Estudios Analíticos de Sistemas de Sturm–Liouville

Misahel López Dennis

Contenido

Prefacio

El objetivo de la presente tesis, como su nombre lo dice, es realizar un análisis de sistemas de Sturm–Liouville, el análisis que se hace es acerca del comportamiento de los eigenvalores y eigenfunciones de sistemas de Sturm–Liouville Regulares. Poco a poco iremos descubriendo muchas propiedades acerca de este tipo de ecuaciones. En el desarrollo de la tesis veremos un poco acerca de cómo surgió la teoría de Sturm–Liouville, cómo sus creadores fueron descubriendo por separado esta interesante teoría. Luego veremos una sección de álgebra computacional, que nos será de mucha ayuda al momento de resolver los problemas mostrados en el transcurso de la tesis. También veremos una introducción a los sistemas de Sturm–Liouville mediante algunas definiciones y teoremas los cuales nos serán de gran ayuda al resolver y analizar nuestros problemas. Después de ver un poco de definiciones y teoremas, veremos la solución de algunos sistemas de Sturm–Liouville, problemas importantes de la física-matemática y además daremos algunos ejemplos a considerar. Para cerrar, veremos el teorema más importante de la teoría de Sturm–Liouville, el cual nos demuestra las propiedades más sobresalientes de este tipo de sistemas, el Teorema de Sturm–Liouville.

En el Capítulo 1 veremos una leve introducción de cómo surgió la teoría de Sturm–Liouville. También veremos una pequeña biografía de cada uno de los personajes que alcanzaron a desarrollar esta importante teoría en la rama de las ecuaciones diferenciales. Luego daremos a conocer una sección de álgebra computacional, donde se muestran algunas funciones básicas pero muy importantes al momento de resolver nuestros problemas mostrados. Cabe señalar que las funciones que se dan a conocer son del sistema *Maple*, el cual ha sido de mucha importancia y ayuda para realizar los cálculos difíciles y engorrosos de algunos problemas. El apoyo que tomamos de *Maple* es también para la realización de algunas gráficas que nos ayudarán en la visualización del comportamiento de las soluciones de algunos problemas.

El Capítulo 2, en general, pone de manifiesto una gran cantidad de definiciones y teoremas que nos serán de mucha ayuda para resolver nuestros problemas de Sturm–Liouvlle. También mostramos algunas de las características de los sistemas de Sturm–Liouville, cómo identificar cuando son regulares, singulares, periódicos, entre otros. La mayoría de estas definiciones y teoremas están puestos con el propósito de dar a conocer al lector algunas de las propiedades más importantes de los sistemas de Sturm–Liouville, tanto de los problemas regulares como de los singulares.

En el Capítulo 3 veremos la solución de problemas de Sturm–Liouville, enunciaremos y demostraremos algunas de las propiedades más importantes de los sistemas de Sturm–Liouville. Después daremos a conocer algunos problemas de la física-matemática, tales como son la solución del problema de Sturm–Liouville asociado a la ecuación de onda y la solución del problema de Sturm–Liouville asociado a la ecuación de difusión. Luego, desarrollaremos algunos problemas con el fin de ver cúal es el comportamiento de sus eigenvalores y eigenfunciones y culminaremos con algunos ejemplos importantes de sistemas de Sturm–Liouville.

El Capítulo 4, como veremos, muestra la solución de algunos problemas que se desarrollaron tratando de mostrar las propiedades importantes enunciadas durante el transcurso de la tesis. Sin embargo la parte central del Capítulo 4 trata del teorema de Sturm–Liouville, el cual nos muestra las propiedades más sobresalientes de los sistemas de Sturm–Liouville para el caso regular, con lo que concluiremos nuestro trabajo de tesis.

Misahel López Dennis,
Diciembre 2006

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción Histórica

La teoría presentada en este trabajo fue creada en una serie de artículos entre 1829 y 1840 por J.C.F. Sturm y J. Liouville. Su trabajo después conocido como *Teoría de Sturm–Liouville*, creó un completo y nuevo tema en el análisis matemático. En particular, esta teoría permitió la generalización de la idea de series trigonométricas y se extendió el uso de las funciones de Green a un amplio rango de las ecuaciónes diferenciales. La teoría trata con la ecuación diferencial general lineal de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0, \tag{1.1}$$

donde la variable real x es restringida a un intervalo cerrado, $[a, b]$ el cual puede ser la recta real completa o solo los reales no negativos. Las funciones reales *p(x)* , *q(x)* y *w(x)* son conocidas y satisfacen las condiciones que serán descritas más adelante. Además de las ecuaciones diferenciales, las condiciones a la frontera serán especificadas. Sabiendo que las soluciones existen solamente para valores particulares de la constante λ, los cuales son llamados *eigenvalores* y la solución $y(x)$ es llamada la *eigenfunción* para el eigenvalor λ. En esta sección no especificaremos ninguna condición a la frontera, porque diferentes tipos de problemas producen diferentes tipos de condiciones. La ecuación (1.1) junto con cualquier condición a la frontera, es conocido como un *Sistema de Sturm–Liouville* (ó problema de Sturm–Liouville).

Los problemas de Sturm–Liouville son importantes particularmente porque surgen en diversas circunstancias y particularmente porque las propiedades de los eigenvalores y eigenfunciones son bien comprendidas. Por ejemplo, encontramos que existe un conjunto de eigenvalores λ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ y que el conjunto de eigenfunciones $y_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ es completo y luego esas funciones pueden ser utilizadas para formar series generalizadas de Fourier.

Los resultados de Sturm y Liouville son impresionantes cuando los vemos en el contexto de las matemáticas al início del siglo XIX. Antes de 1820 los trabajos en ecuaciónes diferenciales estaban enfocados en encontrar soluciones en términos de fórmulas finitas, pero para la ecuación general (1.1) Sturm no podría encontrar una expresión para la solución pero obtuvo información acerca de las propiedades de la solución de la ecuación misma. Esta información fue la primer teoría cualitativa de las ecuaciónes diferenciales y anticipado al trabajo de Poincaré en ecuaciónes diferenciales no lineales desarrollado a finales del siglo XIX.

Ahora el trabajo de Sturm y Liouville está íntimamente interconectado. Sin embargo, durante su larga amistad discutieron sus trabajos antes de publicarlos. Esta teoría surgió de una serie de artículos publicados separadamente por cada autor durante el período de 1829 a 1840, más detalles acerca de esta introducción histórica pueden ser encontrados en Lutzen (1990), Capítulo 10.

Acontinuación veremos un poco de la biografía de los dos matemáticos más importantes a tratar en la presente tesis, los matemáticos que dieron origen a la Teoría de Sturm–Liouville: Joseph Liouville y Charles François Sturm.

1.1.1 Joseph Liouville

Marzo de 1809 - septiembre de 1882.

Joseph Liouville fue al Collége St. Louis en París en donde él estudió matemáticas en los niveles más altos. Él se inscribió en el Ecole Polytechnique en 1825, y atendió a cursos impartidos por Ampére y Arago. Aunque al parecer Liouville no atendió ningúno de los cursos de Cauchy, está claro que Cauchy debe haber tenido una influencia fuerte en él. Liouville se graduó en 1827, con de Prony y Poisson entre sus examinadores.

Charles François Sturm y Joseph Liouville

Después de graduarse, Liouville fue fijado en una carrera académica. Él había escrito y había sometido ya un buen número de artículos en la academia en electrodinámica, ecuaciones diferenciales parciales y la teoría de calor. En 1831, Liouville fue designado a un número de escuelas privadas y al Ecole Centrale. Es notable que durante este período de su vida Liouville haya enseado entre 35 y 40 horas a la semana en las diversas instituciones.

En 1836, Liouville fundó un diario *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* Este diario hizo mucho para las matemáticas en Francia a través del siglo XIX. En 1838, Liouville fue designado profesor del análisis y de la mecánica en el Ecole Polytechnique. El año siguiente lo eligieron a la sección de la astronomía de la *Académie de las Sciences.* En 1840, después de una vacante resultando de la muerte de Poisson, Liouville fue elegido al *Bureau des Longitudes.* Liouville había ganado ya una reputación internacional.

Antes de 1840, Liouville había perseguido algunas trayectorias claras para asegurar su propia carrera. Durante los veinte años siguientes, la promoción y el desarrollo de las ideas de otros matemáticos se convirtieron en la edición central.

Otro aspecto de la vida de Liouville era su implicación en política. En 1848, lo eligieron a la asamblea que constituía, pero lo no reeligieron el año siguiente. La derrota política cambió la personalidad de Liouville. Él se hizo amargo, incluso hacia sus viejos amigos. Sus notas matemáticas fueron interrumpidas a menudo con cotizaciones de poetas y de filósofos.

Aunque la salida matemática de Liouville había sido reducida grandemente mientras que él estuvo implicado con política, tomó otra vez en el 1850's a pesar de problemas de salud. De hecho 1856 y 1857 fueron dos de los años más productivos de Liouville. Él continuó publicando, pero sobre todo éstos eran resultados que él había descubierto durante su año altamente productivo de 1856.

El trabajo matemático de Liouville era extremadamente vasto, de la física-matemática, la astronomía a las matemáticas puras. Uno de los primeros asuntos que él estudió, que se convirtieron de su trabajo temprano sobre electromagnetismo, era un nuevo asunto, ahora llamado el *cálculo fraccional*. Él definió a operadores diferenciales del orden arbitrario. Liouville investigó los criterios para los integrales de funciones algebraicas. Estableciendo ésto en cuatro artículos, él se enfrasco en investigar el problema general de la integración de funciones algebraicas en términos finitos. Su trabajo era al principio independiente del trabajo de Abel, pero él aprendió el trabajo de Abel e incluyó más adelante varias ideas en su propio trabajo.

Otra parte importante que Liouville se recuerda para hoy es la de números trascendentes. Él construyó una clase infinita de números trascendentes usando fracciones continuas. En 1851, publicó resultados en los números trascendentes que quitaban la dependencia de fracciones continuas. Particularmente él dió un ejemplo de un número trascendente, el número ahora nombrado el número de Liouville $0.110001000000000000000001000 0\ldots$, donde hay un 1 en el lugar $n!$ y 0 en otra parte.

Su trabajo sobre problemas de valor a la frontera en ecuaciones diferenciales se recuerda hoy como la teoría de Sturm–Liouville. Esta teoría, que tiene gran importancia en la física-matemática, fue desarrollada entre 1829 y 1837.

Sturm y Liouville trabajaron con ecuaciones diferenciales de segundo orden y examinaron las características de sus valores propios, el comportamiento de las funciones propias y la extensión de la serie de funciones arbitrarias en términos de estas funciones propias, llamadas eigenfunciones.

1.1.2 Jacques Charles François Sturm

Ginebra, 29 de septiembre de 1803 - París, 18 de diciembre de 1855.

El padre de Charles François Sturm fue Jean-Henri Sturm, cuya familia se asentó en Ginebra, procedente de Estrasburgo, unos cincuenta años antes del nacimiento de Charles-François. Jean-Henri fue un profesor de aritmética, casado con Jeanne-Louisse-Henriette Gremay. Los padres de Charles-François consiguieron ofrecerle una buena educación y en la escuela se reveló como una gran promesa, particularmente en poesías griega y latina, para las que tenía un remarcable talento.

Inició sus estudios en 1821 en la Academia de Ginebra, fundada en 1559 por Calvino y hoy transformada en la Universidad de Ginebra, junto a Simon Lhuilier, quien inmediatamente reconoció el genio matemático en su discípulo. Aún así, jubilado Lhuilier, fue su sucesor, Jean-Jacques Schaub, quien inspiró a Sturm en su aprendizaje y le apoyó, también financieramente, durante sus estudios.

Uno de los mejores amigos de Sturm en la Academia fue Daniel Colladon, quien también le influiría en los inicios de su carrera científica. Tras terminar su aprendizaje, Sturm entró a trabajar como tutor del hijo pequeño de la famosa escritora M. de Staël en el castillo de Coppet, cerca de Ginebra. Comenzó a ejercer su nueva función en mayo de 1823 y la encontró muy satisfactoria pues le dejaba mucho tiempo libre para sus propias investigaciones, lo que le permitió comenzar a escribir artículos sobre geometría en *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* de Joseph Gergonne, una de las primeras revistas especializadas en esa materia.

Fue claramente una gran oportunidad para Sturm. Aunque regresó al castillo de Coppet en mayo de 1824, seis meses después lo abandonó para dedicarse enteramente a la investigación científica. *La Académie des Sciences* parisina convocaba un prestigioso premio de investigación y Sturm, junto a Colledon, decidió realizar diversos experimentos en el lago de Ginebra con la intención de participar en la competición. Los experimentos no obtuvieron los resultados deseados y Colladon se hirió gravemente en una mano mientras los realizaba.

En diciembre de 1825 Sturm y Colledon fueron a París para participar en cursos de matemáticas y física y también para conseguir nuevos instrumentos con los que proseguir con sus experimentos. Los contactos que realizó Sturm en su anterior visita le fueron provechosos ya que comenzó a trabajar en casa de François Arago como tutor de uno de sus hijos. También consiguió utilizar el laboratorio de André-Marie Ampére. En sus cursos, asistió a conferencias del propio Ampére, de Gay-Lussac, de Augustin-Louis Cauchy y de Sylvestre Lacroix. Joseph Fourier sugirió varios proyectos para ambos, Sturm y Colladon, reconociendo que Colladon era esencialmente un físico, mientras que Sturm era un matemático.

Aunque completaron a tiempo su trabajo para el Grand Prix de *la Académie des Sciences*, no consiguieron ganar el premio, que de hecho quedó desierto y tuvo que ampliarse la convocatoria. Revisaron Sturm y Colladon de nuevo su memoria y realizaron nuevos experimentos en el lago de Ginebra, consiguiendo al fin ganar el premio y garantizar así su permanencia en París dedicados a sus investigaciones. Este éxito marcó el final de la exitosa colaboración entre ambos y cada uno se embarcó en nuevos proyectos, centrándose Sturm en el trabajo teórico sobre física-matemática, incluyendo el estudio de las curvas cáusticas y los polos de las secciones cónicas.

Uno de los más famosos trabajos de Sturm, *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, fue publicado en 1829. En este trabajo, se considera el problema de determinar el número real de radicales de una ecuación en un intervalo dado, una cuestión famosa con una larga historia pues había sido considerada por Descartes, Rolle, Lagrange y Fourier. El primero en dar una solución completa fue Cauchy pero su método fue considerado engorroso y poco práctico. Sturm consiguió gran prestigio y reconocimiento con su trabajo que, con ideas de Fourier, conseguía obtener una solución simple. Hermite escribió que “el teorema de Sturm tuvo la gran fortuna de convertirse de inmediato en un teorema clásico y encontrar un lugar en la enseñanza que se mantendrá por siempre. Su demostración, que utiliza sólo las consideraciones más elementales, es un raro ejemplo de simplicidad y elegancia."

Pese a que ciertamente el teorema de Sturm se convirtió en un clásico, fue pronto relegado a la historia y terminó por desaparecer de los libros de texto. París no era un lugar fácil para un extranjero protestante como Sturm y a pesar de la fama obtenida desde 1826, no consiguió un puesto de relevancia en el mundo académico. La revolución de 1830 cambió el clima político y consiguió situarse como profesor de matemáticas en el prestigioso Collége Rollin, una escuela de la municipalidad parisina. Convertido en ciudadano francés en 1833, fue elegido miembro de *la Académie des Sciences* en 1836 y durante esos años publicó importantes trabajos sobre ecuaciones diferenciales.

Sturm tuvo mucho interés en obtener resultados sobre ecuaciones diferenciales específicas como ocurría con la teoría del calor de Poisson. Liouville trabajó también en ecuaciones diferenciales derivadas de la teoría de calor. Los trabajos de Sturm y Liouville de 1836–1837 sobre ecuaciones diferenciales abarcan la expansión de funciones en series y el hoy bien conocido problema de Sturm–Liouville sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden.

1.2 Álgebra Computacional

En esta sección daremos a conocer algunas funciones de *Maple* que nos serán de mucha ayuda en el desarrollo de nuestras ecuaciones diferenciales. La mayoría de las funciones que daremos a conocer nos servirán para un mejor trato, es decir, nos ayudaran al momento de resolverlas. Acocntiniación daremos algunas funciones básicas antes de entrar de lleno a lo que será la parte de ecuaciones diferenciales.

- En *Maple* se pueden hacer evaluaciones numéricas. El sistema *Maple* representa internamente a los números utilizando el *sistema decimal*. La *representación flotante decimal* se obtiene utilizando `evalf`; la *representación flotante decimal* (desde el hardware) utilizando la función `evalhf`.

Ejemplo:

Obtenga un valor aproximado de las expresiones $(-525)^{\frac{1}{4}}$, $(-3)^{12}$, $\sqrt{18}$.

```
evalf((-525)^(1/4)); evalf((-3)^(12)); evalf(sqrt(18));
```

- *Maple* realiza operaciones algebraicas estándar con expresiones matemáticas, como por ejemplo tenemos las siguientes.

  1 `factor(expr)` factoriza la expresión `expr` dada.

  2 `expand(expr)` desarrolla la `expr`.

  3 `simplify(expr)` simplifica la `expr` utilizando reglas básicas de simplificación.

  4 `combine(expr,opc)` es una función que en algunos aspectos es contraria a la función `expand`.

  5 `convert(expr,forma)` cambia la forma de `expr` y tiene muchas versiones que se pueden escoger en el segundo argumento `forma`.

  6 `normal(fr)` factoriza el numerador y el denominador de la función racional `fr` y elimina factores comúnes del numerador y denominador.

  7 `numer(fr)` extrae el numerador de la fracción `fr`.

  8 `denom(fr)` extrae el denominador de la fracción `fr`.

  9 `collect(expr,var)`, `coeff(expr,var)`, y `coeffs(expr,var)` se utilizan para agrupar términos y obtener coeficientes de la `expr`.

  10 `map` se recomienda aplicar en manipulaciones con expresiones grandes.

Ejemplos:

1. Factorize el polinomio $15x^3 + 7x^2y - 12y^2$

   ```
   factor(15*x^3+7*x^2*y-12*y^2);
   ```

2. Desarrolle la expresión $(a + b)^2(a - 5b)^3$.

   ```
   expand((a+b)^2*(a-5*b)^3);
   ```

3. Reduzca la suma de dos fracciones $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{x^2}{14}$ a una sóla fracción.

```
simplify(3/x^2-x^2/15);
```

4. Encuentre la descomposición en fracciones simples de la función $\dfrac{5}{(x-2)(x-1)}$.

```
convert(5/((x-2)*(x-1)),parfrac,x);
```

5. Convierta las expresiones $\exp(x)\exp(y), x^p x^q, \ln(x)+\ln(y)$, en la forma más compacta.

```
assume(x>0);
combine([exp(x)*exp(y),x^p*x^q,ln(x)+ln(y)]);
```

6. Factorize los coeficientes de la expresión $f=(x+y+1)^3(x+3y+3)^2$.

```
f:=(x+y+1)^3*(x+3*y+3)^2;
B:=collect(f, x); C:=map(factor, B);
```

Estas funciones son de las más comúnes y utilizadas en el desarrollo y obtención de soluciones en todos los aspectos de la matemática, no solo en la rama de las ecuaciones diferenciales.

