

# CONTROL DE LA BIFURCACIÓN DE HOPF

*Juan Andrés Castillo Valenzuela*

Mayo del 2007



# Agradecimientos

---

**A mis padres** quienes con mucho esfuerzo y sacrificio pudieron darme una educación y a quienes les debo la persona que soy.

**A mi maestro y amigo el Dr. Fernando Verduzco** por haberme dado la oportunidad de hacer este trabajo con él.

**Al Centro Cultural Universitario**, un lugar muy especial el cual me dió alojamiento para poder realizar mis estudios y en donde conocí varios amigos.

**A mis amigos**



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Herramientas Matemáticas</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de la Variedad Central . . . . .	9
2.1.1. La Variedad Central . . . . .	9
2.1.2. Teorema de la Variedad Central . . . . .	11
2.1.3. Cálculo de la Variedad Central . . . . .	12
2.1.4. Variedad Central dependiente de parámetros . . . . .	14
2.2. Teorema de la Bifurcación de Hopf . . . . .	14
2.2.1. La Bifurcación de Hopf . . . . .	14
2.2.2. Teorema de la Bifurcación de Hopf . . . . .	18
2.3. Control de una Bifurcación . . . . .	20
<b>3. Control de la Bifurcación de Hopf</b>	<b>23</b>
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	23
3.2. Caso $b_1 = 0$ . . . . .	25
3.2.1. Variedad Central . . . . .	26
3.2.2. Dinámica sobre la Variedad Central . . . . .	34
3.2.3. Diseño de la ley de control . . . . .	39
3.2.4. Teorema Principal . . . . .	42
3.2.5. Ejemplo . . . . .	43
3.3. Caso $b_1 \neq 0$ . . . . .	50
3.3.1. Variedad Central . . . . .	51
3.3.2. Dinámica sobre la Variedad Central . . . . .	54
3.3.3. Diseño de la ley de control . . . . .	56
3.3.4. Teorema Principal . . . . .	58
3.3.5. Ejemplo . . . . .	58
<b>4. Una aplicación al péndulo de Furuta</b>	<b>65</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>



---

# Capítulo 1

## Introducción

---

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son ampliamente utilizadas para modelar fenómenos o procesos que evolucionan de manera continua en el tiempo. Fué Issac Newton, hace más de 300 años, quien tuvo que inventar esta herramienta matemática para poder dar una explicación de cómo funcionaba el universo. Desde entonces, las ecuaciones diferenciales se han utilizado en áreas como la física, química, biología, ingeniería, economía, etc. Asimismo, su gran desarrollo, junto con la llegada de las computadoras, ha propiciado la creación de nuevas áreas del conocimiento, como la apasionante teoría del caos.

Inicialmente, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias se limitó a un *estudio cuantitativo*: se desarrollaron métodos analíticos para tratar de encontrar las soluciones explícitamente, es decir, tratar de expresar las soluciones en términos de funciones elementales. Con el tiempo, se encontró que la familia de ecuaciones diferenciales de interés práctico, que se podía resolver usando métodos analíticos, era realmente pequeña, y el enfoque cambió. En vez de tratar de encontrar las soluciones explícitamente, se buscó mejor investigar el comportamiento de las soluciones a largo plazo, sin tener que resolver el problema cuantitativo, es decir, se buscó determinar el *comportamiento asintótico de las soluciones*. Este *enfoque cualitativo*, junto con el uso generalizado de las computadoras, ha propiciado la creación de métodos más bien geométricos que analíticos.

En general dado un sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  es imposible resolverlo, es decir, no es posible encontrar una solución en términos de funciones elementales. Sin embargo, es posible obtener una gran cantidad de información de tipo cualitativo acerca del comportamiento local de las soluciones. El estudio de los sistemas dinámicos consiste en entender la geometría de las curvas solución en el espacio de fase.

Los sistemas dinámicos se definen como unas estructuras matemáticas que modelan fenómenos de la naturaleza y cuyo estado viene definido por una serie de variables que dependen del tiempo (variables de estado) y por una serie de leyes, una dinámica, que expresan las variaciones de las variables de estado a lo largo del tiempo, y que en los casos más sencillos suelen ser un sistema de ecuaciones diferenciales. La representación de los sistemas dinámicos se lleva a cabo en un espacio denominado espacio de fase en

el que cada punto define un estado y cada trayectoria una evolución del sistema.

En los problemas de aplicaciones es frecuente encontrar ecuaciones diferenciales cuyos campos vectoriales dependen de ciertos parámetros, los cuales tienen que ver con la problemática que se esté modelando. Por ejemplo, en problemas de poblaciones, los parámetros pueden representar tasas de nacimiento o mortalidad, mientras que en problemas de robótica, los parámetros suelen ser longitudes, centros de masas, etc. Por lo general sólo se tienen estimaciones para estos parámetros, las cuales dependen de que tanta información se tenga de la problemática que se pretende estudiar. Por ejemplo, en robótica es relativamente sencillo calcular ciertos parámetros, como longitudes y centros de masas, no así coeficientes de fricción. Un problema importante es entonces, analizar las soluciones de una ecuación diferencial cuyo campo vectorial depende de parámetros.

Ahora bien, la teoría de bifurcaciones estudia los cambios que ocurren en el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos ante la variación de parámetros. Las bifurcaciones se clasifican en estacionarias (estáticas) y dinámicas. Las primeras tienen que ver con cambios en la estructura de los puntos de equilibrio (en número ó estabilidad), mientras que las segundas con cambios en los ciclos límite (creación o destrucción de órbitas periódicas). La bifurcación de Hopf cae en la segunda clasificación (es generada una solución periódica).

En los últimos años ha habido un gran interés en sistemas de control que puedan exhibir fenómenos de bifurcación. Aplicaciones importantes han surgido en sistemas de potencia, lanzamiento de satélites, alteraciones cardíacas, robótica, etc. El objetivo en el control de bifurcaciones es diseñar un controlador que modifique las características del fenómeno de bifurcación en el sistema de control, como por ejemplo, desplazar arbitrariamente el punto de bifurcación en el espacio de parámetros, modificar la cuenca de atracción, modificar la amplitud de órbitas periódicas, cambiar la dirección de la bifurcación, etc.

En este trabajo estableceremos condiciones suficientes para controlar la bifurcación de Hopf en sistemas no-lineales. Usaremos la variedad central para reducir el sistema dinámico a dimensión dos y encontraremos expresiones en términos de los campos vectoriales originales.



# Herramientas Matemáticas

---

## 2.1. Teoría de la Variedad Central

### 2.1.1. La Variedad Central

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial suave. Sea  $x_0$  un punto de equilibrio hiperbólico de (2.1), es decir que  $Df(x_0)$  no tiene valores propios con parte real cero. Sabemos por el teorema de Hartman-Grobman, que el comportamiento de las soluciones cercanas a  $x_0$ , es topológicamente conjugado, a las soluciones del sistema linealizado

$$\dot{y} = (Df(x_0))y \tag{2.2}$$

Sea  $A = (Df(x_0))$  y sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sus valores propios.

**Teorema 2.1.** 1) Si  $Re(\lambda_i) < 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$  entonces el equilibrio  $x_0$  es asintóticamente estable en forma local. Es tipo atractor local (Sumidero).

2) Si  $Re(\lambda_i) > 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$  entonces el equilibrio  $x_0$  es inestable. Es tipo repulsor local (Fuente).

3) Si  $Re(\lambda_j) > 0$  para algún  $j$ , y  $Re(\lambda_k) < 0$  para algún  $k \neq j$  entonces el equilibrio  $x_0$  es inestable. Es un punto tipo silla.

4)  $Re(\lambda_i) = 0$  para algún  $j$ , entonces no se puede concluir nada sobre la estabilidad de  $x_0$ .

Clasifiquemos ahora los  $n$  vectores propios de  $A$ .  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$  son vectores propios (inclusive, generalizados) tales que sus respectivos valores propios tienen parte real

negativa,  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$  son vectores propios (inclusive, generalizados) tales que sus respectivos valores propios tienen parte real positiva y  $\{w_1, w_2, \dots, w_{n_3}\}$  son vectores propios (inclusive, generalizados) tales que sus respectivos valores propios tienen parte real cero. Observe que  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ .

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_1} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_2} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n_3} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Sean  $E^s = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n_1} \rangle = \{s_1 v_1 + s_2 v_2, \dots, s_{n_1} v_{n_1} \mid s_1, s_2, \dots, s_{n_1} \in \mathbb{R}\}$ , el espacio generado por  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$ .

$E^u = \langle u_1, u_2, \dots, u_{n_2} \rangle = \{s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_{n_2} u_{n_2} \mid s_1, s_2, \dots, s_{n_2} \in \mathbb{R}\}$  es el espacio generado por  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$ .

$E^c = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n_3} \rangle = \{s_1 w_1 + s_2 w_2 + \dots + s_{n_3} w_{n_3} \mid s_1, s_2, \dots, s_{n_3} \in \mathbb{R}\}$  es el espacio generado por  $\{w_1, w_2, \dots, w_{n_3}\}$ .

Entonces

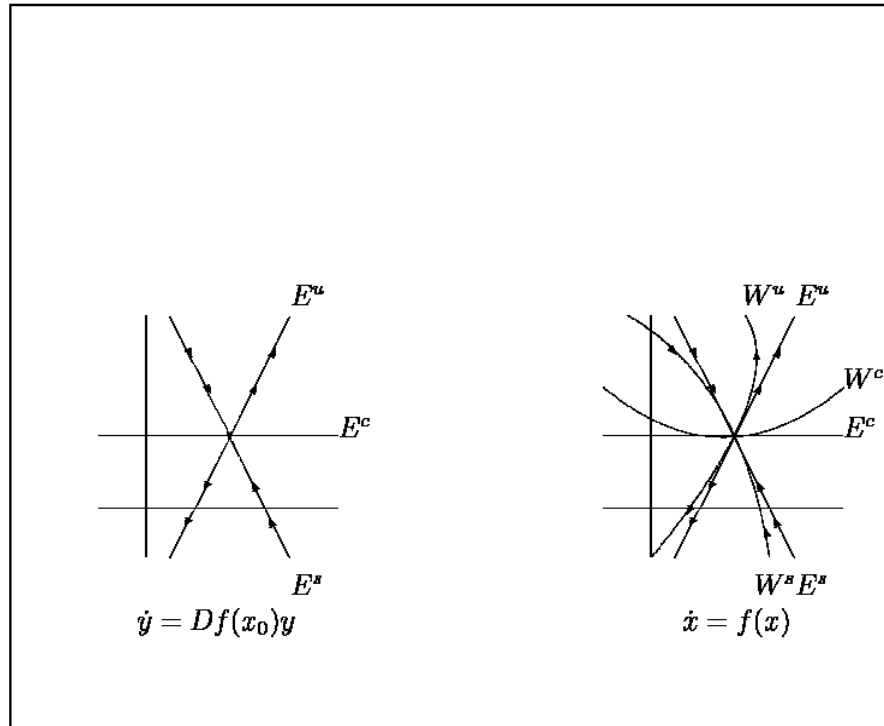
- 1)  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2)  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son invariantes bajo el flujo de

$$\dot{y} = Df(x_0)y \tag{2.3}$$

Es decir, si  $z \in E^a$ ,  $a = s, u$  ó  $c$  entonces la solución de (2.3)  $\varphi(t; z)$  es tal que  $\varphi(t, z) \in E^a \forall t \in \mathbb{R}$ .

- 3) Si  $z \in E^s \Rightarrow \varphi(t; z) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$ .
- 4) Si  $z \in E^u \Rightarrow \varphi(t; z) \rightarrow_{t \rightarrow -\infty} 0$ .

$E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son llamados espacios estable, inestable y central respectivamente.

Figura 2.1:  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$ 

Definimos la variedad estable local de  $x_0$ , como

$$W_{loc}^s(x_0) = \{x \in U \mid \varphi_t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ y } \varphi_t(x) \in U \text{ para toda } t \geq 0\}$$

donde  $V$  es una vecindad del punto de equilibrio  $x_0$ . De manera similar definimos la variedad inestable local de  $x_0$ , como

$$W_{loc}^u(x_0) = \{x \in U \mid \varphi_t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, \text{ y } \varphi_t(x) \in U \text{ para toda } t \leq 0\}$$

Las variedades locales estable e inestable  $W_{loc}^s(x_0)$  y  $W_{loc}^u(x_0)$  representan el análogo no lineal de los eigenspacios  $E^s$  y  $E^u$  de un sistema lineal.

### 2.1.2. Teorema de la Variedad Central

**Teorema 2.2.** *Considere la ecuacion diferencial*

$$\dot{x} = f(x)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ , y  $f$  un campo suave. Sea  $x_0$  un punto de equilibrio no-hiperbólico. Entonces existen variedades invariantes, estable e inestable,  $W_{loc}^s(x_0)$  y  $W_{loc}^u(x_0)$  tangentes a  $E^s$  y  $E^u$  en  $x_0$ , respectivamente. Además existe una variedad invariante central,  $W_{loc}^c(x_0)$ , tangente a  $E^c$  en  $x_0$ .  $W_{loc}^s(x_0)$  y  $W_{loc}^u(x_0)$  son únicas, mientras que  $W_{loc}^c(x_0)$  no lo es necesariamente.  $\dim(E^a) = \dim(W^a)$ , donde  $a = s, u, c$ .

### 2.1.3. Cálculo de la Variedad Central

Considere la ecuación diferencial no lineal

$$\dot{z} = F(z) \quad (2.4)$$

con  $z \in \mathbb{R}^n$  y  $F$  un campo suave. Supongamos que  $z = 0$  es un equilibrio no-hiperbólico de  $F$  y que  $E^u = \emptyset$  ( $\Leftrightarrow W^u(z_0) = \emptyset$ ).

Sean  $E^s = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n_1} \rangle$  y  $E^c = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n_2} \rangle$  con  $n_1 + n_2 = n$

Sea  $J = DF(0)$  y  $P$  la matriz cambio de base tal que

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} (A)_{n_2 \times n_2} & 0 \\ 0 & (B)_{n_1 \times n_1} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

donde  $A_{n_2 \times n_2}$  posee los valores propios con parte real cero y  $B_{n_1 \times n_1}$  posee los valores propios con parte real negativa. Sea  $P^{-1}z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_2}$   $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ .

Veamos como se expresa nuestro sistema original (2.4) en términos de las nuevas variables  $x, y$

$$\begin{aligned} P^{-1}z &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} (P^{-1}z(t)) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} F(z) &= F(0) + DF(0)z + \frac{1}{2}D^2F(0)(z, z) + \dots \\ F(z) &= Jz + F_2(z) + \dots \end{aligned}$$

donde  $F_2(z)$  representa los términos de orden dos. Entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= P^{-1}\dot{z} = P^{-1}(F(z)) \\ &= P^{-1}(Jz + F_2(z) + \dots) \\ &= P^{-1}Jz + P^{-1}F_2(z) + \dots \\ &= P^{-1}JP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P^{-1}F_2 \left( P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tilde{F}_2(x, y) + \dots \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Ax \\ By \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

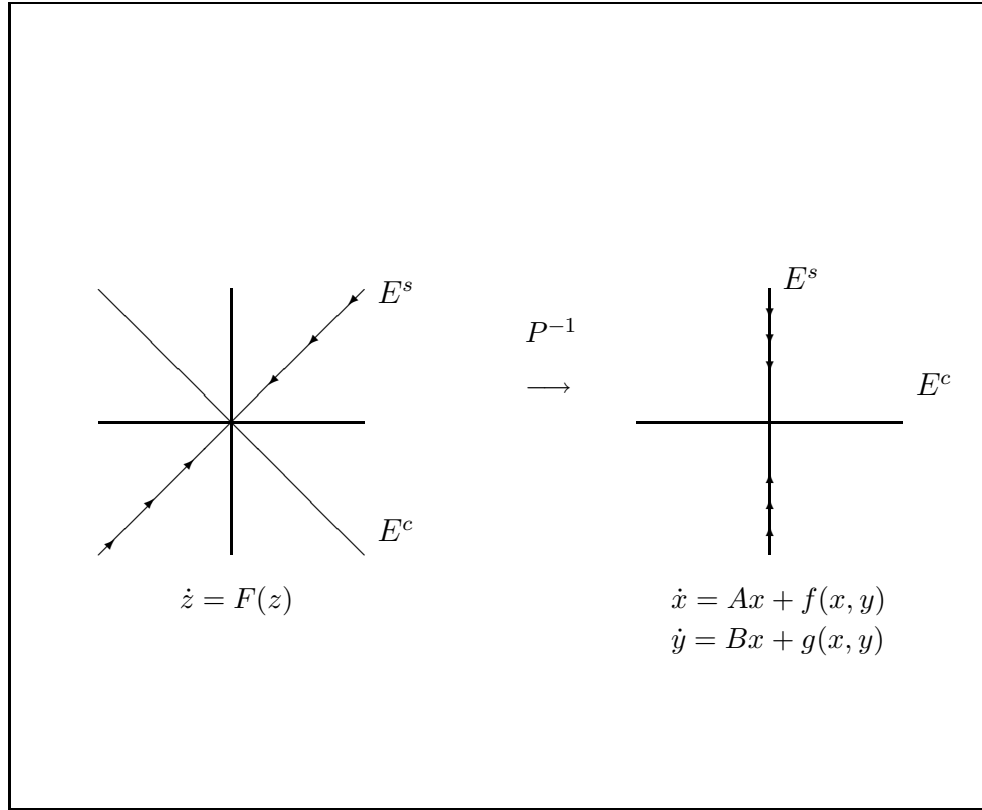


Figura 2.2: Rotación de los ejes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Una vez calculado el sistema anterior, se procede a calcular  $W^c$ . Proponemos  $h : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$  tal que  $h(0)=0$  con  $Dh(0)=0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t)) &= \frac{d}{dt}(h(x(t))) \\ \dot{y} &= Dh(x)\dot{x} \\ By + g(x, y) &= Dh(x)[Ax + f(x, y)] \text{ pero } y = h(x) \\ Bh(x) + g(x, h(x)) &= Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] \end{aligned}$$

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0 \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) nos permite calcular la función  $h$ . Es decir, nos permite calcular  $W^c$ . El siguiente teorema establece condiciones para determinar la estabilidad de las soluciones sobre  $W^c$ .

