

Teorema Fundamental de Superficies  
y el Criterio de Frobenius

Misael Avendaño Camacho



# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Nociones y teoremas básicos de la teoría de EDO</b>	<b>7</b>
1.1 Preliminares . . . . .	7
1.1.1 Curvas en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
1.1.2 Longitud de arco . . . . .	8
1.1.3 Cambio de parametrización . . . . .	9
1.1.4 Campos vectoriales . . . . .	10
1.2 Teoremas de existencia y unicidad . . . . .	12
1.2.1 Problema de Cauchy para sistemas autónomos . . . . .	12
1.2.2 Retrato fase . . . . .	14
1.2.3 Teorema de la función inversa y teorema de la función implícita . . . . .	15
1.2.4 Cambio de coordenadas . . . . .	16
1.2.5 Dependencia de los datos iniciales y parámetros . . . . .	17
1.2.6 Sistemas no autónomos . . . . .	19
1.3 Sistemas lineales . . . . .	20
<b>2 Nociones básicas de la teoría de superficies</b>	<b>25</b>
2.1 Teorema fundamental de curvas . . . . .	25
2.1.1 Ecuaciones de Frenet-Serret . . . . .	26
2.1.2 Teorema fundamental de curvas en el espacio . . . . .	27
2.2 Superficies regulares . . . . .	29
2.2.1 Superficies, parametrizaciones y cartas coordenadas . . . . .	29

2.2.2	Ejemplos de superficies en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	30
2.2.3	Cambio de parametrización . . . . .	33
2.2.4	El Plano tangente a una superficie . . . . .	34
2.2.5	Funciones suaves . . . . .	36
2.2.6	Campos vectoriales en superficies . . . . .	37
2.3	Formas fundamentales . . . . .	40
2.3.1	Primera forma fundamental . . . . .	40
2.3.2	Operador de forma y segunda forma fundamental . . . . .	42
2.4	Curvatura . . . . .	44
2.4.1	Curvatura normal . . . . .	44
2.4.2	Curvatura gaussiana y curvatura media . . . . .	45
2.5	Tipos de coordenadas . . . . .	46
2.5.1	Coordenadas ortogonales . . . . .	46
2.5.2	Coordenadas de líneas de curvatura . . . . .	48
2.5.3	Coordenadas de líneas asintóticas . . . . .	49
2.6	Superficies con curvatura gaussiana constante . . . . .	50
2.6.1	Superficies de curvatura gaussiana constante positiva . . . . .	50
2.6.2	Superficies con curvatura $K = -1$ . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Criterio de Frobenius</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	El criterio de Frobenius en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	54
3.1.1	Condición de integrabilidad de Frobenius . . . . .	54
3.1.2	Interpretación geométrica . . . . .	55
3.2	Criterio de Frobenius en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	57
3.2.1	Condición de integrabilidad en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	57
3.2.2	Interpretación geométrica en el caso general . . . . .	59
3.3	El criterio de Frobenius en el caso lineal . . . . .	61
3.3.1	Criterio de Frobenius para sistemas lineales . . . . .	61
3.3.2	Algoritmo para la construcción de la solución del sistema lineal . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Teorema fundamental de superficies en <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	<b>73</b>
4.1	Ecuaciones de Gauss-Codazzi . . . . .	74

---

4.1.1	Derivación de las condiciones de integrabilidad . . . .	74
4.1.2	Cálculo de las matrices $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ . . . . .	77
4.1.3	Ecuaciones de Gauss-Codazzi en $GL(3)$ . . . . .	80
4.1.4	Ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi y teorema de Gauss . . . . .	84
4.2	El Teorema Fundamental de superficies . . . . .	85
4.3	Demostración del Teorema Fundamental . . . . .	87
4.3.1	Demostración de la ecuación de compatibilidad . . . .	87
4.3.2	Existencia de la superficie. . . . .	88
4.3.3	Unicidad de la superficie . . . . .	96
4.4	Ecuaciones de Gauss-Codazzi en coordenadas especiales . . .	99
4.4.1	Coordenadas ortogonales . . . . .	99
4.4.2	Coordenadas de líneas de curvatura . . . . .	102
4.5	Superficies con curvatura Gaussiana constante negativa . . .	104
	<b>Apéndice</b> . . . . .	<b>109</b>
A.1	Operadores . . . . .	109
A.2	Operadores autoadjuntos y formas cuadráticas . . . . .	114



# Introducción

En este trabajo se prueba de manera uniforme y completa un resultado muy importante en la teoría de clasificación de superficies en  $\mathbb{R}^3$ , a saber, el *Teorema Fundamental de Superficies*, con el cual podemos dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Es posible decir que una superficie está determinada por su primera y su segunda forma fundamental?
- Dadas dos formas cuadráticas, ¿es posible construir una superficie tal que esas formas cuadráticas sean su primera y su segunda forma fundamental?

Para responder a estas dos preguntas probaremos el *Teorema de Frobenius*, cuya demostración se basa en el Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Estos resultados, junto con el Teorema de la Función Implícita son, de acuerdo con, [1] los principales pilares en los que se apoyan la Topología diferencial y el Cálculo en Variedades. En este trabajo tendremos oportunidad de ver cómo estos resultados se conjugan para dar una demostración completa del teorema referido.

Las preguntas anteriores fueron ampliamente estudiadas por *Bonnet*<sup>1</sup> [3] y una formulación clásica de sus resultados se puede encontrar, desde un punto de vista moderno, en [6, 12, 18, 21].

En la actualidad es difícil encontrar en la literatura básica de geometría una exposición completa de estos resultados. Sin embargo, en la mayoría de la literatura especializada se hace referencia al magnífico texto de Stoker [18], en el cual, si bien es posible encontrar un prueba del Teorema Fundamental de Superficies, ésta no se da una manera unificada.

---

<sup>1</sup>*Pierre Ossian Bonnet* (1819-1892). Matemático Francés, hizo grandes aportaciones importantes a la teoría de superficies. Bonnet fue director de estudios en la *École Polytechnique*, profesor de astronomía en la facultad de ciencias en la Universidad de París.

Es aquí donde encaja este trabajo, ya que nuestro propósito es presentar un enfoque uniforme y completo a las dos preguntas que se plantearon anteriormente y que se derivan del Teorema Fundamental de Superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Además, veremos cómo este está relacionado con la teoría de integrabilidad de Frobenius<sup>2</sup>.

La respuesta a la primera de las preguntas planteadas es sencilla y nos dice que la *primera* y *segunda* formas fundamentales definen, de manera única, una superficie en  $\mathbb{R}^3$  salvo isometrías.

Por otro lado, para responder afirmativamente la segunda pregunta necesitamos hacer uso de herramientas matemática más avanzadas, que muy posiblemente, son materia de estudio de cursos avanzados de Geometría Diferencial. Tal es el caso del *criterio de Frobenius*.

Este criterio es de suma importancia para responder completa y satisfactoriamente a la segunda pregunta, de la cual, por el momento podemos decir que es verdadera sólo si las formas cuadráticas satisfacen ciertas condiciones llamadas *ecuaciones de compatibilidad*.

Una observación importante que debemos hacer, es que la primera y la segunda formas fundamentales de una superficie no son independientes, sino que están relacionadas por medio de las *ecuaciones de Peterson*<sup>3</sup>-*Mainardi*<sup>4</sup>-*Codazzi*<sup>5</sup> y la *ecuación de Gauss*. Originalmente, estas ecuaciones fueron probadas por Gauss usando una notación no muy adecuada, y posteriormente fueron demostradas de una forma más accesible por los matemáticos a los que deben su nombre. El primero de ellos fue Karl Peterson quien derivó estas ecuaciones en su tesis, pero esta derivación no fue conocida durante su vida. Después, de manera casi simultánea, dichas ecuaciones fueron probadas por Mainardi y Codazzi en 1856. Sin embargo, la formulación que dió Codazzi fue mucho más sencilla ya que tuvo cuidado de que sus expresiones tuvieran un significado geométrico.

Por último, debemos mencionar que las ecuaciones de Gauss y de Peterson-Mainardi-Codazzi son conocidas como las ecuaciones de clásicas de compatibilidad de la teoría de superficies, debido a que en la versión clásica del

---

<sup>2</sup>*George Frobenius* matemático alemán que vivió del año 1849 al 1917; fue discípulo de Weierstrass e hizo notables aportaciones en matemáticas, en particular a la teoría de representaciones de grupos.

<sup>3</sup>Karl Mikhailovich Peterson (1828-1881) fue uno de los fundadores de la Sociedad Matemática de Moscú.

<sup>4</sup>Gaspere Mainardi (1800-1879) Profesor de la Universidad de Padua.

<sup>5</sup>Delfino Codazzi. (1824-1873). Codazzi publicó artículos sobre triángulos geodésicos, mapeos equirreales y de la estabilidad de cuerpos flotantes.



teorema Fundamental estas ecuaciones son una condición suficiente para la demostración de este teorema.

¿Cómo se puede emplear el criterio de *Frobenius* en la demostración del Teorema Fundamental? El criterio de Frobenius es utilizado para cubrir una parte del Teorema Fundamental que muchos textos no abordan con detalle. Recordemos la formulación del *problema de Frobenius* en su versión clásica: *si tenemos una distribución suave de planos en  $\mathbb{R}^3$ , ¿Bajo qué condiciones existe una familia de superficies que sean tangentes a cada plano de la distribución?* Este problema analíticamente es representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales; aquí, el criterio de Frobenius se utiliza para saber si este sistema de ecuaciones está acoplado, es decir si tiene solución común. Dicha solución representa a la familia de superficies buscada.

En forma analítica, el criterio de Frobenius es una expresión matemática llamada ecuación de compatibilidad, la cual tiene numerosas de aplicaciones en las matemáticas, que pueden consultarse en [20].

El criterio de Frobenius es parte de una teoría más completa llamada *integrabilidad de Frobenius* y, para más detalles se pueden consultar [4, 18, 21].

Para lograr nuestro objetivo se ha dividido el presente trabajo en cuatro capítulos. A continuación se presenta un breve resumen de los contenidos de cada uno de ellos.

En el Capítulo 1 serán revisados algunos conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que serán utilizados en los Capítulos 3 y 4 para las pruebas del Criterio de Frobenius y el Teorema Fundamental de Superficies.

Los principales tópicos que se abordan son los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales, tanto para sistema autónomos, no autónomos y sistemas lineales. Debemos señalar que los resultados que se mencionan son muy conocidos y existe una extensa literatura en donde pueden ser consultados, por ejemplo [2, 13, 14, 16].

El Capítulo II tiene por objeto explorar conceptos básicos de Geometría Diferencial que se utilizan en el estudio de superficies. Cabe señalar que en este capítulo no se dan demostraciones de los resultados que se mencionan ya que incluirlas aquí haría muy extenso este trabajo y nos apartaríamos de nuestro objetivo principal, que es dar una demostración completa del Teorema Fundamental de Superficies.

El capítulo comienza con un breve estudio de las ecuaciones de Frenet-Serret y del teorema fundamental de curvas en  $\mathbb{R}^3$ . Posteriormente se aborda el estudio de las superficies y se introducen varios objetos geométricos intrínsecos, tales las formas fundamentales y los distintos tipos de curvaturas. Además, se presentan varios ejemplos importantes de superficies y algunos resultados fundamentales que se derivan de su estudio.

En el Capítulo III se estudia el Criterio de Frobenius, el cual es uno de los dos principales resultados que se prueban en este trabajo, y que es utilizado en el Capítulo 4 para dar una prueba completa al Teorema Fundamental de Superficies (Teorema 4.2.1). Tal es su importancia en esa demostración que se le dedica la sección completa para su estudio con el fin de tener claro el problema que se resuelve con este criterio, y posteriormente, poder apreciar su utilidad en la demostración del Teorema Fundamental que se presentará en el Capítulo 4.

El criterio de Frobenius forma parte de una teoría más completa llamada *Integrabilidad de Frobenius* y se pueden encontrar diversas versiones de éste. Algunas de ellas utilizan conceptos básicos de Geometría y Ecuaciones Diferenciales tales como campos vectoriales, corchetes de Lie, funciones matriciales, etc. Otras usan conceptos más avanzados como formas diferenciales, distribuciones de planos, etcétera. El lector interesado en conocer las distintas formulaciones de este criterio podría comenzar con [4, 7, 10, 18, 21].

En este capítulo el criterio está enfocado hacia las ecuaciones diferenciales, que es el adecuado para alcanzar nuestro objetivo principal. En este contexto, el criterio de Frobenius proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de soluciones a un sistema de familias uniparamétricas de EDO.

El Capítulo IV es la parte central de este trabajo y es donde se usan la mayoría de las herramientas que desarrollamos a lo largo del mismo para demostrar el Teorema Fundamental de Superficies. Se inicia el capítulo derivando las ecuaciones de Gauss-Codazzi, las cuales, como habíamos mencionado anteriormente, dan una relación entre la primera y la segunda forma fundamental.

La manera en que se presentan estas ecuaciones es diferente a la que comúnmente se puede consultar en la literatura de Geometría Diferencial, tales como [6, 12, 18, 19]. Aquí, estas ecuaciones están expresadas usando una notación matricial, la cual facilitará la demostración del Teorema Fundamental. Después se enuncia formalmente del Teorema Fundamental de Superficies, presentándose algunos comentarios al respecto.

Para la demostración del Teorema Fundamental, primero se demuestra la unicidad de su solución, para lo cual se utilizan algunos resultados del Algebra Lineal y el teorema de Existencia y Unicidad de EDO; después se demuestra la existencia de la superficie dadas sus dos formas cuadráticas, usando como herramienta fundamental el Teorema de Frobenius. En la parte final de este capítulo, se presenta una aplicación del teorema fundamental sobre las superficie de curvatura gaussiana  $K = -1$ , en cuyo caso las ecuaciones de Gauss-Codazzi son equivalentes a una ecuación conocida con el nombre de Sine-Gordon.

### Agradecimientos.

Deseo agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología el apoyo que se me brindó para la realización de este trabajo, con el que participé como becario en el proyecto “Fenómenos de singularidad en sistemas dinámicos y ecuaciones no lineales” con número N-43208.

Aprovecho el momento para agradecer a todos mis profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora por compartir e invertir en mí su tiempo y sus conocimientos, los cuales sin duda han contribuido para que pudiera culminar con éxito esta carrera. Especialmente quiero agradecer a Dr. Yu. M. Vorobjev, Dr. Rubén Flores Espinoza, M.C. Guillermo Dávila, Dr. Martín Gildardo García, Dr. Fernando Verduzco González, y al profesor Marco Antonio Valencia Arvizu, por su valiosa ayuda y por el tiempo dedicado en leer y revisar este trabajo y cuyas correcciones, críticas y comentarios hicieron posible que esta tesis saliera adelante.

En lo personal, quiero dar gracias a Dios por darme siempre la oportunidad de vivir y de influir un poco en mi futuro. A mi familia, por su amor y su apoyo incondicional que me brindaron para yo pudiera salir adelante. A mi padre, el Sr. Ramón Avendaño cuyos invaluable consejos, apoyo y ejemplo de entrega al trabajo fueron un impulso muy grande para mí. A mis hermanas por compartir conmigo momentos muy importantes de mi niñez. Además, deseo reconocer y agradecer el cariño, apoyo y experiencias compartidas con todos los amigos que he tenido a lo largo de mi vida, en particular a Héctor Manuel León con quien he tenido la fortuna de compartir una gran amistad. Deseo hacer un agradecimiento muy especial a la Profesora Ana Dominga Quijada y a su familia por su sincera amistad, apoyo y afecto, además deseo confesar que, en cierto sentido, ella es culpable de que yo decidiera estudiar esta carrera.

Por último, y no menos importante, deseo agradecer a mi novia Paola Viridiana Ramos García y a su familia por todo el amor, comprensión, consejos, compañía y momentos agradables que hemos compartido juntos; además, por haberse convertido en el motor de mi vida. Pido disculpas a todas las personas que compartieron conmigo momentos importantes y que las he omitido por descuido, para ellos también mi más sincero agradecimiento.

# Capítulo 1

## Nociones y teoremas básicos de la teoría de EDO

En este capítulo serán revisados algunos conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que serán utilizados en los Capítulos 3 y 4 para las pruebas del Criterio de Frobenius y el Teorema Fundamental de Superficies.

Los principales tópicos que abordamos son los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales, tanto para sistema autónomos, no autónomos y sistemas lineales. Debemos señalar que en este capítulo no se presentan demostraciones de los resultados que se mencionan, debido a que éstos son muy conocidos y existe una extensa literatura en donde pueden ser consultados, por ejemplo [2, 13, 14, 16].

### 1.1 Preliminares

#### 1.1.1 Curvas en $\mathbb{R}^n$

Una *curva parametrizada* en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $(a, b)$  es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ , dada por

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

A la variable  $t$  se conoce como el *parámetro* y el conjunto imagen de la curva,  $\mathbf{x}((a, b)) \subset \mathbb{R}^n$ , se llama la *traza* de  $\mathbf{x}$ . Debe observarse la diferencia entre una curva y su traza: la curva es una función vectorial que depende de una

sola variable y su traza es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que consiste de todos los puntos imágenes de la curva.

Se define la *derivada* de un curva parametrizada  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \left( \frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t), \dots, \frac{d}{dt}x_n(t) \right). \quad (1.1.1)$$

Una curva parametrizada es *suave* si tiene derivadas continuas de todos los órdenes.

Como usualmente las curvas son funciones que dependen de un sólo parámetro, denotaremos la derivada de una función vectorial suave  $\mathbf{x}$  por

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t),$$

siempre que no exista confusión respecto a qué variable se está derivando.

Si la curva  $\mathbf{x}(t)$  es suave, entonces la función  $\mathbf{x}'(t)$  es nuevamente una curva parametrizada suave, la cual define, en cada punto, un *vector tangente* a la curva  $\mathbf{x}(t)$  al que se le conoce como el *vector velocidad* de la curva; a la magnitud de este vector se le conoce como la *rapidez*. Denotaremos por

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|},$$

al vector tangente unitario a la curva en el punto  $t$ . Además, diremos que una curva suave parametrizada  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *regular* si  $\mathbf{x}'(t) \neq 0$  para todo  $t \in (a, b)$ .

### 1.1.2 Longitud de arco

Se define la *longitud de arco* de una curva suave parametrizada  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  desde un punto fijo  $t_0$  a un punto  $t$  por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt, \quad (1.1.2)$$

donde

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}(t)\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}(t)\right)^2}.$$

Si hacemos variar el parámetro  $t$  a lo largo del intervalo  $(a, b)$ , se tiene que  $s$ , dada por (1.1.2), define una función real que mide la longitud de la

curva en el intervalo  $(t_0, t)$ , a la cual se le llama *longitud de arco*. Además, si la curva es regular, entonces esta función es diferenciable con respecto a la variable  $t$  y se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{x}'(t)\| \neq 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Dada una curva parametrizada  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos definir la curva  $\mathbf{y} : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(-t)$ . En este caso la traza de  $\mathbf{y}$  es igual a la traza de  $\mathbf{x}$ , sin embargo, las dos trayectorias son recorridas en sentidos opuestos. Diremos entonces que estas dos curvas difieren por un *cambio de orientación*.

### 1.1.3 Cambio de parametrización

Sea  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva suave regular. Podemos definir una curva que tenga la misma traza de  $\mathbf{x}$ , sólo que ahora su parámetro tome valores en otro conjunto abierto de la recta real, distinto del intervalo  $(a, b)$ . En efecto, consideremos una función suave  $h : (a, b) \rightarrow (c, d)$  tal que

$$\frac{dh}{dt} \neq 0 \quad \text{para todo } t \in (a, b). \quad (1.1.3)$$

La condición (1.1.3) garantiza la existencia de una función  $h^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$  tal que  $h \circ h^{-1} \equiv \text{id}$  (función identidad). Construyamos la función  $\mathbf{y} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  como:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x} \circ h^{-1}(s). \quad (1.1.4)$$

La curva  $\mathbf{y}(s)$  es regular, lo cual se puede comprobar fácilmente ya que, por la *regla de la cadena*, se tiene

$$\frac{d\mathbf{y}(s)}{ds} = \mathbf{x}'(t) \frac{dh^{-1}(s)}{ds} \neq 0.$$

Una función suave  $h$  que cumple con la condición (1.1.3) se llama un *cambio de parametrización*.

Al definir una curva regular  $\mathbf{y}$  a través de una curva dada  $\mathbf{x}$ , por medio de la fórmula (1.1.4) obtenemos dos curvas regulares  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{y}(s)$  con la misma traza. Estas dos curvas pueden estar definidas en dos abiertos distintos, pudiendo diferir sólo en la velocidad de recorrido e incluso en sus orientaciones. Es importante mencionar aquí que la velocidad y orientación dependen del valor y signo que posea la derivada de la función  $h$ .

Consideremos la función longitud de arco  $s(t)$  de una curva regular dada por (1.1.2). Como habíamos señalado anteriormente,  $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{x}'(t)\| \neq 0$ , por lo que  $s(t)$  es una función que satisface (1.1.3), por lo que puede ser utilizada como un cambio de parametrización y se obtiene así una curva con orientación positiva y de rapidez unitaria, ya que

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = 1.$$

Recomendamos al lector interesado en el estudio de curvas y sus parametrizaciones consultar [6, 12, 18, 19].

### 1.1.4 Campos vectoriales

Consideremos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ . Un *campo vectorial suave* es una función  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$ , donde cada  $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave para  $i = 1, 2, \dots, n$ , es decir, las componentes  $v_i(\mathbf{x})$  son funciones que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, a las cuales también se les llama funciones de clase  $C^\infty$ .

Geoméricamente, un campo vectorial es una función que a cada punto de  $\mathbb{R}^n$  le asocia otro vector en  $\mathbb{R}^n$ . Denotaremos por  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los campos vectoriales suaves en  $\mathbb{R}^n$ , el cual es un espacio vectorial real. En la siguiente sección veremos que los campos vectoriales nos ayudan a definir ecuaciones diferenciales y podremos apreciar cómo algunos resultados importantes de la teoría de ecuaciones diferenciales son formulados y/o demostrados de manera elegante utilizando ciertas operaciones definidas en el espacio  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ , tales como la derivada de Lie y el corchete de Lie, las cuales definen a continuación.

#### Derivada de Lie

Sea  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  al espacio de todas las funciones reales suaves definidas en  $\mathbb{R}^n$ . La *derivada de Lie* a lo largo del campo vectorial  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  es una función  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , definida por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (1.1.5)$$

$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$  es un operador diferencial de primer orden y se puede probar, usando (1.1.5), que satisface las siguientes propiedades:



(i) *Linealidad*: Para todo  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  se tiene

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f + g) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f) + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(g);$$

(ii) *La regla de Leibniz*:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(fg) = f\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(g) + g\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f);$$

(iii)  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}+f\mathbf{w}} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} + f\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ , para todo  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y cualesquiera  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

La función  $\mathbf{v} \mapsto \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$  define una correspondencia *uno a uno* entre el espacio  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  y el espacio de los operadores lineales en  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  que satisfacen (i) y (ii). (Ver [1, 4])

### Corchete de Lie

Sean  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  dos campos vectoriales suaves en  $\mathbb{R}^n$ . Se define el *corchete de Lie* de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  como el campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}, \mathbf{w}](\mathbf{x}),$$

cuyas componentes están dadas por

$$u_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left( v_j \frac{\partial}{\partial x_j} w_i - w_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right), \quad (1.1.6)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . El corchete de Lie es una operación bilineal y anti-simétrica en el espacio  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

**Ejemplo 1.1.1** *Calculemos el corchete de Lie de los campos vectoriales en el plano*

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1), \quad \mathbf{w}(x_1, x_2) = (x_1, x_2).$$

Usando la fórmula (1.1.6), las componentes del corchete son  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ , por lo que  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{0}$ .

El corchete de Lie satisface las siguientes propiedades:

(i) *Bilinealidad*. Para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  y para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tiene

$$[\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}, \beta\mathbf{w} + \mathbf{z}] = \alpha\beta[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + \alpha[\mathbf{u}, \mathbf{z}] + \beta[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{z}];$$

(ii) *Antisimetría.* Para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  se tiene

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}];$$

(iii) *Identidad de Jacobi.* Para cualesquiera campos vectoriales  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , en  $\mathbb{R}^n$ , se cumple

$$[[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] = 0.$$

(iv) *Regla de Leibniz.* Para cada función suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene:

$$[\mathbf{v}, f\mathbf{w}] = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{w}) + f[\mathbf{v}, \mathbf{w}];$$

Es inmediato de la propiedad (ii), que si dos campos  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  conmutan, es decir, si  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{w}, \mathbf{v}]$ , entonces

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0.$$

## 1.2 Teoremas de existencia y unicidad

En esta sección vamos a revisar algunos resultados importantes de la teoría de *ecuaciones diferenciales*. Primero se estudiará el caso de los sistemas autónomos, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales en las que el campo vectorial que lo define no depende del tiempo. El resultado principal de esta parte es el *Teorema de Existencia y Unicidad* en el que se establecen ciertas condiciones bajo las cuales siempre es posible garantizar la existencia de soluciones para estos sistemas. Por último, se estudiará el caso no autónomo y el teorema de existencia y unicidad para este tipo de sistemas.

Demostraciones muy completas de los resultados aquí presentados pueden consultarse en [2, 13, 14, 16]

### 1.2.1 Problema de Cauchy para sistemas autónomos

Consideremos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (1.2.1)$$

donde  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$  es un campo vectorial suave definido en un subconjunto abierto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . El *problema de Cauchy* consiste en

encontrar una función vectorial suave que satisfaga la ecuación (1.2.1) y que tome un valor dado en un tiempo inicial.

Esto último lo expresamos en los siguientes términos: Sea  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  un punto dado; una función vectorial suave  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , se dice ser *solución* al problema de Cauchy

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.2.2a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}, \quad (1.2.2b)$$

si existe  $\delta > 0$  tal que la función  $\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{D}$  está bien definida y satisface (1.2.2a) y (1.2.2b)

La curva suave parametrizada  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{D}$  generada por la solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (1.2.1),

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{q} \in \mathcal{D} : \mathbf{q} = \mathbf{x}(t), \quad -\delta < t < \delta\}, \quad (1.2.3)$$

se llama una *trayectoria* (*órbita*) de la ecuación (1.2.1) que pasa por el punto  $\mathbf{p}$  en el tiempo  $t = 0$ .

Si  $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave, podemos definir su evolución a lo largo de la trayectoria  $\gamma$  definida por (1.2.3) usando la derivada de Lie (1.1.5) en la dirección del campo  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  por medio de la fórmula

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}F)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (1.2.4)$$

De las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.4) se sigue que

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\mathbf{v}}F)(\mathbf{x}(t)).$$

Una función suave  $F$  en  $\mathcal{D}$  se dice ser una *integral primera* del sistema (1.2.1) si para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  la función  $F$  es constante a lo largo de la trayectoria que pasa a través del punto  $\mathbf{p}$ , es decir, si

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}F)(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

El siguiente resultado es el conocido Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias. Este teorema nos garantiza la existencia de una única solución al problema de Cauchy (1.2.2a),(1.2.2b) y nos será de mucha utilidad en las demostraciones del Teorema de Frobenius y del Teorema Fundamental de Superficies.

**Teorema 1.2.1** Sea  $\mathbf{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial suave definido en un abierto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ , existen  $\delta > 0$  y una única función suave  $\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{D}$ , tal que  $\mathbf{x}$  es solución del sistema (1.2.2a), (1.2.2b).

El Teorema 1.2.1 establece que existe una función vectorial suave que pasa por un punto fijo  $\mathbf{p}$ , la cual está bien definida en un intervalo abierto centrado en el punto  $t = 0$ . Dicho intervalo se conoce como *dominio de definición de la solución*; se define el *máximo intervalo de existencia*, como el máximo intervalo de definición donde la solución es continua. Además, diremos que una trayectoria del sistema (1.2.1) es *completa* si su máximo intervalo de definición es toda la recta real; esto significa que la solución  $\mathbf{x}(t)$  al problema de Cauchy (1.2.2a), (1.2.2b) es continua para todo  $t \in (-\infty, \infty)$ . Diremos que el campo vectorial  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  del sistema (1.2.1) es *completo* si está bien definido en todo  $\mathbb{R}^n$  y si para cada punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  la trayectoria del sistema (1.2.1) que pasa por el punto  $\mathbf{p}$  es completa. Para profundizar sobre estos tópicos se puede consultar [14].