Notemos que en *Maple* podemos encontrar información acerca de las funciones o paquetes utilizando un signo de interrogación al principio, por ejemplo `?simpilify`.

Acontinuación pasaremos a presentar funciones de la sección de ecuaciones diferenciales las cuales serán de gran ayuda.

En *Maple* existe un amplio conjunto de funciones para encontrar las soluciones (analíticamente, gráficamente, numéricamente) de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales o sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. Mencionaremos algunas funciones y paquetes importantes para ecuaciones diferenciales ordinarias, como por ejemplo:

   - Paquetes: `plots`, `DEtools`

- Funciones: `dsolve`, `odeplot`, `DEplot`, `phaseportrait`
  Ejemplo:

  ```
  with(plots); with(DEtools);
  dsolve(EDO,y(x),opcs); dsolve({EDOs},{funcs});
  dsolve({EDOs,ICs},{funcs},opcs);
  dsolve({EDOs,CIs},{funcs},method=nombre_metodo,opcs);
  dsolve({EDOs},numeric, {funcs},opcs);
  Sol_Num:=dsolve({EDOs},numeric,{funcs},opcs);
  odeplot(Sol_Num,{funcs},rango,opcs);
  phaseportrait({EDOs},{funcs},rango,{CIs},opcs);
  DEplot({EDOs},{funcs},t_rango,opcs)
  ```

  donde `EDO` significa ecuaciones diferenciales ordinarias y `CIs` las condiciones iniciales.

2. *Formas explícitas e implícitas de soluciones exactas, visualización de soluciones*

   ```
   Sol_Exp:=dsolve(diff(y(t),t)+t^2/y(t)=0,y(t));
   Sol_Imp:=dsolve(diff(y(t),t)+t^2/y(t)=0,y(t),implicit);
   with(plots): G:=subs({y(t)=y},lhs(Sol_Imp));
   Gs:=seq(subs(_C1=i,G),i=-5..5);
   contourplot({Gs},t=-5..5,y=-10..10,color=blue);
   ```

3. *Clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias, y proposición de métodos de solución.* Por ejemplo separación de variables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones exactas, ecuaciones lineales, solución en forma de series, etcétera.

   ```
   with(DEtools):
   EDO1:=diff(y(t),t)=y(t)*sin(t)-2/(1-y(t));
   Sol_Exp:=dsolve(EDO1,y(t));
   Sol_Exp:=dsolve(EDO1,y(t),implicit);
   odeadvisor(EDO1);
   Sol_sep:=separablesol(ED)1,y(t));
   EDO2:=(t^2-y(t)*t)*diff(y(t),t)+y(t)^2=0;
   odeadvisor(EDO2); Sol1:=dsolve(EDO2,y(t));
   Sol2:=genhomosol(EDO2,y(t));
   Sol_ser:=dsolve(EDO1,y(t),'series');
   ```

4. *Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior:* soluciones exactas y numéricas, gráficas de soluciones.

```
with(plots):
setoptions(axes=boxed,scaling=constrained,numpoints=200);
EDO:=diff(x(t),t$2)-diff(x(t),t)+(t-1)*x(t)=0;
CIs:=D(x)(0)=0,x(0)=1;
Sol_ex:=dsolve({EDO,CIs},x(t));
Sol_num:=dsolve({EDO,CIs},x(t),numeric);
G:=array(1..3);
G[1]:=odeplot(Sol_num,[t,x(t)],0..10,color=blue):
G[2]:=plot(rhs(Sol_ex),t=0..10,color=red):
G[3]:=odeplot(Sol_num,[x(t),diff(x(t),t)],0..10,
      color=magenta): display(G);
```

5. *Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:* soluciones exactas, transformadas de Laplace, entre otros,

```
with(DEtools): with(inttrans):
EDO_sis1:={D(x)(t)=-2*x(t)+5*y(t),D(y)(t)=4*x(t)-3*y(t)};
Sol_sist1:=dsolve(EDO_sist1, {x(t),y(t)});
A1:=array([[-2,5],[4,-3]]);matrixDE(A1,t);
EDO_sis2:={diff(x(t),t)=-y(t)+cos(2*t),
diff(y(t),t)=5*x(t)+2*sin(2*t)};
Ec1:=laplace(EDO_sis2,t,p);
Ec2:=subs({x(0)=2,y(0)=0},Ec1);
Ec3:=solve(Ec2,{laplace(x(t),t,p),laplace(y(t),t,p)});
Sol:sis2:=invlaplace(Ec3,p,t); assign(Sol_sis2):
plot([x(t),y(t)],t=-3..3);
```

6. *Ejemplo.* Resuelva el problema de valor inicial $y' = -e^{yt}\cos(t^2)$, $y(0) = p$. Grafique las soluciones $y(t)$ para varios valores del parámetro p en un intervalo $[0, P]$, donde P esta dado. Grafique las soluciones para $p = 0.1i$ $(i = 1, 2 \ldots, 10)$, $P = \pi$.

```
with(plots):
GSol:=proc(CI)
local ec, ec_CI, lista, Sol_N, N_CI, i; global P;
ec:=D(y)(t)=-exp(y(t)*t)*cos(t^2);
lista:=NULL; N_CI:=nops(CI);
for i from 1 to N_CI do
ec_CI:=evalf(y(0)=CI[i]);
Sol_N:=dsolve({ec,ec_CI},y(t),type=numeric,range=0..P);
lista:=lista,odeplot(Sol_N,[t,y(t)],0..P, numpoints=100,
color=blue,thickness=2,axes=boxed):
od;
```

```
display([lista]);
end;
Lista:=[seq(0.1i*i,i=1..10)]; P:=evalf(Pi);
GSol(Lista);
```

El estado de un sistema dinámico se representa por dos variables $(x, y) \in \mathbb{R}$ las cuales son consideradas como las coordenadas de un *espacio fase* bidimensional. El movimiento del sistema se representa por un vector $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ que satisface la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t),$$

o su equivalente

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t),$$

donde el vector de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (X(x, y, t), Y(x, y, z))$ es una función suave. Un movimiento particular del sistema se obtiene iniciando en un punto dado (x_0, y_0) del espacio fase en un momento t_0. La mayoría de las condiciones iniciales determinan una solución única $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. La solución $\mathbf{r}(t)$ describe una curva continua en espacio fase, la cual se llama *curva de fase*, o *trayectoria*. El conjunto de todos los posibles movimientos se llama *flujo de fase* y la gráfica de curvas de fase se llama *retrato de fase* o *diagrama de fase*. En *Maple* se pueden dibujar retratos de fase con las funciones `phaseportrait, DEplot`.

- *Ejemplo.* Construya un retrato de fase de un sistema dinámico de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\nu v + \epsilon u \left[\delta_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sigma_1(u^2 + v^2) + \frac{1}{4}\sigma_2(u^2 + v^2)^2 \right] \\ \frac{du}{dt} &= -\nu u + \epsilon v \left[-\delta_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sigma_1(u^2 + v^2) - \frac{1}{4}\sigma_2(u^2 + v^2)^2 \right] \end{aligned}$$

que describe el movimiento no lineal de la amplitud y de la fase de un fluido bajo la resonancia subarmónica.

Este sistema se ha obtenido por el método de promedio y por métodos de álgebra computacional. El sistema depende de los parámetros: ν (que es la viscosidad del fluido), ϵ (un parámetro pequeño), σ_1, σ_2 (la segunda y la cuarta correcciones de la frecuencia no lineal), δ (el parámetro de resonancia). Si escogemos estos parámetros en diferentes regiones donde existe la solución (es conocido que existen 6 regiones), obtenemos un retrato de fase:

```
with(plots):  with(DEtools):
delta_1:=-1/2: sigma_1:=1; sigma_2:=1;
        nu:=0.005; epsilon:=0.1;
Ec1:=D(v)(t)=-nu*v(t)+epsilon*u(t)*(delta_1+1/4-
    signma_1/2*(u(t)^2+v(t)^2)+sigma_2/4*(u(t)^2+v(t)^2)^2);
Ec2:=D(u)(t)=-nu*u(t)+epsilon*v(t)*(-delta_1+1/4+
    signma_1/2*(u(t)^2+v(t)^2)-sigma_2/4*(u(t)^2+v(t)^2)^2);
Ecs:=[Ec1,Ec2];
  CI:=[[0,0,1.1033],[0,0,-1.1033],[0,1.1055,0],
          [0,-1.1055,0],[0,0,1.613],[0,0,-1.613]];
var:=[v(t),u(t)];
Opciones:=arrows=medium,dirgrid=[20,20],stepsize=0.1,
                   thickness=2,linecolour=blue,color=green;
phaseportrait(Ecs,var,t=48..400,CI,Opciones);
```

Maple también calcula algunos tipos de funciones especiales, tales como *las funciones de Bessel*. *Maple* tiene varias funciones para las funciones de Bessel, por ejemplo,

- `BesselJZeros(v,n)`, `BesselJZeros(v,n1..n2)`, los ceros reales para las J-Bessel funciones,

- `BesselYZeros(v,n)`, `BesselYZeros(v,n1..n2)`, los ceros reales para las Y-Bessel funciones,

por mencionar algunas de ellas. Donde los parámetros son:

- `v` el orden de la función de Bessel,

- `n` el n-ésimo cero,

- `n1, n2` un rango de índices para ceros consecutivos.

Ejemplos:

```
BesselJZeros(0,1);
                          BesselJZeros(0, 1)
evalf(BesselJZeros(0,1));
                          2.404825558
BesselJZeros(1.5,10);
                          32.95638904
```

```
BesselJZeros(1/2,5);
```

$$5\pi$$

```
BesselYZeros(1/2,5);
```

$$9/2\pi$$

```
BesselJZeros(1,0);
                          0

BesselJZeros(1.,3..6);

          10.17346814, 13.32369194, 16.47063005, 19.61585851

s := BesselYZeros(1,3..6);

           s := BesselYZeros(1, 3 .. 6)

evalf(s);

           8.596005868, 11.74915483, 14.89744213, 18.04340228

BesselJ(v,BesselJZeros(v,3));
                           0
```

Capítulo 2

Definiciones y Teoremas

2.1 Definición de Sistemas de Sturm–Liouville

Podemos generalizar el método de separación de variables y problemas de eigenvalores asociados, considerando la ecuación de onda clásica con coeficientes variables

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + q(x)y = w(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

sujeta a las condiciones a la frontera para $t > 0$

$$a_1 y + a_2 y_x = 0, \quad x = 0; \qquad b_1 y + b_2 y_x = 0, \quad x = l, \tag{2.2}$$

y las condiciones iniciales

$$y(x,0) = f(x), \qquad y_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < l, \tag{2.3}$$

donde supongamos que p, q y w son funciones continuas de x en $0 \leq x \leq l$ y a_1, a_2, b_1, b_2 son constantes reales positivas tales que

$$a_1^2 + a_2^2 > 0 \qquad \text{y} \qquad b_1^2 + b_2^2 > 0.$$

Si utilizamos el método de separación de variables con $y(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y $-\lambda$ como una constante de separación, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) \quad + \quad (q(x) + \lambda w(x))X = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda T = 0, \tag{2.5}$$

con las condiciones a la frontera

$$a_1 X + a_2 \frac{dX}{dx} = 0, \quad x = 0; \qquad b_1 X + b_2 \frac{dX}{dx} = 0, \quad x = l. \tag{2.6}$$

Definición 2.1.1

El problema de eigenvalores definido por la ecuación (2.4) y las condiciones a la frontera anteriores es llamado el *Sistema de Sturm–Liouville*.

Definición 2.1.2

Los valores de λ para los cuales el problema de Sturm–Liouville tiene una solución no trivial son llamados los *eigenvalores*, y sus correspondientes soluciones son llamadas las *eigenfunciones*.

En términos del operador

$$\mathfrak{L} = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x), \tag{2.7}$$

renombrando $X(x) = y(x)$, podemos escribir la ecuación (2.4) en la forma,

$$\mathfrak{L}y + \lambda w(x) y = 0. \tag{2.8}$$

2.2 Sistemas Regulares de Sturm–Liouville

Definición 2.2.1

A la ecuación de Sturm–Liouville (2.8) se le llama *regular* en un intervalo finito cerrado $[a, b]$ si las funciones $p(x)$ y $w(x)$ son positivas en el intervalo $[a, b]$. Así, para un eigenvalor λ dado, existen dos soluciones linealmente independientes de una ecuación regular de Sturm–Liouville (2.8) en $[a, b]$.

Definición 2.2.2

A la ecuación de Sturm–Liouville (2.8) en $[a, b]$ junto con dos condiciones a la frontera

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \tag{2.9}$$

donde $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ son constantes reales dadas tales que $a_1^2 + a_2^2 > 0$ y $b_1^2 + b_2^2 > 0$ se le llama un *Sistema de Sturm–Liouville Regular*.

Cabe señalar que en este trabajo de tesis nos enfocaremos a estudiar el caso de sistemas de Sturm–Liouville regulares.

Definición 2.2.3

A el conjunto de todos los eigenvalores λ de un problema de Sturm–Liouville regular se le llama el *Espectro* del problema.

Consideremos el siguiente problema regular de Sturm–Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi, \tag{2.10}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2.11}$$

Este problema será visto con mas detalle en el Capítulo 3. Tenemos que para $\lambda \leq 0$, este problema no tiene soluciones distintas de cero. En otras palabras, no existen eigenvalores no negativos o eigenvalores cero en el problema.

Sin embargo, cuando $\lambda > 0$, las soluciones de la ecuación son

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}x).$$

Las condiciones a la frontera (2.11) nos dan

$$A = 0 \qquad \text{y} \qquad B\,\mathrm{sen}\,(\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Ya que $\lambda \neq 0$, y $B = 0$ llegan a una solución trivial, debemos tener $B \neq 0$, y por tanto,

$$\mathrm{sen}\,(\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Así que, los eigenvalores son $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, y las eigenfunciones son

$$y_n(x) = \mathrm{sen}\,(nx).$$

Notemos que $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Consideremos ahora la ecuación de Cauchy–Euler

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \qquad 1 \leq x \leq e, \tag{2.12}$$

con condiciones a la frontera

$$y(1) = y(e) = 0. \tag{2.13}$$

La ecuación de Cauchy–Euler se puede poner en la forma de Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x}\lambda y = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$y(x) = C_1 x^{i\sqrt{\lambda}} + C_2 x^{-i\sqrt{\lambda}},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

De acuerdo al resultado

$$x^{ia} = e^{ia\ln x} = \cos(a\ln x) + i\,\mathrm{sen}\,(a\ln x),$$

tenemos la solución

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}\ln x),$$

donde A y B son nuevas constantes arbitrarias relacionadas con C_1 y C_2.

La condición a la frontera $y(1) = 0$ nos da $A = 0$, y la condición a la frontera $y(e) = 0$ nos da

$$\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}) = 0, \qquad B \neq 0,$$

la cual nos lleva a los eigenvalores

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

y sus correspondientes eigenfunciones

$$y_n(x) = \mathrm{sen}\,(n\pi\ln x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

2.3 Sistemas Singulares de Sturm-Liouville

Definición 2.3.1
A la ecuación de Sturm-Liouville

$$\mathcal{L}y + \lambda wy = 0$$

se le llama *singular* cuando se cumple uno de los siguientes casos:

- la ecuación está dada en un intervalo semi-infinito o infinito,
- el coeficiente $p(x)$ o $w(x)$ son iguales a cero en algun punto,
- uno de los coeficientes se va al infinito en uno o ambos extremos de un intervalo finito.

Definición 2.3.2

Una ecuación de Sturm-Liouville singular junto con las condiciones a la frontera lineales homogéneas apropiadas es llamada un *Sistema de Sturm-Liouville Singular*.

Las condiciones puestas en este caso no son como las condiciones a la frontera separadas vistas en el caso del problema de Sturm–Liouville regular.

Consideremos el problema de Sturm–Liouville singular que involucra la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{2.14}$$

con las condiciones a la frontera de que y y y' son finitas cuando $x \to \pm 1$.

En este caso, $p(x) = 1 - x^2$ y $w(x) = 1$, y $p(x)$ es igual a cero en $x = \pm 1$. Las funciones de Legendre de primer tipo $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, son las eigenfunciones las cuales son finitas cuando $x \to \pm 1$. Los eigenvalores correspondientes son $\lambda_n = n(n+1)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Notemos que el problema de Sturm–Liouville singular tiene un número infinito de eigenvalores, y las eigenfunciones $P_n(x)$ son mutuamente ortogonales con respecto a la función peso $w(x) = 1$.

Otro problema singular de Sturm–Liouville es la ecuación de Bessel para ν fija

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0, \qquad 0 < x < a, \tag{2.15}$$

con las condiciones a la frontera $y(a) = 0$ y y, y' son finitas cuando $x \to 0+$.

En este caso, $p(x) = x$, $q(x) = -\frac{\nu^2}{x}$, y $w(x) = x$. Tenemos que $p(0) = 0$, $q(x)$ es infinita cuando $x \to 0+$, y $w(0) = 0$. Por lo tanto, el problema es singular. Si $\lambda = k^2$, las eigenfunciones son las funciones de Bessel de primer tipo $J_\nu(k_n x)$ de orden ν, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, y $(k_n a)$ es el n-ésimo cero de J_ν. Los eigenvalores son $\lambda_n = k_n^2$. La función de Bessel J_ν y su derivada son ambas finitas cuando $x \to 0+$. Por tanto, el problema tiene un número infinito de eigenvalores y las eigenfunciones son mutuamente ortogonales con respecto a la función peso $w(x) = x$.

2.4 Sistemas Periódicos de Sturm–Liouville

Otro tipo del problema que surge en la práctica comúnmente es el *Sistema periódico de Sturm–Liouville*.

Definición 2.4.1

La ecuación de Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0, \qquad a \le x \le b, \tag{2.16}$$

en el cual $p(a) = p(b)$, junto con las condiciones a la frontera periódicas

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b), \tag{2.17}$$

es llamada un *Sistema periódico de Sturm–Liouville*.

Ejemplo:

Encontremos ahora los eigenvalores y eigenfunciones de el sistema periódico de Sturm–Liouville:

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{2.18}$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi). \tag{2.19}$$

Notemos que $p(x) = 1$ y por tanto $p(\pi) = p(-\pi)$. Para $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}x),$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Utilizando las condiciones a la frontera (2.19), obtenemos

$$\begin{aligned} 2B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}\pi) &= 0, \\ 2A\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, para soluciones no triviales, debemos tener

$$\mathrm{sen}\,(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \qquad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Luego,

$$\lambda_n = n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Entonces, para cada eigenvalor $\lambda_n = n^2$, existen dos soluciones linealmente independientes $\cos(nx)$ y $\mathrm{sen}(nx)$.

