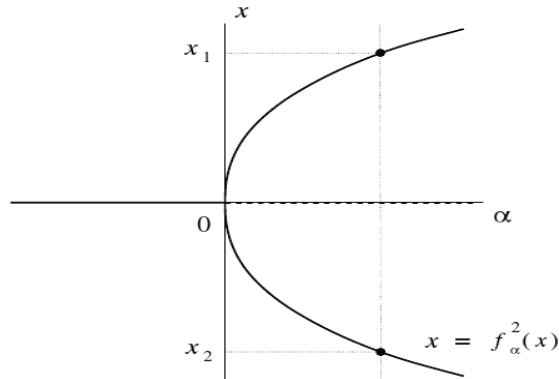


Figura 3.4: Una duplicación de período corresponde a una bifurcación de tenedor de la segunda iteración.

Como es usual, vamos a considerar el efecto de términos de orden superior en el sistema (3.1).

**Lema 11.** *El sistema*

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 + O(x^4)$$

*es localmente topológicamente equivalente en una vecindad del origen del sistema*

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3.$$

*Demostración.* Se omite la prueba. □

**Lema 12.** *Consideremos el sistema*

$$x \mapsto f(x, \alpha)$$

*con  $f$  suave. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:*

B1)  $f(0, 0) = 0$

B2)  $f_x(0, 0) = -1$ .

*Entonces,  $f(0, \alpha) = 0$ ;  $\alpha \approx 0$ .*

*Demostración.* Usaremos el Teorema de la Función Implícita. Sea  $g$  una función  $g(x, \alpha) = f(x, \alpha) - x$ . Por la condición B1) se tiene

$$g(0, 0) = f(0, 0) - 0 = 0.$$

Veamos que por la condición B2) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, \alpha) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) - 1 \\ \implies \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - 1 = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces podemos despejar  $x = x(\alpha)$ ,  $x(0) = 0$  en  $g(x, \alpha) = 0$

$$\begin{aligned} g(x, \alpha) &= 0 \\ g(x(\alpha), \alpha) &= 0; \alpha \approx 0 \\ g(x(\alpha), \alpha) &= f(x(\alpha), \alpha) - x(\alpha) = 0 \implies f(x(\alpha), \alpha) = x(\alpha). \end{aligned}$$

Por tanto,  $x(\alpha)$  es una curva de puntos fijos de  $f$  para  $\alpha \approx 0$ , por el teorema de la función implícita. Por lo tanto  $f(0, \alpha) = 0$ ,  $\alpha \approx 0$ .  $\square$

## 3.2. Teorema de duplicación de período

**Teorema 13** (Duplicación de período). *Consideremos el sistema unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con  $f$  suave. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

$$B1) \quad f(0, 0) = 0$$

$$B2) \quad f_x(0, 0) = -1$$

*Condición de no-hiperbolicidad*

$$B3) \quad \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0$$

*Condición de no-degeneración*

$$B4) \quad f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0.$$

*Condición de transversalidad*

Entonces, existen coordenadas suaves y cambios de parámetros que transforman el sistema en

$$y \mapsto -(1 + \beta)y \pm y^3 + O(y^4).$$

*Demostración.* Expandiendo  $f(x, \alpha)$  en series de Taylor alrededor de  $(x, \alpha) = (0, 0)$  obtenemos

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x, \alpha) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0)x^3 + \frac{1}{2}f_{xx\alpha}(0, 0)\alpha x^2 + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha x}(0, 0)x\alpha^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}f_{\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^3 + \frac{1}{24}f_{xxxx}(0, 0)x^4 + \frac{1}{6}f_{\alpha\alpha\alpha\alpha}\alpha^3 x \\ &\quad + \frac{1}{4}f_{xx\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 x^2 + \frac{1}{6}f_{xxx\alpha}(0, 0)\alpha x^3 + \dots \end{aligned}$$

De aquí, se tiene por el lema (12) que

$$f(0, \alpha) = f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^3 + \dots = 0.$$

Por B1) y B2) tenemos que

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x, \alpha) &= -x + f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0)x^3 + \frac{1}{2}f_{xx\alpha}(0, 0)\alpha x^2 + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha x}(0, 0)x\alpha^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}f_{\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^3 + \frac{1}{24}f_{xxxx}(0, 0)x^4 + \frac{1}{6}f_{\alpha\alpha\alpha\alpha}\alpha^3 x \\ &\quad + \frac{1}{4}f_{xx\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 x^2 + \frac{1}{6}f_{xxx\alpha}(0, 0)\alpha x^3 + \dots \end{aligned}$$

Factorizando obtenemos

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x, \alpha) &= \left( -1 + f_{x\alpha}(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha x}(0, 0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{x\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^3 + \dots \right) x \\ &\quad + \left( \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) + \frac{1}{2}f_{xx\alpha}(0, 0)\alpha + \frac{1}{4}f_{xx\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + \dots \right) x^2 \\ &\quad + \left( \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0) + \frac{1}{6}f_{xxx\alpha}(0, 0)\alpha + \dots \right) x^3 \\ &\quad + \left( f_\alpha(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^3 + \dots \right) + O(x^4) \end{aligned}$$

Entonces

$$x \mapsto f(x, \alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4), \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= -1 + f_{x\alpha}(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha x}(0, 0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{x\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^3 + \dots \\ f_2(\alpha) &= \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) + \frac{1}{2}f_{xx\alpha}(0, 0)\alpha + \frac{1}{4}f_{xx\alpha\alpha}(0, 0)\alpha^2 + \dots \\ f_3(\alpha) &= \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0) + \frac{1}{6}f_{xxx\alpha}(0, 0)\alpha + \dots \end{aligned}$$

Tomando  $f_1(\alpha) = -[1 - g(\alpha)]$ , donde

$$g(\alpha) = f_{x\alpha}(0,0)\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha x}(0,0)\alpha^2 + \frac{1}{6}f_{x\alpha\alpha\alpha}(0,0)\alpha^3 + \dots,$$

$g$  es una función suave tal que  $g(0) = 0$  y  $g'(0) = f_{x\alpha}(0,0) \neq 0$ , por B4). Por lo tanto, por el Teorema de la Función Implícita,  $g$  es invertible para  $\alpha \approx 0$  y localmente podemos introducir un nuevo parámetro  $\beta = g(\alpha) \Rightarrow \alpha = g^{-1}(\beta)$ , así nuestro mapeo (3.6) lo podemos escribir como

$$\tilde{x} = \mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 + O(x^4), \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu(\beta) &= -(1 + \beta) \\ a(\beta) &= f_2(\alpha) = f_2(g^{-1}(\beta)), \\ b(\beta) &= f_3(g^{-1}(\beta)). \end{aligned}$$

Observe que

$$a(0) = f_2(g^{-1}(0)) = f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0), \quad (3.8)$$

$$b(0) = f_3(g^{-1}(0)) = f_3(0) = \frac{1}{6}f_{xxx}(0,0). \quad (3.9)$$

Realizando el cambio de coordenadas

$$x = y + \delta y^2$$

donde  $\delta = \delta(\beta)$  y

$$\begin{aligned} y &= x - \delta y^2 \\ &= x - \delta(x - \delta y^2)^2 \\ &= x - \delta(x^2 - 2\delta y^2 x + \delta^2 y^4) \\ &= x - \delta x^2 + 2\delta^2 y^2 x - \delta^3 y^4 \\ &= x - \delta x^2 + 2\delta^2 x(x - \delta y^2)^2 - \delta^3(x - \delta y^2)^4 \\ &= x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

entonces,

$$\tilde{y} = \tilde{x} - \delta \tilde{x}^2 + 2\delta^2 \tilde{x}^3 + O(\tilde{x}^4).$$

Ahora, sustituyendo el cambio de variable  $x = y + \delta y^2$  tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= (\mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3) - \delta (\mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3)^2 + 2\delta^2(\mu(\beta)x \\ &\quad + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3)^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos

$$\tilde{y} = \mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 - \delta(\mu^2x^2 + 2a(\beta)\mu x^3) + 2\delta^2(\mu^3x^3) + O(x^4).$$

Luego, si sustituimos  $x$  por  $y + \delta y^2$  en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \mu(\beta)(y + \delta y^2) + a(\beta)(y + \delta y^2)^2 + b(\beta)(y + \delta y^2)^3 - \delta(\mu^2(y + \delta y^2)^2 + 2a(\beta)\mu(y + \delta y^2)^3) \\ &\quad + 2\delta^2(\mu^3(y + \delta y^2)^3) + O(y^4) \\ &= \mu y + \mu\delta y^2 + a(y^2 + 2\delta y^3) + by^3 - \delta((\mu^2 y^2 + 2\delta\mu^2 y^3) + 2a\mu y^3) + 2\delta^2\mu^3 y^3 + O(y^4) \\ &= \mu y + \mu\delta y^2 + ay^2 + a2\delta y^3 + by^3 - \delta\mu^2 y^2 - 2\delta^2\mu^2 y^3 - 2\delta a\mu y^3 + 2\delta^2\mu^3 y^3 + O(y^4) \\ &= \mu y + (a + \mu\delta - \delta\mu^2)y^2 + (b + 2\delta a - 2\delta\mu(a + \delta\mu - \delta\mu^2))y^3 + O(y^4). \end{aligned}$$