**Teorema 2.3.** *El comportamiento de las soluciones sobre  $W_{loc}^c(0)$  del sistema (2.6) esta determinado por la ecuación diferencial sobre  $E^c$*

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)), \quad x \in E^c, \quad |x| < \epsilon, \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}$$

### 2.1.4. Variedad Central dependiente de parámetros

Supongamos que el sistema (2.5) depende de un parámetro. En este caso escribimos (2.5) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R},$$

donde

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0, & Df(0, 0, 0) &= 0, \\ g(0, 0, 0) &= 0, & Dg(0, 0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu), \\ \dot{\mu} &= 0, \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned}$$

## 2.2. Teorema de la Bifurcación de Hopf

### 2.2.1. La Bifurcación de Hopf

Considere el sistema en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= d\mu x - (w + c\mu)y + (ax - by)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= (w + c\mu)x + d\mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

con  $a, b, c, d, w$  constantes y  $\mu$  un parámetro. Para analizar la dinámica de este sistema lo transformaremos a coordenadas polares. Haciendo

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Derivamos la primera expresión

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x[d\mu x - (w + c\mu)y + (ax - by)(x^2 + y^2)] \\ &\quad + y[(w + c\mu)x + d\mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)] \\ &= d\mu r^2 + r^2[x(ax - by) + y(bx + ay)] \\ &= r^2(d\mu + ar^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{r} = r(d\mu + ar^2)$$

Ahora, derivamos la segunda expresión

$$\begin{aligned} \sec^2\theta\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} \\ (1 + \tan^2\theta)\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} \\ \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\ &= x[w + c\mu]x + d\mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2) \\ &\quad - y[d\mu x - (w + c\mu)y + (ax - by)(x^2 + y^2)] \\ &= (w + c\mu)r^2 + r^2[x(bx + ay) - y(ax - by)] \\ &= (w + c\mu)r^2 + r^2(br^2) \\ &= r^2(w + c\mu + br^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{\theta} = w + c\mu + br^2$$

Deseamos bosquejar el retrato fase en una vecindad del origen. Si  $\mu = 0$ ,  $a \neq 0$

$$\dot{r} = r(ar^2) = ar^3$$

En esta situación si  $a > 0$ , entonces  $\dot{r} > 0$  y tenemos espirales que se alejan del origen, es decir, tenemos un foco inestable; Ahora, si  $a < 0$ , entonces  $\dot{r} < 0$  y entonces tenemos espirales que convergen al origen, es decir, tenemos un foco estable.

Ahora, para  $\mu$  suficientemente pequeña

$$\dot{r} = r(d\mu + ar^2)$$

observamos que  $\dot{r} = 0$  si y sólo si  $r = 0$  ó  $d\mu + ar^2 = 0$  (que representa una órbita periódica)

Vamos a determinar cuando nace esta órbita periódica

Tenemos que

$$r^2 = -\frac{d\mu}{a}$$

entonces  $r = \sqrt{-\frac{d\mu}{a}}$  si  $\frac{d\mu}{a} < 0$

Supongamos que  $\frac{d}{a} > 0$ , entonces si  $\mu < 0$  se cumple que  $\frac{d\mu}{a} < 0$  (existe una órbita periódica) y si  $\mu > 0$  entonces no existe órbita periódica.

Ahora supongamos que  $\frac{d}{a} < 0$ , entonces si  $\mu > 0$  se cumple que  $\frac{d\mu}{a} < 0$  (existe una órbita periódica) y si  $\mu < 0$  entonces no existe órbita periódica.

Entonces tenemos los siguientes casos

- 1)  $a > 0$  y  $d > 0$
- 2)  $a < 0$  y  $d < 0$
- 3)  $a > 0$  y  $d < 0$
- 4)  $a < 0$  y  $d > 0$

Analizamos el primero:

Sabemos que para  $\mu = 0$  el origen es un foco inestable.

Si  $\mu > 0$ , entonces  $\dot{r} = r(d\mu + ar^2) > 0$ , por lo tanto el origen es un foco inestable.

Si  $\mu < 0$ , sabemos que existe la órbita periódica  $r = r_0 = \sqrt{-\frac{d\mu}{a}}$

Consideremos la solución que inicia con la condición inicial  $(\theta_1, r_1)$  en el interior de la órbita periódica, es decir con  $0 < r_1 < r_0$ .

$$\dot{r}|_{(\theta_1, r_1)} = r_1(d\mu + ar_1^2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_1^2 &< r_0^2 = -\frac{d\mu}{a} \\ r_1^2 &< -\frac{d\mu}{a} \\ d\mu + ar_1^2 &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{r}|_{(\theta_1, r_1)} = r_1(d\mu + ar_1^2) < 0$$

entonces el origen es un foco estable.

Consideremos ahora una condición inicial  $(\theta_2, r_2)$ , exterior a la órbita periódica, es decir con  $r_2 > r_0 > 0$ .

$$\dot{r}|_{(\theta_2, r_2)} = r_2(d\mu + ar_2^2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_2^2 &> r_0^2 = -\frac{d\mu}{a} \\ r_2^2 &> -\frac{d\mu}{a} \\ d\mu + ar_2^2 &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{r}|_{(\theta_2, r_2)} = r_2(d\mu + ar_2^2) > 0$$

entonces las soluciones se alejan de la órbita periódica.

Concluimos entonces que  $r = r_0$  es una órbita periódica repulsora (ver figura 2.3).

Los otros casos son similares. Si la órbita periódica es estable, diremos que tenemos una bifurcación de Hopf *supercrítica*, mientras que si es inestable la órbita periódica, diremos que la bifurcación de Hopf es *subcrítica*.



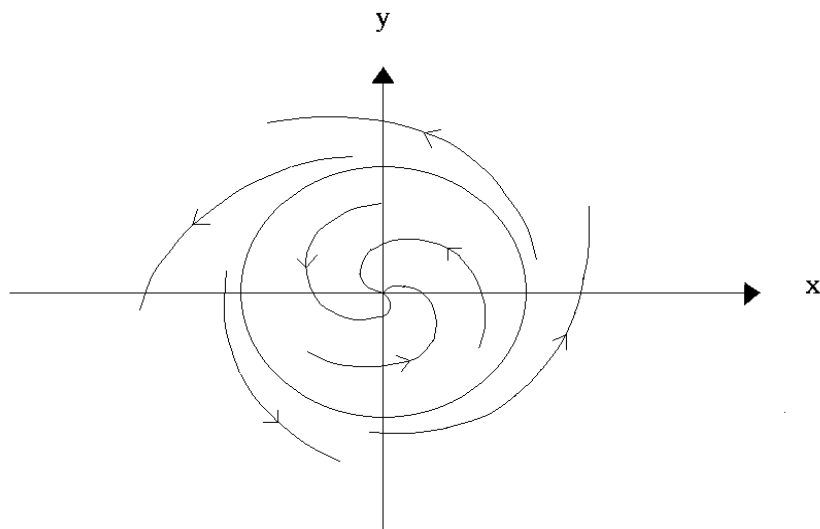


Figura 2.3: En este diagrama se puede ver claramente como las soluciones dentro de la órbita periódica convergen al origen, mientras que las que están fuera se alejan de ella.

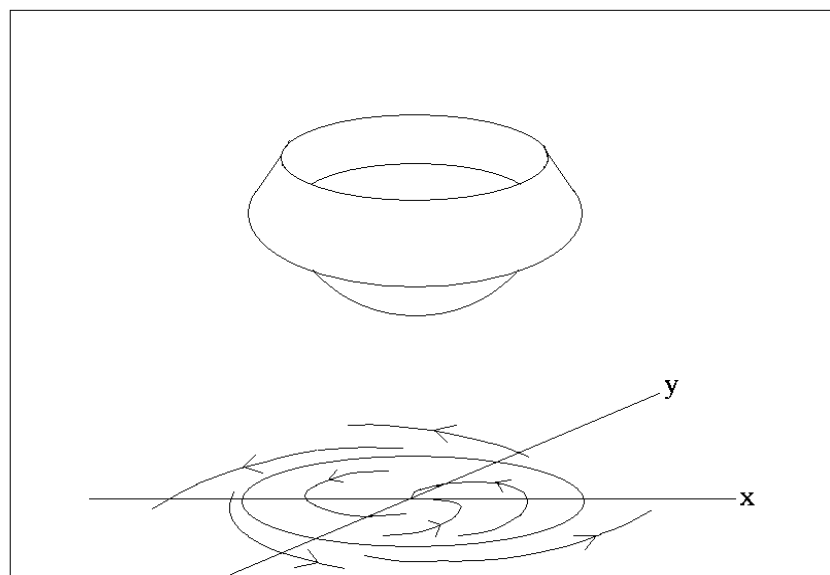


Figura 2.4: En este diagrama se puede ver a la bifurcación de Hopf como la proyección del movimiento de una canica sobre un sombrero

### 2.2.2. Teorema de la Bifurcación de Hopf

**Teorema 2.4.** *Supongamos el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  tiene un equilibrio  $(x_0, \mu_0)$  el cual satisface las siguientes propiedades:

(A1)  $D_x f(x_0, \mu_0)$  posee un único par de valores propios complejos con parte real cero.

(A2) Sea  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$  los valores propios de  $D_x f(x_0, \mu)$  los cuales son imaginarios en  $\mu = \mu_0$ , tales que

$$\frac{d}{d\mu} (\operatorname{Re}(\lambda(\mu))) |_{\mu=\mu_0} = d \neq 0 \quad (2.7)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional, pasando por  $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre la variedad central, esta dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\dot{r} = (d\mu + ar^2)r$$

$$\dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2$$

Si  $a \neq 0$  entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenespacio generado por  $\lambda(\mu_0)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu_0)$ .

Si  $a < 0$  las órbitas periódicas son estables, mientras que si  $a > 0$  son inestables.

Para sistemas en el plano, existe una expresión para calcular el llamado primer coeficiente de Lyapunov  $a$ . Considere el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ ,  $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$ ,  $F(0) = 0$  y  $DF(0) = 0$ . Entonces

$$a = \frac{1}{16\omega} (R_1 + \omega R_2), \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned}
 R_1 &= (F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) \\
 &\quad - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) \\
 &\quad - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2})|_{x=0} \\
 R_2 &= (F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2})|_{x=0}.
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces, los siguientes cuatro escenarios posibles:

- a. Si  $d > 0$ ,  $a < 0$ . El origen es estable para  $\mu < 0$ , inestable para  $\mu > 0$ , y rodeado por una órbita periódica estable para  $\mu > 0$ . Esta situación es mostrada en la figura (2.5).
- b. Si  $d < 0$ ,  $a < 0$ . El origen es inestable para  $\mu < 0$  y estable para  $\mu > 0$ . El origen es rodeado por una órbita periódica estable para  $\mu < 0$ .
- c. Si  $d > 0$ ,  $a > 0$ . El origen es estable para  $\mu < 0$  e inestable para  $\mu > 0$ . Además, el origen es rodeado por una órbita periódica inestable para  $\mu < 0$ .
- d. Si  $d < 0$ ,  $a > 0$ . El origen es inestable para  $\mu < 0$ , estable para  $\mu > 0$ , y rodeado por una órbita periódica inestable para  $\mu > 0$ . Esta situación es mostrada en la figura (2.6).

Llamaremos los **coeficientes de estabilidad** a  $d$  y  $a$ , donde  $d$  es la **velocidad de cruce** y  $a$  es el **primer coeficiente de Lyapunov**. Diremos que tenemos el control de la bifurcación de Hopf si es posible establecer a priori el signo de  $d$  y  $a$ .

### 2.3. Control de una Bifurcación

La investigación teórica sobre la bifurcación de los sistemas de control es un tópico relativamente nuevo. La primer pregunta que tenemos que contestar es ¿Qué queremos decir con la terminología bifurcación de sistemas de control?. Revisemos la bifurcación de un sistema dinámico clásico  $\dot{\xi} = f(\xi, \mu)$ . La teoría de bifurcaciones clásica estudia el cambio en las propiedades cualitativas del sistema dinámico cuando se varía el parámetro. ¿Cuáles son las propiedades cualitativas? Algunas propiedades importantes incluyen la topología del conjunto de puntos de equilibrio, la estabilidad y la existencia de soluciones periódicas. Por lo tanto si alguna de esas propiedades cambia en un sistema dinámico cuando se varía el parámetro, decimos que el sistema exhibe una bifurcación. Bifurcaciones típicas incluyen a la silla-nodo, transcítica, horquilla (en todas, la topología del conjunto de puntos de equilibrio y la estabilidad son cambiadas).

Sigamos con la misma forma de pensar para los sistemas de control. La teoría de bifurcaciones de los sistemas de control debería estudiar el cambio de las propiedades cualitativas. ¿Cuáles son las propiedades cualitativas importantes en los sistemas de control? Algunas propiedades importantes de un sistema de control incluyen: La controlabilidad, la estabilidad y la topología del conjunto de puntos de equilibrio.

Problema 1. Bifurcación de sistemas de control. Éste se enfoca en el cambio de las propiedades cualitativas de los sistemas de control tales como la controlabilidad, estabilidad y la topología del conjunto de equilibrios. Así que la bifurcación de un sistema de control puede tener un significado diferente a la bifurcación de sistemas dinámicos sin control. Uno puede preguntarse cual es la relación entre la bifurcación de un sistema de control y la bifurcación clásica de un sistema dinámico? Sabemos que si una ley de control es aplicada a un sistema de control, éste se convierte en un sistema dinámico sin control (si una ley de control es aplicada, éste es un sistema con un parámetro). Sin embargo si distintas leyes de control se aplican al mismo sistema pueden resultar bifurcaciones completamente diferentes. Este fenómeno nos deja el segundo problema de investigación.

Problema 2. Control de bifurcaciones usando una ley de control. El problema se enfoca en el diseño de la ley de control para lograr la estabilidad alrededor de un punto crítico, o para lograr el comportamiento deseado por cambios cualitativos en bifurcaciones clásicas. Sabemos que las propiedades cualitativas tales como la controlabilidad y estabilidad de un sistema de control son invariantes bajo cambios de coordenadas y el control regular  $u = \alpha(\xi) + \beta(\xi)v$  si  $\beta(\xi) \neq 0$ . También es sabido que los sistemas pueden hacerse mas simples si se aplican cambios sutiles de coordenadas y leyes de control. Sin embargo, dos sistemas que pueden verse diferentes, es posible que en realidad sean equivalentes uno al otro bajo un cambio de coordenadas y una ley de control.

Así los dos sistemas tienen las mismas propiedades cualitativas y la misma bifurcación. Por lo tanto, si podemos encontrar sistemas de control simples que son equivalentes a una familia de sistemas de control complicados, la bifurcación encontrada para estos sistemas simples representa la bifurcación de todos los sistemas en la familia. Esta investigación simplifica significativamente el problema. Este punto de vista nos deja la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los sistemas más simples bajo cambios de coordenadas y control para una familia dada de sistemas de control?. Esto es equivalente al siguiente problema de formas normales.

Problema 3. Dada una familia de sistemas de control no-lineales, encontrar un conjunto de formas normales equivalentes a los sistemas en la familia bajo cambios de coordenadas y control.

El presente trabajo se desarrolla en el contexto de problema 2: diseñaremos una ley de control que nos permita manipular los distintos escenarios alrededor de la bifurcación de Hopf.

