Sistemas de Raíces Abstractas y Álgebras de Lie

Enrique Rodríguez Castillo
Universidad de Sonora

En memoria de
Enrique Rodríguez Jimenez.

A mi hijo
Luis Enrique Rodríguez Chavez.

Agradecimientos

Sin duda, el tiempo que le he dedicado a este trabajo es considerable y por tal motivo, me ví en la necesidad de sacrificar varios momentos de convivencia con las personas que más quiero en mi vida: mi familia. Indudablemente, mi esposa y mi hijo me tuvieron mucha paciencia al permanecer alejados de mi durante intervalos extensos de tiempo y es por tal motivo que les agradezco desde lo más profundo de mi corazón por su comprensión, apoyo y paciencia durante la elaboración de este trabajo.

Junto con la familia, los familiares fueron también decisivos en el empeño con el que trabajé, pues supieron inyectar esa dotación de ánimo en momentos que realmente necesitaba cerca de mí a la gente que me conoce. Los autores principales de dicha proeza son mi madre Raquel Castillo del Castillo, mi hermano Héctor Daniel Rodríguez Castillo, mis hermanas Martha y Rebeca Rodríguez Castillo y también, Irene Rodríguez Castillo quien se merece una mención especial, pues por su experiencia es la persona que más comprendía mi situación.

Una de las inspiraciones más importantes que he tenido desde hace tiempo es la memoria de mi padre, a quién con gran afecto y respeto le dedico este trabajo. A su manera me enseñó de lo que era capaz de hacer. Su recuerdo lo resguardaré en mi corazón con celo.

También, aprovecho este espacio para agradecer la dirección del Dr. Yury Vorovev, quien de una manera muy particular, logró dar cierta motivación para esforzarme en momentos de tensión durante los estudios previos a la elaboración de mi tesis. Sus consejos oportunos y exigencias sirvieron para darme cuenta de que esforzándome puedo lograr más cosas de las que he pensado.

Al igual que el Dr. Yury Vorovev, agradezco la paciencia y el tiempo que me dedicaron mis sinodales: Dr. Rubén Flores Espinoza, Dr. Martín G. García Alvarado y M. en C. Guillermo Dávila Rascón. Gracias a sus correcciones, mi trabajo fue ampliamente mejorado.

No por ser los últimos en esta breve lista son los menos importantes. Me refiero a aquellas personas que me acompañaron en todo este camino de desarrollo y madurez: mis amigos. Mis compañeras de generación, L. M. Marysol Navarro Burruel y L. M. Jessica Yuniver Santana Bejarano quienes sirvieron de inspiración al mostrarme ejemplarmente virtudes como la perseverancia, la dedicación y la responsabilidad. La Dra. Martha D. Guzmán Partida y el Dr. Martín G. García Alvarado, quienes me demostraron rigurosamente que escogí bien mi profesión y también supieron enseñarme la belleza de las matemáticas como nunca antes en mi vida.

No sólo mis amigos profesionales fueron importantes para mi en estos últimos cuatro años, si no también aquellos que casi son como de mi familia; sus consejos invaluables y apoyo incondicional es uno de los tesoros que me hacen sentir afortunado y valorar cada momento de convivencia entre nosotros. Muchas gracias a todos: Micky, Mario, Carlitos, Felipe, Güero, Ca-Carlos, Gordo, Delman, Artemis, Alejandra y Misah.

Contenido

Introducción ix

1 Preliminares **1**
1.1 Acciones de Grupo 1
1.2 Algunas nociones de Álgebra Lineal 2
Traza de operadores 2
Familias conmutativas de operadores diagonalizables 3
Dualidad y formas bilineales 5

2 Sistemas de raíces abstractas **7**
2.1 Nociones básicas 7
Reflexiones en un espacio euclidiano 7
Sistemas de raíces 10
Isomorfismos 14
Propiedades geométricas y cadenas de raíces 16
Sistemas de raíces de rango 2 20
2.2 Bases y Raíces simples 22
Bases 22
Propiedades de las raíces simples 30
2.3 Cámaras de Weyl y el grupo de Weyl 33
Cámaras de Weyl 33
El grupo de Weyl 36

3 Clasificación de sistemas de raíces irreducibles **43**
3.1 Sistemas de raíces irreducibles 44
El grupo de Weyl de un sistema irreducible 46
La raíz maximal de un sistema irreducible 48
3.2 Matriz de Cartan de un sistema de raíces 50

3.3 Diagrama de Dynkin asociado a un sistema de raíces 52
3.4 Teorema de Clasificaión 53

4 Álgebras de Lie 63
4.1 Definición y ejemplos 63
4.2 Conceptos algebraicos fundamentales 67
Subálgebras e ideales 67
Homomorfismos de álgebras de Lie 70
4.3 Álgebras de Lie lineales 74
4.4 Representaciones y la forma de Killing 80
Representación adjunta 80
Forma de Killing 81
4.5 Teorema de Weyl y representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ 85

5 Teoría estructural 87
5.1 Solubilidad y nilpotencia 87
Álgebras solubles 87
Álgebras nilpotentes 89
5.2 Criterios de solubilidad y nilpotencia 92
Teorema de Engel 92
Teorema de Lie 93
Criterio de Cartan 96
5.3 Álgebras semisimples 97
Propiedades principales de las álgebras de Lie semisimples . 98
Teorema de Levi-Malcev 100

6 Raíces de una álgebra de Lie semisimple 101
6.1 Descomposición de Cartan 101
Subálgebras torales y subálgebras de Cartan 101
Conjugación de subálgebras de Cartan 106
6.2 Propiedades de las raíces de una álgebra de Lie semisimple . . 108
Relaciones con la forma de Killing 108
Integridad y racionalidad de las raíces 109
6.3 Teorema de isomorfismo 112
6.4 Teorema de Serre 115
6.5 Teorema de clasificación de álgebras de Lie simples 116

Conclusiones 117

Introducción

Nuestros objetivos serán el estudio de los sistemas de raíces de manera abstracta, independientemente de la Teoría de álgebras de Lie que es en donde surgió este concepto, y dar una introducción a las álgebras de Lie. El propósito de esta tesis es aplicar los sistemas de raíces en la clasificación de álgebras de Lie semisimples.

Asociado a un álgebra de Lie semisimple, se encuentra un sistema de raíces que es un conjunto de funcionales lineales definidos en una determinada subálgebra ue satisfacen ciertas propiedades que determinan completamente la estructura del álgebra de Lie. Esta es la manera en que se presenta la Teoría de sistemas de raíces en los libros clásicos de álgebras de Lie (ver [3], [4], [11]). El enfoque de este trabajo es recopilar varias propiedades de los sistemas de raíces en abstracto haciendo uso de conceptos elementales de álgebra lineal para después introducirlos en el contexto de álgebras de Lie.

Los sistemas de raíces aparecieron por primera vez en el trabajo de Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923) para dar una clasificación de las álgebras de Lie semisimples sobre los complejos; también, de manera paralela, Elie Cartan (1869-1951) presentó el catálogo completo de álgebras de Lie semisimples sobre los commplejos en su tesis Doctoral, poco despues del trabajo de Killing.

Por otra parte, las álgebras de Lie fueron introducidas por Marius Sophus Lie (1842-1899) quien estudiaba la manera de resolver algunas ecuaciones diferenciales, motivado por el trabajo de Galois en la solución de ecuaciones algebraicas, asociando a cada ecuación diferencial un determinado grupo llamado *grupo de Lie* (en analogía con el grupo de Galois para ecuaciones algebaicas).

El trabajo de Killing y Cartan fue estudiado por muchos matemáticos, principalmente en Europa, en busca de simplificaciones de los métodos de clasificación y aplicación del catálogo de álgebras de Lie semisimples a diversas áreas de las matemáticas y de la física; algunos de éstos matemáticos fueron Bartel Leendert Van der Waerden (1903-1996), Ernst Witt (1911-1991), Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), Hermann Weyl (1885-1955) y Eugene Borisovich Dynkin (1924-). Cada uno de ellos trabajó por separado y los métodos de clasificación que implementaban eran variados; el método que usó Dynkin es el más parecido al método original de Cartan.

La axiomatización de los sistemas de raíces vino después de la participación de estos personajes, pues notaron que constituye una Teoría independiente. Uno de los puntos atractivo de la Teoría de los sistemas de raíces, es la simplicidad del concepto, ya que para su estudio sólo se necesitan conocimientos básicos de las matemáticas en áreas como el Análisis, la Geometría, el Álgebra y especialmente de Álgebra Lineal. Algunos de los conceptos que se necesitan dominar para el estudio de los sistemas de raíces en abstracto son los elementos básicos de espacios reales euclidianos de dimensión finita, independencia lineal, operadores lineales y ortogonales, isometrías, geometría euclidiana, continuidad en espacios euclidianos y acciones de grupo.

La idea de usar los sistemas de raíces para clasificar las álgebras de Lie semisimples se basa en los siguientes tres puntos:

- A cada álgebra de Lie semisimple, se le asocia un sistema de raíces que la caracteriza por completo;
- los sistemas de raíces son fáciles de clasificar;
- dado un sistema de raíces, existe un álgebra de Lie semisimple cuyo sistema de raíces es el inicial.

La idea que presentó Sophus Lie de asociar a un grupo una determinada álgebra de Lie fue motivadora de otros métodos de asociar un álgebra de Lie a un grupo (no necesariamente de Lie), la cual podía proporcionar información importante de la estructura de tal grupo. Este es un recurso considerablemente moderno para abordar algunos problemas en grupos finitos y grupos libres.

Entre las álgebras de Lie, existe una familia muy importante que es la clase de álgebras de Lie semisimples, las cuales se pueden caracterizar a través de sus componentes simples. El matemático Tulio Levi-Civita (1873-1941) estableció una descomposición de un álgebra de Lie general en una parte semisimple y otra que excluía la semisimplicidad mientras que el matemático Anatoly Ivanovich Maltsev (Malcev) (1909-1967) determinó la unicidad de dicha descomposición bajo un automorfismo interior del álgerba de Lie.

Una herramienta muy útil en el estudio de álgebras semisimples es una forma bilineal simétrica para la cual el operador adjunto es antisimétrico, que fue introducidas por Killing y lleva su nombre; de hecho, la no-degeneración de tal forma caracteriza a las álgebras de Lie semisimples.

Killing también introdujo el concepto que hoy es conocido como subálgebra de Cartan, la cual establece la llamada *descomposición de Cartan* y está estrechamente ligada al sistema de raíces que le corresponde al álgebra de Lie semisimple.

Este trabajo se divide en cinco capítulos en los que se intenta abordar la teoría elemental de los sistemas de raíces y álgebras de Lie, así como la relación histórica entre estas dos estructuras algebraicas.

En el primer capítulo, se intenta cubrir los conocimientos mínimos requeridos para el entendimiento de este trabajo. Se recuerdan resultados importantes de Álgebra Lineal y Teoría de Grupos. Los conceptos básicos de las matemáticas se presuponen dominados y no se abordan en este trabajo; ejemplos de esto son los conceptos de continuidad, cálculo matricial, transformaciones lineales, espacios vectoriales de dimensión finita, que se cubren en los cursos de los primeros dos años de licenciatura.

El segundo capítulo de éste trabajo, ha sido dedicado al tratamiento de los sistemas de raíces en abstracto, sus bases, la manera en que actua el grupo de Weyl en las raíces simples y en las cámaras de Weyl. Se prueban resultados que en varios textos sólo se limitan a mencionarlos vagamente e incluso omitirlos; se procura detallar las demostraciones y extender los cálculos sin caer en la rutina. Después se reduce el trabajo de clasificación al establecer una descomposición en componentes irreducibles los cuales tienen propiedades especiales que permiten tratarlos mas fácilmente.

En la última parte de este capítulo dos, se presenta el Teorema de Clasificación de sistemas irreducibles y haciendo uso de los Diagramas de Dynkin se determinan las diferentes relaciones entre raíces simples que existen.

El tercer capítulo presenta la Teoría general de álgebras de Lie y los conceptos básicos que sirven como introducción al estudio de ésta estructura. Se presentan conceptos como subalgebra, ideal, homomorfismo, derivación, representación de un álgebra de Lie (concentrándonos en la representación adjunta y el operador adjunto) y se estudia en general la llamada forma de Killing. Se presentan resultados estándar como el Teorema Fundamental de Homomorfismo, los tres Teoremas de isomorfismo de las estructuras algebraicas y el Teorema de correspondencia.

En este capítulo tres, también se dedica una sección al estudio de álgebras de Lie lineales como el álgebra general lineal, el álgebra especial lineal, las álgebras ortogonales (pares e impares), el álgebra simpléctica, el álgebra de matrices triangulares superiores y dos de sus subálgebras: el álgebra de matrices triangulares estrictamente superiores y el álgebra de matrices diagonales. Además, se establece una descomposición del álgebra general lineal como una suma directa de su álgebra derivada, que es previamente calculada, y su centro, igualmente calculado con anterioridad.

En el cuarto capítulo se estudian tres tipos especiales y muy importantes de álgebras de Lie: solubles, nilpotentes y semisimples; todas las álgebras nilpotentes son solubles y las semisimples carecen de ideales solubles que no sean cero, es decir, no tienen nada de soluble. Se presentan tres resultados que nos ayudan a determinar la solubilidad o nilpotencia de un álgebra de Lie a partir del estudio de ciertos operadores; el Teorema de Engel establece una relación entre las álgebras de Lie nilpotentes compuesta de operadores (matrices) con álgebras de Lie cuyos elementos son operadores nilpotentes, el Teorema de Lie es análogo al Teorema de Engel pero en el caso soluble (bajo ciertas hipótesis impuestas al campo), mientras que el criterio de Cartan nos permite determinar la solubilidad de un álgebra de Lie observando su forma de Killing. El capítulo termina con el estudio de álgebras semisimples y la presentación de un Teorema de descomposición de álgebras de Lie, que presentamos con el nombre de *Teorema de Levi-Malcev.*

Finalmente, en el capítulo cinco se introduce el concepto de raíz de un álgebra de Lie semisimple con respecto a una subálgebra de Cartan y se estudian algunas propiedades de las raíces; el conjunto de éstas raíces termina formando un sistema de raíces en el sentido del capítulo uno. Después, se establece la independencia del sistema de raíces con respecto a la subálgebra de Cartan, así como el *Teorema de Isomorfismo* que indica la importancia del sistema de raíces asociado al álgebra de Lie al caracterizarlo por completo. También se presenta el *Teorema de Serre*, que nos dice la manera en que se puede generar un álgebra de Lie semisimple a partir de un sistema de raíces al hacer una *presentación* del álgebra de Lie mediante la exhibición de un conjunto de generadores y sus relaciones de conmutatividad, todo esto dependiendo únicamente del sistema de raíces.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y hechos fundamentales de la Teoría de Grupos y recordar nociones básicas de Álgebra Lineal. También se presentan algunos resultados referentes a la descomposición que induce un operador lineal de un espacio vectorial en subespacios invariantes con respecto a tal operador; estos hechos son importantes para establecer la descomposición de Cartan en el capítulo 5. El capítulo termina con una breve exposición sobre productos tensoriales de espacios vectoriales. Los conocimientos requeridos en Teoría de anillos y generalidades algebraicas se pueden encontrar en [1] o bien, en [8].

1.1 Acciones de Grupo

Sólo se presentan las definiciones requeridas en este texto. Para el interesado en abundar sobre las acciones de grupo, puede consultar [10] (p. 55).

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío y G un grupo. Una* **acción** *de G en X es una función $. : G \times X \to X$ que satisface las siguientes dos propiedades:*

(A1) Si e es el elemento identidad de G, entonces $e.x = x$ para todo $x \in X$;

(A2) para $g, h \in G$ tenemos $(gh).x = g.(h.x)$ para todo $x \in X$.

Decimos que un grupo G **actúa** *en un conjunto X, o bien X es un* **G-conjunto***, si existe una acción de G en X.*

Si G actúa en X y $x \in X$, definimos la *órbita de* x como el conjunto

$$Gx = \{g.x : g \in G\}$$

y el *conjunto de órbitas* de X es el conjunto

$$\{Gx : x \in X\}$$

y es claro que $X = \bigcup_{x \in X} Gx$, donde la unión es disjunta. Diremos que la acción es *transitiva* si sólo existe una órbita.

Proposición 1.1. *Supongamos que G actúa en X. La acción es transitiva si y sólo si para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$ existe un elemento $g = g(x, y) \in G$ tal que $g.x = y$.*

Suponga que G actúa en un conjunto X. Diremos que un elemento $g \in G$ *fija* a un punto $x \in X$ si $g.x = x$; la acción se llama *simple* si el único elemento de G que fija a algún punto de X es el elemento identidad.

Suponga que un grupo G actúa en un espacio vectorial $\mathbf{V}$. Diremos que la acción es *irreducible* si para cualquier subespacio $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbf{V}$ que satisfaga $G.\mathbf{W} \subset \mathbf{W}$ se tiene que $\mathbf{W} = \mathbf{V}$.

1.2 Algunas nociones de Álgebra Lineal

En esta sección, se intenta hacer sólo un pequeño recordatorio de los conceptos y resultados que necesitaremos en el desarrollo de los capítulos posteriores, en especial, en los capítulos 3 y 5. Para el interesado en introducirce ampliamente en el álgebra lineal, se recomienda [9].

Traza de operadores

Denotemos el espacio de matrices cuadradas de orden n con entradas en el campo $\mathbb{F}$ por el símbolo $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$. Recuerde que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$ posee una estructura natural de espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ y su dimensión es n^2. La *traza* de una matriz cuadrada de orden n es la suma de los elementos de su diagonal. Algunas de las propiedades para la traza de una matriz se enuncian en el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [8] (p. 383):

Proposición 1.2. *Si* $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$ *y* $a \in \mathbb{F}$, *entonces*

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

2. $\operatorname{tr}(aA) = a \operatorname{tr} A$;

3. $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$, *en particular,* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Las propiedades 1 y 2 nos dicen que la traza es un funcional lineal en el espacio de matrices cuadradas de orden n.

Si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ son bases de $\mathbf{V}$ y T es la matriz asociada a $\mathcal{T}$ con respecto a la base $\mathscr{B}$, entonces la matriz de $\mathcal{T}$ con respecto a la base $\mathscr{B}'$ es $Q^{-1}TQ$, donde Q es la matriz de transición entre las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$. Por la propiedad 3 de la Propoosición 1.2, tenemos que $\operatorname{tr}(Q^{-1}TQ) = \operatorname{tr} T$.

Definición 1.2. *Sea* $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *un operador lineal y* T *la matriz de* $\mathcal{T}$ *con respecto a una base* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbf{V}$. *La* **traza** *de* $\mathcal{T}$ *se define como* $\operatorname{tr} \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} T$.

Con las propiedades 1 y 2, podemos definir una forma bilineal en el espacio $\operatorname{End}(\mathbf{V}) = \{$ operadores lineales en $\mathbf{V}\}$ de la siguiente manera: dados dos operadores lineales en $\mathbf{V}$, digamos $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $\mathcal{S} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, definimos

$$\langle \mathcal{T}, \mathcal{S} \rangle_{\operatorname{tr}} = \operatorname{tr}(\mathcal{T}\mathcal{S}),$$

y llamamos a $\langle , \rangle_{\operatorname{tr}}$ una *forma de traza*. Además, por la propiedad 3 de la Proposición 1.2, la forma de traza es *simétrica*, es decir, $\langle \mathcal{T}, \mathcal{S} \rangle_{\operatorname{tr}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{T} \rangle_{\operatorname{tr}}$ para cualesquiera dos operadores $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ en $\mathbf{V}$.

Familias conmutativas de operadores diagonalizables

Si $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es un operador lineal en $\mathbf{V}$ y $\mathbb{F}$ es un campo algebráicamente cerrado, entonces el espacio $\mathbf{V}$ se descompone como una suma de subespacios $\mathbf{V} = \coprod_{\lambda \in \mathbb{F}} \mathbf{V}_\lambda(\mathcal{T})$, donde

$$\mathbf{V}_\lambda(\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{a} \in \mathbf{V} : \mathcal{T}(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}\},$$

para $\lambda \in \mathbb{F}$. Aquí y en el resto del texto, el símbolo $\coprod$ indica suma directa de espacios vectoriales. Es claro que sólo existe un número finito de $\lambda \in \mathbb{F}$ para los que $\mathbf{V}_\lambda \neq \mathbf{0}$. A tales elementos del campo se les llaman *valores propios de* $\mathcal{T}$ y a cualquier vector no nulo de $\mathbf{V}_\lambda$ se llama *vector propio de* $\mathcal{T}$ *asociado al valor propio* λ. Si λ es un valor propio de $\mathcal{T}$, el subespacio $\mathbf{V}_\lambda$ se llama *subespacio propio* (ver [8], p. 470).

Proposición 1.3. *Si dos operadores lineales* $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *y* $\mathcal{S} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *conmutan, entonces existe un vector propio común.*

La demostración se puede encontrar en [2] (p. 212).

Recordemos que un operador $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es *diagonalizable* si existe una base para $\mathbf{V}$ conformada por vectores propios de $\mathcal{T}$. Cuando el operador $\mathcal{T}$ es diagonalizable y $\mathscr{B}$ es una base de vectores propios, entonces la matriz de $\mathcal{T}$ con respecto a la base $\mathscr{B}$ es diagonal y los elementos de la diagonal son los valores propios de $\mathcal{T}$. Un resultado inmediato de esto es el siguiente.

Proposición 1.4. *Si dos operdores lineales* $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *y* $\mathcal{S} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *conmutan y son diagonalizables, existe una base de vectores propios comunes.*

Como concecuencia se tiene el siguiente corolario que se obtiene al aplicar la Proposición 1.4 e inducción sobre k.