Así que, los términos cuadráticos pueden ser eliminados para  $|\mu|$  lo suficientemente pequeña al hacer

$$\delta = \frac{a}{\mu^2 - \mu},$$

y nos queda

$$\tilde{y} = \mu y + \left[ b + 2 \left( \frac{a}{\mu^2 - \mu} \right) a \right] y^3 + O(y^4).$$

Simplificando obtenemos

$$\tilde{y} = \mu y + \left( b + \frac{2a^2}{\mu^2 - \mu} \right) y^3 + O(y^4),$$

y así, obtenemos que

$$y \mapsto -(1 + \beta)y + c(\beta)y^3 + O(y^4), \quad (3.10)$$

donde  $c(\beta) = b + \frac{2a^2}{\mu^2 - \mu}$ . Ahora de (3.8) y (3.9)

$$c(0) = b(0) + \frac{2a(0)^2}{\mu^2 - \mu} = \frac{1}{6}f_{xxx}(0,0) + \frac{1}{4}f_{xx}^2(0,0) \neq 0,$$

lo anterior por la hipótesis B3). Aplicamos el reescalamiento  $y = \frac{\eta}{\sqrt{|c|}}$  y enseguida  $\tilde{\eta} = \sqrt{|c|}\tilde{y}$  y sustituimos en (3.10) para obtener

$$\tilde{\eta} = \sqrt{|c|} \left( -(1 + \beta) \frac{\eta}{\sqrt{|c|}} + c \left( \frac{\eta}{\sqrt{|c|}} \right)^3 \right) + O(\eta^4)$$

Realizando una serie de calculos llegamos a que

$$\tilde{\eta} = -(1 + \beta)\eta + \frac{c}{|c|}\eta^3 + O(\eta^4)$$

pero como  $\frac{c}{|c|} = \pm 1$ , entonces

$$\eta \mapsto -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$$

□

Utilizando el lema 11 llegamos al siguiente resultado general, el cual es la forma normal topológica para la bifurcación duplicación del período.

**Definición 13.** *Un sistema se dice ser genérico si cumple con las condiciones B1), B2), B3) y B4) del teorema anterior.*

**Teorema 14.** *Cualquier sistema uniparamétrico, genérico, escalar*

$$x \mapsto f(x, \alpha),$$

*tal que para  $\alpha = 0$  tiene el punto fijo  $x_0 = 0$ , con  $\mu = f_x(0, 0) = -1$ , es localmente topológicamente equivalente en una vecindad del origen a una de las siguientes formas normales:*

$$y \mapsto -(1 + \beta)y \pm y^3.$$





# Capítulo 4

---

## Bifurcación Neimark-Sacker

### 4.1. Forma normal de la bifurcación Neimark-Sacker

Consideremos el sistema discreto bi-dimensional

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left[ (1 + \alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right], \quad (4.1)$$

que depende del parámetro  $\alpha$ , para el cual  $\theta = \theta(\alpha)$ ,  $a = a(\alpha)$ ,  $b = b(\alpha)$  son funciones suaves del parámetro  $\alpha$ , y  $0 < \theta(0) < \pi$ ,  $a(0) \neq 0$ . Este sistema tiene un punto fijo en  $x_1 = x_2 = 0$  para toda  $\alpha$ :  $f(0, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Además, la matriz jacobiana

$$\begin{aligned} A &= Df(0, 0, \alpha) \\ &= (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \alpha) \cos \theta & -(1 + \alpha) \sin \theta \\ (1 + \alpha) \sin \theta & (1 + \alpha) \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es una matriz real expresada en forma de Jordan, por lo que sus valores propios son

$$\begin{aligned}\mu_{1,2}(\alpha) &= (1 + \alpha) \cos \theta \pm i(1 + \alpha) \sin \theta \\ &= (1 + \alpha)(\cos \theta \pm i \sin \theta) \\ &= (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestros valores propios son  $\mu_{1,2} = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}$ , lo cual hace al mapeo (4.1) invertible cerca del origen para  $|\alpha|$  pequeña. Como podemos ver, el origen es un punto fijo no-hiperbólico en  $\alpha = 0$ , debido a que los valores propios tienen módulo 1. Ahora, para analizar esta bifurcación, vamos a introducir la variable compleja  $z = x_1 + ix_2$ , su conjugado  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ , su módulo al cuadrado  $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$  y hagamos  $d = a + ib$ . Sea

$$w = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Px,$$

luego,

$$x = P^{-1}w = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} w = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w. \quad (4.2)$$

Denotemos a (4.1) como

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha).$$

Además,

$$x_n = P^{-1}w_n \iff w_n = Px_n,$$

por lo tanto,

$$w_{n+1} = Px_{n+1} = Pf(x_n, \alpha) = Pf(P^{-1}w_n, \alpha) = h(w_n, \alpha).$$

Tenemos entonces que el sistema (4.1) se transforma, a través del cambio de coordenadas (4.2), en

$$w_{n+1} = h(w_n, \alpha) = Pf(P^{-1}w_n, \alpha),$$

es decir,

$$w \mapsto Pf(P^{-1}w, \alpha).$$

Hagamos los cálculos. Observe que (4.1) la podemos escribir como

$$x \mapsto f(x, \alpha) = B[(1 + \alpha)x + |x|^2Cx],$$

donde  $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Luego,

$$\begin{aligned} Pf(P^{-1}w, \alpha) &= PB[(1 + \alpha)P^{-1}w + w^T(P^{-1})^T P^{-1}wCP^{-1}w] \\ &= (1 + \alpha)(PBP^{-1})w + (w^T K w)(PBCP^{-1})w. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} PBP^{-1} &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \\ w^T K w &= w^T (P^{-1})^T P^{-1} w \\ &= w^T \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w \\ &= \frac{1}{2} w^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = |z|^2, \\ PBCP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} de^{i\theta} & 0 \\ 0 & \bar{d}e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$w \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} w + |z|^2 \begin{pmatrix} de^{i\theta} & 0 \\ 0 & \bar{d}e^{-i\theta} \end{pmatrix} w,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \alpha)e^{i\theta} z + |z|^2 z de^{i\theta} \\ (1 + \alpha)e^{-i\theta} \bar{z} + |z|^2 \bar{z} \bar{d}e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Expresemos (4.3) en coordenadas polares. Sea  $z = \rho e^{i\varphi}$ . Si

$$z \mapsto \hat{f}(z, \alpha) = (1 + \alpha)e^{i\theta} z + |z|^2 z de^{i\theta}$$

entonces, buscamos los mapeos

$$\begin{aligned} \rho &\mapsto |\hat{f}(z, \alpha)|, \\ \varphi &\mapsto \arg(\hat{f}(z, \alpha)). \end{aligned}$$

Obsérvese que,

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(z, \alpha) &= (1 + \alpha)e^{i\theta}\rho e^{i\varphi} + (a + bi)e^{i\theta}\rho e^{i\varphi}\rho^2 \\
 &= (1 + \alpha)\rho e^{i(\theta+\varphi)} + \rho^3(a + bi)e^{i(\theta+\varphi)} \\
 &= [(1 + \alpha) + \rho^2(a + ib)]\rho e^{i(\theta+\varphi)} \\
 &= \rho[(1 + \alpha + \rho^2a) + i(\rho^2b)]e^{i(\theta+\varphi)} \\
 &= \rho e^{i(\theta+\varphi)}|\hat{w}|e^{i\arg(\hat{w})} \\
 &= \rho|\hat{w}|e^{i(\theta+\varphi+\arg(\hat{w}))},
 \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 |\hat{w}| &= \sqrt{(1 + \alpha + \rho^2a)^2 + (\rho^2b)^2}, \\
 \arg(\hat{w}) &= \tan^{-1}\left(\frac{\rho^2b}{1 + \alpha + \rho^2a}\right).
 \end{aligned}$$

De aquí que,

$$\begin{aligned}
 |f(z, \alpha)| &= \rho|\hat{w}|, \\
 \arg(f(z, \alpha)) &= \theta + \varphi + \arg(\hat{w}).
 \end{aligned}$$

Enseguida encontraremos  $|\hat{w}|$ :

$$\begin{aligned}
 |\hat{w}| &= \sqrt{(1 + \alpha + \rho^2a)^2 + \rho^4b^2} \\
 &= (1 + \alpha + \rho^2a)\sqrt{1 + \frac{\rho^4b^2}{(1 + \alpha + \rho^2a)^2}} \\
 &= (1 + \alpha + \rho^2a)[1 + \varphi(\rho^3)] \\
 &= 1 + \alpha + a\rho^2 + O(\rho^3).
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$|\hat{f}(z, \alpha)| = \rho(1 + \alpha + \rho^2a) + O(\rho^4).$$