Es fácil de verificar que no existen eigenvalores negativos en el sistema. Sin embargo, $\lambda = 0$ es un eigenvalor y la eigenfunción asociada es la función constante $y(x) = 1$. Por tanto, los eigenvalores son 0, $\{n^2\}$, y las eigenfunciones correspondientes son 1, $\{\cos(nx)\}$, $\{\mathrm{sen}(nx)\}$, donde n es un entero positivo.

2.5 Resultados Generales de Sistemas de SL

Para el problema regular de Sturm–Liouville, denotamos el dominio de $\mathfrak{L}$ por $D(\mathfrak{L})$, esto es, $D(\mathfrak{L})$ es el espacio para todas las funciones complejas definidas en $[a, b]$, para las cuales $y'' \in L^2([a, b])$, y las cuales satisfacen las condiciones a la frontera

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0.$$

Teorema 2.5.1 (Identidad de Lagrange).
Para cualesquiera u, $v \in D(\mathfrak{L})$, tenemos

$$u\mathfrak{L}v - v\mathfrak{L}u = \frac{d}{dx}[p(uv' - vu')]. \tag{2.20}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} u\mathfrak{L}v - v\mathfrak{L}u &= u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + quv - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - quv \\ &= \frac{d}{dx}[p(uv' - vu')]. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.5.2 (Fórmula de Abel).
Si u y v son dos soluciones de la ecuación

$$\mathfrak{L}y + \lambda w y = 0$$

en $[a, b]$, entonces

$$p(x)W(u, v; x) = \text{constante}, \tag{2.21}$$

donde W es el Wronskiano definido por

$$W(u, v; x) = (uv' - u'v).$$

Demostración. Ya que u, v son soluciones de la ecuación

$$\mathcal{L}y + \lambda wy = 0,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(pu') + (q + \lambda w)u = 0, \\ \frac{d}{dx}(pv') + (q + \lambda w)v = 0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por v y la segunda ecuación por u, y restando tenemos

$$u\frac{d}{dx}(pv') - v\frac{d}{dx}(pu') = 0.$$

Integrando desde a hasta x esta ecuación tenemos

$$p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] - p(a)[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] = 0.$$

Ésta es la fórmula de Abel. ■

Teorema 2.5.3.

El operador $\mathcal{L}$ de Sturm–Liouville es auto-adjunto. En otras palabras, para cualesquiera dos funciones u, $v \in D(\mathcal{L})$, tenemos

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle\,, \tag{2.22}$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interior en $L^2([a,b])$ definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{2.23}$$

Demostración. Ya que todas las constantes involucradas en las condiciones a la frontera de un sistema de Sturm–Liouville son reales, si $v \epsilon D(\mathcal{L})$, entonces $\overline{v} \in D(\mathcal{L})$.

También sabemos que p, q y w son funciones reales y $\overline{\mathcal{L}v} = \mathcal{L}\overline{v}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, v \rangle - \langle u, \mathcal{L}v \rangle &= \int_a^b (\overline{v}\mathcal{L}u - u\mathcal{L}\overline{v})dx \\ &= [p(\overline{v}u' - u\overline{v}')]_a^b, \end{aligned} \tag{2.24}$$

por la identidad de Lagrange (2.20).

Mostramos que el lado derecho de la igualdad anterior tiende a cero para ambos sistemas de Sturm–Liouville, regular y singular. Si $p(a) = 0$, el resultado se sigue inmediatamente. Si $p(a) > 0$, entonces u y v satisfacen las condiciones a la frontera de la forma (2.9) en $x = a$. Esto es,

$$\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Ya que a_1 y a_2 ambas no son cero, tenemos

$$\overline{v}(a)u'(a) - u(a)\overline{v}'(a) = 0.$$

Un argumento similar se puede utilizar para analizar el caso $x = b$, entonces el lado derecho de la ecuación (2.24) desaparece. Ésto demuestra el Teorema. ■

Teorema 2.5.4.

Todos los eigenvalores de un sistema de Sturm–Liouville son reales.

Demostración. La demostración de este Teorema será dada en el Capítulo 4, en el Teorema de Sturm–Liouville.

Observación. Este teorema nos dice que todos los eigenvalores de un sistema de Sturm–Liouville regular son reales, pero no nos garantiza que un eigenvalor existe. Se ha mostrado mediante un ejemplo que un sistema de Sturm–Liouville tiene una sucesión infinita de eigenvalores. Todos los ejemplos anteriores de sistemas de Sturm–Liouville nos han mostrado que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ con

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Todos los resultados anteriores los podemos poner en forma de teorema como lo haremos acontinuación.

Teorema 2.5.5.

Los eigenvalores λ_n de un sistema de Sturm–Liouville se pueden agrupar en la forma

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \tag{2.25}$$

donde n se refiere al número de ceros de las eigenfunciones $y_n(x)$ en $[a,b]$.

Demostración. La demostración de este Teorema será dada en el Capítulo 4, en el Teorema de Sturm–Liouville.

Teorema 2.5.6.

Las eigenfunciones correspondientes a distintos eigenvalores de un sistema de Sturm–Liouville son ortogonales con respecto al producto interior con la función peso $w(x)$.

Demostración. Supongamos que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son eigenfunciones correspondientes a eigenvalores λ_1 y λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Entonces,

$$\mathfrak{L}y_1 = -\lambda_1 w y_1 \qquad y \qquad \mathfrak{L}y_2 = -\lambda_2 w y_2.$$

Por lo tanto

$$y_1\mathfrak{L}y_2 - y_2\mathfrak{L}y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) w y_1 y_2. \tag{2.26}$$

Utilizando la Identidad de Lagrange, tenemos

$$y_1\mathfrak{L}y_2 - y_2\mathfrak{L}y_1 = \frac{d}{dx}\left[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')\right]. \tag{2.27}$$

Si combinamos las ecuaciones (2.26) y (2.27) e integrando de a hasta b tenemos que

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx \\ = \ & \left[p(x)\{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\}\right]_a^b = 0, \end{aligned}$$

por las condiciones a la frontera (2.9).

Ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tenemos que

$$\int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0.$$

Lo cual demuestra el teorema. ■

Ahora consideraremos algunos resultados generales acerca de expansiones de eigenfunciones de un sistema de Sturm–Liouville y sus propiedades de completez.

Supongamos que $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto de eigenfunciones ortogonales de un sistema de Sturm–Liouville en $[a, b]$. Ya que el producto interior de las funciones con respecto a la función peso $w(x)$ se define como

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_a^b w(x) y_n(x) y_m(x) dx, \tag{2.28}$$

entonces el cuadrado de la norma es

$$||y_n||^2 = \langle y_n, y_n \rangle = \int_a^b w(x) y_n^2(x) dx. \tag{2.29}$$

Definición 2.5.0.
El conjunto de eigenfunciones ortogonales de un sistema de Sturm–Liouville se dice ser *completo* si cualquier función arbitraria $f \in L^2([a, b])$ se puede expander únicamente como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x), \tag{2.30}$$

donde la serie converge a $f(x)$ en $L^2([a, b])$ y los coeficientes a_n son dados por

$$a_n = \frac{\langle f(x), y_n(x) \rangle}{\langle y_n(x), y_n(x) \rangle} = \frac{1}{||y_n||^2} \langle f, y_n \rangle, \tag{2.31}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definición 2.5.1.
La expansión (2.30) es llamada una *serie de Fourier generalizada* de $f(x)$ y los escalares asociados a_n son llamados los *coeficientes de Fourier generalizados* de $f(x)$.

Definición 2.5.2.
El conjunto de eigenfunciones $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es llamado *ortonormal* si $||y_n|| = 1$.

Definición 2.5.3.
El conjunto de eigenfunciones ortonormales se dice *completo*, si para cada $f \in L^2([a,b])$, si la siguiente expansión se cumple:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle \, y_n. \tag{2.32}$$

Definición 2.5.4.
Una serie de eigenfunciones ortonormales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x)$ se dice ser *convergente* a $f(x)$ en $L^2([a,b])$ si

$$\lim_{n\to\infty} ||f(x) - s_n(x)|| = 0, \tag{2.33}$$

donde $s_n(x) = \sum_{r=1}^{n} a_r y_r(x)$ es la n-ésima suma parcial de la serie (2.32). Equivalentemente, (2.33) nos queda de la siguiente manera

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{r=1}^{n} a_r y_r(x) \right|^2 w(x)dx = 0. \tag{2.34}$$

Este tipo de convergencia es llamada *convergencia fuerte* y es completamente diferente a la convergencia puntual o a la convergencia uniforme en análisis. En general, la convergencia fuerte no implica ni convergencia puntual ni convergencia uniforme. Sin embargo, la convergencia uniforme implica ambas, convergencia puntual y convergencia fuerte.

Ahora determinemos los coeficientes a_r de tal forma que la n-ésima suma parcial $s_n(x)$ de la serie (2.32) sea la mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido del mínimo cuadrado, esto es, buscaremos minimizar la integral en (2.34)

$$\begin{aligned} I(a_r) &= \int_a^b \left| f(x) - \sum_{r=1}^n a_r y_r(x) \right|^2 w(x)dx \\ &= \int_a^b w(x) f^2(x)dx - 2\sum_{r=1}^n a_r \int_a^b w(x)f(x)y_r(x)dx \\ &+ \sum_{r=1}^n a_r^2 \int_a^b w(x)y_r^2(x)dx. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Una condición necesaria para que $I(a_r)$ sea el mínimo es que la primera derivada parcial de I con respecto a los coeficientes a_r, sea cero. Entonces, obtenemos

$$\frac{\partial I}{\partial a_r} = \sum_{r=1}^n \left[-2\int_a^b w(x)y_r(x)f(x)dx + 2a_r \int_a^b w(x)y_r^2(x)dx \right] = 0. \tag{2.36}$$

En consecuencia, tenemos

$$a_r = \int_a^b f(x)y_r(x)w(x)dx = \langle f, y_r \rangle . \tag{2.37}$$

Si completamos el cuadrado, el lado derecho de la ecuación (2.35) nos queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I(a_r) &= \int_a^b w(x)f^2(x)dx + \sum_{r=1}^n \left[a_r - \int_a^b w(x)f(x)y_r(x)dx \right]^2 \\ &- \sum_{r=1}^n \left(\int_a^b w(x)f(x)y_r(x)dx \right)^2 . \end{aligned} \tag{2.38}$$

El lado derecho de la ecuación nos muestra que I es mínimo si y sólo si a_r es dado por la ecuación (2.37). Esta elección de a_r nos proporciona la mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido del mínimo cuadrado. Si sustituimos los valores de a_r en la ecuación (2.35), obtenemos

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{r=1}^n a_r y_r(x) \right]^2 w(x)dx = \int_a^b w(x)f^2(x)dx - \sum_{r=1}^n a_r^2. \tag{2.39}$$

Si la serie de eigenfunciones ortonormales converge a $f(x)$, entonces la ecuación (2.34) se satisface. Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en la ecuación anterior (2.39) y utilizando la ecuación (2.34), obtenemos la *relación de Parseval*

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 = \int_a^b w(x) f^2(x) dx = ||f||^2 \,, \tag{2.40}$$

o equivalentemente,

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\langle f, y_r \rangle|^2 = ||f||^2 \,. \tag{2.41}$$

Ya que el lado izquierdo de la ecuación (2.39) es no negativo, se sigue de la misma ecuación que

$$\sum_{r=1}^{n} a_r^2 \leq ||f||^2 \,. \tag{2.42}$$

Ya que el lado derecho de la ecuación (2.42) es finito, el lado izquierdo de la misma ecuación es acotado superiormente para cualquier n. Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq ||f||^2 \,, \tag{2.43}$$

o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, y_n \rangle|^2 \leq ||f||^2 \,. \tag{2.44}$$

Esta desigualdad se llama la *desigualdad de Bessel*.

Un problema típico de valores a la frontera para una ecuación diferencial ordinaria lo podemos escribir en la forma del operador diferencial $\mathcal{L}$ como sigue

$$\mathcal{L} y = f, \qquad a \leq x \leq b. \tag{2.45}$$

Usualmente, buscamos una solución de esta ecuación con las condiciones a la frontera dadas. Una aproximación formal al problema es encontrar el operador inverso $\mathfrak{L}^{-1}$. Entonces la solución de (2.45) se puede encontrar como $y = \mathfrak{L}^{-1}(f)$. Resulta que encontrar el operador inverso es posible en muchos casos importantes, y el operador inverso es un operador integral de la forma

$$y(x) = (\mathfrak{L}^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt. \tag{2.46}$$

La función G se le llama *función de Green* del operador $\mathfrak{L}$. La existencia de la función de Green y su construcción no es un problema simple en el caso de un sistema de Sturm–Liouville regular.

Teorema 2.5.7. *Función de Green para un sistema de Sturm–Liouville.*

Supongamos que $\lambda = 0$ *no es un eigenvalor del siguiente sistema de Sturm–Liouville regular:*

$$\mathfrak{L}y \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{2.47}$$

con las condiciones a la frontera homogéneas

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \qquad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0, \tag{2.48}$$

donde p *y* q *son funciones reales continuas en* $[a,b]$, p *es positiva en* $[a,b]$, $p'(x)$ *existe y es continua en* $[a,b]$, *y* a_1, a_2, b_1, b_2, *son constantes reales dadas tales que* $a_1^2 + a_2^2 > 0$ *y* $b_1^2 + b_2^2 > 0$. *En consecuencia, para cualquier* $f \in C^2([a,b])$, *el sistema de Sturm–Liouville tiene una única solución*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt, \tag{2.49}$$

donde G *es la función de Green dada por*

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{y_2(x)y_1(t)}{p(t)W(t)}, & a \leq t < x \\ \\ \frac{y_1(x)y_2(t)}{p(t)W(t)}, & x < t \leq b \end{cases} \tag{2.50}$$

donde y_1 *y* y_2 *son soluciones distintas de cero del sistema homogéneo* $(f = 0)$ *y* W *es el Wronskiano dado por*

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Demostración. De acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución general de (2.47) es de la forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \tag{2.51}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $\mathfrak{L}y = 0$, y $y_p(x)$ es cualquier solución particular de (2.47).

Si utilizamos el método de variación de parámetros, obtenemos la solución particular

$$y_p(x) = y_1(x)v_1(x) + y_2(x)v_2(x), \tag{2.52}$$

donde $v_1(x)$ y $v_2(x)$ son dadas por

$$v_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{p(x)W(x)}dx, \qquad v_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{p(x)W(x)}dx. \tag{2.53}$$

De acuerdo de la fórmula de Abel (ver Teorema 2.5.2), $p(x)W(x)$ es una constante. Ya que $W(x) \neq 0$ en $[a, b]$ y $p(x)$ se supone positiva, la constante es distinta de cero. Si denotamos la constante por c entonces tenemos

$$c = \frac{1}{p(x)W(x)}.$$

Luego

$$v_1(x) = -\int cf(x)y_2(x)dx \qquad y \qquad v_2(x) = \int cf(x)y_1(x)dx.$$

Por lo que, la forma final de $y_p(x)$ es

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -cy_1(x)\int_b^x f(t)y_2(t)dt + cy_2(x)\int_a^x f(t)y_1(t)dt \\ &= \int_a^x cy_2(x)y_1(t)f(t)dt + \int_x^b cy_1(x)y_2(t)f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.54}$$

En consecuencia, si denotamos la función de Green como

$$G(x,t) = \begin{cases} cy_2(x)y_1(t), & a \leq t < x, \\ \\ cy_1(x)y_2(t), & x < t \leq b, \end{cases} \tag{2.55}$$

podemos escribir

$$y_p(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt, \tag{2.56}$$

lo cual nos dice que la integral existe. Ésto se sigue inmediatamente de la continuidad de G. ■

Ahora denotaremos el operador integral T dado por (2.46), como

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt. \tag{2.57}$$

Teorema 2.5.8.
El operador T definido por (2.57) es auto-adjunto de $L^2([a,b])$ en $C([a,b])$ si $G(x,t) = \overline{G(t,x)}$.

Demostración. La función $G(x,t)$ definida en $[a,b] \times [a,b]$ es continua si

$$\int_a^b \int_a^b |G(x,t)|^2 \, dxdt < \infty.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Tf, g\rangle &= \int_a^b \int_a^b G(x,t)f(t)\overline{g(x)}dxdt \\ &= \overline{\int_a^b \int_a^b \overline{G(x,t)f(t)}g(x)dxdt} \\ &= \int_a^b \int_a^b f(t)dt\overline{\int_a^b \overline{G(x,t)}g(x)dx} \\ &= \langle f, T^*g\rangle , \end{aligned} \tag{2.58}$$

lo cual nos muestra que

$$(T^*f)(x) = \int_a^b \overline{G(t,x)}f(t)dt.$$

Luego, T es auto-adjunto si su kernel satisface la igualdad $G(x,t) = \overline{G(t,x)}$. ■

Teorema 2.5.9.

Bajo las suposiciones del Teorema 2.5.7, λ es un eigenvalor de $\mathfrak{L}$ si y sólo si $(1/\lambda)$ es un eigenvalor de T. Además, si f es la eigenfunción de $\mathfrak{L}$ que corresponde al eigenvalor λ, entonces f es una eigenfunción de T correspondiente al eigenvalor $(1/\lambda)$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{L}f = \lambda f$ para alguna función f distinta de cero en el dominio de $\mathfrak{L}$. En vista de la definición de T, y el Teorema 2.5.7, tenemos que

$$f = \mathfrak{L}^{-1}(\lambda f) = T(\lambda f).$$

Equivalentemente, ya que $\lambda \neq 0$,

$$Tf = \frac{1}{\lambda} f.$$

Esto nos dice que $(1/\lambda)$ es un eigenvalor de T con su correspondiente eigenfunción f.