Corolario 1.5. *Sea* $\mathcal{T}_i : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *un operador lineal diagonalizable para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, k\} \equiv I_k$. *Si* $\mathcal{T}_i\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_j\mathcal{T}_i$ *para* $i, j \in I_k$, *entonces existe una base para* $\mathbf{V}$ *tal que las matrices de cada operador* $\mathcal{T}_i$ *es diagonal para cada* $i \in I_k$.

Cuando un conjunto de operadores lineales satisface las hipótesis del Corolario 1.5, decimos que tal conjunto de operadores lineales constituye una familia de operadores lineales *simultaneamente diagonalizables*.

Teorema 1.6. *Si* $\mathcal{T}_i$ *es una familia de operadores lineales simultaneamente diagonalizables, con* $i \in I_k$, *entonces el espacio* $\mathbf{V}$ *se descompone en una suma directa de subespacios*

$$\mathbf{V}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{a} \in \mathbf{V} : \mathcal{T}_i(\boldsymbol{a}) = \alpha(\mathcal{T}_i)\boldsymbol{a} \text{ para toda } i \in I_k\},$$

donde α *es un funcional lineal en el subespacio generado por la familia de operadores lineales* $\mathcal{T}_i$.

Demostración. Cada operador lineal $\mathcal{T}_i$ induce una descomposición del espacio en suma directa de subespacios $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{T}_i)$; si $i \neq j$, entonces cada subespacio $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{T}_i)$ es suma directa de sus intersecciones con los subespacios $\mathbf{V}_\beta(\mathcal{T}_j)$. Iterando este proceso con todos los $\mathcal{T}_i$ vemos que $\mathbf{V}$ se puede expresar como suma directa de subespacios $\mathbf{V}_\alpha$ (como se define en el enunciado del Teorema) tales que $\mathcal{T}_i(\mathbf{V}_\alpha) \subset \mathbf{V}_\alpha$ para toda $i \in I_k$ y cada operador lineal $\mathcal{T}_i$ tiene un único valor propio en cada $\mathbf{V}_\alpha$. Se puede demostrar que cada operador lineal $\mathcal{T}_i$ es representado por una matriz triangular en el espacio de coordenadas de $\mathbf{V}$ y así, se tiene que para cada subespacio $\mathbf{V}_\alpha$, el único valor propio de $\mathcal{T}_i$, visto como función de $\mathcal{T}_i$, es lineal. $\square$

Dualidad y formas bilineales

Recordemos que si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, el espacio dual de $\mathbf{V}$, usualmente denotado por $\mathbf{V}^*$, es el espacio vectorial cuyos elementos son todos los funcionales lineales en $\mathbf{V}$, es decir,

$$\mathbf{V}^* = \{\alpha : \mathbf{V} \to \mathbb{F} : \alpha \text{ es lineal}\}.$$

Una *forma bilineal* en $\mathbf{V}$ es una función $\mathcal{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{F}$ que es lineal en cada componente, es decir, la función $\boldsymbol{v} \mapsto \mathcal{B}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ es lineal para todo $\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}$ y la función $\boldsymbol{w} \mapsto \mathcal{B}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ es lineal para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$. Decimos que la forma $\mathcal{B}$ es *no-degenerada* si el único vector $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}$ que satisface la ecuación $\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ para todo vector $\boldsymbol{b} \in \mathbf{V}$ es el vector $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Proposición 1.7. *Sea* $\mathcal{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{F}$ *una forma bilineal no-degenerada en* $\mathbf{V}$ *y suponga que* $\dim \mathbf{V} < \infty$*, entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales* $\alpha \mapsto \boldsymbol{a}_\alpha$ *tal que* $\alpha(\boldsymbol{b}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{b})$ *para todo* $\boldsymbol{b} \in \mathbf{V}$*.*

La demostración se puede leer en [9] (p. 162).

Otra definición importante que hay que recordar es la siguiente: una forma bilineal $\mathcal{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ se dice ser *positiva definida* si $\mathcal{B}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ y la única posibilidad de que $\mathcal{B}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ es que $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

A una forma bilineal simétrica también se le conoce con el nombre de *producto interior*. Cuando un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ está acompañado de un producto interior $\mathcal{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ positivo definido, decimos que la pareja $(\mathbf{V}, \mathcal{B})$ es un *espacio euclidiano* y usualmente $\mathcal{B}$ es denotado por $\langle , \rangle$ o bien $(,)$(en ocaciones, la forma es llamada producto euclidiano). En este texto, utilizaremos indistintamente toda esta nomenclatura con la esperanza de que no haya confusión.

Capítulo 2

Sistemas de raíces abstractas

En este capítulo se presenta el concepto de sistema de raíces de manera abstracta e independiente de la Teoría de álgebras de Lie. Se recolectan varias propiedades tanto geométricas como algebraicas de los sistemas de raíces y desarrollaremos herramientas que reducirán nuestro interés en sistemas de raíces irreducibles, de lo que nos encargaremos en el próximo capítulo.

2.1 Nociones básicas

Antes de comenzar en forma el estudio de sistemas de raíces, es pertinente recordar algunos hechos sobre reflexiones en espacios euclidianos.

Reflexiones en un espacio euclidiano

En todo este capítulo, trabajaremos con un espacio euclidiano $\mathbf{E}$ y denotaremos por $\langle , \rangle$ al producto euclidiano de tal espacio. Recuerde que un *hiperplano* es un subespacio de codimensión 1.

Definición 2.1. *Una* **reflexión** *en un espacio euclidiano* $\mathbf{E}$ *es un operador lineal* $\mathcal{R} : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *el cual tiene asociado un hiperplano* $\mathbf{P} \subset \mathbf{E}$*, llamado* **hiperplano reflectante***, que satisfacen las siguientes propiedades:*

(Rf1) Para cada vector $\boldsymbol{w} \in \mathbf{P}$*, tenemos* $\mathcal{R}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$*;*

(Rf2) si $\boldsymbol{v}$ *es un vector ortogonal a* $\mathbf{P}$*, entonces* $\mathcal{R}(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$*.*

Es claro que si dos reflexiones tienen asociado el mismo hiperplano, entonces son las mismas reflexiones. Cada vector no nulo $\boldsymbol{v}$ determina un único hiperplano $\mathbf{P}_{\boldsymbol{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{w} \in \mathbf{V} : \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\}$ y la reflexión a la que se asocia tal hiperplano será denotada por $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$. La fórmula explícita para las reflexiones es

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} - 2\frac{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}\boldsymbol{v}, \tag{2.1}$$

pues la imagen de $\boldsymbol{v}$ bajo $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$ es $-\boldsymbol{v}$ y fija a todo vector $\boldsymbol{w} \in \mathbf{P}_{\boldsymbol{v}}$. Es claro que un vector proporcional a $\boldsymbol{v}$ da origen a la misma reflexión ya que si a es cualquier escalar diferente de cero, tenemos que para todo vector $\boldsymbol{w} \in \mathbf{E}$

$$\mathcal{R}_{a\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) \quad = \quad \boldsymbol{w} - 2\frac{\langle \boldsymbol{w}, a\boldsymbol{v} \rangle}{\langle a\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{v} \rangle}(a\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} - 2\frac{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}\boldsymbol{v} = \mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}).$$

Como el número $2\frac{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$ aparecerá frecuentemente, lo abreviaremos por el símbolo $|\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}|$. Note que $|,|$ es lineal sólo en la primera componente y si $a \neq 0$, entonces $|\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}| = \frac{1}{a}|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|$.

Es importante recordar en este momento algunas propiedades importantes de las reflexiones.

- La matriz que representa una reflexión es similar a la matriz diagonal $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$, esto es claro ya que basta con tomar cualquier base del hiperplano reflectante y acompletar tal base a una base del espacio agregando un vector ortogonal a tal hiperplano. Se sigue entonces que el determinante de una reflexión es igual a -1.
- Las reflexiones son *involuciones*, es decir, $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}^2 = id$.
- Las reflexión preservan el producto interior del espacio $\mathbf{E}$, es decir, para $\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}$ y cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{E}$,

$$\langle \mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}), \mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle .$$

- También es importante tener en cuenta que las reflexiones son funciones continuas, con respecto a la topología inducida por el producto interior.

Un operador $\mathcal{T}$ deja *invariante* a un subconjunto $\mathbf{A}$ del espacio $\mathbf{E}$, si $\mathcal{T}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$. Un hecho útil que caracteriza a las reflexiones es el siguiente:

Proposición 2.1. *Sea Φ un conjunto finito que genera al espacio $\mathbf{E}$ y suponga que todas las reflexiones $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$, con $\boldsymbol{v} \in \Phi$, dejan invariante a Φ. Si $\mathcal{S}$ es un operador lineal invertible en $\mathbf{E}$ que cumple con las siguientes tres propiedades*

- *deja invariante a Φ,*
- *fija a todos los puntos de un hiperplano $\mathbf{P} \subset \mathbf{E}$,*
- *la imagen de un vector no nulo $\boldsymbol{u} \in \Phi$ bajo $\mathcal{S}$ es $-\boldsymbol{u}$,*

entonces $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}$ y $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}$.

Demostración. Definamos $\mathcal{T} = \mathcal{S}\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}^{-1}$, entonces tenemos $\mathcal{T}(\Phi) = \mathcal{S}\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\Phi) = \mathcal{S}(\Phi) = \Phi$ y $\mathcal{T}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{S}\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$. Si $\operatorname{Span}\{\boldsymbol{u}\}$ es el subespacio generado por el vector $\boldsymbol{u}$, existe un isomorfismo $\varphi : \mathbf{E}/\operatorname{Span}\{\boldsymbol{u}\} \to \mathbf{P}$ y defínase $\widetilde{\mathcal{T}}(\boldsymbol{v} + \operatorname{Span}\{\boldsymbol{u}\}) = \varphi^{-1}\mathcal{T}\varphi(\boldsymbol{v} + \operatorname{Span}\{\boldsymbol{u}\})$. En consecuencia, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}/_{\langle \boldsymbol{u} \rangle} \arrow[r, "\widetilde{\mathcal{T}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{E}/_{\langle \boldsymbol{u} \rangle} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbf{P} \arrow[r, "\mathcal{T}"'] & \mathbf{P}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{T} = id$ en $\mathbf{P}$, concluimos que $\widetilde{\mathcal{T}} = id$, es decir, $\widetilde{\mathcal{T}}$ actúa como la identidad en el cociente. Es claro que $\mathcal{T}$ actúa como la identidad en el subespacio $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ y por tanto, todos los valores propios de $\mathcal{T}$ son iguales a 1 y el polinomio mínimo de $\mathcal{T}$ divide a $p_1(x) = (x-1)^{\ell}$, con $\ell = \dim \mathbf{E}$. Por otro lado, como Φ es finito, no todos los vectores $\boldsymbol{w}, \mathcal{T}(\boldsymbol{w}), \mathcal{T}^2(\boldsymbol{w}), \ldots$ pueden ser distintos, así que debe de existir un entero positivo k para el cual $\mathcal{T}^k(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$. Seleccionemos k suficientemente grande para que $\mathcal{T}^k$ fije a todos los vectores en Φ. Como Φ genera a $\mathbf{E}$, forzosamente tendremos que $\mathcal{T}^k = id$ así que el polinomio mínimo de $\mathcal{T}$ divide a $p_2(x) = x^k - 1$. Combinado con lo anterior, se muestra que el polinomio mínimo es el máximo común divisor de p_1 y p_2, es decir, $p(x) = x - 1$. Se concluye que $\mathcal{T} = id$. □

El conjunto de todos los operadores lineales invertibles de un espacio vectorial $\mathbf{E}$, denotado como $GL(\mathbf{E})$, se llama *grupo general lineal* de $\mathbf{E}$. Se puede verificar que, efectivamente, $GL(\mathbf{E})$ tiene estructura de grupo.

Sistema de raíces

Ahora se dará la definición del objeto de estudio de este capítulo.

Definición 2.2. *Un subconjunto* Φ *de un espacio euclidiano* $\mathbf{E}$ *es llamado un* **sistema de raíces** *en* $\mathbf{E}$ *si los siguientes axiomas se satisfacen:*

(R1) Φ *es finito, genera a* $\mathbf{E}$ *y no contiene al vector nulo.*

(R2) Si $\alpha \in \Phi$*, los únicos múltiplos de* α *en* Φ *son* $\pm\alpha$*.*

(R3) Si $\alpha \in \Phi$*, la reflexión* $\mathcal{R}_\alpha$ *deja invariante a* Φ*.*

(R4) Si $\alpha, \beta \in \Phi$*, entonces* $|\beta, \alpha| \in \mathbb{Z}$*.*

A los elementos de Φ se les llaman *raíces*. Es claro que (R2) y (R3) implican que $\Phi = -\Phi$.

El axioma (R1) no es tan severo, pues si Φ es un conjunto finito que no contiene al cero y satisface (R2), (R3) y (R4), entonces Φ es un sistema de raíces en el subespacio que genera.

Sea Φ un subconjunto de $\mathbf{E}$ que satisface (R1), (R3) y (R4); suponga que $\alpha \in \Phi$ tal que $k\alpha \in \Phi$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces el hecho de que los números $|\alpha, k\alpha|$ y $|k\alpha, \alpha|$ son enteros implica que $\frac{2}{k}, \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$ y esto sucede si y sólo si $k \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. La información que nos proporcionan los múltiplos extras, se puede obtener de $\pm\alpha$. Así, al incluir como axioma (R2), estamos economizando el estudio. En algunos textos (ver [7], p. 103) se abordan los sistemas de raíces excluyendo (R2) y a lo que nosotros presentamos con el nombre de sistema de raíces se nombra como “sistema reducido de raíces”.

El axioma (R3), sugiere una acción del grupo generado por las reflexiones cuyos hiperplanos reflectantes son los hiperplanos ortogonales a una raíz. Este grupo juega un papel importante en el estudio de sistemas de raíces y tiene propiedades especiales cuando el sistema de raíces sea irreducible.

El axioma (R4) tiene consecuencias geométricas muy fuertes, pues el ángulo que pueden formar una pareja arbitraria de raíces es bastante limitado, de hecho, existen pocos ángulos diferentes (mod 2π) como se muestra en la Tabla 2.1.

Ahora, veremos algúnos ejemplos que nos serán de útilidad. Primero, definimos el *rango* de un sistema de raíces Φ en $\mathbf{E}$ como $\operatorname{rank}\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathbf{E}$.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ y tomemos un número $\alpha \neq 0$, entonces $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ es evidentemente un sistema de raíces. A tal sistema se le denota como A_1 y gráficamente se vería como indica la figura siguiente:*

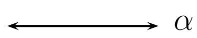


Figura 2.1: Sistema de raíces de rango 1.

El rango 2 ofrece más posibilidades, cuatro de las cuales son presentados en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.1.2. *En $\mathbb{R}^2$, considere $\Phi = \{\alpha = (0,1), \beta = (1,0), -\alpha, -\beta\}$, lo que se representa en la siguiente figura:*

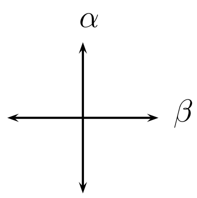


Figura 2.2: Sistema de rango 2 con 4 raíces.

Los axiomas (R1) y (R2) son evidentes. El axioma (R3) se puede verificar directamente de la figura 2.2, pues las reflexiones

$$\mathcal{R}_\alpha : \begin{array}{rcr} \alpha & \mapsto & -\alpha \\ \beta & \mapsto & \beta \end{array}$$

y

$$\mathcal{R}_\beta : \begin{array}{rcr} \alpha & \mapsto & \alpha \\ \beta & \mapsto & -\beta \end{array}$$

dejan invariante a Φ. Un cálculo breve muestra que los productos $|\gamma, \delta|$ toman los valores ± 2 o cero, con lo que se satisface (R4). A éste sistema lo denotaremos como $A_1 \times A_1$.

Ejemplo 2.1.3. *Ahora, tomemos* $\alpha = (1, 0)$ *y* $\beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *para formar el conjunto* $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta)\}$.

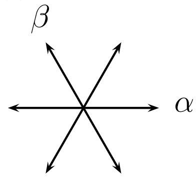


Figura 2.3: Sistema de rango 2 con 6 raíces.

Nuevamente, los axiomas (R1) y (R2) son claros. Con la ayuda de la figura 2.3, podemos verificar fácilmente que (R3) se cumple para Φ. *Como todos los vectores de* Φ *tienen norma 1,* $|,|$ *es lineal en las dos componentes y así, es fácil ver que los valores* $|\gamma, \delta|$ *son* ± 1 *o* ± 2. *A éste sistema de raíces lo denotaremos por* A_2.

Ejemplo 2.1.4. *Tomemos* $\alpha = (1, 0)$ *y* $\beta = (-1, 1)$. *Definimos*

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\mathcal{R}_\beta(\alpha), \pm\mathcal{R}_\alpha(\beta)\},$$

y por la fórmula (2.1), es fácil verificar que

$$\mathcal{R}_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = (0, 1) \quad \mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta + 2\alpha = (1, 1).$$

Es evidente que Φ *satisface los axiomas (R1) y (R2). Con ayuda de la figura siguiente*

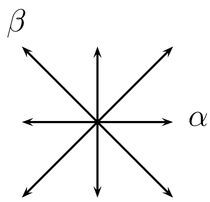


Figura 2.4: Sistema de rango 2 con 8 raíces.

podemos verificar el axioma (R3) mientras que el axioma (R4) necesita un pequeño cálculo elemental para verificar que los productos $|\gamma, \delta|$ *toman los valores* $\pm 1, \pm 2$ *o cero. A éste sistema de raíces lo denotaremos como* B_2.

Ejemplo 2.1.5. *Sean* $\alpha = (1,0)$ *y* $\beta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$*, ahora recolectemos los siguientes vectores:*

$$\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \mathcal{R}_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta(\alpha) = \beta + 2\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathcal{R}_\beta\mathcal{R}_\alpha(\beta) = 2\beta + 3\alpha = \left(0, \sqrt{3}\right)$$

y sus negativos para formar el conjunto

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\},$$

que gráficamente, se ve como indica la siguiente figura:

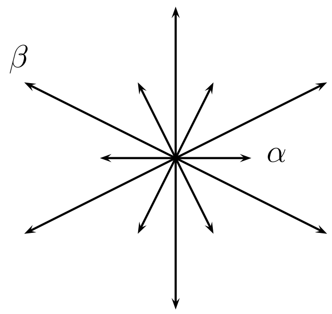


Figura 2.5: Sistema de rango 2 con 12 raíces.

Nuevamente, los axiomas (R1) y (R2) son claros, mientras que la figura nos ayuda a verificar manualmente el axioma (R3). Los productos $|\gamma, \delta|$ *pueden tomar los valores* $\pm1, \pm3$ *o cero. Éste sistema de raices se denota como* G_2*.*

Más adelante veremos que la elección que hacemos para las raíces α y β es altamente conveniente. Nótese que la cantidad de raíces en cada ejemplo es diferente; cuando vinculemos los sistemsa de raíces con las álgebras de Lie presentaremos una fórmula que relaciona el rango de un sistema de raíces y la cardinalidad de este con la dimensión de un álgebra de Lie semisimple.

También, podemos ver que cada sistema de raíces se puede ver como copias de A_1 colocadas de una determinada manera, es decir, satisfaciendo ciertas relaciones dependientes de los álgunlos y las longitudes relativas de las raíces.

Isomorfismos

Ahora, presentaremos una relación de equivalencia entre sistemas de raíces que es bien conocida en toda estructura algebraica. En cierto sentido, esta relación nos permite discernir cuando dos sistemas de raíces son escencialmente el mismo y claro esta que nos interesaremos en estudiar sistemas de raíces salvo isomorfismos.

Comenzaremos presentando un resultado que nos dice cómo actúa un determinado subgrupo de operadores lineales de $\mathbf{E}$ que dejan invariante a Φ sobre las reflexiones correspondientes a raíces en Φ.

Proposición 2.2. *Sea Φ un sistema de raíces en $\mathbf{E}$. Si $\mathcal{S} \in GL(\mathbf{E})$ deja invariante a Φ, entonces $\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{S}(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Phi$ y además $|\beta,\alpha| = |\mathcal{S}(\beta),\mathcal{S}(\alpha)|$ para todo $\alpha,\beta \in \Phi$.*

Demostración. Para cada $\beta \in \Phi$ y toda $\alpha \in \Phi$ tenemos que $\mathcal{R}_\alpha(\beta) \in \Phi$, así que $(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{S}^{-1})(\mathcal{S}(\beta)) = \mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha(\beta) \in \Phi$, pero por linealidad se observa que

$$\left(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{S}^{-1}\right)(\mathcal{S}(\beta)) = \mathcal{S}(\beta - |\beta,\alpha|\alpha) = \mathcal{S}(\beta) - |\beta,\alpha|\mathcal{S}(\alpha). \tag{2.2}$$

Como $\mathcal{S}$ es biyectiva, concluimos que $\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{S}^{-1}$ deja invariante a Φ, mientras fija a todo punto del hiperplano $\mathcal{S}(\mathbf{P}_\alpha)$ y manda a $\mathcal{S}(\alpha)$ en $-\mathcal{S}(\alpha)$. Por la Proposición 2.1, tenemos que $\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{S}(\alpha)}$. Finalmente, es claro que

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}(\alpha)}(\mathcal{S}(\beta)) = \mathcal{S}(\beta) - |\mathcal{S}(\beta),\mathcal{S}(\alpha)|\mathcal{S}(\alpha), \tag{2.3}$$

y comparando (2.2) con (2.3), se tiene la segunda aseveración. □

Ahora, veremos en que sentido depende un sistema de raíces con respecto del producto interior del espacio.