Para el argumento tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \arg(\hat{f}(z, \alpha)) &= \tan^{-1} \left( \frac{\rho^2 b}{1 + \alpha + \rho^2 a} \right) \\
 &= \tan^{-1} \left( \frac{\rho^2 b}{(1 + \alpha) \left[ 1 + \frac{a\rho^2}{(1 + \alpha^2)} \right]} \right) \\
 &= \tan^{-1} \left( \frac{\rho^2 b}{1 + \alpha} \left( \frac{1}{1 + \frac{a\rho^2}{1 + \alpha^2}} \right) \right) \\
 &= \tan^{-1} \left( \frac{\rho^2 b}{1 + \alpha} \left[ 1 + \frac{a\rho^2}{(1 + \alpha^2)} + \dots \right] \right) \\
 &= \tan^{-1} \left( \frac{\rho^2 b}{1 + \alpha} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots,$$

por tanto,

$$\arg(\hat{f}(z, \alpha)) = O(\rho^2).$$

Así, obtenemos la forma polar del sistema (4.1),

$$\begin{cases} \rho & \mapsto \rho(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2) + O(\rho^4) \\ \varphi & \mapsto \varphi + \theta(\alpha) + O(\rho^2) \end{cases} \quad (4.4)$$

Las bifurcaciones de los retratos fase del sistema (4.4), cuando  $\alpha$  pasa a través del cero, pueden ser fácilmente analizadas utilizando esta última forma, dado que el mapeo de  $\rho$  es independiente de  $\varphi$ . La primera ecuación en (4.4) define un sistema dinámico unidimensional que tiene el punto fijo  $\rho = 0$  para todos los valores de  $\alpha$ . Analicemos el comportamiento de  $\rho$  utilizando el Teorema 1.

$$\begin{aligned}
 g(\rho) &= \rho + \alpha\rho + a\rho^3 + \dots \\
 g(0) &= 0 \\
 g'(\rho) &= 1 + \alpha + 3a\rho^2 + \dots \\
 g'(0) &= 1 + \alpha.
 \end{aligned}$$

Si  $\alpha \lesssim 0$  entonces  $1 + \alpha < 1$ , en base al Teorema 1, el punto fijo es *atractor*, ver figura 4.1. Si  $\alpha \gtrsim 0$ , entonces  $1 + \alpha > 1$ , por tanto el punto fijo es *repulsor*, ver figura 4.2. Si  $\alpha = 0$  entonces

$$\begin{aligned}
 g(\rho) &= \rho(1 + a\rho^2) + \dots \\
 g'(\rho) &= 1 + 3a\rho^2 + \dots \\
 g'(0) &= 1.
 \end{aligned}$$

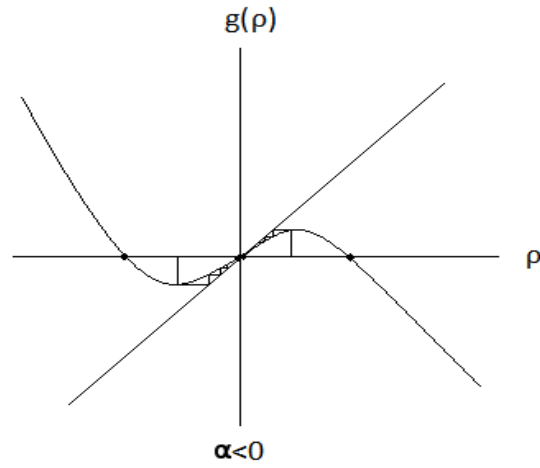


Figura 4.1: Dinámica de  $g(\rho)$  con  $\alpha < 0$ :  $\rho = 0$  atractor.

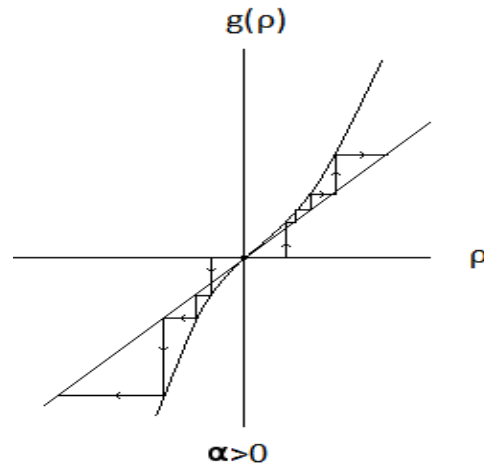


Figura 4.2: Dinámica de  $g(\rho)$  con  $\alpha > 0$ :  $\rho = 0$  repulsor.

Además, el  $\rho$ -mapeo de (4.4) tiene otro punto fijo, es decir,

$$\begin{aligned} \alpha + a(\alpha)\rho^2 &= 0 \\ \rho &= \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + O(\alpha), \end{aligned}$$

Analizando el comportamiento, de acuerdo al Teorema 1,

$$\begin{aligned} g'(\rho) &= 1 + \alpha + 3a \left( \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} \right)^2 + \dots \\ g'(0) &= 1 - 2\alpha, \end{aligned}$$

para  $\alpha > 0$ , el punto fijo es estable.

Para  $\alpha > 0$ , el  $\varphi$ -mapeo de (4.4) describe una rotación por un ángulo que depende de  $\rho$  y  $\alpha$ , que es aproximadamente igual a  $\theta(\alpha)$ . Así que, por superposición de los mapeos definidos por (4.4), obtenemos el siguiente diagrama de bifurcación del sistema bidimensional original.

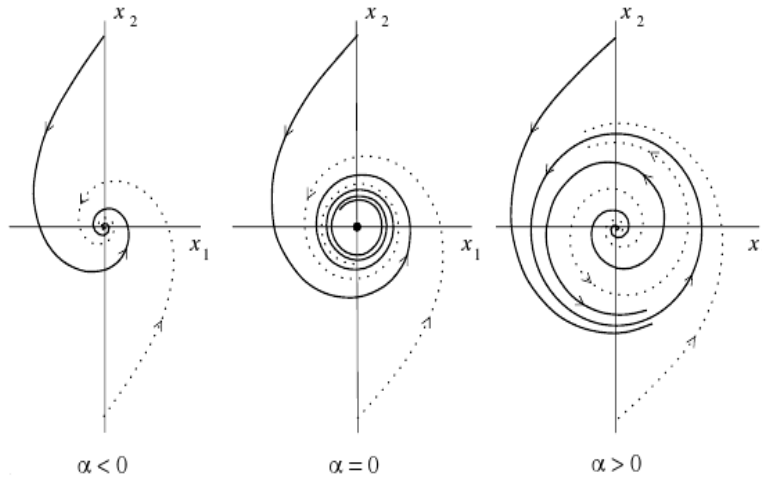


Figura 4.3: Bifurcación Neimark-Sacker Supercrítica.

El punto fijo  $\rho = 0$  es **atrapado** para  $\alpha > 0$  por una *curva invariante cerrada* aislada, la cual es única y estable. La curva es un círculo de radio  $\rho_0(\alpha)$ . Todas las órbitas que inician dentro o fuera de la curva, excepto en el origen, tienden a la curva bajo iteraciones de (4.4). Esta es una bifurcación Neimark-Sacker.

Esta bifurcación también puede ser presentada en el espacio  $x_1, x_2$ . La familia de curvas invariantes cerradas que aparece, parametrizada por  $\alpha$ , forman un *paraboloide*.

El caso  $a(0) > 0$  se puede analizar de la misma forma. El sistema sufre la bifurcación Neimark-Sacker en  $\alpha = 0$ . Contrario al caso considerado, existe una curva invariante cerrada *inestable* la cual desaparece cuando  $\alpha$  cruza el cero de negativo a positivo.

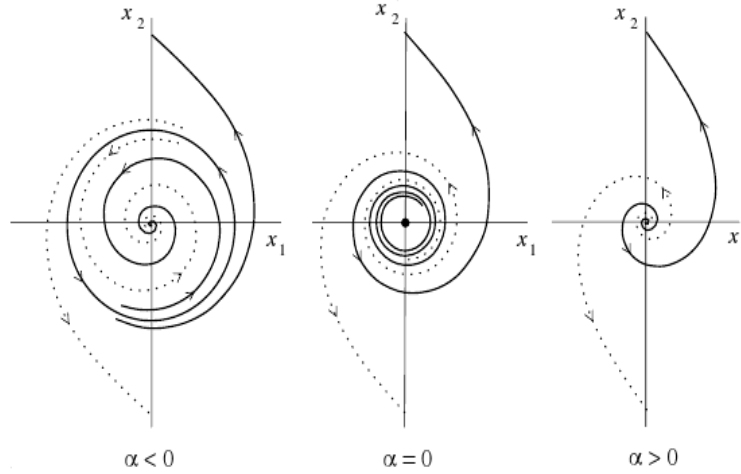


Figura 4.4: Bifurcación Neimark-Sacker subcrítica.

Ahora, agregaremos términos de orden superior al sistema (4.1); por ejemplo, consideraremos el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left[ (1 + \alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] + O(\|x\|^4). \quad (4.5)$$

Aquí, los términos  $O(\|x\|^4)$  dependen suavemente de  $\alpha$ . Desafortunadamente, no se puede decir que el sistema (4.5) es localmente topológicamente equivalente al sistema (4.1). En este caso, los términos de orden superior afectan al comportamiento de la bifurcación del sistema. Si uno escribe (4.5) en forma polar, el mapeo para  $\rho$  dependerá de  $\varphi$ . El sistema puede ser representado de manera similar a (4.4). Sin embargo. Los retratos fase de los sistemas (4.1) y (4.5) tienen algunos aditamentos en común. A saber, se asegura el siguiente lema.