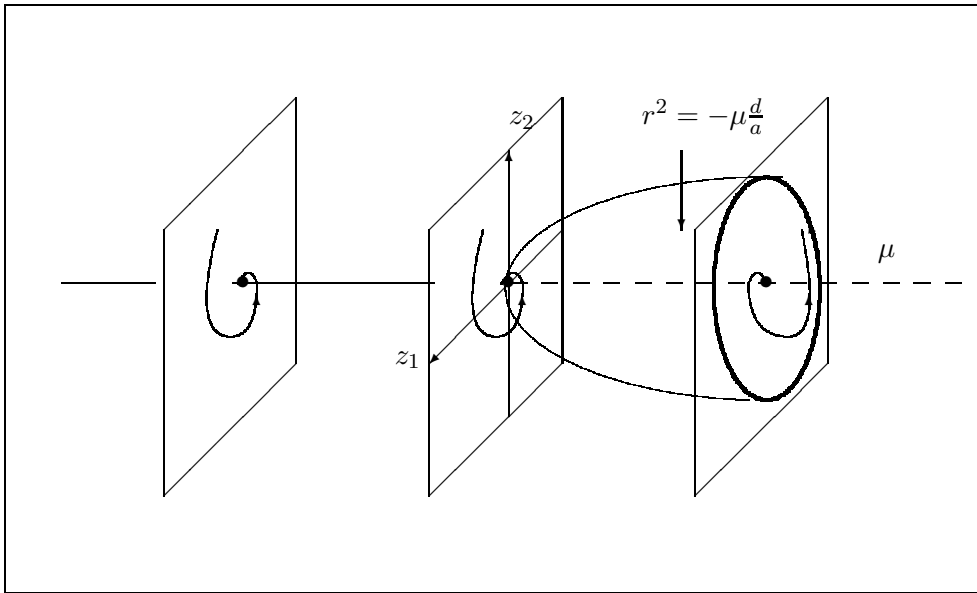


Figura 2.5: Bifurcación de Hopf Supercrítica: Una órbita periódica estable y un punto de equilibrio inestable surgen de un punto de equilibrio estable.

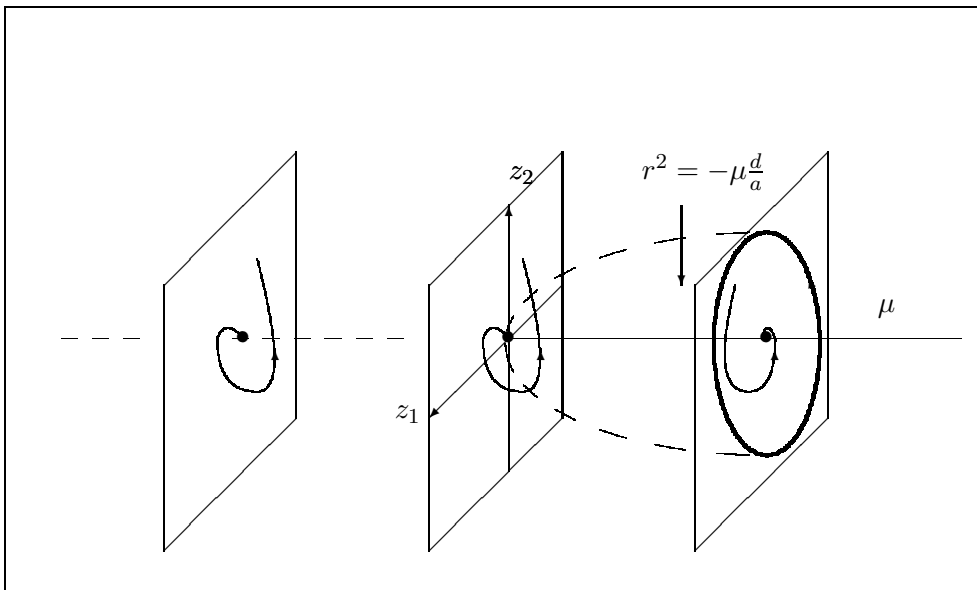


Figura 2.6: Bifurcación de Hopf Subcrítica: Un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable.

# Control de la Bifurcación de Hopf

---

## 3.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema de control no lineal

$$\dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)u, \quad (3.1)$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado y  $u \in \mathbb{R}$  es el parámetro de control. Los campos vectoriales  $F(\xi)$  y  $G(\xi)$  se supone que son lo suficientemente suaves, con  $F(0) = 0$ . Supongamos que

$$J = DF(0) = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$$

con  $J_H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ , y  $J_S \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$  es una matriz Hurwitz, es decir, una matriz con valores propios con parte real negativa.

Supongamos que  $F(\xi) = \begin{pmatrix} F_1(\xi) \\ F_2(\xi) \end{pmatrix}$ ,  $G(\xi) = \begin{pmatrix} G_1(\xi) \\ G_2(\xi) \end{pmatrix}$ , y  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , con

$z \in \mathbb{R}^2$ ,  $w \in \mathbb{R}^{n-2}$ ,  $F_1, G_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y  $F_2, G_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ .

Entonces expandiendo en serie de Taylor el sistema (3.1) alrededor de  $\xi = 0$  nos queda

$$\dot{\xi} = J\xi + \frac{1}{2}D^2F(0)(\xi, \xi) + \frac{1}{6}D^3F(0)(\xi, \xi, \xi) + \dots + \left( b + M\xi + \frac{1}{2}D^2G(0)(\xi, \xi) + \dots \right) u,$$

pero

$$DF(z, w) = \left( \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w} \right), D^2F(z, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} \end{pmatrix}$$

$$D^3F(z, w) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial z} (D^2F(z, w)) \right), \left( \frac{\partial}{\partial w} (D^2F(z, w)) \right) \right) = M$$

$$D^3F(z, w) \left( \left( \begin{matrix} z \\ w \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} z \\ w \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} z \\ w \end{matrix} \right) \right) = \left( (z, w)M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, (z, w)M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(z, w) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial z}(0, 0) & \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) + \dots \end{aligned}$$

$$G(z, w) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(z, w) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial w}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial w \partial z}(0, 0) & \frac{\partial^2 G}{\partial w^2}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \dots$$

Entonces (3.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{z} &= J_H z + F_{21}(z, w) + F_{31}(z, w) + \dots \\ &\quad + (b_1 + M_1 z + M_2 w + G_{21}(z, w) + \dots)u, \\ \dot{w} &= J_S w + F_{22}(z, w) + F_{32}(z, w) + \dots \\ &\quad + (b_2 + M_3 z + M_4 w + G_{22}(z, w) + \dots)u, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde  $G(0) = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $DG(0) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$  con  $b_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^{n-2}$ , y

$$\begin{aligned} F_{2j}(z, w) &= \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_j}{\partial z^2}(0, 0) z + z^T \frac{\partial^2 F_j}{\partial z \partial w}(0, 0) w + \frac{1}{2} w^T \frac{\partial^2 F_j}{\partial w^2}(0, 0) w, \\ G_{2j}(z, w) &= \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 G_j}{\partial z^2}(0, 0) z + z^T \frac{\partial^2 G_j}{\partial z \partial w}(0, 0) w + \frac{1}{2} w^T \frac{\partial^2 G_j}{\partial w^2}(0, 0) w, \\ F_{3j}(z, w) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_j}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) + \dots, \end{aligned}$$

para  $j = 1, 2$ .



Deseamos diseñar una ley de control  $u = u(z, \mu)$ , con  $\mu$  un parámetro real, tal que el sistema original (3.1) sufra una bifurcación de Hopf en  $\xi = 0$  y  $\mu = 0$ , y que podamos controlarla, es decir, que podamos decidir la estabilidad y la dirección de la solución periódica.

### 3.2. Caso $b_1 = 0$

Consideramos la ley de control

$$u(z, \mu) = \beta_1 \mu + \beta_2 (z_1^2 + z_2^2) = \beta_1 \mu + \beta_2 z^T z, \quad (3.3)$$

donde  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

Ahora, usamos la ley de control (3.3) en el sistema (3.2),

$$\begin{aligned} (M_1 z + M_2 w + G_{21} + \dots) u &= (M_1 z + M_2 w + G_{21} + \dots) (\beta_1 \mu + \beta_2 z^T z) \\ &= \beta_1 \mu M_1 z + \beta_1 \mu M_2 w + \beta_1 \mu G_{21}(z, w) \\ &\quad + \beta_2 z^T z (M_1 z + M_2 w) + \dots \\ (b_2 + M_3 z + M_4 w + G_{22} + \dots) u &= (b_2 + M_3 z + M_4 w + G_{22} + \dots) (\beta_1 \mu + \beta_2 z^T z) \\ &= \beta_1 \mu b_2 + \beta_1 \mu M_3 z + \beta_1 \mu M_4 w + \beta_1 \mu G_{22}(z, w) \\ &\quad + \beta_2 z^T z (b_2 + M_3 z + M_4 w) + \dots, \end{aligned}$$

Luego, obtenemos el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= J_H z + \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ \dot{w} &= \beta_1 b_2 \mu + J_S w + \mathcal{F}_2(z, w, \mu), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) &= \beta_1 \mu M_1 z + \beta_1 \mu M_2 w + F_{21}(z, w) + \beta_1 \mu G_{21}(z, w) \\ &\quad + \beta_2 z^T z (M_1 z + M_2 w) + F_{31}(z, w) + \dots, \\ \mathcal{F}_2(z, w, \mu) &= \beta_1 \mu M_3 z + \beta_1 \mu M_4 w + F_{22}(z, w) + \beta_1 \mu G_{22}(z, w) \\ &\quad + \beta_2 z^T z (b_2 + M_3 z + M_4 w) + F_{32}(z, w) + \dots, \end{aligned}$$

Entonces nuestro objetivo es encontrar  $\beta_1$  y  $\beta_2$  tal que el sistema (3.4) sufra una bifurcación de Hopf que pueda ser controlable. Para esto utilizamos la teoría de la variedad central.

### 3.2.1. Variedad Central

La ecuación (3.4) representa una familia  $\mu$ -parametrizada de sistemas, la cual puede escribirse como un sistema extendido.

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\mu} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 b_2 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(z, w, \mu) \end{pmatrix}.$$

En esta forma, el sistema tiene una variedad central tridimensional alrededor del origen. Para encontrar esta variedad necesitamos cambiar de coordenadas para poner la parte lineal en forma diagonal. Usaremos el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 J_S^{-1} b_2 & J_S \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} J_H^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_1 J_S^{-2} b_2 & J_S^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ahora, como

$$\begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\mu} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 b_2 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix} + \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(z, w, \mu) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(z, w, \mu) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P} &= \begin{pmatrix} J_H^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_1 J_S^{-2} b_2 & J_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 b_2 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 J_S^{-1} b_2 & J_S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_S^{-1} \beta_1 b_2 & I_{(n-2) \times (n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 J_S^{-1} b_2 & J_S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(z, w, \mu) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_H^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_1 J_S^{-2} b_2 & J_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(z, w, \mu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_H^{-1} \mathcal{F}_1(z, w, \mu) \\ 0 \\ J_S^{-1} \mathcal{F}_2(z, w, \mu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_H^{-1} \mathcal{F}_1(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S y, \mu) \\ 0 \\ J_S^{-1} \mathcal{F}_2(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S y, \mu) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces podemos poner (3.4) en su forma estándar

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, \mu, y) \\ 0 \\ g(x, \mu, y) \end{pmatrix},$$

ó

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= J_H x + f(x, \mu, y), \\
\dot{\mu} &= 0, \\
\dot{y} &= J_S y + g(x, \mu, y),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde

$$f(x, \mu, y) = J_H^{-1} \mathcal{F}_1(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S y), \tag{3.6}$$

$$g(x, \mu, y) = J_S^{-1} \mathcal{F}_2(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S y). \tag{3.7}$$

Buscamos una variedad central

$$y = h(x, \mu) = \frac{1}{2}x^T H_1 x + x^T H_2 \mu + \frac{1}{2}H_3 \mu^2 + \dots \quad (3.8)$$

tal que  $h(0, 0) = 0$  con  $Dh(0, 0) = 0$ ,  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$  y

$$h_i(x, \mu) = \frac{1}{2}x^T H_{1i} x + x^T H_{2i} \mu + \frac{1}{2}H_{3i} \mu^2 + \dots$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-2$ . Sustituyendo (3.8) en (3.5) y usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial \mu} \dot{\mu}$$

Entonces

$$\frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} \dot{x} = J_S h(x, \mu) + g(x, \mu, h(x, \mu)).$$

Luego, obtenemos

$$\frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} [J_H x + f(x, \mu, h(x, \mu))] - J_S h(x, \mu) - g(x, \mu, h(x, \mu)) \equiv 0,$$

La cual, hasta orden dos se reduce a

$$\frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} J_H x - J_S h(x, \mu) - g_2(x, \mu) \equiv 0, \quad (3.9)$$

donde  $g(x, \mu, h(x, \mu)) = g_2(x, \mu) + \mathcal{O}(|x, \mu|^3)$

Esta ecuación diferencial parcial para  $h$  la resolveremos para el caso particular en que  $J_S$  es diagonal, es decir,

$$J_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_j < 0$  para cada  $j$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_{n-2}}{\partial x} \end{pmatrix} J_H x - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{2,n-2} \end{pmatrix} \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} J_H x - \lambda_1 h_1 - g_{21} &\equiv 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} J_H x - \lambda_2 h_2 - g_{22} &\equiv 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial h_{n-2}}{\partial x} J_H x - \lambda_{n-2} h_{n-2} - g_{2,n-2} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ahora, estamos interesados en calcular  $H_1$  porque haremos  $\mu = 0$  cuando calculemos el primer coeficiente de Lyapunov  $a$ . Ahora, si

$$g_2(x, \mu) = \frac{1}{2} x^T N_1 x + x^T N_2 \mu + \frac{1}{2} N_3 \mu^2, \quad (3.10)$$

con

$$g_{2i}(x, \mu) = \frac{1}{2} x^T N_{1i} x + x^T N_{2i} \mu + \frac{1}{2} N_{3i} \mu^2,$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 2$ . Entonces de (3.9) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i(x, \mu)}{\partial x} J_H x - \lambda_i h_i(x, \mu) - g_{2i}(x, \mu) &= (x^T H_{1i} + H_{2i} \mu) J_H x \\ &\quad - \lambda_i \left( \frac{1}{2} x^T H_{1i} x + x^T H_{2i} \mu + \frac{1}{2} H_{3i} \mu^2 \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} x^T N_{1i} x + x^T N_{2i} \mu + \frac{1}{2} N_{3i} \mu^2 \right) \\ &= x^T \left( H_{1i} J_H - \frac{1}{2} \lambda_i H_{1i} - \frac{1}{2} N_{1i} \right) x \\ &\quad + x^T \left( J_H^T H_{2i} - \lambda_i H_{2i} - N_{2i} \right) \mu \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2} \lambda_i H_{3i} - \frac{1}{2} N_{3i} \right) \mu^2 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ahora, como haremos  $\mu = 0$  nada mas tenemos

$$x^T \left( H_{1i} J_H - \frac{1}{2} \lambda_i H_{1i} - \frac{1}{2} N_{1i} \right) x \equiv 0$$

Lo cual puede suceder si y sólo si

$$\begin{aligned}
H_{1i}J_H - \frac{1}{2}\lambda_i H_{1i} - \frac{1}{2}N_{1i} &= A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i \\ \delta_i & 0 \end{pmatrix} \\
H_{1i}(J_H - \frac{1}{2}\lambda_i I) - \frac{1}{2}N_{1i} &= A_i \\
H_{1i}(J_H - \frac{1}{2}\lambda_i I) &= A_i + \frac{1}{2}N_{1i} \\
H_{1i} &= (A_i + \frac{1}{2}N_{1i})(J_H - \frac{1}{2}\lambda_i I)^{-1} \\
H_{1i} &= (2A_i + N_{1i})\mathcal{R}_i
\end{aligned}$$

donde  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_i &= \frac{1}{2}(J_H - \frac{1}{2}\lambda_i I)^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda_i & -\omega_0 \\ \omega_0 & -\frac{1}{2}\lambda_i \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\lambda_i & -\frac{1}{2}\omega_0 \\ \frac{1}{2}\omega_0 & -\frac{1}{4}\lambda_i \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{-1}{\lambda_i^2 + 4\omega_0^2} \begin{pmatrix} \lambda_i & -2\omega_0 \\ 2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\Delta_i} \begin{pmatrix} \lambda_i & -2\omega_0 \\ 2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

donde  $\Delta_i = \lambda_i^2 + 4\omega_0^2$

Ahora vamos a calcular  $N_1$ . Observemos de (3.7),

$$g(x, \mu, h(x, \mu)) = J_S^{-1} \mathcal{F}_2(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu))$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) &= \beta_1 \mu M_3 J_H x + \beta_1 \mu M_4 (-\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\
&+ F_{22}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\
&+ \beta_2 x^T J_H^T J_H x (b_2 + M_3 J_H x \\
&+ M_4 (-\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu))) \\
&+ \beta_1 \mu G_{22}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\
&+ F_{32}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) + \dots
\end{aligned}$$