En el siguiente ejemplo se ilustran las ideas anteriores.

**Ejemplo 1.2.1** Consideremos el siguiente sistema en  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2, \\ x(0) &= 1,\end{aligned}$$

cuya solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

El campo  $v(x) = x^2$  no es completo en  $\mathbb{R}$  ya que la solución es discontinua en  $t = 1$ . Esta solución posee como intervalo máximo de existencia al intervalo  $(-\infty, 1)$ .

## 1.2.2 Retrato fase

El conjunto de todas las trayectorias que son generadas por cada solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (1.2.1) se le llama *retrato fase*. En términos geométricos, el Teorema 1.2.1 establece que existe una única trayectoria del retrato fase en  $\mathbb{R}^n$  que pasa a través cada punto  $\mathbf{p} \in (D)$ .

Un punto  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$  es un *punto singular* del campo vectorial  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  si  $\mathbf{v}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Notemos que si  $\mathbf{x}^*$  es un punto singular la función constante

$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^*$  siempre es solución del sistema (1.2.1); en este caso  $\mathbf{x}^*$  es llamado un *punto fijo* o un *punto de equilibrio*.

### 1.2.3 Teorema de la función inversa y teorema de la función implícita

Dos de los teoremas más importantes del cálculo diferencial son el teorema de la función inversa y el teorema de la función implícita, los cuales se enuncian en esta sección. En este trabajo nos serán de mucha utilidad en la demostración del Teorema Fundamental de Superficies.

Una función  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  del conjunto abierto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  al conjunto abierto  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$  es un *difeomorfismo* si

- (i)  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  es una función suave;
- (ii) Existe la función inversa  $\mathbf{f}^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ , es decir,  $\mathbf{f}$  es *biyectiva*;
- (iii)  $\mathbf{f}^{-1}$  es suave.

En este caso, la *matriz jacobiana* de  $\mathbf{f}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathbf{x} \right) \right],$$

es *no degenerada*, lo cual significa que

$$\det \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathbf{x} \right) \right] \neq 0,$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ .

Sea  $\mathbf{f} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave, donde  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Fijemos un punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{U}$  y supongamos que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{z}_0$ . ¿Bajo qué condiciones es posible resolver la ecuación

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0, \tag{1.2.5}$$

en una vecindad de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ? La respuesta a esta pregunta nos la da el teorema de la función implícita. De manera más precisa, este teorema establece que el conjunto de puntos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en una vecindad de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  y que satisfacen la ecuación  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$ , es la *gráfica de una función*  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ . El conjunto de puntos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en una vecindad de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  que cumplen la condición (1.2.5) se conoce como el *conjunto de nivel de  $\mathbf{z}_0$  para  $\mathbf{f}$* .

Si suponemos que para la función  $\mathbf{f}$

$$\det \left[ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial y_j} \right] \neq 0, \quad (1.2.6)$$

entonces la función  $\mathbf{g}$  existe, es única y es suave. De esta manera, podemos formular el *Teorema de la Función Implícita* en los siguientes términos.

**Teorema 1.2.2** *Sea  $\mathbf{f} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave, donde  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Sea  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{U}$  un punto tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{z}_0$  y se satisface la condición (1.2.6). Entonces en una vecindad del punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , el conjunto de nivel de  $\mathbf{z}_0$  para  $\mathbf{f}$  es la gráfica de una única función suave  $\mathbf{g}$  tal que  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ .*

En general, para una función suave  $\mathbf{f} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\mathcal{U}$  es un abierto  $\mathbb{R}^n$ , no es posible dar condiciones para la función  $\mathbf{f}$  bajo la cuales ésta sea un difeomorfismo en todo el conjunto  $\mathcal{U}$ . Sin embargo, sí es posible encontrar condiciones bajo las cuales  $\mathbf{f}$  es un difeomorfismo local. Este resultado es conocido como el *Teorema de la Función Inversa*, el cual enunciamos a continuación.

**Teorema 1.2.3** *Sea  $\mathbf{f} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave. Si para algún  $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ , la matriz jacobiana asociada a  $\mathbf{f}$  es no degenerada en el punto  $\mathbf{p}$ , entonces  $\mathbf{f}$  es un difeomorfismo de una vecindad de  $\mathbf{p}$  en una vecindad de  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ .*

El lector interesado puede encontrar demostraciones muy completas de los Teoremas 1.2.2 y 1.2.3 en [15, 17].

### 1.2.4 Cambio de coordenadas

Dado un sistema autónomo, definido en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es posible plantear tal sistema de ecuaciones usando nuevas variables mediante lo que se conoce como un *cambio de coordenadas*. En esta parte, revisaremos brevemente cómo lograr esto.

Considérese el sistema EDO (1.2.1) definido para la variable  $\mathbf{x}$ . Si tenemos una función  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  es un difeomorfismo en  $\mathbb{R}^n$ , entonces en las nuevas variables  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  el sistema (1.2.1) toma la forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{y}),$$

donde las componentes del campo  $\mathbf{w}(\mathbf{y})$ , en las nuevas coordenadas, están dadas por

$$w_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))}{\partial x_j} v_j(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})).$$

En este caso se dice que la función  $\mathbf{f}$  es un *cambio de coordenadas*.

**Ejemplo 1.2.2** *Un oscilador armónico en coordenadas cartesianas es representado por el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

*Si tomamos el cambio de coordenadas polares*

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta, \\ x_2 &= r \sin \theta,\end{aligned}$$

*tenemos que las ecuaciones del oscilador armónico en coordenadas polares son*

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

### 1.2.5 Dependencia de los datos iniciales y parámetros

Sea  $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$  la única solución al sistema de (1.2.1) tal que  $\mathbf{x}(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ , con  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  fijo. Si ahora hacemos variar el punto  $\mathbf{p}$  sobre el conjunto  $\mathcal{D}$ , tenemos que la solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$  depende suavemente de la variable  $\mathbf{p}$ . Luego, es posible replantear el sistema de ecuaciones (1.2.1), (1.2.2b) de tal forma que se pueda observar explícitamente la dependencia de la solución de este sistema con respecto a las condiciones iniciales. Este caso el sistema de ecuaciones está dado por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t, \mathbf{p})), \quad (1.2.7a)$$

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}. \quad (1.2.7b)$$

Es posible formular una versión del teorema de existencia y unicidad en el cual se establece una dependencia suave de la solución  $\mathbf{x}(t)$  con respecto al punto inicial.

**Teorema 1.2.4** Para cada  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{D}$ , existen  $\epsilon > 0$ , una vecindad  $\mathcal{D}_0$  de  $\mathbf{p}$  en  $\mathcal{D}$  y una función suave

$$\mathbf{x} : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.2.8)$$

que satisface (1.2.7a), (1.2.7b).

La función vectorial  $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ , que es solución del sistema (1.2.7a), (1.2.7b), satisface las siguientes propiedades

(i) *Invariancia bajo el cambio de la variable  $t$* : Para cada  $\tau \in \mathbb{R}$  constante,

$$\mathbf{x}(t + \tau, \mathbf{p}),$$

también es solución de (1.2.1).

(ii) *Propiedad de grupo*: Para cada  $t \in \mathbb{R}$  y  $\tau \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(\tau, \mathbf{p})) = \mathbf{x}(t + \tau, \mathbf{p}).$$

En muchas ocasiones deben considerarse ecuaciones diferenciales que dependen de uno o varios parámetros, en cuyo caso, es natural que la solución de esos sistemas también dependa de esos parámetros. Por simplicidad consideremos el caso de un solo parámetro.

**Ejemplo 1.2.3** La ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = k\mathbf{x},$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $k \in \mathbb{R}$ , tiene por solución  $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 e^{k(t-t_0)}$ , la cual depende de  $t, t_0, p_0$  y del parámetro  $k$ .

En general una ecuación de este tipo se representa por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, k), \quad (1.2.9a)$$

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}. \quad (1.2.9b)$$

La solución del sistema (1.2.9a),(1.2.9b) depende suavemente de  $t$ , del punto inicial  $\mathbf{p}$  y del parámetro  $k$ . La existencia de solución a este sistema se establece en el siguiente teorema.



**Teorema 1.2.5** *Para cada  $k \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{p} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ , existen  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , una vecindad  $\mathcal{D}_0$  de  $\mathbf{p}$  en  $\mathcal{D}$  y una función suave*

$$\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.2.10)$$

que satisface (1.2.9a), (1.2.9b).

Este material es presentado con un enfoque mucho más amplio general en [2, 16].

### 1.2.6 Sistemas no autónomos

Los sistemas de ecuaciones estudiados anteriormente se conocen como sistemas autónomos, ya que el campo vectorial  $\mathbf{v}$  que los define depende sólo de la variable de estado  $\mathbf{x}$ , y a su vez, la variable  $\mathbf{x}$  es una función suave que depende de un parámetro  $t$ . Si el campo vectorial  $\mathbf{v}$  también depende suavemente de dicho parámetro, se dice que el sistema es *no autónomo*.

Consideremos el sistema no autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad (1.2.11a)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}, \quad (1.2.11b)$$

donde  $\mathbf{v} : (a, b) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial suave definido en un abierto  $(a, b) \times \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ . Como en el caso autónomo, el propósito es encontrar un función vectorial suave  $\mathbf{x}(t)$  que satisfaga (1.2.11a), (1.2.11b), es decir, que sea solución de dicho sistema.

**Ejemplo 1.2.4** *El sistema no autónomo*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= t, \end{aligned}$$

con la condición inicial

$$(x_1, x_2)(0) = (0, 0),$$

tiene por solución

$$\mathbf{x}(t) = \left( \frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2} \right).$$

Como podría esperarse, existe también una versión del teorema de existencia y unicidad para sistemas no autónomos, la cual estableceremos enseguida y recomendamos a los interesados en su demostración consultar [2, 14, 16].

**Teorema 1.2.6** *Sea  $\mathbf{v} : (a, b) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial suave definido en el abierto  $(a, b) \times \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Dados  $t_0 \in (a, b)$  y  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  existen  $\delta > 0$  y una única función  $\mathbf{x} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $\mathbf{x}$  es solución al sistema (1.2.11a), (1.2.11b).*

### 1.3 Sistemas lineales

En esta sección presentaremos algunos resultados para un tipo especial de sistemas de ecuaciones, a saber, los sistemas lineales. Para ello es necesario introducir la terminología que es la comúnmente usada en este caso.

Denotaremos por  $M_n(\mathbb{R})$  al conjunto de todas las matrices de orden  $n \times n$  con elementos en  $\mathbb{R}$ , esto es,

$$M_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{A} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, n \},$$

el cual es un espacio vectorial real de dimensión  $n^2$ . Además, la multiplicación de matrices hace de  $M_n(\mathbb{R})$  una álgebra asociativa con propiedades interesantes.

Por otra parte, dadas dos matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{R})$  se define su *conmutador*  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  por

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{AB} - \mathbf{BA},$$

el cual es una operación bilineal y antisimétrica en  $M_n(\mathbb{R})$  que satisface la *identidad de Jacobi*

$$[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}] + [[\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}] + [[\mathbf{C}, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = 0.$$

Estas propiedades hacen de  $(M_n(\mathbb{R}), [ , ])$  un *álgebra de Lie* la cual denotaremos por  $\mathfrak{gl}(n)$ .

Un subconjunto muy importante de  $M_n(\mathbb{R})$  es el de las matrices no-singulares (invertibles), ya que éstas forman un grupo multiplicativo que denotaremos por  $GL(n)$ , esto es,

$$GL(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R}) : \det \mathbf{A} \neq 0 \}.$$

$GL(n)$  es un *grupo de Lie*, al cual se le llama el *grupo general lineal*. El estudio de los grupos y álgebras de Lie es un tópico central en las matemáticas contemporáneas y remitimos al lector a las referencias [5, 8, 11] para un estudio más amplio.

Consideremos el sistema autónomo (1.2.2a), (1.2.2b) y supongamos que el campo vectorial  $\mathbf{v}$  que representa a este sistema es lineal, es decir, existe una matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(n)$ , tal que  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . De esta manera, obtenemos un *sistema lineal* de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.3.1a)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}. \quad (1.3.1b)$$

De la teoría de sistemas lineales sabemos que (1.3.1a), (1.3.1b) siempre tiene por solución  $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_0))\mathbf{p}$ .

Si ahora consideramos el sistema no autónomo (1.2.11a), (1.2.11b) y suponemos que el campo vectorial  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  es lineal en  $\mathbf{x}$ , entonces existe una función matricial suave  $\mathbf{A}(t)$  tal que:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t),$$

con lo que obtenemos un sistema lineal no autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad (1.3.2a)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}. \quad (1.3.2b)$$

Es claro que, tanto en el sistema autónomo como en el no autónomo, la función  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ , es solución cuando  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ; dicha función se conoce como la *solución trivial*. Por unicidad, si una solución del sistema toma el valor de cero en su condición inicial, entonces dicha solución tiene que ser idénticamente cero.

Por otra parte, sea  $\mathbf{x}(t)$  una solución del sistema (1.3.2a), (1.3.2b) y supongamos que existe una función matricial suave  $\mathbf{G} : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$  tal que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{p}. \quad (1.3.3)$$

Si derivamos (1.3.3) con respecto a  $t$  e igualamos con (1.3.2a), obtenemos una ecuación diferencial que debe ser satisfecha por la matriz  $\mathbf{G}$ ,

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t), \quad (1.3.4)$$

sujeta a la condición inicial

$$\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{I} \tag{1.3.5}$$

El sistema (1.3.4), (1.3.5) es llamado *sistema lineal* y también se le conoce como *ecuación matricial asociada* al sistema (1.3.2a). La existencia de una solución para el sistema (1.3.4), (1.3.5) se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.1** *Sea  $\mathbf{A} : (a, b) \rightarrow \text{GL}(n)$ , una función matricial suave. Entonces para cada  $t_0 \in (a, b)$  existen  $\delta > 0$  y una función matricial suave  $\mathbf{G} \in \text{GL}(n)$ , definida en el intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , que satisface el sistema (1.3.4), (1.3.5).*

A la función matricial  $\mathbf{G}$  que es solución de (1.3.4), (1.3.5) se le conoce como *solución fundamental* del sistema (1.3.2a). La razón de esta terminología se debe a lo siguiente: Si se conoce la matriz  $\mathbf{G}$ , para cada punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ , podemos encontrar una solución para el sistema de ecuaciones (1.3.2a), (1.3.2b) mediante la fórmula (1.3.3). Lo anterior se resume de manera más precisa a continuación.

**Proposición 1.3.2** *Supongamos que la función  $\mathbf{G} : (a, b) \rightarrow \text{GL}(n)$  es solución del sistema matricial (1.3.4), (1.3.5). Entonces para cada  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  la función vectorial*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{p},$$

es solución del sistema de ecuaciones (1.3.2a), (1.3.2b).

La Proposición 1.3.2 nos dice cómo podemos obtener una solución para el sistema de ecuaciones (1.3.2a) usando la solución fundamental. Más aún, cualquier solución de este sistema se puede obtener a partir de la solución fundamental usando la ecuación (1.3.3), como se verá en la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.3** *La función matricial  $\mathbf{G} : (a, b) \rightarrow \text{GL}(n)$ , que es solución fundamental del sistema (1.3.4), (1.3.5), satisface las siguientes propiedades:*

- (i)  $\mathbf{G}(t)$  es una solución fundamental si y sólo si  $\det \mathbf{G}(t) \neq 0$ .
- (ii) Si  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de (1.3.2a), (1.3.2b), entonces  $\mathbf{x}(t)$  se puede expresar en términos de la solución fundamental por medio de la ecuación (1.3.3).

### Caso ortogonal

El propósito de esta parte es revisar algunos casos especiales de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales aparecerán en capítulos posteriores.

Una matriz  $\mathbf{C} \in \text{GL}$  es *ortogonal* si  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$ . Aquí  $\mathbf{C}^T$  denota la matriz transpuesta de  $\mathbf{C}$ . Sea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una *base ortonormal* para el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la función *delta de Kronecker*.

**Proposición 1.3.4** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una matriz  $\mathbf{C} \in \text{GL}(n)$ :*

- (1)  $\mathbf{C}$  es ortogonal.
- (2) los vectores columnas de  $\mathbf{C}$  son ortonormales,
- (3) los vectores renglón de  $\mathbf{C}$  son ortonormales.

La prueba de esta proposición es inmediata y se sigue directamente de la definición de matrices ortogonales.

Los siguientes resultados son válidos para el caso especial de la ecuación diferencial (1.3.4), donde la matriz asociada a este sistema es ortogonal.

**Proposición 1.3.5** *Supongamos que la función matricial  $\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)]$  es antisimétrica para todo  $t$ , es decir,  $\mathbf{B}^T(t) = -\mathbf{B}(t)$ . Si  $\mathbf{C} \in \text{GL}(n)$  es una matriz ortogonal y si la función matricial  $\mathbf{G}(t)$  es solución de*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) &= \mathbf{B}(t)\mathbf{G}(t), \\ \mathbf{G}(t_0) &= \mathbf{C}, \end{aligned}$$

entonces  $\mathbf{G}(t)$  es una matriz ortogonal para todo  $t$ .

La conclusión de la Proposición 1.3.5 sigue siendo válida si en el sistema de ecuaciones que se plantea en este resultado se invierte el orden de multiplicación de las matrices, hecho que se establece en el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.6** *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 1.3.5, la solución fundamental  $\mathbf{G}(t)$  del sistema lineal*

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{B}(t),$$

es ortogonal.

Por último, en el siguiente resultado se presenta el recíproco de la Proposición 1.3.5.

**Proposición 1.3.7** Sean  $\mathbf{e}_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{e}_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, \mathbf{e}_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , funciones suaves tales que  $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)\}$  forman una base ortonormal en  $\mathbb{R}^n$  para todo  $t \in (a, b)$ . Si  $[\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)]$  denota la matriz formada por los vectores columna  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , entonces existe una función matricial  $\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)]$  que es solución del sistema matricial

$$[\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \dots, \mathbf{e}'_n(t)] = [\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)] \mathbf{B}(t).$$

Además  $\mathbf{B}(t)$  es una matriz antisimétrica, y sus componentes son  $b_{ij} = \langle \mathbf{e}'_j, \mathbf{e}_i \rangle$ .

Para una exposición más completa de los sistemas lineales consultar [13, 14, 16].

## Capítulo 2

# Nociones básicas de la teoría de superficies

Este capítulo tiene por objeto explorar conceptos básicos de Geometría Diferencial que se utilizan en el estudio de superficies. Cabe señalar que en este capítulo no se dan demostraciones de los resultados que se mencionan ya que incluirlas aquí haría muy extenso este trabajo y nos apartaríamos de nuestro objetivo principal, que es dar una demostración completa del Teorema Fundamental de Superficies.

El capítulo comienza con un breve estudio de las ecuaciones de Frenet-Serret y el teorema fundamental de curvas en  $\mathbb{R}^3$ . Posteriormente se aborda el estudio de las superficies y se introducen varios objetos geométricos intrínsecos tales las formas fundamentales y los distintos tipos de curvaturas. Además se presentan varios ejemplos importantes de superficies y algunos resultados fundamentales que se derivan de su estudio.

### 2.1 Teorema fundamental de curvas

En esta parte se introducen ciertas entidades geométricas de las curvas regulares, tales como curvatura, torsión y el marco móvil de Frenet. Después se verá que estos objetos están relacionados por medio de las ecuaciones de Frenet-Serret, cuya importancia en la teoría de curvas se debe a que en ellas está plasmado todo el comportamiento geométrico de la curva. Posteriormente se enuncia el teorema fundamental de curvas, el cual es un resultado análogo al que se pretende demostrar en este trabajo.

### 2.1.1 Ecuaciones de Frenet-Serret

Las ecuaciones de Frenet-Serret caracterizan completamente el comportamiento de las curvas en el espacio, siendo la curvatura y la torsión las dos propiedades fundamentales de éstas. En esta parte se introducen estos conceptos y estudiamos cómo se relacionan entre sí.

Sea  $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$  el espacio euclidiano con el *producto interior* usual. Esto es, dados los vectores  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , su producto interior, que denotaremos como  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , se define por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 x_j y_j.$$

Recordemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una *forma bilineal simétrica*.

Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular (ver Sección 1.1) parametrizada por su longitud de arco  $s$ . Denotemos el vector tangente a la curva por

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s). \quad (2.1.1)$$

Como toda curva parametrizada por su longitud de arco es de rapidez unitaria, se sigue que  $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$ . La norma  $\|\alpha''(s)\|$  de la segunda derivada de la curva mide la rapidez con la que cambia el ángulo que forman la curva con su vector tangente en un punto fijo  $s$ , es decir,  $\|\alpha''(s)\|$  mide la rapidez con la que la curva se aleja de su recta tangente en una vecindad del punto  $s$ . Se define la *curvatura* de  $\alpha$  en  $s$  por

$$\kappa(s) \stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha''(s)\|. \quad (2.1.2)$$

En los puntos donde  $\kappa(s) \neq 0$ , podemos definir un vector unitario  $\mathbf{n}(s)$  en la dirección del vector  $\alpha''(s)$  por medio de la ecuación

$$\alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s). \quad (2.1.3)$$

Es fácil verificar que el vector  $\mathbf{n}(s)$  es ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ , ya que al ser la curva de rapidez unitaria, se tiene que  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$  y usando el hecho de que

$$\frac{d \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle}{ds} = 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0,$$

obtenemos

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \frac{\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle}{\kappa(s) \|\alpha'(s)\|} = 0.$$



Además por (2.1.1) y (2.1.2)

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Los vectores  $\mathbf{t}(s)$  y  $\mathbf{n}(s)$  definen un plano llamado el *plano osculador*, cuyo vector normal en el punto  $\alpha(s)$  es conocido como el *vector binormal* y se define por

$$\mathbf{b}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

donde  $\times$  denota el producto vectorial usual de  $\mathbb{R}^3$ . El conjunto

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\} \quad (2.1.4)$$

es una base ortonormal para  $\mathbb{R}^3$  asociada a la curva  $\alpha$  en el punto  $\alpha(s)$ . Si hacemos variar el punto  $s$  en todo el intervalo  $(a, b)$ , se tiene una base ortonormal móvil definida a lo largo de toda la curva. Al conjunto  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  se le conoce como el *marco móvil de Frenet*.

Una manera de estudiar el comportamiento de una curva es analizando cómo cambia su marco móvil (2.1.4) a largo de su trayectoria; analíticamente, esto significa que debemos conocer cómo son las derivadas de los vectores del marco de Frenet (2.1.4). Dado que el conjunto  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ , podemos expresar las derivadas de sus elementos, denotadas respectivamente por  $\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'$ , como una combinación lineal de los vectores de esta base. Así, se tiene

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad (2.1.5a)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad (2.1.5b)$$

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s), \quad (2.1.5c)$$

donde la función  $\tau(s)$  es llamada la *torsión* de la curva  $\alpha(s)$  y mide el cambio del plano osculador a lo largo de esta curva. Las ecuaciones (2.1.5a)–(2.1.5c) son conocidas como las *ecuaciones de Frenet-Serret*. En notación matricial estas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

### 2.1.2 Teorema fundamental de curvas en el espacio

En forma breve, después de observar las ecuaciones de Frenet-Serret (2.1.5a)–(2.1.5c), podemos afirmar que si tenemos una curva regular parametrizada

por la función longitud de arco, todo el comportamiento de la curva está plasmado en dichas ecuaciones, las cuales dependen únicamente de su curvatura  $\kappa(s)$  y su torsión  $\tau(s)$ .

Por otra parte, el *teorema fundamental de curvas* establece una respuesta afirmativa para el recíproco de la afirmación anterior, esto es, si tenemos dos funciones suaves  $\kappa(s), \tau(s)$  que satisfacen la ecuaciones de Frenet-Serret, entonces existe una curva regular  $\alpha(s)$  la cual tiene, precisamente, como su curvatura y su torsión a las funciones  $\kappa(s)$  y  $\tau(s)$ . Además, esta curva es única salvo movimientos rígidos.

La unicidad bajo movimientos rígidos significa que si tenemos dos curvas regulares que tienen las mismas funciones de curvatura y torsión, entonces podemos encontrar una transformación que envía una curva exactamente sobre la otra. Dicha transformación se conoce como un movimiento rígido y a continuación precisamos este concepto.

El conjunto de las matrices *ortogonales* de  $GL(n)$ , denotado por  $O(n)$ , se define por

$$O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{A} \in GL(n) : \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \},$$

y resulta ser un *subgrupo* de  $GL(n)$ , al cual se le llama el *grupo ortogonal*. Notemos que para toda  $\mathbf{A} \in O(n)$ , se tiene  $\det A = \pm 1$ .

Otro subgrupo importante de  $GL(n)$  es el *grupo especial ortogonal*, el cual se define por

$$SO(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{A} \in O(n) \mid \det A = 1 \}.$$

Geoméricamente, los elementos de  $SO(n)$  representan rotaciones en  $\mathbf{R}^n$  que preservan orientación, tópico que retomaremos en la Subsección 2.2.6.

Una función  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice ser un *movimiento rígido* (que preserva la orientación) si es de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{2.1.6}$$

donde  $\mathbf{A} \in SO(3)$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . En términos geométricos, este tipo de transformaciones consisten de una rotación seguida de una traslación.

Ahora estamos preparados para formular el teorema fundamental de curvas en el espacio.

**Teorema 2.1.1** Sean  $\kappa(s) > 0$  y  $\tau(s)$  funciones suaves definidas en el intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  y supongamos que satisfacen las ecuaciones de Frenet-Serret

(2.1.5a)–(2.1.5c). Entonces existe una curva regular  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  es el parámetro de longitud de arco,  $\kappa(s)$  es su curvatura y  $\tau(s)$  su torsión. Más aún, si existe otra curva regular  $\beta$  con curvatura  $\kappa(s)$  y torsión  $\tau(s)$ , entonces existe un movimiento rígido  $\mathbf{F}$  tal que

$$\alpha(s) = \mathbf{F} \circ \beta(s) \quad \text{para toda } s \in (a, b).$$

Un estudio más detallado de las ecuaciones de Frenet-Serret y la demostración del teorema fundamental de curvas se puede consultar en [4, 6, 12, 18, 19, 21].

## 2.2 Superficies regulares

De manera intuitiva, una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  se obtiene pegando piezas de un plano que han sido deformadas “suavemente”, de tal manera que el objeto resultante no tenga vértices, aristas o autointersecciones. El propósito de esta sección es precisamente el estudio de las superficies regulares y de varios objetos matemáticos asociadas a ellas. Asimismo, se presentan varios ejemplos importantes de superficies en las cuales se hace evidente la noción intuitiva mencionada anteriormente. El material de estudio de esta sección puede ser consultar en [6, 12, 17, 18, 19].

### 2.2.1 Superficies, parametrizaciones y cartas coordenadas

En geometría diferencial se estudian las propiedades locales de las superficies, para lo cual se usan las técnicas de cálculo diferencial, mismas que utilizaremos extensivamente en lo que sigue. La definición de superficie regular es una de las más importante en este trabajo y en ella se recupera la idea intuitiva que se mencionó al inicio de esta sección, dicha definición se enuncia de la siguiente manera.

**Definición 2.2.1** *Un subconjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  existe una vecindad  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una función  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap \mathcal{M}$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  tal que:*

- (i)  $\mathbf{x}$  es diferenciable. Es decir, si expresamos esta función como  $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ , con  $(u, v) \in U$ , las funciones  $x_i : U \rightarrow \mathbf{R}$  tienen derivadas continuas de todos los órdenes en todo  $U$  para  $i = 1, 2, 3$ .

- (ii)  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo. Esto significa que  $\mathbf{x}$  es continua, biyectiva y su inversa  $\mathbf{x}^{-1}$  también es continua.
- (iii) Condición de regularidad. Para cada  $\mathbf{q} \in U$ , la diferencial de  $\mathbf{x}$  en el punto  $\mathbf{q}$ ,  $d\mathbf{x}_{\mathbf{q}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por la matriz

$$d\mathbf{x}_{\mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial v} \right], \quad (2.2.1)$$

tiene rango dos.

Notemos que la condición (iii) de la Definición 2.2.1 es equivalente a que la diferencial  $d\mathbf{x}_{\mathbf{q}}$  sea una transformación lineal *uno-a-uno*.