**Lema 15.** *Los términos  $O(\|x\|^4)$  no afectan la bifurcación de las curvas invariantes cerradas en (4.5). Esto es, localmente, una única curva invariante bifurca desde el origen en la misma dirección y con la misma estabilidad que en el sistema (4.1).*

## 4.2. Teorema de Neimark-Sacker

Considere el sistema bidimensional, uni-paramétrico

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad (4.6)$$



donde  $x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Linealizando el sistema (4.6) en  $x = 0$  y  $\alpha$  muy pequeña obtenemos

$$x \mapsto f(x, \alpha) = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (4.7)$$

donde  $A$  es una matriz cuyo espectro es

$$\sigma(A(\alpha)) = \left\{ r(\alpha)e^{i\varphi(\alpha)}, r(\alpha)e^{-i\varphi(\alpha)} \right\},$$

tal que,  $r(0) = 1$  y  $\varphi(0) = \theta_0$ , con  $\pi < \theta_0 < 0$ .

Además, para que los valores propios crucen la circunferencia unitaria, suponemos que  $r'(0) \neq 0$ . Definamos

$$\begin{aligned} \mu_1(\alpha) &= r(\alpha)e^{i\varphi(\alpha)}, \\ \mu_2(\alpha) &= r(\alpha)e^{-i\varphi(\alpha)}. \end{aligned}$$

Dado que  $\mu_1$  es el conjugado de  $\mu_2$ , analizaremos únicamente  $\mu_1$ . Si hacemos

$$r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha),$$

tenemos entonces que  $\beta(0) = 0$  y  $\beta'(0) \neq 0$ . Por el teorema de la función inversa tenemos que existe  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\alpha = h(\beta)$ , con  $h(0) = 0$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= 1 + \beta(\alpha) = 1 + \beta, \\ \varphi(\alpha) &= \varphi(h(\beta)) = \theta(\beta). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mu_1(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)} \quad y \quad \mu_2(\beta) = (1 + \beta)e^{-i\theta(\beta)}.$$

Haremos un primer cambio de coordenadas para expresar la matriz  $A(\alpha)$ , del sistema (4.7), en forma de Jordan real.

Sea  $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^2$  un vector propio complejo asociado a  $\mu_1$ . Si definimos  $Q = (v_2, v_1)$ , entonces, de la teoría de formas de Jordan, se sigue que

$$Q^{-1}A(\alpha)Q = J = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\mu_1) & -\operatorname{Im}(\mu_1) \\ \operatorname{Im}(\mu_1) & \operatorname{Re}(\mu_1) \end{pmatrix}.$$

Definimos entonces el primer cambio de coordenadas

$$y = Q^{-1}x, \quad (4.8)$$

entonces,

$$\begin{aligned} y = Q^{-1}x &\mapsto Q^{-1}A(\alpha)x + Q^{-1}F(x, \alpha) \\ y &\mapsto (Q^{-1}A(\alpha)Q)y + Q^{-1}F(Qy, \alpha) \\ y &\mapsto Jy + Q^{-1}F(Qy, \alpha). \end{aligned}$$

Definimos ahora el segundo cambio de coordenadas  $w = Py$  dado en (4.2). Entonces

$$\begin{aligned} w = Py &\mapsto PJy + PQ^{-1}F(Qy, \alpha) \\ w &\mapsto (PJP^{-1})w + PQ^{-1}F(QP^{-1}w, \alpha) \\ w &\mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} w + G(w, \alpha), \end{aligned}$$

donde  $G(w, \alpha) = PQ^{-1}F(QP^{-1}w, \alpha)$ .

Sea  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ , y si además  $f = Q^{-1}F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} G(w, \beta) &= Pf(z, \bar{z}, \beta) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 + if_2 \\ f_1 - if_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_1 \\ \bar{G}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia tendremos

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \mu_1(\beta)z + G_1(z, \bar{z}, \beta), \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{\mu}_1(\beta)\bar{z} + \bar{G}_1(z, \bar{z}, \beta). \end{aligned}$$

**Lema 16.** Sea  $h : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función suave tal que  $h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0$ .

Si  $z = w + h(w, \bar{w})$  entonces

$$w = z - h(z, \bar{z}) + \frac{\partial h}{\partial z}(z, \bar{z})h(z, \bar{z}) + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})\bar{h}(z, \bar{z}) + \dots$$

*Demostración.*

$$z = w + h(w, \bar{w}) \Rightarrow w = z - h(w, \bar{w}),$$

de aquí,

$$w = z - h(z - h(w, \bar{w}), \bar{z} - \bar{h}(w, \bar{w})). \quad (4.9)$$

Del teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} h(w, \bar{w}) &= h(z - h(w, \bar{w}), \bar{z} - \bar{h}(w, \bar{w})) \\ &= h(z, \bar{z}) - \frac{\partial h}{\partial z}(z, \bar{z})h(w, \bar{w}) - \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})\bar{h}(w, \bar{w}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.10)$$

por lo tanto,

$$h(w, \bar{w}) = h(z, \bar{z}) + \dots. \quad (4.11)$$

Finalmente sustituyendo (4.10) en (4.9) obtenemos el resultado deseado.  $\square$

**Corolario 4.** Si  $z = H^{-1}(w, \bar{w}) = w + h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w})$ , entonces

$$w = H(z, \bar{z}) = z - h_2(z, \bar{z}) + \hat{h}_3(z, \bar{z}) + \dots$$

donde,

$$\hat{h}_3(z, \bar{z}) = -h_3(z, \bar{z}) + \frac{\partial h_2}{\partial z}(z, \bar{z})h_2(z, \bar{z}) + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})\bar{h}_2(z, \bar{z}).$$

**Lema 17.** Si

$$\tilde{z} = f(z, \bar{z}) = \mu z + g_2(z, \bar{z}) + g_3(z, \bar{z}) + \dots, \quad (4.12)$$

entonces el cambio de coordenadas

$$z = H^{-1}(w, \bar{w}) = w + h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w}),$$

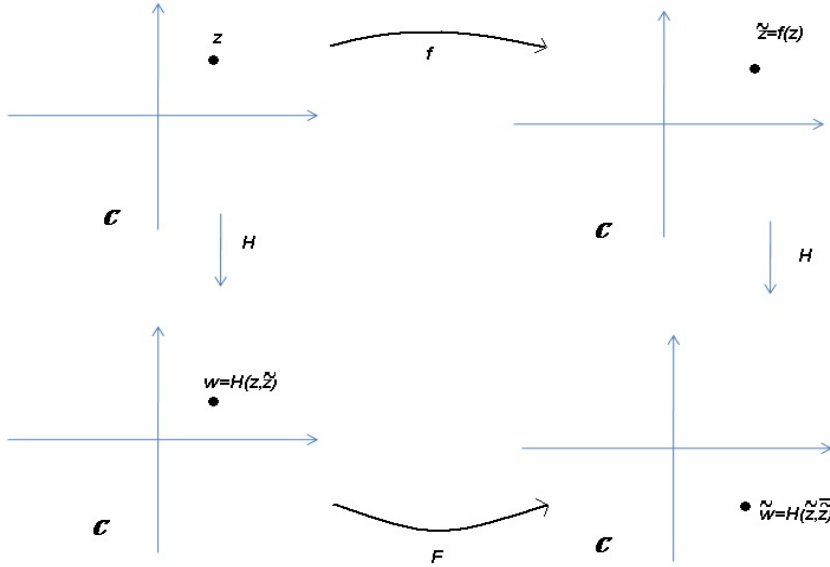
transforma (4.12) en

$$\tilde{w} = F(w, \bar{w}) = \mu w + G_2(w, \bar{w}) + G_3(w, \bar{w}) + \dots$$

donde,

$$G_2(w, \bar{w}) = \mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w}) - h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} G_3(w, \bar{w}) &= \mu h_3(w, \bar{w}) + g_3(w, \bar{w}) - h_3(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w})h_2(w, \bar{w}) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w})h_2(w, \bar{w}) - \frac{\partial h_2}{\partial w}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})G_2(w, \bar{w}) - \frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})\overline{G_2}(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (4.14)$$



*Demostración.* Sabemos que

$$\begin{aligned}
 w = H(z, \bar{z}) &\Rightarrow \tilde{w} = H(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) \\
 &= H(f(z, \bar{z}), \bar{f}(z, \bar{z})) \\
 &= H(f(H^{-1}(w, \bar{w}), \overline{H^{-1}(w, \bar{w})}), \bar{f}(H^{-1}(w, \bar{w}), \overline{H^{-1}(w, \bar{w})})) \\
 &= F(w, \bar{w}).
 \end{aligned}$$