Los términos que interesan son

$$F_{22}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \quad y \quad \beta_2 x^T J_H^T J_H x b_2,$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{22}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) &= \frac{1}{2} x^T J_H^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial (J_H x)^2} (0, 0) J_H x + \dots \\
\beta_2 x^T J_H^T J_H x b_2 &= \beta_2 x^T \omega_0^2 I x b_2 \\
&= \beta_2 \omega_0^2 x^T x b_2,
\end{aligned}$$

ya que

$$J_H^T J_H = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} = \omega_0^2 I.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
g(x, \mu, h(x, \mu)) &= J_S^{-1} \left( \frac{1}{2} x^T J_H^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial (J_H x)^2} (0, 0) J_H x + \beta_2 \omega_0^2 x^T x b_2 + \dots \right) \\
&= \frac{1}{2} J_S^{-1} (x^T J_H^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial (J_H x)^2} (0, 0) J_H x) + \beta_2 \omega_0^2 x^T x J_S^{-1} b_2 + \dots
\end{aligned}$$

con

$$\frac{1}{2} J_S^{-1} (x^T J_H^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial (J_H x)^2} (0, 0) J_H x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{A} x$$

donde  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\omega_0, \lambda_i, \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}(0, 0))$ , y

$$\begin{aligned}
\beta_2 \omega_0^2 x^T x J_S^{-1} b_2 &= \beta_2 \omega_0^2 x^T x \begin{pmatrix} \frac{b_{21}}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b_{2,n-2}}{\lambda_{n-2}} \end{pmatrix} \\
&= \beta_2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} \frac{b_{21}}{\lambda_1} x^T x \\ \vdots \\ \frac{b_{2,n-2}}{\lambda_{n-2}} x^T x \end{pmatrix} \\
&= \beta_2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} x^T (\frac{b_{21}}{\lambda_1} I) x \\ \vdots \\ x^T (\frac{b_{2,n-2}}{\lambda_{n-2}} I) x \end{pmatrix} \\
&= \beta_2 \omega_0^2 x^T \mathcal{B} x
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{B}_i = \left( \frac{b_{2i}}{\lambda_i} I_2 \right)_{2 \times 2}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
g(x, \mu, h(x, \mu)) &= \frac{1}{2} x^T \mathcal{A} x + \beta_2 \omega_0^2 x^T \mathcal{B} x + \dots \\
&= \frac{1}{2} x^T (\mathcal{A} + 2\beta_2 \omega_0^2 \mathcal{B}) x + \dots,
\end{aligned}$$

Entonces de (3.10),

$$N_1 = \mathcal{A} + 2\beta_2 \omega_0^2 \mathcal{B}$$

Ahora, de (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
H_{1i} &= (2A_i + N_{1i}) \mathcal{R}_i \\
&= (2A_i + \mathcal{A}_i + 2\beta_2 \omega_0^2 \mathcal{B}_i) \mathcal{R}_i \\
&= \left( \begin{pmatrix} 0 & -2\delta_i \\ 2\delta_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{1i} & c_{2i} \\ c_{2i} & c_{3i} \end{pmatrix} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left( \frac{-1}{\Delta_i} \begin{pmatrix} \lambda_i & -2\omega_0 \\ 2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{-1}{\Delta_i} \begin{pmatrix} c_{1i} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i} & -2\delta_i + c_{2i} \\ 2\delta_i + c_{2i} & c_{3i} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & -2\omega_0 \\ 2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\Delta_i} \begin{pmatrix} \lambda_i (c_{1i} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i}) + 2\omega_0 (-2\delta_i + c_{2i}) & -2\omega_0 (c_{1i} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i}) + \lambda_i (-2\delta_i + c_{2i}) \\ \lambda_i (2\delta_i + c_{2i}) + 2\omega_0 (c_{3i} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i}) & -2\omega_0 (2\delta_i + c_{2i}) + \lambda_i (c_{3i} + 2\beta_2 \omega_0^2 \frac{b_{2i}}{\lambda_i}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora, si  $H_{1i} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{2i} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{3i} \end{pmatrix}$ , entonces igualando las entradas podemos calcular la  $\delta_i$



$$\begin{aligned}
-2\omega_0(c_{1i} + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i}) + \lambda_i(-2\delta_i + c_{2i}) &= \lambda_i(2\delta_i + c_{2i}) + 2\omega_0(c_{3i} + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i}) \\
\lambda_i(-2\delta_i + c_{2i} - 2\delta_i - c_{2i}) &= 2\omega_0(c_{3i} + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i} + c_{1i} + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i}) \\
-4\delta_i\lambda_i &= 2\omega_0(c_{1i} + c_{3i} + 4\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i}) \\
\delta_i &= -\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\lambda_i}tr(\mathcal{A}_i) - 2\beta_2\omega_0^3\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
A_i &= \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i \\ \delta_i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \delta_i I_0 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\lambda_i}tr(\mathcal{A}_i)I_0 - 2\beta_2\omega_0^3\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}I_0
\end{aligned}$$

Luego, entonces

$$\begin{aligned}
H_{1i} &= (2A_i + \mathcal{A}_i + 2\beta_2\omega_0^2\mathcal{B}_i)\mathcal{R}_i \\
&= \left(-\frac{\omega_0}{\lambda_i}tr(\mathcal{A}_i)I_0 - 4\beta_2\omega_0^3\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}I_0 + \mathcal{A}_i + 2\beta_2\omega_0^2\mathcal{B}_i\right)\mathcal{R}_i \\
&= (\hat{\mathcal{A}}_i + 2\beta_2\omega_0^2\mathcal{B}_i - 4\beta_2\omega_0^3\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}I_0)\mathcal{R}_i, \quad \text{con } \hat{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i - \frac{\omega_0}{\lambda_i}tr(\mathcal{A}_i)I_0 \\
&= (\hat{\mathcal{A}}_i + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i}I - 4\beta_2\omega_0^3\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}I_0)\mathcal{R}_i \\
&= (\hat{\mathcal{A}}_i + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}(\lambda_i I - 2\omega_0 I_0))\mathcal{R}_i \\
&= (\hat{\mathcal{A}}_i + 2\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2} \begin{pmatrix} \lambda_i & 2\omega_0 \\ -2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix})\mathcal{R}_i \\
&= (\hat{\mathcal{A}}_i - 2\Delta_i\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}\mathcal{R}_i^T)\mathcal{R}_i \\
&= \hat{\mathcal{A}}_i\mathcal{R}_i - 2\Delta_i\beta_2\omega_0^2\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2}\mathcal{R}_i^T\mathcal{R}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_i^T \mathcal{R}_i &= \frac{1}{\Delta_i^2} \begin{pmatrix} \lambda_i & 2\omega_0 \\ -2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & -2\omega_0 \\ 2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta_i^2} \begin{pmatrix} \Delta_i & 0 \\ 0 & \Delta_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta_i} I
\end{aligned}$$

Entonces

$$H_{1i} = \bar{\mathcal{A}}_i + 2\beta_2\omega_0^2\bar{\mathcal{B}}_i$$

donde  $\bar{\mathcal{A}}_i = \hat{\mathcal{A}}_i \mathcal{R}_i$ , y  $\bar{\mathcal{B}}_i = -\frac{b_{2i}}{\lambda_i^2} I$

Finalmente de (3.8),

$$h(x, \mu) = \frac{1}{2} x^T H_1 x + \dots,$$

donde  $H_1 = \bar{\mathcal{A}} + 2\beta_2\omega_0^2\bar{\mathcal{B}}$

### 3.2.2. Dinámica sobre la Variedad Central

Sobre la variedad central, la dinámica está dada por

$$\dot{x} = J_H x + f(x, \mu, h(x, \mu)), \quad (3.12)$$

Observemos de (3.6),

$$f(x, \mu, h(x, \mu)) = J_H^{-1} \mathcal{F}_1(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu))$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) &= \beta_1 \mu M_1 J_H x + \beta_1 \mu M_2 (-\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\
&\quad + F_{21}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\
&\quad + \beta_1 \mu G_{21}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\
&\quad + \beta_2 x^T J_H^T J_H x (M_1 J_H x \\
&\quad + M_2 (-\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu))) \\
&\quad + F_{31}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) + \dots,
\end{aligned}$$

Los términos que interesan son

$$\beta_1 \mu M_1 J_H x, \quad F_{21}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)), \quad \beta_2 x^T J_H^T J_H x M_1 J_H x$$

y  $F_{31}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu))$

donde

$$\begin{aligned} F_{21}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) &= \frac{1}{2} x^T J_H^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(0, 0) J_H x \\ &\quad + x^T J_H^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial w}(0, 0) (-\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) + \dots \\ F_{31}(J_H x, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) + \dots \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x, \mu, h(x, \mu)) &= J_H^{-1} \mathcal{F}_1(J_H x, \mu, -\beta_1 J_S^{-1} b_2 \mu + J_S h(x, \mu)) \\ &= \beta_1 \mu J_H^{-1} (M_1 - b_2^T (J_S^{-1})^T F_{1wz}(0, 0)) J_H x \\ &\quad + \frac{1}{2} J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zz}(0, 0) J_H x) \\ &\quad + J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S h(x, \mu)) \\ &\quad + \beta_2 J_H^{-1} (x^T J_H^T J_H x) M_1 J_H x \\ &\quad + \frac{1}{6} J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zzz}(0, 0) J_H x) J_H x + \dots, \end{aligned}$$

Pero, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= J_H^{-1} (M_1 - b_2^T (J_S^{-1})^T F_{1wz}(0, 0)) J_H; \\ \frac{1}{2} x^T \mathcal{Q} x &= \frac{1}{2} J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zz}(0, 0) J_H x); \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\omega_0, \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(0, 0))$ , y

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \mathcal{C}(x, x, x) &= J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S h(x, \mu)) \\ &\quad + \beta_2 J_H^{-1} (x^T J_H^T J_H x) M_1 J_H x \\ &\quad + \frac{1}{6} J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zzz}(0, 0) J_H x) J_H x. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Observemos que

$$\frac{1}{6} J_H^{-1} (x^T J_H^T F_{1zzz}(0, 0) J_H x) J_H x = \frac{1}{6} \mathcal{C}_0(x, x, x)$$

con  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\omega_0, \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(0, 0))$ ;

$$\begin{aligned}
\beta_2 J_H^{-1}(x^T J_H^T J_H x) M_1 J_H x &= \beta_2 \omega_0^2 x^T x (J_H^{-1} M_1 J_H) x \\
&= \beta_2 \omega_0^2 x^T x \left( \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} \\ -\frac{1}{\omega_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
&= \beta_2 \omega_0^2 x^T x \left( \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} \\ -\frac{1}{\omega_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 m_{12} & -\omega_0 m_{11} \\ \omega_0 m_{22} & -\omega_0 m_{21} \end{pmatrix} \right) x \\
&= \beta_2 \omega_0^2 x^T x \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix} x \\
&= \beta_2 \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} m_{22} x_1 - m_{21} x_2 \\ -m_{12} x_1 + m_{11} x_2 \end{pmatrix} \\
&= \beta_2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} (x_1^2 + x_2^2)(m_{22} x_1 - m_{21} x_2) \\ (x_1^2 + x_2^2)(-m_{12} x_1 + m_{11} x_2) \end{pmatrix} \\
&= \beta_2 \omega_0^2 \mathcal{C}_M(x, x, x),
\end{aligned}$$

con

$$\mathcal{C}_M = \begin{pmatrix} m_{22} I_2 & -m_{21} I_2 \\ -m_{12} I_2 & m_{11} I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

y

$$\begin{aligned}
J_H^{-1}(x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S h(x, \mu)) &= J_H^{-1}(x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S (\frac{1}{2} x^T (\bar{\mathcal{A}} + 2\beta_2 \omega_0^2 \bar{\mathcal{B}}) x)) \\
&= \frac{1}{2} J_H^{-1}(x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S (x^T \bar{\mathcal{A}} x)) \\
&\quad + \beta_2 \omega_0^2 J_H^{-1}(x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S (x^T \bar{\mathcal{B}} x)) \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{A}}}(x, x, x) + \beta_2 \omega_0^2 \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{B}}}(x, x, x)
\end{aligned}$$

con  $\mathcal{C}_{\bar{\mathcal{A}}} = \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{A}}}(\omega_0, \lambda_i, \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}(0, 0), \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial w}(0, 0))$  y

$$\mathcal{C}_{\bar{\mathcal{B}}}(x, x, x) = J_H^{-1}(x^T J_H^T F_{1zw}(0, 0) J_S (x^T \bar{\mathcal{B}} x))$$

Ahora vamos a calcular  $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{B}}}$ . Observemos que

$$F_{1zw}(0, 0) = \begin{pmatrix} F_{1zw}^1(0, 0) \\ F_{1zw}^2(0, 0) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{1zw}^j(0, 0) &= \begin{pmatrix} F_{1z_1w}^j(0, 0) \\ F_{1z_2w}^j(0, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_1 \partial z_1}, & \cdots, & \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_{n-2} \partial z_1} \\ \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_1 \partial z_2}, & \cdots, & \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_{n-2} \partial z_2} \end{pmatrix}_{2 \times (n-2)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} J_S(x^T \tilde{\mathcal{B}}x) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^T(\tilde{\mathcal{B}}_1)x \\ \vdots \\ x^T(\tilde{\mathcal{B}}_{n-2})x \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} x^T(\lambda_1 \tilde{\mathcal{B}}_1)x \\ \vdots \\ x^T(\lambda_{n-2} \tilde{\mathcal{B}}_{n-2})x \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -x^T(\frac{b_{21}}{\lambda_1} I)x \\ \vdots \\ -x^T(\frac{b_{2,n-2}}{\lambda_{n-2}} I)x \end{pmatrix}_{(n-2) \times 1} \\ &= x^T \tilde{\mathcal{B}}x \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\mathcal{B}}_i = \frac{-b_{2i}}{\lambda_i} I_2$ , entonces

$$F_{1zw}(0, 0) J_S(x^T \tilde{\mathcal{B}}x) = F_{1zw}(0, 0) (x^T \tilde{\mathcal{B}}x) = \begin{pmatrix} F_{1zw}^1(0, 0) (x^T \tilde{\mathcal{B}}x) \\ F_{1zw}^2(0, 0) (x^T \tilde{\mathcal{B}}x) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{1zw}^j(0,0)(x^T \tilde{\mathcal{B}}x) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_1} x^T \tilde{\mathcal{B}}_k x \\ \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_2} x^T \tilde{\mathcal{B}}_k x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^T (\sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_1} \tilde{\mathcal{B}}_k) x \\ x^T (\sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_2} \tilde{\mathcal{B}}_k) x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^T \mathcal{S}_1^j x \\ x^T \mathcal{S}_2^j x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_i^j &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_i} \tilde{\mathcal{B}}_k \\
&= - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_i} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} I
\end{aligned}$$

para  $i, j = 1, 2$ .

Entonces ahora,  $x^T J_H^T = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} = \omega_0(-x_2, x_1)$ , entonces

$$\begin{aligned}
x^T J_H^T F_{1zw}(0,0)(x^T \tilde{\mathcal{B}}x) &= \omega_0(-x_2, x_1) \begin{pmatrix} x^T \mathcal{S}_1^j x \\ x^T \mathcal{S}_2^j x \end{pmatrix} \\
&= \omega_0(-x_2(x^T \mathcal{S}_1^j x) + x_1(x^T \mathcal{S}_2^j x)) \\
&= \omega_0 \begin{pmatrix} -x_2(x^T \mathcal{S}_1^1 x) + x_1(x^T \mathcal{S}_2^1 x) \\ -x_2(x^T \mathcal{S}_1^2 x) + x_1(x^T \mathcal{S}_2^2 x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
J_H^{-1}(x^T J_H^T F_{1zw}(0,0)x^T \tilde{\mathcal{B}}x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2(x^T \mathcal{S}_1^1 x) + x_1(x^T \mathcal{S}_2^1 x) \\ -x_2(x^T \mathcal{S}_1^2 x) + x_1(x^T \mathcal{S}_2^2 x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x_2(x^T \mathcal{S}_1^2 x) + x_1(x^T \mathcal{S}_2^2 x) \\ x_2(x^T \mathcal{S}_1^1 x) - x_1(x^T \mathcal{S}_2^1 x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_2^2 & -\mathcal{S}_1^2 \\ -\mathcal{S}_2^1 & \mathcal{S}_1^1 \end{pmatrix} (x, x, x),
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{C}_{\bar{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_2^2 & -\mathcal{S}_1^2 \\ -\mathcal{S}_2^1 & \mathcal{S}_1^1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Ahora reescribimos (3.14)

$$\frac{1}{6}\mathcal{C} = \frac{1}{6}\mathcal{C}_0 + \beta_2\omega_0^2\mathcal{C}_M + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{\bar{A}} + \beta_2\omega_0^2\mathcal{C}_{\bar{B}}, \quad (3.18)$$

Finalmente, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x} = J_\mu x + \frac{1}{2}\mathcal{Q}(x, x) + \frac{1}{6}\mathcal{C}(x, x, x) + \dots \quad (3.19)$$

donde

$$\begin{aligned} J_\mu &= J_H + \beta_1\mu\mathcal{M} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_1\mu \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1\mu\mathcal{M}_{11} & -\omega_0 + \beta_1\mu\mathcal{M}_{12} \\ \omega_0 + \beta_1\mu\mathcal{M}_{21} & \beta_1\mu\mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2.3. Diseño de la ley de control

En esta sección vamos a probar, usando el teorema (2.4), bajo que condiciones el sistema (3.19) sufre la bifurcación de Hopf en  $x = 0$  con  $\mu = 0$ . Primero, vamos a probar que los valores propios de  $J_\mu$  atraviesan el eje imaginario cuando  $\mu = 0$ , y segundo, mostraremos que el primer coeficiente de Lyapunov  $a$  es diferente de cero.