La función  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap \mathcal{M}$  de la Definición de una superficie regular 2.2.1 es llamada una *parametrización* o un *sistema de coordenadas locales* en  $\mathbf{p}$ . La vecindad  $V \cap \mathcal{M}$  que contiene al punto  $\mathbf{p}$  se llama una *vecindad coordinada* o *carta coordinada*. En lo sucesivo denotaremos simplemente por  $V$  a la vecindad coordinada de un punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ . El conjunto de las vecindades coordinadas  $V \subset \mathcal{M}$  del punto  $\mathbf{p}$  constituyen una *topología relativa* en  $\mathcal{M}$ .

## 2.2.2 Ejemplos de superficies en $\mathbb{R}^3$

Para ilustrar la Definición 2.2.1 presentaremos algunos ejemplos de superficies regulares. En algunos casos particulares, estos pueden ser usados como criterios para decidir si un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  es una superficie regular sin recurrir directamente a la definición.

### Superficies de revolución

Una superficie de revolución se obtiene al hacer girar una curva plana alrededor de un eje de revolución contenido en el mismo plano de la curva. Sean  $(x_1, x_2, x_3)$  las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^3$  y  $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ , con  $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}^2$ , una parametrización de una curva regular  $C$  contenida en el plano  $x_1x_3$ . El conjunto  $\mathcal{M}$  que se obtiene al rotar la curva  $C$  sobre el eje  $x_3$ , esta dado por

$$\mathcal{M} = \{(f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \in \mathbb{R}^3 : v \in (a, b), u \in [0, 2\pi]\}.$$

$\mathcal{M}$  es una superficie regular, la cual puede ser completamente cubierta por las siguientes cartas coordinadas:

$$\mathbf{x}_1 : (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{M}, \quad \mathbf{x}_1(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

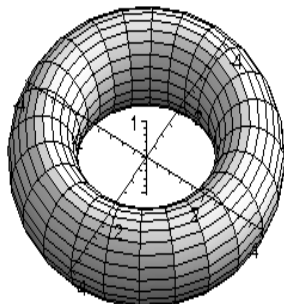


Figura 2.1: Parametrización del toro:

$$\mathbf{x}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u).$$

$$\mathbf{x}_2 : (a, b) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathcal{M}, \quad \mathbf{x}_2(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)).$$

### Gráficas de funciones

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. La *gráfica de  $f$*  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\text{graf}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f(x_1, x_2)\}. \quad (2.2.2)$$

Las gráficas de funciones suaves son superficies regulares, como se establece en el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.1** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave definida en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\text{graf}(f)$ , definida por (2.2.2), es una superficie regular.*

En este caso una parametrización para  $\text{graf}(f)$  esta dada por

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{graf}(f), \quad \mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

### Valores regulares

En algunos casos, decidir si un subconjunto dado de  $\mathbb{R}^3$  es una superficie regular usando directamente la definición puede resultar un trabajo bastante tedioso. En la siguiente proposición estableceremos un criterio para comprobar cuándo ciertos subconjuntos dan lugar a una superficie regular sin hacer usar la Definición 2.2.1. Antes de formular dicho resultado definamos algunos conceptos importantes.

Sea  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función suave definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ; se dice que  $\mathbf{p} \in U$  es un *punto crítico* de  $\mathbf{F}$  si la diferencial  $d\mathbf{F}_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{p}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}) \right],$$

es una transformación lineal que no es un *suprayectiva*. La imagen  $\mathbf{F}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$  de un punto crítico es llamado *valor crítico* de  $\mathbf{F}$ . Un punto de  $\mathbb{R}^m$  que no es un valor crítico es llamado un *valor regular* de  $\mathbf{F}$ . Por otra parte, se define la *imagen inversa* de un punto  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  bajo  $\mathbf{F}$  como el conjunto

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{p} \in U \subset \mathbb{R}^n : \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{a}\}.$$

Se tiene así el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.2** *Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Supongamos que el punto  $a \in f(U)$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(a)$  es una superficie regular.*

**Ejemplo 2.2.1** *La esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  es el conjunto*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}. \quad (2.2.3)$$

*Probaremos que  $\mathbb{S}^2$  es una superficie regular usando la Proposición 2.2.2. Para esto definamos la función  $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ; es claro que  $\mathbf{F}$  es una función suave. Como el cero es un valor regular de  $\mathbf{F}$ , entonces por la Proposición 2.2.2 se sigue que el conjunto  $\mathbb{S}^2 = \mathbf{F}^{-1}(0)$  es una superficie regular. Notemos que esta forma de probar que la esfera unitaria es una superficie regular es mucho más fácil que usar la definición, ya que en ese*

caso es necesario dar parametrizaciones de  $\mathbb{S}^2$ , como por ejemplo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(u, v) &= \left( u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right), \\ \mathbf{x}_2(u, v) &= \left( u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2} \right), \\ \mathbf{x}_3(u, v) &= \left( u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v \right), \\ \mathbf{x}_4(u, v) &= \left( u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v \right), \\ \mathbf{x}_5(u, v) &= \left( \sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v \right), \\ \mathbf{x}_6(u, v) &= \left( -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v \right),\end{aligned}$$

y verificar que cada una de éstas cumplen con la definición de superficies.

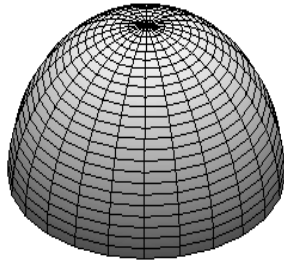


Figura 2.2: Parametrización de la esfera:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Las pruebas de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2 se pueden encontrar con todo detalle en [6, 12, 18].

### 2.2.3 Cambio de parametrización

De acuerdo con la Definición 2.2.1, cada punto de una superficie regular pertenece a una carta coordenada y los puntos de tal vecindad coordenada son

caracterizados por medio de una parametrización. Esto nos permite definir, de manera local, las propiedades que nos interesen en términos de esas coordenadas. Sin embargo, algún punto de la superficie puede pertenecer a más de una carta coordenada. Si este es el caso, es posible pasar de la parametrización de una carta coordenada en otra a través de una transformación diferenciable que se conoce como *función de transición* o *cambio de parametrización*.

Sea  $\mathbf{p}$  un punto de una superficie regular  $\mathcal{M}$  y supongamos que  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathcal{M}$  son dos parametrizaciones de  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Se define la *función de transición*  $\mathbf{h} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  por

$$\mathbf{h} = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} \quad (2.2.4)$$

**Proposición 2.2.3** *Dadas dos parametrizaciones  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathcal{M}$  de una superficie  $\mathcal{M}$  con  $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) \neq \emptyset$  se tiene que la función de transición  $\mathbf{h}$ , definida en (2.2.4), es un difeomorfismo.*

Una demostración de este hecho se puede encontrar en [6, 12, 18].

Lo anterior nos permite caracterizar las propiedades de una superficie que permanecen invariantes bajo cambios de parametrización. Así, diremos que cierta propiedad es *invariante* o que no depende de la parametrización, si tal propiedad se preserva bajo cambios de coordenadas. Tal es el caso de la curvatura gaussiana que abordaremos en la Sección 2.4.

## 2.2.4 El Plano tangente a una superficie

En objetivo de esta parte es mostrar que la condición (iii) de la Definición 2.2.1 de superficie regular implica la existencia de un plano tangente en cada punto de la superficie.

Sean  $\mathcal{M}$  una superficie regular y  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva suave en  $\mathcal{M}$  tal que  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ , con  $\epsilon > 0$ . Un *vector tangente* a  $\mathcal{M}$  en el punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  es el vector tangente  $\alpha'(0)$ . El conjunto de vectores tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $\mathbf{p}$ , definido por

$$T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha'(0) \mid \exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}, \alpha(0) = \mathbf{p} \}, \quad (2.2.5)$$

es llamado el *plano tangente* a la superficie  $\mathcal{M}$  en el punto  $\mathbf{p}$ .

En la siguiente proposición se establece que el plano tangente a una superficie es un espacio vectorial de dimensión dos y la demostración puede consultarse en [6, 12, 18].



**Proposición 2.2.4** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular y  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización de  $\mathcal{M}$ . Para cada  $(u_0, v_0) \in U$ , el conjunto de vectores tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$  es un espacio vectorial de dimensión 2; más aún,

$$T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} = d\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.2.6)$$

Para justificar esta proposición, notemos que si  $\mathbf{w}$  un vector tangente en  $\mathbf{p}$ , entonces  $\mathbf{w} = \alpha'(0)$ , donde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva regular tal que  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ . Además, la curva  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  es regular y  $d\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\beta'(0)) = \mathbf{w}$ ; por lo tanto,  $\mathbf{w} \in d\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$ . Por otra parte, supongamos que  $\mathbf{w} = d\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ , con  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Si definimos la curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ , donde  $\gamma(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$  es una curva plana, se tiene por definición de la diferencial que  $\mathbf{w} = \alpha'(0)$  y, en consecuencia,  $\mathbf{w}$  es un vector tangente.

La elección de una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  determina una base para el espacio  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , dada por

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\},$$

la cual es llamada la *base asociada* a la parametrización  $\mathbf{x}$ . Para facilitar los cálculos posteriores es conveniente escribir

$$\mathbf{x}_u \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}. \quad (2.2.7)$$

Los vectores  $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ ,  $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$  forman una base para  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  y son llamados *vectores coordenados*.

Veamos ahora cómo se pueden obtener las coordenadas de un vector  $\mathbf{a} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  en la base asociada a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ . Como el vector  $\mathbf{a}$  es tangente a la superficie  $\mathcal{M}$ , entonces  $\mathbf{a}$  es el vector velocidad  $\alpha'(0)$  de alguna curva regular  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$  donde  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  está dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , con  $\beta(0) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(u(t), v(t))(0) \\ &= u'(0)\mathbf{x}_u(u(0), v(0)) + v'(0)\mathbf{x}_v(u(0), v(0)) = \mathbf{a}, \end{aligned}$$

por lo que las coordenadas del vector  $\mathbf{a}$  en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  son  $(u'(0), v'(0))$ .

Una recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el punto  $\mathbf{p}$  de una superficie regular  $\mathcal{M}$  y es perpendicular a  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  se dice *normal* a la superficie en el punto  $\mathbf{p}$ . A cualquier vector sobre esta recta se le llama un *vector normal* a la superficie en  $\mathbf{p}$ .

Para cada punto  $\mathbf{p}$  fijo que se encuentre en una vecindad coordenada  $V \subset \mathcal{M}$  podemos definir un vector normal unitario a través de la parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \subset \mathcal{M}$ , con  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}$ , por:

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \right) (u, v) \quad (2.2.8)$$

Si hacemos variar  $\mathbf{p}$  sobre el conjunto  $V \subset \mathcal{M}$ , se tiene que la función  $\mathbf{N}$ , dada por (2.2.8), es una función definida en un abierto de  $\mathcal{M}$ , la cual, como veremos a continuación, es suave y define localmente un campo normal unitario.

### 2.2.5 Funciones suaves

Sea  $f : V \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función definida en un subconjunto abierto  $V$  de la superficie regular  $\mathcal{M}$ . Se dice que  $f$  es una *función suave* en  $\mathbf{p} \in V$  si existe una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\mathcal{M}$ , con  $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U) \subset V$ , de tal manera que la función  $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$  es suave en el punto  $\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$ . La función  $f$  es *suave* en todo el conjunto  $V$  si es suave en cada punto de  $V$ .

Cabe señalar que en la definición anterior es necesaria la existencia de una parametrización; sin embargo, la diferenciabilidad de una función es una propiedad que no depende de la parametrización de la superficie.

La definición de diferenciabilidad puede extenderse fácilmente a funciones entre superficies. Una función continua  $F : V_1 \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , de un abierto  $V_1$  de la superficie regular  $\mathcal{M}$  en la superficie regular  $\mathcal{N}$  se dice ser diferenciable en el punto  $\mathbf{p} \in V_1$  si dadas las parametrizaciones

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow \mathcal{M}, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow \mathcal{N},$$

con  $\mathbf{p} \in \mathbf{x}_1(U_1)$  y  $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ , la función

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable en  $\mathbf{q} = \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{p})$ .

### La diferencial de una función suave

Supongamos que  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  son dos superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  y  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  una función suave. La *diferencial* de  $F$  en  $\mathbf{p}$ , denotada por  $dF_{\mathbf{p}}$ , es la transformación lineal de  $dF_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}\mathcal{N}$  definida por

$$dF_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = (F \circ \alpha)'(0),$$

donde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva suave en  $\mathcal{M}$  tal que  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ . La diferencial de  $F$  está bien definida ya que si  $\alpha, \beta$  son dos curvas en  $\mathcal{M}$  tales que  $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbf{p}$  y  $\alpha'(0) = \beta'(0)$ , entonces por la regla de la cadena,  $(F \circ \alpha)'(0) = (F \circ \beta)'(0)$ .

Como mencionamos líneas arriba, la diferencial  $dF_{\mathbf{p}}$  es una transformación lineal y como tal, al fijar una base para el espacio  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , es posible representarla de forma matricial, la cual veremos a continuación.

Sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva parametrizada con  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ . Definimos la curva  $\beta = F \circ \alpha$ , la cual es una curva en la superficie  $\mathcal{N}$  y se tiene  $\beta(0) = (\mathbf{p})$ . Sean  $\mathbf{x}(u, v)$  y  $\mathbf{y}(w, z)$  parametrizaciones de  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  respectivamente, tales que  $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U)$  y  $F(\mathbf{p}) \in F(\mathbf{x}(U))$ . Supongamos que  $F$  se expresa en coordenadas locales por  $F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$ , y que la curva  $\alpha$  está dada por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Entonces

$$\beta(t) = (F_1(u(t), v(t)), F_2(u(t), v(t))),$$

y la expresión de  $\beta'(0)$  en la base  $\{\mathbf{y}_w, \mathbf{y}_z\}$  es

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial F_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial F_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial F_2}{\partial v} v'(0) \right). \quad (2.2.9)$$

La ecuación (2.2.9) muestra que  $\beta'(0)$  depende sólo de la función  $F$  y de las coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  del vector  $\alpha'(0)$  en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . En forma matricial se tiene

$$\beta'(0) = dF_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

lo cual nos da la representación matricial de la transformación lineal  $dF_{\mathbf{p}}$  (2.2.10).

### 2.2.6 Campos vectoriales en superficies

En la Sección 1.1 se revisó el concepto de campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$ ; en esta parte introduciremos el concepto de campo vectorial en superficies regulares. Recordemos que un campo vectorial en el plano es una función  $\mathbf{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto abierto, la cual asigna a cada punto  $\mathbf{q} = (u, v) \in U$  un vector  $\mathbf{w}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$ . El campo vectorial  $\mathbf{w}$  es suave si al expresarlo como  $\mathbf{w}(u, v) = (a(u, v), b(u, v))$ , las funciones  $a$  y  $b$  son suaves en  $U$ .

**Definición 2.2.2** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular. Un campo vectorial suave definido en un conjunto abierto  $V \subset \mathcal{M}$  es una función  $\mathbf{w}$  que asigna a cada punto  $\mathbf{p} \in V$  un vector  $\mathbf{w}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , de tal manera que si  $\mathbf{x}(u, v)$  es una parametrización en  $\mathbf{p}$ , existen funciones suaves  $a, b : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que

$$\mathbf{w}(u, v) = a(u, v) \mathbf{x}_u + b(u, v) \mathbf{x}_v,$$

donde  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  son los vectores coordenados asociados a la parametrización  $\mathbf{x}$ .

Nótese que los vectores coordenados  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son campos vectoriales suaves en la superficie  $\mathcal{M}$ .

**Definición 2.2.3** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular. Una curva regular  $C \subset \mathcal{M}$  se dice ser una curva integrable del campo vectorial  $\mathbf{w}$  en  $\mathcal{M}$  si para cada punto  $\mathbf{p} \in C$  el vector  $\mathbf{w}(\mathbf{p})$  es tangente a  $C$  en  $\mathbf{p}$ .

Las curvas integrables de los campos vectoriales definidos por los vectores coordenados (2.2.7) son llamadas *líneas de coordenadas*.

Para finalizar con esta subsección, enunciaremos un teorema que será muy importante en el desarrollo de la parte final de este trabajo.

**Teorema 2.2.5** Sean  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 : V \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  campos vectoriales suaves en una superficie regular  $\mathcal{M}$ . Supongamos que para algún punto  $\mathbf{p} \in V$  los vectores  $\mathbf{w}_1(\mathbf{p})$  y  $\mathbf{w}_2(\mathbf{p})$  son linealmente independientes. Entonces existen una vecindad  $V_0 \subset V$  de  $\mathbf{p}$  y una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow V_0 \subset \mathcal{M}$  tal que para cada  $\mathbf{q} \in V_0$  las líneas de coordenadas de esta parametrización coinciden con las curvas integrales de los campos  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$ .

Una interpretación geométrica de este resultado es la siguiente: Dados ciertos campos vectoriales en una superficie regular, es posible construir una parametrización local de la superficie, tal que los vectores coordenados asociados a esta parametrización sean paralelos a estos campos vectoriales. Un planteamiento más completo de este teorema y su demostración puede ser consultado en [6, 18, 21].

## Orientabilidad

Una superficie regular  $\mathcal{M}$  se dice ser *orientable* si es posible cubrirla con una familia de cartas coordenadas de tal forma que si un punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  pertenece

a dos cartas coordenadas de esta familia, entonces el jacobiano de la función de transición es positivo en  $\mathbf{p}$ . Tal familia es llamada una *orientación* de  $\mathcal{M}$  y, en este caso, se dice que  $\mathcal{M}$  está *orientada*. Si no es posible elegir una orientación para  $\mathcal{M}$  se dice que la superficie es *no orientable*.

Como hemos comentado anteriormente, cada punto  $\mathbf{p}$  de una superficie regular  $\mathcal{M}$  admite un plano tangente  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ . Cuando tomamos una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  de una vecindad  $V$  del punto  $\mathbf{p}$  siempre es posible definir un campo normal unitario al espacio  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , dado por el vector  $\mathbf{N}$  definido por (2.2.8). Esto induce una orientación para el espacio  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ . Más aún, este campo normal es suave en cada punto de la vecindad  $V$ . En lo que sigue profundizaremos más sobre esta idea geométrica cuando  $\mathcal{M}$  es orientable.

Supongamos que el punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  está en la intersección de dos cartas coordenadas de  $\mathcal{M}$  correspondientes a las parametrizaciones  $\mathbf{x}(u, v)$  y  $\mathbf{y}(w, z)$ . Entonces existe una función de transición que transforma las coordenadas  $(u, v)$  en  $(w, z)$ , es decir,  $\mathbf{y}(w, z) = \mathbf{x}(u(w, z), v(w, z))$ . Por la regla de la cadena tenemos

$$\mathbf{y}_w = \frac{\partial u}{\partial w} \mathbf{x}_u + \frac{\partial v}{\partial w} \mathbf{x}_v, \quad (2.2.11)$$

$$\mathbf{y}_z = \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{x}_u + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{x}_v. \quad (2.2.12)$$

Estas ecuaciones expresan los vectores de la base  $\{\mathbf{y}_w, \mathbf{y}_z\}$  asociada a la parametrización  $\mathbf{y}(w, z)$  en términos de la base asociada a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ . De esta manera, podemos concluir que la matriz jacobiana de la función de transición es la matriz de cambio de base. Por otra parte, si realizamos el producto vectorial de  $\mathbf{y}_w$  y  $\mathbf{y}_z$  usando las ecuaciones (2.2.11), (2.2.12) se tiene

$$\mathbf{y}_w \times \mathbf{y}_z = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v,$$

por lo tanto, el vector normal  $\mathbf{N}$  asociado a la parametrización  $\mathbf{x}$  preservará o cambiará de signo, dependiendo si el jacobiano de la función de transición es positivo o negativo, respectivamente.

Si la superficie  $\mathcal{M}$  está orientada, entonces para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  que pertenezca a dos cartas coordenadas de su orientación el jacobiano de la función de transición es positivo en  $\mathbf{p}$ . Por lo tanto el vector normal  $\mathbf{N}$ , definido por (2.2.8), es invariante bajo un cambio de parametrización. En términos geométricos, en una superficie orientada el vector normal  $\mathbf{N}$  (2.2.8) es una función suave en toda la superficie.

Para probar que una superficie regular es orientable debemos comprobar la existencia de una familia de cartas coordenadas en donde el jacobiano de la función de transición sea positivo en la intersección de dos cartas de esta familia. Esto es algo que en la práctica puede resultar muy difícil y bastante tedioso de probar. Existe un criterio para decidir si una superficie es orientable o no, resultado que se apoya en el concepto de campos vectoriales normales a la superficie.

Un *campo suave de vectores normales unitarios* es una función  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido en un conjunto abierto  $V \subset \mathcal{M}$ , que asocia a cada punto  $\mathbf{p} \in V$  un vector  $\Psi(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3$ , el cual es normal a  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  y  $\|\Psi(\mathbf{p})\| = 1$ .

**Proposición 2.2.6** *Una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es orientable si y sólo si existe un campo suave de vectores normales unitarios  $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $\mathcal{M}$ .*

La proposición anterior, en algunos casos, hace más fácil la tarea de probar si una superficie regular  $\mathcal{M}$  es orientable. En ocasiones es suficiente con probar que la función  $\mathbf{N}$ , definida por (2.2.8) para cada parametrización de la superficie, se puede extender suavemente en toda la superficie  $\mathcal{M}$ .

## 2.3 Formas fundamentales

Dentro los objetos matemáticos que se definen para una superficie regular, los más importantes para conocer sus propiedades geométricas son las formas fundamentales.

En el caso de la primera forma fundamental, podemos decir que es un instrumento natural para abordar cuestiones métricas en una superficie regular tales como longitudes de curvas, áreas de regiones, etcétera. La segunda forma fundamental nos permite hacer un estudio y una clasificación local de los puntos de una superficie.

### 2.3.1 Primera forma fundamental

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular. Para cada punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  es posible inducir un producto interior en el plano tangente  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , el cual denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$ . Si  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , entonces  $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbf{p}}$  es el producto interior usual de los vectores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  en  $\mathbb{R}^3$ . Como el producto interior en  $\mathbb{R}^3$  es un forma

bilineal, podemos definir una forma cuadrática  $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{w}\|^2 \geq 0. \quad (2.3.1)$$

La forma cuadrática  $I_{\mathbf{p}}$  en  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , definida por la ecuación (2.3.1), es llamada la *primera forma fundamental* de la superficie regular  $\mathcal{M}$  en el punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ .

Es posible expresar la primera forma fundamental en términos de la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  asociada a la parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  por

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (2.3.2)$$

donde

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \quad (2.3.3)$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ . Además,  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$  son funciones suaves en  $U$ .

La importancia geométrica de la primera forma fundamental se debe a que nos permite hacer mediciones y cálculos sobre la superficie tales como longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangente, áreas de regiones, etc. Vamos a ilustrar cómo se realizan algunos de estos cálculos.

Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva en  $\mathcal{M}$ . La función longitud de arco  $s$  de la curva está dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

En términos de la primera forma fundamental, esta función se expresa por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

En particular, si  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  está contenida en una vecindad coordenada correspondiente a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , podemos calcular la longitud de la curva  $\alpha$  por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2} dt.$$

Supongamos ahora que tenemos dos curvas  $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ , las cuales se intersectan en  $t = t_0$  formando un ángulo  $\theta$ , el cual está dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

En particular, el ángulo  $\phi$  entre dos curvas coordenadas de una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , está dado por

$$\cos \phi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle} = \frac{F}{EG}. \quad (2.3.4)$$

### 2.3.2 Operador de forma y segunda forma fundamental

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular orientada y  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización de  $\mathcal{M}$ . Se define el *mapeo de Gauss* de  $\mathcal{M}$ ,  $\mathbf{N} : \mathbf{x}(U) \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , por

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(\mathbf{p}). \quad (2.3.5)$$

el cual es un campo suave normal unitario.

Si calculamos la diferencial  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{N}(\mathbf{p})}\mathbb{S}^2$  en el punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ , obtenemos una transformación lineal definida por

$$d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = (\mathbf{N} \circ \alpha)'(0), \quad (2.3.6)$$

donde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva suave con  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ . Como sabemos, el vector  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  es ortogonal a  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  y también es ortogonal a  $T_{\mathbf{N}(\mathbf{p})}\mathbb{S}^2$ , ya que  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  es un vector anclado en el origen y que determina un punto en  $\mathbb{S}^2$ . Por lo tanto  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  y  $T_{\mathbf{N}(\mathbf{p})}\mathbb{S}^2$  son plano paralelos. Luego, si identificamos el punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  con el punto  $\mathbf{N}(\mathbf{p}) \in \mathbb{S}^2$  podemos considerar que  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$  es un operador lineal de  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  en sí mismo.

Una característica importante del operador  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$  se establece en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.1** *La diferencial del mapeo de Gauss (2.3.5),  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , es un operador lineal autoadjunto, es decir,*

$$\langle d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) \rangle.$$

para todo  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$

El operador lineal autoadjunto  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  (2.3.6) es llamado el *operador de forma de la superficie  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{p}$* .

Definamos la función  $II_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -\langle d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle, \quad \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}. \quad (2.3.7)$$

La función  $II_{\mathbf{p}}$  se llamada la *segunda forma fundamental* de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{p}$ . (Ver definición de operador autoadjunto y de formas cuadráticas asociadas a una forma bilineal en el Apéndice A.2)

Vamos a expresar ahora el operador de forma y la segunda forma fundamental usando coordenadas locales. Para ello supongamos que  $\mathbf{x}(u, v)$  una



parametrización de la superficie  $\mathcal{M}$ . Sea  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  y  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  una curva parametrizada en  $\mathcal{M}$ , con  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ . El vector tangente a  $\alpha(t)$  en  $\mathbf{p}$  es

$$\alpha' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v,$$

por lo que al aplicar la diferencial del mapeo de Gauss a este vector se tiene

$$d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha') = \frac{d\mathbf{N}}{dt}(u(t), v(t)) = u' \mathbf{N}_u + v' \mathbf{N}_v, \quad (2.3.8)$$

donde  $\mathbf{N}_u = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}$  y  $\mathbf{N}_v = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}$ . Además,  $\mathbf{N}_u$  y  $\mathbf{N}_v$  pertenecen a  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , ya que ambos son ortogonales a  $\mathbf{N}$ , lo cual se sigue de derivar la relación  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1$  con respecto a las variables  $u$  y  $v$ , respectivamente. En consecuencia,  $\mathbf{N}_u$  y  $\mathbf{N}_v$  se expresan como una combinación lineal de los vectores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ , por

$$\mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{N}_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v. \quad (2.3.10)$$

Sustituyendo (2.3.9), (2.3.10) en (2.3.8) obtenemos

$$d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v') \mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v') \mathbf{x}_v,$$

que en forma matricial expresamos como

$$d\mathbf{N} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (2.3.11)$$

En el Capítulo 4 obtendremos fórmulas explícitas para los coeficientes  $a_{ij}$  que aparecen en (2.3.11).

Por otro lado, la expresión de la segunda forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  está dada por

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{p}}(\alpha') &= -\langle d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle u' \mathbf{N}_u + v' \mathbf{N}_v, u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v \rangle \\ &= e (u')^2 + 2f u' v' + g (v')^2, \end{aligned}$$

donde los coeficientes de  $II_{\mathbf{p}}$  están dados por:

$$e = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \quad (2.3.12)$$

$$f = -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad (2.3.13)$$

$$g = -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \quad (2.3.14)$$

En la siguiente sección vamos a explorar algunas propiedades geométricas de la segunda forma fundamental para lo cual utilizaremos algunas de las propiedades de los operadores autoadjuntos (Ver Apéndice A.2).

## 2.4 Curvatura

Como se vió en la Sección 2.1, el comportamiento que exhibe la recta tangente de una curva regular  $\alpha$  a largo de su trayectoria da origen a un objeto geométrico importante, a saber, la curvatura de  $\alpha$ , denotada por  $\kappa(s)$ , cuando  $\alpha$  esta parametrizada por su longitud de arco  $s$ . El propósito en la presente sección es extender esta idea al caso de superficies, es decir, estudiar en un punto de las superficie  $\mathcal{M}$ , cómo es el comportamiento del plano tangente en ese punto cuando este varía sobre un conjunto abierto de la superficie  $\mathcal{M}$ . Esto es equivalente a medir cómo cambia el vector normal unitario  $\mathbf{N}$  en un punto  $\mathbf{p}$ , al variar éste sobre una vecindad que lo contenga. Para llevar a cabo el plan anterior estudiaremos el operador de forma y obtendremos algunas propiedades geométricas de la superficie que se derivan de este operador y de la segunda forma fundamental.