Ahora veamos por partes:

$$z = H^{-1}(w, \bar{w}) = w + h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w}),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{z} &= f(z, \bar{z}) = f(H^{-1}(w, \bar{w}), \overline{H^{-1}(w, \bar{w})}) \\
 &= \mu H^{-1}(w, \bar{w}) + g_2(H^{-1}(w, \bar{w}), \overline{H^{-1}(w, \bar{w})}) + g_3(H^{-1}(w, \bar{w}), \overline{H^{-1}(w, \bar{w})}) + \dots,
 \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned}
 g_2(H^{-1}(w, \bar{w}), \overline{H^{-1}(w, \bar{w})}) &= g_2(w + h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w}), \bar{w} + \bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{h}_3(w, \bar{w})) \\
 &= g_2(w, \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w})(h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w})) \\
 &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w})(\bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{h}_3(w, \bar{w})) + \dots \\
 &= g_2(w, \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w})h_2(w, \bar{w}) \\
 &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w})\bar{h}_2(w, \bar{w}) + \mathcal{O}(|w|^4),
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_3(H^{-1}(w, \bar{w}), \bar{H}^{-1}(w, \bar{w})) &= g_3(w + h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w}), \bar{w} + \bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{h}_3(w, \bar{w})) \\ &= g_3(w, \bar{w}) + \mathcal{O}(|w|^4). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \mu[w + h_2(w, \bar{w}) + h_3(w, \bar{w})] + g_2(w, \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w})h_2(w, \bar{w}) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w})(\bar{h}_2(w, \bar{w})) + g_3(w, \bar{w}) + \mathcal{O}(|w|^4) \\ &= \mu w + [\mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w})] + [\mu h_3(w, \bar{w}) + g_3(w, \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w})h_2(w, \bar{w}) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w})(\bar{h}_2(w, \bar{w}))] + \mathcal{O}(|w|^4). \end{aligned}$$

Ahora bien, del Corolario 1,

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= H(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) \\ &= \tilde{z} - h_2(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) + \hat{h}_3(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) + \dots, \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} h_2(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) &= h_2(\mu w + \mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w}) + \dots, \\ &\quad \bar{\mu} \bar{w} + \bar{\mu} \bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{g}_2(w, \bar{w}) + \dots) \\ &= h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial h_2}{\partial w}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})(\mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w})) \\ &\quad + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})(\bar{\mu} \bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{g}_2(w, \bar{w})) + \mathcal{O}(|w|^4) \\ \hat{h}_3(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) &= \hat{h}_3(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \dots \\ &= -h_3(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial h_2}{\partial w}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})\bar{h}_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \mu w + [\mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w})] + [\mu h_3(w, \bar{w}) + g_3(w, \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w})h_2(w, \bar{w}) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w})\bar{h}_2(w, \bar{w})] - [h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial h_2}{\partial w}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})(\mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w})) \\ &\quad + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})(\bar{\mu} \bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{g}_2(w, \bar{w}))] + [-h_3(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial h_2}{\partial w}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) \\ &\quad + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})\bar{h}_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})] + \mathcal{O}(|w|^4), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &= \mu w + [\mu h_2(w, \bar{w}) + g_2(w, \bar{w}) - h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})] + [\mu h_3(w, \bar{w}) + g_3(w, \bar{w}) - h_3(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) \\
&\quad + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w}) h_2(w, \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w}) \bar{h}_2(w, \bar{w}) - \frac{\partial h_2}{\partial w}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})(\mu h_2(w, \bar{w}) \\
&\quad + g_2(w, \bar{w}) + h_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})) - \frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}(\mu w, \bar{\mu} \bar{w})(\bar{\mu} \bar{h}_2(w, \bar{w}) + \bar{g}_2(w, \bar{w}) \\
&\quad + \bar{h}_2(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}))] + \mathcal{O}(|w|^4) \\
&= \mu w + G_2(w, \bar{w}) + G_3(w, \bar{w}) + \dots
\end{aligned}$$

□

**Lema 18.** Sea  $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ , con  $\mu_0 = \mu(0) = e^{i\theta_0}$ . Si  $e^{ki\theta_0} \neq 1$ , para  $k = 1, 2, 3, 4$ , entonces existen  $h_2, h_3 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\begin{aligned}
G_2(w, \bar{w}) &= 0, \\
G_3(w, \bar{w}) &= c_1(\beta)w^2\bar{w},
\end{aligned}$$

donde,

$$c_1(\beta) = a_{21} + \frac{|a_{11}|^2}{\bar{\mu}(\mu - 1)} + \frac{2|a_{02}|^2}{\bar{\mu}^2 - \mu} + \frac{a_{11}a_{20}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{\mu(\mu - 1)(\bar{\mu} - 1)}. \quad (4.15)$$

*Demostración.* Sean

$$g_2(w, \bar{w}) = a_{20}w^2 + a_{11}w\bar{w} + a_{02}\bar{w}^2, \quad (4.16)$$

$$g_3(w, \bar{w}) = a_{30}w^3 + a_{21}w^2\bar{w} + a_{12}w\bar{w}^2 + a_{03}\bar{w}^3, \quad (4.17)$$

$$h_2(w, \bar{w}) = h_{20}w^2 + h_{11}w\bar{w} + h_{02}\bar{w}^2, \quad (4.18)$$

$$h_3(w, \bar{w}) = h_{30}w^3 + h_{21}w^2\bar{w} + h_{12}w\bar{w}^2 + h_{03}\bar{w}^3, \quad (4.19)$$

donde  $a_{ij} = a_{ij}(\beta) \in \mathbb{C}$ .

Sustituyendo (4.16) y (4.18) en (4.13) obtenemos

$$G_2(w, \bar{w}) = (\mu h_{20} + a_{20} - \mu^2 h_{20})w^2 + (\mu h_{11} + a_{11} - \mu \bar{\mu} h_{11})w\bar{w} + (\mu h_{02} + a_{02} - \bar{\mu}^2 h_{02})\bar{w}^2.$$

Luego,  $G_2(w, \bar{w}) \equiv 0$  si y sólo si hacemos

$$\begin{aligned}
h_{02} &= \frac{a_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu}, \\
h_{20} &= \frac{a_{20}}{(-1 + \mu)\mu}, \\
h_{11} &= \frac{a_{11}}{(-1 + \bar{\mu})\mu},
\end{aligned}$$

Ahora bien, una vez definido  $h_2$ , entonces

$$\begin{aligned} G_3(w, \bar{w}) &= \mu h_3(w, \bar{w}) + g_3(w, \bar{w}) - h_3(\mu w, \bar{\mu} \bar{w}) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(w, \bar{w}) h_2(w, \bar{w}) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w}) h_2(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sustituyendo (4.16), (4.17) y (4.19) en (4.14) obtenemos

$$\begin{aligned} G_3(w, \bar{w}) &= (\mu h_{30} + a_{30} - \mu^3 h_{30} + 2a_{20} h_{20} + a_{11} \bar{h}_{02}) w^3 \\ &\quad + (\mu h_{21} + a_{21} - \mu^2 \bar{\mu} h_{21} + a_{11} \bar{h}_{11} + 2a_{02} \bar{h}_{02} + 2a_{20} h_{11} + a_{11} h_{02}) w^2 \bar{w} \\ &\quad + (\mu h_{12} + a_{12} - \mu \bar{\mu}^2 h_{12} + 2a_{20} h_{02} + a_{11} h_{11} + a_{11} \bar{h}_{20} + 2a_{02} \bar{h}_{11}) w \bar{w}^2 \\ &\quad + (\mu h_{03} + a_{03} - \bar{\mu}^3 h_{03} + a_{11} h_{02} + 2a_{02} \bar{h}_{20}) \bar{w}^3, \end{aligned}$$

con las siguientes condiciones podemos hacer cero los términos  $w^3$ ,  $w\bar{w}^2$  y  $\bar{w}^3$ ; con respecto a  $w^2\bar{w}$  no podemos, ya que al realizar el despeje, el divisor es  $\mu - \mu\bar{\mu} = 0$ , por tanto despreciaremos el término  $h_{21}$ . Entonces

$$\begin{aligned} h_{30} &= \frac{a_{30} + 2a_{20} h_{20} + a_{11} \bar{h}_{02}}{\mu^3 - \mu}, \\ h_{21} &= 0, \\ h_{12} &= \frac{a_{12} + 2a_{20} h_{02} + a_{11} h_{11}}{\mu - \mu \bar{\mu}^2}, \\ h_{03} &= \frac{a_{03} + a_{11} h_{02} + 2a_{02} \bar{h}_{20}}{\mu - \bar{\mu}^3}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} G_3(w, \bar{w}) &= a_{21} + a_{11} \left( \frac{a_{11}}{\mu(\bar{\mu} - 1)} \right) + 2a_{02} \left( \frac{a_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu} \right) + 2a_{20} \left( \frac{a_{11}}{\mu(\bar{\mu} - 1)} \right) + a_{11} \left( \frac{a_{20}}{\mu(\mu - 1)} \right) \\ &= a_{21} + \frac{|a_{11}^2|}{\bar{\mu}(\mu - 1)} + \frac{2|a_{02}|^2}{\bar{\mu}^2 - \mu} + \frac{a_{20} a_{11} (2\mu - 3 + \bar{\mu})}{\mu(\bar{\mu} - 1)(\mu - 1)}. \end{aligned}$$

□

**Lema 19.** *El sistema*

$$w \rightarrow \mu(\beta)w + c_1(\beta)w^2\bar{w} + \mathcal{O}(|w, \bar{w}|^4),$$

se expresa en forma real como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \left[ (1 + \beta) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} a(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & a(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + \dots$$

con  $w = y_1 + iy_2$  y  $a(0) = \text{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0))$ .