1) Valores propios de  $J_\mu$ : La ecuación característica de la parte lineal de (3.19) está dada por

$$\lambda^2 - tr(J_\mu)\lambda + det(J_\mu) = 0$$

donde

$$tr(J_\mu) = \beta_1\mu tr(\mathcal{M})$$

$$\begin{aligned} det(J_\mu) &= \beta_1^2\mu^2(\mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{22}) + (\omega_0 + \beta_1\mu\mathcal{M}_{21})(\omega_0 - \beta_1\mu\mathcal{M}_{12}) \\ &= \beta_1^2\mu^2(\mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{22}) + \omega_0^2 + \beta_1\mu\omega_0(\mathcal{M}_{21} - \mathcal{M}_{12}) - \beta_1^2\mu^2(\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{21}) \\ &= \omega_0^2 + \beta_1\mu\omega_0(\mathcal{M}_{21} - \mathcal{M}_{12}) + \beta_1^2\mu^2 det(\mathcal{M}), \end{aligned}$$

con  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij})$ .

Entonces, para  $\mu$  suficientemente pequeña, los valores propios están dados por

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{2}tr(J_\mu) \pm i\sqrt{\det(J_\mu) - \left(\frac{1}{2}tr(J_\mu)\right)^2}.$$

entonces,  $\lambda(0) = \pm i\omega_0$  y

$$Re(\lambda(\mu)) = \frac{1}{2}tr(J_\mu) = \frac{1}{2}\beta_1\mu tr(\mathcal{M})$$

pero, de (3.13),

$$\begin{aligned} tr(\mathcal{M}) &= tr(M_1 - b_2^T (J_S^{-1})^T F_{1wz}(0, 0)) \\ &= tr(M_1) - tr(b_2^T (J_S^{-1})^T F_{1wz}(0, 0)) \\ &= tr(M_1) - tr(b_2^T (J_S^{-1})^T F_{1wz}(0, 0))^T \\ &= tr(M_1) - tr(F_{1zw}^T(0, 0) J_S^{-1} b_2). \end{aligned}$$

Ahora bien de (3.16),

$$F_{1zw}^T(0, 0) J_S^{-1} b_2 = \left( F_{1zw}^1 J_S^{-1} b_2 \quad F_{1zw}^2 J_S^{-1} b_2 \right)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{1zw}^j(0, 0) J_S^{-1} b_2 &= \begin{pmatrix} F_{1z_1w}^j(0, 0) J_S^{-1} b_2 \\ F_{1z_2w}^j(0, 0) J_S^{-1} b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_1} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \\ \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2 F_1^j(0,0)}{\partial w_k \partial z_2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces



$$\begin{aligned}
tr(F_{1zw}^{TT}(0,0)J_S^{-1}b_2) &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \frac{\partial^2 F_1^1(0,0)}{\partial w_k \partial z_1} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \frac{\partial^2 F_1^2(0,0)}{\partial w_k \partial z_2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \left( \frac{\partial^2 F_1^1(0,0)}{\partial w_k \partial z_1} + \frac{\partial^2 F_1^2(0,0)}{\partial w_k \partial z_2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \frac{\partial}{\partial w_k} \left( \frac{\partial F_1^1(0,0)}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1^2(0,0)}{\partial z_2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \frac{\partial}{\partial w_k} (div_z F_1)(0,0),
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Re(\lambda(\mu)) = \frac{\beta_1 \mu}{2} \mathcal{K}_1,$$

donde

$$\mathcal{K}_1 = tr(M_1) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \frac{\partial}{\partial w_k} (div_z F_1)(0,0), \quad (3.20)$$

y de (2.7),

$$\begin{aligned}
d &= \frac{d}{d\mu} Re(\lambda(\mu))|_{\mu=0} \\
&= \frac{\beta_1}{2} \mathcal{K}_1
\end{aligned} \quad (3.21)$$

2)Primer coeficiente de Lyapunov: De (2.8),

$$a = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_0 R_2)$$

entonces de nuestro sistema (3.19), haciendo  $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= J_0 x + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(x, x) + \frac{1}{6} \mathcal{C}(x, x, x) + \dots \\
&= J_0 x + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(x, x) + \frac{1}{6} \mathcal{C}_0 + \beta_2 \omega_0^2 \mathcal{C}_M + \frac{1}{2} \mathcal{C}_{\bar{A}} + \beta_2 \omega_0^2 \mathcal{C}_{\bar{B}} \\
&= J_0 x + f(x)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}Q(x, x) + \frac{1}{6}C_0 + \beta_2\omega_0^2 C_M + \frac{1}{2}C_{\tilde{A}} + \beta_2\omega_0^2 C_{\tilde{B}} \\
f_1(x) &= \frac{1}{2}x^T Q_1 x + \frac{1}{6}C_{01} + \beta_2\omega_0^2 ((x_1^2 + x_2^2)(m_{22}x_1 - m_{21}x_2)) + \frac{1}{2}C_{\tilde{A}_1} \\
&\quad + (-x_2(x^T S_1^2 x) + x_1(x^T S_2^2 x)) \\
f_2(x) &= \frac{1}{2}x^T Q_2 x + \frac{1}{6}C_{02} + \beta_2\omega_0^2 ((x_1^2 + x_2^2)(-m_{12}x_1 + m_{11}x_2)) + \frac{1}{2}C_{\tilde{A}_2} \\
&\quad + (x_2(x^T S_1^1 x) - x_1(x^T S_2^1 x)) \\
f_{1x_1x_1x_1} &= \beta_2\omega_0^2(6(m_{22} + s_{22})) + \mathcal{O}(1) \\
f_{1x_1x_2x_2} &= \beta_2\omega_0^2(2(m_{22} + s_{22})) + \mathcal{O}(1) \\
f_{2x_1x_1x_2} &= \beta_2\omega_0^2(2(m_{11} + s_{11})) + \mathcal{O}(1) \\
f_{2x_2x_2x_2} &= \beta_2\omega_0^2(6(m_{11} + s_{11})) + \mathcal{O}(1) \\
R_1|_{x=0} &= \gamma_1 \\
R_2 &= 8\beta_2\omega_0^2 ((m_{11} + m_{22}) + (s_{11} + s_{22})) + \gamma_2 \\
&= 8\beta_2\omega_0^2 \left( \text{tr}(M_1) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_{2k}}{\lambda_k} \left( \frac{\partial^2 F_1^1(0, 0)}{\partial w_k \partial z_1} + \frac{\partial^2 F_1^2(0, 0)}{\partial w_k \partial z_2} \right) \right) + \gamma_2 \\
&= 8\beta_2\omega_0^2 \mathcal{K}_1 + \gamma_2 \\
a &= \frac{1}{16\omega_0} (\gamma_1 + \omega_0(8\beta_2\omega_0^2 \mathcal{K}_1 + \gamma_2)) \\
&= \frac{1}{2} \beta_2 \omega_0^2 \mathcal{K}_1 + \gamma \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Hemos probado el siguiente resultado.

### 3.2.4. Teorema Principal

**Teorema 3.1.** *Considere el sistema de control*

$$\dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)u,$$

$$\text{con } F(0) = 0 \text{ y } DF(0) = J = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}, \text{ con } J_H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$J_S = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$  Hurwitz. Si  $\mathcal{K}_1$ , dado por (3.20) es diferente de cero,  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , con  $b_1 = 0$ , entonces existen  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , tales que con la ley de control

$$u = \beta_1 \mu + \beta_2 (z_1^2 + z_2^2),$$

el sistema sufre la bifurcación de Hopf en  $x = 0$  con  $\mu = 0$ . Mas aún, es posible controlar la estabilidad y la dirección de la órbita periódica cerca del origen, seleccionando el signo de  $d$  y  $a$  en (3.21) y (3.22), respectivamente.

### 3.2.5. Ejemplo

Consideremos un sistema no lineal en  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} a_1 z_1^2 + a_2 z_1 w \\ a_3 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 z_1^3 \\ a_5 z_1 z_2^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad + \left( \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} m_3 \\ 0 \end{pmatrix} w + \dots \right) (\beta_1 \mu + \beta_2 (z_1^2 + z_2^2)) \\ \dot{w} &= \lambda_1 w + b_2 (\beta_1 \mu + \beta_2 (z_1^2 + z_2^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\omega_0 z_2 + (a_1 z_1^2 + a_2 z_1 w + \beta_1 m_1 \mu z_1 + \beta_1 m_3 \mu w) \\ &\quad + (a_4 z_1^3 + m_1 \beta_2 z_1 (z_1^2 + z_2^2) + m_3 \beta_2 w (z_1^2 + z_2^2)) \\ \dot{z}_2 &= \omega_0 z_1 + (a_3 z_1 z_2 + m_2 \beta_1 \mu z_2) + (a_5 z_1 z_2^2 + \beta_2 m_2 z_2 (z_1^2 + z_2^2)) \\ \dot{w} &= \lambda_1 w + b_2 \beta_1 \mu + \beta_2 b_2 (z_1^2 + z_2^2) \end{aligned}$$

Expresado como un sistema extendido sería

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\mu} \\ \dot{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (0) & (0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \beta_1 b_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \mu \\ w \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11}(z, w, \mu) \\ \mathcal{F}_{12}(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mathcal{F}_{14}(z, w, \mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{11}(z, w, \mu) &= (a_1 z_1^2 + a_2 z_1 w + \beta_1 m_1 \mu z_1 + \beta_1 m_3 \mu w) \\
&\quad + (a_4 z_1^3 + m_1 \beta_2 z_1 (z_1^2 + z_2^2) + m_3 \beta_2 w (z_1^2 + z_2^2)) \\
\mathcal{F}_{12}(z, w, \mu) &= (a_3 z_1 z_2 + m_2 \beta_1 \mu z_2) + (a_5 z_1 z_2^2 + \beta_2 m_2 z_2 (z_1^2 + z_2^2)) \\
\mathcal{F}_{14}(z, w, \mu) &= \beta_2 b_2 (z_1^2 + z_2^2)
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mu \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\omega_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1^2} & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \mu \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \mu, y) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} \\ \frac{-1}{\omega_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11}(-\omega_0 x_2, \omega_0 x_1, \mu, \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu) \\ \mathcal{F}_{12}(-\omega_0 x_2, \omega_0 x_1, \mu, \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0} \mathcal{F}_{12}(-\omega_0 x_2, \omega_0 x_1, \mu, \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu) \\ \frac{-1}{\omega_0} \mathcal{F}_{11}(-\omega_0 x_2, \omega_0 x_1, \mu, \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \mu, y) \\ f_2(x_1, x_2, \mu, y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x_1, x_2, \mu, y) &= \frac{1}{\lambda_1} \mathcal{F}_{14} \left( -\omega_0 x_2, \omega_0 x_1, \mu, \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu \right) \\
&= \frac{1}{\lambda_1} \beta_2 b_2 \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \mu, y) &= \frac{1}{\omega_0} (-a_3 \omega_0^2 x_1 x_2 + m_2 \beta_1 \mu \omega_0 x_1 - a_5 \omega_0^3 x_2 x_1^2 + \beta_2 m_2 \omega_0^3 x_1 (x_1^2 + x_2^2)) \\
&= -a_3 \omega_0 x_1 x_2 + m_2 \beta_1 \mu x_1 - a_5 \omega_0^2 x_2 x_1^2 + \beta_2 m_2 \omega_0^2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\
f_2(x_1, x_2, \mu, y) &= \frac{-1}{\omega_0} (a_1 \omega_0^2 x_2^2 - a_2 \omega_0 x_2 \left( \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu \right) - \beta_1 m_1 \mu \omega_0 x_2 - a_4 \omega_0^3 x_2^3 \\
&\quad - m_1 \beta_2 \omega_0^3 x_2 (x_1^2 + x_2^2)) \\
&= -a_1 \omega_0 x_2^2 + a_2 x_2 \left( \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu \right) + \beta_1 m_1 \mu x_2 + a_4 \omega_0^2 x_2^3 \\
&\quad + m_1 \beta_2 \omega_0^2 x_2 (x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned}$$

La variedad central que buscamos es

$$y = h(x, \mu) = \frac{1}{2}x^T H_1 x + x^T H_2 \mu + \frac{1}{2}H_3 \mu^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x^T H_1 \dot{x} \\ \lambda_1 h(x, \mu) + g(x, \mu, h(x, \mu)) &= x^T H_1 J_H x \end{aligned}$$

$$x^T H_1 J_H x - \lambda_1 h(x, \mu) - g(x, \mu, h(x, \mu)) \equiv 0$$

$$x^T H_1 J_H x - \frac{1}{2}\lambda_1 x^T H_1 x - \frac{\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1} x^T I x \equiv 0$$

$$x^T \left( H_1 J_H - \frac{1}{2}\lambda_1 H_1 - \frac{\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1} I \right) x \equiv 0$$

$$x^T \left( \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} - \frac{\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x \equiv 0$$

$$x^T \begin{pmatrix} \alpha_{12}\omega_0 - \frac{1}{2}\lambda_1\alpha_{11} - \frac{\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1} & -\alpha_{11}\omega_0 - \frac{1}{2}\lambda_1\alpha_{12} \\ \alpha_{22}\omega_0 - \frac{1}{2}\lambda_1\alpha_{12} & -\alpha_{12}\omega_0 - \frac{1}{2}\lambda_1\alpha_{22} - \frac{\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1} \end{pmatrix} x \equiv 0$$

Si resolvemos el sistema para  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  y  $\alpha_{22}$  obtenemos

$$\alpha_{11} = \frac{-2\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1^2} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = 0$$

Entonces  $H_1 = \frac{-2\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1^2} I$ , luego  $y = h(x, \mu) = \frac{-\beta_2 b_2 \omega_0^2}{\lambda_1^2} (x_1^2 + x_2^2)$

Cálculo de la velocidad de cruce

$$\begin{aligned} J_\mu &= J_H + \beta_1 \mu \mathcal{M} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \mu \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 - \frac{b_2}{\lambda_1} a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \mu m_2 & -\omega_0 \\ \omega_0 & \beta_1 \mu (m_1 - \frac{b_2}{\lambda_1} a_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \operatorname{tr}(J_\mu)\lambda + \det(J_\mu) &= 0 \\ \operatorname{tr}(J_\mu) &= \beta_1\mu \left( m_1 + m_2 - \frac{b_2}{\lambda_1}a_2 \right) \\ \det(J_\mu) &= \omega_0^2 + \beta_1^2\mu^2 m_2 \left( m_1 - \frac{b_2}{\lambda_1}a_2 \right) \\ \lambda(\mu) &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(J_\mu) \pm i\sqrt{\det(J_\mu) - \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}(J_\mu)\right)^2} \\ \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(J_\mu) = \frac{1}{2}\beta_1\mu \left( m_1 + m_2 - \frac{b_2}{\lambda_1}a_2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d &= \frac{d}{d\mu}\operatorname{Re}(\lambda(\mu))|_{\mu=0} \\ &= \frac{\beta_1}{2} \left( m_1 + m_2 - \frac{b_2}{\lambda_1}a_2 \right) \\ &= \frac{\beta_1}{2} \left( \operatorname{tr}(M_1) - \frac{b_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial w}(\operatorname{div}_z F_1) \right) \\ &= \frac{\beta_1}{2} \mathcal{K}_1\end{aligned}$$

Cálculo del primer coeficiente de Lyapunov

Tenemos que

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \mu, y) &= -a_3\omega_0 x_1 x_2 + m_2\beta_1\mu x_1 - a_5\omega_0^2 x_2 x_1^2 + \beta_2 m_2 \omega_0^2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ f_2(x_1, x_2, \mu, y) &= -a_1\omega_0 x_2^2 + a_2 x_2 \left( \lambda_1 y - \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu \right) + \beta_1 m_1 \mu x_2 + a_4 \omega_0^2 x_2^3 \\ &\quad + m_1 \beta_2 \omega_0^2 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &= -a_1\omega_0 x_2^2 - a_2 x_2 \frac{\beta_2 \omega_0^2 b_2}{\lambda_1} (x_1^2 + x_2^2) - a_2 x_2 \frac{\beta_1 b_2}{\lambda_1} \mu \\ &\quad + \beta_1 m_1 \mu x_2 + a_4 \omega_0^2 x_2^3 + m_1 \beta_2 \omega_0^2 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \\ f_{1x_1 x_1 x_1} &= 6\beta_2 m_2 \omega_0^2 \\ f_{1x_1 x_2 x_2} &= 2\beta_2 m_2 \omega_0^2 \\ f_{2x_1 x_1 x_2} &= -2a_2 \frac{\beta_2 \omega_0^2 b_2}{\lambda_1} + 2m_1 \beta_2 \omega_0^2 \\ f_{2x_2 x_2 x_2} &= -6a_2 \frac{\beta_2 \omega_0^2 b_2}{\lambda_1} + 6a_4 \omega_0^2 + 6m_1 \beta_2 \omega_0^2\end{aligned}$$