Proposición 2.3. *Sean $\mathbf{E}$ un espacio vectorial real de dimensión finita y $(\,,)_1$, $(\,,)_2$ dos productos euclidianos en $\mathbf{E}$. Suponga que Φ es un sistema de raíces en $(\mathbf{E},(\,,)_1)$ y $\varphi : (\mathbf{E},(\,,)_1) \to (\mathbf{E},(\,,)_2)$ es una transformación lineal invertible. Una condición necesaria y suficiente para que $\varphi(\Phi)$ sea un sistema de raíces en $(\mathbf{E},(\,,)_2)$ es*

$$|\alpha,\beta|_1 = |\varphi(\alpha),\varphi(\beta)|_2$$

para toda pareja de raíces α y β en Φ.

Demostración. Para la necesidad, supongamos que $\varphi(\Phi)$ es un sistema de raíces en $(\mathbf{E}, (\,,\,)_2)$, entonces cada $\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}$ deja invariante a $\varphi(\Phi)$, es decir,

$$\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - |\varphi(\beta), \varphi(\alpha)|_2 \varphi(\alpha) \in \varphi(\Phi),$$

para cualquier elección de α y β en Φ. Ahora, cada raíz en Φ se puede escribir como $\mathcal{R}_\alpha(\beta)$, para algunos $\alpha, \beta \in \Phi$ y así,

$$\varphi(\mathcal{R}_\alpha(\beta)) = \varphi(\beta) - |\beta, \alpha|_1 \varphi(\alpha) \in \varphi(\Phi).$$

Como φ es biyectiva, se sigue que $\varphi^{-1}\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi(\beta) \in \Phi$ para todo par de raíces α y β. Además, $\varphi^{-1}\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi$ deja invariante a Φ, manda a α en su negativo y deja fijos a todos los puntos en el hiperplano $\varphi^{-1}\left(\mathbf{P}_{\varphi(\alpha)}\right)$. Por la Proposición 2.1, tenemos que $\varphi^{-1}\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi = \mathcal{R}_\alpha$ para toda $\alpha \in \Phi$ y se infiere la igualdad

$$|\beta, \alpha|_1 = |\varphi(\beta), \varphi(\alpha)|_2. \tag{2.4}$$

Para la suficiencia, si φ satisface la condición (2.4), entonces $\varphi(\Phi)$ cumple (R4); por ser φ lineal y biyectiva, $\varphi(\Phi)$ cumple (R1) y (R2); y por último, si $\varphi(\alpha)$ es una raíz en $\varphi(\Phi)$ y tomamos cualquier $\varphi(\beta) \in \varphi(\Phi)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) &= \varphi(\beta) - |\varphi(\beta), \varphi(\alpha)|_2 \varphi(\alpha) \\
&= \varphi(\beta) - |\beta, \alpha|_1 \varphi(\alpha) \\
&= \varphi\left(\beta - |\beta, \alpha|_1 \alpha\right) \\
&= \varphi\left(\mathcal{R}_\alpha(\beta)\right) \in \varphi(\Phi),
\end{aligned}$$

con lo que $\varphi(\Phi)$ cumple con (R3) y es un sistema de raíces en $(\mathbf{E}, (\,,\,)_2)$. □

Una conclusión importante de ésta discución es la siguiente.

Teorema 2.4. *Sean* $(\mathbf{E}_1, (\,,\,)_1)$ *y* $(\mathbf{E}_2, (\,,\,)_2)$ *dos espacios euclidianos de dimensión finita sobre un campo* $\mathbb{F}$. *Si* $\dim \mathbf{E}_1 = \dim \mathbf{E}_2$, *entonces existe una correspondencia uno-a-uno entre los sistemas de raíces de* $\mathbf{E}_1$ *y los sistemas de raíces de* $\mathbf{E}_2$.

Demostración. Si $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{E}_1$ y $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{E}_2$, definimos $\mathcal{T} : \sum x^i \boldsymbol{e}_i \mapsto \sum x^i \boldsymbol{f}_i$. Es fácil ver que $\mathcal{T}$ es un isomorfismo que preserva los productos interiores. Por la Proposición 2.3, a cada sistema de raíces Φ en $\mathbf{E}_1$, le hacemos corresponder $\mathcal{T}(\Phi)$ en $\mathbf{E}_2$. □

Esto nos lleva a la definición de isomorfismo de dos sistemas de raíces Φ y Φ' en los espacios $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, respectivamente:

Definición 2.3. *Diremos que* $(\Phi, \mathbf{E})$ *y* $(\Phi', \mathbf{E}')$ *son* **isomorfos***, que denotamos por el símbolo* $\Phi \cong \Phi'$*, si existe un isomorfismo de espacios vectoriales* $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *que mande a* Φ *sobre* Φ' *tal que* $|\varphi(\beta), \varphi(\alpha)|' = |\beta, \alpha|$ *para cada par de raíces* $\alpha, \beta \in \Phi$*.*

Ejemplo 2.1.6. *Cualquier sistema de raíces* Ψ *en* $\mathbb{R}$ *es isomorfo a* A_1*, ya que por (R2)* Ψ *tiene dos raíces* β *y* $-\beta$*. El isomorfismo es* $\beta \mapsto \alpha$*.*

Sea $\mathbf{E}$ un espacio euclidiano de dimensión ℓ. En la familia de sistemas de raíces en $\mathbf{E}$ podemos definir la siguiente relación:

Diremos que Φ está relacionado con Φ', que denotamos $\Phi \sim \Phi'$, si los sistemas Φ y Φ' son isomorfos.

El siguiente resultado establece que esta es, de hecho, una relación de equivalencia. La demostración es inmediata de las definiciones y por tal motivo, no se presentará.

Proposición 2.5. *La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en la familia de sistemas de raíces.*

Como una concecuencia inmediata, se tiene que si dos sistemas de raíces son isomorfos, entonces tienen el mismo número de raíces y los espacios que generan tienen la misma dimensión.

Propiedades geométricas y cadenas de raíces

En esta subsección, discutiremos un poco de cuestiones geométricas de los sistemas de raíces y un resultado muy importante que obtendremos es la Tabla 2.1, donde se presentan los ángulos permisibles entre cualesquiera dos raíces no proporcionales, así como los posibles valores de los números $|\alpha, \beta|$. También, presentamos un el concepto de cadenas de raíces y mostraremos una manera alternativa de intoducir los sistemas de raíces en términos de estos objetos.

El axioma (R4) limita severamente los posibles ángulos que hay entre una pareja de raíces. Recordando que el coseno del ángulo θ entre los vectores no nulos α y β en $\mathbf{E}$ está dado por la fórmula

$$\|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\theta = (\alpha,\beta),$$

podemos ver que

$$|\beta,\alpha| = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta$$

y así, $|\alpha,\beta||\beta,\alpha| = 4\cos^2\theta$. Sabemos que $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ y es claro que $|\alpha,\beta|$ tiene el mismo signo que $|\beta,\alpha|$, por lo que tenemos

$$|\alpha,\beta||\beta,\alpha| = \begin{cases} 0 & \text{si y sólo si } \theta = \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si y sólo si } \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} \\ 2 & \text{si y sólo si } \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \\ 3 & \text{si y sólo si } \theta \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\} \\ 4 & \text{si y sólo si } \theta \in \{0,\pi\} \end{cases}$$

Concluimos que las siguientes posibilidades son las únicas cuando α no es proporcional a β y $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$:

Tabla 2.1: Los valores de $|\alpha,\beta|$, los ángulos y las longitudes relativas.

$\|\alpha,\beta\|$	$\|\beta,\alpha\|$	θ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	$-$
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

A continuación, veremos un resultado que nos será de utilidad mas adelante.

Proposición 2.6. *Sean α y β dos raíces no proporcionales. Si $(\alpha,\beta) > 0$, entonces $\alpha - \beta$ es raíz. Si $(\alpha,\beta) < 0$, entonces $\alpha + \beta$ es raíz.*

Demostración. La segunda aseveración se sigue de la primera reemplazando β por $-\beta$.

Ahora, como (α, β) es positivo si y sólo si $|\alpha, \beta|$ lo es, la Tabla 2.1 muestra que uno de los dos números, $|\alpha, \beta|$ o $|\beta, \alpha|$, es igual a 1. Si $|\alpha, \beta| = 1$, entonces

$$\mathcal{R}_\beta(\alpha) = \alpha - |\alpha, \beta|\beta = \alpha - \beta \in \Phi \quad \text{por (R3);}$$

similarmente, si $|\beta, \alpha| = 1$, tenemos que $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$ y por tanto, $\mathcal{R}_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$. □

Considere un par de raíces no proporcionales α y β. Observe a todas las raíces de la forma $\beta + k\alpha$ con $k \in \mathbb{Z}$, llamada la *α-cadena a través de β* o bien *α-cadena por β*. Sean r y q los enteros positivos más grandes para los cuales $\beta - r\alpha$ y $\beta + q\alpha$ son raíces. Como una aplicación de la Proposición 2.6 tenemos el siguiente:

Corolario 2.7. *La α-cadena a través de β es irrompible desde $\beta - r\alpha$ hasta $\beta + q\alpha$, es decir, $\beta + i\alpha \in \Phi$ para todo entero $-r \leq i \leq q$.*

Demostración. Si alguno de los $\beta + i\alpha$ no es raíz, podemos encontrar enteros $-r \leq p < s \leq q$ tales que

$$\beta + p\alpha \in \Phi, \qquad \beta + (p+1)\alpha \notin \Phi, \qquad \beta + (s-1)\alpha \notin \Phi \quad \text{y} \quad \beta + s\alpha \in \Phi.$$

Si $(\alpha, \beta + s\alpha) > 0$, por la Proposición 2.6 tendríamos que $\beta + (s-1)\alpha \in \Phi$, lo que es absurdo. Similarmente, $0 \leq (\alpha, \beta + p\alpha)$. Se concluye que

$$s(\alpha, \alpha) \leq p(\alpha, \alpha),$$

pero esto es absurdo pues $p < s$ y $\alpha \neq \mathbf{0}$. □

Ahora, veamos cómo actuan las reflexiones en las cadenas. Si $\alpha \in \Phi$, $\mathcal{R}_\alpha$ sólo suma o resta un múltiplo de α a cualquier raíz. Así, estas cadenas son invariantes bajo $\mathcal{R}_\alpha$. Geométricamente, es claro que el número de raíces de la α-cadena que quedan de un lado del hiperplano $\mathbf{P}_\alpha$ es el mismo que el número de raíces que quedan del otro, es decir, $\mathcal{R}_\alpha$ invierte el sentido de la cadena; en particular, $\mathcal{R}_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$. Por otro lado, tenemos

$$\mathcal{R}_\alpha(\beta + q\alpha) = \mathcal{R}_\alpha(\beta) + q\mathcal{R}_\alpha(\alpha) = \beta - |\beta, \alpha|\alpha - q\alpha,$$

así que $r - q = |\beta, \alpha|$. De esta discución se sigue el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Las cadenas de raíces son de longitud a lo más 4.*

A continuación, se presenta una figura donde se encuentra una cadena en G_2. Como se puede ver, esta cadena esta saturada.

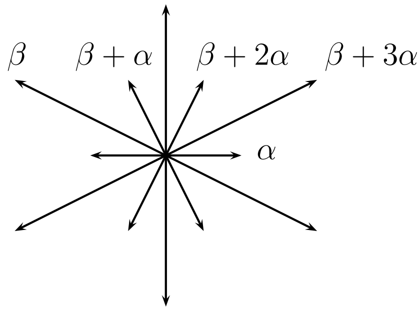


Figura 2.6: La α-cadena que pasa por β en G_2.

Una presentación alternativa de los sistemas de raíces es a través de las cadenas. A continuación, veremos cómo podemos reemplazar los axiomas (R3) y (R4) en terminos de las propiedades que hemos desarrollado para las cadenas de raíces.

Teorema 2.9. *Sea Φ un conjunto finito de generadores del espacio euclidiano* $\mathbf{E}$ *que satisface (R2). Una condición necesaria y suficiente para que Φ sea un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$ *es la siguiente*

(C) Para dos vectores α y β en Φ que sean linealmente independientes, existen dos enteros no negativos r y q, maximales tales que $\beta + k\alpha \in \Phi$ para todo entero $-r \leq k \leq q$ y también satisfacen $|\beta, \alpha| = r - q$.

Demostración. La necesidad es clara en este momento por el Corolario 2.7 y la discusión previa a la Proposición 2.8. Para la suiciencia, como Φ es un conjunto de generadores, (R1) se satisface. Por (C), los productos $|\gamma, \delta|$ son $r - q$ o bien ± 2, que son enteros y se tiene así (R4); ademas que $-r \leq -(r-q) \leq q$ así que $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta - (r-q)\alpha \in \Phi$ por lo que (R3) se cumple. $\square$

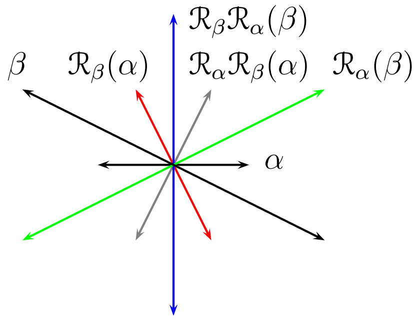
Gracias a este resultado, ahora tenemos una manera equivalente de verificar si un determinado subconjunto de un espacio euclidiano es un sistema de raíces. Cuando estudiemos álgebras de Lie semisimples y sus raíces, haremos uso de este Teorema para demostrar que el conjunto de raíces de un álgebra de Lie semisimple es un sistema de raíces como se estudia en éste capítulo.

Sistema de raíces de rango 2

El propósito de esta subsección es presentar la clasificación completa de los sistemas de raíces de rango 2. Los argumentos que presentaremos ilustran el manejo de los axiomas de sistemas de raíces y el uso de la Tabla 2.1. Procederemos por casos:

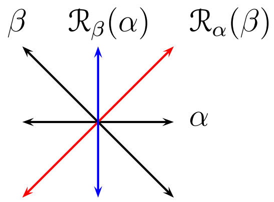
(i) Sean α y β dos raíces ortogonales en Φ. Por (R2), sabemos que $\{\pm\alpha, \pm\beta\} \subset \Phi$ y si no hay mas elementos en Φ, es claro que es un sistema de raíces isomorfo a $A_1 \times A_1$.

(ii) Sea α una raíz y supongamos que β es otra raíz que forma un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$ con α. Por el axioma (R3), tenemos que $\mathcal{R}_\alpha(\beta), \mathcal{R}_\beta(\alpha) \in \Phi$. Luego, $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta(\alpha)$ y $\mathcal{R}_\beta\mathcal{R}_\alpha(\beta)$ también deben de ser raíces. Agregando los negativos de éstos vectores, tenemos un subconjunto de Φ que es isomorfo a G_2.



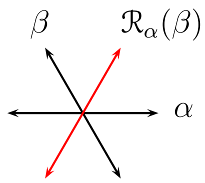
Si existiera un vector más en Φ, digamos γ, tendríamos que γ es un múltiplo no válido de alguna otra raíz α o bien, que el ángulo que forma con α no se encuentra en la Tabla 2.1, lo que es absurdo en cualquiera de los dos casos.

(iii) Ahora, tomemos dos raíces α y β que formen un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$. Nuevamente, por (R3), tenemos que $\mathcal{R}_\alpha(\beta)$ y $\mathcal{R}_\beta(\alpha)$ son raíces y el subconjunto de Φ conformado por éstos vectores y sus negativos es un sistema de raíces isomorfo a B_2.



De nueva cuenta, por la restricción en los ángulos y (R2), no hay ningún otro vector en Φ.

(*iv*) Finalmente, si tenemos dos raíces α y β a un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$, entonces el subconjunto de Φ que consta de los vectores $\pm\alpha, \pm\beta$ y $\pm\mathcal{R}_\alpha(\beta)$ es un sistema de raíces isomorfo a A_2.



Si existiera un vector δ que forme un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con α, tendríamos que $\mathcal{R}_\alpha(\delta)$ forma un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$ con α y así $(\mathcal{R}_\alpha(\delta), \delta) < 0$. Por la Proposición 2.6, $\mathcal{R}_\alpha(\delta) + \delta$ es una raíz y es ortogonal a α. Todo esto nos genera un sistema de raíces isomorfo a G_2.

Es claro, por la Tabla 2.1, que no podemos tener un vector δ que tenga un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ o de $\frac{3\pi}{4}$ con α.

Esta es la clasificación completa de sistemas de raíces de rango 2. Nótese que el sistema $A_1 \times A_1$ puede ser descompuesto como la unión de dos subsistemas mutuamente ortogonales, mientras que A_2, B_2 y G_2 no gozan de dicha propiedad.

Analizando el sistema G_2, podemos ver que sólo existen dos longitudes diferentes de raíces y mas adelante, veremos que tan común es este hecho en sistemas de raíces irreducibles. Además, podemos ver a A_2 como el subsistema de G_2 que consta de todas las raíces de longitud corta; también podemos encontrar tres copias isomorfas de $A_1 \times A_1$ en G_2 y dos más en B_2. Es decir, los sistemas G_2 y B_2 contienen a todos los sistemas de rango 2 como subsistemas.

2.2 Bases y Raíces simples

En esta sección, concentraremos nuestra atención a un subconjunto del sistema de raíces que nos describa de manera adecuada el comportamiento del resto de las raíces. También presentaremos algunas propiedades de las raíces simples que nos cerán de utilidad posteriormente.

Bases

Uno de los conceptos importantes del Álgebra Lineal es el de base de un espacio vectorial. Entre otras aplicaciones, las bases facilitan muchos de los resultados del álgebra lineal en el estudio de un número finito de vectores que representan de manera adecuada la estructura lineal del espacio.

En el caso de las bases para los sistemas de raíces, será necesario establecer una condición que nos ayude a estudiar la estructura de los sistemas de raíces, en particular, la integridad de los números $|\gamma, \delta|$.

Definición 2.4. *Sea* $\mathbf{E}$ *un espacio euclidiano de dimensión* ℓ *y* Φ *un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$*. Un subconjunto* Δ *de* Φ *se llama una* **base** *de* Φ *si satisface las siguientes dos condiciones:*

(B1) Δ *es una base de* $\mathbf{E}$*,*

(B2) cada raíz β *puede ser escrita como*

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \tag{2.5}$$

con coeficientes enteros k_α*, todos no negativos o bien, todos no positivos.*

Es un hecho elemental del álgebra lineal que el número de elementos de una base Δ, que denotaremos por $|\Delta|$, es ℓ. Además, si fijamos una base Δ de Φ, se tiene que la expresión (2.5) es única para cada raíz $\beta \in \Phi$, salvo el orden en que aparecen los sumandos.

En lo que resta de esta sección, trabajaremos en un espacio euclidiano $\mathbf{E}$ de dimensión ℓ y Φ será un sistema de raíces en $\mathbf{E}$.

Ejemplo 2.2.1. *En $\mathbb{R}^2$, considere el sistema de raíces A_2. Tomemos $\alpha = (1,0)$ y $\beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ para formar el subconjunto $\{\alpha, \beta\} \subset A_2$. De la siguiente figura se observa que $\{\alpha, \beta\}$ es una base para A_2.*

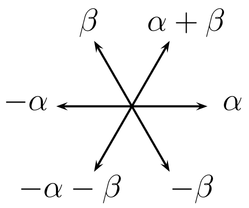


Figura 2.7: Una base para A_2.

Ahora, el conjunto $\{-\alpha, \beta\}$ satisface claramente (B1), sin embaro, no púede ser una base de A_2 ya que se tiene la raíz $(-\alpha) - \beta$ que no satisface la condición (B2). Éste hecho muestra la independencia de los axiomas (B1) y (B2).

A continuación, definiremos una función que a cada raíz de Φ le asignará un número entero que nos ayudará para la demostración de resultados posteriores.

Definición 2.5. *Sea Φ un sistema de raíces en $\mathbf{E}$ y Δ una base de Φ. Se define la* **altura** *de una raíz $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ con respecto a la base Δ como*

$$\operatorname{alt}(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha.$$

Por el axioma (B2), la altura de cualquier raíz es un número entero y $\operatorname{alt}(\beta) = 1$ si y sólo si $\beta \in \Delta$. Nótese que la altura de una raíz siempre es diferente de cero.

Ejemplo 2.2.2. *Considere el sistema de raíces G_2 y sea*

$$\Delta = \left\{ \alpha = (1,0), \beta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

Se puede verificar sin complicaciones que Δ es una base para G_2. Si $\gamma = (0, \sqrt{3}) \in G_2$, entonces $\gamma = 3\alpha + 2\beta$ y se tiene $\operatorname{alt}(\gamma) = 5$.

Definición 2.6. *Sea Φ un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$ *y* Δ *una base de* Φ*. Si* β *es una raíz para la cual todos los coeficiontes* k_α *en la expresión (2.5) son no negativos, diremos que* β *es una* **raíz positiva** *con respecto a* Δ *y lo denotaremos por el símbolo* $\beta \succ 0$*. Análogamente, si* β *es una raíz para la cual los coeficientes* k_α *de la expresión (2.5) son todos no positivos, diremos que* β *es un* **raíz negativa** *con respecto a* Δ *y se denota por* $\beta \prec 0$*.*

Al conjunto de raíces positivas con respecto a Δ lo denotaremos por Φ^+ y al conjunto de raíces negativas con respecto a Δ por Φ^-.

Ejemplo 2.2.3. *Considere el ejemplo 2.2.1. Claramente,* $\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$*.*

Claramente se tiene $\Phi^- = -\Phi^+$, así que sólo bastará con estudiar las raíces positivas de un sistema de raíces. Otro hecho evidente es que si α y β son raíces positivas con respecto a Δ y además $\alpha + \beta$ es una raíz, entonces $\alpha + \beta$ también será una raíz positiva con respecto a Δ.