### 2.4.1 Curvatura normal

Sea  $\mathcal{M}$  una superfice regular y  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ . Supongamos que una curva regular  $C$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , donde  $s$  es el parámetro de longitud de arco, está contenida en la superficie  $\mathcal{M}$  y pasa por el punto  $\mathbf{p}$ . Sea  $\kappa$  la curvatura de  $C$  en  $\mathbf{p}$  y consideremos el vector normal unitario  $\mathbf{n}$  a la curva  $C$ , definido por (2.1.3). El coseno del ángulo  $\theta$  entre los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{N}$  está dado por  $\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$ , donde  $\mathbf{N}$  es el vector normal a la superficie  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{p}$ .

La *curvatura normal* de la curva  $C$  en  $\mathbf{p}$  se define por

$$\kappa_n = \kappa \cos \theta.$$

En términos geométricos,  $\kappa_n$  nos da la proyección del vector  $\kappa \mathbf{n}$  sobre el vector normal  $\mathbf{N}$ , donde el signo está dado por la orientación que tenga el vector  $\mathbf{N}$  en el punto  $\mathbf{p}$ . La curvatura normal de  $C$  no depende de su orientación, pero cambia de signo al cambiar la orientación de la superficie.

Ahora estamos en condiciones de dar una interpretación geométrica de la segunda forma fundamental en términos de la curvatura normal. Consideremos la curva regular  $C \subset M$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , donde  $s$  es la longitud de arco de  $C$ , con  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ . Si hacemos  $\mathbf{N}(s) \equiv \mathbf{N} \circ \alpha(s)$ , tenemos

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle \mathbf{N}(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle \mathbf{N}'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}(0), \alpha''(0) \rangle = \langle \mathbf{N}, k\mathbf{n} \rangle(\mathbf{p}) = k_n(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

De esta manera, vemos que el valor de la segunda forma fundamental para un vector unitario en  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  es igual al valor de la curvatura normal de una

curva en  $\mathcal{M}$  que pasa por el punto  $\mathbf{p}$ , cuyo vector tangente es el vector sobre el que actúa esta forma.

### 2.4.2 Curvatura gaussiana y curvatura media

Los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  del operador de forma  $-\mathbf{dN}_{\mathbf{p}}$  son llamadas las *curvaturas principales*. De la Proposición A.2.1 (ver apéndice), estos valores son los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática asociada, que en este caso es la segunda forma fundamental.

Como vimos en la subsección anterior, los valores que obtenemos de la segunda forma fundamental son curvaturas normales, lo cual implica que las curvaturas principales  $\lambda_1, \lambda_2$  son las curvaturas normales máxima y mínima. Los vectores propios del operador  $-\mathbf{dN}_{\mathbf{p}}$  son llamadas la *direcciones principales* y estos vectores nos indican la dirección de las correspondientes curvaturas principales. Si  $\alpha$  es una curva regular en  $\mathcal{M}$  tal que para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  el vector tangente a la curva  $\alpha$  es una dirección principal en  $\mathbf{p}$ , diremos que la curva  $\alpha$  es una *línea de curvatura* de  $\mathcal{M}$ .

Sea  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ . Se definen, respectivamente, la *curvatura gaussiana*  $K$  y la *curvatura media*  $H$  de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{p}$  por medio de las fórmulas

$$K(\mathbf{p}) = \det(-\mathbf{dN}_{\mathbf{p}}), \quad H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-\mathbf{dN}_{\mathbf{p}}).$$

Por las propiedades del operador  $\mathbf{dN}_{\mathbf{p}}$  la curvatura gaussiana y la curvatura media se pueden escribir en términos de las curvaturas principales de la siguiente manera:

$$K(\mathbf{p}) = \lambda_1 \lambda_2, \quad H(\mathbf{p}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Estas curvaturas también se pueden expresar usando coordenadas locales a través de los coeficientes de las formas fundamentales, lo cual se establece en la siguiente proposición y cuya demostración puede consultarse en [6, 12, 18].

**Proposición 2.4.1** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización de una superficie regular  $\mathcal{M}$  y sean  $E, F, G$  y  $e, f, g$  los coeficientes de las formas fundamentales  $I, II$ , asociados a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ . Entonces*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eE - 2fF + gG}{EG - F^2}. \quad (2.4.1)$$

Con el operador de forma y la curvatura gaussiana podemos hacer un estudio local en cada de un punto de una superficie regular  $\mathcal{M}$  y caracterizar los distintos comportamientos de la superficie en dicha vecindad. Esto es de utilidad ya que nos permita clasificar los puntos de  $\mathcal{M}$  en términos de la curvatura gaussiana. Así un punto  $\mathbf{p}$  de la superficie regular  $\mathcal{M}$  es llamado:

- (i) *Elíptico* si  $\det(d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}) > 0$ .
- (ii) *Hiperbólico* si  $\det(d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}) < 0$ .
- (iii) *Parabólico* si  $\det(d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}) = 0$ , pero  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} \neq 0$ .
- (iv) *Planar* si  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} = 0$ .
- (v) *Umbilical* si las curvaturas principales  $\lambda_1, \lambda_2$  son iguales.

Si bien esta clasificación es puntual, nos da un idea de cuál es el comportamiento en una vecindad del punto. No abundaremos más sobre estos tópicos pero para profundizar más en el estudio estos temas se puede consultar [6, 12, 18, 19]

## 2.5 Tipos de coordenadas

Vimos en la Sección 2.2 que una superficie puede tener distintos sistemas de coordenadas locales y en esta sección revisaremos ciertas parametrizaciones con características peculiares. Además, veremos cómo expresar en estas parametrizaciones algunos de los objetos ya definidos. En particular, nos interesa estudiar las formas fundamentales en estos sistemas coordenados.

### 2.5.1 Coordenadas ortogonales

Recordemos (ver Subsección 2.3.1) que el ángulo entre dos curvas coordenadas de una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  satisface la relación

$$\cos \phi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle} = \frac{F}{EG},$$

lo cual nos permite saber cuándo las curvas coordenadas son ortogonales.

Una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \subset \mathcal{M}$  para la superficie regular  $\mathcal{M}$  se dice ser *ortogonal* si los vectores coordenados son ortogonales, es decir, si

$$F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad (2.5.1)$$

para todo  $(u, v) \in U$ .

En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto.

**Ejemplo 2.5.1 (Coordenadas esféricas)** Sea  $\mathbf{x} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2$ , una parametrización para la esfera unitaria, dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta), \quad (2.5.2)$$

Esta parametrización cubre todo la esfera  $\mathbb{S}^2$ , excepto por un semicírculo contenido en el plano  $xz$ . Los vectores coordenados de la parametrización (2.5.2) son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} &= \mathbf{x}_\theta(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen } \phi, -\text{sen } \theta) \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} &= \mathbf{x}_\phi(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \text{sen } \phi, \text{sen } \theta \cos \phi, 0), \end{aligned}$$

y la primera forma fundamental para  $\mathbb{S}^2$ , expresada en estas coordenadas, está dada por

$$I = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2,$$

de lo cual se sigue que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \text{sen}^2 \theta.$$

Como  $F = 0$ , se concluye que la parametrización (2.5.2) es ortogonal.

Por otra parte, una superficie puede ser parametrizada en más de una manera, por lo que es natural preguntarse si existe una parametrización ortogonal para cualquier superficie regular. La respuesta a esta cuestión se sigue del Teorema 2.2.5 y la cual precisamos en el siguiente resultado.

**Proposición 2.5.1** Para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  existe una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  definida en una vecindad  $V$  de  $\mathbf{p}$  tal que los vectores coordenados  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  son ortogonales en toda la vecindad  $V$ .

No presentamos una prueba de este resultado, sin embargo, vamos a dar una idea de su demostración. Tomemos una parametrización arbitraria  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  de la superficie  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$ , para algún  $(u_0, v_0) \in U$ . Definamos los campos vectoriales  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 : U \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  como  $\mathbf{w}_1(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v)$  y  $\mathbf{w}_2(u, v) = \mathbf{x}_v(u, v)$ . Para cada  $(u, v) \in U$ , apliquemos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores  $\mathbf{w}_1(u, v), \mathbf{w}_2(u, v)$ , para obtener un par de campos vectoriales suaves y ortogonales en cada punto de  $\mathcal{M}$ . Por último, aplicamos el Teorema 2.2.5, el cual garantiza la existencia de una parametrización ortogonal a  $\mathcal{M}$  para en una vecindad del punto  $\mathbf{p}$ .

### 2.5.2 Coordenadas de líneas de curvatura

Una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  se dice ser de *líneas de curvatura* si las curvas coordenadas de esta parametrización coinciden con las líneas de curvatura.

Supongamos que  $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathcal{M}$  es una parametrización de  $\mathcal{M}$  y que  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{y}(w_0, z_0)$  es un punto no-umbilical para algún  $(w_0, z_0) \in U$ . Esta última hipótesis es importante para garantizar que el operador de forma  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}_0}$  tenga dos valores propios distintos y, en consecuencia, tanto las curvaturas y direcciones principales estén bien definidas. Como el operador  $d\mathbf{N}$  es suave en  $U$ , entonces existe un subconjunto abierto  $U_0$  de  $U$  que contiene a  $(w_0, z_0)$  y tal que  $\mathbf{y}(w, z)$  no tiene puntos umbilicales en todo  $U_0$ . Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  los vectores propios de  $d\mathbf{N}$ , los cuales resultan ser funciones suaves en  $U_0$ ; como  $d\mathbf{N}$  es autoadjunto, tiene valores propios distintos. Así,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son ortogonales en todo  $U_0$  (ver Proposición A.2.1). Por el Teorema 2.2.5, existe una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  definida en una vecindad del punto  $\mathbf{p}$ , contenida en  $U_0$  tal que  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son paralelos a  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , respectivamente. Dado que  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ , en las nuevas coordenadas  $(u, v)$  se tiene

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Mas aún, como  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son paralelos a las direcciones principales, entonces el operador  $d\mathbf{N}$  es *diagonizable* y en consecuencia

$$f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0.$$

En resumen, toda superficie tiene una parametrización de líneas de curvatura definida en una vecindad de un punto no-umbilical, en caso de que estos existen sobre la superficie. De forma más precisa se presenta en el siguiente resultado.

**Proposición 2.5.2** *Si  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular y  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}$  es un punto no-umbilical, entonces existe una vecindad  $U \subset \mathcal{M}$  de  $\mathbf{p}$  y una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  de líneas de curvatura, tal que*

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0.$$

*En consecuencia*

$$I = E du^2 + G dv^2, \quad II = e du^2 + g dv^2.$$

**Ejemplo 2.5.2 (Coordenadas cilíndricas)** *Sea  $\mathbf{x} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , una parametrización del cilindro, dada por*

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v). \quad (2.5.3)$$

Los vectores coordenados de esta parametrización son:

$$\mathbf{x}_u = (-r \operatorname{sen} u, r \operatorname{cos} u, 0), \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

con vector normal

$$\mathbf{N} = (\operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u, 0).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son  $E = r^2$ ,  $F = 0$  y  $G = 1$ , por lo tanto

$$I = r^2 du^2 + dv^2,$$

y los coeficientes de la segunda forma son  $e = -1$ ,  $f = 0$  y  $g = 0$ . En consecuencia,

$$II = -du^2.$$

Como  $F = 0$  y  $f = 0$ , las coordenadas cilíndricas (2.5.3) son una parametrización de líneas de curvatura.

### 2.5.3 Coordenadas de líneas asintóticas

Sea  $\mathbf{p}$  un punto en una superficie regular  $\mathcal{M}$ . Una *dirección asintótica* de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{p}$  es un vector en  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  tal que la curvatura normal es igual cero en ese vector. Una *curva asintótica* de  $\mathcal{M}$  es una curva  $C \subset \mathcal{M}$  para la cual la línea tangente en cada punto de la curva  $C$  es una dirección asintótica.

Una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  de  $\mathcal{M}$  se dice ser de líneas asintóticas si las curvas coordenadas coinciden con las *curvas asintóticas*.

Debido a que la segunda forma fundamental nos da el valor de la curvatura normal en una dirección dada, tenemos que las curvas asintóticas deben ser solución de la ecuación diferencial

$$e (u')^2 + f (u'v') + g (v')^2 = 0 \tag{2.5.4}$$

en donde  $e$ ,  $f$  y  $g$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental de la parametrización  $\mathbf{x}$ .

Una aplicación más del Teorema 2.2.5 es la existencia de una parametrización de líneas asintóticas, pero ésta sólo existe si la superficie posee puntos hiperbólicos, ya que en una vecindad de dicho punto la curvatura gaussiana es negativa. Esto implica que la curvatura normal máxima es positiva y la mínima es negativa. Luego, por continuidad, existen dos direcciones en las cuales la curvatura normal vale cero. Esto se establece en la siguiente proposición

**Proposición 2.5.3** *Sea  $\mathbf{p}$  un punto hiperbólico de  $\mathcal{M}$ . Entonces es posible encontrar una carta coordenada de  $\mathbf{p}$  tal que las curvas coordenadas de esta parametrización coincidan con las curvas asintóticas de  $\mathcal{M}$ .*

## 2.6 Superficies con curvatura gaussiana constante

En esta sección vamos a presentar algunos ejemplos de superficies con curvatura gaussiana constante y se establecerá un resultado que afirma que toda superficie de curvatura gaussiana constante positiva es isométrica a la esfera.

### 2.6.1 Superficies de curvatura gaussiana constante positiva

La esfera, el plano y el cilindro circular recto son ejemplos conocidos de superficies de curvatura gaussiana constante. En el caso del plano, es fácil probar que la curvatura gaussiana es igual cero en todos sus puntos; lo mismo sucede con el cilindro circular recto. Con respecto a la esfera de radio  $r$ , sabemos que todos sus puntos son umbilicales, lo cual implica que las curvaturas principales son iguales a  $\pm \frac{1}{r}$ , donde el signo depende de la orientación de la esfera. Por lo tanto, esta superficie tiene curvatura gaussiana constante  $K = \frac{1}{r^2}$ .

Otros ejemplos de superficies con curvatura gaussiana constante positiva son aquellas superficies de revolución (Ver Subsección 2.2.2) que pueden parametrizarse por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

donde  $f(v)$  es una función suave y  $g(v)$  satisface

$$g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left( \sin \left( \frac{t}{a} \right) \right)^2} dt,$$

para ciertas constantes  $a > 0$  y  $b > 0$ . La curvatura gaussiana de esta superficie de revolución es  $K = \frac{1}{a^2}$ . Para más detalles ver [12].

Una característica importante de las superficies con curvatura gaussiana constante y positiva es que son isométricas a la esfera, lo cual se establece en lo que sigue.



Una *isometría* entre superficies es un difeomorfismo  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , tal que para cada punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  y cada par de vectores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  se tiene

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}_1), dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}_2) \rangle. \quad (2.6.1)$$

Si tal función existe, se dice que  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  son *isométricas*. Geométricamente, una isometría es una función que en cada punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ , la diferencial  $dF_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}\mathcal{N}$  preserva el producto interior en cada uno de los espacios tangente. De esto se sigue que también preserva la primera forma fundamental.

Si dos superficies son isométricas entonces ambas poseen la misma curvatura gaussiana. El recíproco de esta afirmación es, en general, falso; sin embargo, si dos superficies tienen la misma curvatura gaussiana, es posible afirmar que las superficies son localmente isométricas, es decir, para cada vecindad en una superficie existe una vecindad en la otra superficie y una función entre ambas vecindades que satisface la condición de isometría dada por (2.6.1).

En el caso en el que dos superficies tengan la misma curvatura gaussiana y ésta sea constante, es posible probar que ambas son isométricas, como se enuncia en el siguiente resultado.

**Proposición 2.6.1** *Si dos superficies tienen curvatura gaussiana constante y ésta coincide, entonces las superficies son isométricas.*

Como una consecuencia de la Proposición 2.6.1, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.6.2** *Toda superficie de curvatura gaussiana constante positiva  $K$  es isométrica a la esfera de radio  $r$ , cuya curvatura es  $K = \frac{1}{r^2}$ .*

Para una exposición más amplia de los ejemplos y proposiciones presentados en esta parte se puede consultar [12, 19].

## 2.6.2 Superficies con curvatura $K = -1$

En esta última parte presentaremos un ejemplo de una superficie con curvatura gaussiana constante negativa, a saber la *seudoesfera* de *seudoradio* 1, cuya curvatura gaussiana es  $K = -1$ . Esta superficie es generada como superficie de revolución, usando como generatriz la curva plana conocida como *tractrix*, que está parametrizada por  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) =$

$(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$ , cuyo eje de rotación es su propia asíntota (ver detalles en [12, 19]).

Sean  $u > 0$  y  $v \in (0, 2\pi)$ . Una parametrización para la seudoesfera está dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, u - \tanh u), \quad (2.6.2)$$

La primera forma fundamental en estas coordenadas es

$$I = \tanh^2 u du^2 + \operatorname{sech} u dv^2,$$

y su segunda forma fundamental,

$$II = -\operatorname{sech} u \tanh u du^2 + \operatorname{sech} u \tanh u dv^2,$$

con curvatura media  $H = \frac{1}{2}(\sinh u - \operatorname{csch} u)$  y curvatura gaussiana  $K = -1$ . Por último, la parametrización (2.6.2) son coordenadas de líneas de curvatura.

Los tópicos que han sido presentados en este capítulo forman parte del material básico de la mayoría de los textos de Geometría Diferencial. Sin embargo, como referencia para una consulta más completa de todos los temas y resultados aquí expuestos recomendamos [6, 12, 17, 18, 19].

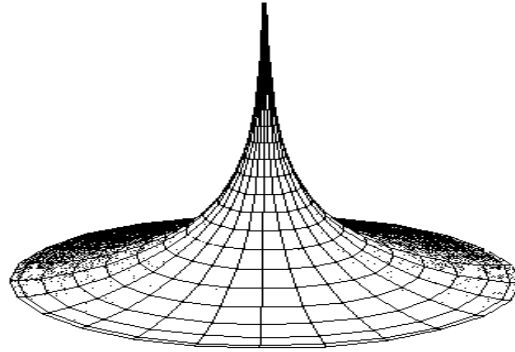


Figura 2.3: Parametrización de la seudoesfera:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, u - \tanh u).$$

## Capítulo 3

# Criterio de Frobenius

Recordemos que el principal objetivo de este trabajo es probar de manera completa el Teorema Fundamental de Superficies (Teorema 4.2.1). Una de las principales herramientas que utilizaremos en su demostración es el Criterio de Frobenius, el cual es uno de los resultados más importantes de este trabajo, y que estudiaremos en este capítulo.

Tal es la importancia de este criterio en dicha demostración que dedicamos un capítulo completo para su estudio, con el fin de tener claro el problema que se resuelve con su utilización, y posteriormente, poder apreciar su relevancia en la demostración del Teorema Fundamental que se presentará en el Capítulo 4.

El criterio de Frobenius es parte de una teoría más completa llamada *Integrabilidad de Frobenius* y existen varias formulaciones de éste. Algunas de ellas usan conceptos básicos de Geometría y Ecuaciones Diferenciales tales como campos vectoriales, corchetes de Lie, funciones matriciales, etc. Otras versiones usan conceptos más avanzados como formas diferenciales, distribuciones suaves, etc. El lector interesado en conocer las distintas formulaciones de este criterio puede consultar [4, 7, 10, 18, 21].

En el presente capítulo abordaremos este criterio con un enfoque más apegado hacia las ecuaciones diferenciales, que es el adecuado para alcanzar nuestro objetivo principal. En este contexto, el criterio de Frobenius proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de soluciones a un sistema de familias uniparamétricas de EDO.

### 3.1 El criterio de Frobenius en $\mathbb{R}^3$

En esta sección, nuestro objetivo es presentar una introducción al criterio de Frobenius. En particular, se introducen las condiciones de integrabilidad que se tienen con este criterio.

#### 3.1.1 Condición de integrabilidad de Frobenius

Considérese el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \Phi(s, t, x(s, t)), \quad (3.1.1a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \Psi(s, t, x(s, t)), \quad (3.1.1b)$$

donde  $\Phi, \Psi : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves y  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Una función suave  $x : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es solución de este sistema de ecuaciones si satisface (3.1.1a) y (3.1.1b) simultáneamente. En este caso  $\mathcal{U}_0$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{U}$ .

En general, no existe una solución común al sistema (3.1.1a)-(3.1.1b). Sin embargo, es natural preguntarse qué condiciones adicionales debemos asumir para que este sistema de ecuaciones pueda ser resuelto. Una respuesta a esta cuestión nos la da el criterio de Frobenius. De hecho si queremos encontrar dichas condiciones explícitamente, debemos proceder de la manera que se explica a continuación.

Supongamos que el sistema (3.1.1a), (3.1.1b) admite una solución suave  $x(s, t)$ ; entonces se tiene, por diferenciabilidad, que  $\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t}$ . Si desarrollamos por separado cada una de estas derivadas parciales y sustituimos las ecuaciones (3.1.1a),(3.1.1b) donde corresponda, se tiene, por un lado, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(s, t, x(s, t)) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi; \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \Psi(s, t, x(s, t)) \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Al igualar (3.1.2) con (3.1.3), tenemos que los campos  $\Phi, \Psi$  deben satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi. \quad (3.1.4)$$

La ecuación (3.1.4) se conoce como *condición de compatibilidad* y es una condición necesaria para que el sistema (3.1.1a), (3.1.1b) admita una solución común.

Un hecho importante es que la condición de compatibilidad (3.1.4) es también suficiente para la existencia de solución al sistema (3.1.1a), (3.1.1b). Sin embargo, por el momento no abordaremos este último punto, postergando su discusión hasta la Sección 3.2 donde se retoma el problema desde un punto de vista más general.

### 3.1.2 Interpretación geométrica

Si los campos escalares  $\Phi, \Psi$  cumplen la condición (3.1.4), entonces la gráfica de la solución del sistema (3.1.1a), (3.1.1b) es una superficie regular. De manera más precisa tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.1** *Si los campos escalares  $\Phi, \Psi$  satisfacen la condición (3.1.4), entonces existe una función suave  $x : \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el conjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ , donde*

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{graf}(x) = \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3 : u = x(s, t)\},$$

*es una superficie regular y el plano tangente a  $\mathcal{M}$  en cada punto  $(s, t, x) \in \mathcal{M}$  es generado por los vectores*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(s, t, x) &= (1, 0, \Phi(s, t, x)), \\ \mathbf{E}_2(s, t, x) &= (0, 1, \Psi(s, t, x)), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

*es decir,*

$$T_{(s,t,x)}\mathcal{M} = \text{Span} \{ \mathbf{E}_1(s, t, x(s, t)), \mathbf{E}_2(s, t, x(s, t)) \}.$$

La demostración de este resultado es inmediata y se sigue del criterio de Frobenius (Teorema 3.2.1) y de la Proposición 2.2.1.

En la proposición anterior se definieron los campos vectoriales  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  (3.1.5) utilizando los campos escalares  $\Phi, \Psi$ . Es posible probar que la condición (3.1.4) para los campos  $\Phi, \Psi$  es equivalente a pedir que los campos  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  conmuten, lo cual demostraremos en el siguiente lema.

**Lema 3.1.2** Sean  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$  definidos como en (3.1.5). Entonces  $\Phi$  y  $\Psi$  satisfacen la ecuación (3.1.4) si y sólo si los campos vectoriales  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  conmutan, es decir, el corchete de Lie de  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  es cero:  $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = \mathbf{0}$ .

**Demostración.** Recordemos que el corchete de Lie  $[\mathbf{V}, \mathbf{W}](\mathbf{x})$  (ver Sección 1.1) para dos campos vectoriales  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$  y  $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}), \dots, w_n(\mathbf{x}))$  en  $\mathbb{R}^n$ , es otro campo vectorial suave en  $\mathbb{R}^n$ , cuyas componentes están dadas por:

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}]_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n (v_j \frac{\partial}{\partial x_j} w_i - w_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Calculemos el corchete de Lie de los campos  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  (3.1.5), usando la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]_1 &= 0, \\ [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]_2 &= 0, \\ [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = (0, 0, \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi),$$

por lo tanto que

$$[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = \mathbf{0},$$

si y sólo si los campos escalares  $\Phi$  y  $\Psi$  satisfacen la ecuación (3.1.4), como queríamos demostrar.  $\blacksquare$

Por último, como consecuencia de los resultados anteriores, presentamos una versión geométrica del criterio de Frobenius en términos del corchete de Lie de los campos vectoriales  $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]$ .

**Teorema 3.1.3** Sean  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$  campos vectoriales suaves, donde  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$  son dominios abiertos. Si  $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = \mathbf{0}$ , entonces, para cada punto  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$  existe una superficie regular  $\mathcal{M}$  tal que para cada punto  $m \in \mathcal{M}$ , el plano tangente  $T_m \mathcal{M}$  es generado por los vectores  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$ , es decir,

$$T_m \mathcal{M} = \text{Span} \{ \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \}.$$

La demostración de este teorema no se presenta aquí ya que se aleja del objetivo principal de esta tesis; sin embargo, una demostración completa se puede consultar en [4].

## 3.2 Criterio de Frobenius en $\mathbb{R}^n$

En esta sección se generaliza el problema de encontrar una solución común al sistema de ecuaciones diferenciales (3.1.1a)-(3.1.1b) presentado en la sección anterior. En este caso, los campos vectoriales están definidos en  $\mathbb{R}^n$  y se procede de manera similar a como se hizo en esa sección.

### 3.2.1 Condición de integrabilidad en $\mathbb{R}^n$

Nuestro objetivo en esta parte sigue siendo el mismo que en la Sección 3.1, a saber, obtener condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución común al sistema de ecuaciones planteado, para lo cual se da una respuesta en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1 (Criterio de Frobenius)** *Sean  $\Phi, \Psi : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , campos vectoriales suaves, donde  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  son abiertos. Sea  $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$  un punto fijo. Entonces para cada punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$  el sistema de ecuaciones*

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \Phi(s, t, \mathbf{x}(s, t)), \quad (3.2.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Psi(s, t, \mathbf{x}(s, t)), \quad (3.2.1b)$$

$$\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{p}, \quad (3.2.1c)$$

*tiene una única solución suave  $\mathbf{x} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en una vecindad  $\mathcal{U}_0$  de  $(s_0, t_0)$  en  $\mathcal{U}$  si y sólo si se satisface la condición de compatibilidad*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \Phi. \quad (3.2.2)$$

**Demostración.** *(Necesidad)* Si  $\mathbf{x}(s, t)$  es una solución suave de (3.2.1a)–(3.2.1c), entonces se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)$$

lo cual implica la condición de compatibilidad (3.2.2).

(*Suficiencia*) Supongamos ahora que  $\Phi, \Psi$  satisfacen la condición (3.2.2).  
Recuérdese que

$$\frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{y} \quad \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right],$$

son las matrices jacobianas de  $\Phi$  y  $\Psi$  con respecto a la variable  $\mathbf{x}$ .