Recíprocamente, si $(f \neq 0)$ es una eigenfunción de T correspondiente a el eigenvalor $\lambda \neq 0$, entonces

$$Tf = \lambda f.$$

Ya que $T = \mathfrak{L}^{-1}$, entonces

$$f = \mathfrak{L}(Tf) = \mathfrak{L}(\lambda f) = \lambda \mathfrak{L}(f).$$

Por lo que $(1/\lambda)$ es un eigenvalor de $\mathfrak{L}$ y su correspondiente eigenfunción es f. ■

Capítulo 3

Solución de Sistemas de Sturm–Liouville

3.1 Problema de Oscilaciones Libres

Consideremos en esta sección un problema particular, pues las soluciones de la mayoría de las ecuaciones de Sturm–Liouville tienen el comportamiento similar, independientemente de la forma de las funciones p, q, y w. Consideremos el siguiente sistema de Sturm–Liouville:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{3.1}$$

donde $p = w = 1, q = 0$ y el intervalo es dado, por la conveniencia, $[0, \pi]$.
(i) Si $\lambda < 0$ la solución general es

$$y = A \operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x) + B \cosh(\sqrt{-\lambda}x),$$

y vemos inmediatamente que sólo una condición a la frontera puede ser satisfecha.
(ii) Si $\lambda = 0$ solamente la solución trivial $y = 0$ satisface ambas, la ecuación y las condiciones a la frontera.
(iii) Si $\lambda = \omega^2$, con $\omega > 0$, la solución general es

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x) + B \cos(\omega x),$$

la cual puede ajustarse a la condición si $x = 0$ escogiendo $B = 0$ y la condición $x = \pi$ haciendo ω un entero, $\omega = 1, 2, \ldots$. Ya que la ecuación es lineal, el valor de la constante A es indeterminado y tenemos como las soluciones

$$y_n(x) = \operatorname{sen}(nx) \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Los eigenvalores son reales, $\lambda_n = n^2$, y las eigenfunciones son $y_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$. En este problema cada eigenvalor es asociado con una única eigenfunción. Las condiciones a la frontera, $y(0) = y(\pi) = 0$, determinan que hay un conjunto numerable de eigenvalores y dependen del índice, entonces por ejemplo, las condiciones a la frontera $y'(0) = y'(\pi) = 0$ nos darán diferentes eigenvalores y eigenfunciones (ver Problema 3.1).

Las gráficas de $y_n(x)$ y $y_{n+1}(x)$ para $n = 1, 4$ y 8 son mostradas acontinuación:

Figura 3.1

Figura 3.2

Figura 3.3

Estas figuras nos hacen pensar que $y_n(x)$ tiene $n-1$ ceros en el intervalo $(0,\pi)$ y los ceros se entrelazan, con un cero de $y_{n+1}(x)$ entre los ceros adyacentes de $y_n(x)$.

3.2 Propiedades Importantes de Sistemas de Sturm–Liouville

Existen varias e importantes propiedades de los eigenvalores y las eigenfunciones de este problema simple (descrito en la Sección anterior) que son comúnes también para las soluciones de muchos sistemas de Sturm–Liouville:

- Los eigenvalores son reales: Ésta es una propiedad fundamental y es consecuencia de la forma de la ecuación diferencial.

- El valor más pequeño de eigenvalor es la unidad, pero no existe el valor más grande de eigenvalor. Por lo que $\lambda_n/n^2 = O(1)$ cuando $n \to \infty$. En general el eigenvalor más pequeño existe, pero no existe el eigenvalor más grande. Para este problema λ_n se incrementa como n^2 para n grande.

- Para cada eigenvalor existe una eigenfunción. Esto es cierto para una amplia variedad de problemas de Sturm–Liouville, pero no es una verdad universal.

- La n-ésima eigenfunción tiene $n-1$-ceros en el intervalo abierto $(0,\pi)$. Para el problema general con el intervalo $[a,b]$, la n-ésima eigenfunción tiene $n-1$ ceros en el intervalo abierto (a,b).

- Los ceros se entrelazan, entonces hay uno y sólo un cero de $y_{n+1}(x)$ entre los ceros adyacentes de $y_n(x)$.

- El producto interior de dos eigenfunciones con *distintos* eigenvalores es cero:

$$\int_0^\pi y_n(x)y_m(x)dx = \int_0^\pi \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx dx = 0 \quad n \neq m.$$

De nuevo, ésta es una propiedad universal de las soluciones de los sistemas de Sturm–Liouville y provienen de la forma de la ecuación diferencial. En general es necesario usar un producto interior modificado (ver ecuación (4.8)).

- Las eigenfunciones $y_n(x) = \operatorname{sen} nx$ forman un sistema ortogonal, entonces cualquier función $F(x)$ suave puede ser aproximada en sentido por las series

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n y_n(x)$$

para algunos coeficientes a_k.

Esta propiedad generaliza la teoría de series de Fourier, y muchas de las propiedades de las series de Fourier pueden ser presentadas por estas series más generales.

3.3 Problemas Simples

Problema 3.3.1
Encuentre todos los eigenvalores y eigenfunciones del sistema de Sturm–Liouville definidos por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

y las condiciones a la frontera siguientes:
a) $y'(0) = y'(\pi) = 0$
b) $y(0) = y'(\pi) = 0$
c) $y(0) = y(\pi) - y'(\pi) = 0.$
En cada caso muestre que las eigenfunciones asociadas a distintos eigenvalores son ortogonales.

Solución.
La solución general de la ecuación diferencial y su derivada son las siguientes:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \cosh(\sqrt{|\lambda|}x), & \lambda < 0 \\ C_1 + C_2 x, & \lambda = 0 \\ C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0 \end{cases}$$

$$y'(x) = \begin{cases} C_1\sqrt{|\lambda|} \cosh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2\sqrt{|\lambda|} \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}x), & \lambda < 0 \\ C_2, \quad \lambda = 0 \\ C_1\sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{\lambda}x) - C_2\sqrt{|\lambda|} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0 \end{cases}$$

a) $y'(0) = y'(\pi) = 0$
Caso 1. $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= C_1\sqrt{|\lambda|} = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ y'(\pi) &= C_2\sqrt{|\lambda|} \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \end{aligned}$$

Caso 2. $\lambda = 0$:

$$C_2 = 0,$$

Caso 3. $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= C_1\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ y'(\pi) &= -C_2\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad C_2 &= 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = n^2, \\ y_n'(x) &= -\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(nx) \\ \Rightarrow \quad y_n(x) &= \cos(nx), \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

El producto interior es:

$$\begin{aligned} \langle y_n(x), y_m(x) \rangle &= \int_0^\pi y_n(x) y_m(x) dx = \\ & \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n \neq m \neq 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) $y(0) = y'(\pi) = 0$
Caso 1. $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0, \\ y'(\pi) &= C_1\sqrt{|\lambda|}\cosh{(\sqrt{|\lambda|}\pi)} = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \end{aligned}$$

Caso 2. $\lambda = 0$:

$$y(0) = C_1 = 0,$$
$$y'(\pi) = C_2 = 0,$$

Caso 3. $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0, \\ y'(\pi) &= C_1\sqrt{\lambda}\cos{(\sqrt{\lambda}\pi)} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad C_1 &= 0 \quad \text{o} \quad \cos{(\sqrt{\lambda}\pi)} = 0 \Rightarrow \lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \\ \Rightarrow \quad y_n(x) &= \operatorname{sen}\left((n+\frac{1}{2})x\right), \quad \lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

El producto interior es:

$$\begin{aligned} \langle y_n(x), y_m(x)\rangle &= \int_0^\pi y_n(x)y_m(x)dx \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen}\left((n+\frac{1}{2})x\right)\operatorname{sen}\left((m+\frac{1}{2})x\right)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}, \end{aligned}$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

c) $y(0) = y(\pi) - y'(\pi) = 0$
Caso 1. $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0, \\ y(\pi) - y'(\pi) &= C_1 \operatorname{senh}{(\sqrt{|\lambda|}\pi)} - C_1\sqrt{|\lambda|}\cosh{(\sqrt{|\lambda|}\pi)} = 0, \\ &= C_1(\operatorname{senh}{(\sqrt{|\lambda|}\pi)} - \sqrt{|\lambda|}\cosh{(\sqrt{|\lambda|}\pi)}) = 0, \end{aligned}$$

dividiendo por $\cosh(\sqrt{|\lambda|}\pi)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &= C_1(\tanh(\sqrt{|\lambda|}\pi)) - \sqrt{|\lambda|} = 0, \\ &\Rightarrow C_1 = 0 \text{ o } \tanh(\sqrt{|\lambda|}\pi)) = \sqrt{|\lambda|}, \end{aligned}$$

Sea $\nu = \sqrt{|\lambda|}$,

$$\Rightarrow \tanh(\nu\pi) = \nu.$$

Ahora, supongamos que ν_1 es una raiz $\Rightarrow \tanh(\nu_1\pi) - \nu_1 = 0$. Multiplicando por $\cosh(\nu_1\pi)$ obtenemos

$$y(\pi) - y'(\pi) = \operatorname{senh}(\nu_1\pi) - \nu_1\cosh(\nu_1\pi) = 0,$$

por lo que

$$y(x) = \operatorname{senh}(\nu_1 x), \quad \lambda < 0, \ \lambda = -\nu_1^2, \ \tanh(\nu_1\pi) = \nu_1.$$

Caso 2. $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 0, \\ y(\pi) - y'(\pi) &= C_2\pi - C_2 = C_2(\pi - 1) \Rightarrow C_2 = 0, \end{aligned}$$

Caso 3. $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} &y(0) = C_2 = 0 \Rightarrow y = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow y' = \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x), \\ &y(\pi) - y'(\pi) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) - \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \end{aligned}$$

Sea $\mu = \sqrt{\lambda}$, dividiendo por $\cos(\mu\pi)$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\tan(\mu\pi) - \mu = 0 \Rightarrow \tan(\mu\pi) = \mu, \\ &\mu_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{son los eigenvalores,} \end{aligned}$$

por lo que

$$y_n(x) = \operatorname{sen}(\mu_n x), \quad \lambda > 0, \ \lambda = \mu_n^2, \ \tan(\mu_n\pi) = \mu_n,$$

luego la solución nos queda en la siguiente forma:

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{senh}(\nu_1 x), \quad \lambda < 0, \ \lambda = -\nu_1^2, \ \tanh(\nu_1\pi) = \nu_1, \\ \operatorname{sen}(\mu_n x), \quad \lambda > 0, \ \lambda = \mu_n^2, \ \tan(\mu_n\pi) = \mu_n. \end{cases}$$

El caso que nos interesa es solamente el caso en que las eigenfunciones son distintas. Luego

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \operatorname{sen}(\mu_n x)\operatorname{sen}(\mu_m x)dx \\
&\qquad = \left[\frac{\mu_n \cos(\pi\mu_n)\operatorname{sen}(\pi\mu_m) - \mu_m \operatorname{sen}(\pi\mu_n)\cos(\pi\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2}\right] \\
&\qquad = \left[\frac{\mu_n \cos(\pi\mu_n)\mu_m \cos(\pi\mu_m) - \mu_m\mu_n \cos(\pi\mu_n)\cos(\pi\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Problema 3.3.2

Muestre que la ecuación diferencial lineal general de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

la podemos expresar en la forma

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0,$$

donde

$$p(x) = \exp\left\{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}, \quad q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x), \quad a_2(x) \neq 0.$$

Solución.

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\frac{dy}{dx}\right) + e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0.$$

Si hacemos el cambio

$$\begin{aligned}
p(x) &= e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}, \\
q(x) &= \frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x)
\end{aligned}$$

y sustituimos el resultado, nos queda en la forma

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0.$$

Problema 3.3.3

Muestre que el cambio de la variable independiente

$$\xi=\int_a^x\frac{dx}{P(x)}$$

aplicado a la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right)+\left(q(x)+\lambda w(x)\right)y=0,$$

nos da como resultado la ecuación

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\left(q(\xi)+\lambda w(\xi)\right)y=0.$$

Solución.

Tenemos que

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{P(x)},\qquad P(x)=\frac{dx}{d\xi}.$$

Ahora

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right)+\left(q(x)+\lambda w(x)\right)y=0,$$

y como

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\Longrightarrow\frac{df}{d\xi}\frac{1}{P(x)},$$

$$P(x)\frac{dy}{dx}=P(x)\frac{1}{P(x)}\frac{dy}{d\xi}.$$

Sustituyendo, llegamos a que

$$\frac{d}{d\xi}\frac{1}{P(\xi)}\left(P(\xi)\frac{1}{P(\xi)}\frac{dy}{d\xi}\right)+\left(q(\xi)+\lambda w(\xi)\right)y=0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)+P(\xi)\left(q(\xi)+\lambda w(\xi)\right)y=0,$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\left(q(\xi)+\lambda w(\xi)\right)y=0.$$

3.4 Problema de Sturm–Liouville y Ecuación de Onda

Ahora ilustraremos el método de Fourier generalizado resolviendo problemas generales de Sturm–Liouville asociados con una ecuación de onda general y una ecuación de difusión general.

Desarrollamos el método de Fourier generalizado resolviendo una ecuación más general de Sturm–Liouville asociada con la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{w(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right) + qy\right] + F(x,t), \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

con las condiciones a la frontera

$$a_1 y(a,t) + a_2 y_x(a,t) = 0, \quad x = a; \qquad b_1 y(b,t) + b_2 y_x(b,t) = 0, \quad x = b,$$

y las condiciones iniciales

$$y(x,0) = f(x), \qquad y_t(x,0) = g(x), \qquad a < x < b,$$

donde $F(x,t)$ es el término de fuerza.

En términos del operador diferencial de Sturm–Liouville, la ecuación (3.2) se puede escribir como

$$y_{tt} = \mathfrak{L}y + F(x,t), \qquad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \tag{3.3}$$

donde

$$\mathfrak{L}y = \frac{1}{w(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(py_x) + qy\right]. \tag{3.4}$$

Siguiendo el método de separación de variables, suponemos que la solución de la ecuación de onda (3.2) con $F = 0$ es de la forma $y(x,t) = \phi(x)\psi(t) \neq 0$, entonces la ecuación (3.2) se transforma en

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \lambda\psi, \qquad t > 0, \tag{3.5}$$

$$\mathfrak{L}\phi = \lambda\phi, \qquad a \leq x \leq b, \tag{3.6}$$

donde λ es una constante de separación.

Las condiciones a la frontera asociadas para $\phi(x)$ son

$$a_1\phi(a) + a_2\phi'(a) = 0, \qquad b_1\phi(b) + b_2\phi'(b) = 0. \tag{3.7}$$

Definición 3.4.1

A la ecuación (3.6) con las condiciones a la frontera (3.7) se le llama *Problema de Sturm–Liouville Asociado a la ecuación de onda.*

En general, el problema de Sturm–Liouville asociado a la ecuación de onda se puede resolver encontrando los eigenvalores λ_n y las eigenfunciones ortonormales $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Si utilizamos el principio de superposición, podemos escribir la solución de la ecuación lineal (3.3) en la forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\psi_n(t), \tag{3.8}$$

donde $\psi_n(t)$ son determinadas por (3.5).

Ahora buscaremos una solución al problema no homogeneo (3.3) en la forma (3.8), donde las ϕ_n son soluciones y ψ_n seran determinadas. Supongamos que el término de fuerza se puede expander en términos de las eigenfunciones como

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) f_n(t), \tag{3.9}$$

donde los coeficientes generalizados de Fourier $f_n(t)$ de $F(x,t)$ son dados por

$$f_n(t) = \langle F, \phi_n \rangle = \int_a^b F(x,t)\phi_n(x)dx. \tag{3.10}$$

Si sustituimos (3.8) y (3.9) en la ecuación (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\psi}_n(t)\phi_n(x) &= \mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\psi_n(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) f_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\mathcal{L}\phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) f_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n\psi_n(t) + f_n(t)\right]\phi_n(x).
\end{aligned}$$

Ésto nos lleva a la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{\psi}_n(t) + \alpha_n^2 \psi_n(t) = f_n(t), \tag{3.11}$$

donde $\lambda_n = -\alpha_n^2$.

Si aplicamos el método de transformada de Laplace a la ecuación diferencial ordinaria anterior, la solución nos queda como

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \psi_n(0)\cos(\alpha_n t) + \frac{1}{\alpha_n}\dot{\psi}(0)\,\mathrm{sen}\,(\alpha_n t) \\ &+ \frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \mathrm{sen}\,\alpha_n(t-\tau) f_n(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $\psi_n(0)$ y $\dot{\psi}_n(0)$ se pueden determinar de las condiciones iniciales (2.3), luego entonces

$$f(x) = y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\psi_n(0), \tag{3.13}$$

$$g(x) = y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\dot{\psi}_n(0), \tag{3.14}$$

las cuales nos dan los coeficientes de Fourier generalizados $\psi_n(0)$ y $\dot{\psi}_n(0)$ de la siguiente manera

$$\psi_n(0) = \langle f, \phi_n\rangle = \int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi)d\xi, \tag{3.15}$$

$$\dot{\psi}_n(0) = \langle g, \phi_n\rangle = \int_a^b g(\xi)\phi_n(\xi)d\xi. \tag{3.16}$$

Por lo tanto, la solución nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\langle f, \phi_n\rangle \cos\alpha_n t + \frac{1}{\alpha_n}\langle g, \phi_n\rangle\,\mathrm{sen}\,\alpha_n t \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \mathrm{sen}\,\alpha_n(t-\tau) f_n(\tau)d\tau \Bigg] \phi_n(x). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Esta expresión representa una solución de la ecuación de onda (3.2) que consiste de una serie infinita, con las condiciones a la frontera (2.2) y condiciones iniciales (2.3) bajo condiciones apropiadas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y el término de fuerza $F(x,t)$.

Si reemplazamos los productos interiores por las integrales (3.15) y (3.16), y $f_n(\tau)$ por (3.10) e intercambiando las sumas e integrales, obtenemos la solución en la forma

$$\begin{aligned} y(x,t) \quad = \quad & \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n(\xi)\cos\alpha_n t\right] f(\xi)d\xi \\ & + \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\phi_n(x)\phi_n(\xi)\operatorname{sen}\alpha_n t\right] g(\xi)d\xi \\ & + \int_a^b \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\phi_n(x)\phi_n(\xi)\operatorname{sen}\alpha_n(t-\tau)\right] F(\xi,\tau)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.5 Problema de Sturm–Liouville y Ecuación de Difusión

Consideremos la ecuación de difusión con un término de fuerza $F(x,t)$ en la forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] + q(x)y + F(x,t), \qquad a \le x \le b, \quad t > 0, \tag{3.19}$$

con las condiciones a la frontera

$$a_1 y(a,t) + a_2 y_x(a,t) = 0, \qquad b_1 y(b,t) + b_2 y_x(b,t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.20}$$

y la condición inicial

$$y(x,0) = f(x), \qquad a < x < b. \tag{3.21}$$

En términos del operador diferencial de Sturm–Liouville $\mathfrak{L}$, la ecuación (3.19) tiene la forma

$$y_t = \mathfrak{L}y + F. \tag{3.22}$$

Si utilizamos el método de separación de variables para encontrar una solución de la ecuación (3.19) con $F = 0$ en la forma $y(x,t) = \phi(x)\psi(t) \neq 0$, entonces la ecuación (3.19) nos queda de la siguiente forma

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda\psi, \qquad t > 0, \tag{3.23}$$

$$\mathcal{L}\phi = \lambda\phi, \qquad a \leq x \leq b, \tag{3.24}$$

donde λ es la constante de separación.