Hasta éste momento, no es evidente que todo sistema de raíces posee una base, pero en lo que sigue, mostraremos que en efecto, las bases para un sistema de raíces existen. Para ésto, necesitamos algunas definiciones.

Definición 2.7. *Sea* Φ *un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$*. Para cada vector* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}$*, se define el conjunto*

$$\Phi^+(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Phi : (\boldsymbol{v}, \alpha) > 0\} .$$

Verbalmente, el conjunto $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ es el conjunto de todas las raíces que están en la parte positiva del hiperplano $\mathbf{P}_{\boldsymbol{v}}$.

Ejemplo 2.2.4. *Considere el sistema de raíces* $A_1 \times A_1$ *con la siguiente base* $\{(1, 0), (0, 1)\}$*. Si* $\boldsymbol{v} = (1, -1)$*, entonces el conjunto* $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ *es el conjunto* $\{(1, 0), (0, -1)\}$*.*

Es claro que la unión finita de hiperplanos no cubre a todo el espacio $\mathbf{E}$, así que tiene sentido hacer la siguiente definición.

Definición 2.8. *Sea* Φ *un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$*. Diremos que un vector* $\boldsymbol{v}$ *de* $\mathbf{E}$ *es* **regular** *con respecto a* Φ *si* $\boldsymbol{v}$ *no está en ningún hiperplano ortogonal a alguna raíz en* Φ*, es decir,* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{E} - \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathbf{P}_\alpha$*; diremos que es* **singular** *con respecto a* Φ *en otro caso.*

Ejemplo 2.2.5. *Considere el sistema de raíces* A_2 *con base*

$$\left\{\alpha = (1,0), \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Recuerde que $\mathbf{P}_\gamma = \mathbf{P}_{-\gamma}$ *para cualquer vector* $\gamma \in \mathbf{E}$. *En la siguiente figura, las lineal punteadas denotan los conjuntos de vectores singulares de* A_2 *y cualquier otro vector es regular.*

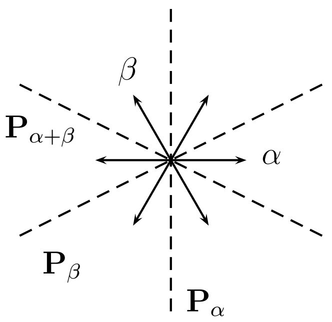


Figura 2.8: Vectores regulares y singulares de A_2.

En este caso, todas las raíces son vectores regulares con respecto a A_2. *Si consideramos el sistema* $A_1 \times A_1$ *con la base* $\{\alpha = (1,0), \beta = (0,1)\}$, *el conjunto de vectores singulares es* $\mathrm{Span}\{\alpha\} \cup \mathrm{Span}\{\beta\}$ *y aquí, todas las raíces son singulares.*

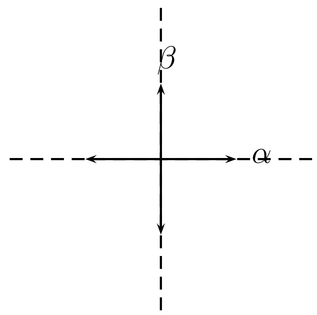


Figura 2.9: Vectores singulares y regulares de $A_1 \times A_1$.

Cuando $\boldsymbol{v}$ es regular con respecto a Φ, es claro que Φ se puede escribir como $\Phi^+(\boldsymbol{v}) \cup [-\Phi^+(\boldsymbol{v})]$, ya que $\boldsymbol{v}$ no es ortogonal a ninguna raíz, es decir, $(\boldsymbol{v}, \alpha) \neq 0$ para toda $\alpha \in \Phi$.

Definición 2.9. *Sea Φ un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *un vector regular con respecto a Φ. Diremos que $\alpha \in \Phi^+(\boldsymbol{v})$ es una raíz* **descomponible** *si se puede escribir como suma de dos raíces en $\Phi^+(\boldsymbol{v})$, es decir, si existen $\beta, \gamma \in \Phi^+(\boldsymbol{v})$ tales que $\alpha = \beta + \gamma$; diremos que α es una raíz* **indescomponible** *en otro caso.*

Como $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ es un conjunto finito, no todas sus raíces pueden ser descomponibles y así, siempre existen raíces indescomponibles en un sistema de raíces. Al conjunto de todas las raíces indescomponibles en $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ lo denotaremos por $\Delta(\boldsymbol{v})$.

Ejemplo 2.2.6. *Considere el sistema de raíces G_2 y sea $\boldsymbol{v} = (1,1)$. Claramente, $\boldsymbol{v}$ es un vector regular con respecto a G_2. Las raíces indescomponibles en $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ son $\alpha = (1,0)$ y $\beta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y se tiene*

$$\Phi^+(\boldsymbol{v}) = \{\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\},$$

como se muestra en la siguiente figura

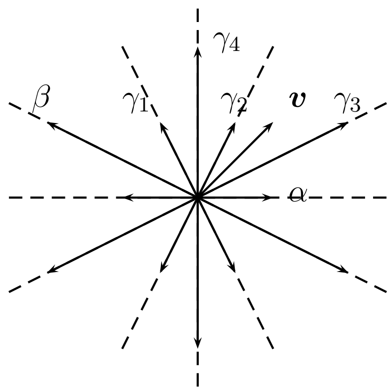


Figura 2.10: Raíces descomponibles e indescomponibles en G_2.

El conjunto de raíces descomponibles en éste caso consta de los vectores $\gamma_1 = \alpha + \beta, \gamma_2 = \alpha + \gamma_1, \gamma_3 = \alpha + \gamma_2$ y $\gamma_4 = \beta + \gamma_3$.

Ahora, presentamos un criterio que usaremos para saber si un subconjunto de raíces de Φ es una base para Φ.

Proposición 2.10. *Si Δ es una base de Φ, entonces $(\alpha, \beta) \leq 0$ para cualesquiera dos raíces diferentes α y β en Δ y además, $\alpha - \beta$ no es raíz.*

Demostración. Supongamos que $(\alpha, \beta) > 0$. Como $\alpha \neq \beta$, es evidente que $\alpha \neq \pm\beta$ y la Proposición 2.6 implica que $\alpha - \beta$ es raíz, lo que es absurdo por el axioma (B2). □

Con estos conceptos, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Todo sistema de raíces Φ en un espacio euclidiano $\mathbf{E}$ tiene una base.*

La prueba nos dará un método para construir todas las posibles bases de Φ y el algoritmo se encuentra en el siguiente Lema.

Lema 2.12. *Sea $\boldsymbol{v}$ un vector regular, entonces el conjunto $\Delta(\boldsymbol{v})$ de todas las raíces indescomponibles en $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ es una base para Φ y toda base se obtienen de este modo.*

Demostración. Procederemos por pasos:

(1) *Cada raíz en $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ es una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de elementos en $\Delta(\boldsymbol{v})$ con coeficientes no negativos.*

Si suponemos lo contrario, algún $\alpha \in \Phi^+(\boldsymbol{v})$ no puede ser escrita como una combinación lineal con coeficientes enteros de raíces indescomponibles; escojamos α tal que $(\boldsymbol{v}, \alpha)$ sea lo más pequeña posible. Obviamente, $\alpha \notin \Delta(\boldsymbol{v})$, así que $\alpha = \beta + \gamma$ con $\beta, \gamma \in \Phi^+(\boldsymbol{v})$ y por tanto, $(\boldsymbol{v}, \alpha) = (\boldsymbol{v}, \beta) + (\boldsymbol{v}, \gamma)$. Pero $(\boldsymbol{v}, \beta)$ y $(\boldsymbol{v}, \gamma)$ son ambos positivos y menores que $(\boldsymbol{v}, \alpha)$ lo que es absurdo.

(2) *Si $\alpha, \beta \in \Delta(\boldsymbol{v})$, entonces $(\alpha, \beta) \leq 0$, a menos que $\alpha = \beta$.*

Tomemos $\alpha \neq \beta$ y supongamos que $(\alpha, \beta) > 0$, por la Proposición 2.6, $\alpha - \beta \in \Phi$ y como $\alpha \neq -\beta$, se concluye que $\alpha - \beta$, o bien $\beta - \alpha$, debe ser una raíz en $\Phi^+(\boldsymbol{v})$. Si $\alpha - \beta \in \Phi^+(\boldsymbol{v})$, entonces $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ lo que hace a α descomponible. Análogamente, si $\beta - \alpha \in \Phi^+(\boldsymbol{v})$, tendremos que β es descomponible. De cualquier modo, llegamos a una contradicción con la elección de α y β.

(3) $\Delta(\boldsymbol{v})$ *es linealmente independiente.*

Supongamos que $\sum_{\alpha\in\Delta(\boldsymbol{v})} r_\alpha \alpha = \mathbf{0}$; separemos los índices para los que $r_\alpha \geq 0$ (denotémoslos s_α) y los que $r_\alpha < 0$ (denotémoslos $-t_\beta$). De esta manera tendremos $\sum_\alpha s_\alpha \alpha - \sum_\beta t_\beta \beta = \mathbf{0}$, es decir, $\sum_\alpha s_\alpha \alpha = \sum_\beta t_\beta \beta$. Sea $\boldsymbol{w} = \sum_\alpha s_\alpha \alpha$, entonces

$$0 \leq (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \left(\sum_\alpha s_\alpha \alpha, \sum_\beta t_\beta \beta \right) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0,$$

donde la última desigualdad se tiene por el paso (2) y $s_\alpha, t_\beta \geq 0$. Podemos inferir ahora que $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ y $0 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_\alpha s_\alpha (\boldsymbol{v}, \alpha)$, lo que implica que $s_\alpha = 0$. Similarmente, tenemos que $t_\beta = 0$ y así, todos los r_α son cero.

(4) $\Delta(\boldsymbol{v})$ *es una base para* Φ.

El paso (1) nos dice que $\Delta(\boldsymbol{v})$ genera a $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ y como $\boldsymbol{v}$ es regular, tenemos que $\Phi = \Phi^+(\boldsymbol{v}) \cup [-\Phi^+(\boldsymbol{v})]$. Así, $\Delta(\boldsymbol{v})$ satisface la condición (B2). Se sigue que $\Delta(\boldsymbol{v})$ genera a todo $\mathbf{E}$, pues Φ lo hace, y por el paso (3) tenemos que $\Delta(\boldsymbol{v})$ satisface la condición (B1).

(5) *Cada base* Δ *de* Φ *es de la forma* $\Delta(\boldsymbol{v})$ *para algún* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ *regular.*

Dada una base Δ, escojamos $\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}$ tal que $(\boldsymbol{v}, \alpha) > 0$ para todo α simple, lo que siempre es posible (tomese la suma de todos los elementos de la base). Si $\beta \in \Phi$ escribimos $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} b_\alpha \alpha$, donde b_α son todos no negativos o todos no positivos pero no todos son cero, lo que impide que se anule el número

$$(\boldsymbol{v}, \beta) = \sum_\alpha b_\alpha (\boldsymbol{v}, \alpha).$$

Así, para todo $\alpha \in \Phi$ el vector $\boldsymbol{v}$ no está en $\mathbf{P}_\alpha$, y se concluye que $\boldsymbol{v}$ es regular. Ahora, si $\beta \in \Phi^+$, entonces $\beta = \sum_\alpha b_\alpha \alpha$ con $b_\alpha \geq 0$ y por la forma en que elegimos $\boldsymbol{v}$, se tiene que

$$(\boldsymbol{v}, \beta) = \sum_\alpha b_\alpha (\boldsymbol{v}, \alpha) \geq 0,$$

de lo cual inferimos la conteción $\Phi^+ \subset \Phi^+(\boldsymbol{v})$ y también $\Phi^- = -\Phi^+ \subset -\Phi^+(\boldsymbol{v})$. Por la elección de $\boldsymbol{v}$, se sigue la igualdad. Como $\Phi^+ = \Phi^+(\boldsymbol{v})$, Δ debe de consistir únicamente de elementos indescomponibles, en otras palabras, tenemos que $\Delta \subset \Delta(\boldsymbol{v})$. Pero $|\Delta| = |\Delta(\boldsymbol{v})|$, pues ambos conjuntos son bases de $\mathbf{E}$, y se tiene entonces que $\Delta = \Delta(\boldsymbol{v})$.

□

El siguiente resultado serà de utilidad en la siguiente subsección.

Corolario 2.13. *Un subconjunto finito* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ *de un espacio euclidiano* $\mathbf{E}$ *que satisface* $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \leq 0$ *para todo* $i \neq j$ *es un subconjunto linealmente independiente.*

Demostración. Este resultado es lo que se muestra en el paso (3) de la demostración del Lema 2.12. □

Ejemplo 2.2.7. *Consideremos el sistema de raíces* B_2 *y sea* $\boldsymbol{v} = (1, 2)$.

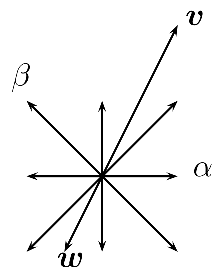


Figura 2.11: La base $\Delta(\boldsymbol{v}) = \{\alpha, \beta\}$ para B_2.

Claramente, $\boldsymbol{v}$ *es un vector regular con respecto a* B_2 *y las raíces en* $\Phi^+(\boldsymbol{v})$ *son* $(1,0), (1,1), (0,1)$ *y* $(-1,1)$. *Si* $\alpha = (1,0)$ *y* $\beta = (-1,1)$, *podemos verificar mediante un cálculo rutinario las relaciones*

$$(0,1) = \beta + \alpha, \quad (1,1) = (0,1) + \alpha,$$

por lo que $\Delta(\boldsymbol{v}) = \{\alpha, \beta\}$. *Ahora, si* $\boldsymbol{w} = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ *es claro que también es un vector regular para* B_2 *y el conjunto*

$$\Phi^+(\boldsymbol{w}) = \{(-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1)\}.$$

Así, la base que se obtiene es $\Delta(\boldsymbol{w}) = \{-\alpha, -\beta\}$.

Propiedades de las raíces simples

En esta subsección estudiaremos un poco sobre el comportamiento de las raíces que forman una base de un sistema de raíces. Primero que nada, daremos la siguiente definición.

Definición 2.10. *Sea Δ una base de Φ. Diremos que α es una raíz* **simple** *de Φ con respecto a Δ si $\alpha \in \Delta$.*

En esta sección, dejaremos fija una base Δ de un sistema de raíces Φ y al decir raíz simple significará raíz simple con respecto a esta base. Comenzaremos con dos resultados algebraicos que usaremos más adelante.

Proposición 2.14. *Si α es una raíz positiva pero no es simple, entonces $\alpha - \beta$ es una raíz, necesariamente positiva, para alguna raíz simple β.*

Demostración. Si $(\alpha, \beta) \leq 0$ para todo $\beta \in \Delta$, podemos aplicar el Corolario 2.13 al conjunto $\Delta \cup \{\alpha\}$ y concluir que es un conjunto linealmente independiente, lo que es absurdo ya que Δ es una base de $\mathbf{E}$. Así, existe $\beta \in \Delta$ tal que $(\alpha, \beta) > 0$; como $\beta \in \Delta$ y $\alpha \notin \Delta$, es claro que $\beta \neq \alpha$ y si $\alpha = -\beta$ tendríamos que $(\alpha, \beta) < 0$. Por tanto, α y β no son proporcionales y aplicamos la Proposición 2.6 para obtener $\alpha - \beta \in \Phi$.

Escribamos $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, donde $k_\gamma \geq 0$ y algún $k_\delta > 0$ con $\delta \neq \beta$, lo que es posible pues $\alpha \neq \beta$. Restando β a α tenemos una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de raíces simples con al menos un coeficiente positivo, a saber, k_δ. Esto forza a que todos los coeficientes de la representación de $\alpha - \beta$ en terminos de raíces simples sean no negativos. $\square$

Ejemplo 2.2.8. *En el sistema A_2 con la base*

$$\Delta = \left\{ \alpha = (1,0), \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

se tiene la raíz positiva $\gamma = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Es evidente que γ puede escribirse como $\alpha + \beta$ de donde se concluye que γ no es simple ya que $\operatorname{alt}(\gamma) = 2 \neq 1$. En este caso, tanto el vector $\gamma - \alpha = \beta$ como $\gamma - \beta = \alpha$ son raíces positivas con respecto a Δ.

Corolario 2.15. *Cada raíz positiva β puede ser escrita en la forma $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, con $\alpha_i \in \Delta$ no necesariamente distintos, de tal manera que cada suma parcial $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ es una raíz, con $1 \leq s \leq k$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\mathrm{alt}(\beta)$. Cuando $\mathrm{alt}(\beta) = 1$, se tiene que β es simple y se sigue la conclusión del corolario. Supongamos que toda raíz positiva de altura menor que k cumple la conclusión del corolario y tomemos una raíz $\beta \in \Phi^+$ de altura $k > 1$. Claramente β no es simple. Por la Proposición 2.14, existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\beta - \gamma \in \Phi^+$ y evidentemente $\mathrm{alt}(\beta - \gamma) = k - 1$. Por hipótesis inductiva, tenemos que

$$\beta - \gamma = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i,$$

donde cada raíz α_i es simple y cada suma parcial es raíz. Si hacemos $\alpha_k = \gamma$, se tiene el resultado. $\square$

Ahora, veremos algunos resultados geométricos relacionados con las reflexiones determinadas por los hiperplanos ortogonales a las raíces simples.

Proposición 2.16. *Sea α una raíz simple y $\mathcal{R}_\alpha$ la reflexión determinada por el hiperplano ortogonal a α, entonces $\mathcal{R}_\alpha$ permuta las raíces positivas diferentes de α.*

Demostración. Sea β una raíz positiva diferente de α y escribamos

$$\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma,$$

con k_γ enteros no negativos. Es claro que β no es proporcional a α, pues $-\alpha \in \Phi^-$, así, $k_\delta \neq 0$ para algún $\delta \neq \alpha$. Nótese que el coeficiente de δ en $\mathcal{R}_\alpha(\beta)$ sigue siendo $k_\delta > 0$ y forzosamente se tiene $\mathcal{R}_\alpha(\beta) \in \Phi^+$. Más aún, $\mathcal{R}_\alpha(\beta) \neq \alpha$ pues la imagen de α bajo $\mathcal{R}_\alpha$ es $-\alpha$. $\square$

Corolario 2.17. *Si $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \succ 0} \beta$, entonces $\mathcal{R}_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ para toda $\alpha \in \Delta$.*

Demostración. Por linealidad de las reflexiones,

$$\mathcal{R}_\alpha(\delta) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \succ 0} \mathcal{R}_\alpha(\beta).$$

Supongamos que hay s raíces positivas, es decir, $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha\}$. Por la Proposición 2.16, sabemos que para $i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ existe un j en el mismo conjunto de índices tal que $\mathcal{R}_\alpha(\beta_i) = \beta_j$; además, es claro que $\mathcal{R}_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\alpha(\delta) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s-1}\beta_i - \alpha\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s-1}\beta_i - \alpha + \alpha - \alpha\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta \succ 0}\beta - 2\alpha\right)\\ &= \delta - \alpha.\end{aligned}$$

Note también que esto implica la igualdad $|\delta, \alpha| = 1$ para toda $\alpha \in \Delta$. $\square$

Proposición 2.18. *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$, no necesariamente distintas, y escribamos $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{\alpha_i}$. Si $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t)$ es negativa, entonces*

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_t = \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1},$$

para algún índice $1 \leq s < t$.

Demostración. Escribamos $\beta_i = \mathcal{R}_{i+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t)$, para $0 \leq i \leq t-2$ y $\beta_{t-1} = \alpha_t$. Como β_0 es negativo y β_{t-1} es positivo, podemos encontrar el índice s más pequeño para el cual $\beta_s \succ 0$, entonces $\mathcal{R}_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$ y por la Proposición 2.16, $\beta_s = \alpha_s$. Tenemos que $\mathcal{R}_{\beta_s} = \mathcal{R}_{\mathcal{R}_{s+1}\circ\cdots\circ\mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t)}$ y por la Proposición 2.2,

$$\mathcal{R}_s = (\mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}) \circ \mathcal{R}_t \circ (\mathcal{R}_{t-1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s+1}).$$

Ahora, vemos que

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ \mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1} \circ \mathcal{R}_t =\\ &\qquad \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ [(\mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}) \circ \mathcal{R}_t \circ (\mathcal{R}_{t-1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s+1})]\\ &\qquad \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1} \circ \mathcal{R}_t;\end{aligned}$$

como $\mathcal{R}_i^2 = id$, se tiene el resultado. $\square$

Corolario 2.19. *Si $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_t$ es una expresión en términos de reflexiones correspondientes a raíces simples para $\mathcal{S}$, con t tan pequeño como sea posible, entonces $\mathcal{S}(\alpha_t) \prec 0$.*

2.3 Cámaras de Weyl y el grupo de Weyl

En esta sección, presentamos dos conceptos que nos auxiliarán en el estudio de los sistemas de raíces. Los conceptos presentados aquí lleban el nombre de uno de los matemáticos que mas contribuyeron a la simplificación del trabajo de Killing y Cartan.

Cámaras de Weyl

En esta subsección, estudiaremos algunos subconjuntos que se relacionan naturalmente con los conceptos de vectores regulares e hiperplanos ortogonales a las raíces de un sistema de raíces. Primero, recordaremos un poco de Topología.