Vamos a resolver el sistema (3.2.1a)–(3.2.1c). Para ello tomemos la ecuación (3.2.1a) sujeta a la condición inicial (3.2.1c). Si fijamos el valor  $t = t_0$  en la ecuación (3.2.1a), tenemos una familia de EDO para la variable  $s$ . Por el Teorema 1.2.1, existen  $\delta > 0$  y una función suave  $\alpha : (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \Phi(s, t_0, \alpha(s)), \\ \alpha(s_0) &= \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Para cada  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ , definamos  $\beta^s(t) = \beta(s, t)$  como la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\beta^s}{dt} &= \Psi(s, t, \beta^s(t)), \\ \beta^s(t_0) &= \alpha(s). \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{x}(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta^s(t)$ . Por construcción,  $\mathbf{x}$  satisface la ecuación (3.2.1b) y  $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{p}$ . Sólo resta verificar que  $\mathbf{x}$  satisface también la ecuación (3.2.1a). Para esto, definamos la función  $\mathbf{z}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, t) - \Phi(s, t, \mathbf{x})$  y calculemos su derivada parcial con respecto a  $t$  (para simplificar cálculos omitiremos la dependencia que tiene  $\mathbf{z}$  de los parámetros  $s$  y  $t$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} - \Phi \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial s \partial t} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Psi - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}} \Psi \right). \end{aligned}$$



Como los campos  $\Phi$  y  $\Psi$  cumplen con la ecuación (3.2.2), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \Phi \right) \\ &= \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} - \Phi \right) = \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}} \mathbf{z}.\end{aligned}$$

De esto se sigue que  $\mathbf{z}$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}(s, t) = \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}}(s, t, \mathbf{z})\mathbf{z}(s, t). \quad (3.2.5)$$

Por otro lado, si tomamos  $t = t_0$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(s, t_0) &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t_0) - \Phi(s, t_0, \mathbf{x}(s, t_0)) \\ &= \frac{d}{ds} \alpha(s) - \Phi(s, t_0, \alpha(s)) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

para todo  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ . De esta manera  $\mathbf{z}$  es solución de la ecuación (3.2.5) sujeta a la condición inicial

$$\mathbf{z}(s_0, t_0) = \mathbf{0}. \quad (3.2.6)$$

Como la función constante cero también es solución del problema de Cauchy (3.2.5), (3.2.6), por el Teorema 1.2.1, tenemos que  $\mathbf{z}(s, t) = \mathbf{0}$ . Por lo tanto, la función  $\mathbf{x}(s, t)$  satisface la ecuación (3.2.1a), como queríamos probar. ■

En forma analítica, el criterio de Frobenius se convierte en la ecuación (3.3.10), la cual se conoce como la *condición de compatibilidad*.

Notemos que como un caso particular del Teorema 3.2.1, cuando  $n = 1$  obtenemos el sistema (3.1.1a),(3.1.1b) y la condición de compatibilidad (3.2.2) se transforma en la ecuación (3.1.4).

### 3.2.2 Interpretación geométrica en el caso general

El significado geométrica del criterio de Frobenius que se vió en la Proposición 3.1.1 puede generalizarse, como lo veremos a continuación.

Sean  $\Phi, \Psi : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vectoriales suaves,

$$\Phi = \Phi(s, t, \mathbf{x}), \quad \Psi = \Psi(s, t, \mathbf{x}),$$

donde  $\Omega$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Usando  $\Phi, \Psi$  para definir los campos vectoriales  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ , por medio de las fórmulas

$$\mathbf{E}_1(s, t, \mathbf{x}) = (1, 0, \Phi), \quad \mathbf{E}_2(s, t, \mathbf{x}) = (0, 1, \Psi), \quad (3.2.7)$$

se tiene que los campos  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  (3.2.7) son linealmente independientes.

De manera similar a como se procedió en la Subsección 3.1.2, estableceremos bajo qué condiciones existe una superficie en  $\mathbb{R}^{n+2}$  tal que el espacio tangente en cada punto de ésta sea generado por los vectores  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ .

**Proposición 3.2.2** Sean  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  campos vectoriales suaves definidos como en la ecuación (3.2.7). Si para cada  $(s_0, t_0) \in \Omega$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2](s_0, t_0, \mathbf{x}) \in \text{Span}\{\mathbf{E}_1(s_0, t_0, \mathbf{x}), \mathbf{E}_2(s_0, t_0, \mathbf{x})\}, \quad (3.2.8)$$

entonces existe una vecindad  $N(s_0, t_0, \mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$  y una superficie  $\mathcal{S} \subset N(s_0, t_0, \mathbf{x})$  tal que si  $(s, t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ , se tiene que

$$T_{(s,t,\mathbf{x})}\mathcal{S} = \text{Span}\{\mathbf{E}_1(s, t, \mathbf{x}), \mathbf{E}_2(s, t, \mathbf{x})\}. \quad (3.2.9)$$

Los campos vectoriales que cumplen con la condición (3.2.8) se dice que forman una *distribución involutiva de rango dos*.

En el caso de los vectores  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  (3.2.7) la condición (3.2.8) es equivalente a

$$[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = \mathbf{0}. \quad (3.2.10)$$

Más aún, la condición (3.2.10) se cumple si y sólo si los campos  $\Phi, \Psi$  satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{D\Phi}{D\mathbf{x}}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{D\Psi}{D\mathbf{x}}\Phi,$$

la cual es la condición de compatibilidad (3.2.2) del criterio de Frobenius (Teorema 3.2.1).

La superficie, cuya existencia se asegura en la Proposición 3.2.2, resulta estar parametrizada por

$$\tilde{\mathbf{x}} = (s, t, \mathbf{x}(s, t)), \quad (3.2.11)$$

donde la función  $\mathbf{x}(s, t)$  es solución del sistema (3.2.1a)–(3.2.1c), la cual sabemos que existe por el criterio de Frobenius.

El lector interesado en estudiar este enfoque geométrico del criterio de Frobenius puede consultar [4].

### 3.3 El criterio de Frobenius en el caso lineal

En esta sección estudiaremos un caso particular del sistema de ecuaciones (3.2.1a), (3.2.1b) que se presenta cuando los campos  $\Phi, \Psi$  que definen el sistema son *lineales*. En este caso, el sistema que resulta está definido en términos de funciones matriciales, el cual será equivalente al primero, en el sentido de que la existencia de una solución de un sistema implica la existencia de solución para el otro sistema y viceversa.

Posteriormente, formularemos el criterio de Frobenius para sistemas lineales, el cual utilizaremos en esa forma en el Capítulo 4. Para terminar la sección se establece un algoritmo que nos permite encontrar la solución del sistema lineal.

#### 3.3.1 Criterio de Frobenius para sistemas lineales

Sean  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos abiertos y  $(s_0, t_0) \in \mathcal{U}$  es un punto fijo. Para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$ , consideremos el sistema de ecuaciones para la función  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \Phi(s, t, \mathbf{x}(s, t)), \quad (3.3.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Psi(s, t, \mathbf{x}(s, t)), \quad (3.3.1b)$$

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}, \quad (3.3.1c)$$

donde  $\Phi, \Psi : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves.

Si suponemos que los campos  $\Phi$  y  $\Psi$  son *lineales* con respecto a la variable  $\mathbf{x}$ , entonces existen funciones matriciales suaves  $\mathbf{S}, \mathbf{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$  tales que  $\Phi(s, t, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(s, t)\mathbf{x}$  y  $\Psi(s, t, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(s, t)\mathbf{x}$ . Luego, el sistema de ecuaciones (3.3.1a), (3.3.1b) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \mathbf{S}(s, t)\mathbf{x}, \quad (3.3.2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{T}(s, t)\mathbf{x}, \quad (3.3.2b)$$

sujeto a la condición inicial (3.3.1c).

De manera similar a lo que se hizo en la Sección 1.3, vamos a demostrar la existencia de una función matricial que sea la solución fundamental del sistema lineal (3.3.2), es decir, una función matricial mediante la cual podamos obtener todas las soluciones de este sistema para cada vector  $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$ .

Supongamos que la función matricial suave  $\mathbf{G} : \mathcal{U} \rightarrow \text{GL}(n)$  es la solución fundamental del sistema (3.3.2). Análíticamente, toda función de la forma

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{G}(s, t) \mathbf{p}, \quad (3.3.3)$$

para cada  $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$ , es solución del sistema (3.3.2) sujeta a la condición inicial (3.3.1c), lo cual probaremos más adelante. Por el momento queremos encontrar condiciones para que la función  $\mathbf{G}$  sea la solución fundamental. Para ello, calculemos las derivadas parciales de la ecuación (3.3.3) (omitimos la dependencia de los parámetros  $s$  y  $t$  para facilitar notación):

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \mathbf{p}, \quad (3.3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \mathbf{p}. \quad (3.3.5)$$

Si igualamos (3.3.2a) con (3.3.4) se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} = \mathbf{S}\mathbf{G}, \quad (3.3.6)$$

ya que la igualdad se cumple para todo  $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$ . De la misma manera, al igualar (3.3.2b) con (3.3.5), se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \mathbf{T}\mathbf{G}. \quad (3.3.7)$$

De la ecuación (3.3.3) tenemos que la función  $\mathbf{G}$  en el punto  $(s_0, t_0)$  satisface

$$\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{G}(s_0, t_0) \mathbf{p}.$$

Como la función  $\mathbf{x}$  satisface la condición inicial (3.3.1c), se sigue que

$$\mathbf{G}(s_0, t_0) \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in \mathcal{O}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{G}(s_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (3.3.8)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimensión  $n$ .

Por lo tanto, si la función matricial  $\mathbf{G}$  es la solución fundamental del sistema (3.3.2), entonces debe de satisfacer el sistema de ecuaciones formado por (3.3.6), (3.3.7) sujeto a la condición (3.3.8). Luego, nos interesa establecer qué condiciones garantizan la existencia de solución para este sistema matricial, ya que tal solución, de existir, es la solución fundamental del sistema (3.3.2).

En el siguiente teorema se establecen condiciones necesarias y suficientes para que el sistema matricial tenga solución.

**Teorema 3.3.1** Sean  $\mathbf{S}, \mathbf{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$  funciones matriciales suaves, donde  $\mathcal{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Para cada punto fijo  $(s_0, t_0) \in \mathcal{U}$ , el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} = \mathbf{S} \mathbf{G}, \quad (3.3.9a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \mathbf{T} \mathbf{G}, \quad (3.3.9b)$$

$$\mathbf{G}(s_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (3.3.9c)$$

tiene una solución matricial suave  $\mathbf{G} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \text{GL}(n)$  definida en una vecindad  $\mathcal{U}_0$  de  $(s_0, t_0)$  en  $\mathcal{U}$ , si y sólo si

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + [\mathbf{S}, \mathbf{T}] = \mathbf{0}. \quad (3.3.10)$$

**Demostración.** (Necesidad) Supongamos que la función matricial suave  $\mathbf{G} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \text{GL}(n)$  es solución de (3.3.9a)–(3.3.9c). Por una parte tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t \partial s} &= \frac{\partial(\mathbf{S} \mathbf{G})}{\partial t} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \mathbf{G} \\ &= \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \mathbf{G} = \left( \mathbf{S} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) \mathbf{G}, \end{aligned}$$

mientras que por otra parte se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial(\mathbf{T} \mathbf{G})}{\partial s} = \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \mathbf{G} \\ &= \mathbf{T} \mathbf{S} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \mathbf{G} = \left( \mathbf{T} \mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \right) \mathbf{G}; \end{aligned}$$

como  $\mathbf{G}$  es una función suave, cumple la propiedad de las parciales cruzadas, por lo tanto, al igualar las expresiones anteriores, tenemos

$$\mathbf{S} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{T} \mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s},$$

la cual es equivalente a la ecuación de compatibilidad (3.3.10).

(Suficiencia) La suficiencia se sigue casi inmediatamente de la Proposición 3.3.5 que probaremos más adelante, salvo algunos detalles algebraicos elementales. ■

En el teorema anterior se establece que la ecuación de (3.3.10) es la condición de compatibilidad para el sistema matricial (3.3.9a)–(3.3.9c). Además, esta ecuación también es la condición de compatibilidad del sistema (3.3.2), resultado que se sigue como un corolario del criterio de Frobenius (Teorema 3.2.1).

**Corolario 3.3.2** *El sistema (3.3.1a)–(3.3.1c), admite una solución suave  $\mathbf{x}(s, t)$  si y sólo si se cumple la ecuación (3.3.10).*

**Demostración.** Notemos que los campo vectoriales  $\Phi(s, t, \mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x}$  y  $\Psi(s, t, \mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x}$  definen el sistema de ecuaciones (3.3.1a), (3.3.1b). Por el criterio de Frobenius, este sistema tiene solución si y sólo si  $\Phi$  y  $\Psi$  satisfacen la condición de compatibilidad (3.1.4). En este caso en particular, la condición de compatibilidad implica que  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  satisfacen (3.3.10). ■

Notemos que en las ecuaciones (3.3.9a), (3.3.9b), las matrices  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  están multiplicando por la izquierda a la matriz  $\mathbf{G}$ . Si invertimos el orden en que se realizan estos productos, tenemos otro sistema cuya condición de compatibilidad resulta ser muy parecida a la forma que tiene la ecuación (3.3.10), como se establece en el siguiente resultado el cual es un corolarios al Teorema 3.3.1.

**Corolario 3.3.3** *Sean  $\mathbf{S}, \mathbf{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$  funciones matriciales suaves, donde  $\mathcal{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $(s_0, t_0) \in \mathcal{U}$  un punto fijo. Entonces el sistema de ecuaciones*

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} = \mathbf{G}\mathbf{S}, \quad (3.3.11a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \mathbf{G}\mathbf{T}, \quad (3.3.11b)$$

$$\mathbf{G}(s_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (3.3.11c)$$

*tiene una solución matricial suave  $\mathbf{G} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \text{GL}(n)$  definida en una vecindad  $\mathcal{U}_0$  de  $(s_0, t_0)$  en  $\mathcal{U}$ , si y sólo si*

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = [\mathbf{S}, \mathbf{T}]. \quad (3.3.12)$$

**Demostración.** Si aplicamos la transposición de matrices a cada de las ecuaciones que forman el sistema (3.3.11a)–(3.3.11c), tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial s} = \mathbf{S}^T \mathbf{G}^T,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial t} &= \mathbf{T}^T \mathbf{G}^T, \\ \mathbf{G}^T(s_0, t_0) &= \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Si existe una función matricial que sea solución del sistema anterior, entonces la matriz transpuesta de esta función es solución de (3.3.11a)–(3.3.11c). Además, por el Teorema 3.3.1, este sistema tiene solución si y sólo si las matrices  $\mathbf{S}^T$  y  $\mathbf{T}^T$  cumplen con la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial s} + [\mathbf{S}^T, \mathbf{T}^T] = 0. \quad (3.3.13)$$

Si aplicamos la operación transpuesta a la ecuación matricial (3.3.13) se obtiene (3.3.12). ■

Para finalizar esta parte, comprobaremos que si una función matricial  $\mathbf{G}$  es solución del sistema (3.3.1a)–(3.3.1c), entonces la función  $\mathbf{x}(s, t)$  definida por (3.3.3) es solución del sistema (3.3.2a), (3.3.2b).

**Teorema 3.3.4** *Sea  $\mathbf{G} : \mathcal{U} \rightarrow \text{GL}(n)$  la solución fundamental del sistema (3.3.1a)–(3.3.1c) y supongamos que  $(s_0, t_0) \in \mathcal{U}$  es un punto fijo. Entonces para cada  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  la función vectorial  $\mathbf{x}(s, t)$  definida por (3.3.3) es solución del sistema lineal (3.3.1a), (3.3.1b) sujeto a (3.3.1c).*

**Demostración.** Supongamos la función matricial  $\mathbf{G}$  es solución del sistema matricial (3.3.9a)–(3.3.9c). Para cada  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  definamos la función  $\mathbf{x}(s, t)$  por medio de la ecuación (3.3.3), es decir,

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{G}(s, t)\mathbf{p}.$$

Al calcular sus derivadas parciales tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \mathbf{p} = \mathbf{S} \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{x}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(s_0, t_0) &= \mathbf{G}(s_0, t_0) \mathbf{p} = \mathbf{I} \mathbf{p} = \mathbf{p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{x}(s, t)$  es solución del sistema (3.3.1a)–(3.3.1c). ■

El Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.3.4 son los resultados principales que se utilizan en la demostración del Teorema Fundamental de Superficies (Teorema 4.2.1).

### 3.3.2 Algoritmo para la construcción de la solución del sistema lineal

El propósito de esta parte es mostrar cómo se puede obtener un algoritmo para construir la solución del sistema matricial (3.3.1a)–(3.3.1c) y, por consiguiente, de su sistema lineal asociado. En esta parte usaremos una terminología distinta a la que se ha venido utilizando a lo largo de este capítulo; sin embargo, no difiere conceptualmente con lo expuesto hasta el momento. Cabe señalar que esta subsección está basada en [10].

Sean  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  funciones matriciales suaves definidas en un subconjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ . El par  $(\Theta_1, \Theta_2)$  es llamado un *par compatible* si existe una función suave  $\mathbf{G}(s, t) \in \text{GL}(n)$ , que satisface simultáneamente el sistema matricial lineal

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s}(s, t) = \mathbf{G}(s, t)\Theta_1(s, t), \quad (3.3.14a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(s, t) = \mathbf{G}(s, t)\Theta_2(s, t), \quad (3.3.14b)$$

$$\mathbf{G}(0, 0) = \mathbf{I}. \quad (3.3.14c)$$

**Ejemplo 3.3.1** *Cualquier par  $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ , compuesto por matrices constantes que conmutan es un par compatible, cuya solución común está dada por la función*

$$\mathbf{G}(s, t) = \exp(s\mathbf{K}_1 + t\mathbf{K}_2).$$

*Es fácil verificar, usando las propiedades de la exponencial de una matriz, que  $\mathbf{G}$  satisface el sistema (3.3.14).*

Si  $(\Theta_1, \Theta_2)$  es un par compatible, entonces la función  $G$  cumple con la propiedad de las parciales cruzadas,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial s \partial t},$$

por lo que al sustituir las ecuaciones (3.3.14a) y (3.3.14b) en

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \right),$$

se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{G}\Theta_1) = \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{G}\Theta_2),$$



por lo que realizando las operaciones indicadas tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \Theta_1 + \mathbf{G} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \Theta_2 + \mathbf{G} \frac{\partial \Theta_2}{\partial s}. \quad (3.3.15)$$

Por último, si sustituimos (3.3.14a), (3.3.14b) en (3.3.15) se obtiene

$$\mathbf{G} \Theta_2 \Theta_1 + \mathbf{G} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = \mathbf{G} \Theta_1 \Theta_2 + \mathbf{G} \frac{\partial \Theta_2}{\partial s},$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial s} = [\Theta_1, \Theta_2]. \quad (3.3.16)$$

La ecuación (3.3.16) aparece en varios problemas de la física-matemática y de la geometría diferencial; por ejemplo en la *ecuación de Gauss-Codazzi* y en algunas *ecuaciones no lineales de la teoría de solitones*, las cuales se pueden consultar con más detalles en [20].

La expresión (3.3.16) es llamada la *ecuación de curvatura cero*, la cual se satisface siempre que el par  $(\Theta_1, \Theta_2)$  sea compatible. Más aún, el recíproco de esta afirmación también es verdadero, como se demuestra en la siguiente proposición. Debemos señalar que la prueba de este resultado es muy importante ya que de ella se puede obtener un algoritmo para construir la solución del par compatible.

**Proposición 3.3.5** *Si el par  $(\Theta_1, \Theta_2)$  satisface la ecuación (3.3.16), entonces  $(\Theta_1, \Theta_2)$  es un par compatible.*

**Demostración.** Debido a que esta demostración es algo extensa, se ha dividido en tres pasos para una mayor claridad.

**Paso 1** Sean  $\mathbf{F}^1(s, t)$  y  $\mathbf{F}^2(s, t)$  funciones matriciales que satisfacen

$$\frac{\partial \mathbf{F}^1}{\partial s}(s, t) = \mathbf{F}^1(s, t) \Theta_1(s, t), \quad \mathbf{F}^1(0, t) = \mathbf{I} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \quad (3.3.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^2}{\partial t}(s, t) = \mathbf{F}^1(s, t) \Theta_2(s, t), \quad \mathbf{F}^2(s, 0) = \mathbf{I} \quad \text{para } s \in \mathbb{R}. \quad (3.3.18)$$

La existencia de las funciones  $\mathbf{F}^1$  y  $\mathbf{F}^2$  está garantizada por el teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales (Teorema 1.3.1). Estas funciones son las soluciones fundamentales de su respectiva ecuación diferencial lineal.

**Paso 2** Consideremos la función matricial suave

$$\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}^2(0, t)\mathbf{F}^1(s, t). \quad (3.3.19)$$

Podemos notar que la función  $\mathbf{G}$  está sujeta a la condición inicial (3.3.14c).

Por otra parte, si derivamos la función  $\mathbf{G}$  con respecto a la variable  $s$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s}(s, t) &= \mathbf{F}^2(0, v) \frac{\partial \mathbf{F}^1}{\partial u}(s, t) = \mathbf{F}^2(0, v) \mathbf{F}^1(s, t) \Theta_1(s, t) \\ &= \mathbf{G}(s, t) \Theta_1(s, t). \end{aligned}$$

Se tiene así que la función  $\mathbf{G}$  satisface la ecuación (3.3.14a).

**Paso 3** Por último, nos resta probar que  $\mathbf{G}$  también es solución de (3.3.14b).

Para esto, defínase la función

$$\mathbf{H}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{G}(s, t)}{\partial t} - \mathbf{G}(s, t) \Theta_2(s, t).$$

Primero verifiquemos que  $\mathbf{H}$  también satisface la ecuación (3.3.14a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \mathbf{G} \Theta_2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} - \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \Theta_2 + \mathbf{G} \frac{\partial \Theta_2}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{G} \Theta_1) - \mathbf{G} \left( \Theta_2 \Theta_1 + \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

por lo que haciendo uso de la ecuación (3.3.16), la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{G} \Theta_1) - \mathbf{G} \left( \Theta_1 \Theta_2 + \frac{\partial \Theta_1}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \Theta_1 + \mathbf{G} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \mathbf{G} \left( \Theta_1 \Theta_2 + \frac{\partial \Theta_1}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \Theta_1 + \mathbf{G} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \Theta_1 \Theta_2 - \frac{\partial \Theta_1}{\partial s} \right), \end{aligned}$$

y, dado que  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  satisfacen la ecuación (3.3.16), se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} &= \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{G} \Theta_2 \right) \Theta_1, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} &= \mathbf{H} \Theta_1. \end{aligned}$$

Además, para  $t = 0$  se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(0, t) &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(0, t) - \mathbf{G}(0, t)\Theta_2(0, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(0, t) - \mathbf{F}(0, t)\Theta_2(0, t) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Como la matriz idénticamente cero también es solución de (3.3.14a), entonces por la unicidad de la solución tenemos que

$$\mathbf{H}(s, t) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{G}$  satisface (3.3.14b). ■

Debemos notar que la forma en que se definió la solución del par  $(\Theta_1, \Theta_2)$  en la prueba de la Proposición 3.3.5, no es única, como se puede apreciar en el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.6** *Supongamos que la función  $\mathbf{G}(s, t)$  es solución del sistema (3.3.14). Entonces  $\mathbf{G}$  está dada explícitamente por*

$$\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}^2(0, v)\mathbf{F}^1(s, t) = \mathbf{F}^1(u, 0)\mathbf{F}^2(s, t), \quad (3.3.20)$$

donde  $\mathbf{F}^1$  y  $\mathbf{F}^2$  son soluciones de las ecuaciones (3.3.17) y (3.3.17), respectivamente.

**Demostración.** En la Proposición 3.3.5 se demostró que la función  $\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}^2(0, t)\mathbf{F}^1(s, t)$  es solución al sistema (3.3.14). Sólo resta probar que la función  $\mathbf{F}^1(s, 0)\mathbf{F}^2(s, t)$  es también solución de este sistema, ya que por unicidad (ver Teorema 3.2.1), tendríamos que  $\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}^1(s, 0)\mathbf{F}^2(s, t)$ . Para ello, probemos que la función  $\mathbf{F}^1(s, 0)\mathbf{F}^2(s, t)$  satisface el sistema de ecuaciones (3.3.14).

Al derivar la función con respecto a la variable  $t$  tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}^1(u, 0)\mathbf{F}^2(s, t)) &= \mathbf{F}^1(u, 0)\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}^2(s, t)) \\ &= \mathbf{F}^1(u, 0)\mathbf{F}^2(s, t)\Theta_2(s, t),\end{aligned}$$

con lo cual vemos que satisface la ecuación (3.3.14b). Si definimos ahora la función

$$\mathbf{H}(s, t) = \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{F}^1(u, 0)\mathbf{F}^2(s, t)) - \mathbf{F}^1(u, 0)\mathbf{F}^2(s, t)\Theta_2(s, t),$$

y repitiendo con esta función el mismo procedimiento que en el **Paso 3** de la prueba de la Proposición 3.3.5, tenemos que  $\mathbf{H}(s, t) \equiv \mathbf{0}$ . En consecuencia, la función  $\mathbf{F}^1(s, 0)\mathbf{F}^2(s, t)$  también satisface la (3.3.14a). Por último, tenemos

$$\mathbf{F}^1(0, 0)\mathbf{F}^2(0, 0) = \mathbf{I},$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}^1(u, 0)\mathbf{F}^2(s, t).$$

■

En la Proposición 3.3.5 se establece que la ecuación (3.3.16) es suficiente para garantizar que el par  $(\Theta_1, \Theta_2)$  sea compatible. La prueba de esta Proposición quedó dividida en tres pasos: En los dos primeros pasos se construye una función matricial  $\mathbf{G}$  (3.3.19) y en el último paso se concluye que tal función es solución del sistema (3.3.14). Con la prueba ya completa, podemos repasar nuevamente los primeros dos pasos de la demostración en la que se dan los detalles de la construcción, con los cuales es posible obtener un algoritmo que nos puede servir para construir, por métodos numéricos, la matriz solución del sistema, el cual presentamos a continuación.

**Algoritmo.** El algoritmo para construir la solución del sistema de ecuaciones (3.3.14).

- (1) Consideremos la ecuación (3.3.14a). Para cada valor fijo de la variable  $t$  fijo, se tiene una ecuación diferencial ordinaria para la variable  $s$ . En otras palabras, tenemos una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde cada miembro de la familia depende del valor de  $t$  que se elija. Sea  $\mathbf{F}^1(s, t)$  la función matricial que satisface

$$\frac{\partial \mathbf{F}^1}{\partial s}(s, t) = \mathbf{F}^1(s, t)\Theta_1(s, t), \quad \mathbf{F}^1(0, t) = \mathbf{I} \quad \text{para } v \in \mathbb{R}.$$

La función matricial  $\mathbf{F}^1(s, t)$  determina un miembro de la familia de soluciones para la ecuación (3.3.14a) con cada valor de la variable  $v$ . En la práctica, lo que se puede hacer es tomar una partición de puntos sobre el conjunto de valores para la variable  $t$ , y resolver la ecuación diferencial con cada uno de estos valores. Con todas las soluciones así obtenidas, tendremos una aproximación numérica a la función  $\mathbf{F}^1(s, t)$ .

- (2) Ahora tomemos la ecuación (3.3.14b). Para cada valor fijo de la variable  $u$ , tenemos una ecuación diferencial ordinaria sujeta a la condición

inicial cuando  $t = 0$ . Análogamente al Paso 1, obtenemos una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias: una ecuación por cada valor de  $s$  que se tome. Sea  $\mathbf{F}^2(s, t)$  la función matricial que satisface el sistema

$$\frac{\partial \mathbf{F}^2}{\partial t}(s, t) = \mathbf{F}^1(s, t)\Theta_2(s, t), \quad \mathbf{F}^2(s, 0) = \mathbf{I} \quad \text{para } u \in \mathbb{R}.$$

Como en el Paso 1, la función  $\mathbf{F}^2(s, t)$  determina un miembro de la familia de soluciones para la ecuación (3.3.14b). Numéricamente se procede de la misma manera que en el Paso 1 y así obtenemos una aproximación numérica a la función  $\mathbf{F}^2(s, t)$ .

- (3) Por último, construyamos la matriz  $\mathbf{G}(s, t)$  usando cualquiera de las dos expresiones dadas en (3.3.20). Esta función  $\mathbf{G}(s, t)$  es una aproximación numérica a la solución del sistema de ecuaciones (3.3.14). Para obtener mejores aproximaciones a la solución de este sistema hacemos refinamientos de las particiones de los conjuntos donde las variables  $s$  y  $t$  están definidas.



## Capítulo 4

# Teorema fundamental de superficies en $\mathbb{R}^3$

Este capítulo, es sin lugar a dudas, el más importante de este trabajo. Nuestro principal objetivo es dar una demostración completa y uniforme del Teorema Fundamental de Superficies en  $\mathbb{R}^3$  (Teorema 4.2.1). Para comenzar, deduciremos las ecuaciones de Gauss y las ecuaciones de Weingarten, que son usualmente conocidas como el sistema fundamental de ecuaciones parciales de la teoría de superficies. Estas ecuaciones se satisfacen para los coeficientes de las formas fundamentales asociados a una parametrización dada, y son muy importantes ya que en ellas se encuentra toda la información sobre el comportamiento de una superficie.