Las condiciones a la frontera asociadas son

$$a_1\phi(a) + a_2\phi'(a) = 0, \qquad b_1\phi(b) + b_2\phi'(b) = 0. \tag{3.25}$$

Definición 3.5.1

A la ecuación (3.24) junto con las condiciones (3.25) se le llama *Problema de Sturm–Liouville Asociado a la ecuación difusión.*

El problema se puede resolver encontrando los eigenvalores λ_n y las eigenfunciones ortonormales $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

De acuerdo del principio de superposición lineal, podemos escribir la solución de la ecuación (3.24) en la forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\psi_n(t), \tag{3.26}$$

donde $\psi_n(t)$ es determinado por (3.23).
Ahora buscaremos una solución al problema no homogeneo (3.24) en la forma (3.26), donde las ϕ_n son soluciones y ψ_n seran determinadas. Supongamos ahora que la función de fuerza también se puede expander en términos de las eigenfunciones como

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\phi_n(x), \tag{3.27}$$

donde los coeficientes de Fourier $f_n(t)$ son determinados por

$$f_n(t) = \langle F, \phi\rangle = \int_a^b F(\xi,t)\phi_n(\xi)d\xi. \tag{3.28}$$

Agrupando la solución (3.26) y la expansión de la función fuerza (3.27) en la ecuación (3.22) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\dot{\psi}_n(t) &= \mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\psi_n(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\phi_n(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n(t)\mathcal{L}\phi_n(x)+f_n(t)\phi_n(x)\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n\psi_n(t)+f_n(t)\right]\phi_n(x).\end{aligned}$$

Ésto nos da una ecuación diferencial ordinaria para $\psi_n(t)$ de la siguiente forma:

$$\dot{\psi}_n(t)+\lambda_n\psi_n(t)=f_n(t). \tag{3.29}$$

Si aplicamos el método de transformada de Laplace a la ecuación diferencial ordinaria anterior, la solución nos queda como

$$\psi_n(t)=\psi_n(0)e^{\lambda_n t}+\int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau, \tag{3.30}$$

donde $\psi_n(0)$ se puede determinar de la condición inicial

$$f(x) \;=\; y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\psi_n(0), \tag{3.31}$$

donde los coeficientes de Fourier $\psi_n(0)$ de la función $f(x)$ son dados por

$$\psi_n(0)=\langle f,\phi_n\rangle=\int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi)d\xi. \tag{3.32}$$

Si sustituimos (3.30) en la solución (3.26) obtenemos

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\langle f,\phi_n\rangle e^{\lambda_n t}+\int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right]\phi_n(x). \tag{3.33}$$

Ahora reemplazaremos el producto interior en (3.33) por (3.32), $f_n(\tau)$ por (3.28) y intercambiamos las sumas e integrales para obtener la forma final de la solución en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\xi)\phi_n(x)e^{\lambda_n t}\right] f(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \left[\phi_n(\xi)\phi_n(x)e^{\lambda_n(t-\tau)}\right] F(\xi,\tau)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Si introducimos una nueva función G definida por

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\xi)\phi_n(x)e^{\lambda_n t}, \tag{3.35}$$

podemos escribir la solución en términos de G en la forma

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \int_a^b G(x,\xi,t)f(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t \int_a^b G(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Notemos que el primer término de esta solución representa la contribución de la condición inicial, y el segundo término proviene del término no homogéneo de la ecuación (3.19).

3.6 Seperación de Variables y Problemas de Sturm-Liouville

En esta Sección mostraremos como aparecen varios tipos de problemas de Sturm–Liouville.

El trabajo original de Sturm–Liouville fue motivado por el problema de la conducción de calor. Un problema que Sturm trabajó es la distribución de la temperatura en una barra unidimensional, descrita por la ecuación diferencial parcial lineal

$$h(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - l(x)u, \tag{3.37}$$

donde $u(x,t)$ denota la temperatura de la barra en el punto x al tiempo t, y h, p y l son funciones positivas.

Si alrededor de la barra se mantiene la temperatura constante y los extremos de la barra, en $x = 0$ y $x = L$, están en contacto con cuerpos grandes a diferentes temperaturas, entonces las condiciones a la frontera son

$$\begin{aligned} p(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha u(0,t) &= 0, \\ p(L)\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \beta u(L,t) &= 0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

para algunas constantes α y β. Finalmente es necesario especificar la temperatura inicial de la barra. Tomemos $u(x, 0) = f(x)$, donde $f(x)$ es la temperatura inicial conocida.

Sturm intentó resolver esta ecuación, primero sustituyendo una función de la forma

$$u(x,t) = X(x)e^{-\lambda t}$$

la cual sustituida en (3.37) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda h(x) - l(x))X = 0$$

para $X(x)$ en términos de la constante desconocida λ, junto con las condiciones a la frontera

$$p(0)X'(0) + \alpha X(0) = 0 \quad p(L)X'(L) + \beta X(L) = 0.$$

Éste es un problema de eigenvalores. Asumiendo que existen soluciones $X_k(x)$ con eigenvalores λ_k para $k = 1, 2, \ldots$, Sturm utilizó la linealidad de la ecuación original para escribir una solución general como la suma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) e^{-\lambda_k t},$$

donde los coeficientes A_k son arbitrarios. Esta solución satisface formalmente la ecuación diferencial y las condiciones a la frontera, y satisfará la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ sólo si

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x).$$

Entonces el problema se reduce a encontrar los valores de los A_k que satisfacen la ecuación.

J. Fourier y S.D. Poisson encontraron expresiones para los coeficientes A_k para funciones particulares $h(x)$, $p(x)$ y $l(x)$, pero Sturm y Liouville determinaron la solución general.

Usualmente, las ecuaciones Sturm–Liouville aparecen cuando el método de separación de variables se aplica para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden.

Algunos ejemplos de ellos son:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0, \tag{3.39}$$

ecuación de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -F(\mathbf{r}), \tag{3.40}$$

ecuación de Poisson,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,$$

ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{3.41}$$

ecuación de onda, donde la constante c representa la velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones en el medio, k es una constante.

La primera de estas ecuaciones, llamada la ecuación de Helmholtz, aparece en la solución de la ecuación de Poisson (la segunda ecuación), en la solución de la ecuación de Schrödinger (independiente del tiempo) y la ecuación de onda.

La ecuación (3.41), es la ecuación de onda de propagación de pequeñas perturbaciones en un medio isotrópico y describe una variedad de fenómenos de onda tales como la radiación electromagnética, ondas de agua y aire, ondas en cuerdas y membranas.

Muchas aplicaciones de las ecuaciones anteriores tienen diferentes grados de validez y exactitud. Entonces existen circunstancias en las cuales los resultados de los cálculos usando la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Poisson no se distinguen de los resultados experimentales. Pero en algunas aplicaciones mecánicas, efectos no incluidos en la derivación de estas ecuaciones son significativos y entonces las soluciones proporcionan solamente una primera estimación del comportamiento del sistema. Un ejemplo es una cuerda de piano, la frecuencia de los armónicos de las notas más bajas no se incrementa linealmente con el orden de los armónicos, como la ecuación de onda predice (ver Blackham 1978).

Los sistemas de Sturm–Liouville son derivados de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden mediante el método de separación de variables, y es frecuente que las fronteras determinen las coordenadas a usar, y éstas, determinan importantes propiedades de las ecuaciones resultantes de Sturm–Louville.

Ahora derivaremos dos ecuaciones que ilustran diferentes propiedades de los sistemas de Sturm–Liouville. Consideremos, para propósitos ilustrativos, la ecuación de onda describiendo las vibraciones de una membrana flexible,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \quad \psi(\mathbf{r},t)=0 \quad \text{en la frontera.} \tag{3.42}$$

Supongamos que el plano xy es horizontal y la membrana sin perturbaciones está en el plano xy, esto es, la gravedad tiene un efecto despreciable en comparación con la tensión en la membrana. La función $\psi(\mathbf{r},t)$ es el desplazamiento vertical de la posición de equilibrio al tiempo t y se supone es pequeña. Consideraremos membranas *rectangulares* y *circulares.*

Caso 1.

Para una membrana rectangular, es conveniente utilizar las coordenadas cartesianas definidas por la frontera de la membrana, la cual tiene lados de longitudes a y b, esto es, $0\le x\le a$ y $0\le y\le b$. Comenzaremos por buscar las oscilaciones con una frecuencia no especificada ω, entonces suponemos una solución de la forma

$$\psi(\mathbf{r},t)=F(x,y)e^{-i\omega t}.$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación (3.42), obtenemos una ecuación para $F(x, y)$, independiente del tiempo,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} F = 0, \;\; F(\mathbf{r}) = 0 \text{ en la frontera.}$$

Ya que la membrana es rectangular, es razonable suponer una solución de la forma

$$F(\mathbf{r}) = X(x)Y(y),$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación anterior y dividimos por F, llegamos a la ecuación

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

El único camino por el cual esta ecuación puede ser satisfecha es si cada término es una constante. Ahora podemos juntar

$$\frac{X''}{X} = -\lambda_x, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda_y$$

para obtener las siguientes dos ecuaciones para los componentes del espacio:

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda_x X = 0, &\qquad X(0) = X(a) = 0, \\ \frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda_y Y = 0, &\qquad Y(0) = Y(b) = 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde los eigenvalores λ_x y λ_y están relacionados a la frecuencia mediante la ecuación

$$\lambda_x + \lambda_y = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Entonces los eigenvalores son $\lambda_x = (n\pi/a)^2$ y $\lambda_y = (m\pi/b)^2$, donde n y m son enteros positivos, y la solución es

$$F(\mathbf{r}) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

La solución, dependiente del tiempo, para el movimiento en esta frecuencia es entonces

$$\psi(\mathbf{r}, t) = [A\operatorname{sen}(\omega_{mn}t) + B\cos(\omega_{mn}t)]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \tag{3.44}$$

donde

$$\frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

así, la frecuencia depende de los valores de los enteros n y m.

Debemos notar cómo las ecuaciones de Sturm–Liouville surgen de la ecuación diferencial parcial original y de las condiciones a la frontera en este proceso. Notemos también que para cada eigenvalor λ_x existe una única eigenfunción $X(x)$, y similarmente para λ_y.

Notemos que si la longitud de los lados a y b son proporcionados el patron nodal de las oscilaciones de frecuencia particular puede complicarse, como es mostrado en el Problema 3.6.4.

La ecuación (3.44) no es la solución completa. Podemos escribir la solución general de esta ecuación lineal como la suma de todas sus eigenfunciones,

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[A_{nm}\operatorname{sen}(\omega_{mn}t) + B_{nm}\cos(\omega_{mn}t)\right],$$

donde las constantes A_{nm} y B_{nm} son determinadas por la forma inicial y velocidad de la membrana. Entonces si la membrana es inicialmente estacionaria con una forma prescrita, $\Psi(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})$ y $\partial\Psi/\partial t = 0$ en $t = 0$, tenemos $A_{nm} = 0$ y

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

la cual es una doble serie de Fourier. Entonces

$$B_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(\mathbf{r})\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dydx.$$

Problema 3.6.1

Consideremos un tambor inicialmente plano, $\Psi(\mathbf{r},0) = 0$, y con velocidad $\partial\Psi/\partial t = g(\mathbf{r})$ en $t = 0$, las condiciones iniciales producidas por un impulso. Muestre que con estas condiciones iniciales el movimiento siguiente es

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\omega_{nm}t\right),$$

donde

$$\omega_{nm}A_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b g(\mathbf{r}) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dydx.$$

Solución.

Consideramos la expansión para $\Psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[A_{nm}\operatorname{sen}(\omega_{nm}t) + B_{nm}\cos(\omega_{nm}t)\right].$$

Si sustituimos $t = 0$, obtenemos

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) B_{nm} = 0 \Longleftrightarrow B_{nm} = 0.$$

$\Psi(\mathbf{r}, t)$ es de la forma:

$$g(\mathbf{r}) = \left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\omega_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos(\omega_{nm}t)\right)\right|_{t=0},$$

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\omega_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

Para calcular el coeficiente $A_{nm}\omega_{nm}$ tenemos

$$A_{nm}\omega_{nm} = \frac{1}{\langle X_n, X_n\rangle}\frac{1}{\langle Y_n, Y_n\rangle}\int_0^a \int_0^b g(\mathbf{r}) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dydx,$$

donde

$$X_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad Y_n = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}y\right).$$

$$\begin{aligned}
\langle X_n, X_n\rangle &= \int_0^a X_n X_n dx, \\
&= \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \\
&= \frac{a}{n\pi}\int_0^a \operatorname{sen}^2(u)\, du,
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
u &= \frac{n\pi}{a}x, \\
du &= \frac{n\pi}{a}dx \Rightarrow dx = \frac{a}{n\pi}du,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a}{n\pi}\left(\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u)\right)\Bigg|_0^a, \\
&= \frac{a}{n\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)\right)\Bigg|_0^a, \\
&= \frac{a}{2}u-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2n\pi)-0=\frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

Similarmente obtenemos que

$$\langle Y_n, Y_n\rangle = \frac{b}{2},$$

y el resultado se sigue.

El mismo problema, pero con diferente forma de frontera, produce diferentes tipos de ecuaciones.

Caso 2.

Para una frontera circular, es conveniente usar las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Entonces las condiciones a la frontera se convierten en $\psi(r,\theta,t) = 0$ para $r = r_a$ y $\psi(r,\theta,t)$ debe ser una función 2π-periódica de θ, esto es, $\psi(r,\theta+2\pi,t) = \psi(r,\theta,t)$ para toda θ, lo cual significa que $\psi(\mathbf{r},t)$ es una función univaluada de la posición.

En coordenadas polares tenemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2},$$

buscamos las soluciones representando un movimiento que oscila con la frecuencia angular ω, y consideramos una solución de la forma

$$\psi = U(r,\theta)e^{-i\omega t}.$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación tenemos

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+r^2\frac{\omega^2}{c^2}U=0,$$

la cual se puede resolver suponiendo una forma separable $U = R(r)\Theta(\theta)$, para dar las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0, && \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \\ &\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(r\omega^2 - \frac{\lambda}{r}\right) = 0, && R(r_a) = 0, \end{aligned} \tag{3.45}$$

donde λ es la constante de separación desconocida, la cual también es el eigenvalor de la ecuación angular.

En este punto es importante notar la diferencia entre las ecuaciones anteriores (3.45)y la ecuación (3.43) para la membrana rectangular. Ahora tenemos solo una constante de separación λ, y las condiciones a la frontera son diferentes. En la ecuación angular tenemos $p = w = 1$ y $q = 0$, pero las condiciones a la frontera son diferentes y proporcionan los eigenvalores $\lambda = n^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ con las eigenfunciones

$$\Theta_n(\theta) = e^{in\theta}, n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \Theta_0 = 1,$$

o en la forma real, $\{\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}$ con $n = 1, 2, \ldots$.

En este caso cada uno de los eigenvalores tiene *dos* eigenfunciones, esto es, $\{\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}$. Tal comportamiento es típico para las condiciones a la frontera periódicas, a diferencia del comportamiento de la membrana rectangular general en la cual cada eigenvalor tiene una única eigenfunción.

Definición 3.6.1

Si un eigenvalor tiene más de una eigenfunción, se dice que el sistema es *degenerado*, de otra forma se le conoce como *no-degenerado*.

La ecuación radial también es diferente. La coordenada r es restringida al intervalo $0 \leq r \leq r_a$ y ahora $p(r) = w(r) = r$, $q(r) = -n^2/r$. El eigenvalor de esta ecuación se convierte en el cuadrado de la frecuencia, ω^2, en contraste al caso anterior en el cual la frecuencia fue determinada por dos eigenvalores, λ_x y λ_y.

Finalmente, existe una única condición a la frontera en $r = r_a$: en la otra frontera, $r = 0$, la función $p(r) = r = 0$ y en estas circunstancias la condición a la frontera en $r = 0$ es reemplazada por la condición que la solución es acotada para $0 \leq r \leq r_a$.

Los sistemas para los cuales $p(r)$ es cero en uno o ambos extremos del intervalo son llamados *Sistemas Singulares de Sturm–Liouville.*

El cero en $p(r)$ en $r = 0$ es una propiedad del sistema de coordenadas utilizado, no el sistema físico estudiado. En $r = 0$ el sistema de coordenadas es singular porque todos los valores de θ llegan al mismo punto. En tres dimensiones con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) existen problemas similares en los polos norte y sur, donde el valor de ϕ es irrelevante y en este caso para la ecuación de θ, $p(\theta) = \operatorname{sen}\theta$. En problemas físicos, no debemos esperar que la solución de Sturm–Liouville, la cual es singular en virtud de las coordenadas utilizadas, sea diferente que la solución de un sistema de Sturm–Liouville regular.

Para continuar con el análisis de la membrana circular, vemos que la ecuación radial se puede escribir como

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_a) = 0 \quad \text{y } R(r) \text{ acotado.}$$

Ésta es la *ecuación de Bessel* con las dos soluciones $J_n(\omega r)$ y $Y_n(\omega r)$. Como $|Y_n(\omega)|$ es no acotada en $r = 0$, la única solución relevante es $J_n(\omega r)$. La condición en $r = r_a$ determina los valores permitidos del eigenvalor ω. Para cada valor de n los eigenvalores ω_{nj}, $j = 1, 2, \ldots$, son dadas por las soluciones positivas de la ecuación $J_n(\omega r_a) = 0$, en el Problema 3.6.2 estos valores son calculados.

Entonces las soluciones que oscilan con frecuencia ω_{nj} son combinaciones lineales de

$$J_n(\omega_{nj} r)e^{i(n\theta + \omega_{nj} t)} \quad y \quad J_n(\omega_{nj} r)e^{-i(n\theta - \omega_{nj} t)},$$

o en la forma real

$$\begin{aligned} \psi_{nj} \;&=\; J_n(\omega_{nj} r)\left\{\cos(n\theta)\left[A_{nj}\cos(\omega_{nj} t) + B_{nj}\operatorname{sen}(\omega_{nj} t)\right]\right. \\ &\qquad \left. + \operatorname{sen}(n\theta)\left[C_{nj}\cos(\omega_{nj} t) + D_{nj}\operatorname{sen}(\omega_{nj} t)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Problema 3.6.2

Los ceros positivos de la función de Bessel $J_\nu(x)$, $\nu \geq 0$, son comúnmente denotados por $j_{\nu,s}$, $s = 1, 2, \ldots$ con $j_{\nu,1}$ el primer cero positivo. Utilice la función de *Maple* `BesselJZeros` para encontrar $j_{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Haga las gráficas de $J_1(j_{1,k}x)$ para $0 < x < 1$ y haga variar k para mostrar numéricamente que:

1. $J_1(j_{1,k}x)$ tiene $n-1$ ceros para $0 < x < 1$, y
2. los ceros de $J_1(j_{1,k+1}x)$ se entrelazan con $J_1(j_{1,k}x)$.