El espacio euclidiano $\mathbf{E}$ posee una estructura topológica inducida por el producto interior. La topología de $\mathbf{E}$ es la confomada por los conjuntos que pueden ser escritos como uniones de conjuntos de la forma

$$\{\boldsymbol{w} \in \mathbf{E} : \langle \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \rangle^{1/2} < r\},$$

para algun vector $\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}$ y un número positivo r. A cada subconjunto de $\mathbf{E}$, se le puede dotar de la topología relativa, es decir, si $\mathbf{A}$ es un subconjunto de $\mathbf{E}$, entonces los abiertos de $\mathbf{A}$ serán abiertos de $\mathbf{E}$ intersectados con $\mathbf{A}$. También, es importante dar la siguiente definición.

Definición 2.11. *Un subconjunto* $\mathbf{A}$ *de el espacio euclidiano* $\mathbf{E}$ *es llamado un conjunto* **conexo** *si es imposible expresarlo como la unión disjunta de dos subconjuntos abiertos y no vacíos de* $\mathbf{E}$.

Los hiperplanos $\mathbf{P}_\alpha$, con $\alpha \in \Phi$, parten al espacio en un número finito de regiones, las cuales estudiaremos a continuación.

Definición 2.12. *Sea* Φ *un sistema de raíces en* $\mathbf{E}$. *Una* **cámara de Weyl** *(abierta) de* Φ *es un subconjunto abierto y conexo maximal del espacio* $\mathbf{E} - \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathbf{P}_\alpha$, *donde* $\mathbf{E} - \bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} \mathbf{P}_\alpha$ *se concidera con la topología relativa de* $\mathbf{E}$.

Si un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}$ pertenece a una cámara de Weyl de Φ, denotaremos a tal cámara de Weyl por el símbolo $\mathfrak{C}(\boldsymbol{v})$.

Nótese que la union disjunta de las cámaras de Weyl y los hiperplanos ortogonales a las raíces cubren a todo el espacio $\mathbf{E}$. Además, los vectores en las cámaras de Weyl son regulares y cada vector regular está en alguna camara de Weyl.

Ejemplo 2.3.1. *Considere el sistema de raíces A_2. En la siguiente figura, se muestran las regiones de $\mathbb{R}^2$ que conforman las cámaras de Weyl de A_2 y observan dos vectores regulares, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, en sus correspondientes cámaras de Weyl $\mathfrak{C}(\boldsymbol{v})$ y $\mathfrak{C}(\boldsymbol{w})$, respectivamente.*

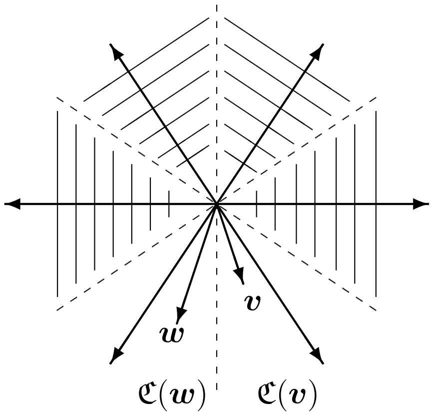


Figura 2.12: Cámaras de Weyl en A_2.

El siguiente resultado, nos muestra la relación tan estrecha que hay entre las cámaras de Weyl de un sistema de raíces y las bases de tal sistema.

Teorema 2.20. *Existe una correspondencia uno-a-uno entre las cámaras de Weyl de un sistema de raíces Φ y sus bases.*

Demostración. Si $\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}) = \mathfrak{C}(\boldsymbol{w})$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ están del mismo lado de cada hiperplano $\mathbf{P}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Phi$. Esto implica que los números $\langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle$ y $\langle \boldsymbol{w}, \alpha \rangle$ tienen el mismo signo para toda raíz $\alpha \in \Phi$, es decir, $\Phi^+(\boldsymbol{v}) = \Phi^+(\boldsymbol{w})$. Ahora es claro que $\Delta(\boldsymbol{v}) = \Delta(\boldsymbol{w})$. $\square$

Por el algoritmo presentado en el Lema 2.12, sabemos que cada vector regular $\boldsymbol{v}$ con respecto a Φ determina una base $\Delta(\boldsymbol{v})$ del sistema de raíces Φ. Ahora, daremos la definición de una cámara de Weyl importante que tendrá asociada una base del sistema de raíces.

Definición 2.13. *Sean Φ un sistema de raíces en $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{v}$ un vector regular para Φ y $\Delta(\boldsymbol{v})$ la base de Φ que se construye en el Lema 2.12. La* **cámara fundamental** *de Weyl para Φ con respecto a $\Delta(\boldsymbol{v})$ es la cámara $\mathfrak{C}(\boldsymbol{v})$ y se denotará por el símbolo $\mathfrak{C}(\Delta)$.*

Podemos describir $\mathfrak{C}(\Delta)$ como el conjunto convexo abierto que consiste de todos los vectores $\boldsymbol{w} \in \mathbf{E}$ que satisfacen $(\boldsymbol{w}, \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Ejemplo 2.3.2. *Consideremos el sistema de raíces B_2 con la base $\Delta((1,2)) = \{\alpha = (1,0), \beta = (-1,1)\}$ construida en el ejemplo 2.2.7. Claramente, la cámara fundamental de B_2 con respecto a esta base es*

$$\mathfrak{C}(\Delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, x < y\},$$

como se muestra en la siguiente figura:

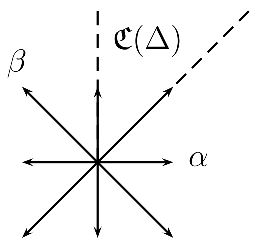


Figura 2.13: Sistema de rango 2 con 8 raíces.

Nota. Si consideramos a $\mathbf{E} - \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathbf{P}_\alpha$ como espacio topológico y definimos la relación de equivalencia

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w} \text{ si y sólo si } (\boldsymbol{v}, \alpha)(\boldsymbol{w}, \alpha) > 0 \text{ para todo } \alpha \in \Phi,$$

entonces las cámaras de Weyl son los elementos del espacio cociente, es decir, $\left[\left(\mathbf{E} - \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathbf{P}_\alpha\right) / \sim\right] = \{\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \text{ es regular con respecto a } \Phi\}$.

El grupo de Weyl

A cada sistema de raíces Φ en el espacio euclidiano $\mathbf{E}$, le asociaremos un grupo, cuya acción en el sistema de raíces será de mucha ayuda en el tratamiento de los sistemas irreducibles.

Definición 2.14. *Sea Φ un sistema de raíces en un espacio euclidiano $\mathbf{E}$. El* **grupo de Weyl** *de Φ es el subgrupo de $GL(\mathbf{E})$ generado por las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, llamadas* **reflexiones de Weyl**, *donde $\alpha \in \Phi$, y es denotado por $\mathscr{W}$.*

Por el axioma (R1), sabemos que Φ es un conjunto finito y genera a $\mathbf{E}$, por lo que $\mathscr{W}$ es un grupo finito.

Por el axioma (R3), cada elemento del grupo de Weyl deja invariante a Φ, y por la invertibilidad de los elementos del grupo de Weyl, se tiene que $\mathscr{W}$ permuta al conjunto Φ, es decir, se identifica con un subgrupo de permutaciones en Φ.

Como cada elemento de $\mathscr{W}$ es un producto de reflexiones de Weyl, y cada reflexión de Weyl es una isometría de $\mathbf{E}$, se sigue que los elementos del grupo de Weyl son isometrías de $\mathbf{E}$. En particular, los elementos del grupo de Weyl preservan los números $|\gamma, \delta|$ para cualesquier pareja de raíces $\gamma, \delta \in \Phi$. A continuación, presentaremos los grupos de Weyl para los sistemas de raíces de rango 2 y podremos darnos cuenta de que no son grupos desconocidos, en estos casos.

Ejemplo 2.3.3. *Considere el sistema de raíces $A_1 \times A_1$. Las reflexiones de Weyl están representadas por las matrices*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

las cuales conmutan, son de orden 2 (involuciones) y generan un grupo de orden 4. A éste grupo se le conoce con el nombre de **cuatro-grupo de Klein** *y es usualmente denotado por $\mathscr{V}$ (pues en alemán, cuatro-grupo se escribe vier-gruppe).*

Ejemplo 2.3.4. *En el sistema de raíces A_2 tomemos $\alpha = (1, 0)$ y $\beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Las matrices que representan a las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$ y $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta$ son*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se puede mostrar que las reflexiones de éstas dos matrices generan el grupo de Weyl de A_2. Sabemos que la matriz de $\mathcal{R}_\alpha$ es de orden 2 y se puede verificar que la matriz de $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta$ es de orden 3; además, podemos verificar mediante un cálculo matricial la relación

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

De la Teoría de Grupos, sabemos que éste es un grupo isomorfo al grupo **diedro de 6 elementos** *(grupo de simetrías del triangulo equilatero), que usualmente es denotado por $\mathscr{D}_3$.*

Ejemplo 2.3.5. *Para el sistema de raíces B_2, tomemos $\alpha = (1, 0)$ y $\beta = (-1, 1)$. El procedimiento para encontrar una presentación para el grupo de Weyl de B_2 será el mismo que en el ejemplo 2.3.4. El grupo de Weyl está generado por la reflexión $\mathcal{R}_\alpha$ y la rotación $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta$ que tiene como matriz representante a*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las relaciones que satisfacen éstos operadores son $\mathcal{R}_\alpha^2 = (\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta)^4 = id$ y $(\mathcal{R}_\alpha)(\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta)(\mathcal{R}_\alpha)^{-1} = (\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta)^{-1}$ por lo que el grupo de Weyl de B_2 es isomorfo al grupo **diedro de 8 elementos** *(el grupo de simetrías del cuadrado) que se denota usualmente por $\mathscr{D}_4$.*

Ejemplo 2.3.6. *Para el caso de G_2, tomemos $\alpha = (1, 0)$ (como antes) y $\gamma = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. El grupo de Weyl de G_2 está generado por la reflexión $\mathcal{R}_\alpha$ y la rotación $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\gamma$ que está representada por la matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

que satisfacen las relaciones $\mathcal{R}_\alpha^2 = (\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\gamma)^6 = id$ y $(\mathcal{R}_\alpha^2)(\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\gamma)(\mathcal{R}_\alpha)^{-1} = (\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\gamma)^{-1}$. Por tanto, el grupo de Weyl de G_2 es isomorfo al grupo **diedro de 12 elementos** *(el grupo de simetrías del hexágono) que usualmente se denota por $\mathscr{D}_6$.*

Sea $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ un isomorfismo entre los sistemas de raices Φ y Φ', por la Proposición 2.3 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "\mathcal{R}_\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{E} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbf{E}' \arrow[r, "\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}"'] & \mathbf{E}' \end{tikzcd}$$

Así, para cada $\alpha \in \Phi$ se satisface la igualdad $\varphi\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi$, por lo que un isomorfismo de sistemas de raíces induce de manera natural un isomorfismo $\mathcal{S}' \mapsto \varphi\mathcal{S}\varphi^{-1}$ de los grupos de Weyl $\mathscr{W}$ y $\mathscr{W}'$.

También, por la Proposición 2.2, un automorfismo de Φ es lo mismo que un automorfismo de $\mathbf{E}$ que deja invariante a Φ. En particular, podemos considerar a $\mathscr{W}$ como subgrupo normal de $\operatorname{Aut}\Phi$ (grupo de automorfismos de Φ).

El siguiente resultado, muestra cómo actúa el grupo de Weyl en las cámaras de Weyl.

Proposición 2.21. *Si* $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$*, entonces* $\mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v})) = \mathfrak{C}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}))$*, es decir, el grupo de Weyl manda a una cámara de Weyl sobre otra.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}))$ no está contenido en $\mathbf{E} - \bigcup_{\alpha\in\Phi}\mathbf{P}_\alpha$, entonces existe $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{C}(\boldsymbol{v})$ con $\mathcal{S}(\boldsymbol{w}) \in \bigcup_{\alpha\in\Phi}\mathbf{P}_\alpha$ y así, existe $\alpha_0 \in \Phi$ tal que $0 = (\mathcal{S}(\boldsymbol{w}), \alpha_0) = (\boldsymbol{w}, \mathcal{S}^{-1}(\alpha_0))$. Por tanto, $\boldsymbol{w}$ es ortogonal a la raíz $\mathcal{S}^{-1}(\alpha_0)$, lo que es imposible. Se concluye ahora que $\mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v})) \subset \mathbf{E} - \bigcup_{\alpha\in\Phi}\mathbf{P}_\alpha$.

Claramente, $\mathfrak{C}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}))$ es una cámara de Weyl y cualqueir $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}))$ se caracteriza por satisfacer la ecuación $(\boldsymbol{w}, \alpha)(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \alpha) > 0$ para toda $\alpha \in \Phi$. Así, tenemos que probar que $\mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}))$ es abierto, conexo y contiene a $\mathfrak{C}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}))$.

Para probar que $\mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}))$ es un conjunto abierto y conexo, recordemos que la imagen continua de un conjunto conexo es conexo y como todos los elementos del grupo de Weyl son funciones continuas, se tiene que $\mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}))$ es conexo. Luego, se puede demostrar sin complicaciones que las reflexiones transforman conjuntos abiertos en abiertos, de hecho, la imagen del conjunto $\{\boldsymbol{w} \in \mathbf{E} : \langle \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\rangle^{1/2} < r\}$ bajo una reflexión $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{\boldsymbol{w} \in \mathbf{E} : \langle(\mathcal{R}\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}, \mathcal{R}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}\rangle^{1/2} < r\}$.

Para probar $\mathfrak{C}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v})) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}))$, sea $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}))$ y $\alpha \in \Phi$, entonces $(\mathcal{S}^{-1}(\boldsymbol{w}), \alpha) = (\boldsymbol{w}, \mathcal{S}(\alpha))$ y así

$$(\mathcal{S}^{-1}(\boldsymbol{w}), \alpha)(\boldsymbol{v}, \alpha) = (\boldsymbol{w}, \mathcal{S}(\alpha))(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \mathcal{S}(\alpha)) > 0,$$

por lo que $\mathcal{S}^{-1}(\boldsymbol{w}) \in \mathfrak{C}(\boldsymbol{v})$, pero esto sucede si y sólo si $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{v}))$, que es lo que deseamos. □

Por otro lado, $\mathscr{W}$ permuta las bases de Φ: $\mathcal{S}$ manda a Δ sobre $\mathcal{S}(\Delta)$ que es una base pues $\mathscr{W}$ deja invariante a Φ y consiste de operadores lineales invertibles que preservan el producto interior.

La manera en que actúa el grupo de Weyl de un sistema de raíces Φ en sus cámaras de Weyl y en sus bases son compatibles con la correspondencia mencionada anteriormente entre cámaras de Weyl y bases en el Teorema 2.20. Explicitamente, tenemos $\mathcal{S}(\Delta(\boldsymbol{v})) = \Delta(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}))$, ya que $(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \mathcal{S}(\alpha)) = (\boldsymbol{v}, \alpha)$.

En el siguiente resultado, se presentan algunas de las propiedades importantes del grupo de Weyl.

Teorema 2.22. *Sea Δ una base de Φ.*

(a) *Si $\boldsymbol{v}$ es regular, existe $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$ tal que $(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \alpha) > 0$ para toda $\alpha \in \Delta$.*
($\mathscr{W}$ actúa transitivamente en las cámaras de Weyl).

(b) *Si Δ' es otra base de Φ, entonces $\mathcal{S}(\Delta') = \Delta$ para algún $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$.*
($\mathscr{W}$ actúa transitivamente en las bases).

(c) *Si $\alpha \in \Phi$, existe $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$ tal que $\mathcal{S}(\alpha) \in \Delta$.*
(Cada raíz pertenece a alguna base).

(d) *$\mathscr{W}$ está generado por las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, con $\alpha \in \Delta$, las cuales son llamadas* **reflexiones simples**.

(e) *Si $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$ tal que $\mathcal{S}(\Delta) = \Delta$, entonces $\mathcal{S} = 1$.*
($\mathscr{W}$ actúa simplemente transitivamente en las bases).

Demostración. Sea $\mathscr{W}'$ el subgrupo de $\mathscr{W}$ generado por las reflexiones simples. Probaremos (a)-(c) para $\mathscr{W}'$ y luego probaremos que $\mathscr{W} = \mathscr{W}'$.

(a) Escribamos $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$ y escojamos $\mathcal{S} \in \mathscr{W}'$ para el cual $(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \delta)$ sea tan grande como sea posible. Si $\alpha \in \Delta$, entonces $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{S} \in \mathscr{W}'$ así que la elección de $\mathcal{S}$ implica que

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \delta) &\geq (\mathcal{R}_\alpha \mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \delta)\\ &= (\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \mathcal{R}_\alpha(\delta))\\ &= (\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \delta - \alpha) \quad \text{por el Corolario 2.17}\\ &= (\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \delta) - (\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \alpha).\end{aligned}$$

Esto fuerza a que $(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}), \alpha) \geq 0$ para toda $\alpha \in \Delta$. Como $\boldsymbol{v}$ es regular, $(\mathcal{R}(\boldsymbol{v}), \alpha) > 0$ para toda raíz simple α. Por tanto, $\mathcal{S}(\boldsymbol{v})$ está en la cámara fundamental de Weyl y $\mathcal{S}$ manda a $\mathfrak{C}(\boldsymbol{v})$ en $\mathfrak{C}(\Delta)$.

(b) Como $\mathscr{W}'$ permuta las cámaras de Weyl, también lo hace con las bases.

(c) Por (b), es suficiente probar que cada raíz pertenece a alguna base. Como las únicas raíces proporcionales a α son $\pm\alpha$, los hiperplanos $\mathbf{P}_\beta$ son distintos a $\mathbf{P}_\alpha$, cuando $\beta \neq \pm\alpha$. Así, existe $\boldsymbol{v} \in \mathbf{P}_\alpha$ tal que $\boldsymbol{v} \notin \mathbf{P}_\beta$ para toda $\beta \neq \pm\alpha$; escojamos $\boldsymbol{w}$ suficientemente cerca de $\boldsymbol{v}$ tal que $(\boldsymbol{w}, \alpha) = c > 0$ mientras que $|(\boldsymbol{w}, \beta)| > c$ para toda $\beta \neq \pm\alpha$. Evidentemente, $\alpha \in \Delta(\boldsymbol{w})$.

(d) Para mostrar que $\mathscr{W} = \mathscr{W}'$, es suficiente ver que cada reflexión de Weyl esta en $\mathscr{W}'$. Usando (c), para $\alpha \in \Phi$ existe $\mathcal{S} \in \mathscr{W}'$ tal que $\beta = \mathcal{S}(\alpha) \in \Delta$, entonces $\mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_{\mathcal{S}(\alpha)} = \mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{S}^{-1}$, por la Proposición 2.2. Por tanto, $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}_\beta\mathcal{S} \in \mathscr{W}'$.

(e) Supongamos que $\mathcal{S}(\Delta) = \Delta$ y $\mathcal{S} \neq 1$. Si $\mathcal{S}$ se escribe minimalmente como un producto de una o más reflexiones simples, entonces se contradice el Corolario 2.19.

□

Ejemplo 2.3.7. *En el sistema de rapices A_2 con la base*

$$\Delta = \left\{\alpha = (1,0), \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\},$$

considere la cámara de Weyl $\mathfrak{C}(\beta)$. Es claro que la relfexión $\mathcal{R}_\alpha$ transforma a $\mathfrak{C}(\beta)$ en la cámara fundamental $\mathfrak{C}(\Delta)$ ya que $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ y sabemos que $\langle \alpha + \beta, \alpha\rangle$ y $\langle \alpha + \beta, \beta\rangle$ son positivos.

Por el inciso (d) del Teorema 2.22, podemos escribir a cada elemento $\mathcal{S}$ del grupo de Weyl $\mathscr{W}$ de Φ como $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t}$, con $\alpha_i \in \Delta$ y t minimal. Esto nos determina la siguiente descomposición de los elementos del grupo de Weyl como producto de reflexiones simples.

Definición 2.15. *Sea Φ un sistema de raíces en $\mathbf{E}$ con base Δ y grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Si $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$ se escribe como $\mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t}$, con $\alpha_i \in \Delta$ y t minimal, diremos que $\mathcal{S}$ está en su expresión* **reducida** *y definimos la* **longitud** *de $\mathcal{S}$ relativa a Δ como $t = l(\mathcal{S})$. Por definición, $l(id) = 0$.*

Ejemplo 2.3.8. *En el sistema de raíces B_2 con base*

$$\Delta = \{\alpha = (1,0), \beta = (-1,1)\},$$

consideremos la reflexión $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$. Al aplicar $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ a las raíces simples α y β se obtienen las relaciones

$$\mathcal{R}_{\alpha+\beta}(\alpha) = \alpha \quad y \quad \mathcal{R}_{\alpha+\beta}(\beta) = -\beta - 2\alpha.$$

Realizando un cálculo elemental, podemos verificar que $\mathcal{R}_\beta \circ \mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{R}_\beta$ aplica del mismo modo que $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ en las rapices simples y así, $\mathcal{R}_{\alpha+\beta} = \mathcal{R}_\beta \circ \mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{R}_\beta$. Además, ésta es la expresión reducida para $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$, pues $\mathcal{R}_{\alpha+\beta} \neq \mathcal{R}_\beta$ y $\mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{R}_\beta$ no es una reflexión. Por tanto, $l(\mathcal{R}_{\alpha+\beta}) = 3$.

Podemos caracterizar la longitud de un operador en el grupo de Weyl como sigue: Sea $n(\mathcal{S})$ el número de raíces positivas α para las cuales $\mathcal{S}(\alpha) \prec 0$.