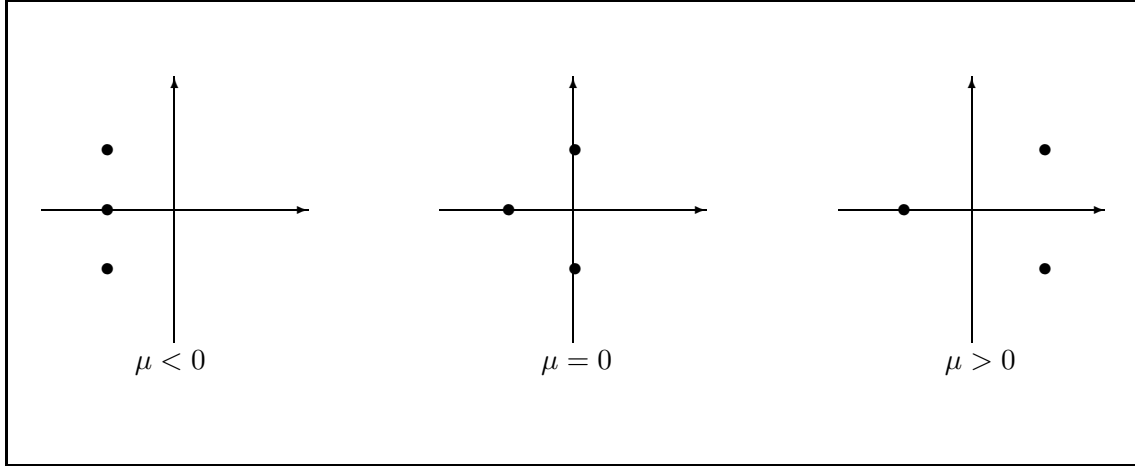


Figura 3.1: Cruce positivo de los valores propios a través del eje imaginario

$$\begin{aligned}
 R_1|_{x=0} &= 0 \\
 R_2 &= 8\beta_2\omega_0^2 m_2 + 8\beta_2\omega_0^2 m_1 - 8\beta_2\omega_0^2 \frac{b_2}{\lambda_1} a_2 + 6a_4\omega_0^2 \\
 &= 8\beta_2\omega_0^2 \left( m_1 + m_2 - \frac{b_2}{\lambda_1} a_2 \right) + 6a_4\omega_0^2 \\
 &= 8\beta_2\omega_0^2 \left( \text{tr}(M_1) - \frac{b_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial w} (\text{div}_z F_1) \right) + 6a_4\omega_0^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_0 R_2) \\
 &= \frac{R_2}{16} \\
 &= \frac{1}{2} \beta_2 \omega_0^2 \left( \text{tr}(M_1) - \frac{b_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial w} (\text{div}_z F_1) \right) + \frac{3}{8} a_4 \omega_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \beta_2 \omega_0^2 \mathcal{K}_1 + \frac{3}{8} a_4 \omega_0^2
 \end{aligned}$$

Si fijamos los valores

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= b_2 = m_1 = m_2 = m_3 = 1, \\
 a_1 &= a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, \\
 \lambda_1 &= -1
 \end{aligned}$$

tendríamos que

$$d = \frac{3}{2}\beta_1$$

$$a = \frac{3}{2}\beta_2 + \frac{3}{8}$$

Investiguemos el caso en el que  $d > 0$  y  $a < 0$ , es decir cuando tenemos una velocidad de cruce positiva (ver figura 3.1) y un coeficiente de Lyapunov negativo. Entonces para este caso la órbita sería atractora y se originaría para algún valor  $\mu > 0$  (ver figura 3.2). Para que suceda esto fijamos los valores  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = -1$ . Utilizando el paquete de simulación *Simnon* encontramos que efectivamente se origina una órbita periódica para  $\mu = 0,1$  (ver figura 3.3).

Investiguemos ahora el caso en el que  $a = 0$ , es decir el caso degenerado. En esta situación tendríamos una sucesión de círculos para  $\mu = 0$  (ver figuras 3.4 y 3.5). Para que suceda esto fijamos los valores  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = -\frac{1}{4}$ .

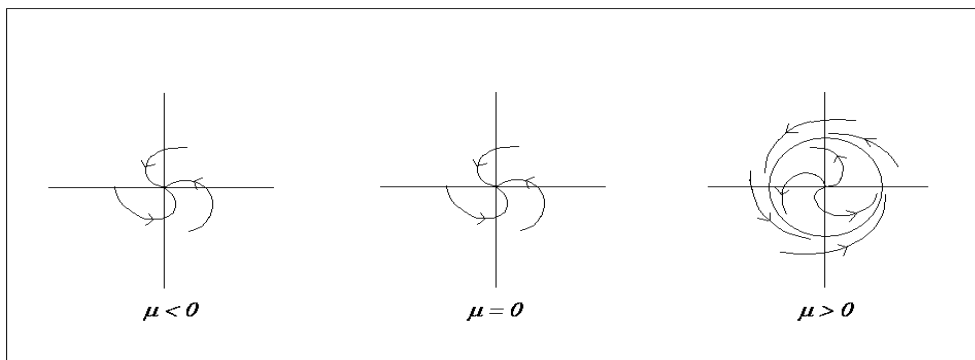


Figura 3.2: Escenario de creación de la órbita periódica estable



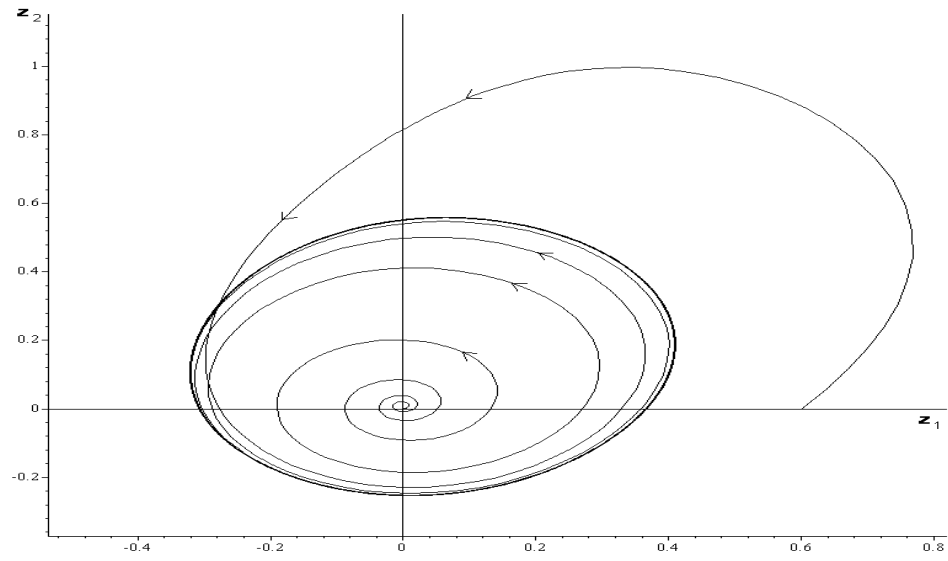


Figura 3.3: Órbita periódica estable para  $\mu = 0,1$

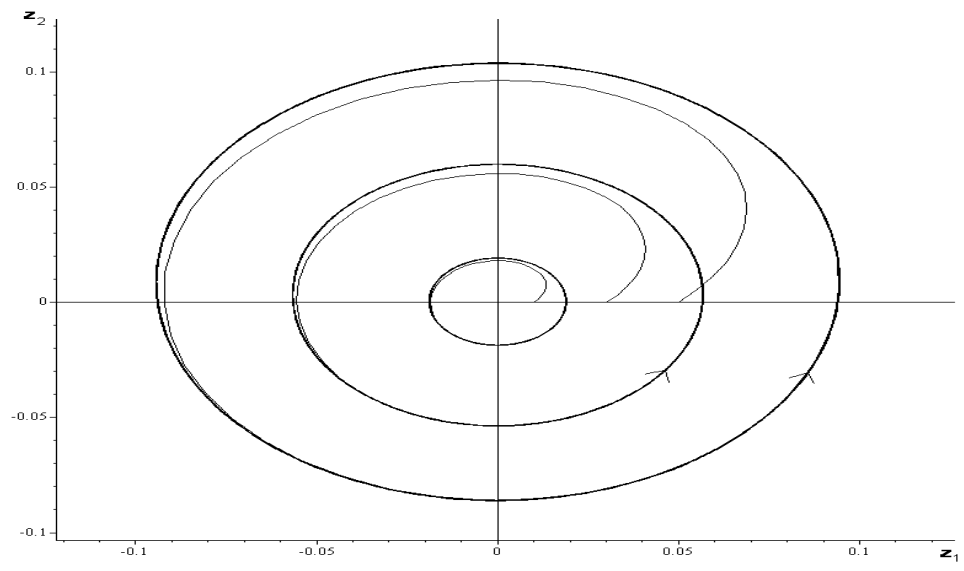


Figura 3.4: Caso degenerado

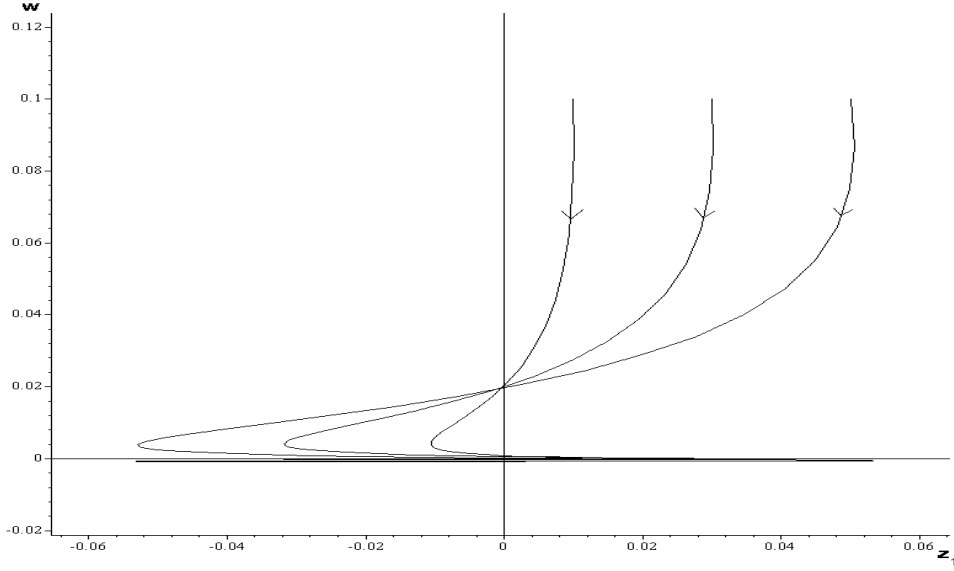


Figura 3.5: Caso degenerado

### 3.3. Caso $b_1 \neq 0$

Consideramos la ley de control

$$u(z, \mu) = \mu(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) + \beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3 = \mu Lz + \mathcal{C}_0(z) \quad (3.23)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  y  $L = (\alpha_1, \alpha_2)$ .

Ahora, usamos la ley de control (3.23) en el sistema (3.2)

$$\begin{aligned} (b_1 + M_1 z + M_2 w + \dots)u &= (b_1 + M_1 z + M_2 w + \dots)(\mu Lz + \mathcal{C}_0(z)) \\ &= b_1(\mu Lz) + M_1 z(\mu Lz) + M_2 w(\mu Lz) + b_1 \mathcal{C}_0(z) + \dots \\ (b_2 + M_3 z + M_4 w + \dots)u &= (b_2 + M_3 z + M_4 w + \dots)(\mu Lz + \mathcal{C}_0(z)) \\ &= b_2(\mu Lz) + M_3 z(\mu Lz) + M_4 w(\mu Lz) + b_2 \mathcal{C}_0(z) + \dots \end{aligned}$$

Obtenemos el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= J_H z + \mu b_1 Lz + \mathcal{F}_3(z, w, \mu) \\ \dot{w} &= J_S w + \mu b_2 Lz + \mathcal{F}_4(z, w, \mu), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3(z, w, \mu) &= F_{21}(z, w) + \mu Lz(M_1z + M_2w) \\ &\quad + F_{31}(z, w) + b_1\mathcal{C}_0z + \dots, \\ \mathcal{F}_4(z, w, \mu) &= F_{22}(z, w) + \mu Lz(M_3z + M_4w) \\ &\quad + F_{32}(z, w) + b_2\mathcal{C}_0z + \dots,\end{aligned}$$

### 3.3.1. Variedad Central

La ecuación (3.24) representa una familia  $\mu$ -parametrizada de sistemas, la cual puede escribirse como un sistema extendido.

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\mu} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu b_1 Lz + \mathcal{F}_3(z, w, \mu) \\ 0 \\ \mu b_2 Lz + \mathcal{F}_4(z, w, \mu) \end{pmatrix}.$$

Entonces podemos poner (3.24) en su forma estándar

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\mu} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(z, \mu, w) \\ 0 \\ g(z, \mu, w) \end{pmatrix},$$

ó

$$\begin{aligned}\dot{z} &= J_H z + f(z, \mu, w), \\ \dot{\mu} &= 0, \\ \dot{w} &= J_S w + g(z, \mu, w),\end{aligned}\tag{3.25}$$

donde

$$f(z, \mu, w) = \mu b_1 Lz + \mathcal{F}_3(z, w, \mu)\tag{3.26}$$

$$g(z, \mu, w) = \mu b_2 Lz + \mathcal{F}_4(z, w, \mu)\tag{3.27}$$

Buscamos una variedad central

$$w = h(z, \mu) = \frac{1}{2}z^T H_1 z + z^T H_2 \mu + \frac{1}{2}H_3 \mu^2 + \dots\tag{3.28}$$

tal que  $h(0, 0) = 0$  con  $Dh(0, 0) = 0$ ,  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$  y

$$h_i(z, \mu) = \frac{1}{2}z^T H_{1i}z + z^T H_{2i}\mu + \frac{1}{2}H_{3i}\mu^2 + \dots$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-2$ .

Sustituyendo (3.28) en (3.25) y usando la regla de la cadena,

$$\dot{w} = \frac{\partial h(z, \mu)}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial h(z, \mu)}{\partial \mu} \dot{\mu},$$

es decir

$$\frac{\partial h(z, \mu)}{\partial z} \dot{z} = J_S h(z, \mu) + g(z, \mu, h(z, \mu)).$$

Entonces, obtenemos

$$\frac{\partial h(z, \mu)}{\partial z} [J_H z + f(z, \mu, h(z, \mu))] - J_S h(z, \mu) - g(z, \mu, h(z, \mu)) \equiv 0.$$

El término  $f(z, \mu, h(z, \mu))$  no interesa, entonces nos queda

$$\frac{\partial h(z, \mu)}{\partial z} J_H z - J_S h(z, \mu) - g(z, \mu, h(z, \mu)) \equiv 0. \quad (3.29)$$

Esta ecuación diferencial parcial para  $h$  se puede resolver en el caso simple, esto es, cuando  $J_S$  es diagonal, es decir,

$$J_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_j < 0$  para cada  $j$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_{n-2}}{\partial z} \end{pmatrix} J_H z - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{2,n-2} \end{pmatrix} \equiv 0$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} J_H z - \lambda_1 h_1 - g_{21} \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial z} J_H z - \lambda_2 h_2 - g_{22} &\equiv 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial h_{n-2}}{\partial z} J_H z - \lambda_{n-2} h_{n-2} - g_{2,n-2} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ahora, estamos interesados en calcular  $H_1$  porque haremos  $\mu = 0$  cuando calculemos el primer coeficiente de Lyapunov  $a$ . Ahora, si

$$g_2(z, \mu) = \frac{1}{2} z^T N_1 z + z^T N_2 \mu + \frac{1}{2} N_3 \mu^2, \quad (3.30)$$

con

$$g_{2i}(z, \mu) = \frac{1}{2} z^T N_{1i} z + z^T N_{2i} \mu + \frac{1}{2} N_{3i} \mu^2,$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-2$ , que representa los términos cuadráticos de  $g(z, \mu, h(z, \mu))$ , entonces de (3.29) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i(z, \mu)}{\partial z} J_H z - \lambda_i h_i(z, \mu) - g_{2i}(z, \mu) &= (z^T H_{1i} + H_{2i} \mu) J_H z \\ &\quad - \lambda_i \left( \frac{1}{2} z^T H_{1i} z + z^T H_{2i} \mu + \frac{1}{2} H_{3i} \mu^2 \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} z^T N_{1i} z + z^T N_{2i} \mu + \frac{1}{2} N_{3i} \mu^2 \right) \\ &= z^T \left( H_{1i} J_H - \frac{1}{2} \lambda_i H_{1i} - \frac{1}{2} N_{1i} \right) z \\ &\quad + z^T \left( J_H^T H_{2i} - \lambda_i H_{2i} - N_{2i} \right) \mu \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2} \lambda_i H_{3i} - \frac{1}{2} N_{3i} \right) \mu^2 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$z^T \left( H_{1i} J_H - \frac{1}{2} \lambda_i H_{1i} - \frac{1}{2} N_{1i} \right) z \equiv 0$$

$$H_{1i} J_H - \frac{1}{2} \lambda_i H_{1i} - \frac{1}{2} N_{1i} = A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i \\ \delta_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{1i} (J_H - \frac{1}{2} \lambda_i I) - \frac{1}{2} N_{1i} = A_i$$

$$H_{1i} (J_H - \frac{1}{2} \lambda_i I) = A_i + \frac{1}{2} N_{1i}$$

$$H_{1i} = \left( A_i + \frac{1}{2} N_{1i} \right) (J_H - \frac{1}{2} \lambda_i I)^{-1}$$

$$H_{1i} = (2A_i + N_{1i}) R_i$$

donde  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &= \frac{1}{2}(J_H - \frac{1}{2}\lambda_i I)^{-1} \\ &= \frac{-1}{\lambda_i^2 + 4\omega_0^2} \begin{pmatrix} \lambda_i & -2\omega_0 \\ 2\omega_0 & \lambda_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ahora vamos a calcular  $N_1$ . Observemos de (3.27),

$$\begin{aligned} g(z, \mu, h(z, \mu)) &= \mu b_2 Lz + \mathcal{F}_4(z, \mu, h(z, \mu)) \\ &= \mu b_2 Lz + F_{22}(z, h(z, \mu)) + \mu Lz(M_3 z + M_4 h(z, \mu)) \\ &\quad + F_{32}(z, h(z, \mu)) + b_2 \mathcal{C}_0 z + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{22}(z, h(z, \mu)) &= \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}(0, 0) z + z^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial h(z, \mu)}(0, 0) h(z, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} h(z, \mu)^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial h(z, \mu)^2}(0, 0) h(z, \mu) \end{aligned}$$

entonces

$$g(z, \mu, h(z, \mu)) = \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}(0, 0) z + \mathcal{O}(z^3)$$

Por lo tanto de (3.30),  $N_1 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}(0, 0)$

En este caso  $N_1$  no depende de los parámetros de control.