En el caso de las curvas en el espacio, el Teorema Fundamental de Curvas en  $\mathbb{R}^3$  (Teorema 2.1.1) establece que para cualesquiera dos funciones  $\kappa > 0$  y  $\tau$  que satisfacen las ecuaciones de Frenet-Serret (2.1.5), existe una curva regular, parametrizada por su longitud de arco, con funciones de curvatura  $\kappa$  y torsión  $\tau$ .

En el caso de las superficies es natural, por analogía, hacer las siguientes preguntas:

- 1 Si tenemos un conjunto de funciones suaves que satisfacen las ecuaciones de Gauss y Weingarten, ¿existe una superficie regular y una parametrización de la misma, tal que los coeficientes de sus formas fundamentales asociados a esa parametrización dada sean precisamente estas funciones?
- 2 Si tal superficie existe, ¿es única?, ¿en qué sentido lo es?

La respuesta a la primera pregunta es, en general, negativa. La razón principal de esto es que el sistema (4.1.1)-(4.1.6), formado por las ecuaciones de Gauss y Weingarten, es un sistema sobredeterminado, debido a que tiene más incógnitas que ecuaciones; en efecto, se tienen 15 ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente por 9 funciones. De esta manera, no debe sorprendernos el hecho de que el sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) de la teoría de superficies no siempre tenga solución para funciones arbitrarias, como sí sucede en el caso de las ecuaciones de Frenet-Serret.

Para que la respuesta a la primera pregunta sea afirmativa, ciertas identidades llamadas *ecuaciones de compatibilidad*, deben de cumplirse para los coeficientes de las formas fundamentales. Las dos preguntas anteriores, son estudiadas en el teorema fundamental de superficies y veremos las condiciones necesarias para poder responder afirmativamente a ambas preguntas, y cuya demostración, como se mencionó al principio, es el objetivo central de esta tesis.

## 4.1 Ecuaciones de Gauss-Codazzi

### 4.1.1 Derivación de las condiciones de integrabilidad

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , orientable, con un sistema de coordenadas locales  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que a cada pareja  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  le asigna el punto  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} \in \mathcal{M}$ . El conjunto  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\} \subset \mathbb{R}^3$ , donde

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

es un campo vectorial normal unitario a  $\mathcal{M}$ , forma una base para  $\mathbb{R}^3$ , conocida como *triedro móvil*. Nótese que este triedro móvil está bien definido para cada punto de la superficie.

Recordemos que para una curva regular es posible definir el marco móvil de Frenet (2.1.4) en cada punto de esa curva (ver Sección 2.1). Por lo tanto, una forma de estudiar el comportamiento de una curva es hacerlo a través de las derivadas del marco de Frenet.

De manera análoga, una manera de estudiar el comportamiento de las superficies regulares es estudiando el comportamiento de su triedro móvil. Los vectores que forman esta base móvil son funciones suaves definidas en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Además, sus derivadas parciales serán de nueva cuenta vectores en  $\mathbb{R}^3$ .



Como el triedro móvil es una base para este espacio, entonces sus derivadas parciales se pueden expresar como una combinación lineal de esta base, como se muestra a continuación.

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 \mathbf{N}, \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + L_2 \mathbf{N}, \quad (4.1.2)$$

$$\mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \quad (4.1.3)$$

y

$$\mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_3 \mathbf{N}, \quad (4.1.4)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_4 \mathbf{N}, \quad (4.1.5)$$

$$\mathbf{N}_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \quad (4.1.6)$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  fueron introducidos en la sección (2.3.2), los  $L_i$  están relacionados con los coeficientes de la segunda forma fundamental y los coeficientes  $\Gamma_{jk}^i$  son llamados *los símbolos de Christoffel*<sup>1</sup> de  $\mathcal{M}$  en la parametrización  $\mathbf{x}$ . Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , se sigue que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  y  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ ; es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los índices inferiores.

El conjunto de ecuaciones (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5) son conocidas como las ecuaciones de Gauss y (4.1.3), (4.1.6) se conocen ecuaciones Weingarten<sup>2</sup>. En la Proposición 4.1.3 probaremos que los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental.

El sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) pueden ser expresado en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_v = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

<sup>1</sup>Elwin Bruno Christoffel (1829-1900). Matemático alemán, profesor en Estrasburgo. El introdujo los símbolos de tres índices que ahora son conocido como símbolos de Christoffel y usados en la Teoría de Invariantes.

<sup>2</sup>Julius Weingarten. Profesor de la Technische Universität en Berlín. Una superficie en la cual existe una relación funcional definida entre sus curvaturas principales es llamada una *Superficie de Weingarten*.

En este caso,  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  son funciones matriciales de  $9 \times 9$ , definidas por bloques, cuyas expresiones son:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{11}^2 \mathbb{I}_3 & L_1 \mathbb{I}_3 \\ \Gamma_{21}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{21}^2 \mathbb{I}_3 & L_2 \mathbb{I}_3 \\ a_{11} \mathbb{I}_3 & a_{21} \mathbb{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{12}^2 \mathbb{I}_3 & L_3 \mathbb{I}_3 \\ \Gamma_{22}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{22}^2 \mathbb{I}_3 & L_4 \mathbb{I}_3 \\ a_{12} \mathbb{I}_3 & a_{22} \mathbb{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.1.9)$$

donde  $\mathbb{I}_3$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ .

Debemos mencionar que las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  no son independientes entre sí, sino que están relacionadas por una ecuación, llamada de compatibilidad, como se establece en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.1** *Las funciones matriciales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  definidas por (4.1.9) satisfacen la ecuación*

$$\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u + [\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = 0 \quad (4.1.10)$$

**Demostración.** Definamos la función  $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^9$  por

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $\mathbf{X}$  es una función suave, por lo tanto satisface la ecuación

$$\mathbf{X}_{uv} = \mathbf{X}_{vu}.$$

Si desarrollamos la expresión del lado izquierdo de la ecuación anterior y utilizamos las ecuaciones (4.1.7), (4.1.8) tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{X})_{uv} &= (\mathbf{X}_u)_v = (\mathcal{P} \mathbf{X})_v \\ &= \mathcal{P}_v \mathbf{X} + \mathcal{P} \mathbf{X}_v \\ &= \mathcal{P}_v \mathbf{X} + \mathcal{P} \mathcal{Q} \mathbf{X} \\ &= (\mathcal{P}_v + \mathcal{P} \mathcal{Q}) \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} (\mathbf{X})_{uv} &= (\mathbf{X}_v)_u = (\mathcal{Q} \mathbf{X})_u \\ &= \mathcal{Q}_u \mathbf{X} + \mathcal{Q} \mathbf{X}_u \\ &= \mathcal{Q}_u \mathbf{X} + \mathcal{Q} \mathcal{P} \mathbf{X} \\ &= (\mathcal{Q}_u + \mathcal{Q} \mathcal{P}) \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Por último, igualando las expresiones anteriores, obtenemos

$$(\mathcal{P}_v + \mathcal{P}\mathcal{Q})\mathbf{X} = (\mathcal{Q}_u + \mathcal{Q}\mathcal{P})\mathbf{X},$$

lo cual implica

$$\mathcal{P}_v + \mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_u + \mathcal{Q}\mathcal{P}.$$

Al igualar a cero esta expresión tenemos la ecuación (4.1.10)

$$\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u + \mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = 0.$$

■

La ecuación (4.1.10) es llamada la *condición de compatibilidad* del sistema (4.1.7), (4.1.8). También, como se verá al final de esta sección, es conocida como la ecuación de *Gauss-Codazzi*.

#### 4.1.2 Cálculo de las matrices $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$

Nuestro siguiente propósito es mostrar que las componentes de las matrices definidas en (4.1.9) se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales y las derivadas de los coeficientes de la primera forma.

Recordemos que dada una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  de una superficie regular  $\mathcal{M}$ , los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \quad (4.1.11)$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental por

$$\begin{aligned} e &= \langle -\mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle, \\ f &= \langle -\mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = \langle -\mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle, \\ g &= \langle -\mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

**Lema 4.1.2** *Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial real con producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  una base de  $\mathcal{V}$ . Sea  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{V}$  un vector cuya expresión en términos de la base es  $\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$ . Entonces*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

donde  $\xi_i = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}_i \rangle$  y  $\mathbf{G} = (g_{ij}) = (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)$ .

**Demostración.** Notemos que

$$\begin{aligned}\xi_i &= \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j g_{ji}.\end{aligned}$$

Como esta identidad se cumple para todo  $i=1,2,\dots,n$ , se sigue que

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

■

En la siguiente proposición se presentan fórmulas explícitas para calcular las componentes de las matrices que se definen en (4.1.9).

**Proposición 4.1.3** *Las componentes de las funciones matriciales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , que se definen en (4.1.9), se expresan en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental por*

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u\mathbb{I}_3 & (F_u - \frac{1}{2}E_v)\mathbb{I}_3 & e\mathbb{I}_3 \\ \frac{1}{2}E_v\mathbb{I}_3 & \frac{1}{2}G_u\mathbb{I}_3 & f\mathbb{I}_3 \\ -e\mathbb{I}_3 & -f\mathbb{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E\mathbb{I}_3 & F\mathbb{I}_3 & 0 \\ F\mathbb{I}_3 & G\mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.1.13)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v\mathbb{I}_3 & \frac{1}{2}G_u\mathbb{I}_3 & f\mathbb{I}_3 \\ (F_v - \frac{1}{2}G_u)\mathbb{I}_3 & \frac{1}{2}G_v\mathbb{I}_3 & g\mathbb{I}_3 \\ -f\mathbb{I}_3 & -g\mathbb{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E\mathbb{I}_3 & F\mathbb{I}_3 & 0 \\ F\mathbb{I}_3 & G\mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.1.14)$$

**Demostración.** Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización de  $\mathcal{M}$ . Del cálculo de las derivadas parciales de los coeficientes de las formas fundamentales dados

por las ecuaciones (4.1.11) y (4.1.12) se obtienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle &= \frac{1}{2}E_u, & \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{1}{2}G_v, \\
\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \frac{1}{2}E_v, & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{1}{2}G_u, \\
\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_u - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \\
\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle_v - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv} \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\
\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle &= e, & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle &= g, \\
\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle &= -f, & \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N} \rangle &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Recordemos que el triedro móvil  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$  y la matriz  $\mathbf{G}$  del Lema 4.1.2 está dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.15)$$

Aplicando el Lema 4.1.2 a las ecuaciones de Gauss y Weingarten (4.1.1)-(4.1.6), las cuales expresan las derivadas parciales de los vectores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}$  como una combinación lineal de la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \\ L_1 \end{pmatrix} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \\ e \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 \\ \Gamma_{21}^2 \\ L_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \\ f \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \\ L_4 \end{pmatrix} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \\ g \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \\ f \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} -e \\ -f \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} -f \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por último, sustituyendo las expresiones anteriores en las fórmulas para las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  que aparecen en la ecuación (4.1.9), se llega a las ecuaciones (4.1.13) y (4.1.14).  $\blacksquare$

### 4.1.3 Ecuaciones de Gauss-Codazzi en $GL(3)$

Las ecuaciones de Gauss-Weingarten, dadas por (4.1.7), (4.1.8), se definen por medio de las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  en  $GL(9)$ , que están definidas por bloques y satisfacen la ecuación de compatibilidad o de Gauss-Codazzi (4.1.10). Nuestro propósito en esta parte es expresar la ecuación de Gauss-Codazzi en una forma más compacta a la que se tiene en la ecuación (4.1.10) para las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ . Dicha ecuación será equivalente a ésta pero en términos de matrices en  $GL(3)$ .

Para lograr nuestro propósito vamos a definir un par de operadores lineales cuyas propiedades nos permitirán obtener la propiedad deseada.

Para cada matriz

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in GL(3).$$

se define el operador lineal  $\mathcal{L} : GL(3) \rightarrow GL(9)$  por:

$$\mathcal{L}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.16)$$

**Lema 4.1.4** *El operador  $\mathcal{L}$  (4.1.16) tiene las siguientes propiedades:*

- (i)  $\mathcal{L}$  es inyectivo en su imagen;
- (ii)  $\mathcal{L}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathcal{L}(\mathbb{A})\mathcal{L}(\mathbb{B})$ ;
- (iii)  $\mathcal{L}([\mathbb{A}, \mathbb{B}]) = [\mathcal{L}(\mathbb{A}), \mathcal{L}(\mathbb{B})]$ ;
- (iv)  $\mathcal{L}(\mathbb{A}^{-1}) = \mathcal{L}(\mathbb{A})^{-1}$ ;
- (v)  $\mathcal{L}(\mathbb{A}^T) = \mathcal{L}(\mathbb{A})^T$ ;
- (vi) Si  $\mathbb{A}$  es una función matricial suave en las variables  $u$  y  $v$ , entonces:

$$\mathcal{L}(\mathbb{A}_u) = \mathcal{L}(\mathbb{A})_u \quad y \quad \mathcal{L}(\mathbb{A}_v) = \mathcal{L}(\mathbb{A})_v.$$

La demostración de este lema se puede consultar en el Apéndice A.1.

**Nota 1** *Si denotamos por  $\mathcal{L}^{-1}$  al operador inverso de  $\mathcal{L}$ , es fácil probar que  $\mathcal{L}^{-1}$  posee las mismas propiedades que el operador  $\mathcal{L}$ , salvo que éstas deben estar planteadas en el respectivo dominio y contradominio de  $\mathcal{L}^{-1}$ .*

Sea  $\mathbf{\Pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_9)^T \in \mathbb{R}^9$ , un vector columna. Se define el operador lineal  $L : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathfrak{gl}(3)$  por

$$L(\mathbf{\Pi}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_4 & \pi_7 \\ \pi_2 & \pi_5 & \pi_8 \\ \pi_3 & \pi_6 & \pi_9 \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

La importancia del operador  $L$  (4.1.17) es que sus propiedades nos permiten obtener un sistema matricial de  $3 \times 3$  a partir de un sistema lineal en  $\mathbb{R}^9$ .

**Lema 4.1.5** *El operador  $L$  (4.1.17) posee las siguientes propiedades:*

- (i)  $L$  es inyectivo en su imagen;
- (ii) Si  $\mathbf{X}(u,v)$  es una función vectorial suave en  $\mathbb{R}^9$ , entonces

$$L(\mathbf{X}_u) = L(\mathbf{X})_u \quad y \quad L(\mathbf{X}_v) = L(\mathbf{X})_v;$$

- (iii) Para cada  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^9$  y cada matriz  $\mathcal{A} \in \text{GL}(9)$  dada por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mathbb{I}_3 & a_4 \mathbb{I}_3 & a_7 \mathbb{I}_3 \\ a_2 \mathbb{I}_3 & a_5 \mathbb{I}_3 & a_8 \mathbb{I}_3 \\ a_3 \mathbb{I}_3 & a_6 \mathbb{I}_3 & a_9 \mathbb{I}_3 \end{bmatrix},$$

la ecuación lineal

$$\mathbf{Y} = \mathcal{A}\mathbf{X},$$

se transforma bajo el operador  $L$  en la ecuación matricial

$$L(\mathbf{Y}) = L(\mathbf{X})\mathbb{A},$$

donde

$$\mathbb{A} = [\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{A})]^T,$$

y  $\mathcal{L}^{-1}$  es la inversa del operador  $\mathcal{L}$  definido por (4.1.16).

La demostración de este lema se puede consultar en el Apéndice A.1.

Vamos a decir que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si y sólo si la existencia de una solución para uno de los sistemas implica que existe la solución para el otro sistema. El inciso (iii) del Lema (4.1.5) establece que un sistema lineal en  $\mathbb{R}^9$  es transformado bajo operador  $L$  en un sistema matricial equivalente.

**Proposición 4.1.6** *El sistema ecuaciones (4.1.7) y (4.1.8) es equivalente al sistema de ecuaciones matriciales*

$$[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}]_u = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}] \mathbb{P}, \quad (4.1.18)$$

$$[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}]_v = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}] \mathbb{Q}. \quad (4.1.19)$$

$\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  son matrices cuadradas de  $3 \times 3$  dadas por:

$$\mathbb{P} = [\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P})]^T, \quad (4.1.20)$$

$$\mathbb{Q} = [\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Q})]^T. \quad (4.1.21)$$

**Demostración.** Apliquemos la transformación lineal  $L$ , dada en (4.1.17), a la ecuación lineal (4.1.7). Por el inciso (iii) del Lema 4.1.5, esta ecuación se transforma en

$$L \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u \right] = L \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \right] \mathbb{P},$$

donde  $\mathbb{P} = [\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P})]^T$ .

Por otra parte, tenemos

$$L \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \right] = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}],$$

y por el inciso (ii) del Lema 4.1.5

$$L \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u \right] = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}]_u.$$

De esta manera es como se obtiene la ecuación (4.1.18). De forma similar, si aplicamos el operador  $L$  a la ecuación (4.1.8) llegamos a la ecuación (4.1.19) y a la fórmula (4.1.21).  $\blacksquare$

En el siguiente resultado obtendremos las fórmulas para calcular las componentes de las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  que definen el sistema matricial (4.1.18) y (4.1.19), respectivamente.



**Proposición 4.1.7** *Las componentes de las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  (4.1.18), (4.1.19) se obtienen por medio de las fórmulas:*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & -e \\ (F_u - \frac{1}{2}E_v) & \frac{1}{2}G_u & -f \\ e & f & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.22)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v & (F_v - \frac{1}{2}G_u) & -f \\ \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.23)$$

**Demostración.** Si se sustituyen las fórmulas para las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , dadas por (4.1.13) y (4.1.14), en las ecuaciones (4.1.20) y (4.1.21), obtenemos las fórmulas (4.1.22) y (4.1.23). ■

Recordemos que las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , que definen los sistemas de ecuaciones lineales (4.1.7) y (4.1.8) satisfacen la ecuación de compatibilidad (4.1.10). Luego, es natural pensar que las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$ , que definen sistema matricial (4.1.18) y (4.1.19) equivalente al lineal, estén relacionadas por su propia ecuación de compatibilidad, como se demuestra en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.8** *Las funciones matriciales  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$ , definidas por (4.1.22) y (4.1.23) respectivamente, satisfacen la ecuación*

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \quad (4.1.24)$$

**Demostración.** Si aplicamos  $\mathcal{L}^{-1}$ , la inversa del operador lineal  $\mathcal{L}$  definido por (4.1.16) a la ecuación de compatibilidad (4.1.10) que satisfacen las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , entonces por las propiedades del operador  $\mathcal{L}^{-1}$  tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u) &= \mathcal{L}^{-1}(-[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]), \\ \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P})_v - \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Q})_u &= -[\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P}), \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Q})], \\ (\mathbb{P}_v)^T - (\mathbb{Q}_u)^T &= -[\mathbb{P}^T, \mathbb{Q}^T], \\ \mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u &= [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \end{aligned}$$

■

Por último, se debe señalar que el sistema matricial formado por las ecuaciones (4.1.18) y (4.1.19) nos da otra manera de expresar las ecuaciones

de Gauss-Weingarten, las cuales se utilizan para estudiar el comportamiento de una superficie regular. Además, en la Proposición 4.1.3 se probó que las componentes de las matrices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  que definen las ecuaciones de Gauss-Weingarten en forma matricial (4.1.7),(4.1.8), dependen únicamente de los coeficientes de las formas fundamentales asociadas a una parametrización de la superficie. Por lo tanto, podemos afirmar que en las formas fundamentales está plasmada toda la información sobre el comportamiento de una superficie regular

#### 4.1.4 Ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi y teorema de Gauss

Uno de los principales objetivos de este capítulo es derivar las ecuaciones de compatibilidad asociadas al sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6). Cabe señalar en este punto que el enfoque dado aquí para lograr tal propósito es diferente al que se puede encontrar en algunos libros de texto de Geometría Diferencial, como por ejemplo en [6, 12, 18, 19].

En esta subsección veremos que la ecuación de compatibilidad dada por (4.1.24), es equivalente a las ecuaciones del Teorema de Gauss (4.1.26) y las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi (4.1.29), (4.1.30), las cuales son conocidas bajo el nombre de *ecuaciones de compatibilidad de la teoría de superficies*. Para esto vamos a probar que en las componentes de la ecuación de compatibilidad (4.1.24) encontramos las ecuaciones clásicas de compatibilidad. Esta es la razón principal por la cual la ecuación de compatibilidad (4.1.24) también es llamada ecuación de Gauss-Codazzi.

Expresemos las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$ , dadas por (4.1.22) y (4.1.23), usando los símbolos de Christoffel:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{21}^1 & \frac{fF-eG}{EG-F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{21}^2 & \frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ e & f & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF-gE}{EG-F^2} \\ f & g & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.25)$$

Si calculamos las componentes  $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$  de la ecuación de compatibilidad (4.1.24), entonces usando las expresiones anteriores para  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$ , tenemos

$$(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u = \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - FK, \quad (4.1.26)$$

$$(\Gamma_{21}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - GK, \quad (4.1.27)$$

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u = \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + EK. \quad (4.1.28)$$

En este caso,  $K$  es la curvatura Gaussiana, que en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales está dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Las ecuaciones (4.1.26), (4.1.27), (4.1.28) se conocen como las fórmulas clásicas del teorema de Gauss, el cual establece que la curvatura gaussiana es una propiedad intrínseca de la superficie, es decir, que permanece invariante bajo isometrías.

La manera de probar este teorema es despejando la curvatura gaussiana en cualquiera de las ecuaciones (4.1.26), (4.1.27), (4.1.28), con lo que la curvatura gaussiana queda expresada en términos de los símbolos de Christoffel, los que a su vez dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental. Con estas ecuaciones hemos probado el *Teorema Egregio Gauss*, el cual es uno de los más importantes en la teoría de superficies.

**Teorema 4.1.9 (Teorema Egregio de Gauss)** *La curvatura Gaussiana de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  se puede expresar en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.*

Si calculamos las componentes (3,1) y (3,2) de la ecuación de compatibilidad (4.1.24) obtenemos:

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \quad (4.1.29)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) - g\Gamma_{21}^2. \quad (4.1.30)$$

Estas expresiones son conocidas como las *ecuaciones de Peterson-Minardi-Codazzi*.

El resto de las componentes de la ecuación de compatibilidad (4.1.24) son identidades que involucran a las ecuaciones de Gauss o a las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi.

El lector interesado en estudiar el enfoque clásico de la teoría de superficies y las ecuaciones de compatibilidad puede consultar [6, 12, 18, 19].

## 4.2 El Teorema Fundamental de superficies

En esta sección vamos a formular el resultado más importante de este trabajo, a saber, el Teorema Fundamental de Superficies en  $\mathbb{R}^3$ . A partir de este

momento, empezaremos a usar todos los conceptos y resultados presentados en los capítulos anteriores para dar una demostración completa y uniforme de este teorema.

El primer paso para demostrar cualquier teorema es que su formulación sea clara, de tal manera que podamos entenderlo satisfactoriamente. Para asegurarnos de esto, presentaremos una formulación formal del teorema fundamental y después haremos algunos comentarios sobre las partes que lo componen y acerca de las hipótesis que se requieren.

#### Teorema 4.2.1 (Teorema Fundamental de Superficies)

(a) Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular orientable en  $\mathbb{R}^3$ , con una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ . Supongamos que  $E, F, G$  y  $e, f, g$ , son los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales con respecto a la parametrización  $\mathbf{x}$ . Definamos las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales dadas por las fórmulas (4.1.22) y (4.1.23). Entonces  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen la ecuación de compatibilidad

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \quad (4.2.1)$$

(b) Sean  $E, F, G, e, f, g$ , funciones suaves definidas en un dominio abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , tales que  $E > 0, G > 0$  y  $EG - F^2 > 0$ . Usando estas funciones definimos las funciones matriciales  $\mathbb{G} : V \rightarrow GL(3)$  dadas por (4.1.15) y  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} : V \rightarrow GL(3)$  por (4.1.22) y (4.1.23). Supongamos que  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen la ecuación de compatibilidad (4.3.4). Entonces existe un abierto  $U \subset V$ , y una única función suave  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$  es una superficie regular y los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para la superficie  $\mathcal{M}$  están dadas por las funciones  $E, F, G$  y  $e, f, g$ , respectivamente.

(c) Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  dos superficies regulares con parametrizaciones  $\mathbf{x} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  y  $\tilde{\mathbf{x}} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ , respectivamente. Si existe una vecindad abierta  $U \subset V$  tal que los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales asociados a las parametrizaciones  $\mathbf{x}$  y  $\tilde{\mathbf{x}}$  coinciden en todo  $U$ , entonces existe un movimiento rígido  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathbf{F}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}, \quad \text{en todo } U.$$

Vamos a explicar brevemente cada uno de los incisos que forma parte de este teorema.

En la parte (a) del Teorema 4.2.1 se tiene el propósito de obtener las ecuaciones de compatibilidad que deben de cumplir los coeficientes de las formas fundamentales de una superficie regular. La idea es plantear las ecuaciones de Gauss y de Weingarten (4.1.1)-(4.1.6) y mostrar que las componentes que aparecen en estas ecuaciones son funciones que dependen de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales. Luego, usando la propiedad de las parciales cruzadas para funciones suaves, obtenemos la ecuaciones de compatibilidad que también son conocidas como las ecuaciones de Gauss-Codazzi.

La parte (b) del teorema, es la más importante y, a su vez, la más difícil de probar. En esta parte se demuestra la existencia de una superficie para un conjunto de funciones arbitrarias que satisfacen algunas condiciones, siendo la más importante la ecuación de compatibilidad. Para poder dar una demostración completa y uniforme de este inciso, se hace uso los resultados presentados en el Capítulo 3, que fue dedicado en su totalidad al criterio de Frobenius.

En el inciso (c) se establece, de manera local, la unicidad de una superficie, salvo movimientos rígidos. La prueba de esta parte no es tan difícil como en el caso anterior y se tiene como una consecuencia del teorema de existencia y unicidad de EDO.

### 4.3 Demostración del Teorema Fundamental

A lo largo de este trabajo se ha procurado establecer y presentar los conceptos y resultados necesarios para estar en condiciones de dar una demostración completa del teorema fundamental, de tal manera que todos los elementos necesarios para hacer una prueba satisfactoria se encuentren contenidos en este trabajo. Lo único que resta por hacer es unir todos esos elementos de tal manera que todos encajen suavemente, como si se tratarán de las piezas de un rompecabezas, y cumplir con el objetivo planteado al comienzo de esta tesis.

#### 4.3.1 Demostración de la ecuación de compatibilidad

El inciso (a) del Teorema 4.2.1 ya ha sido probado en la primera sección de este capítulo, por lo que no consideramos necesario repetir lo expuesto en la Sección 4.1.

### 4.3.2 Existencia de la superficie.

Debido a lo extenso y complicado que resulta probar esta parte del teorema, la demostración se ha dividido en tres pasos. Esto permitirá analizar más cada una de las partes de la demostración y se evitará que el lector se pierda con tantos detalles que aparecen en la prueba.

**Paso 1.** Consideremos las funciones suaves  $E, F, G, e, f, g$  definidas en el dominio abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , que cumplen las hipótesis del inciso (b) del Teorema 4.2.1. Formemos la matriz  $\mathbb{G}$  (4.1.15)

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.1)$$

y construyamos las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  usando las fórmulas (4.1.22), (4.1.23):

$$\mathbb{P} = \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & -e \\ (F_u - \frac{1}{2}E_v) & \frac{1}{2}G_u & -f \\ e & f & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.2)$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v & (F_v - \frac{1}{2}G_u) & -f \\ \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Sean  $(u_0, v_0) \in V \subset \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  dos puntos fijos. Supongamos que  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}(u_0, v_0)$  y  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$  para  $i = 1, 2$ . Supongamos ahora que  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen la ecuación de compatibilidad

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \quad (4.3.4)$$

Entonces, por el criterio de Frobenius (Teorema 3.3.1), existe una vecindad  $U \subset V$  del punto  $(u_0, v_0)$  y una función matricial suave  $\mathbb{V} : U \rightarrow GL(3)$

$$\mathbb{V} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3], \quad (4.3.5)$$

donde cada  $\omega_i : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es un vector columna y una función suave para  $i = 1, 2, 3$ ; que es solución del sistema de ecuaciones

$$\mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P}, \quad (4.3.6)$$

$$\mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q}. \quad (4.3.7)$$

$$\mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \quad (4.3.8)$$

La función matricial  $\mathbb{V}$  que se definió (4.3.5), posee ciertas propiedades interesantes que serán de mucha utilidad en el siguiente paso de la demostración. La primera de estas propiedades se presenta en el siguiente lema.