Proposición 2.23. *Sea Φ un sistema de raíces en $\mathbf{E}$ con base Δ y grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Si $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$, entonces $l(\mathcal{S}) = n(\mathcal{S})$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{S})$. El caso $l(\mathcal{S}) = 0$ es claro; supongamos que la proposición se cumple para todo $\mathcal{T} \in \mathscr{W}$ con longitud menor que la longitud de $\mathcal{S}$. Escribamos a $\mathcal{S}$ en su expresión reducida $\prod_{i=1}^{t} \mathcal{R}_{\alpha_i}$ y sea $\alpha = \alpha_t$. Por el Corolario 2.19, $\mathcal{S}(\alpha) \prec 0$ y la Proposición 2.16 implica que $n(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha) = n(\mathcal{S}) - 1$. Por otro lado, $l(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha) = l(\mathcal{S}) - 1$ y por hipótesis inductiva se tiene que $l(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha) = n(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha)$. Por tanto, $l(\mathcal{S}) = n(\mathcal{S})$. $\square$

Ejemplo 2.3.9. *En el ejemplo 2.3.8, podemos verificar que la longitud de $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ es 3 usando la Proposición 2.23. Se puede ver que $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ transforma a las raíces $\beta, \beta+\alpha$ y $\beta + 2\alpha$ en las raíces $-\beta-2\alpha, -\beta-\alpha$ y $-\beta$, respectivamente; además, $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ deja fija a la raíz positiva α. Por tanto, $n(\mathcal{R}_{\alpha+\beta}) = 3$.*

Sea Φ un sistema de raíces con una base fija Δ. Recordemos que la cámara fundamental de Weyl con respecto a Δ es la cámara $\mathfrak{C}(\Delta)$ que contiene a todos los vectores $\boldsymbol{v}$ que satisfacen $\langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle > 0$ para toda raíz simple α. Concluimos esta subsección con un resultado que nos dice cómo actúa el grupo de Weyl en la cerradura de $\mathfrak{C}(\Delta)$, que denotaremos por $\operatorname{cl}\mathfrak{C}(\Delta)$.

Proposición 2.24. *Sean Φ un sistema de raíces con base Δ, grupo de Weyl $\mathscr{W}$ y $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \operatorname{cl}\mathfrak{C}(\Delta)$. Si $\mathcal{S}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$ para algún $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$, entonces $\mathcal{S}$ es un producto de reflexiones simples que fijan a $\boldsymbol{u}$; en particular $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$.*

Demostración. Procederemos por inducción en $l(\mathcal{S})$. El caso $l(\mathcal{S}) = 0$ es claro; sea $l(\mathcal{S}) > 0$, por la Proposición 2.23, $\mathcal{S}$ debe mandar alguna raíz positiva en una negativa. Así, $\mathcal{S}$ no puede mandar todas las raíces simples a positivas. Supongamos que $\mathcal{S}(\alpha) \prec 0$ para algún $\alpha \in \Delta$, entonces

$$0 \leq (\boldsymbol{u}, \alpha) = (\mathcal{S}^{-1}(\boldsymbol{w}), \alpha) = (\boldsymbol{w}, \mathcal{S}(\alpha)) \leq 0$$

porque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \operatorname{cl}\mathfrak{C}(\Delta)$. Por tanto $(\boldsymbol{u}, \alpha) = 0$, lo que implica $\mathcal{R}_\alpha(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ y $\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$. Gracias a las Proposiciones 2.16 y 2.23, $l(\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha) = l(\mathcal{S}) - 1$ y por hipótesis inductiva, $\mathcal{S}\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\beta_1} \circ \mathcal{R}_{\beta_2} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\beta_{t-1}}$, donde $\mathcal{R}_{\beta_i}$ son reflexiones simples que fijan a $\boldsymbol{u}$. Multiplicando ambos lados por $\mathcal{R}_\alpha$, se tiene el resultado. $\square$

Capítulo 3

Clasificación de sistemas de raíces irreducibles

En este capítulo, nos proponemos presentar el catálogo completo de los todos los sistemas de raíces que podemos tener en un espacio euclidiano de dimensión ℓ. Es claro que los sistemas en los que nos interesaremos deben ser escencialmente distintos y es por tal motivo que nos preocuparemos por estudiar las clases de isomorfismo de los sistemas de raíces.

La manera en que procederemos es simplificar el trabajo de clasificar los sistemas de raíces a clasificar sólo los sistemas de raíces irreducibles. Despúes, desarrollaremos herramientas como la matriz de Cartan de un sistema de raíces y el diagrama de Dynkin asociado al sistema de raíces que nos ayudan a describir las relaciones que satisfacen las raíces simples de los sistemas irreducibles. Luego, mostramos que tanto la matriz de Cartan como el diagrama de Dynkin caracterizan por completo al sistema de raíces irreducible al que pertenesen. Finalmente, se presenta el Teorema de Clasificación que determina cuales son los diferentes diagramas de Dynkin que podemos tener si un sistema de raíces resulta ser irreducible.

Como ha quedado de manifiesto en esta breve introducción al capítulo, el matemático Dynkin es uno de los que más aportaron a la solución de este problema.

3.1 Sistemas de raíces irreducibles

Aquí veremos que, en cierto sentido, los sistemas irreducibles generan a todos los sistemas de raíces.

Definición 3.1. *Sea Φ un sistema de raíces en un espacio euclidiano* $\mathbf{E}$. *Diremos que Φ es* **irreducible** *si no puede ser expresado como la union de dos subconjuntos Φ_1 y Φ_2 mutuamente ortogonales.*

Ejemplo 3.1.1. *El sistema de raíces $A_1 \times A_1$ no es un sistema irreducible, ya que $\Phi_1 = \{\pm(1,0)\}$ y $\Phi_2 = \{\pm(0,1)\}$ son subconjuntos mutuamente ortogonales de $A_1 \times A_1$ y se tiene que $A_1 \times A_1 = \Phi_1 \cup \Phi_2$.*

Si dos subconjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de un espacio euclidiano son mutuamente ortogonales, lo denotaremos por el símbolo $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = 0$.

Podemos verificar la irreducibilidad de un sistema de raíces Φ observando lo que ocurre con sus bases, como lo mostraremos en el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Un sistema de raíces Φ con base Δ es irreducible si y sólo si Δ no puede expresarse como la union de dos subconjuntos Δ_1 y Δ_2 tal que $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = 0$.*

Para la demostración, necesitamos de los siguientes lemas técnicos.

Lema 3.2. *Las reflexiones inducidas por vectores ortogonales son operadores que conmutan entre sí.*

Demostración. Recordando que si $\alpha \in \mathbf{P}_\beta$ y $\beta \in \mathbf{P}_\alpha$, tenemos que para cada $\gamma \in \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta(\gamma) &= \mathcal{R}_\alpha(\gamma - |\gamma, \beta|\beta) \\ &= \gamma - |\gamma, \alpha|\alpha - |\gamma, \beta|\beta \\ &= \mathcal{R}_\beta(\gamma - |\gamma, \alpha|\alpha) \\ &= \mathcal{R}_\beta \mathcal{R}_\alpha(\gamma). \end{aligned}$$

□

Lema 3.3. *Si* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta \in \mathbf{E}$, *entonces*

$$\left(\prod_{i=1}^{s} \mathcal{R}_{\alpha_i}\right)(\beta) = \beta + \sum_{i=1}^{s}(-1)^i \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le s} \left(|\beta, \alpha_{j_i}| \prod_{k=1}^{i-1} |\alpha_{j_{k+1}}, \alpha_{j_k}|\right) \alpha_{j_1}.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre s. Para $s = 1$ es claro pues $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta - |\beta, \alpha|\alpha$. Supongamos que el Lema es cierto para todo entero positivo menor que s, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{s} \mathcal{R}_{\alpha_i}\right)(\beta) &= \mathcal{R}_{\alpha_s}(\beta) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le s-1} \left(|\beta, \alpha_{j_i}| \prod_{k=1}^{i-1} |\alpha_{j_{k+1}}, \alpha_{j_k}|\right) \mathcal{R}_{\alpha_s}(\alpha_{j_1}) \\
&= \beta - |\beta, \alpha_s| + \\
&\quad \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le s-1} \left(|\beta, \alpha_{j_i}| \prod_{k=1}^{i-1} |\alpha_{j_{k+1}}, \alpha_{j_k}|\right) \alpha_{j_1} - \\
&\quad \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le s-1} \left(|\beta, \alpha_{j_i}| \prod_{k=1}^{i-1} |\alpha_{j_{k+1}}, \alpha_{j_k}|\right) |\alpha_{j_1}, \alpha_s|\alpha_s \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{s}(-1)^i \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le s} \left(|\beta, \alpha_{j_i}| \prod_{k=1}^{i-1} |\alpha_{j_{k+1}}, \alpha_{j_k}|\right) \alpha_{j_1}.
\end{aligned}$$

□

Demostración. (Teorema 3.1). ($\Rightarrow$) Supongamos que Φ es irreducible y $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ con $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = 0$. Sabemos, por el Teorema 2.22, que para cada raíz α existe $\mathcal{S}_\alpha$ en el grupo de Weyl tal que $\mathcal{S}_\alpha(\alpha) \in \Delta$. Así, podemos partir a Φ en dos conjuntos $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi : \mathcal{S}(\alpha) \in \Delta_i, \text{ para algún } \mathcal{S} \in \mathscr{W}\}$.

Aseguramos que cada raíz en Φ_p, con $p \in \{1, 2\}$, se obtiene de una raíz en Δ_p al sumar múltiplos enteros de raíces en Δ_p: en efecto, si $\beta \in \Phi_p$, existe $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$ tal que $\mathcal{S}(\beta) \in \Delta_p$; expresemos a $\mathcal{S}$ como producto de reflexiones simples, digamos $\prod_{i=1}^{t} \mathcal{R}_{\alpha_i}$. Por el Lema 3.2 podemos suponer que sólo las primeras s raíces α_i están en Δ_p, así,

$$\mathcal{S}(\beta) = \left(\prod_{i=1}^{s} \mathcal{R}_{\alpha_i} \prod_{j=s+1}^{t} \mathcal{R}_{\alpha_j}\right)(\beta) = \left(\prod_{j=s+1}^{t} \mathcal{R}_{\alpha_j} \prod_{i=1}^{s} \mathcal{R}_{\alpha_i}\right)(\beta), \quad (3.1)$$

donde la última igualdad se tiene por el Lema 3.2. Si $i \in \{s+1, \dots, t\}$, entonces todas las reflexiones $\mathcal{R}_{\alpha_i}$ dejan fija a $\mathcal{S}(\beta)$, pues es ortogonal a cada α_i.

Multiplicando por $\left(\prod_{j=s+1}^{t} \mathcal{R}_{\alpha_j}\right)^{-1}$ en ambos lados de (3.1), se tiene $\mathcal{S}(\beta) = \left(\prod_{i=1}^{s} \mathcal{R}_{\alpha_i}\right)(\beta)$ y por el Lema 3.3, si $\alpha_{j_i} \in \Delta_p$ se verifica que

$$\mathcal{S}(\beta) = \beta + \sum_{i=1}^{s} (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq s} \left(|\beta, \alpha_{j_i}| \prod_{k=1}^{i-1} |\alpha_{j_{k+1}}, \alpha_{j_k}| \right) \alpha_{j_1},$$

y por tanto, $\Phi_p \subset \operatorname{Span} \Delta_p$. En consecuencia, $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$ lo que fuerza a que uno de los dos conjuntos sea vacío ya que Φ no contiene al vector cero.

($\Leftarrow$) Si $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, con $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$, se debe de tener $\Delta \subset \Phi_1$ o bien $\Delta \subset \Phi_2$, pues Δ no se puede descomponer de tal manera. Si suponemos que $\Delta \subset \Phi_1$, entonces $\langle \Delta, \Phi_2 \rangle = 0$ y por tanto, $\langle \mathbf{E}, \Phi_2 \rangle = 0$. Esto implica que Φ_2 es vacío. Análogamente, si $\Delta \subset \Phi_2$, entonces Φ_1 es vacío. $\square$

El Teorema 3.1 es un buen criterio para determinar la irreducibilidad de un sistema de raíces, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.2. *El sistema A_2 es irreducible. En efecto, tomemos la base $\Delta = \left\{\alpha = (1,0), \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$. Claramente, $\langle \alpha, \beta \rangle = -1 \neq 0$ por lo que Δ no se puede descomponer como unión de dos subconjuntos no vacíos mutuamente ortogonales.*

El grupo de Weyl de un sistema irreducible

El grupo de Weyl actúa de una manera muy especial en los sistemas irreducibles como se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sean $\mathbf{E}$ un espacio euclidiano y Φ sistema de raíces en $\mathbf{E}$ con grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Suponga que Φ es irreducible. Si $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ es un subespacio de $\mathbf{E}$ invariante bajo $\mathscr{W}$, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{E}$. En particular, $\operatorname{Span}\{\mathcal{S}(\alpha) : \mathcal{S} \in \mathscr{W}\} = \mathbf{E}$ para cualquier raíz α. En este caso, diremos que $\mathscr{W}$ actúa* **irreduciblemente** *en $\mathbf{E}$.*

Para la demostración, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.5. *Si* $\mathbf{F}$ *es un subespacio de* $\mathbf{E}$*, invariante bajo la reflexión* $\mathcal{R}_\alpha$*, entonces* $\alpha \in \mathbf{F}$ *o bien* $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}_\alpha$*.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \notin \mathbf{F}$. Por hipótesis, $\mathcal{R}_\alpha(\boldsymbol{v}) \in \mathbf{F}$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbf{F}$. Si $\langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle \neq 0$, entonces existe $\boldsymbol{w} \in \mathbf{F}$ con $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle \alpha$ y así, $\alpha = \frac{1}{\langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \in \mathbf{F}$, lo que contradice la suposición $\alpha \notin \mathbf{F}$. Por tanto, $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a α. □

Demostración. (Proposición 3.4). Es claro que la segunda afirmación se sigue de la primera ya que $\mathrm{Span}\{\mathcal{S}(\alpha) : \mathcal{S} \in \mathscr{W}\}$ es un subespacio invariante bajo $\mathscr{W}$. Ahora, para mostrar la primera aseveración, sea $\mathbf{F}$ un subespacio, no nulo, invariante bajo $\mathscr{W}$, entonces $\mathbf{F}^\perp$ también es invariante y $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^\perp$. Por el Lema 3.5, $\alpha \in \mathbf{F}$ o bien $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}_\alpha$ para toda raíz α. Si $\alpha \notin \mathbf{F}$, entonces $\alpha \in \mathbf{F}^\perp$, así, cada raíz está en $\mathbf{F}$ o bien en $\mathbf{F}^\perp$. Esto parte a Φ en conjuntos mutuamente ortogonales, lo que fuerza a que uno de los dos conjuntos sea vacío. Se infiere que todas las raíces están en uno de los dos subespacios $\mathbf{F}$ o $\mathbf{F}^\perp$. Sin embargo, si $\Phi \subset \mathbf{F}^\perp$, entonces $\mathbf{F}^\perp = \mathbf{E}$ y $\langle \mathbf{F}, \mathbf{E} \rangle = 0$, lo que implica que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, que es contradictorio. Por tanto, $\Phi \subset \mathbf{F}$ y $\mathbf{F} = \mathbf{E}$. □

Ahora, veremos cuantas longitudes diferentes de las raíces de Φ hay cuando Φ es un sistema irreducible.

Proposición 3.6. *A lo más existen dos longitudes distintas de raíces. Además, todas las raíces de una longitud dada son conjugadas bajo* $\mathscr{W}$*.*

Demostración. Sean α y β dos raíces. Como $\mathscr{W}$ actúa irreduciblemente, no todas las raíces $\mathcal{S}(\alpha)$ son ortogonales a β, con $\mathcal{S} \in \mathscr{W}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que α no es ortogonal a β. Por la Tabla 2.1, sabemos que las posibles longitudes relativas posibles son 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$. Si existieran tres raíces con longitudes distintas, se tendría la razón $\frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3}$. Así. tenemos la primera aseveración. Ahora, si α y β tienen la misma longitud, podemos asumir que no son ortogonales, por el argumento del primer parrafo, y distintos, pues de lo contrario terminaría la prueba. Por la Tabla 2.1, tenemos $|\alpha, \beta| = |\beta, \alpha| = \pm 1$; si es necesario, reemplazamos β por $-\beta$ para tener $|\alpha, \beta| = |\beta, \alpha| = 1$. El resultado se sigue del cálculo $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta \mathcal{R}_\alpha(\beta) = \mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta(\beta - \alpha) = \mathcal{R}_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$. □

Definición 3.2. *En un sistema de raíces irreducible con dos longitudes distintas de raíces, a las raíces de longitud mayor les llamaremos* **raíces largas***, y a las otras* raíces cortas*. Si sólo hay una longitud de raíces, les llamaremos* **raíces largas** *a todas.*

La raíz maximal de un sistema irreducible

Ahora, veremos que en un sistema irreducible, existe un máximo para la altura de sus raíces. Para esto, fijemos un sistema de raíces irreducible Φ con base Δ y definamos un orden parcial relativo a tal base.

La base Δ define un orden parcial en $\mathbf{E}$, que resulta compatible con la notación $\alpha \prec 0$. Definase

$$\mu \prec \lambda \text{ si y sólo si } \lambda - \mu \text{ es una suma de raíces positivas o } \mu = \lambda.$$

Claramente, $\prec$ es un orden parcial.

- $\mu \prec \mu$ ya que $\mu = \mu$.
- Si $\mu \prec \lambda$ y $\lambda \prec \mu$, entonces tanto $\lambda - \mu$ como $\mu - \lambda$ se expresan como una suma de raíces positivas o $\mu = \lambda$, pero $\lambda - \mu = -(\mu - \lambda)$ por lo que es imposible que $\lambda - \mu$ y $\mu - \lambda$ se escriban como una suma de raíces positivas al mismo tiempo y se concluye que $\mu = \lambda$.
- Si $\mu \prec \lambda$ y $\lambda \prec \nu$, entonces tanto $\lambda - \mu$ como $\nu - \lambda$ se expresan como suma de raíces positivas o $\lambda = \mu$ y $\lambda = \nu$. Si $\lambda - \mu = \sum_{\alpha \succ 0} \alpha$ y $\nu - \lambda = \sum_{\beta \succ 0} \beta$, entonces $\sum_{\beta \succ 0} \beta + \sum_{\alpha \succ 0} \alpha = \nu - \lambda + \lambda - \mu = \nu - \mu$.

Proposición 3.7. *Relativo al orden parcial $\prec$ inducido por la base Δ, existe una única raíz maximal μ, es decir, si $\beta \neq \mu$, entonces* $\mathrm{alt}(\beta) < \mathrm{alt}(\mu)$. *Además, $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 0$ para $\alpha \in \Delta$.*

Demostración. La existencia de una raíz maximal en el orden $\prec$ se sigue del hecho de que Φ es finito. Para la unicidad, si μ' es otra raiz maximal, entonces existe al menos una raíz $\alpha \in \Delta$ en la expresión de μ' tal que $\langle \alpha, \mu \rangle > 0$ ya que de lo contrario, el conjunto $\Delta \cup \{\mu\}$ sería un conjunto linealmente independiente de $\mathbf{E}$ (ver Corolario 2.13), lo que es absurdo. Por lo tanto $\langle \mu', \mu \rangle > 0$ y la Proposición 2.6 implica que $\mu - \mu'$ es raíz, a menos que $\mu = \mu'$. Si $\mu - \mu'$ fuese positiva, entonces $\mu \succ \mu'$, lo que es absurdo; análogamente, si $\mu - \mu'$ fuese negativa. Se concluye así que $\mu - \mu'$ no puede ser raíz y $\mu = \mu'$. Finalmente, si $\langle \mu, \alpha \rangle < 0$ para alguna raíz simple α, entonces $\mu + \alpha \in \Phi$ por la Proposición 2.6 y así, μ no sería maximal. $\square$

Corolario 3.8. *Si escribimos $\mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, entonces $k_\alpha > 0$ para toda α simple.*

Demostración. Si $\mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ es maximal, es claro que es positiva. Definamos los siguientes conjuntos,

$$\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta : k_\alpha > 0\} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \{\alpha \in \Delta : k_\alpha = 0\},$$

entonces $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Supongamos que $\Delta_2 \neq \emptyset$, entonces $\langle \alpha, \mu \rangle \leq 0$ para toda $\alpha \in \Delta_2$ y como Φ es irreducible, existe una raíz en Δ_2, digamos α_0, que no es ortogonal a Δ_1. Así, existe $\alpha_1 \in \Delta_1$ con $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle < 0$. Por tanto, $\langle \alpha_0, \mu \rangle < 0$. Por la Proposición 2.6, $\mu + \alpha_0$ es una raíz y es claro que tiene altura mayor que la de μ. Por tanto, Δ_2 debe ser vacío. □

Ejemplo 3.1.3. *Considere el sistema de raíces G_2 con la base conformada por las raíces $\alpha = (1, 0)$ y $\beta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Como $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$, del Teorema 3.1 se concluye que G_2 es irreducible. Claramente, la raíz maximal de G_2 es la raíz $(0, \sqrt{3}) = 3\alpha + 2\beta$.*

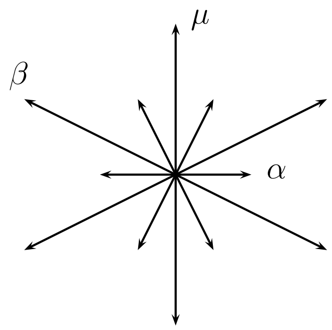


Figura 3.1: La raíz maximal en G_2.

Un resultado que se espera lógico es el siguiente.