### 3.3.2. Dinámica sobre la Variedad Central

Sobre la variedad central, la dinámica está dada por

$$\dot{z} = J_H z + f(z, \mu, h(z, \mu)), \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} f(z, \mu, h(z, \mu)) &= \mu b_1 Lz + \mathcal{F}_3(z, \mu, h(z, \mu)) \\ &= \mu b_1 Lz + F_{21}(z, h(z, \mu)) + \mu Lz(M_1 z + M_2 h(z, \mu)) \\ &\quad + F_{31}(z, h(z, \mu)) + b_1 \mathcal{C}_0 z + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{21}(z, h(z, \mu)) &= \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(0, 0) z + z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial h(z, \mu)}(0, 0) h(z, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} h(z, \mu)^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial h(z, \mu)^2}(0, 0) h(z, \mu) \\ F_{31}(z, h(z, \mu)) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) + \dots \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z, \mu, h(z, \mu)) &= \mu b_1 L z + b_1 \mathcal{C}_0 z + \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(0, 0) z + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) \\ &\quad + z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial h(z, \mu)}(0, 0) h(z, \mu) + \dots \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (J_H + \mu b_1 L) z + b_1 \mathcal{C}_0 z + \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(0, 0) z + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) \\ &\quad + z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial h(z, \mu)}(0, 0) h(z, \mu) + \dots \\ &= J_\mu + b_1 \mathcal{C}_0 z + \frac{1}{2} z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(0, 0) z + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(0, 0)(z, z, z) \\ &\quad + z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial h(z, \mu)}(0, 0) h(z, \mu) + \dots \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde

$$\begin{aligned} J_\mu &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1 & b_{11}\alpha_2 \\ b_{12}\alpha_1 & b_{12}\alpha_2 \end{pmatrix} \\ J_\mu &= \begin{pmatrix} \mu b_{11}\alpha_1 & -\omega_0 + \mu b_{11}\alpha_2 \\ \omega_0 + \mu b_{12}\alpha_1 & \mu b_{12}\alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.3.3. Diseño de la ley de control

En esta sección vamos a probar, usando el teorema (2.4), bajo que condiciones el sistema (3.33) sufre la bifurcación de Hopf en  $z = 0$  con  $\mu = 0$ . Primero, vamos a probar que los valores propios de  $J_\mu$  atraviesan el eje imaginario cuando  $\mu = 0$ , y segundo, mostraremos que el primer coeficiente de Lyapunov  $a$  es diferente de cero.

1) Valores propios de  $J_\mu$ : La ecuación característica de la parte lineal de (3.33) está dado por

$$\lambda^2 - tr(J_\mu)\lambda + det(J_\mu) = 0$$

$$tr(J_\mu) = \mu(b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2) = \mu(\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \mu Lb_1$$

$$\begin{aligned} det(J_\mu) &= \mu^2 b_{11} b_{12} \alpha_1 \alpha_2 - (\omega_0 + \mu b_{12} \alpha_1)(-\omega_0 + \mu b_{11} \alpha_2) \\ &= \mu^2 b_{11} b_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \omega^2 - \omega_0 \mu b_{11} \alpha_2 + \omega_0 \mu b_{12} \alpha_1 - \mu^2 b_{11} b_{12} \alpha_1 \alpha_2 \\ &= \omega^2 - \omega_0 \mu (b_{11} \alpha_2 - b_{12} \alpha_1) \end{aligned}$$

Entonces los valores propios estan dados por la siguiente expresión

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \frac{1}{2}tr(J_\mu) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}tr(J_\mu)\right)^2 - det(J_\mu)}.$$

Si  $\mu = 0$ , entonces  $tr(J_0) = 0$  y  $det(J_0) = w_0^2$   
entonces

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm \sqrt{-w_0^2} = \pm iw_0$$

Ahora, para  $\mu$  suficientemente pequeña, los valores propios están dados por

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{2}tr(J_\mu) \pm i \sqrt{det(J_\mu) - \left(\frac{1}{2}tr(J_\mu)\right)^2}.$$

$$Re(\lambda_{1,2}(\mu)) = \frac{1}{2}tr(J_\mu) = \frac{1}{2}\mu Lb_1,$$

por lo tanto

$$d = \frac{d}{d\mu}(Re(\lambda_{1,2}(\mu))) = \frac{1}{2}Lb_1 \quad (3.34)$$



2) Primer coeficiente de Lyapunov:

$$F(z) = b_1 \mathcal{C}_0 z + \frac{1}{2} z^T F_{1zz}(0, 0) z + \frac{1}{6} F_{1zzz}(0, 0)(z, z, z) \\ + z^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial h(z, \mu)}(0, 0) h(z, \mu) + \dots$$

$$F_1(z) = b_{11}(\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3) + \frac{1}{2} z^T \mathcal{S}_1 z + \frac{1}{6} \mathcal{C}_1 z + \mathcal{C}_{h_1} z$$

$$F_2(z) = b_{12}(\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3) + \frac{1}{2} z^T \mathcal{S}_2 z + \frac{1}{6} \mathcal{C}_2 z + \mathcal{C}_{h_2} z$$

$$R_1 = F_{1z_1 z_2}(F_{1z_1 z_1} + F_{1z_2 z_2}) - F_{2z_1 z_2}(F_{2z_1 z_1} + F_{2z_2 z_2}) - F_{1z_1 z_1} F_{2z_1 z_1} + F_{1z_2 z_2} F_{2z_2 z_2}$$

$$\begin{aligned} F_{1z_1} &= 3b_{11}\beta_1 z_1^2 + \mathcal{O}(z) + \mathcal{O}(z^2) \\ F_{1z_1 z_1} &= 6b_{11}\beta_1 z_1 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) \\ F_{1z_1 z_2} &= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) \\ F_{1z_2} &= 3b_{11}\beta_2 z_2^2 + \mathcal{O}(z) + \mathcal{O}(z^2) \\ F_{1z_2 z_2} &= 6b_{11}\beta_2 z_2 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) \\ F_{2z_1} &= 3b_{12}\beta_1 z_1^2 + \mathcal{O}(z) + \mathcal{O}(z^2) \\ F_{2z_1 z_1} &= 6b_{12}\beta_1 z_1 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) \\ F_{2z_1 z_2} &= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) \\ F_{2z_2} &= 3b_{12}\beta_2 z_2^2 + \mathcal{O}(z) + \mathcal{O}(z^2) \\ F_{2z_2 z_2} &= 6b_{12}\beta_2 z_2 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= [\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)][6b_{11}\beta_1 z_1 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) + 6b_{11}\beta_2 z_2 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)] \\ &\quad - [\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)][6b_{12}\beta_1 z_1 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z) + 6b_{12}\beta_2 z_2 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)] \\ &\quad - [6b_{11}\beta_1 z_1 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)][6b_{12}\beta_1 z_1 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)] \\ &\quad + [6b_{11}\beta_2 z_2 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)][6b_{12}\beta_2 z_2 + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(z)] \end{aligned}$$

$$R_1|_{z=0} = C_1$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_1z_1z_2} + F_{2z_2z_2z_2} \\
&= [6b_{11}\beta_1 + \mathcal{O}(1)] + [\mathcal{O}(1)] + [\mathcal{O}(1)] + [6b_{12}\beta_2 + \mathcal{O}(1)] \\
&= 6b_{11}\beta_1 + 6b_{12}\beta_2 + \mathcal{O}(1) + C_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{16w}(R_1 + wR_2) \\
&= \frac{1}{16w}[C_1 + w(6b_{11}\beta_1 + 6b_{12}\beta_2 + \mathcal{O}(1) + C_2)] \\
&= \frac{3}{8}(\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} + K \\
a &= \frac{3}{8}\beta b_1 + K \tag{3.35}
\end{aligned}$$

### 3.3.4. Teorema Principal

**Teorema 3.2.** *Considere el sistema de control*

$$\dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)u,$$

con  $F(0) = 0$  y  $DF(0) = J = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ , con  $J_H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$  y

$J_S = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$  Hurwitz. Si  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , con  $b_1 \neq 0$  entonces existen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , tales que con la ley de control

$$u = \mu(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) + \beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3,$$

el sistema sufre la bifurcación de Hopf en  $z = 0$  con  $\mu = 0$ . Mas aún, es posible controlar la estabilidad y la dirección de la órbita periódica cerca del origen, seleccionando el signo de  $d$  y  $a$  en (3.34) y (3.35), respectivamente.

### 3.3.5. Ejemplo

Consideremos el mismo sistema no lineal en  $\mathbb{R}^3$  que en el ejemplo para el caso  $b_1 = 0$ , sólo que ahora aplicamos la ley de control para este caso

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} a_1 z_1^2 + a_2 z_1 w \\ a_3 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 z_1^3 \\ a_5 z_1 z_2^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad + \left( b_1 + \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} m_3 \\ 0 \end{pmatrix} w + \dots \right) (\mu L z + C_0(z)) \\ \dot{w} &= \lambda_1 w + b_2 (\mu L z + C_0(z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\omega_0 z_2 + b_{11} \mu L z + (a_1 z_1^2 + a_2 z_1 w) \\ &\quad + (m_1 z_1 \mu L z + m_3 w \mu L z + a_4 z_1^3 + b_{11} C_0(z)) + \dots \\ \dot{z}_2 &= \omega_0 z_1 + b_{12} \mu L z + (a_3 z_1 z_2) \\ &\quad + (m_2 z_2 \mu L z + a_5 z_1 z_2^2 + b_{12} C_0(z)) + \dots \\ \dot{w} &= \lambda_1 w + b_2 \mu L z + b_2 C_0(z)\end{aligned}$$

En lazo extendido sería

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\mu} \\ \dot{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (0) & (0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & (0) & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \mu \\ w \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} b_{11} \mu L z + \mathcal{F}_{11}(z, w, \mu) \\ b_{12} \mu L z + \mathcal{F}_{12}(z, w, \mu) \\ 0 \\ b_2 \mu L z + \mathcal{F}_{14}(z, w, \mu) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{11}(z, w, \mu) &= a_1 z_1^2 + m_1 z_1 \mu (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) + a_4 z_1^3 \\ &\quad + b_{11} (\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3) \\ \mathcal{F}_{12}(z, w, \mu) &= a_2 z_1 z_2 + m_2 z_2 \mu (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) + a_5 z_1 z_2^2 \\ &\quad + b_{12} (\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3) \\ \mathcal{F}_{14}(z, w, \mu) &= b_2 (\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}f_1 &= a_1 z_1^2 + a_4 z_1^3 + b_{11} (\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3) \\ f_2 &= a_3 z_1 z_2 + a_5 z_1 z_2^2 + b_{12} (\beta_1 z_1^3 + \beta_2 z_2^3)\end{aligned}$$

Cálculo del primer coeficiente de Lyapunov

$$\begin{aligned}
 f_{1z_1} &= 3b_{11}\beta_1 z_1^2 + 3a_4 z_1^2 + 2a_1 z_1 \\
 f_{1z_1 z_1} &= 6b_{11}\beta_1 z_1 + 6a_4 z_1 + 2a_1 \\
 f_{1z_1 z_2} &= 0 \\
 f_{1z_2} &= 3b_{11}\beta_2 z_2^2 \\
 f_{1z_2 z_2} &= 6b_{11}\beta_2 z_2 \\
 f_{2z_1} &= 3b_{12}\beta_1 z_1^2 + a_5 z_2^2 + a_3 z_2 \\
 f_{2z_1 z_1} &= 6b_{12}\beta_1 z_1 \\
 f_{2z_1 z_2} &= 2a_5 z_2 + a_3 \\
 f_{2z_2} &= 3b_{12}\beta_2 z_2^2 + 2a_5 z_1 z_2 + a_3 z_1 \\
 f_{2z_2 z_2} &= 6b_{12}\beta_2 z_2 + 2a_5 z_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1|_{z=0} &= 0 \\
 R_2 &= f_{1z_1 z_1 z_1} + f_{1z_1 z_2 z_2} + f_{2z_1 z_1 z_2} + f_{2z_2 z_2 z_2} \\
 &= 6b_{11}\beta_1 + 6b_{12}\beta_2 + 6a_4
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{R_2}{16} = \frac{3}{8}(\beta b_1 + a_4)$$

Nuevamente, si fijamos los valores

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= b_2 = m_1 = m_2 = m_3 = 1, \\
 a_1 &= a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, \\
 \lambda_1 &= -1 \\
 b_1 &= \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

tendríamos que

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{2} L b_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 \\
 a &= \frac{3}{8}(\beta b_1 + a_4) \\
 &= \frac{3}{8}(\beta_1 + 1)
 \end{aligned}$$

Investiguemos el caso en el que  $d > 0$  y  $a < 0$ , es decir cuando tenemos una velocidad de cruce positiva y un coeficiente de Lyapunov negativo. Entonces para este caso la órbita sería atractora y se originaría para algún valor  $\mu > 0$ . Para que suceda esto fijamos los valores  $\beta_1 = -2$  y  $\alpha_1 = 1$  (ver figuras 3.6 y 3.7).

Investiguemos ahora el caso en el que  $a = 0$ , es decir el caso degenerado. En esta situación tendríamos una sucesión de círculos para  $\mu = 0$ . Para que suceda esto fijamos  $\beta_1 = -1$  (ver figuras 3.8 y 3.9).

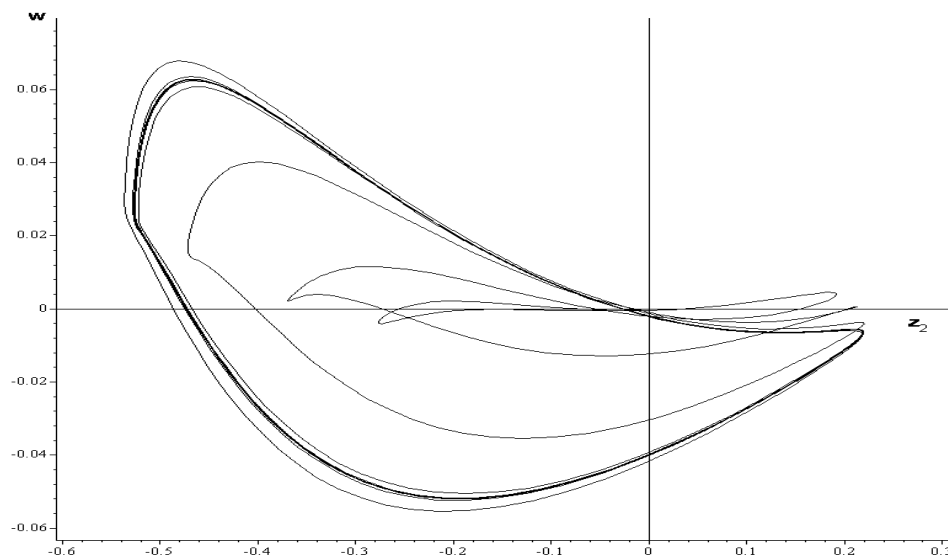


Figura 3.6: Órbita periódica estable para  $\mu = 0,1$

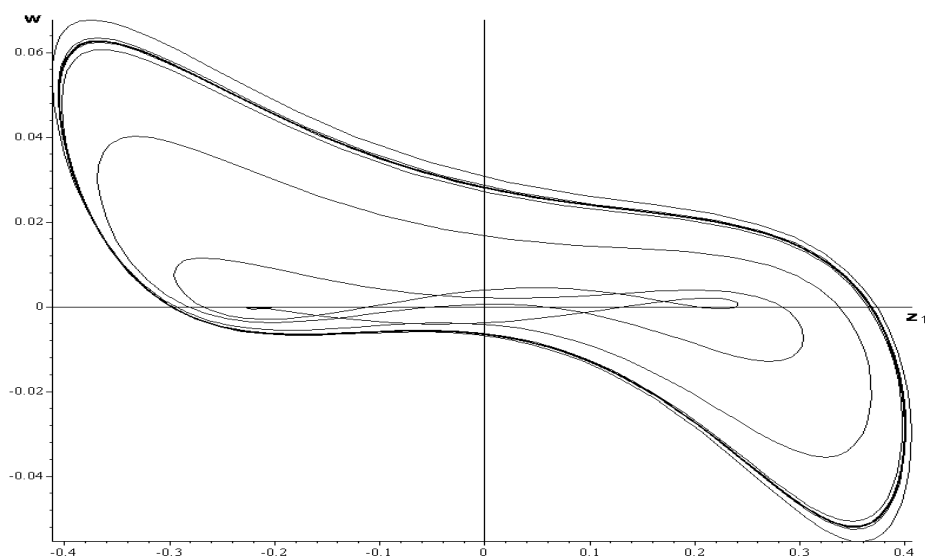
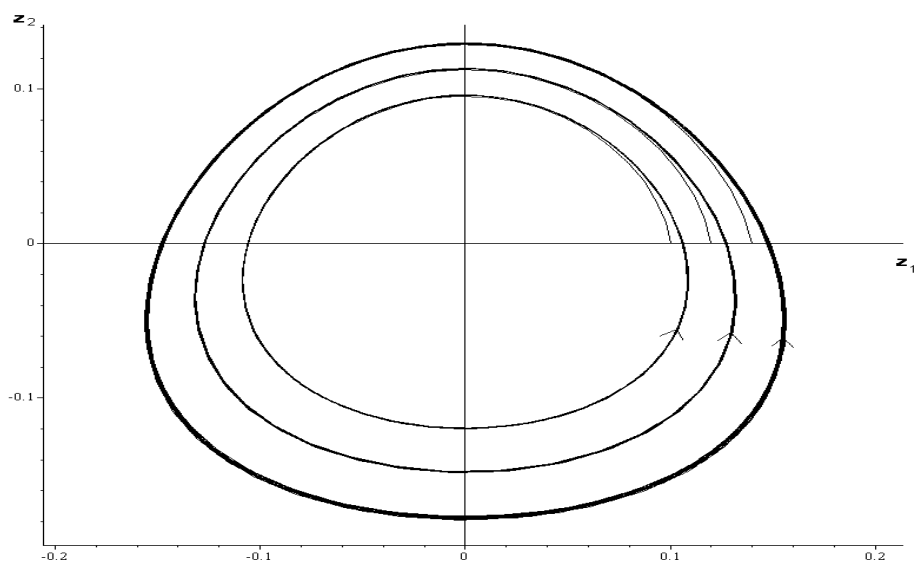
Figura 3.7: Órbita periódica estable para  $\mu = 0,1$ 