**Lema 4.3.1** *Para las funciones vectoriales  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que son columnas de la matriz  $\mathbb{V}$  (4.3.5) se cumple la identidad*

$$(\omega_2)_u = (\omega_1)_v. \quad (4.3.9)$$

**Demostración.** Notemos que  $(\omega_2)_u$  es la segunda columna de la matriz  $\mathbb{V}_u$  que aparece en la ecuación (4.3.6) y  $(\omega_1)_v$  es la primera columna de la matriz  $\mathbb{V}_v$  de la ecuación (4.3.7). Utilizando las ecuaciones (4.3.6), (4.3.7) y las fórmulas para las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  (4.3.2), (4.3.3) tenemos:

$$(\omega_2)_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \\ f \end{pmatrix} = (\omega_1)_v.$$

■

En el siguiente lema se prueba que  $\omega_3$ , la tercera columna de la matriz  $\mathbb{V}$ , es ortogonal al subespacio generado por las otras dos columnas de  $\mathbb{V}$ .

**Lema 4.3.2** *Para las funciones vectoriales  $\omega_i$ , que son columnas de la función matricial  $\mathbb{V}$  (4.3.5), se cumple la siguiente identidad:*

$$\langle \omega_i, \omega_3 \rangle = 0, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (4.3.10)$$

Además, se tiene

$$\mathbb{G} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}, \quad (4.3.11)$$

donde  $\mathbb{G}$  es la función matricial (4.3.1).

**Demostración.** Definamos  $\mathbb{Z} = \mathbb{V}^T \mathbb{V} = (\langle \omega_i, \omega_j \rangle)$ , la cual, por construcción, es una matriz simétrica. La idea es probar que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{G}.$$

Si transponemos las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) se tiene

$$\mathbb{V}_u^T = \mathbb{P}^T \mathbb{V}^T, \quad (4.3.12)$$

$$\mathbb{V}_v^T = \mathbb{Q}^T \mathbb{V}^T. \quad (4.3.13)$$

Multiplicando a la izquierda las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) por  $\mathbb{V}^T$  tenemos

$$\mathbb{V}^T \mathbb{V}_u = \mathbb{V}^T \mathbb{V} \mathbb{P}, \quad (4.3.14)$$

$$\mathbb{V}^T \mathbb{V}_v = \mathbb{V}^T \mathbb{V} \mathbb{Q}. \quad (4.3.15)$$

Análogamente, multiplicando por la derecha las ecuaciones (4.3.12) y (4.3.13) por  $\mathbb{V}$  obtenemos

$$\mathbb{V}_u^T \mathbb{V} = \mathbb{P}^T \mathbb{V}^T \mathbb{V}, \quad (4.3.16)$$

$$\mathbb{V}_v^T \mathbb{V} = \mathbb{Q}^T \mathbb{V}^T \mathbb{V}. \quad (4.3.17)$$

Si se suma la ecuación (4.3.14) con la ecuación (4.3.16) y, análogamente, se suma la ecuación (4.3.15) con la ecuación (4.3.17), entonces se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones en derivadas parciales, que toma la siguiente forma después de hacer la sustitución  $\mathbb{Z} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}$  y sus derivadas:

$$\mathbb{Z}_u = \mathbb{Z} \mathbb{P} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z}, \quad (4.3.18)$$

$$\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z} \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z}, \quad (4.3.19)$$

$$\mathbb{Z}(u_0, v_0) = \mathbb{G}(u_0, v_0). \quad (4.3.20)$$

Como la función matricial  $\mathbb{Z}$  es suave (por ser producto de dos funciones suaves) se tiene que  $\mathbb{Z}_{uv} = \mathbb{Z}_{vu}$ . Si desarrollamos estas derivadas parciales usando (4.3.18), (4.3.19), obtendremos la condición de compatibilidad, dada por el criterio de Frobenius (Teorema 3.3.1), para que dicho sistema tenga solución. Entonces se tiene por un lado que:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{uv} &= (\mathbb{Z}_u)_v = \mathbb{Z}_v \mathbb{P} + \mathbb{Z} \mathbb{P}_v + \mathbb{P}_v^T \mathbb{Z} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z}_v, \\ &= \mathbb{Z} \mathbb{Q} \mathbb{P} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z} \mathbb{P} + \mathbb{Z} \mathbb{P}_v + \mathbb{P}_v^T \mathbb{Z} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z} \mathbb{Q} + \mathbb{P}^T \mathbb{Q}^T \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

y por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{vu} &= (\mathbb{Z}_v)_u = \mathbb{Z}_u \mathbb{Q} + \mathbb{Z} \mathbb{Q}_u + \mathbb{Q}_u^T \mathbb{Z} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z}_u, \\ &= \mathbb{Z} \mathbb{P} \mathbb{Q} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z} \mathbb{Q} + \mathbb{Z} \mathbb{Q}_u + \mathbb{Q}_u^T \mathbb{Z} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z} \mathbb{P} + \mathbb{Q}^T \mathbb{P}^T \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si igualamos las expresiones anteriores y agrupamos términos obtenemos que la condición de compatibilidad es:

$$\mathbb{Z}(\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u) + (\mathbb{P}_v^T - \mathbb{Q}_u^T) \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(\mathbb{P} \mathbb{Q} - \mathbb{Q} \mathbb{P}) - (\mathbb{P}^T \mathbb{Q}^T - \mathbb{Q}^T \mathbb{P}^T) \mathbb{Z}.$$

$$[\mathbb{Z}, \mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u] = [\mathbb{Z}, [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]], \quad (4.3.21)$$

la cual es equivalente a que las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfagan la ecuación de Gauss-Codazzi (4.3.4). De esto se sigue que la ecuación (4.3.21) también se satisface y por lo tanto el sistema de ecuaciones formado por (4.3.18), (4.3.19) y (4.3.20) tiene solución local única.



Por una parte, sabemos que por construcción  $\mathbb{Z} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}$  es solución del sistema de ecuaciones parciales. Si ahora tomamos  $\mathbb{Z} = \mathbb{G}$  (4.3.1) en las ecuaciones (4.3.18), (4.3.19) y (4.3.20), y utilizamos las expresiones para matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  dadas por (4.3.2) y (4.3.3) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_u &= \mathbb{G} \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v & -e \\ (F_u - \frac{1}{2} E_v) & \frac{1}{2} G_u & -f \\ e & f & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u & (F_u - \frac{1}{2} E_v) & e \\ \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & f \\ -e & -f & 0 \end{bmatrix} \mathbb{G}^{-1} \mathbb{G}, \\ &= \begin{bmatrix} E_u & F_u & 0 \\ F_u & G_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_v &= \mathbb{G} \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v & (F_v - \frac{1}{2} G_u) & -f \\ \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & f \\ (F_v - \frac{1}{2} G_u) & \frac{1}{2} G_v & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix} \mathbb{G}^{-1} \mathbb{G}, \\ &= \begin{bmatrix} E_v & F_v & 0 \\ F_v & G_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que hemos obtenido una identidad para la función  $\mathbb{G}$ . De esto se sigue que la matriz  $\mathbb{G}$  es solución de (4.3.18), (4.3.19). En consecuencia, por la unicidad de la solución,  $\mathbb{G} = \mathbb{V}^T \mathbb{V} = (\langle \omega_i, \omega_j \rangle)$ , por lo tanto,  $\langle \omega_i, \omega_3 \rangle = g_{i3} = 0$ , para  $i = 1, 2$ . ■

Para terminar este primer paso, probemos que las columnas de la matriz  $\mathbb{V} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$  forman una base para  $\mathbb{R}^3$ , lo cual es equivalente a probar que la matriz  $\mathbb{V}$  es invertible.

**Lema 4.3.3** *La función matricial  $\mathbb{V}$  (4.3.5) es invertible.*

**Demostración.** Por el Lema (4.3.2),  $\mathbb{G} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}$  y por las propiedades de los determinantes  $\det \mathbb{G} = (\det \mathbb{V})^2$ . Por otra parte,

$$\det \mathbb{G} = EG - F^2 > 0$$

por lo que  $\det \mathbb{V} \neq 0$ . Por lo tanto,  $\mathbb{V}$  es invertible. ■

Notemos que todas las propiedades que se probaron aquí para el conjunto de vectores  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , lo señalan como un posible triedro móvil de

una superficie regular, es decir, en cada punto de dicha superficie su plano tangente estaría generado por los vectores  $\omega_1, \omega_2$  y como vector normal al plano, el vector  $\omega_3$ . En el siguiente paso probaremos que esto es cierto.

**Paso 2.** Probaremos ahora que existe una superficie regular tal que su triedro móvil, es decir, los vectores base de su plano tangente y el vector normal al plano, son precisamente las columnas de la función matricial  $\mathbb{V}$  (4.3.5). Esto es, queremos encontrar una función vectorial suave (una parametrización)  $\mathbf{x} : (u, v) \in U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que se satisfaga el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{x}_u = \omega_1, \quad (4.3.22)$$

$$\mathbf{x}_v = \omega_2, \quad (4.3.23)$$

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_0. \quad (4.3.24)$$

El siguiente resultado establece que este sistema siempre tiene solución.

**Lema 4.3.4** *El sistema de ecuaciones (4.3.22), (4.3.23) y (4.3.24) tiene solución única.*

**Demostración.** Por el criterio de Frobenius (Teorema 3.2.1), la condición de compatibilidad para que este sistema tenga solución es:  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , lo cual es equivalente a

$$(\omega_2)_u = (\omega_1)_v.$$

Por el Lema (4.3.1), tenemos que esta identidad se cumple y el sistema tiene solución única, definida en una vecindad  $U$  del punto  $\mathbf{p}_0$ . ■

Probemos ahora que la imagen de  $U$  bajo la función  $\mathbf{x}$  es una superficie regular la cual tiene  $\omega_1$  y  $\omega_2$  como sus vectores coordenados. Dicho de otro modo, que estos vectores generan al plano tangente en cada punto de la superficie.

**Lema 4.3.5** *Supongamos que  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es solución del sistema de ecuaciones (4.3.22), (4.3.23) y (4.3.24). Entonces  $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular.*

**Demostración.** Vamos a probar que  $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$  es la gráfica de una función suave. Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  la solución al sistema (4.3.22), (4.3.23), (4.3.24). Definamos la función  $\mathbf{F} : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{F}(u, v, \mathbf{p}) = \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{p}, \quad \text{donde } \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Es claro que  $\mathbf{F}$  es una función suave. Veamos que el valor de la función en el punto fijo  $(u_0, v_0, \mathbf{p}_0) \in U \times \mathbb{R}^3$  es

$$\mathbf{F}(u_0, v_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{x}(u_0, v_0) - \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}.$$

Al calcular las derivadas parciales de  $F$  con respecto a  $u, v, \mathbf{p}$  tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} = \mathbf{x}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} = \mathbf{x}_v$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces por el Teorema de la Función Implícita (Teorema 1.2.2), en una vecindad del punto  $(u_0, v_0, \mathbf{p}_0)$  el conjunto de puntos  $(u, v, \mathbf{p})$  tales que  $\mathbf{F}(u, v, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$  es la gráfica de una función suave. Más aún, existe una única función suave  $\mathbf{g}$  bien definida en una vecindad del punto  $(u_0, v_0)$  tal que  $\mathbf{p} = \mathbf{g}(u, v)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el abierto  $U$  es el dominio de definición de la función  $\mathbf{g}$ . Por otra parte, si  $\mathbf{F}(u, v, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}$ , y entonces  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{g}(u, v)$  para todo  $(u, v) \in U$ . Por lo tanto, el conjunto  $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$  es la gráfica de una función suave. Por la Proposición (2.2.1) se tiene que  $\mathcal{M}$  es una superficie regular. ■

**Paso 3.** En este último paso vamos a demostrar que la superficie  $\mathcal{M}$ , cuya parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  es solución del sistemas de ecuaciones (4.3.22), (4.3.23), tiene como su primera y su segunda forma fundamental las formas cuadráticas:

$$I = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2,$$

$$II = edu^2 + fdudv + gdv^2,$$

donde las funciones  $E, F, G, e, f, g$  definen a las matrices  $\mathbb{G}$ ,  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.1).

Por otra parte, obsérvese que del Lema 4.3.4 se sigue para la superficie dada por la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , las funciones vectoriales  $\omega_1, \omega_2$  generan el plano tangente a dicha superficie y la función vectorial  $\omega_3$  es el vector normal a dicho plano, por lo que podemos calcular los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales asociadas a  $\mathbf{x}$ , a partir del triedro móvil  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . Estos coeficientes satisfacen un sistema de ecuaciones parciales, como se vió en la Sección 4.1:

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \tilde{\mathbb{P}}, \quad (4.3.25)$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \tilde{\mathbb{Q}}, \quad (4.3.26)$$

Además, en esa misma Sección 4.1 se demostró que  $\tilde{\mathbb{P}}$  y  $\tilde{\mathbb{Q}}$  se expresan en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental (Proposición 4.1.3). Por el inciso (a) del del teorema (4.2.1) tenemos que  $\tilde{\mathbb{P}}$  y  $\tilde{\mathbb{Q}}$  satisfacen la ecuación

$$\tilde{\mathbb{P}}_v - \tilde{\mathbb{Q}}_u = [\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{Q}}].$$

De nuevo, por el criterio de Frobenius 3.3.1, el sistema de ecuaciones (4.3.25) y (4.3.26) tiene solución única, a saber, la función matricial  $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ . Pero, por otra parte, esta misma función es solución del sistema de ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) en el mismo conjunto abierto  $U$ . Por la unicidad de soluciones, se tiene que  $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}$  y  $\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ . Por una parte tenemos que las matrices  $\tilde{\mathbb{P}}$  y  $\tilde{\mathbb{Q}}$  se expresan en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales de la superficie  $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$ . Por otra parte, se tiene que las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  se construyeron usando las funciones  $E, F, G, e, f$  y  $g$ . Más aún, el par de matrices  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$  es construido usando las mismas ecuaciones que nos dan de manera explícita el par  $\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{Q}}$ . Por lo tanto, las funciones  $E, F, G$  y  $e, f, g$  son los coeficientes de la primer y segunda formas fundamentales de la superficie  $\mathbf{x}(U)$ , asociados a la parametrización  $\mathbf{x}$ .

### Resumen.

La prueba del inciso (b) del Teorema 4.2.1 quedó dividida en tres pasos.

En el **Paso 1** se utilizaron las funciones  $E, F, G, e, f$  y  $g$  que cumplen las hipótesis del teorema. Como queremos demostrar que existe una superficie tal que los coeficientes de sus formas fundamentales sean precisamente las funciones que mencionamos arriba. Estas funciones junto con una parametrización de la superficie deben de satisfacer las ecuaciones de Gauss y Weingarten (4.3.6), (4.3.7). Para formar este sistema de ecuaciones, se construyó, a partir de las funciones  $E, F, G, e, f$  y  $g$ , la función matricial  $\mathbb{G}$  (4.3.1) y las funciones matriciales  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  mediante las fórmulas (4.3.2), (4.3.3).

Se supuso adicionalmente que las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  cumplen la condición de compatibilidad (4.3.4). Por el criterio de Frobenius el sistema (4.3.6), (4.3.7) tiene solución local única si y sólo si las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen la ecuación de compatibilidad (4.3.4). Entonces existe una función matricial  $\mathbb{V} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ , que es solución del sistema de ecuaciones parciales (4.3.6), (4.3.7). Dicha función  $\mathbb{V}$  tiene propiedades muy importantes para poder

completar la prueba de este inciso. Estas propiedades fueron probadas en este paso y son:

- (1) El conjunto de vectores  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  (columnas de la matriz  $\mathbb{V}$ ) forman una base para  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) El vector  $\omega_3$  es ortogonal al subespacio (plano) generado por los vectores  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .
- (3) Por último se tiene la siguiente identidad  $(\omega_1)_v = (\omega_2)_u$ . Debido a estas propiedades el conjunto de vectores  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  es un buen candidato para ser un triedro móvil de una superficie regular, es decir, en cada punto de dicha superficie su plano tangente estaría generado por los vectores  $\omega_1, \omega_2$  y como vector normal a dicho plano estaría el vector  $\omega_3$ .

En el **Paso 2** se demuestra que existe una función vectorial suave  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que sus derivadas parciales sean precisamente las funciones  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Analíticamente, esto es equivalente a plantear el sistema de ecuaciones parciales (4.3.22), (4.3.23), el cual, por el criterio de Frobenius, tiene solución si y sólo si los vectores  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen la ecuación de compatibilidad, que en este caso es  $(\omega_1)_v = (\omega_2)_u$ .

Ahora debemos probar que la solución al sistema (4.3.22), (4.3.23) es una parametrización y por lo tanto, el conjunto  $\mathbf{x}(U)$  es una superficie regular. Para ello, usando el Teorema de la Función Implícita (Teorema 1.2.2), demostramos que el conjunto  $\mathbf{x}(U)$  es la gráfica de una función suave con lo cual se sigue inmediatamente que es una superficie regular como lo establece la Proposición (2.2.1).

En el **Paso 3** se demuestra que los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales de la superficie regular  $\mathbf{x}(U)$ , asociados a la parametrización  $\mathbf{x}$ , son las funciones  $E, F, G$  y  $e, f, g$  con las que iniciamos la demostración de este inciso. Por una parte tenemos por los Pasos 1 y 2 que la parametrización  $\mathbf{x}$  satisface el sistema (4.3.6), (4.3.7).

Como  $\mathbf{x}$  es una parametrización de una superficie regular, tenemos que esta función satisface las ecuaciones de Gauss y Weingarten (4.1.1)-(4.1.6) en donde los coeficientes que aparecen en estas ecuaciones son funciones que dependen de los coeficientes de las formas fundamentales. En forma matricial las ecuaciones de Gauss y Weingarten tiene la misma expresión que el sistema (4.3.6), (4.3.7) y por unicidad de la solución tenemos el resultado buscado.

### 4.3.3 Unicidad de la superficie

Para finalizar con la sección y por consecuencia con la demostración del teorema, demostremos la unicidad de la superficie. Primero aclaremos un poco en qué consiste esta unicidad. En el inciso (c) del teorema (4.2.1) se establece la unicidad de la superficie salvo movimientos rígidos. Esto significa que en caso de tener dos superficies regulares tales que en sus respectivas parametrizaciones, los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales de ambas superficies son idénticos, entonces podemos construir un movimiento rígido (una rotación seguida de una traslación), tal que haga coincidir isométricamente una superficie en la otra.

Para ver esto con más detalle iniciemos con la prueba de esta última parte. Si tenemos dos superficies regulares  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  siempre podemos encontrar dos parametrizaciones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  para cada una de las superficies cuyo dominio de definición sea el mismo conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  (Proposición 2.2.3).

Supongamos entonces que tenemos dos parametrizaciones  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  y  $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathcal{N}$ , tales que los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales asociados a estas parametrizaciones son idénticos. En el siguiente lema se muestra cómo se puede construir un movimiento rígido tal que para un punto fijo  $(u_0, v_0) \in U$  “mapea” isométricamente el plano tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  sobre el plano tangente a  $\mathcal{N}$  en  $\mathbf{y}(u_0, v_0)$ .

**Lema 4.3.6** *Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  dos superficies regulares con parametrizaciones  $\mathbf{x}(u, v)$  y  $\mathbf{y}(u, v)$ , respectivamente, definidas sobre el mismo dominio abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos que ambas superficies  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  tienen a las funciones suaves  $E, F, G$ , y  $e, f, g$  como los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales en todo  $U$ . Entonces, para un punto fijo  $(u_0, v_0) \in U$ , existe un movimiento rígido  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbb{A}\mathbf{u} + \mathbf{a}, \quad \mathbb{A} \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.3.27)$$

tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{y}(u_0, v_0)) &= \mathbf{x}(u_0, v_0), \\ \mathcal{F}(\mathbf{y}_u(u_0, v_0)) &= \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\ \mathcal{F}(\mathbf{y}_v(u_0, v_0)) &= \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \\ \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{N}}(u_0, v_0)) &= \mathbf{N}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

**Demostración.** Consideremos las parametrizaciones  $\mathbf{x}(u, v)$  y  $\mathbf{y}(u, v)$  de las superficies  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ . Para un punto  $(u_0, v_0) \in U$  fijo, definamos el vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  por

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}(u_0, v_0) - \mathbf{y}(u_0, v_0).$$

Como los conjuntos de vectores  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$  y  $\{\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v, \tilde{\mathbf{N}}\}$  forman una base para  $\mathbb{R}^3$ , podemos definir una transformación lineal  $\mathbf{T}$  de  $\mathbb{R}^3$  en sí mismo, por medio de estas bases, de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}\mathbf{y}_u(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0),$$

$$\mathbf{T}\mathbf{y}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0),$$

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{N}}(u_0, v_0) = \mathbf{N}(u_0, v_0).$$

Como las normas de los vectores coordenadas y el ángulo entre ellos está determinado por los coeficientes de la primera forma fundamental de cada superficie, se sigue que  $\mathbf{T}$  es una rotación. Por lo tanto, podemos representarla matricialmente por medio de una matriz  $\mathbb{A} \in \text{SO}(3)$ . Por último, definimos  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbb{A}\mathbf{u} + \mathbf{a},$$

la cual satisface las condiciones que estamos buscando. ■

El Lema 4.3.6 es un resultado puntual, el cual establece que para cualesquiera dos superficies que tienen los mismos coeficientes para sus formas fundamentales, podemos tomar un punto fijo en uno de ellas y construir un movimiento rígido que envía isométricamente el plano tangente en dicho punto al plano tangente en el punto correspondiente.

Lo que resta es probar que este resultado se puede extender a una vecindad de dicho punto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer ahora que tenemos dos superficies regulares las cuales contienen un punto en común y que los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales son iguales en una vecindad de este punto. Bajo estas condiciones demostraremos que las dos superficies coinciden en un vecindad.

**Lema 4.3.7** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  dos superficies regulares con parametrizaciones  $\mathbf{x}(u, v)$  y  $\mathbf{y}(u, v)$  respectivamente, definidas sobre el mismo dominio abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos que ambas superficies  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  tienen a las funciones suaves  $E, F, G$ , y  $e, f, g$  como los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales en todo  $U$ . Supongamos además, que existe un punto

$(u_0, v_0) \in U$  en el cual

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u_0, v_0) &= \mathbf{y}(u_0, v_0), \\ \mathbf{x}_u(u_0, v_0) &= \mathbf{y}_u(u_0, v_0), \\ \mathbf{x}_v(u_0, v_0) &= \mathbf{y}_v(u_0, v_0).\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, v),$$

para todo  $(u, v) \in U$

**Demostración.** Consideremos una curva regular  $C : (u(t), v(t))$  definida en el abierto  $U$  que pase por el punto  $(u_0, v_0)$ . La imagen de la curva,  $C$ , en  $\mathbf{x}(u, v)$  satisface las ecuaciones

$$\mathbf{x}' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v, \quad (4.3.28)$$

$$\mathbf{x}'_u = u' \mathbf{x}_{uu} + v' \mathbf{x}_{uv}, \quad (4.3.29)$$

$$\mathbf{x}'_v = u' \mathbf{x}_{vu} + v' \mathbf{x}_{vv}, \quad (4.3.30)$$

En esta parte la notación  $\mathbf{x}'$  indica derivación con respecto al parámetro  $t$ . Si en las ecuaciones (4.3.28) y (4.3.29) reemplazamos a las segundas derivadas de  $\mathbf{x}$  por las primeras derivadas de dicha función usando las ecuaciones (4.1.1)–(4.1.6) que aparecen en Sección 4.1, y después al vector normal  $\mathbf{N}$  lo expresamos como el producto cruz de los vectores coordenados, el resultado es un conjunto de tres ecuaciones vectoriales diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\mathbf{x}' = f_1(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t), \quad (4.3.31)$$

$$\mathbf{x}'_u = f_2(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t), \quad (4.3.32)$$

$$\mathbf{x}'_v = f_3(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t), \quad (4.3.33)$$

para las tres funciones vectoriales  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_u(t)$ ,  $\mathbf{x}_v(t)$ . La función  $f_1$  está determinada únicamente por la curva  $C$ , mientras que las funciones  $f_2$  y  $f_3$  dependen de la curva  $C$  y de las funciones  $E, F, G$ , y  $e, f, g$ .

Análogamente, podemos hacer lo mismo con la imagen de la curva  $C$  bajo la parametrización  $\mathbf{y}(u, v)$  de la superficie  $\mathcal{N}$ . En consecuencia, obtendríamos el mismo sistema de ecuaciones diferenciales (4.3.31), (4.3.32), (4.3.33), salvo que las funciones incógnitas en este caso son los vectores  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{y}_u(t)$ ,  $\mathbf{y}_v(t)$ .



Como estos vectores coinciden con  $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_u(t), \mathbf{x}_v(t)$  en el punto  $(u_0, v_0)$ , tenemos, por el Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (Teorema 1.2.1), que estos vectores son iguales para todo  $t$ . De esta manera, como las imágenes de todas las curvas regulares definidas en  $U$  coinciden en las dos superficies, entonces estas superficies debe de ser iguales en todo  $U$  y con esto tenemos el resultado deseado. ■

## 4.4 Ecuaciones de Gauss-Codazzi en coordenadas especiales

En la Sección 2.5 vimos que para ciertos tipos de coordenadas como las ortogonales y de líneas de curvatura, las formas fundamentales toman expresiones más simples.

Como la ecuación de Gauss-Codazzi es una ecuación para los coeficientes de las formas fundamentales, en esta sección veremos cómo se ven afectadas las ecuaciones de Gauss-Codazzi en este tipo de coordenadas especiales.

### 4.4.1 Coordenadas ortogonales

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular y  $E, F$  y  $G$  los coeficientes de la primera forma fundamental que corresponde a una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ . Supongamos que las coordenadas locales  $(u, v)$  son *ortogonales*, es decir,

$$F = 0, \quad E > 0 \quad \text{y} \quad G > 0.$$

Consideremos el triedro móvil *ortonormal* a  $\mathcal{M}$  que corresponde a la parametrización ortogonal:

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \omega_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, \quad \omega_3 = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Ahora plantemos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

Como la matriz  $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$  es ortogonal, entonces  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  son matrices anti-simétricas. Más aún, sus componente están dadas por:

$$p_{ij} = \langle (\omega_j)_u, \omega_i \rangle, \quad q_{ij} = \langle (\omega_j)_v, \omega_i \rangle.$$

Para más detalles ver la Proposición 1.3.7 en el Capítulo 1.

Ilustremos lo anterior calculando la componente  $p_{12}$ :

$$\begin{aligned}
 \langle (\omega_1)_u, \omega_1 \rangle &= \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
 &= \frac{\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{EG}} \\
 &= \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_u - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle}{\sqrt{EG}} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}E_v}{\sqrt{EG}} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}.
 \end{aligned}$$

Con otros cálculos similares podemos encontrar las demás componentes de las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$ , las cuales toman la forma:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & -\frac{e}{\sqrt{E}} \\ -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & 0 & -\frac{f}{\sqrt{G}} \\ \frac{e}{\sqrt{E}} & \frac{f}{\sqrt{G}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{F}} & -\frac{f}{\sqrt{E}} \\ \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{F}} & 0 & -\frac{g}{\sqrt{G}} \\ \frac{f}{\sqrt{E}} & \frac{g}{\sqrt{G}} & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, para calcular la ecuación de Gauss-Codazzi (4.3.4) de una superficie parametrizada por coordenadas ortogonales, solamente necesitamos calcular las componentes (21), (31) y (32) de la ecuación

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}].$$

Al realizar estos cálculos obtenemos:

$$-\left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v - \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u = \frac{eg - f^2}{\sqrt{EG}}, \quad (4.4.1)$$

$$\left( \frac{e}{\sqrt{E}} \right)_v - \left( \frac{f}{\sqrt{E}} \right)_u = \frac{fG_u}{\sqrt{EG}} + \frac{gE_v}{G}, \quad (4.4.2)$$

$$\left( \frac{f}{\sqrt{G}} \right)_v - \left( \frac{g}{\sqrt{G}} \right)_u = -\frac{eG_u}{E} - \frac{fE_v}{\sqrt{EG}}. \quad (4.4.3)$$

La ecuación (4.4.1) es la ecuación de Gauss y las ecuaciones (4.4.2), (4.4.3) son las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi.