Solución.

```
with(plots); alias(J=BesselJ);alias(Z=BesselJZeros);
plot([J(1,x),J(2,x)],x=0..20,color=[red,blue]);
Zer1:=[evalf(Z(1,1..10))]; Zer2:=[evalf(Z(2,1..10))];
F1:=(x,k)->J(1,Z(1,k)+x);    F2:=(x,k)->J(2,Z(2,k)+x);
for k from 1 to 10 do
 plot(F1(x,k),x=0..1,title=cat("k=-",k)); od;
for k from 1 to 10 do
 plot(F2(x,k),x=0..1,title=cat("k=-",k)); od;
for k from 1 to 10 do
 plot([F1(x,k),F1(x,k+1)],x=0..1,title=cat("k=-",k),
      color=[red,blue]); od;
for k from 1 to 10 do
 plot([F2(x,k),F2(x,k+1)],x=0..1,title=cat("k=-",k),
       color=[red,blue]); od;
```

Figura 3.6.1

Problema 3.6.3

Construya las gráficas de $J_0(x)$, $J_{\pm 3}(x)$ y $J_{\pm 6}(x)$ para $0 < x < 10$ y muestre que $\omega_{nj} = \omega_{-nj}$, para estos valores de n y para toda j. Utilice la representación integral,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu - x \operatorname{sen} u)} du,$$

para mostrar que a) $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$ y b) $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$. Muestre que c) $\omega_{nj} = \omega_{-nj}$ para toda n y j.

Solución.

```
with(plots); alias(J=BesselJ);plot(J(0,x),x=-10..10,color=blue);
plot([J(3,x),J(-3,x)],x=0..10,color=[red,blue]);
plot([J(6,x),J(-6,x)+.05],x=0..20,color=[red,blue]);
```

Figura 3.6.2

Figura 3.6.3

Figura 3.6.4

La parte a)

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu - x\operatorname{sen} u)}du = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{i(nu - x\operatorname{sen} u)}du, \\ J_{-n}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-nu - x\operatorname{sen} u)}du, \end{aligned}$$

Si hacemos $y = \pi - u$, obtenemos

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n(\pi - y) + x\operatorname{sen}\pi - y)}dy \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{0} e^{-i(n\pi - ny) + x\operatorname{sen} y)}dy \\ &= e^{-i\pi n}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{i(ny - x\operatorname{sen} y)}dy \\ &= e^{-i\pi n}J_n(x) \\ J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

Ahora la parte b)

$$J_n(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu + x\operatorname{sen} u)}du = \overline{J_{-n}(x)} = J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

y la parte c)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Los ceros de $J_{-n}(x)$ y $J_n(x)$ coinciden, por lo tanto $w_{nj} = w_{-nj}$.

Problema 3.6.4

Líneas nodales. Se ha mostrado, en la ecuación (3.44), que una membrana rectangular oscila con la frecuencia dada por

$$\frac{\omega_{nm}^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad \text{y la forma} \quad f(\mathbf{r}) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}\right),$$

donde n y m son enteros.

Las *líneas nodales* de una solución son las líneas a lo largo de las cuales la solución es cero, para todo tiempo, $\psi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) = 0$.

Para la membrana las líneas nodales son las curvas en las cuales la membrana está en reposo. Las líneas nodales de la solución anterior son líneas paralelas a los ejes.

Los números reales a y b se dicen *conmensurables* si existen dos enteros primos relativos p y q tales que $a/b = p/q$, de otra forma son *inconmensurables.* Si los lados del rectángulo son conmensurables, $b = aq/p$, entonces

$$\left(\frac{\omega a}{\pi c}\right)^2 q^2 = n^2q^2 + m^2p^2,$$

y existen varias soluciones de la ecuación diofantina

$$n^2q^2 + m^2p^2 = N^2.$$

Por ejemplo, si la membrana es cuadrada, $p = q = 1$, y si $n = n_1$ y $m = n_2$ son soluciones de $n^2 + m^2 = N^2$, entonces $n = n_2$ y $m = n_1$ también son soluciones. En este caso la multiplicidad del eigenvalor es dada por la solución del problema de la teoría de números: de cuántas formas un número N^2 puede ser representado como la suma de dos cuadrados.

En tal caso las líneas nodales son más complicadas y dependen de combinaciones lineales de los componentes de eigenfunciones. Entonces en el caso $a = b = 1$ y $n_1 = 3$, $n_2 = 1$ dos diferentes patrones son mostrados en las figuras: otros patrones son dados por diferentes valores de A y B.

```
with(plots);
f := A*sin(n*x*Pi)*sin(m*y*Pi)+B*sin(n*y*Pi)*sin(m*x*Pi);
g1:= subs(n=4,m=1,f);
implicitplot(subs(A=1,B=1,g1),x=0..1,y=0..1,
             grid=[50,50],color=blue,title="n=4,m=1,A=1,B=1");
implicitplot(subs(A=1,B=2/3,g1),x=0..1,y=0..1,
```

```
             grid=[30,30],color=red,title="n=4,m=1,A=1,B=2/3");
implicitplot(subs(A=1,B=1/4,g1),x=0..1,y=0..1,
             grid=[50,50],color=green,title="n=4,m=1,A=1,B=1/4");
```

Figura 3.6.5

Figura 3.6.6

Figura 3.6.7

En resumen, hemos mostrado que la ecuación de una membrana oscilante da lugar a una variedad de tipos de ecuaciones de Sturm–Liouville dependiendo de la forma de las fronteras. Para la frontera rectangular, obtuvimos dos ecuaciones regulares no degeneradas para los modos espaciales. Para la frontera circular obtuvimos una ecuación angular que fue degenerada y una ecuación radial que fue singular. Pero en ambos casos las ecuaciones fueron del tipo de Sturm–Liouville.

Capítulo 4

Teoría de Sturm–Liouville

4.1 Introducción

Como lo habiamos mencionado, un *sistema regular de Sturm–Liouville* se describe por una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0, \tag{4.1}$$

definida en un intervalo finito del eje real, $a \leq x \leq b$, junto con las condiciones a la frontera homogéneas

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0, \quad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0, \tag{4.2}$$

donde

- las funciones $p(x)$, $w(x)$ y $q(x)$ son reales y continuas en $a \leq x \leq b$;
- $p(x)$ y $w(x)$ son positivas en $a \leq x \leq b$;
- $p'(x)$ existe y es continua para $a \leq x \leq b$;
- A_1, A_2, B_1 y B_2 son constantes reales (los casos triviales, $A_1 = A_2 = 0$, $B_1 = B_2 = 0$, son excluidos).

En la literatura, no existe una convención acordada para los signos en la ecuación 4.1. Por ejemplo, en el libro de Courant y Hilbert (1965), el signo de $q(x)$ es negativo y en libro de Korner (1988), los signos de $q(x)$ y λ son negativos. Ya que el comportamiento de los eigenvalores puede depender del signo de $q(x)$, tendremos que tener mucho cuidado al usar diferentes fuentes.

Los problemas tratados en el Capítulo 3, Problema 3.3.1, las partes (i), (ii) y (iii), son problemas de Sturm–Liouville regulares con $p = w = 1$ y $q = 0$. Pero la separación de variables en coordenadas polares, en la ecuación (3.45) produce ecuaciones con condiciones a la frontera periódicas o $p(x) = 0$ en uno o ambos extremos. Luego vemos que la definición antes vista es muy restrictiva y excluye muchos problemas que ocurren comúnmente. Rectificaremos esta definición introduciendo *sistemas singulares de Sturm–Liouville*.

Si $p(x)$ es positiva para $a < x < b$ excepto en uno o en ambos extremos del intervalo, entonces un *sistema singular de Sturm–Liouville* es compuesto por la ecuación diferencial (4.1), con $w(x)$ y $q(x)$ que satisfagan las condiciones para el *sistema regular de Sturm–Liouville* y además

- la ecuación está dada en un intervalo semi-infinito o infinito,
- uno de los coeficientes se va al infinito en uno o ambos extremos de un intervalo finito.

Por ejemplo, el sistema

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) + \left(r\lambda - \frac{1}{r}\right)y = 0, \qquad 0 \leq r \leq a, \tag{4.3}$$

con condiciones a la frontera $B_1y(a) + B_2y'(a) = 0$, $|B_1| + |B_2| \neq 0$, y $y(x)$ acotada, es un *sistema singular de Sturm–Liouville*, pues cumple con las condiciones ya mencionadas. Definiendo $x = r\sqrt{\lambda}$ obtenemos

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0,$$

la cual es la *ecuación de Bessel* con dos soluciones linealmente independientes $J_1(x)$ y $Y_1(x)$. Pero, $Y_1(x)$ no es acotada (cerca del origen $Y_1(x) \sim \ln x$) por lo que $J_1(x)$ es la única solución acotada. Este comportamiento es típico: una ecuación singular de Sturm–Liouville usualmente tiene dos soluciones linealmente independientes de las cuales una sóla de ellas es acotada.

Problema 4.1

Muestre que los eigenvalores de la ecuación (4.3) son dados en términos de las raíces de

$$B_1 J_1(au) + B_2 Y_1(au) = 0, \quad \lambda = u^2.$$

Solución.

Primero, comencemos con la ecuación diferencial (4.3),

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) + \left(r\lambda - \frac{1}{r}\right)y = 0, \qquad 0 \leq r \leq a.$$

Ahora, tenemos que

$$x = r\sqrt{\lambda}, \qquad r = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \frac{x^2}{r} = r\lambda, \qquad dx = dr\sqrt{\lambda} \qquad \frac{dx}{dr} = \sqrt{\lambda},$$

las cuales obtenemos simplemente despejando. Ahora si utilizamos la regla de la cadena podemos ver que

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{dy}{dx}\sqrt{\lambda}.$$

Si sustituimos esta ecuación en nuestra ecuación diferencial, obtenemos

$$\sqrt{\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{x^2}{r} - \frac{1}{r}\right)y = 0.$$

Si eliminamos $\sqrt{\lambda}$ y factorizamos $1/r$, obtenemos

$$\sqrt{\lambda}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{r}\left(x^2 - 1\right)y = 0,$$

luego

$$r\sqrt{\lambda}\left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(x^2 - 1\right)y = 0.$$

Si sustituimos $x = r\sqrt{\lambda}$, obtenemos

$$x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x^2 - 1\right)y = 0,$$

y reordenando vemos que

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - 1\right)y = 0.$$

Por lo que la solución de la ecuación de Bessel nos queda de la siguiente forma:

$$y = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x),$$

y como $x = r\sqrt{\lambda}$,

$$y = C_1 J_1(r\sqrt{\lambda}) + C_2 Y_1(r\sqrt{\lambda}),$$

si $x = a$ y $\sqrt{\lambda} = u$ el resultado se sigue. ■

La ecuación diferencial (4.1) presenta una forma especial de ecuaciones diferenciales ordinarias, pero el resultado del Problema 3.3.2 del Capítulo 3 nos muestra que cualquier ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + \lambda w(x)y(x) = 0$$

puede ser clasificada en esta forma especial, donde $a_1(x)$ y $a_2(x)$ sean dos funciones bien definidas. Muchas de las propiedades de los eigenvalores y eigenfunciones de un sistema de Sturm–Liouville, regular y singular, provienen de la forma especial de la ecuación diferencial (4.1).

Ahora mencionamos algunas de las propiedades más importantes para sistemas regulares de Sturm-Liouville. El primer resultado importante es la *Identidad de Lagrange*:

Propiedad 1. Identidad de Lagrange.

$$\nu L u - u L \nu = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(\nu\frac{du}{dx} - u\frac{d\nu}{dx}\right)\right], \tag{4.4}$$

donde L es el operador diferencial real lineal

$$Lf = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) + q(x)f,$$

y u y ν son cualesquiera dos funciones para las cuales ambos lados de la identidad existen, ver Capítulo 2.

Propiedad 2. El operador es auto-adjunto.

El producto interior de dos funciones f y g es definido por la integral

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx. \tag{4.5}$$

Se sigue de la identidad de Lagrange que

$$(Lu, \nu) = (u, L\nu), \tag{4.6}$$

donde $u(x)$ y $\nu(x)$ son dos funciones, las cuales pueden ser complejas, para las cuales Lu y $L\nu$ existen y satisfacen condiciónes a la frontera arbitrarias. Notemos que u y ν no necesitan ser soluciones de la ecuación Sturm–Liouville. Un operador que satisface la relación (4.6) se dice ser *auto-adjunto*. La demostración de esta importante relación se presenta en el Capitulo 2.

Problema 4.2

Demuestre que si $p(x)$ es periódica y las condiciones a la frontera son periódicas, entonces $\mathcal{L}$ es auto-adjunto.

Solución.

Tenemos que

$$\begin{aligned} u(a) &= u(b), \\ u'(a) &= u'(b), \\ p(a) &= p(b). \end{aligned}$$

Por demostrar que $(Lu, v) = (u, Lv)$. Es suficiente ver que

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (u, Lv) &= \int_a^b (vL\overline{u} - \overline{u}Lv)\, dx \\ &= \left[p(x)\left(v(x)\frac{d\overline{u}}{dx} - \overline{u}(x)\frac{dv}{dx}\right)\right]_a^b. \end{aligned}$$

Ahora, evaluando y tomando en cuenta las hipótesis, obtenemos que

$$= p(b)\left(v(b)\frac{d\overline{u}}{dx} - \overline{u}(b)\frac{dv}{dx}\right) - p(a)\left(v(a)\frac{d\overline{u}}{dx} - \overline{u}(a)\frac{dv}{dx}\right) = 0.$$

Por lo, tanto L es auto-adjunto. $\blacksquare$

Problema 4.3

Muestre que en L^2 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2\, dx\right)$ el operador real $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$ no es auto-adjunto, pero el operador complejo $\mathcal{K} = i\mathcal{L}$ es auto-adjunto.

Solución.

Por definición de producto interior, tenemos que

$$(u, \mathcal{L}v) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}\mathcal{L}v dx.$$

Ahora

$$(u, \mathcal{L}v) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}\frac{dv}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}v' dx.$$

Si integramos por partes obtenemos

$$(\overline{u}v)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u'}v dx,$$

luego

$$(\overline{u}v)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\overline{u}}{dx} v dx = -(\mathcal{L}u, v).$$

Ya que el primer término tiende a cero, debido al espacio en el que estamos trabajando (L^2). Por tanto $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$ no es auto-adjunto.

Ahora para el operador complejo $\mathcal{K} = i\mathcal{L}$, tenemos que

$$(u, \mathcal{K}v) = i\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}\frac{dv}{dx} dx = i\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}v' dx.$$

Si integramos por partes obtenemos

$$i(\overline{u}v)|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u'}v dx,$$

luego

$$i(\overline{u}v)|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\overline{u}}{dx} v dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\overline{u}v dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\mathcal{K}\overline{u})v dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{K}u}v dx = (\mathcal{K}u, v).$$

Ya que el primer término tiende a cero, debido al espacio en el que estamos trabajando (L^2). Por lo tanto el operador complejo $\mathcal{K} = i\mathcal{L}$ si es auto-adjunto. ■

Problema 4.4

Muestre que el operador L definido por

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y, \qquad y(0) = A, \quad y'(\pi) = B,$$

donde α, A y B son constantes diferentes de cero, no es autoadjunto.

Solución.

Sabemos que

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^\pi (vL\overline{u} - \overline{u}Lv)dx.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
vL\overline{u} - \overline{u}Lv &= v\left(\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \alpha\overline{u}\right) - \overline{u}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha v\right). \\
&= v\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \alpha\overline{u}v - \overline{u}\frac{d^2v}{dx^2} - \alpha\overline{u}v, \\
&= v\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} - \overline{u}\frac{d^2v}{dx^2}, \\
&= \frac{dv}{dx}\frac{d\overline{u}}{dx} + v\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} - \frac{d\overline{u}}{dx}\frac{dv}{dx} - \overline{u}\frac{d^2v}{dx^2}, \\
&= \frac{d}{dx}\left(v\frac{d\overline{u}}{dx} - \overline{u}\frac{dv}{dx}\right),
\end{aligned}$$

por lo que volviendo a la integral, tenemos que

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^\pi (vL\overline{u} - \overline{u}Lv)dx = \left[v\frac{d\overline{u}}{dx} - \overline{u}\frac{dv}{dx}\right]_0^\pi.$$

Si la expresión anterior evaluamos obtenemos

$$= v(\pi)\overline{u}'(\pi) - \overline{u}(\pi)v(\pi) - (v(0)\overline{u}'(0) - \overline{u}(0)v(0)),$$

luego, evaluando las condiciones a la frontera, obtenemos

$$B[v(\pi) - \overline{u}(\pi)] - A[\overline{u}'(0) - v'(0)] \neq 0. \quad \blacksquare$$

Este problema muestra por qué las condiciones a la frontera necesitan ser homogéneas para que el operador sea autoadjunto. En el Problema 4.2.5

se verá que las condiciones a la frontera mixtas también pueden producir operadores no auto-adjuntos.

Propiedad 3. Los eigenvalores de un operador auto-adjunto son reales.

Si $\phi(x)$ es una eigenfunción correspondiente a un eigenvalor λ, entonces $L\phi = -\lambda w\phi$, y

$$(L\phi, \phi) = (-\lambda w\phi, \phi) = -\overline{\lambda}(w\phi, \phi).$$

También

$$(\phi, L\phi) = (\phi, -\lambda w\phi) = -\overline{\lambda}(\phi, w\phi),$$

y por lo tanto, como $w(x)$ es real,

$$0 = (L\phi, \phi) - (\phi, L\phi) = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b w(x) \left|\phi(x)\right|^2 dx.$$

Ya que $w(x) > 0$ y $\left|\phi(x)\right|^2 > 0$, para casi toda x, el término del lado derecho de la ecuación anterior puede ser cero solo si $\lambda = \overline{\lambda}$, esto es, los eigenvalores de un sistema de Sturm–Liouville son reales.

Esta prueba es válida para los sistemas regulares y singulares de Sturm–Liouville y si las condiciones a la frontera son periódicas.

Propiedad 4. Eigenfunciones con distintos eigenvalores son *ortogonales*. Ahora consideremos dos eigenfunciones $\phi(x)$ y $\varphi(x)$ que corresponden a distintos eigenvalores λ y μ, respectivamente, esto es $L\phi = -\lambda w\phi$ y $L\varphi = -\mu w\varphi$. Por la propiedad de auto-adjunto tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= (L\phi, \varphi) - (\phi, L\varphi) \\ &= -\lambda(w\phi, \varphi) + \mu(\phi, w\varphi) \\ &= (\mu - \lambda) \textstyle\int_a^b w(x)\overline{\phi(x)}\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Y como $\mu \neq \lambda$ se sigue que

$$\int_a^b w(x)\overline{\phi(x)}\varphi(x) = (\sqrt{w}\phi, \sqrt{w}\varphi) = 0. \tag{4.7}$$

En otras palabras, las eigenfunciones (con respecto a la función peso) con distintos eigenvalores son *ortogonales*, con respecto al producto interior (4.5). De otra manera, es conveniente redefinir el producto interior para hacer ortogonales las eigenfunciones.