*Demostración.* Sea

$$\begin{aligned}
w &\rightarrow \mu(\beta)w + c_1(\beta)w^2\bar{w} + \mathcal{O}(|w, \bar{w}|^4) \\
&\rightarrow \left[ (1 + \beta)e^{i\theta\beta} + c_1(\beta)|w|^2 \right] w + \mathcal{O}(|w, \bar{w}|^4) \\
&\rightarrow \left[ (1 + \beta) + e^{-i\theta\beta}c_1(\beta)|w|^2 \right] e^{i\theta\beta}w + \mathcal{O}(|w, \bar{w}|^4) \\
&\rightarrow \left[ (1 + \beta) + d(\beta)|w|^2 \right] e^{i\theta\beta}w + \mathcal{O}(|w, \bar{w}|^4),
\end{aligned}$$

donde  $d(\beta) = e^{-i\theta\beta}c_1(\beta) = a(\beta) + ib(\beta)$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
e^{i\theta(\beta)}w &= (\cos \theta + i \sin \theta)(y_1 + iy_2) \\
&= (\cos \theta y_1 + \sin \theta y_2) + i(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1),
\end{aligned}$$

y

$$(1 + \beta) + d(\beta)|w|^2 = [1 + \beta + a(\beta)(y_1^2 + y_2^2)] + i[b(\beta)(y_1^2 + y_2^2)],$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(e^{i\theta(\beta)}w)((1 + \beta) + d(\beta)|w|^2) &= [1 + \beta + a(\beta)(y_1^2 + y_2^2) + ib(\beta)(y_1^2 + y_2^2)] \\
&\quad [(\cos \theta y_1 + \sin \theta y_2) + i(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1)] \\
&= [(1 + \beta + a(y_1^2 + y_2^2))(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2) \\
&\quad - b(y_1^2 + y_2^2)(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1)] + i[(1 + \beta + a(y_1^2 + y_2^2)) \\
&\quad (\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1) + b(y_1^2 + y_2^2)(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2)] \\
&= Y_1 + iY_2 + \mathcal{O}(|w, \bar{w}|^4),
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (1 + \beta + a(y_1^2 + y_2^2))(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2) - b(y_1^2 + y_2^2)(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1), \\
Y_2 &= (1 + \beta + a(y_1^2 + y_2^2))(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1) + b(y_1^2 + y_2^2)(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2).
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 + \beta + a(y_1^2 + y_2^2))(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2) - b(y_1^2 + y_2^2)(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1) \\ (1 + \beta + a(y_1^2 + y_2^2))(\cos \theta y_2 + \sin \theta y_1) + b(y_1^2 + y_2^2)(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2) \end{pmatrix} \\
&= (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta y_1 - \sin \theta y_2 \\ \sin \theta y_1 + \cos \theta y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} a(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2) - b(\sin \theta y_1 + \cos \theta y_2) \\ a(\sin \theta y_1 + \cos \theta y_2) + b(\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2) \end{pmatrix} \\
&= (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left[ (1 + \beta) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + \dots,
\end{aligned}$$

donde  $a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$ . □



**Teorema 20.** *Considere el sistema discreto bidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.21)$$

con  $f$  suave para  $|\alpha|$  suficientemente pequeña, punto fijo  $x = 0$  cuyos valores propios son

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm\varphi(\alpha)},$$

con  $r(0) = 1, \varphi(0) = \theta_0$ .

Sean las siguientes condiciones que satisfacen:

C1)  $r'(0) \neq 0$

C2)  $e^{ik\theta_0} \neq 1$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Entonces, existe un cambio de coordenadas y de parámetros que transforman el sistema (4.21) en:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left[ (1 + \beta) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + O(\|y\|^4)$$

con  $\theta(0) = \theta_0$  y  $a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$ , cuando  $c_1(\beta)$  esta dado por

$$c_1(\beta) = a_{21} + \frac{|a_{11}|^2}{\bar{\mu}(\mu - 1)} + \frac{2|a_{02}|^2}{\bar{\mu}^2 - \mu} + \frac{a_{11}a_{20}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{\mu(\mu - 1)(\bar{\mu} - 1)}.$$

*Demostración.* Se sigue de los lemas anteriores. □



# Capítulo 5

---

## Ejemplos

### 5.1. Duplicación de período

**Ejemplo 5.1.1.** *Considere el siguiente mapeo*

$$f(x, \alpha) = \alpha x(1 - x). \quad (5.1)$$

*Muestre que es un sistema donde ocurre una bifurcación doble período.*

Solución. Primero calcularemos sus puntos fijos, los cuales se darán al resolver la ecuación

$$\begin{aligned} \alpha x - \alpha x^2 &= x \\ x((\alpha - 1) - \alpha x) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos dos opciones  $x = 0$  ó  $(\alpha - 1) - \alpha x = 0$  es decir,  $x = 1 - \frac{1}{\alpha}$ . Veamos ahora las condiciones de ésta bifurcación.

$$f_x(x, \alpha) = \alpha - 2\alpha x$$

Con la derivada queremos que se cumpla la segunda condición por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha - 2\alpha x &= -1 \\ x &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo que  $x = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}$  condición necesaria, es la curva de puntos en el plano  $(\alpha, x)$  que cumple con la condición  $f_x = -1$ . Como tenemos dos curvas, una de puntos fijos y otra que cumple la segunda condición; al intersectarlas tendremos puntos que cumplan las primeras dos condiciones al mismo tiempo, las cuales corresponden a las de no-hiperbolicidad, a saber,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} \\ \alpha &= 3 \end{aligned}$$

, con el otro punto fijo  $x = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} &= 0 \\ \alpha &= -1. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos dos puntos fijos que cumplen las dos condiciones de no-hiperbolicidad;

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, -1) \\ P_2 &= \left(\frac{2}{3}, 3\right) \end{aligned}$$

Analicemos las otras condiciones del teorema, entonces tenemos  $f_{xx}(x, \alpha) = -2\alpha$ ,  $f_{xxx}(x, \alpha) = 0$  y  $f_{x\alpha}(x, \alpha) = 1 - 2x$

$$\begin{aligned} f(0, -1) &= 0 \\ f_x(0, -1) &= -1 \\ \frac{1}{2} (f_{xx}(0, -1))^2 + \frac{1}{3} (f_{xxx}(0, -1)) &= 2 \\ f_{x\alpha}(0, -1) &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}, 3\right) &= 0 \\ f_x\left(\frac{2}{3}, 3\right) &= -1 \\ \frac{1}{2} \left(f_{xx}\left(\frac{2}{3}, 3\right)\right)^2 + \frac{1}{3} \left(f_{xxx}\left(\frac{2}{3}, 3\right)\right) &= 36 \\ f_{x\alpha}\left(\frac{2}{3}, 3\right) &= -5. \end{aligned}$$

Como  $P_1$  y  $P_2$  cumplen las condiciones del teorema anterior, entonces este mapeo sufre una bifurcación doble período en estos puntos tal como se muestra en la figura 5.3.

Haciendo  $\alpha = -1$  en  $P_1$ , tendremos dos puntos fijos  $(0, -1), (2, -1)$  utilizando el Teorema 1 del Capítulo 1, se tiene que  $f_x(2, -1) = 3 > 1$ , por lo que tenemos repulsor tipo fuente, el cual se puede visualizar en el diagrama de la figura 5.1.

Si realizamos el mismo procedimiento pero ahora en el el valor de  $P_2$ , se tiene los puntos fijos  $(0, 3), (\frac{2}{3}, 3)$ , aplicando de nuevo el teorema de estabilidad tenemos que  $f_x(0, 3) = 3 > 1$ , entonces es un repulsor tipo fuente, el cual se observa en el diagrama de la figura 5.2.  $\diamond$

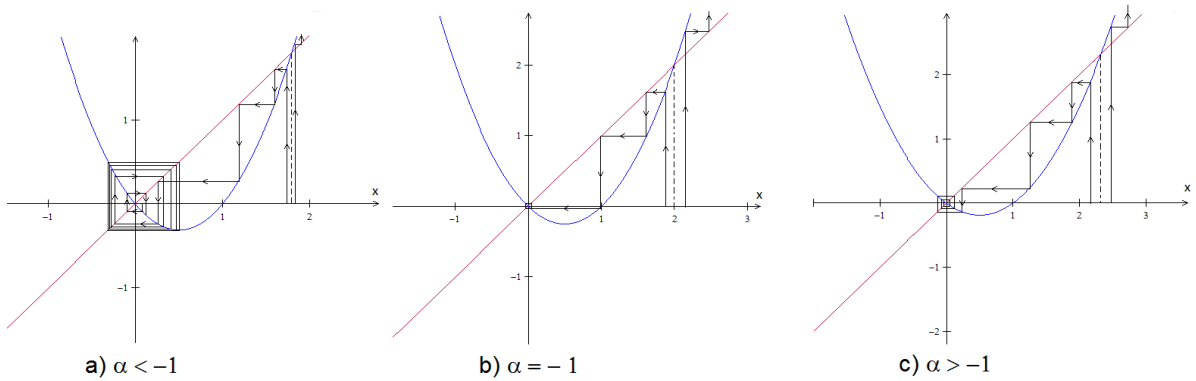


Figura 5.1: Diagrama de  $f(x, \alpha)$  en  $P_1$  para: a)  $\alpha = -\frac{5}{4}$ ; b)  $\alpha = -1$ ; c)  $\alpha = -\frac{3}{4}$ .