Proposición 3.9. *En un sistema de raíces irreducible, la raíz maximal μ es una raíz larga.*

Demostración. Tomemos una raíz α y veamos que $\|\mu\| \geq \|\alpha\|$. Como la acción de $\mathscr{W}$ es transitiva en las cámaras de Weyl(Teorema 2.22), reemplazemos a α por un conjugado de él que esté en la cerradura de la cámara fundamental. Sabemos que $\mu - \alpha \succ 0$ y así, para todo $\boldsymbol{v} \in \operatorname{cl} \mathfrak{C}(\Delta)$ tenemos

$$(\boldsymbol{v}, \mu) - (\boldsymbol{v}, \alpha) = (\boldsymbol{v}, \mu - \alpha) \geq 0$$

con $\boldsymbol{v} = \mu$ y despues $\boldsymbol{v} = \alpha$ se tiene $(\mu, \mu) \geq (\mu, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$. □

3.2 Matriz de Cartan de un sistema de raíces

Ahora, veremos una de las herramientas que caracterizan a los sistemas de raíces y facilitan la presentación de las relaciones que satisfacen las raíces simples de un sistema de raíces.

Si tenemos dos bases $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell\}$ y $\Delta' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\ell\}$ de un sistema de raíces Φ, sabemos que existe un elemento $\mathcal{S}$ del grupo de Weyl de Φ tal que $\mathcal{S}(\alpha'_i) = \alpha_i$ para toda $1 \leq i \leq \ell$ (Teorema 2.22 inciso (b)). Como cada elemento del grupo de Weyl es una isometría de $\mathbf{E}$, se tiene que $|\alpha_i, \alpha_j| = |\mathcal{S}(\alpha'_i), \mathcal{S}(\alpha'_j)|$.

Definición 3.3. *Sea $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell\}$ una base ordenada de Φ. La matriz C^Φ con entrada $C^\Phi_{ij} = |\alpha_i, \alpha_j|$ es llamada* **matriz de Cartan** *de Φ.*

Por el comentario anterior a la Definición 3.10, vemos que C^Φ no depende de la elección que hagamos de la base Δ y así, sólo depende del sistema de raíces Φ.

Ejemplo 3.2.1. *Para los sistemas de rango 2, las matrices de Cartan son*

$$\begin{aligned} C^{A_1 \times A_1} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ C^{A_2} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ C^{B_2} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ C^{G_2} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Otra propiedad importante de la matriz de Cartan es que es no-singular, pues Δ es una base. Ahora, veremos que caracteriza al sistema de raíces completamente.

Teorema 3.10. *Sean Φ y Φ' sistemas de raíces con bases $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell\}$ y $\Delta' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\ell\}$ en los espacios $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, respectivamente. Si las matrices de Cartan de Φ y Φ' son iguales, entonces $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ determina un isomorfismo de sistemas de raíces.*

Demostración. Sea φ el isomorfismo de espacios vectoriales que resulta de extender linealmente la biyección de las bases de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$. Mediante un cálculo rutinario, se puede verificar $\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi\left(\mathcal{R}_\alpha(\beta)\right)$ para cualesquiera dos raíces α y β. Como los respectivos grupos de Weyl son generados por las reflexiones simples, por el Teorema 2.22, la asignación $\mathcal{S}' \mapsto \varphi\mathcal{S}\varphi^{-1}$ es un isomorfismo de grupos.

Nuevamente, por el Teorema 2.22, cada raíz es conjugada a una simple, digamos $\beta = \mathcal{S}(\alpha_k)$. En consecuencia, $\varphi(\beta) = \varphi\mathcal{S}\varphi^{-1}(\varphi(\alpha_k)) \in \Phi'$. La fórmula (2.1) muestra que φ preserva los productos $|\gamma, \delta|$. $\square$

Conociendo la matriz de Cartan de Φ, podemos recuperar a todas las raíces positivas como sigue:

Altura 1 Las raíces de altura 1 son las raíces simples.

Altura 2 Usaremos las raíces de altura 1 y las α_j-cadenas. Las entradas de la matriz de Cartan nos dan los números $|\alpha_i, \alpha_j|$ y por la Proposición 2.14, sabemos que $\alpha_i - \alpha_j$ no es una raíz y así, $r = 0$ con lo que $q = |\alpha_i, \alpha_j|$.

Altura 3 Ya teniendo todas las raíces de altura 2, podemos obtener los números $|\alpha, \alpha_j|$. Si α es cualquier raíz de altura 2, el entero r es fácil de encontrar pues α_j se puede restar al menos una vez (Proposición 2.14), para algún j, y así $q = r - |\alpha, \alpha_j|$.

Altura k Conociendo las raíces de altura $k-1$ y gracias al Corolario 2.15, sabemos que las raíces de altura k se pueden escribir como una suma de raíces simples $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ de tal manera que la suma parcial $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i$ es una raíz. Así, podemos conocer a todas las raíces de altura k.

Al conocer las raíces positivas Φ^+ de Φ bastará agregar a tal conjunto Φ^+ los negativos de sus raíces para obtener el sistema de raíces completo.

Ejemplo 3.2.2. *De la matriz* $\operatorname{diag}(2,2)$ *se obtiene inmediatamente dos raíces ortogonales* α *y* β*. Además, el vector* $\alpha + \beta$ *no puede ser raíz pues de lo contrario,* $\mathcal{R}_\beta(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$ *sería raíz, lo que contradice la Proposición 2.10. Por tanto, el sistema de raíces es isomorfo a* $A_1 \times A_1$*.*

3.3 Diagrama de Dynkin asociado a un sistema de raíces

El diagrama de Dynkin asociado a un sistema de raíces es la manera mas compacta de presentar las relaciones que satisfacen las raíces simples del sistema. Además, del diagrama de Dynkin, podemos recuperar la matriz de Cartan del sistema de raíces.

Por la Tabla 2.1 sabemos que para dos raíces α y β positivas y distintas, $|\alpha, \beta||\beta, \alpha|$ es 0, 1, 2 o 3.

Definición 3.4. *Sea Φ un sistema de raíces con base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell\}$. Defina una gráfica de ℓ vértices, un vértice por cada raíz simple, y agregue $|\alpha_i, \alpha_j| \cdot |\alpha_j, \alpha_i|$ aristas entre los vértices i y j de la gráfica. En el caso de que entre dos vértices existan más de una arista, agregue una flecha apuntando hacia el vértice que representa la raíz más corta de las dos. La gráfica resultante se llama* **diagrama de Dynkin** *de Φ.*

Como el grupo de Weyl actúa transitivamente en las bases y está compuesto totalmente de isometrías del espacio $\mathbf{E}$, se tiene que el diagrama de Dynkin de un sistema de raíces no depende de la elección de la base.

Ejemplo 3.3.1. *Los diagramas de Dynkin para los sistemas de rango 2 son*

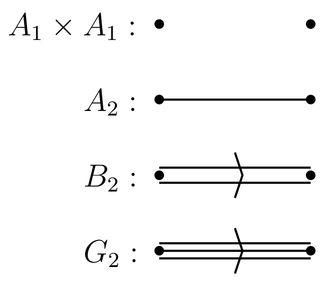


Figura 3.2: Diagramas de Dynkin de los sistemas de rango 2.

Es claro que en realidad, el diagrama de Dynkin de un sistema de raíces depende de el orden que se le de a la base, esta dependencia no es muy seria, pues es cuestión de seleccionar bien la enumeración de las raíces simples.

Ejemplo 3.3.2. *Del diagrama de Dynkin de G_2, se obtiene la matriz de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que la enumeración de las raíces simples no es la adecuada, pues se obtuvo la matriz transpuesta de la matriz de Cartan dada para G_2 en el ejemplo 3.2.1

Definición 3.5. *Diremos que un diagrama de Dynkin es* **conexo** *si para cualesquiera dos vértices i y j, existe una sucesión de vértices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tales que $i_1 = i, i_k = j$ y el vértice i_s está conectado por al menos una arista con el vértice i_{s+1} para todo entero $1 \leq s \leq k$.*

Un resultado evidente es el siguiente.

Proposición 3.11. *Un sistema de raíces es irreducible si y sólo si su diagrama de Dynkin es conexo.*

Ahora, si Φ no es irreducible, en su diagrama de Dynkin existiran un número de componentes conexas. Sean $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_t$ la partición de Δ en subconjuntos mutuamente ortogonales, Φ_i las combinaciónes lineales enteras de elementos en Δ_i que son raíces y $\mathbf{E}_i = \operatorname{Span} \Delta_i$, entonces $\mathbf{E} = \coprod \mathbf{E}_i$ y cada Φ_i es un sistema de raíces irreducible en $\mathbf{E}_i$ cuyo grupo de Weyl es la restricción a $\mathbf{E}_i$ del subgrupo de $\mathscr{W}$ generado por las raíces simples en Δ_i. Como cada $\mathbf{E}_i$ es invariante bajo $\mathscr{W}$, el Lema 3.5 muestra que cada raíz de Φ está en algún $\mathbf{E}_i$. Esto muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.12. *Sea Φ un sistema de raíces en $\mathbf{E}$, entonces Φ se descompone de manera única como la unión de sistemas de raíces irreducibles Φ_i en los subespacios $\mathbf{E}_i = \operatorname{Span} \Phi_i$ de $\mathbf{E}$ y se tiene la descomposición del espacio $\mathbf{E}$ como suma directa de los subespacios $\mathbf{E}_i$.*

Grácias a éste resultado, bastará con clasificar los sistemas irreducibles, los cuales se caracterizan por su diagrama de Dynkin, el cual es conexo.

3.4 Teorema de Clasificaión

Ahora, estamos listos para presentar el Teorema de Clasificación de los diagramas de Dynkin correspondientes a los sistemas de raíces irreducibles.

Teorema 3.13. *Si Φ es un sistema de raíces irreducible de rango ℓ, entonces su diagrama de Dynkin es uno de los siguientes:*

$A_\ell (\ell \geq 1)$:

$B_\ell (\ell \geq 2)$:

$C_\ell (\ell \geq 3)$:

$D_\ell (\ell \geq 4)$:

E_6:

E_7:

E_8:

F_4:

G_2:

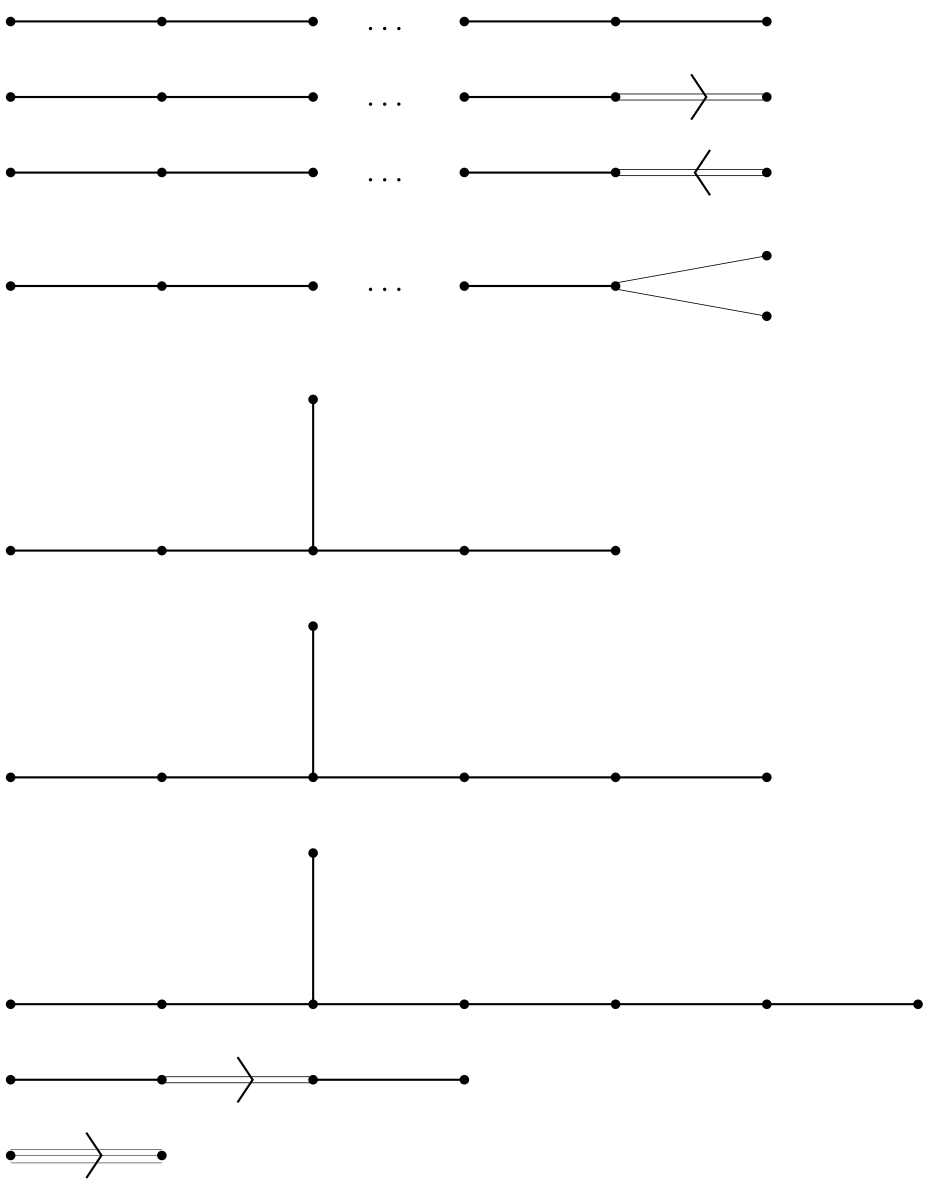


Figura 3.3: Diagramas de Dinkin para sistemas irreducibles.

y las respectivas matrices de Cartan son:

Sistemas de raíces clásicas

$$C^{A_\ell} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{B_\ell} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{C_\ell} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{D_\ell} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemas de raíces excepcionales

$$C^{E_6} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{E_7} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{E_8} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{F_4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para la demostración, es conveniente introducir algunos conceptos como apoyo.

Definición 3.6. *Si al diagrama de Dynkin de un sistema de raíces* Φ *le quitamos la flecha que indica el vértice correspondiente a la raíz mas corta, la gráfica resultante se llama* **gráfica de Coxeter** *de* Φ*.*

Desde el punto de vista de las gráficas de Coxeter, los sistemas de raíces irreducibles son perfectamente distingibles, excepto por B_ℓ y C_ℓ. Por tal motivo, veremos que las únicas gráficas de Coxeter que pueden corresponder a un sistema de raíces irreducible son las que resultan de los diagramas de Dynin enlistados en el Teorema de Clasificación.

Una observación más es que como en las gráficas de Coxeter no estamos interesados en las longitudes de los vectores, podemos trabajar con vectores unitarios. Para mayor flexibilidad, haremos las siguientes suposiciones:

- $\mathbf{E}$ es un espacio euclidiano, de cualquier dimensión.
- $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ es un conjunto de k vectores unitarios linealmente independientes que satisfacen $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle \leq 0$ para $i \neq j$ y $4\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle^2$ sólo puede tomar los valores $1, 2, 3$ para $i \neq j$. A este tipo de conjuntos los llamaremos *admisibles*.
- A cada conjunto admisible $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$, le asignamos una gráfica Γ con k vértices como sigue: el vértice i está unido con $4\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle^2$ aristas.

Ahora, lo que haremos es determinar todas las gráficas de Coxeter conexas asociadas a los conjuntos admisibples de vectores.

Demostración. (Teorema 3.13). La prueba se hará por pasos.

1. Si alguno de los vectores $\boldsymbol{e}_i$ es omitido del conjunto admisible, entonces el conjunto que nos queda, $\mathbf{A}\backslash\{\boldsymbol{e}_i\}$ también es admisible y su gráfice se obtiene de Γ al remover el vértice i y todas las aristas que conectaban al vérice i con los demás vértices.

2. *El número de parejas de vértices en Γ conectados por al menos una arista es estrictamente menor que k.*

   De lo contrario, tomemos

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}_i \neq \mathbf{0},$$

para tener

$$0 < \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle = k + 2 \sum_{i<j} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle . \tag{3.2}$$

Seleccionemos una pareja de índices i y j diferentes y que estén conectados por al menos una arista, es decir, $4 \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle^2$ es igual a $1, 2$ o 3. En particular, tenemos que $2 \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle \leq -1$. Por la desigualdad (3.2), vemos que el número de tales parejas no puede exceder $k - 1$.

3. Γ *no contiene cíclos.*

   De lo contrario, un cíclo sería la gráfica Γ' de un subconjunto admisible $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$ el cual contradice el paso 2, tomando $k = |\mathbf{A}'|$.

4. *En un vértice particular de* Γ *no puede haber más de tres aristas.*

   Sea $\boldsymbol{e} \in \mathbf{A}$ y supongamso que $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s \in \mathbf{A}$ son los vectores (todos distintos) que están conectados con $\boldsymbol{e}$, es decir, $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_i) < 0$ para todo entero $1 \leq i \leq s$. Por la parte 3, tenemos que $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ y se sigue que existe un vector $\boldsymbol{v}_0$ en $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ que es ortogonal a cada $\boldsymbol{v}_i$. Es evidente que $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_0 \rangle \neq 0$ y por un hecho de álgebra lineal,

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=0}^{s} \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i.$$

   Luego, $1 = \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle = \sum_{i=0}^{s} \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_i \rangle^2$ y se concluye que

$$\sum_{i=1}^{s} \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 < 1$$

   o equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{s} 4 \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 < 4,$$

   con lo que se termina la prueba de este paso.

5. *La única gráfica* Γ *de un subconjunto admisible* $\mathbf{A}$ *que puede contener dos vértices conectados por tres aristas es la gráfica de Coxeter de* G_2.

   Esto se sigue directamente del paso 4.

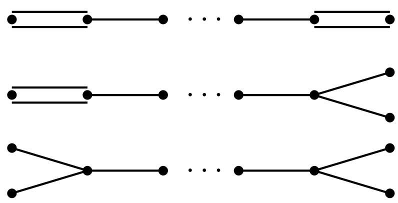
6. *Sea* $\mathbf{A}' = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_s\}$ *un subconjunto cuya gráfica es*

Figura 3.4: Cadena simple.

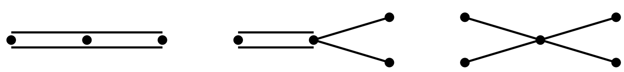
Si $\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{e}_i$*, entonces el conjunto* $\mathbf{A} \backslash \mathbf{A}' \cup \{\boldsymbol{e}\}$ *es admisible.*

La independencia lineal de $\mathbf{A} \backslash \mathbf{A}' \cup \{\boldsymbol{e}\}$ es un hecho de álgebra lineal. Por hipótesis, $2\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{i+1}\rangle = -1$ para cualquier entero $1 \leq i \leq s-1$ con lo que se deduce $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle = s + 2\sum_{i<j} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = s - (s-1) = 1$. Así, $\boldsymbol{e}$ es un vector unitario y cualqueir vector en $\mathbf{A} \backslash \mathbf{A}'$ puede ser conectado con al menos uno de los vectores en $\mathbf{A}'$, por el paso 3. Si $\boldsymbol{v} \in \mathbf{A}'$, entonces $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ o bien $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}\rangle$ para todo entero $1 \leq i \leq s$. En cualqeuir caso, se tiene $4\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}\rangle^2 \in \{1, 2, 3\}$.

7. Γ *no contiene subgráficas de la forma*

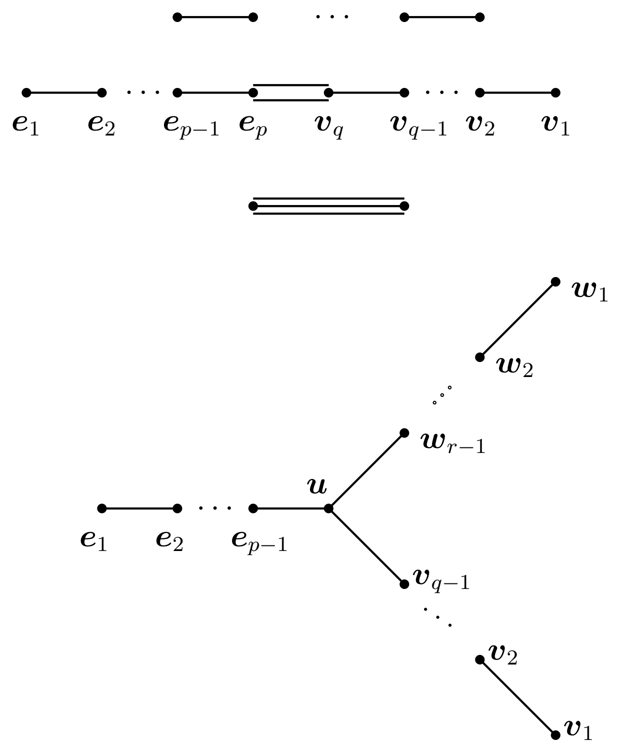


Supongamos que estas subgráficas ocurren en Γ. Por el paso 1, deben de ser las gráficas de subconjuntos admisibles, pero por el paso 6, podemos eliminar la cadena simple en cada caso y obtener las gráficas



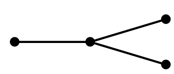
Evidentemente, todas estas gráficas contradicen el psao 4.

8. *Cualqeuir gráfica conexa* Γ *de un subcojnuto admisible tiene una de las siguientes formas:*



Una gráfica conexa que contenga más de una pareja de vértices conectados con dos aristas debe de contener una subgráfica de la forma

la cual contradice el paso 7, por lo que al menos ocurre una doble arista. Más, aún, si Γ contiene una doble arista, entonces no puede contener un nodo como el siguiente (otra ves por el paso 7):



Finalmente, supongamos que Γ sólo tiene aristas simples. Si Γ no contiene nodos, debe de ser una cadena simple.

Γ no puede contener más de un nodo, por el paso 7 y así, la cuarta gráfica es la única posibilidad.