Definición 4.3

El *producto interior modificado* es, para funciones apropiadas f y g,

$$(f, g) = \int_a^b w(x)\overline{f(x)}g(x)dx. \tag{4.8}$$

donde $w(x) > 0$ es llamada la *función peso* y es la misma función que multiplica el eigenvalor en la ecuación original de Sturm–Liouville. Utilizamos la misma notación para el producto interior como lo utilizamos anteriormente.

Entonces como hemos mostrado, los eigenvalores son reales y las eigenfunciones son ortogonales. Acontinuación enunciaremos un teorema dando resultados de gran importancia. Una parte de la demostración de este teorema puede encontrarse en libro de Young [15] (1988, Capítulo 11) ó en libro de Hartman (1964, Capítulo 11).

4.2 Teorema de Sturm–Liouville

Teorema 4.2.1 (Teorema de Sturm–Liouville).

Las soluciones de un sistema regular de Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0 \tag{4.9}$$

con las condiciones a la frontera homogéneas

$$\begin{aligned} C_1\phi(a) + C_2\phi'(a) = 0, \quad C_3\phi(b) + C_4\phi'(b) = 0 \\ C_1^2 + C_2^2 \neq 0, \quad C_3^2 + C_4^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *Eigenfunciones correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales con respecto a la función peso $w(x)$,*

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)dx = 0, \qquad \lambda_k \neq \lambda_j. \tag{4.11}$$

2. *Todos los eigenvalores son reales.*

3. *Para cada eigenvalor λ_j le corresponde una única (salvo una constante multiplicativa) eigenfunción $\phi_j(x)$, esto es, el sistema es no degenerado.*

4. *Cualquier eigenvalor se puede relacionar con su eigenfunción mediante el cociente de Rayleigh*

$$\lambda = \frac{-p(x)\phi(x)\phi'(x)|_a^b + \int_a^b \{p(x)[\phi'(x)]^2 - q(x)\phi^2(x)\}dx}{\int_a^b w(x)\phi^2(x)dx}.$$

5. *Existe una sucesión infinita de eigenvalores $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$. Si ϕ_j es una eigenfunción del sistema regular correspondiente a λ_j, entonces la sucesión $(w^{1/2}\phi_j)_{j=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal completo en el espacio $L^2(a,b)$.*

Demostración.

1. Eigenfunciones correspondientes e distintos eigenvalores son ortogonales con respecto a la función peso $w(x)$,

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)dx = 0, \qquad \lambda_k \neq \lambda_j.$$

   Sean λ_j y λ_k dos eigenvalores distintos con sus respectivas eigenfunciones $\phi_j(x)$, $\phi_k(x)$, esto es:

$$\mathfrak{L}\phi_j + \lambda_j w\phi_j = 0,$$
$$\mathfrak{L}\phi_k + \lambda_k w\phi_k = 0,$$

   con

$$\mathfrak{L}u = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u,$$

   donde las eigenfunciones satisfacen las condiciones a la frontera ya especificadas al inicio del teorema.

Si utilizamos la fórmula de Green,

$$\int_a^b [u\mathfrak{L}v - v\mathfrak{L}u]\, dx = p(x)(uv' - vu')\big|_a^b ,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [\phi_j \mathfrak{L}\phi_k - \phi_k \mathfrak{L}\phi_j]\, dx = 0,\\
&\int_a^b [-\lambda_j w\phi_j\phi_k + \lambda_k w\phi_k\phi_j]\, dx = 0,\\
&\int_a^b (\lambda_k - \lambda_j) w\phi_k\phi_j dx = 0,\\
&(\lambda_k - \lambda_j)\int_a^b w\phi_k\phi_j dx = 0,
\end{aligned}$$

y como por la hipótesis $\lambda_j \neq \lambda_k$, debemos tener que

$$\int_a^b w\phi_k\phi_j dx = 0,$$

lo cual quiere decir que ϕ_j y ϕ_k son ortogonales con respecto a la función peso w en el intervalo (a, b). ■

El resultado anterior nos será de gran ayuda para probar el siguiente inciso:

2. Todos los eigenvalores son reales.

Supongamos que λ es un eigenvalor complejo con eigenfunción $\phi(x)$, i.e.

$$\mathfrak{L}\phi + \lambda w\phi = 0.$$

Si tomamos el complejo conjugado de la ecuación anterior, obtenemos (debido a que todos los coeficientes de la ecuación diferencial se suponen reales)

$$\mathfrak{L}\overline{\phi} + \lambda w\overline{\phi} = 0.$$

Ahora, las condiciones a la frontera para ϕ son

$$C_1\phi(a) + C_2\phi'(a) = 0,$$
$$C_3\phi(b) + C_4\phi'(b) = 0.$$

Tomando el complejo conjugado y tomando en cuenta que los C_i son reales, tenemos que

$$C_1\overline{\phi}(a) + C_2\overline{\phi'}(a) = 0,$$
$$C_3\overline{\phi}(b) + C_4\overline{\phi'}(b) = 0.$$

Por lo tanto, $\overline{\phi}$ satisface el mismo problema regular de Sturm–Liouville. Ahora utilizando de nuevo la fórmula de Green con $u = \phi$ y $v = \overline{\phi}$, y las condiciones a la frontera para ϕ y $\overline{\phi}$, tenemos

$$\int_a^b \left[\phi\mathfrak{L}\overline{\phi} - \overline{\phi}\mathfrak{L}\phi\right] dx = 0.$$

Llevando a cabo un proceso similar al primer inciso, obtenemos

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b w\phi\overline{\phi} = 0.$$

Luego, como ϕ es una eigenfunción, entonces ϕ es distinta de cero y $\phi\overline{\phi} = |\phi|^2 > 0$. Por lo tanto la integral es positiva ($w > 0$), por lo que $\lambda = \overline{\lambda}$, lo cual nos dice que λ es real y como tomamos un λ arbitrario, todos los eigenvalores son reales. ■

3. Para cada eigenvalor λ_j le corresponde una única (salvo una constante multiplicativa) eigenfunción $\phi_j(x)$, esto es, el sistema es no degenerado.

   Supongamos que existen dos eigenfunciones ψ_1 y ψ_2 que corresponden al mismo eigenvalor λ, entonces

$$\mathfrak{L}\phi_1 + \lambda w\phi_1 = 0, \tag{4.12}$$
$$\mathfrak{L}\phi_2 + \lambda w\phi_2 = 0. \tag{4.13}$$

   Si multiplicamos la ecuación (4.12) por ψ_2 y la ecuación (4.13) por ψ_1 y restando obtenemos

$$\psi_2\mathfrak{L}\phi_1 - \phi_1\mathfrak{L}\phi_2 = 0,$$

ya que λ es el mismo para ambas ecuaciones. Por otro lado, si utilizamos la identidad de Lagrange (4.4) tenemos

$$\psi_2 \mathcal{L} \phi_1 - \phi_1 \mathcal{L} \phi_2 = \frac{d}{dx}\left[p(\psi_2 \psi_1' - \psi_1 \psi_2')\right].$$

Si combinamos las dos ecuaciones anteriores, obtenemos después de integrar que

$$p(\psi_2 \psi_1' - \psi_1 \psi_2') = \text{constante},$$

y esa constante es cero pues p es periódica y las condiciones a la frontera son periódicas (ver Problema 4.2), por lo que

$$p(\psi_2 \psi_1' - \psi_1 \psi_2')\big|_b^a = 0.$$

Dividiendo ahora por p obtenemos

$$\psi_2 \psi_1' - \psi_1 \psi_2' = 0.$$

Ahora, si tomamos el lado izquierdo de la ecuación anterior nos queda que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right),$$

por lo que

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \text{constante},$$

lo cual implica que ψ_1 es múltiplo de ψ_2 y por lo tanto son la misma eigenfunción salvo una constante multiplicativa. ■

4. Cualquier eigenvalor se puede relacionar con su eigenfunción mediante el cociente de Rayleigh

$$\lambda = \frac{-p(x)\phi(x)\phi'(x)\big|_a^b + \int_a^b \{p(x)[\phi'(x)]^2 - q(x)\phi^2(x)\} dx}{\int_a^b w(x)\phi^2(x) dx}.$$

Tenemos el sistema de Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + \left(q(x) + \lambda w(x)\right)\phi(x) = 0.$$

Si multiplicamos por $\phi(x)$ obtenemos

$$\phi(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))\,\phi^2(x) = 0.$$

Ahora, si integramos llegamos a que

$$\int_a^b \left[\phi(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))\,\phi^2(x)\right] dx = 0.$$

Luego, si separamos la integral con el fin de despejar λ, nuestra integral queda de la siguiente manera:

$$\int_a^b \left[\phi(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + q(x)\phi^2(x)\right] dx + \lambda\int_a^b w(x)\phi^2(x)dx = 0.$$

Ahora si despejamos λ obtenemos

$$\lambda = \frac{-\int_a^b \phi(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right)dx - \int_a^b q(x)\phi^2(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi^2(x)dx}.$$

Utilizando integración por partes en la primera integral del numerador obtenemos

$$\lambda = \frac{\int_a^b p(x)[\frac{d\phi(x)}{dx}]^2 - \int_a^b q(x)\phi^2(x)dx - p(x)\phi(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\Big|_a^b}{\int_a^b w(x)\phi^2(x)dx},$$

el cual es el cociente de Rayleigh. ■

5. Existe una sucesión infinita de eigenvalores $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$. Si ϕ_j es una eigenfunción del sistema regular correspondiente a λ_j, entonces la sucesión $(w^{1/2}\phi_j)_{j=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal completo en el espacio $L^2(a, b)$.

La demostración de este inciso no es expuesta en este trabajo por su complejidad. La demostracion la puede encontrar en [15].

Problema 4.2.1

Si $\phi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, son ortogonales con respecto a la función peso $w(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, muestre que el error cuadrado promedio,

$$E_N = \int_a^b w(x) \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x) \right|^2 dx$$

es minimizado mediante

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x) \overline{\phi}_k(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) \left|\phi_k(x)\right|^2} = \frac{(\phi_k, f)}{(\phi_k, \phi_k)}.$$

Solución.

La demostración la veremos en dos casos.

- Supongamos que las eigenfunciones están en $\mathbb{R}$.

Tenemos que

$$E_N = \int_a^b w(x) \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x) \right|^2 dx.$$

Si desarrollamos esta expresión vemos que

$$E_N = \int_a^b w(x) \left[f(x)^2 - 2f(x) \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x) + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \phi_k^2(x) \right] dx.$$

Ahora, si los ponemos en forma de producto interior obtenemos

$$(f, f) - 2 \sum_{k=1}^{N} (\phi_k, \phi_k) \left(a_k - \frac{(f, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \right)^2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{(f, \phi_k)^2}{(\phi_k, \phi_k)}.$$

De la ecuación anterior vemos que el mínimo tiene que ser de la forma

$$a_k = \frac{(f, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} = \frac{\int_a^b w(x) \overline{\phi}_k(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) \left|\phi_k(x)\right|^2}.$$

- Supongamos ahora que las eigenfunciones están en $\mathbb{C}$.

Luego

$$E_N = \int_a^b w(x) \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x) \right|^2 dx.$$

Si desarrollamos lo anterior vemos que

$$E_N = \int_a^b w(x) \left[f(x)^2 - 2f(x) \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x) + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \phi_k^2(x) \right] dx.$$

Ahora, si los ponemos en forma de producto interior obtenemos

$$(f, f) - \sum_{k=1}^{N} \overline{a}_k (\phi_k, f) + \sum_{k=1}^{N} a_k (f, \phi_k) - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 (\phi_k, \phi_k).$$

Para encontrar el mínimo, veamos como nos queda su derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial a_n} &= -(f, \phi_n) + \overline{a_n}(\phi_n, \phi_n) = 0, \\ \frac{\partial E_n}{\partial \overline{a_n}} &= -(\phi_n, f) + a_n(\phi_n, \phi_n) = 0, \end{aligned}$$

por lo que, si despejamos

$$\begin{aligned} \overline{a_n} &= \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}, \\ a_n &= \frac{(\phi_n, f)}{(\phi_n, \phi_n)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_n}{\partial a_k \partial a_j} &= 0, \quad k \neq j, \\ \frac{\partial^2 E_n}{\partial a_k^2} &= (\phi_k, \phi_k) > 0. \end{aligned}$$

Lo cual queríamos demostrar. ■

Problema 4.2.2

En Problema 3.3.1 del Capítulo 3, encontramos los siguientes conjuntos de eigenfunciones, $y_n(x)$, y eigenvalores, $\lambda_n = \omega_n^2$:

(i) $y_n(x) = \cos \omega_n x$, $\omega_n = n$, $n = 0, 1, \ldots$.

(ii) $y_n(x) = \operatorname{sen} \omega_n x$, $\omega_n = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$.

(iii) $y_n(x) = \operatorname{sen} \omega_n x$, donde $\tan \pi\omega_n = \omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, y
$y_0(x) = \operatorname{senh} \nu_0 x$, donde $\tanh \nu_0 \pi = \nu_0$, $\lambda_0 = -\nu_0^2$,

para la ecuación $d^2y/dx^2 + \lambda y = 0$ con tres diferentes condiciones a la frontera. El teorema de Sturm–Liouville muestra que cada uno de estos conjuntos de funciones es completo en $(0, \pi)$. Utilice este resultado para mostrar que

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2k + 1x}{(2k+1)^2}, \\
x &= \frac{8}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1/2)^2} \right) \operatorname{sen}((n+1/2)x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1/2)^2} \right) \operatorname{sen}((n+1/2)x), \\
x &= \frac{-4\left(\pi \cosh(\nu_0\pi)\nu_0 - \operatorname{senh}(\nu_0\pi)\right)}{\nu_0\left(2\nu_0\pi - \operatorname{senh}(2\nu_0\pi)\right)} \operatorname{senh}(\nu_0 x) \\
+ & \sum_{1}^{\infty} \frac{-4\left(\pi \cos(w_n\pi) w_n + \operatorname{sen}(w_n\pi)\right)}{w_n\left(2w_n\pi - \operatorname{sen}(2w_n\pi)\right)} \operatorname{sen}(w_k x).
\end{aligned}
$$

Solución.

Aproximaremos $f(x) = x$, para eso tomaremos los respectivos coeficientes de Fourier:

(i) $y_n(x) = \cos \omega_n x$, $\omega_n = n$, $n = 0, 1, \ldots$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{\int_0^\pi f(x)\phi_n(x)dx}{\int_0^\pi |\phi_n(x)|^2 dx} = \frac{\int_0^\pi x\cos(nx)dx}{\int_0^\pi \cos^2(nx)dx} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} = -\frac{2}{\pi}\frac{1 - \cos(n\pi)}{n^2} \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^n)}{n^2}, \quad n \neq 0,
\end{aligned}
$$

y como

$$f(x) = x = a_0\phi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k(x),$$

tenemos que

$$\sum_{0}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right)\cos(nx) = \sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} - \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Si tomamos las primeras sumas, podemos ver que el comportamiento es

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Ahora veremos para el segundo caso,

(ii) $y_n(x) = \operatorname{sen}\omega_n x$, $\omega_n = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\int_0^\pi f(x)\phi_n(x)dx}{\int_0^\pi |\phi_n(x)|^2\,dx} = \frac{\int_0^\pi x\operatorname{sen}((n+1/2)x)dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2((n+1/2)x)dx} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n)}{(n+1/2)^2}, \end{aligned}$$

y tenemos que

$$a_0 = \frac{\int_0^\pi x\operatorname{sen}((x/2)dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x/2)dx} = \frac{4}{\pi/2} = \frac{8}{\pi},$$

y como

$$f(x) = x = a_0\phi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k(x),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1/2)^2}\right)\operatorname{sen}((n+1/2)x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1/2)^2}\right)\operatorname{sen}((n+1/2)x). \end{aligned}$$

Ahora veamos el tercer caso,

(iii) $y_n(x) = \operatorname{sen}\omega_n x$, donde $\tan \pi\omega_n = \omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$ y $y_0 = \operatorname{senh}\nu_0 x$ con $\tanh \nu_0\pi = \nu_0$ y $\lambda_0 = -\nu_0^2$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\int_0^\pi x \operatorname{senh}(\nu_0 x) dx}{\operatorname{senh}^2(\nu_0 x) dx} \\
&= \frac{\frac{1}{\nu_0}\left[x \cosh(\nu_0 x) - \frac{1}{\nu_0}\operatorname{senh}(\nu_0 x)\right]_0^\pi}{\frac{1}{\nu_0}\left[\frac{1}{4}\operatorname{senh}(2\nu_0 x) - \frac{1}{2}\nu_0 x\right]_0^\pi} \\
&= \frac{-4\left(\pi \cosh(\nu_0\pi)\nu_0 - \operatorname{senh}(\nu_0\pi)\right)}{\nu_0\left(2\nu_0\pi - \operatorname{senh}(2\nu_0\pi)\right)}.
\end{aligned}$$

Ahora, obtendremos a_n

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\int_0^\pi x \operatorname{sen}(w_n x) dx}{\operatorname{sen}^2(w_n x) dx} \\
&= \frac{-\frac{1}{w_n}\left[x \cos(w_n x) - \frac{1}{w_n}\operatorname{sen}(w_n x)\right]_0^\pi}{\frac{1}{w_n}\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2w_n x) - \frac{1}{2}w_n x\right]_0^\pi} \\
&= \frac{-4\left(\pi \cos(w_n\pi)w_n + \operatorname{sen}(w_n\pi)\right)}{w_n\left(2w_n\pi - \operatorname{sen}(2w_n\pi)\right)}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f(x) = x &= a_0 \operatorname{senh}(\nu_0 x) + \sum_1^\infty a_k \operatorname{sen}(w_k x) \\
&= \frac{-4\left(\pi \cosh(\nu_0\pi)\nu_0 - \operatorname{senh}(\nu_0\pi)\right)}{\nu_0\left(2\nu_0\pi - \operatorname{senh}(2\nu_0\pi)\right)} \operatorname{senh}(\nu_0 x) \\
&+ \sum_1^\infty \frac{-4\left(\pi \cos(w_n\pi)w_n + \operatorname{sen}(w_n\pi)\right)}{w_n\left(2w_n\pi - \operatorname{sen}(2w_n\pi)\right)} \operatorname{sen}(w_k x).
\end{aligned}$$

Lo cual culmina nuestro problema. ■

La afirmación del Teorema de Sturm–Liouville que las eigenfunciones son ortogonales con respecto a la función peso $w(x)$ y forman un conjunto completo de funciones, significa que cualquier función $f(x)$, para la cual $\int_a^b |f(x)|^2\, dx$ existe, puede ser representada por la serie infinita

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \phi_k()x, \quad a_k = \frac{\int_a^b w(x)\overline{\phi_k}(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x)\left|\phi_k(x)\right|^2} = \frac{(\phi_k, f)}{(\phi_k, \phi_k)}, \tag{4.14}$$

la cual converge en el sentido de la norma,

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k\phi_k(x)\right|^2 dx = 0.$$

La expansión en la ecuación (4.14) es una generalización de expansiones de series de Fourier. En textos modernos el término *series de Fourier* aplica a las expansiones usando conjuntos de funciones ortogonales completos. Si es necesaria una distinción, las series de Fourier originales son llamadas *series trigonométricas*. Los coeficientes a_k en la ecuación (4.14) son llamados *coeficientes de Fourier*.