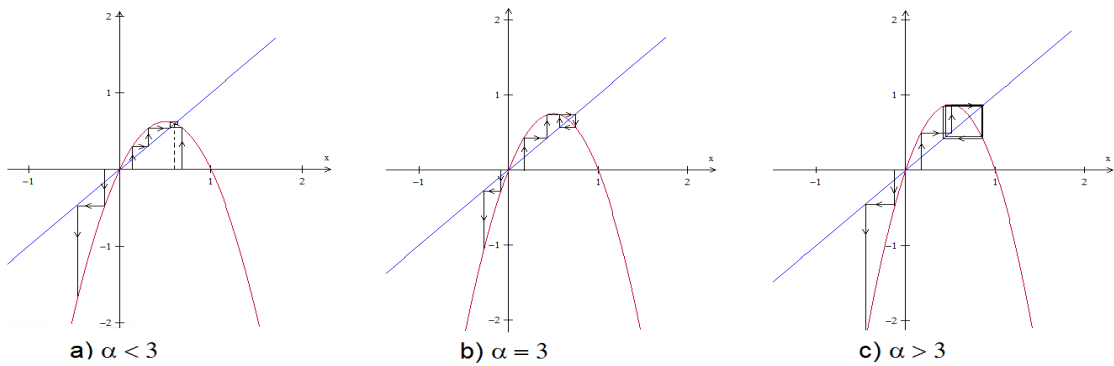


Figura 5.2: Diagrama de  $f(x, \alpha)$  en  $P_2$  para: a)  $\alpha = \frac{5}{2}$ ; b)  $\alpha = 3$ ; c)  $\alpha = \frac{7}{2}$ .

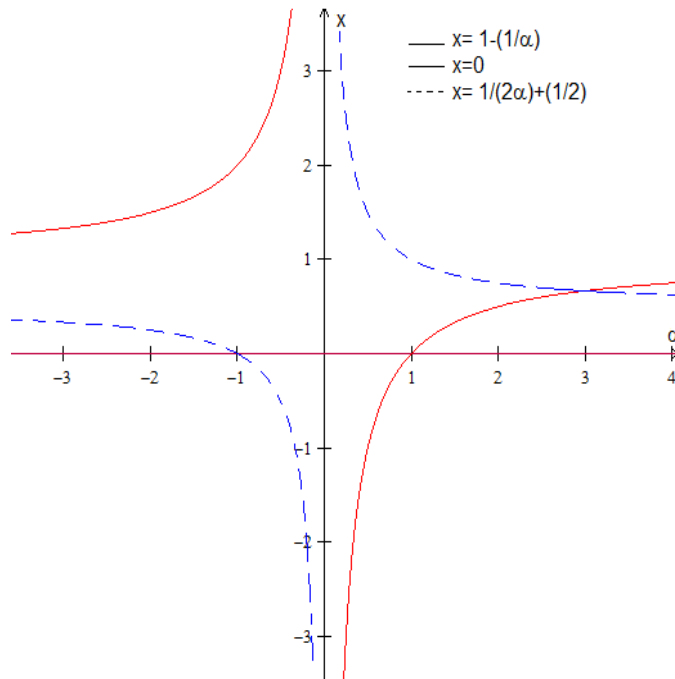


Figura 5.3: Ecuaciones que satisfacen las condiciones de no-hiperbolicidad.

## 5.2. Neimark-Sacker

**Ejemplo 5.2.1.** *Analice la dinámica del siguiente sistema discreto.*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x(1-x) - xy \\ \frac{1}{\beta}xy \end{pmatrix}.$$

Solución. Primero obtendremos los puntos fijos del sistema.

$$\begin{aligned} \alpha x(1-x) - xy &= x \\ \frac{1}{\beta}xy &= y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}xy - y &= 0 \\ y \left( \frac{1}{\beta}x - 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

En cuyo caso tendremos dos opciones  $y = 0$  y  $x = \beta$ .

Si  $y = 0$  pasa lo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha x(1-x) &= x \\ \alpha x(1-x) - x &= 0 \\ \alpha x - \alpha^2 x - x &= 0 \\ x(\alpha - \alpha x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

En este caso tendremos  $x = 0$  ó

$$\alpha - \alpha x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Tenemos entonces para  $y = 0$ , los puntos fijos  $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ahora, si  $x = \beta$  pasa lo siguiente:

$$\alpha\beta(1-\beta) - \beta y = \beta \Leftrightarrow y = \alpha - \alpha\beta - 1.$$

Luego entonces  $P_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha - \alpha\beta - 1 \end{pmatrix}$ .

Enseguida calcularemos la jacobiana y evaluaremos los tres puntos fijos para observar que pasa con sus valores propios,

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\alpha x - y & -x \\ \frac{1}{\beta}y & \frac{1}{\beta}x \end{pmatrix}.$$

Primero, evaluaremos el punto  $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

aquí, sus valores propios son los de la diagonal principal  $\mu_1 = \alpha$  y  $\mu_2 = 0$ ; por lo tanto no puede ocurrir una bifurcación Neimark-Sacker.

Ahora, evaluaremos el punto  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ :

$$Df\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\alpha + 2 & -1 + \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \end{pmatrix}.$$

Sus valores propios son  $\mu_1 = 2 - \alpha$  y  $\mu_2 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{-1}{\alpha} + 1\right)$ . Por lo tanto, este punto tampoco es candidato sufrir bifurcación Neimark-Sacker.

Por último, evaluaremos el punto  $P_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha - \alpha\beta - 1 \end{pmatrix}$ :

$$Df \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha - \alpha\beta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta + 1 & -\beta \\ \frac{\alpha - \alpha\beta - 1}{\beta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha\beta + 1 & -\beta \\ \frac{\alpha - \alpha\beta - 1}{\beta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcularemos sus valores propios con el polinomio característico

$$P(A) = \mu^2 - \text{tr}(A)\mu + \det(A).$$

Para ello obtendremos primero su traza y su determinante

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= -\alpha\beta + 1 + 1 = -\alpha\beta + 2, \\ \det(A) &= (-\alpha\beta + 1) + \left( \frac{\alpha - \alpha\beta - 1}{\beta} \right) \beta = -2\alpha\beta + \alpha. \end{aligned}$$

Ahora para obtener sus valores propios nos fijamos en el polinomio característico, cuyas raíces son  $\mu_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4|A|}}{2}$ , observe que

$$\begin{aligned} \text{tr}(A)^2 - 4|A| &= (-\alpha\beta + 2)^2 - 4(-2\alpha\beta + \alpha) \\ &= \alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4 + 8\alpha\beta - 4\alpha \\ &= \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 - 4\alpha \\ &= (\alpha\beta + 2)^2 - 4\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-\alpha\beta + 2) \pm \sqrt{(\alpha\beta + 2)^2 - 4\alpha}}{2}.$$

Para que el sistema sea candidato a sufrir la bifurcación Neimark-Sacker en  $P_3$ , debemos asegurar que  $\mu_{1,2} \in \mathbb{C}$  y  $|\mu_{1,2}| = 1$ . Por lo tanto, debemos asegurar que  $\text{tr}(A)^2 - 4|A| < 0$ , es decir,

$$(\alpha\beta + 2)^2 - 4\alpha < 0. \quad (5.2)$$

Hagamos,  $\omega_0^2 = 4\alpha - (\alpha\beta + 2)^2 > 0$ . Además

$$\begin{aligned} |\mu_1| = 1 &\Leftrightarrow \left( \frac{\alpha\beta - 2}{2} \right)^2 + \left( \frac{\omega_0}{2} \right)^2 = 1, \\ &\Leftrightarrow 2\beta - 1 = -\frac{1}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (5.3)$$



El punto  $P_3$  será candidato a punto de bifurcación Neimark-Sacker si

$$(\alpha\beta + 2)^2 - 4\alpha < 0 \quad y \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}. \quad (5.4)$$

De ahí, que si  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$ , entonces

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta + 2)^2 - 4\alpha < 0 \\ \Leftrightarrow & \left[ \alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha} \right) + 2 \right]^2 - 4\alpha < 0 \\ \Leftrightarrow & (\alpha - 9)(\alpha - 1) < 0 \\ \Leftrightarrow & 1 < \alpha < 9. \end{aligned}$$

Observe que  $\beta'(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} > 0$ , entonces  $\beta$  es una función creciente por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta(1) < \beta(\alpha) < \beta(9) \\ \Leftrightarrow & 0 < \beta < \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Ver figura 5.4.