Recordemos que la curvatura Gaussiana en este caso es igual a

$$K = \frac{eg - f^2}{EG},$$

y por lo tanto, tenemos que

$$K = -\frac{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v - \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u}{\sqrt{EG}}.$$

Como ya había sido comentado, la ecuación de Gauss-Codazzi toma una expresión muy simple cuando trabajamos con coordenadas ortogonales. Pero, ¿es siempre posible encontrar una parametrización ortogonal para una superficie en  $\mathbb{R}^3$ ?

Esta pregunta se puede responder usando el Teorema (2.2.5), el cual establece que si tenemos dos campos vectoriales linealmente independientes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  en una superficie, entonces podemos encontrar una parametrización  $\phi(w, z)$  tal que  $\phi_w, \phi_z$  son paralelos a  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ , respectivamente.

Dada una parametrización arbitraria  $\mathbf{x}(u, v)$  de una superficie  $\mathcal{M}$ , podemos aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  para construir un campo vectorial ortogonal suave:

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \tag{4.4.4}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{E}(\mathbf{x}_v - \frac{F}{E}\mathbf{x}_u)}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{4.4.5}$$

Por el teorema (2.2.5), existe una nueva parametrización  $\tilde{\mathbf{x}}(w, z)$  tal que  $\tilde{\mathbf{x}}_w, \tilde{\mathbf{x}}_z$  son paralelos a  $\omega_1, \omega_2$ . En este caso la primera forma fundamental, escrita en estas coordenadas, tiene la forma:

$$\tilde{E}dw^2 + \tilde{G}dz^2.$$

Aquí,  $\tilde{E}, \tilde{G}$  son los coeficientes de la primera forma fundamental asociada a la parametrización  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

A pesar de esto, en general no es posible encontrar una parametrización  $\tilde{\mathbf{x}}(w, z)$  tal que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (4.4.4), (4.4.5) sean los vectores coordenados de  $\tilde{\mathbf{x}}_w$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_z$ . Notemos que si esto fuera posible, entonces la primera forma fundamental de la superficie sería  $I = dw^2 + dz^2$ , lo cual implica que la curvatura Gaussiana debe de ser a cero.

#### 4.4.2 Coordenadas de líneas de curvatura

En esta parte, nuestro propósito es mostrar que existe una parametrización de *coordenadas de líneas de curvatura*, es decir, aquellas coordenadas que son paralelas a las direcciones principales de la superficie. Después estudiaremos la ecuación de Gauss-Codazzi en este tipo de coordenadas.

Supongamos que  $\mathcal{M}$  es una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathcal{M}$  es una parametrización y  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  es un punto *no-umbilical*. Esto significa que el operador  $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}_0}$  tiene 2 valores propios distintos.

Como  $d\mathbf{N}$  es suave, existe un conjunto abierto  $U_0$  de  $U$  que contiene a  $(u_0, v_0)$  tal que  $\mathbf{y}(u, v)$  no tiene puntos umbilicales en todo el subconjunto abierto  $U_0$ .

Haciendo uso del álgebra lineal podemos escribir las expresiones para los dos vectores propios  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  de  $d\mathbf{N}$  en  $U_0$ , y ver que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  son funciones suaves en  $U_0$ . Como  $d\mathbf{N}$  es un operador autoadjunto con dos valores propios distintos,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son perpendiculares. Por el Teorema 2.2.5, podemos encontrar un cambio de coordenadas tal que los vectores coordenados  $\mathbf{y}_u$  y  $\mathbf{y}_v$  sean paralelos a  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ . Esto significa que existe una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ , tal que  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son paralelos a  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , respectivamente.

Como  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ , entonces en estas nuevas coordenadas se tiene que  $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ . Pero como  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son las direcciones principales, el operador  $d\mathbf{N}$  es *diagonalizable* con respecto a la base dada por sus vectores propio. Por lo tanto,  $f = 0$ . En otra palabras, las dos formas fundamentales  $I, II$  son diagonalizables.

**Proposición 4.4.1** *Si  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie y  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}$  es un punto no umbilical, entonces existe una parametrización de líneas de curvatura  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$  cerca de  $\mathbf{p}_0$ , es decir,*

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$I = E du^2 + G dv^2, \quad II = e du^2 + g dv^2. \quad (4.4.6)$$

El siguiente resultado establece la forma que tiene la ecuación de Gauss-Codazzi (4.3.4) para un sistema de coordenadas de líneas de curvatura.

**Teorema 4.4.2** *Supóngase que  $\mathbf{x}(u, v)$  es una parametrización de coordenadas de líneas de curvatura de una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  con sus formas fundamentales I, II dadas por la ecuación (4.4.1) de la Proposición 4.4.1. Entonces las componentes de la ecuación de Gauss-Codazzi (4.2.1) son:*

$$\left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u = -\frac{eg}{\sqrt{EG}}, \quad (4.4.7)$$

$$\left( \frac{e}{\sqrt{E}} \right)_v = \frac{gE_v}{G}, \quad (4.4.8)$$

$$\left( \frac{g}{\sqrt{G}} \right)_v = \frac{eG_v}{E}. \quad (4.4.9)$$

**Demostración.** Formemos la base ortonormal

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \omega_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, \quad \omega_3 = \omega_1 \times \omega_2,$$

definamos las matrices  $(p_{ij}) = (\langle (\omega_i)_u, \omega_j \rangle)$  y  $(q_{ij}) = (\langle (\omega_i)_v, \omega_j \rangle)$  y formemos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & -\frac{e}{\sqrt{E}} \\ -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & 0 & 0 \\ \frac{e}{\sqrt{E}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.10)$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} & 0 \\ \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} & 0 & -\frac{g}{\sqrt{G}} \\ 0 & \frac{g}{\sqrt{G}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4.11)$$

Al aplicar la ecuación de Gauss-Codazzi a las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  (4.3.4),

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}],$$

y como la matrices son antisimétricas sólo tenemos que calcular las componentes (21), (31) y (32) de la ecuación y se tiene el resultado del teorema. ■

Notemos que aquí, la ecuación (4.4.7) es la ecuación del Teorema de Gauss y las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi son precisamente (4.4.8) y (4.4.9)

## 4.5 Superficies con curvatura Gaussiana constante negativa

En esta última parte vamos a probar que para una superficie  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura Gaussiana constante y negativa se puede encontrar una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , que sea de líneas de curvatura y que el ángulo  $\theta$  entre líneas asintóticas satisfaga la *ecuación de sine-Gordon (ESG)*:

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = \text{sen } \theta. \quad (4.5.1)$$

La ecuación sine-Gordon tiene diversas aplicaciones en un amplio rango de problemas de la física y la matemática. Las soluciones de esta ecuación (4.5.1) son llamadas *solitones*.

Para ver varias de las aplicaciones de la ecuación de sine-Gordon se puede consultar [20].

La ecuación de Gauss-Codazzi (4.2.1) asociada a una parametrización de líneas de curvatura se reduce a una sola ecuación, que en este caso, es de tipo sine-Gordon. En efecto, se prueba que existe una correspondencia *uno a uno entre las soluciones locales*  $\theta$  (ESG) con  $\text{Im}(\theta) \subset (0, \pi)$  y las superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$ , salvo movimientos rígidos.

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$ . Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las dos curvaturas principales. Como  $K = \lambda_1 \lambda_2 = -1$ , entonces  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , es decir, la superficie no tiene puntos umbilicales.

Por lo tanto, podemos encontrar una parametrización de líneas de curvatura  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $\mathcal{M}$ . Supongamos que las formas fundamentales son  $I = E du^2 + G dv^2$ ,  $II = e du^2 + f dv^2$ . Entonces las curvaturas principales son  $\lambda_1 = \frac{e}{E}$ ,  $\lambda_2 = \frac{g}{G}$ .

Como  $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ , entonces podemos suponer que existe una función suave  $\varphi$  tal que

$$\lambda_1 = \frac{e}{E} = \tan \varphi, \quad \lambda_2 = \frac{g}{G} = -\cot \varphi,$$

es decir,

$$\frac{e}{\sqrt{E}} = \sqrt{E} \tan \varphi, \quad \frac{g}{\sqrt{G}} = -\sqrt{G} \cot \varphi. \quad (4.5.2)$$

Como  $E$ ,  $G$ ,  $e$ ,  $g$ , satisfacen las ecuaciones de Gauss-Codazzi, al sustituir (4.5.1) en (4.4.8) y (4.4.9) obtenemos:

$$(\sqrt{E} \tan \varphi)_v = -\cot \varphi \left( \sqrt{E} \right)_v, \quad (4.5.3)$$

$$(-\sqrt{G} \cot \varphi)_u = \tan \varphi \left( \sqrt{G} \right)_u. \quad (4.5.4)$$

Desarrollando las parciales en la ecuación (4.5.3) se obtiene

$$\left( \sqrt{E} \right)_v \tan \varphi + \sqrt{E} (\sec^2 \varphi) \varphi_v = -\cot \varphi \left( \sqrt{E} \right)_v,$$

lo cual implica que

$$(\tan \varphi + \cot \varphi) \left( \sqrt{E} \right)_v = -\sqrt{E} (\sec^2 \varphi) \varphi_v.$$

De esto se obtiene

$$\frac{\left( \sqrt{E} \right)_v}{\sqrt{E}} = -\frac{\sen \varphi}{\cos \varphi} \varphi_v.$$

Haciendo algunos cálculos similares con la ecuación (4.5.4) tenemos:

$$\frac{\left( \sqrt{G} \right)_u}{\sqrt{G}} = \frac{\cos \varphi}{\sen \varphi} \varphi_u.$$

En otras palabras, se tiene

$$\left( \log \sqrt{E} \right)_v = (\log \cos \varphi)_v, \quad \left( \log \sqrt{G} \right)_u = (\log \sen \varphi)_u.$$

Por lo tanto, existen funciones suaves  $c_1(u)$  y  $c_2(v)$  tal que

$$\log \sqrt{E} = \log \cos \varphi + c_1(u), \quad \log \sqrt{G} = \log \sen \varphi + c_2(v),$$

es decir,

$$\sqrt{E} = e^{c_1(u)} \cos \varphi, \quad \sqrt{G} = e^{c_2(v)} \sen \varphi$$

Como  $I$  es positiva definida,  $\sqrt{E}$ ,  $\sqrt{G}$  nunca se anulan. Luego, podemos asumir que tanto  $\sen \varphi$  como  $\cos \varphi$  son positivos, y en consecuencia,  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Ahora tomando un cambio de coordenadas  $(w(u), z(v))$  tal que

$$\frac{dw}{du} = e^{c_1(u)}, \quad \frac{dz}{dv} = e^{c_2(v)},$$

se tiene, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} = \mathbf{x}_u e^{-c_1(u)}.$$

De esta manera,  $\|\mathbf{x}_w\| = \cos \varphi$ .

Mediante un cálculo similar podemos obtener  $\|\mathbf{x}_z\| = \sen \varphi$ . Como  $w$  es una función que sólo depende de  $u$  y a su vez  $z$  es una función sólo de  $v$ , entonces  $\mathbf{x}_w$  es paralelo a  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_z$  es paralelo a  $\mathbf{x}_v$ . Entonces la parametrización  $\mathbf{x}(w, z)$  es también una sistema de coordenadas de líneas de curvatura y los coeficientes de la segunda forma fundamental  $II$  en  $(w, z)$  son

$$e = \tan \varphi \cos^2 \varphi = \sen \varphi \cos \varphi, \quad g = -\cot \varphi \sen^2 \varphi = -\sen \varphi \cos \varphi.$$

Hasta este punto hemos probado una parte de la siguiente proposición.

**Proposición 4.5.1** *Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$ . Entonces existe una parametrización local de coordenadas de líneas de curvatura  $(w, z)$  tal que las formas fundamentales en estas coordenadas son:*

$$I = \cos^2 \varphi dw^2 + \sen^2 \varphi dz^2, \quad II = \sen \varphi \cos \varphi (dw^2 - dz^2), \quad (4.5.5)$$

donde  $2\varphi$  es el ángulo entre dos direcciones asintóticas. Más aún, la ecuación de Gauss-Codazzi es equivalente a la ecuación sine-Gordon

$$\varphi_{ww} - \varphi_{zz} = \sen \varphi \cos \varphi. \quad (4.5.6)$$

**Demostración.** Anteriormente se probó que se cumple la ecuación (4.5.5). Para terminar la prueba, calculemos la ecuación de Gauss-Codazzi (4.4.8), (4.4.9) que debe satisfacer la parametrización de líneas de curvatura. Para esto formemos una base ortonormal a partir de la parametrización  $\mathbf{x}(w, z)$ .

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_w}{\cos \varphi}, \quad \omega_2 = \frac{\mathbf{x}_z}{\sen \varphi}, \quad \omega_3 = \frac{\mathbf{x}_w \times \mathbf{x}_z}{\|\mathbf{x}_w \times \mathbf{x}_z\|}.$$

Como ya es sabido, estos vectores satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_w = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_z = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

Aquí, las matrices  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  están dadas por las fórmulas (4.4.10) y (4.4.11) que se usan cuando  $(w, z)$  son coordenadas de líneas de curvatura. Como  $\sqrt{E} = \cos \varphi$ ,  $\sqrt{G} = \sen \varphi$ , y  $e = -g = \sen \varphi \cos \varphi$ , tenemos:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & -\sen \varphi \\ \varphi_z & 0 & 0 \\ \sen \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_w & 0 \\ \varphi_w & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$



Por el inciso (a) del Teorema 4.2.1,  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  satisfacen la ecuación de Gauss-Codazzi

$$\mathbb{P}_z - \mathbb{Q}_w = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}].$$

De esta última ecuación sólo debemos calcular las componentes (13) y (12). Notemos que al calcular las componente (13), (23) de Gauss-Codazzi obtenemos una identidad. Por último, al calcular la ecuación del Teorema de Gauss (dada por la componente (12) se obtiene

$$\varphi_{ww} - \varphi_{zz} = \text{sen } \varphi \cos \varphi.$$

Como

$$II = \text{sen } \varphi \cos \varphi (dw^2 - dz^2),$$

$\mathbf{x}_w \pm \mathbf{x}_z$  son direcciones asintóticas, usando  $I$  vemos que  $\mathbf{x}_w \pm \mathbf{x}_z$  son vectores unitarios. Al calcular el siguiente producto interior tenemos

$$\langle \mathbf{x}_w + \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_w - \mathbf{x}_z \rangle = \cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi = \cos^2 \varphi.$$

De esto se sigue que el ángulo entre las direcciones asintóticas  $\mathbf{x}_w + \mathbf{x}_z$  y  $\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_z$  es  $2\varphi$ . ■

Una consecuencia de la demostración de la Proposición 4.5.1 es el siguiente corolario.

**Corolario 4.5.2** Sean  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  funciones matriciales definidas como en (4.5.7). Entonces el sistema

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_w = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_z = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

tiene solución si y solo si el ángulo  $\varphi$  entre dos curvas asintóticas satisface ESG (4.5.1).

Como consecuencia del Teorema Fundamental de Superficies 4.2.1 y el Corolario 4.5.2 tenemos que el recíproco de la Proposición 4.5.1 es cierto.

**Proposición 4.5.3** Sean  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  una solución de la ESG (4.5.6),  $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $(u_0, v_0) \in U$ , y  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  una base ortonormal. Sean  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} : U \rightarrow \text{SO}(3)$  funciones matriciales suaves definidas como en (4.5.7). Entonces existe un subconjunto abierto  $U_0$  de  $(u_0, v_0)$  en  $U$  y una única función matricial

$$[\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2, \omega_3] : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times O(3)$$

que es solución para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_w = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_z = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

$$\mathbf{x}_u = \cos \varphi \omega_1,$$

$$\mathbf{x}_v = \sen \varphi \omega_2,$$

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_0, \quad \omega_1(u_0, v_0) = \mathbf{e}_1, \quad \omega_2(u_0, v_0) = \mathbf{e}_2.$$

Más aún, si  $\sen \varphi \cos \varphi > 0$  en  $U_0$ , entonces  $\mathbf{x}(U_0)$  es una superficie regular con  $K = -1$  cuyas formas fundamentales asociadas a dicha superficie son de la forma (4.5.5).

En la última parte de la Proposición 4.5.3 se establece una correspondencia *uno a uno* entre las soluciones  $\varphi$  de la ESG (4.5.1) y una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$ , salvo movimientos rígidos.

Resumiendo, si tenemos una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  de líneas de curvatura, como en la Proposición 4.5.1, para una superficie regular con  $K = -1$  y  $\varphi$  es la correspondiente solución de ESG (4.5.1). Las coordenadas  $(u, v)$  son el espacio-tiempo.

Se ha probado ya que  $\mathbf{x}_u \pm \mathbf{x}_v$  son direcciones asintóticas. Si hacemos el cambio de coordenadas  $u = s + t$ ,  $v = s - t$ , entonces  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v$ ,  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$ .

Las formas fundamentales escritas en las coordenadas  $(s, t)$  son:

$$I = ds^2 + 2 \cos 2\varphi ds dt + dt^2,$$

$$II = \sen 2\varphi ds dt,$$

y la ESG (4.5.6) es

$$2\varphi_{uv} = \sen 2\varphi.$$

Un sistema de coordenadas locales  $\mathbf{x}(u, v)$  para una superficie en  $\mathbb{R}^3$  es llamado un *sistema de coordenadas asintóticas* si  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  son paralelos a las direcciones asintóticas, es decir,  $e = g = 0$ .

Nótese que las coordenadas  $(s, t)$  construidas sobre una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con  $K = -1$  es un sistema de coordenadas asintóticas y  $s, t$  son parámetros de longitud de arco. Este sistema de coordenadas es llamado el *sistema de coordenadas Tchebyshef* para superficies en  $\mathbb{R}^3$ , con curvatura  $K = -1$ .

# Apéndice

En la primera parte de este apéndice se demuestran las propiedades de los operadores lineales que se utilizan en la sección 4.1. En la segunda parte se estudia el concepto de operadores lineales autoadjunto y formas cuadráticas asociadas a formas bilineales.

## A.1 Operadores

Consideremos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interior usual.

Sea  $GL(n)$  el conjunto de las matrices no singulares de  $n \times n$ .

Para cada matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in GL(3),$$

se define el operador lineal  $\mathcal{L} : GL(3) \rightarrow GL(9)$  por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{32}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.1})$$

Aquí  $\mathbb{I}_3$  denota la matriz identidad de  $3 \times 3$ .

**Proposición A.1.1** *El operador  $\mathcal{L}$  (A.1.1) posee las siguientes propiedades:*

- (i)  $\mathcal{L}$  es inyectivo en su imagen.
- (ii)  $\mathcal{L}(\mathbf{AB}) = \mathcal{L}(\mathbf{A})\mathcal{L}(\mathbf{B})$ .

$$(iii) \mathcal{L}([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = [\mathcal{L}(\mathbf{A}), \mathcal{L}(\mathbf{B})]$$

$$(iv) \mathcal{L}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathcal{L}(\mathbf{A})^{-1}.$$

$$(v) \mathcal{L}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{L}(\mathbf{A})^T$$

(vi) Si  $\mathbf{A}$  es una función matricial suave, en las variables  $u$  y  $v$ , entonces:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}_u) = \mathcal{L}(\mathbf{A})_u \quad y \quad \mathcal{L}(\mathbf{A}_v) = \mathcal{L}(\mathbf{A})_v.$$

### Demostración.

(i) Es suficiente probar que el núcleo de  $\mathcal{L}$  es la matriz  $\mathbf{0}$  de  $3 \times 3$ . Supongamos que la matriz  $\mathbf{A}$  está en el núcleo de  $\mathcal{L}$ . Entonces

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \text{ en } GL(9),$$

por otra parte,

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{32}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Lo cual implica que  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , y por tanto el operador  $\mathcal{L}$  es inyectivo en su imagen.

(ii) Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] \in GL(3).$$

Aquí, por conveniencia, los  $\mathbf{a}_i$  son vectores renglón y los  $\mathbf{b}_j$  son vectores columna en  $\mathbb{R}^3$ . De esta manera,  $\mathbf{AB} = [\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \rangle]$ . Así

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{AB}) &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbb{I}_3 \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbb{I}_3 \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{A})\mathcal{L}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

(iii) Recordemos que  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= \mathcal{L}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) \\ \mathcal{L}([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= \mathcal{L}(\mathbf{AB}) - \mathcal{L}(\mathbf{BA}), \end{aligned}$$

por (ii) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= \mathcal{L}(\mathbf{A})\mathcal{L}(\mathbf{B}) - \mathcal{L}(\mathbf{B})\mathcal{L}(\mathbf{A}) \\ &= [\mathcal{L}(\mathbf{A}), \mathcal{L}(\mathbf{B})].\end{aligned}$$

(iv) Como  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ , si aplicamos el operador  $\mathcal{L}$  a esta igualdad, tenemos:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A})\mathcal{L}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbb{I}.$$

Si multiplicamos por  $\mathcal{L}(\mathbf{A})^{-1}$  en ambos lados:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{A})^{-1}\mathcal{L}(\mathbf{A})\mathcal{L}(\mathbf{A}^{-1}) &= \mathcal{L}(\mathbf{A})^{-1}\mathbb{I} \\ \mathcal{L}(\mathbf{A}^{-1}) &= \mathcal{L}(\mathbf{A})^{-1}.\end{aligned}$$

(v) Probemos que  $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}^T)^T$ .

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{31}\mathbb{I}_3 \\ a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{13}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = \mathcal{L}(\mathbf{A}).$$

(vi) Sin pérdida de generalidad, es suficiente probar que se cumple esta propiedad para una función matricial suave  $\mathbf{B} : \mathbb{R} \rightarrow GL(3)$ , dada por  $\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)]$ , recuérdese que  $\mathbf{B}_t = \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}b_{ij}(t)\right]$ . Primero notemos que  $\mathcal{L}(\mathbf{B}(t))$  es una función matricial suave en  $GL(9)$  y por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{B}_t) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}b_{11}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{12}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{13}\mathbb{I}_3 \\ \frac{d}{dt}b_{21}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{22}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{23}\mathbb{I}_3 \\ \frac{d}{dt}b_{31}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{23}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{B})_t.\end{aligned}$$

■

El siguiente operador tiene una propiedad muy interesante, la cual nos permite pasar de un sistema lineal a un sistema matricial.

Sea  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_9)^T \in \mathbb{R}^9$ , un vector columna. Se define el operador lineal  $L : \mathbb{R}^9 \rightarrow \text{GL}(3)$  por

$$L(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

**Proposición A.1.2** *El operador  $L$  (A.1.2) posee las siguientes propiedades:*

- (i)  $L$  es inyectivo en su imagen.
- (ii) Si  $\mathbf{X}(u,v)$  es una función vectorial suave en  $\mathbb{R}^9$ , entonces

$$L(\mathbf{X}_u) = L(\mathbf{X})_u \quad y \quad L(\mathbf{X}_v) = L(\mathbf{X})_v.$$

- (iii) Para cada  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^9$ , que satisfacen la ecuación vectorial:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{A}\mathbf{X}$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mathbb{I}_3 & a_2 \mathbb{I}_3 & a_3 \mathbb{I}_3 \\ a_4 \mathbb{I}_3 & a_5 \mathbb{I}_3 & a_6 \mathbb{I}_3 \\ a_7 \mathbb{I}_3 & a_8 \mathbb{I}_3 & a_9 \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación se transforma bajo el operador  $L$  en la ecuación matricial:

$$L(\mathbf{Y}) = L(\mathbf{X})\mathbb{A},$$

aquí

$$\mathbb{A} = [l^{-1}(\mathcal{A})]^T,$$

donde  $\mathcal{L}^{-1}$  es la inversa del operador  $\mathcal{L}$  (A.1.1).

**Demostración.**

- (i) Supongamos que el vector  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_9)^T$  está en el núcleo de  $L$ , es decir  $L(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  en  $\text{GL}(9)$ . Por otra parte

$$L(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix},$$

esto implica que  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  en  $\mathbb{R}^9$  y por lo tanto  $L$  es inyectivo en su imagen.

- (ii) Es suficiente probar  $L(\mathbf{X}_u) = L(\mathbf{X})_u$ , la otra parte se prueba de manera similar. Otra vez aquí  $\mathbf{X}_u = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X}$ , entonces

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}_u) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x_1 & \frac{\partial}{\partial u} x_4 & \frac{\partial}{\partial u} x_7 \\ \frac{\partial}{\partial u} x_2 & \frac{\partial}{\partial u} x_5 & \frac{\partial}{\partial u} x_8 \\ \frac{\partial}{\partial u} x_3 & \frac{\partial}{\partial u} x_6 & \frac{\partial}{\partial u} x_9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{d}{du} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} \\ &= L(\mathbf{X})_u. \end{aligned}$$

- (iii) Supongamos que  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^9$ , satisfacen la ecuación matricial

$$\mathbf{Y} = \mathcal{A}\mathbf{X}$$

con

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mathbb{I}_3 & a_4 \mathbb{I}_3 & a_7 \mathbb{I}_3 \\ a_2 \mathbb{I}_3 & a_5 \mathbb{I}_3 & a_8 \mathbb{I}_3 \\ a_3 \mathbb{I}_3 & a_6 \mathbb{I}_3 & a_9 \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Definamos los vectores renglón  $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_4, x_7)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (x_2, x_5, x_8)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (x_3, x_6, x_9)$   $\mathbf{a}_1 = (a_1, a_4, a_7)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_2, a_5, a_8)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a_3, a_6, a_9)$ . Entonces

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_3 \rangle \end{pmatrix},$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{Y}) &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_3 \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}^T \\
 &= L(\mathbf{X})\mathbb{A}.
 \end{aligned}$$

Aquí

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}^T \\
 &= [\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{A})]^T.
 \end{aligned}$$

■

## A.2 Operadores autoadjuntos y formas cuadráticas

Se dice que un operador lineal  $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  definido en un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  con producto interior, es *autoadjunto* si  $\langle \mathbf{A}v, w \rangle = \langle v, \mathbf{A}w \rangle$  para cada par de vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ . A cada operador lineal autoadjunto es posible asociarle una forma *bilineal y simétrica*  $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$B(v, w) = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad (\text{A.2.1})$$

y a su vez, mediante la forma bilineal  $B$  es posible definir una forma cuadrática  $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (\text{A.2.2})$$

El lector interesado en revisar de forma un poco más profunda el concepto de operadores autoadjuntos y formas cuadráticas puede consultar [1, 6].



**Proposición A.2.1** *Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial real de dimensión dos. Supongamos que  $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  es un operador lineal autoadjunto, entonces existen  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  y una base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de  $\mathcal{V}$  tales que*

1.

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2,$$

*es decir,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  son los vectores propios de  $\mathbf{A}$ .*

2. *Expresada en la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  la matriz del operador  $\mathbf{A}$  es diagonal, en cuya diagonal se encuentran a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .*
3. *Los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $\mathbf{A}$ , con  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , son los valores máximo y el mínimo de la forma cuadrática asociada a  $\mathbf{A}$ .*



# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor, Analysis, and Applications*, Springer, New York, 1988.
- [2] V. I. Arnol'd. *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer.
- [3] P.O. Boonet, *Mémoire sur la théorie des surfaces*, J. Ec. Polytechnique, Paris, 1848.
- [4] W. M. Boothby, *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1986.
- [5] M. L. Curtis, *Matrix Groups*, Second Edition Springer, 1984.
- [6] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [7] M. P. do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer, New York, 1994.
- [8] J. J. Duistermaat. J. A. C. Kolk, *Lie Groups*, Springer, 2000.
- [9] R. Flores E., Yu. Vorobjev, *Liner Hamiltonian Systems and symplectic Geometry*, Talleres Gráficos de la Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, 1998.
- [10] R. Flores E., *Reducibility of zero curvature equations*.
- [11] J. E. Humphreys, *Introdcution to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1972.
- [12] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, secon edition, CRC Press, 1999.

- 
- [13] C. Imaz, Zoenek Vorel, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Editorial Limusa, México D.F. 1975.
- [14] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems* Second edition Springer, 1996.
- [15] C. C. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, New York, 2002.
- [16] E. O. Roxin, *Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control*, Editorial universitaria de Buenos aires, Argentina, 1968.
- [17] M. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverté, Barcelona, 1987.
- [18] J. J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley, New York,
- [19] D. J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar, Madrid.
- [20] C. R., W.K, *Schief. Bäcklund and Darboux Transformations*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2002
- [21] C. L. Terng, *Lecture Notes on Curves and Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Differential Geometry Computer Projects for NCTS Workshop, 2003