El teorema de Sturm–Liouville es muy poderoso, pero tiene una falla: es válido solamente para problemas regulares, ya hemos visto que muchos casos importantes que surgen en la práctica son singulares o tienen condiciones a la frontera periódicas.

La extensión a sistemas singulares generales es problemática porque no todos los sistemas singulares tienen eigenvalores (ver Problema 4.2.3). Sin embargo, casi todas las ecuaciones diferenciales que ocurren en aplicaciones físicas surgen de tipos particulares de principios de variaciones, los cuales también pueden utilizarse para mostrar que el sistema de Sturm–Liouville resultante es completo y que las propiedades de las eigenfunciones son similares a las propiedades de un sistema de Sturm–Liouville regular. Tales métodos pueden ser encontrados en el libro de Courant y Hilbert (1965, Capítulo 6).

Problema 4.2.3

Muestre que el sistema singular de Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0, \qquad y(1) = 0,$$

con $y(x)$ acotada por $0 \le x \le 1$, no tiene eigenvalores.

Solución.

Primero, supongamos una solución en la forma $y = x^a$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} y' &= ax^{a-1}, \\ y'' &= a(a-1)x^{x-2}. \end{aligned}$$

Si sustituimos en nuestro sistema singular, vemos que

$$\begin{aligned}
& a(a-1)x^2x^{a-2} + 2axx^{a-1} + \lambda x^a \\
= \;& a(a-1)x^a + 2ax^a + \lambda x^a \\
= \;& (a(a-1) + 2a + \lambda)x^a \\
= \;& (a(a+1) + \lambda)x^a = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -a(a+1).
\end{aligned}$$

Por lo que nuestro sistema no puede tener eigenvalores.

Ahora, suponemos una solución más general, $y = x^a v(x)$, luego, si tomamos su primera y segunda derivada, obtenemos

$$\begin{aligned}
y' &= ax^{a-1}v(x) + x^a v'(x), \\
y'' &= a(a-1)x^{x-2}v(x) + ax^{a-1}v'(x) + ax^{a-1}v'(x) + x^a v''(x),
\end{aligned}$$

por tanto, si sustituimos en el sistema singular, podemos ver que

$$\begin{aligned}
& x^2y'' + 2xy' + \lambda y = 0 \\
= \;& x^2\left[a(a-1)x^{x-2}v(x) + 2ax^{a-1}v'(x) + x^a v''(x)\right] \\
& +2x\left[ax^{a-1}v(x) + x^a v'(x)\right] + \lambda x^a v(x) = 0 \\
= \;& x^a\left[a(a-1)v(x) + 2av(x) + \lambda v(x)\right] \\
& +x^{a+1}\left[2av'(x) + 2v'(x)\right] + x^{a+2}v''(x) = 0 \\
= \;& x^{a+2}v''(x) + x^{a+1}v'(x)[2(a+1)] + x^a v(x)[a(a+1) + \lambda] = 0.
\end{aligned}$$

Ahora trataremos de ver cúales pueden ser sus eigenvalores.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \quad \lambda = -a(a+1), \\
v'' \;=\; & -\frac{2(a+1)}{x}v', \\
v'' \;+\; & \frac{2(a+1)}{x}v' = 0.
\end{aligned}$$

Para resolver esta nueva ecuación, supongamos una solución de la forma $v = x^m$, luego su primera y segunda derivada son de la forma:

$$\begin{aligned}
v' &= mx^{m-1}, \\
v'' &= m(m-1)x^{m-2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & m(m-1)x^{m-2} + \frac{2(a+1)}{x} m x^{m-1} = 0, \\
= \quad & x^{m-2}\left\{m\left[(m-1)+2(a+1)\right]\right\} = 0, \\
m_1 \quad = \quad & 0, \\
m_2 \quad = \quad & -(2a+1),
\end{aligned}
$$

luego la solución es de la forma

$$v(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} = c_1 + \frac{c_2}{x^{2a+1}}.$$

Por tanto, si vemos la solución para $0 \leq x \leq 1$, nuestro sistema no puede tener eigenvalores. ∎

Problema 4.2.4

Considere el problema de Sturm–Liouville con condiciones a la frontera

$$y(a) = y(b) = 0 \quad o \quad y(a) = y'(b) = 0 \quad o \quad y'(a) = y(b) = 0.$$

Si $\phi_k(x)$ es la eigenfunción normalizada, $(\phi_k, \phi_k) = 1$, del eigenvalor λ_k, utilice la identidad

$$\lambda_k = \int_a^b \lambda_k w(x) \phi_k(x)^2 dx$$

para mostrar que

$$\lambda_k = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{d\phi_k}{dx} \right)^2 - q(x)\phi_k(x)^2 \right] - \left[p(x)\phi_k \frac{d\phi_k}{dx} \right]_a^b.$$

Deduzca que si $q(x) \leq 0$ para $a < x < b$ todos los eigenvalores son positivos.

Solución.

Tenemos que

$$\lambda_k = \int_a^b \lambda_k w(x)\phi_k(x)^2 dx = \lambda_k \int_a^b w(x)\phi_k(x)^2 dx,$$

luego, como

$$(p\phi_k')' + q\phi_k = -\lambda w \phi_k.$$

Si sustituimos en la integral anterior, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&= -\int_a^b \left[\phi_k (p\phi_k')' + q\phi_k^2\right] dx \\
&= -\int_a^b \phi_k (p\phi_k')' dx - \int_a^b q\phi_k^2 dx.
\end{aligned}
$$

Si resolvemos la primera integral por partes vemos que

$$
\begin{aligned}
&= -\left[p\phi_k\phi_k'\big|_a^b - \int_a^b p(\phi_k')^2 dx\right] - \int_a^b q\phi_k^2 dx \\
&= -\, p\phi_k\phi_k'\big|_a^b + \int_a^b p(\phi_k')^2 dx - \int_a^b q\phi_k^2 dx \\
&= \int_a^b \left[p(\phi_k')^2 - q\phi_k^2\right] dx - p\phi_k\phi_k'\big|_a^b \\
&= \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{d\phi_k(x)}{dx}\right)^2 - q(x)\phi_k^2(x)\right] - \left[p(x)\phi_k(x)\frac{d\phi_k(x)}{dx}\right]_a^b. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Problema 4.2.5

Considere el siguiente sistema de Sturm-Liouville con condiciones a la frontera mixtas:

$$
\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = ay'(0), \qquad a > 0.
$$

Muestre que si $0 < a < \pi$, existe un número finito de eigenvalores reales dados por las raíces reales de la ecuación $\operatorname{sen}\omega\pi = a\omega, (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$, con $\lambda = \omega^2$ y con eigenfunciones $y_n(x) = \operatorname{sen}\omega_k x$. ?'Son ortogonales estas eigenfunciones?

Muestre también que existe un número infinito de eigenvalores complejos, también dados por los ceros de la ecuación $\operatorname{sen}\omega\pi = a\omega$.

Solución.

Haremos lo mismo que hacíamos para los problemas anteriores, veremos el comportamiento para cada caso de λ

- caso 1) $\lambda < 0$.

Tenemos que la solución general es de la forma:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \cosh(\sqrt{|\lambda|}x), & \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 x, \qquad \lambda = 0, \\ C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

$$y'(x) = \begin{cases} C_1\sqrt{|\lambda|} \cosh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2\sqrt{|\lambda|} \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}x), & \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 x, \quad \lambda = 0, \\ C_1\sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{\lambda}x) - C_2\sqrt{|\lambda|} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Por lo que si sustituimos las condiciones a la frontera especificadas en nuestro problema obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0, \\ y(\pi) - ay'(0) &= C_1 \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\pi) - aC_1\sqrt{|\lambda|} = 0 \\ &= C_1 \left(\operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\pi) - a\sqrt{|\lambda|}\right) = 0, \end{aligned}$$

luego, tenemos dos opciones,

$$\begin{aligned} & C_1 = 0, \\ & \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\pi) = a\sqrt{|\lambda|}, \\ \Rightarrow \; & \operatorname{senh}(\omega\pi) = a\omega, \omega^2 = \lambda, \end{aligned}$$

con $0 \leq a \leq \pi$.

Conclusión: no existen eigenvalores negativos para $0 \leq a \leq \pi$.

- Caso 2) $\lambda > 0$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0, \\ y(\pi) - ay'(0) &= C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) - aC_1\sqrt{\lambda} = 0 \\ &= C_1 \left(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) - a\sqrt{\lambda}\right) = 0, \end{aligned}$$

luego, tenemos dos opciones,

$$\begin{aligned} & C_1 = 0, \\ & \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = a\sqrt{\lambda}, \\ \Rightarrow \; & \operatorname{sen}(\omega\pi) = a\omega, \omega^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Si corremos $0 \leq a \leq \pi$, vemos que la solución $\operatorname{sen}(\omega\pi) = a\omega, \omega^2 = \lambda$ posee una infinidad de soluciones como muestra la siguiente figura en $\operatorname{sen}(\omega\pi) = 0$:

Figura 4.2.1

Ahora, veamos si las soluciones son ortogonales,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\pi \operatorname{sen}(\omega_n x) \operatorname{sen}(\omega_m x) dx \\
= \; & \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\cos\left[(\omega_n - \omega_m)x\right] - \cos\left[(\omega_n + \omega_m)x\right]\right] dx \\
= \; & \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\left[(\omega_n - \omega_m)x\right] dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\left[(\omega_n + \omega_m)x\right] dx,
\end{aligned}
$$

luego, si integramos obtenemos

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_n - \omega_m} \operatorname{sen}\,(\omega_n - \omega_m)x\Big|_0^\pi - \frac{1}{\omega_n + \omega_m} \operatorname{sen}\,(\omega_n + \omega_m)x\Big|_0^\pi\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_n - \omega_m} \operatorname{sen}(\omega_n - \omega_m)\pi - \frac{1}{\omega_n + \omega_m} \operatorname{sen}(\omega_n + \omega_m)\pi\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_n - \omega_m}\left(\operatorname{sen}(\omega_n\pi)\cos(\omega_m\pi) - \cos(\omega_n\pi)\operatorname{sen}(\omega_m\pi)\right)\right. \\
& \left. - \frac{1}{\omega_n + \omega_m}\left(\operatorname{sen}(\omega_n\pi)\cos(\omega_m\pi) + \cos(\omega_n\pi)\operatorname{sen}(\omega_m\pi)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Y como $\operatorname{sen}(\omega\pi) = a\omega$, entonces

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_n - \omega_m}\left(a\omega_n \cos(\omega_m \pi) - \cos(\omega_n \pi) a\omega_m\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega_n + \omega_m}\left(a\omega_n \cos(\omega_m \pi) + \cos(\omega_n \pi) a\omega_m\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega_n + \omega_m)\left[a\omega_n \cos(\omega_m \pi) - \cos(\omega_n \pi) a\omega_m\right]}{\omega_n^2 - \omega_m^2}\right.\\
&- \left.\frac{(\omega_n - \omega_m)\left[a\omega_n \cos(\omega_m \pi) + \cos(\omega_n \pi) a\omega_m\right]}{\omega_n^2 - \omega_m^2}\right].
\end{aligned}
$$

Si hacemos el desarrollo de la expresión anterior obtenemos

$$
= \frac{a\omega_m\omega_n\left[\cos(\omega_m \pi) - \cos(\omega_n \pi)\right]}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \neq 0.
$$

Ahora, en el caso $n = m$ la integral nos quedaría en la forma

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_m x)dx\\
&= \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(\omega_n x)dx\\
&= \left[\frac{1}{2}(\omega_n x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\omega_n x)\right]_0^\pi\\
&= \frac{1}{2}(\omega_n \pi) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\omega_n \pi)\\
&= \frac{1}{2}(\omega_n \pi) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\omega_n \pi)\cos(\omega_n \pi)\\
&= \frac{1}{2}\left[\omega_n \pi - a\omega_n \cos(\omega_n \pi)\right]\\
&= \frac{\omega_n}{2}\left[\pi - a\cos(\omega_n \pi)\right].
\end{aligned}
$$

Conclusión: Las eigenfunciones no son ortogonales. ■

4.3 Cota Inferior de Eigenvalores

El teorema de Sturm–Liouville establece que los eigenvalores λ_k tienen cota inferior pero no tienen cota superior. En la primera vista, esta asimetría parece anormal, por lo que aquí daremos una explicación eurística.

Supongamos que $y(x)$ es una eigenfunción de la ecuación de Sturm–Liouville con eigenvalor λ. Suponemos que y es normalizada a la unidad, entonces

$$\lambda = \lambda \int_a^b w(x)y(x)^2 dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy \right) y dx.$$

La segunda ecuación se sigue de la sustitución de wy usando la ecuación original (4.9).

Ahora integramos el primer término por partes para reescribirla en la forma

$$\lambda = \int_a^b \left(p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - qy^2 \right) dx - \left[py\frac{dy}{dx} \right]_a^b .$$

Si suponemos que los términos de frontera tienden a cero (que puede ocurrir en muchos casos), tenemos

$$\lambda = \int_a^b \left(p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - qy^2 \right) dx. \tag{4.15}$$

Si $q(x) \leq 0$ entonces $\lambda > 0$. Si $0 < q(x) < Q$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b qy^2 dx \leq Q \int_a^b y^2 dx \leq \frac{Q}{\min(w(x))}.$$

Por lo tanto λ tiene cota inferior.

Una explicación más rigurosa y general de este problema puede ser encontrado en el libro de Courant y Hilbert (1965, Capítulo 6, Sección 5).

La expresión (4.15) para λ también muestra por que los eigenvalores no tienen cota superior. El n-ésimo eigenvalor tiene $n-1$ ceros en $a < x < b$, y ya que y es normalizada a la unidad, $|y_n'(x)|$ es proporcional a n. Por lo tanto la ecuación (4.15) muestra que $\lambda_n \sim n^2$.

Conclusiones

El objetivo principal de la presente tesis fue el analizar el comportamiento de los eigenvalores y eigenfunciones de los sistemas de tipo Sturm—Liouville para el caso regular, lo cual se llevo a cabo durante el transcurso de nuestro trabajo, en particular, en nuestro último capítulo donde pudimos constatar mediante el Teorema de Sturm–Liouville, que eigenfunciones correspondientes a diferentes eigenvalores son ortogonales con respecto a la función peso w, que todos los eigenvalores de un sistema de Sturm–Liouville regular son reales y simples, que a cada eigenvalor le corresponde una única eigenfunción salvo una constante multiplicativa, así como también que la sucesión de eigenfunciones $(w^{1/2}\phi_j)_1^\infty$ forman un sistema ortogonal completo en el espacio $L^2(a,b)$, entre otros.

En los primeros capítulos uno de los objetivos principales fue dar a conocer como los matemáticos Joseph Liouville y Charles François Sturm, formaron la teoría ahora conocida como Teoría de Sturm–Liouville, el cual creo que se cumplió satisfactoriamente. Otro de los objetivos fue dar a conocer cómo se compone un sistema de Sturm-Liouville y que lo caracteriza, así como algunas de las propiedades más importantes de este tipo de sistemas.

Los siguientes capítulos fueron dedicados a mostrarnos algunos de los problemas y ejemplos más sobresalientes de sistemas del tipo Sturm–Liouville, vimos mediante algunas demostraciones y ejemplos como se cumplen algunas propiedades para el operador de Sturm–Liouville como la propiedad de auto-adjunto, por mencionar un ejemplo.

Concluimos nuestro trabajo de tesis con la demostración del Teorema de Sturm–Liouville como lo más prominente de la teoría de Sturm–Liouville, el cual nos muestra las propiedades mas importantes para el caso de sistemasde Sturm–Liouville regulares. Con ésto creemos que este trabajo de tesis cumple con su objetivo principal, el hacer un análisis de sistemas de Sturm–Liouville.

Bibliografía

[1] Borelli, R., Coleman, C. Differential Equations. A Modeling Approach. *Prentice Hall* (1987)

[2] Campbell, S., Haberman, R. Introduction to Differential Equations with Boundary Value Problems. *Houghton Mifflin Company* (1996)

[3] Edwards, H., Penney, D. Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. *Prentice Hall* (2000)

[4] Farlow, S. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. *Dover Publications* (1993)

[5] Lutzen, J. Joseph Liouville 1809-1882: Master of pure and applied Mathematics. *Springer–Verlag* (1990)

[6] Nagle,K., Saff, E., Snider, A. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores a la Frontera. *Pearson* (2005)

[7] Neta, B. Partial Differential Equations MA 3132 Lecture Notes, *Department of Methematics Naval Postgraduate School*, Monterrey, California 93943, March 14, 2003.

[8] Richards, D. Advanced Mathematical Methods With Maple. *Cambridge University Press* (2002)

[9] Sánchez G., J.I., Shingareva I., García A., M.G. Introducción a la Teoría de Perturbaciones Usando Álgebra Computacional. *Mosaicos Matemáticos, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, Dávila Rascón, G. y Verduzco González, F. (Editores)* **14** (2004) 149–155.

[10] Shingareva, I. Investigation of Standing Surface Waves in a Fluid of Finite Depth by Computer Algebra Methods. PhD thesis, *Institute for Problems in Mechanics*, RAS, Moscow, 1995.

[11] Shingareva, I., Sekerzh-Zenkovich, S.Ya., García A., M. G. Ninth-Order Analytic Solution of Free Standing Gravity Waves in Fluid of Infinite Depth. *Bull. ERCOFTAC (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion)* **52** (2002) 37–41.

[12] Shingareva, I. and Lizárraga-Celaya, C. High Order Asymptotic Solutions to Free Standing Water Waves by Computer Algebra. *Proceedings of the Maple Summer Workshop, Waterloo, Ontario, Canada, R.J. Lopez (Editor)* (2004) 1–28.

[13] Shingareva, I. y Lizárraga-Celaya, C. Curva Crítica en Estructuras de Fluidos. *Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, México* **34** (2004) 57–72.

[14] Shingareva, I., Lizárraga Celaya, C., and Ochoa Ruiz, A.D. Maple y Ondas Estacionarias. Problemas y Soluciones. *Editorial Unison (Universidad de Sonora), Hermosillo, México* (2006)

[15] Young, N. An Introduction to Hilbert Space, *Cambridge University Press*, 1997.