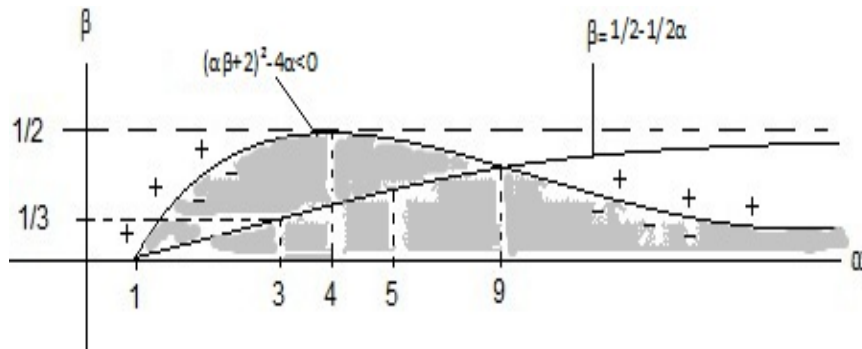


Figura 5.4:  $(\alpha\beta + 2)^2 + 4\alpha < 0$  y  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$ .

Enseguida, calcularemos el módulo y argumento de  $\mu_1$  para verificar las condiciones de transversalidad. Sea

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a(\alpha, \beta) + ib(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta - 2}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4\alpha - (\alpha\beta + 2)^2} \\ |\mu_1| &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha\beta - 2}{2}\right)^2 + \frac{4\alpha - (\alpha\beta + 2)^2}{4}} = \sqrt{\alpha(1 - \alpha\beta)}. \end{aligned}$$

Continuamos con el argumento,

$$\begin{aligned}\theta(\alpha, \beta) &= \tan^{-1} \left( \frac{b(\beta)}{a(\beta)} \right) \\ &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)}}{\alpha-5}.\end{aligned}$$

Para  $\alpha \in (1, 9)$ , elegimos  $\bar{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$  como el valor de bifurcación. Entonces

$$|\mu_1(\beta)| = 1 \quad y \quad \theta_0 = \theta(\beta) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)}}{\alpha-5}.$$

Verificando la condición C2, tenemos

$$\begin{aligned}e^{ik\theta_0} &\neq 1 \\ \Rightarrow k\theta_0 &\neq 2m\pi; m \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}k = 1 &\Rightarrow \theta_0 \neq 2m\pi, \\ k = 2 &\Rightarrow \theta_0 \neq m\pi, \\ k = 3 &\Rightarrow \theta_0 \neq \frac{2m\pi}{3}, \\ k = 4 &\Rightarrow \theta_0 \neq \frac{m\pi}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que los ángulos no permitidos son:  $\theta_0 \neq \{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} = \Delta$ .  
¿Existirá alguna  $\alpha \in (1, 9)$  tal que

$$\theta_0(\alpha) \in \Delta?$$

Es decir, ¿Existirá  $\alpha \in (1, 9)$  tal que

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)}}{\alpha-5} \in \Delta?$$

Para  $\theta_0 = 0$  y  $\theta_0 = \pi$ ,  $\tan(\theta_0) = 0$ , por lo tanto la respuesta es no porque  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 9$  no están en el dominio. Para  $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$ ,

$$\begin{aligned}-\sqrt{3} &= \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)}}{\alpha-5} \Leftrightarrow -\sqrt{3}(\alpha-5) = \sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)} \\ &\Leftrightarrow (-\sqrt{3}(\alpha-5))^2 = (\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)})^2 \\ &= (\alpha-7)(\alpha-3) = 0,\end{aligned}$$

lo anterior tiene sentido si  $\alpha < 5$ , así tomamos  $\alpha = 3$ . Para  $\theta_0 = \frac{4\pi}{3}$ ,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} = \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)}}{\alpha-5} \Leftrightarrow \sqrt{3}(\alpha-5) = \sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}(\alpha-5))^2 = (\sqrt{-(\alpha-1)(\alpha-9)})^2 \\ &= (\alpha-7)(\alpha-3) = 0,\end{aligned}$$

lo anterior tiene sentido si  $\alpha > 5$ , así tomamos  $\alpha = 7$ . Para  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tan(\theta_0) = \infty$ , por lo tanto en  $\alpha = 5$  se consigue el resultado.

Concluimos entonces que para  $\tilde{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$  en  $P_3$  el sistema sufre la bifurcación Neimark-Sacker, para  $\alpha \in (1, 9)$  con  $\alpha \neq 3, 5, 7$ .



## *Bibliografía*

- [1] ARNOLD V. , *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1983.
- [2] PAUL BLANCHARD, ROBERT L. DEVANEY AND GLEN R. HALL, *Ecuaciones Diferenciales*, Spanish Version Translated by José de la Cera A., UAM-Azcapotzalco, Matemáticas Thompson, México, D.F., 1999.
- [3] ROBERT L. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, California, 1986.
- [4] EDWARD OTT, *Chaos in Dynamical Systems*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2002.
- [5] JACK K. HALE & HÜSEYİN KOÇAK, *Dynamics and Bifurcations*, TAM 3, Springer-Verlag, New York, N.Y., 1991.
- [6] MORRIS W. HIRSH, STEPHEN SMALE AND ROBERT L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems And An Introduction to Chaos*, Volume 60, 2ed in the PURE AND APPLIED MATHEMATICS Series, Elsevier Academic Press, San Diego, California, 2004.
- [7] RICHARD A. HOLMGREN, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Universitext, Springer-Verlag, New York, N.Y., 1991.

- 
- [8] IOOSS G., *Bifurcations of Maps and Applications*, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [9] KATHEEL T. ALLIGOOD, TIM D. SAUER AND JAMES A. YORKE, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, N.Y. 1996.
- [10] MARIO MARTELLI, *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos*, Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, inc., New York, N.Y., 1999. New York, 1991.
- [11] MUSTAFA R.S. KULENOVIĆ & ORLANDO MERINO, *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations With Mathematica*, Chapman & Hall / RC, Boca Raton, Florida, 2000.
- [12] NEIMARK Y., *On Some Cases of Periodic Motions Depending on Parameters*, Acad. Nauk SSSR, **129**, pp.736–739 (1959).
- [13] NEWHOUSE S., PALIS J., TAKENS F., *Bifurcations and Stability of Families of Diffeomorphisms*, Publ. Math. IHES, **57**, pp.5–71 (1983).
- [14] SACKER R., *A New Approach to the Perturbation Theory of Invariant Surfaces*, Pure Appl. Math., **18**, pp.717–732 (1965).
- [15] WAN Y.-H., *Computations of the Stability Condition For the Hopf Bifurcation of Diffeomorfisma on  $\mathbb{R}^2$* , SAIM J. Appl. Math., **34**, pp.167–175 (1978).
- [16] YURI A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences 112, Springer-Verlag, New York, N.Y., 1995.

## Apéndice

**Teorema 21. Función implícita.** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , una función continuamente diferenciable y  $(a, b) \in \mathbb{R}^{m+n}$  cualquier vector tal que  $f(a, b) = 0$ . Considere  $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$  y defina la matriz Jacobiana  $DF(a, b) = [D_x f(a, b), D_y f(a, b)]$  y sobre esta considere que la matriz que define  $[D_y f(a, b)]$  es invertible. Entonces existen una función  $h : W \mapsto U \subset \mathbb{R}^n$  los abiertos  $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  y  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $(a, b) \in V$  y  $a \in W$  tales que para cada  $x \in W$  existe un único  $y$ , tal que  $(x, y) \in V$  y  $f(x, y) = 0$  o lo que define una función  $g : W \mapsto \mathbb{R}^n$  que es continua y diferenciable y que además satisface:

$$f(x, g(x)) = 0, \text{ para todo } x \in W$$

A continuación, propondremos un ejemplo de aplicación de este teorema.

**Ejemplo 5.2.2.** Sea  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  una función de  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , verifique las condiciones del teorema anterior en el punto  $(a, b) = (0, 1)$ .

*Solución.* Primero, definamos la matriz Jacobiana

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2y \\ x^2 + 1 \end{pmatrix},$$

donde  $Df_x(0, 1) = 2$  y  $Df_y(0, 1) = 1$ . Como  $Df_y(0, 1) \neq 0$  por lo tanto existe  $y$  tal que  $y = g(x)$  en una vecindad  $V$  de  $(a, b) = (0, 1)$ . En este caso podemos dar

explícitamente  $y = g(x)$  al despejarla directamente de la función, es decir,

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} = g(x),$$

entonces,  $f(x, g(x)) = 0$ .

Ahora bien, como  $Df_x(0, 1) \neq 0$  existe  $x$  tal que  $x = g(y)$  en una vecindad  $W$  de  $(a, b) = (0, 1)$ .

$$x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y}} = g(y),$$

pero sólo es posible para  $y \in (0, 1] = W$ . Entonces  $f(g(y), y) = 0$ .  $\diamond$