Figura 3.8: Caso degenerado

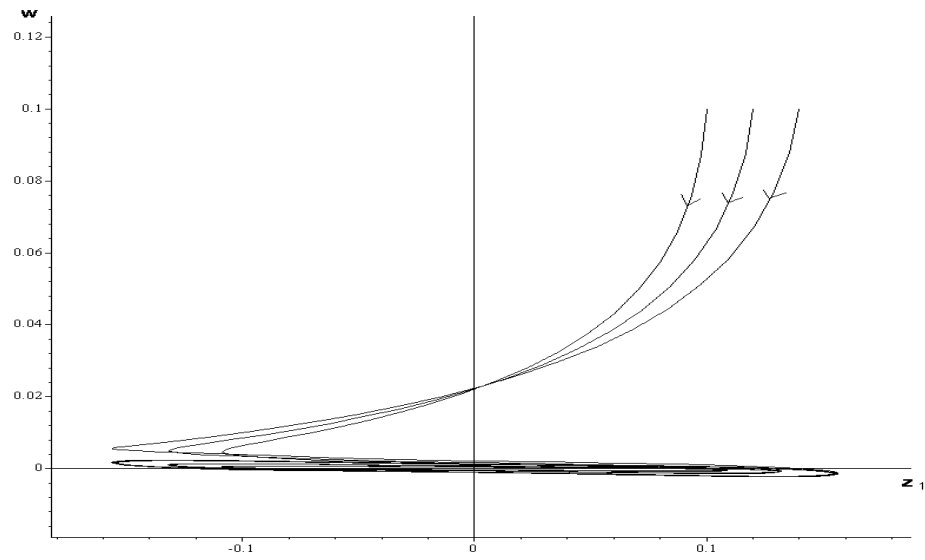


Figura 3.9: Caso degenerado





# Una aplicación al péndulo de Furuta

---

Los péndulos invertidos se han convertido en unos dispositivos muy populares para el análisis de control no-lineal y para propósitos educativos. El primer péndulo invertido fué diseñado en los años setenta, y notablemente treinta años después aún permanece como un objeto de estudio. El interés es porque los modelos matemáticos para los péndulos invertidos presentan ciertas analogías con modelos de procesos más complejos, tales como, por ejemplo, los generadores conectados en sincronía. Por lo tanto, su estudio permite una primera aproximación para el análisis de problemas que presentan comportamiento muy complejo. Esto motiva fuertemente la investigación sobre el péndulo invertido. El dispositivo da lugar a muchos problemas interesantes de control locales y globales. Es un sistema mecánico no-lineal, que es inestable y cuando las limitaciones del actuador son tomadas en cuenta producen muchos comportamientos complejos e interesantes que merecen un análisis cuidadoso. De hecho se muestran dos comportamientos diferentes y muy interesantes. Uno es el problema de hacer oscilar el péndulo de la posición en la que cuelga a la posición vertical. El segundo problema trata acerca de estabilizar el péndulo a la posición invertida hacia arriba. Estos dos problemas son muy interesantes. En particular el primero, el cual es un verdadero problema de control no-lineal que exhibe muchas dificultades. Por ejemplo cuando el brazo está horizontal se pierde la controlabilidad, y aún más el sistema no es linealizabile mediante una ley de control. Hay distintas versiones de estos sistemas que dependen del tipo de mecanismo que mueve el pivote. En particular, el péndulo invertido rotacional desarrollado por Furuta [*Furuta et al.*, 1992] es un interesante sistema dinámico no-lineal complejo que permite ilustrar varios principios de control diferentes. El péndulo de Furuta es básicamente una polea que se mueve libremente alrededor de un pivote. Este pivote se puede mover alrededor de un brazo mecánico conectado a un motor. Como la aceleración de la polea no se puede controlar en forma directa, el péndulo es un sistema mecánico subactuado. Uno de los objetivos del control es estabilizar la polea en posición hacia arriba mediante el movimiento del brazo. Se introduce una ley de control lineal para estabilizar el sistema en la posición vertical del equilibrio inestable. El sistema en lazo cerrado que resulta tiene un comportamiento local estable alrededor de este equilibrio y el péndulo se mantiene hacia arriba. Sin embargo para pequeñas perturbaciones el

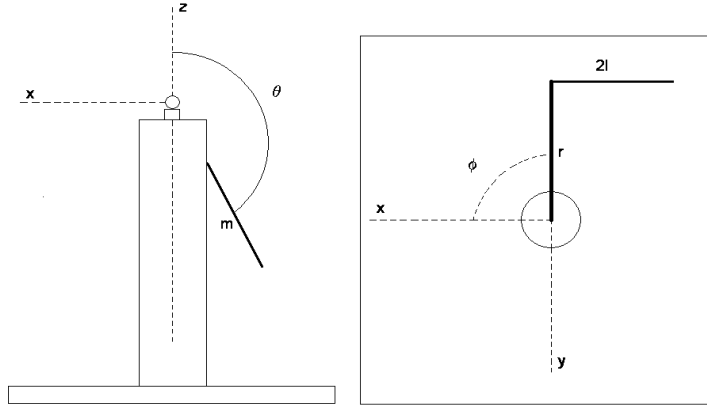


Figura 4.1: Péndulo de Furuta en un sistema de coordenadas definido

sistema pierde estabilidad. Esto es debido a la existencia de un ciclo límite inestable que da a este equilibrio su carácter local y hace difícil el determinar la región de atracción. Sin embargo, una comprensión profunda del comportamiento global del sistema hace imprescindible un análisis detallado de este ciclo límite inestable, y de la bifurcación de Hopf asociada a éste.

Considere el péndulo rotacional invertido como se muestra en la Fig.(4.1), donde  $\theta$  es el ángulo que el péndulo  $l$  hace con la vertical y  $\varphi$  es el ángulo del brazo  $r$ . Las ecuaciones normalizadas son

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \alpha \ddot{\varphi} \cos \theta - \sin \theta + c_p \dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\varphi} + c_a \dot{\varphi} &= ku, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\alpha, k, c_p, c_a$  son constantes positivas que dependen de las características físicas del péndulo;  $c_p, c_a$ , son los parámetros que corresponden a los términos de fricción; y  $u$  es el control. La dinámica de ambos sistemas, el modelo completo y su versión reducida, son cualitativamente equivalentes.

Introduciendo  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  y  $x_3 = \dot{\varphi}$ , las ecs.(4.1) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 + x_3^2 \sin x_1 \cos x_1 - \alpha(ku - c_a x_3) \cos x_1 - c_p x_2, \\ \dot{x}_3 &= ku - c_a x_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

ó

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_1(1 + x_3^2 \cos x_1) + \alpha c_a x_3 \cos x_1 - c_p x_2 \\ -c_a x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha k \cos x_1 \\ k \end{pmatrix} u \\ &= f(x) + g(x)u. \end{aligned} \quad (4.3)$$

El conjunto de puntos de equilibrio está dado por  $f(x) = 0$ , es decir

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ \text{sen } x_1(1 + x_3^2 \cos x_1) + \alpha c_a x_3 \cos x_1 - c_p x_2 &= 0, \\ -c_a x_3 &= 0, \end{aligned}$$

es decir,  $x_1 = k\pi$ ,  $x_2 = 0$  y  $x_3 = 0$ , con  $k$  un entero. Estamos interesados en analizar la dinámica alrededor del origen, es decir, en la posición inestable del péndulo de Furuta. Hagamos entonces  $P_0 = (0, 0, 0)^T$ . Observe que

$$Df(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -c_p & \alpha c_a \\ 0 & 0 & -c_a \end{pmatrix}$$

con eigenvalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -c_a \\ \lambda_{2,3} &= \frac{-c_p \pm \sqrt{c_p^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

entonces el origen es un punto silla. Proponemos una ley de control de la forma

$$u = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + v = Lx + v, \quad (4.4)$$

con el propósito de modificar la estabilidad del origen, del tal forma que los valores propios, uno sea negativo, y los otros imaginarios, y de esta forma, poder usar los teoremas demostrados en esta tesis. Sustituyendo la ley de control (4.4) en (4.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)(Lx + v) \\ &= f(x) + g(x)Lx + g(x)v \\ &= \tilde{f}(x) + g(x)v, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)Lx$ . Observe que  $\tilde{f}(P_0) = 0$  y

$$D\tilde{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - \alpha k l_1 & -\alpha k l_2 - c_p & \alpha c_a - \alpha k l_3 \\ k l_1 & k l_2 & k l_3 - c_a \end{pmatrix}.$$

Para que  $D\tilde{f}(0)$  posea un par de valores propios imaginarios y otro negativo, hacemos

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{c_p + 2}{\alpha k} \\ l_2 &= \frac{c_a + 1}{k} \\ l_3 &= \frac{2 - c_p}{\alpha k} \end{aligned}$$

en esta forma los eigenvalores son

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \pm i \\ \lambda_3 &= -1\end{aligned}$$

que es el escenario que necesitamos para que se origine la bifurcación de Hopf en el origen.

Para poder usar nuestros resultados, debemos primero expresar en forma de Jordan, la matriz  $D\tilde{f}(0)$ . Para ello se propone el cambio de coordenadas  $y = P^{-1}x$ , donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -2 & -c_p & -c_p \end{pmatrix},$$

obteniendo entonces el sistema

$$\dot{y} = Jy + \dots + (b + \dots)v,$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ , luego entonces  $b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} \end{pmatrix} \neq 0$ , por lo tanto, usaremos el teorema (3.2). Proponemos la ley de control

$$\begin{aligned}v &= \mu\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_1^3 \\ &= \mu\alpha_1 \left( -\frac{c_p}{2\alpha} x_1 - \frac{1}{2} x_3 \right) + \beta_1 \left( -\frac{c_p}{2\alpha} x_1 - \frac{1}{2} x_3 \right)^3,\end{aligned}$$

obteniendo los coeficientes de estabilidad

$$\begin{aligned}d &= \frac{1}{2} Lb_1 = \frac{1}{2} (\alpha_1, 0) \begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \alpha_1 k \\ a &= \frac{3}{8} \beta b_1 + K_0 = \frac{3}{8} (\beta_1, 0) \begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} \end{pmatrix} + K_0 = -\frac{3}{16} \beta_1 k + K_0\end{aligned}$$

Si queremos el caso en el que  $d > 0$  y  $a < 0$ , fijamos los valores  $\alpha_1 = -0,1$  y  $\beta_1 = 1$ . De esta manera se tiene una órbita atractora para  $\mu > 0$  (ver figura 4.2).

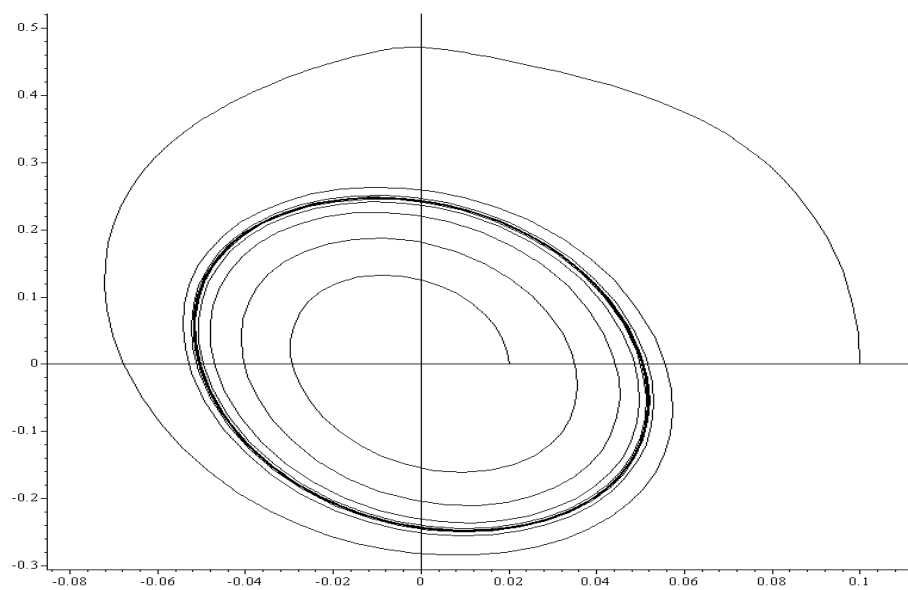


Figura 4.2: Órbita periódica estable



---

## Capítulo 5

# Conclusiones

---

En este trabajo logramos establecer condiciones suficientes para controlar la bifurcación de Hopf en sistemas no-lineales. Obtuvimos expresiones para los coeficientes de estabilidad  $d$  y  $a$ , con las cuales podemos decidir la estabilidad y la dirección de la órbita periódica seleccionando el signo de éstos. Se propuso una ley de control, en la cual se introdujo un parametro de bifurcación artificial, y parámetros de control artificiales, de tal manera que éstos aparecieran finalmente en las expresiones de  $d$  y  $a$ . Se propusieron dos leyes de control, una para  $b_1 = 0$  y otra para  $b_1 \neq 0$  debido a que hay un comportamiento distinto del sistema en cada caso. En el capítulo final se desarrolla una aplicación de los resultados obtenidos, al péndulo de Furuta, que es un péndulo invertido giratorio subactuado.





# Bibliografía

---

- [1] E.H. Abed and J.H. Fu, *Local feedback stabilization and bifurcation control, I. Hopf bifurcation*, *Systems & Control Letters*, 1986, pp 11-17.
- [2] E.H. Abed and J.H. Fu, *Local feedback stabilization and bifurcation control, II. Stationary bifurcation*, *Systems & Control Letters*, 1987, pp 467-473.
- [3] E.H. Abed, H.O. Wang and A. Tesi, *Control of bifurcation and chaos*, in *The Control Handbook*, W.S. Levine, Ed Boca Raton, FL. CRC Press, 1995, pp 951-966.
- [4] J. Carr, *Application of Center Manifold Theory*, Springer. 1981.
- [5] D.E. Chang, W. Kang and A.J. Krener *Normal forms and bifurcations of control systems*, Proc. 39th IEEE CDC, Sydney, Australia, 2000.
- [6] G. Chen, J.L. Moiola and H.O. Wang, *Bifurcation control: theories, methods, and applications*, Int. J.Bif.Chaos, vol 10, No.3, 2000, pp 511-548.
- [7] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag. 1993.
- [8] B. Hamzi, W.Kang and J.P. Barbot, *On the control of Hopf bifurcations*, Proc. 39th IEEE CDC, Sydney, Australia. 2000.
- [9] D. Pagano, L. Pizarro, J. Aracil. *Local bifurcation analysis in the Furuta pendulum via normal forms*. International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol 10, No 5 (2000), 981-995.
- [10] F. Verduzco, J. Alvarez. *Hopf bifurcation control for affine systems*. American Control Conference 2004. Boston, MA, USA. 2004.