9. *La única gráfica conexa del segundo tipo en 8 es la gráfica de Coxeter de F_4 o la gráfica de Coxeter de B_ℓ.*

Definamos $\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{p} i\boldsymbol{e}_i$ y $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{q} i\boldsymbol{v}_i$. Por hipótesis, tenemos $2\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{i+1}\rangle = -1 = 2\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{j+1}\rangle$ para $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ y cualesquier otra pareja es ortogonal. Luego, se puede ver que

$$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle = \frac{p(p+1)}{2}$$

y

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Como $4\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{v}_q\rangle^2 = 2$, tenemos $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}\rangle^2 = p^2q^2\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{v}_q\rangle^2 = \frac{p^2q^2}{2}$ y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}\rangle^2 < \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$ o bien,

$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2}\frac{q(q+1)}{2}.$$

Por tanto, las únicas posibilidades son $p = q = 2$ o bien $p = 1$ y q arbitrario, o bien $q = 1$ y p arbitrario.

10. *La única gráfica conexa del cuarto tipo en 8 es D_ℓ o las gráficas de Coxeter de E_6, E_7 y E_8 cuando $\ell = 6, 7, 8$.*

Definamos $\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{p} i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} i\boldsymbol{v}_i$ y $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{p} i\boldsymbol{w}_i$. Es claro que $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son mutuamente ortogonales y suponga que $\boldsymbol{u}$ no es generado por estos tres vectores. Como en la prueba del paso 4, obtenemos la relación

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1,$$

donde los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ son los ángulos que forma el vector $\boldsymbol{u}$ con los vectores $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, respectivamente. Un cálculo similar al realizado en el pso 9 con $p-1$ en lugar de p, muestra que

$$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle = \frac{p(p-1)}{2},$$

y similarmente para $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. Se concluye que

$$\cos^2\theta_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

y similarmente para θ_2 y θ_3. Sumando estas expresiones se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \tag{3.3}$$

Podemos suponer que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r}$ y que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$ ya que si p, q o r es igual a 1, estamos en el caso A_k. En particular, la desigualdad (3.3) implica que $\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} > 1$ y así, $r = 2$. De este modo, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ y $2 \leq q \leq 4$. Si $q = 3$, entonces $p < 6$. Por tanto, las únicas posibilidades son:

$$(p, 2, 2) \Rightarrow D_k, \quad (3,3,2) \Rightarrow E_6, \quad (4,3,2) \Rightarrow E_7 \quad \text{y} \quad (5,3,2) \Rightarrow E_8.$$

En estos diéz pasos, se muestra que las únicas gráficas de Coxeter para los sistemas de raíces irreducibles son las enlistadas en el Teorema de Clasificación. Sin embargo, las gráficas de Coxeter de B_ℓ y C_ℓ son indistinguibles, como ya se había mencionado. De cualqueir forma, se puede verificar que éstos dos sistemas de raíces no son isomorfos y con esto se termina la demostración del Teorema. $\square$

Capítulo 4

Álgebras de Lie

La intensión de este capítulo es dar una introducción a la Teoría de Álgebras de Lie, presentando las herramientas principales de la teoría y los resultados más significativos manteniendo un nivel básico. Los ejemplos que aquí se presentan son clásicos en la literatura de álgebras de Lie y se puede encontrar un desarrollo diferente al presentado aquí en [3], [6] o [11].

Muchos de los conceptos de álgebras de Lie se corresponden historicamente a los conceptos análogos en la Teoría de Grupos, por la relación establecida por Sophus Lie entre grupos de Lie y álgebras de Lie.

4.1 Definición y ejemplos

Comenzaremos dando la definición de nuestro objeto de estudio de este capítulo.

Definición 4.1. *Una* **álgebra de Lie** *sobre un campo* $\mathbb{F}$ *es un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *sobre el campo* $\mathbb{F}$*, con una operación binaria* $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ *que satisface las siguientes propiedades:*

AL1 *La operación* $[,]$ *es bilineal.*

AL2 *Para cualquier* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$*, se tiene* $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = \mathbf{0}$.

AL3 *Para cualesquiera* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}$*, se satisface la* **identidad de Jacobi**

$$[[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}] + [[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{u}] + [[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}] = \mathbf{0}.$$

Las propiedades AL1 y AL2 implican la antisimetría del producto:

AL2′ Para cualesquiera $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ se tiene $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = -[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]$.

Para demostrar este hecho, basta con expandir linealmente la expresión $[\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}]$ y aplicar (AL2).

Cuando el campo no es de característica dos, las propiedades AL1 y AL2′ implican AL2, y para verificarlo, tomamos $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ en AL2′.

Generalmente, se usan letras germánicas minúsculas, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{g}, \ldots$, para denotar una álgebra de Lie. A la operación $[,]$ se le llama *corchete de Lie.* La *dimensión* de una álgebra de Lie es simplemente la dimensión del espacio vectorial subyacente.

Ejemplo 4.1.1. *Consideremos el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ y definamos el* **producto vectorial** *de $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ por $\boldsymbol{w} = (w^1, w^2, w^3)$ como el vector*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} (v^2w^3 - v^3w^2, v^3w^1 - v^1w^3, v^1w^2 - v^2w^1),$$

y es inmediato que $\times$ es una operación bilineal y antisimétrica, es decir, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$ para cualesquier pareja de vecotres $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Despues de realizar un cálculo rutinario, podemos ver que $\times$ satisface la siguiente relación para $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle \, \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \, \boldsymbol{u},$$

llamada **triple producto vectorial**. *A partir de el triple producto vectorial, se verifica directamente la identidad de Jacobi para $\times$ y si definimos $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ se concluye que $(\mathbb{R}^3, [,])$ es una álgebra de Lie.*

Las álgebras de Lie aparecen de manera natural a partir de las álgebras asociativas; una álgebra asociativa es un espacio vectorial $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ con una multiplicación de vectores $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} * \boldsymbol{w}$ la cual resulta ser asociativa en el sentido ordinario. Mediante un cálculo rutinario, podemos verificar que la operación

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{v} * \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} * \boldsymbol{v}, \tag{4.1}$$

le dá una estructura de álgebra de Lie al espacio vectorial subyacente del álgebra asociativa $(\boldsymbol{V}, +, \cdot, *)$. El corchete (4.1) se le llama *conmutador.*

Dos ejemplos muy importantes de álgebras de Lie obtenidas en esta forma se presentan a continuación:

Ejemplo 4.1.2. *Sea* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{F}$*. El conjunto de todos los endomorfismos en* $\mathbf{V}$*, denotado por* $\mathrm{End}(\mathbf{V})$*, tiene una estructura natural de espacio vectorial sobre* $\mathbb{F}$*. Además, podemos definir un producto asociativo en* $\mathrm{End}(\mathbf{V})$ *mediante la composición de funciones. Así,* $\mathrm{End}(\mathbf{V})$ *se convierte en una álgebra de Lie con el conmutador (4.1). A ésta álgebra de Lie se le conoce con el nombre de* **álgebra general lineal** *de Lie y se denota por* $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$*. Cuando el espacio* $\mathbf{V}$ *es de dimensión finita, digamos* n*, podemos identificar al espacio* $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$ *con el espacio de matrices* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$ *y se denota* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$*.*

Sea $(\mathbf{A}, +, \cdot, *)$ cualquier álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$, es decir, la terna $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y la terna $(\mathbf{A}, +, *)$ es un anillo (posiblemente no asociativo). Analizaremos ahora una clase de operadores lineales que satisfacen una regla conocida del cálculo diferenncial.

Definición 4.2. *Una* derivación *de una álgebra* $\mathbf{A}$ *es una transformación lineal* $\mathcal{D} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *que satisface la propiedad*

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{v} * \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} * \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w}.$$

Ejemplo 4.1.3. *El conjunto de todas las derivaciones de* $\mathbf{A}$ *lo denotaremos por* $\mathfrak{Der}(\mathbf{A})$*, el cual es un subespacio vectorial del álgebra asociativa* $\mathrm{End}(\mathbf{A})$*. Si definimos* $[\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}}]$ *como en (4.1) para* $\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}} \in \mathfrak{Der}(\mathbf{A})$*, podemos verificar que*

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}}](\boldsymbol{v} * \boldsymbol{w}) &= \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{v} * \boldsymbol{w}) - \widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{D}(\boldsymbol{v} * \boldsymbol{w}) \\
&= \mathcal{D}\Big(\boldsymbol{v} * \widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{w}) + \widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w}\Big) - \widetilde{\mathcal{D}}\Big(\boldsymbol{v} * \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w}\Big) \\
&= \mathcal{D}\Big(\boldsymbol{v} * \widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{w})\Big) + \mathcal{D}\Big(\widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w}\Big) - \widetilde{\mathcal{D}}\Big(\boldsymbol{v} * \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\Big) - \widetilde{\mathcal{D}}\Big(\mathcal{D}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w}\Big) \\
&= \boldsymbol{v} * \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{w}) + \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} * \widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{D}(\boldsymbol{w}) - \widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{D}(\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w} \\
&= \boldsymbol{v} * [\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}}](\boldsymbol{w}) + [\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}}](\boldsymbol{v}) * \boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Así, podemos ver que $\mathfrak{Der}(\mathbf{A})$ *con* $[,] : \mathfrak{Der}(\mathbf{A}) \to \mathfrak{Der}(\mathbf{A})$ *es una álgebra de Lie llamada el* **álgebra de derivaciones** *del álgebra* $\mathbf{A}$*.*

Cuando $\mathbf{A} = \mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie y $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}$, podemos definir el operador $\operatorname{ad} \boldsymbol{x} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que manda a cada $\boldsymbol{v}$ en el vector $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}]$; a este operador se le llama *operador adjunto* de $\boldsymbol{x}$.

Por la identidad de Jacobi y la antisimetría, tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} \boldsymbol{x}([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]) &= [\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]] = -[\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}]] - [\boldsymbol{w}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}]] \\ &= [\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}]] + [[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}] \\ &= [\boldsymbol{v}, \operatorname{ad} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{w})] + [\operatorname{ad} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}], \end{aligned}$$

con lo que $\operatorname{ad} \boldsymbol{x} \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$. A una derivación de este tipo de una álgebra de Lie se le llama **interior**.

Ejemplo 4.1.4. *Si $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial con $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \mathbf{0}$ para todos $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, inmediatamente verificamos que $\mathfrak{g}$ tiene estructura de álgebra de Lie. Llamaremos a ésta álgebra de Lie "el"* **álgebra Abeliana**. *Esto muestra que cualquier espacio vectorial se puede convertir en álgebra de Lie.*

Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie de dimensión finita, digamos n, podemos elegir una base $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ y es un hecho fundamental del Álgebra Lineal que cada vector $[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j]$ se expresa de manera única como una combinación lineal en termino de esta base. Sean $c_{ij}^s \in \mathbb{F}$ tales que $[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = \sum_{s=1}^n c_{ij}^s \boldsymbol{e}_s$; los escalares c_{ij}^s son llamados *constantes de estructura* de $\mathfrak{g}$ con respecto a la base $\mathscr{B}$. Las constantes para las cuales $i \geq j$ se pueden obtener de las que satisfacen $i < j$, gracias a las propiedades AL2 y AL2$'$.

Esto nos permite definir una álgebra de Lie sólo mencionando cuales son las constantes c_{ij}^s, las cuales deben de satisfacer las identidades obvias que se obtienen por las propiedades AL2 y AL3:

$$\begin{aligned} c_{ii}^s &= 0 = c_{ij}^s + c_{ji}^s \\ \sum_{s=1}^n \left(c_{ij}^s c_{sk}^r + c_{jk}^s c_{si}^r + c_{ki}^s c_{sj}^r \right) &= 0, \text{ para cada } r = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dos ejemplos importantes de álgebras de Lie que podemos construir de esta forma son los siguientes:

Ejemplo 4.1.5. *Si $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, definimos $c_{xy}^x = 1 = -c_{yx}^x$ y todas las demás constantes de estructura iguales a cero. A través de cálculos directos, podemos verificar que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie.*

Ejemplo 4.1.6. *Sea* $\mathfrak{g}$ *es un espacio vectorial de dimensión 3 con base* $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ *y definimos las constantes de estructura* $c_{xy}^{z} = c_{xz}^{y} = 1 = -c_{yx}^{z} = -c_{zx}^{y}$ *y todas las demás constantes de escturctura iguales a cero. Así,* $\mathfrak{g}$ *es una álgebra de Lie.*

4.2 Conceptos algebraicos fundamentales

En esta sección se estudiarán las subestructuras importantes de las álgebras de Lie así como las funciones que preservan tanto la estructura lineal como el corchete de Lie.

Subálgebras e ideales

Primero, estudiaremos las subestructuras elementales de un álgebra de Lie.

Definición 4.3. *Diremos que* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *es una* **subálgebra de Lie** *de* $\mathfrak{g}$ *si* $\mathfrak{h}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{g}$ *cerrado bajo el corchete de Lie.*

Es inmediato que una subálgebra es a su vez una álgebra de Lie, ya que el corchete de Lie restringido al subespacio satisface todas las condiciones de la Definición 4.1.

Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}$ y $\{\mathbf{0}\}$ son subálgebras y son llamadas *subálgebras triviales* de $\mathfrak{g}$; esto muestra que la familia de subálgebras de una álgebra de Lie es no vacía.

Sean $\mathfrak{h}$ y $\widetilde{\mathfrak{h}}$ subconjuntos no vacíos de $\mathfrak{g}$. Si denotamos por $[\mathfrak{h}, \widetilde{\mathfrak{h}}]$ al subespacio generado por los corchetes de Lie $[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]$, con $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{h}$ y $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\mathfrak{h}}$, es inmediato que $[\mathfrak{h}, \widetilde{\mathfrak{h}}]$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Con esta notación, un subespacio $\mathfrak{h}$ es una subálgebra si y sólo si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Definición 4.4. *La subálgebra* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *es llamada* **álgebra derivada** *de* $\mathfrak{g}$ *y se denota usualmente por* $\mathfrak{g}'$.

Es claro que $\mathfrak{g}$ es abeliana si y sólo si $\mathfrak{g}' = \{\mathbf{0}\}$.

Si $\mathfrak{h}$ y $\widetilde{\mathfrak{h}}$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$, es fácil ver que $\mathfrak{h} \cap \widetilde{\mathfrak{h}}$ es también una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. La unión de dos subálgebras de Lie no necesariamente es una subálgebra de Lie.

Definimos el *normalizador* de $\mathfrak{h}$ como el conjunto

$$N(\mathfrak{h}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} : [\boldsymbol{v}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}\,;$$

es claro que $N(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ pues si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in N(\mathfrak{h})$, entonces para todo $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{h}$ se tiene $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}], [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}] \in \mathfrak{h}$ y por la identidad de Jacobi

$$[[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{u}] = -[[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}] - [[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}] \in \mathfrak{h},$$

con lo que $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \in N(\mathfrak{h})$. Decimos que $\mathfrak{h}$ es *auto-normalizada* si $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Mas adelante, veremos una clase de subálgebras muy importante que presenta esta propiedad.

El *centralizador* de $\mathfrak{h}$ es el conjunto

$$C(\mathfrak{h}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} : [\boldsymbol{v}, \mathfrak{h}] = \boldsymbol{0}\}\,,$$

y nuevamente, por la identidad de Jacobi, $C(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Ahora, estudiaremos una subestructura mucho más interesante, análoga a los subgrupos normales de un grupo.

Definición 4.5. *Una subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se dice un* **ideal** *si* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Por la propiedad AL2$'$, tenemos que un ideal del anillo $(\mathfrak{g}, +, [,])$ siempre es un ideal por ambos lados, pues $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$.

También, cuando tenemos un ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, el espacio cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se puede dotar de una estructura de álgebra de Lie de manera natural definiendo

$$[\boldsymbol{v} + \mathfrak{h}, \boldsymbol{w} + \mathfrak{h}] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] + \mathfrak{h}.$$

Esto nos dá una caracterización del álgebra derivada: el álgebra $\mathfrak{g}'$ es un ideal minimal con cociente abeliano.

Si $\mathfrak{h}, \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ son dos ideales, entonces $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{i}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{i}]$ y $\mathfrak{h} + \mathfrak{i}$ también son ideales, donde $\mathfrak{h} + \mathfrak{i}$ es la subálgebra generada por los vectores $\boldsymbol{h} + \boldsymbol{i}$, con $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}$ y $\boldsymbol{i} \in \mathfrak{i}$, es decir,

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{i} = \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{i},\ \text{para algún } \boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}, \boldsymbol{i} \in \mathfrak{i}\}.$$

Evidentemente, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{i}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Ahora, si $\boldsymbol{v} \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{i}]$, con $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}]$, y para cualquier $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, se vuelve evidente, por antisimetría y la identidad de Jacobi, que

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}], \boldsymbol{w}] = -[[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{h}] - [[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}], \boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{h}, [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}]] - [[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}], \boldsymbol{i}] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{i}].$$

Finalmente, para ver que $\mathfrak{h} + \mathfrak{i}$ es un ideal, procedemos como sigue: si $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{h} + \mathfrak{i}$, podemos escribir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathfrak{h}} + \boldsymbol{v}_{\mathfrak{i}}$ y tomando $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, tenemos $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{v}_{\mathfrak{h}} + \boldsymbol{v}_{\mathfrak{i}}, \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{v}_{\mathfrak{h}}, \boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{v}_{\mathfrak{i}}, \boldsymbol{w}] \in \mathfrak{h} + \mathfrak{i}$.

Ejemplos de ideales son las subálgebras triviales; un ejemplo menos trivial es el álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ ya que si $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ y $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}'$, entonces $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$ y así $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \in \mathfrak{g}'$.

Un ejemplo más es el subespacio $\{\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g} : [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}\}$, ya que si $\boldsymbol{w}$ es un elemento de este conjunto y $\boldsymbol{v}$ es cualquier elemento de $\mathfrak{g}$, tenemos

$$[[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{0},$$

para todo $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{g}$.

Definición 4.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. El* **centro** *de $\mathfrak{g}$ es el ideal*

$$Z(\mathfrak{g}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g} : [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}\}.$$

Es claro que $Z(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{g})$ y que $\mathfrak{g}$ es abeliana si y sólo si $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

El normalizador de una subálgebra $\mathfrak{h}$ se caracteriza por ser la máxima subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$ como un ideal, es decir, toda subálgebra es ideal en su normalizador y $\mathfrak{h}$ es ideal de $\mathfrak{g}$ si y sólo si $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$.

Una clase de álgebras de Lie muy importante es la siguiente:

Definición 4.7. *Diremos que una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es* simple *si no tiene ideales propios y $\mathfrak{g}' \neq \{\boldsymbol{0}\}$, es decir, no tiene ideales distintos de $\{\boldsymbol{0}\}$ o $\mathfrak{g}$, y no es abeliana.*

Más adelante, veremos porque las álgebras simples son importantes en el estudio de las álgebras de Lie semisimples.

En una álgebra simple, se tienen las siguientes relaciones: $Z(\mathfrak{g}) = \{\mathbf{0}\}$ y $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Si tenemos dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, podemos darle una estructura de álgebra de Lie al espacio vectorial $\mathfrak{g} \amalg \mathfrak{h}$ mediante el producto componente-a-componente:

$$[(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{h}_1), (\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{h}_2)] = ([\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2], [\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2]).$$

Es inmediato que $\mathfrak{g} \amalg \mathfrak{h}$ se convierte en una álgebra de Lie, la cual es llamada la *suma directa* (externa) de las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, y la denotaremos por $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

Si $\iota_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ y $\iota_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ son las inclusiones canónicas, entonces podemos ver a $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ como dos ideales $\mathfrak{g} \oplus \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} \oplus \mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ que conmutan, es decir, $[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}] = \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{g} \in \mathfrak{g} \oplus \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{h} \in \mathbf{0} \oplus \mathfrak{h}$. Es evidente que $\mathfrak{g} \oplus \mathbf{0} \cap \mathbf{0} \oplus \mathfrak{h} = \mathbf{0}$.

Más adelante, veremos otro tipo de suma directa llamada *suma directa* (interna) de álgebras de Lie y su relación con la suma directa externa.

Homomorfismos de álgebras de Lie

En esta subsección, nos dedicaremos al estudio de las funciones entre álgebras de Lie que preservan la estructura, es decir, el corchete de Lie.

Definición 4.8. *Un* **homomorfismo** *de álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ *es una transformación lineal* $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ *que satisface para cualesquiera* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$ *la relación* $\varphi([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]) = [\varphi(\boldsymbol{v}), \varphi(\boldsymbol{w})]$.

Es oportuno mencionar algunos tipos de homomorfismos. Un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ se llama *monomorfismo* si es un homomorfismo inyectivo y es llamado *epimorfismo* si es suprayectivo.

Un homomorfismo que sea monomorfismo y epimorfismo al mismo tiempo se le llama *isomorfismo*; en tal caso, diremos que las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\widetilde{\mathfrak{g}}$ son *isomorfas* y lo denotaremos $\mathfrak{g} \cong \widetilde{\mathfrak{g}}$.

Se puede verificar que la relación de isomorfismo en la clase de álgebras de Lie es una relación de equivalencia.

Un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es llamado *endomorfismo* y si φ es isomorfismo, diremos que es un *automorfismo*; al *grupo de automorfismos* de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ lo denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Los homomorfismos nos dan información útil de las álgebras de Lie que relacionen, por ejemplo:

Teorema 4.1. *Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ es un homomorfismo, entonces*

1 $\varphi(\mathfrak{h})$ *es una subálgebra de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, para cada subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ es un ideal, entonces $\varphi(\mathfrak{h})$ es un ideal en $\varphi(\mathfrak{g})$.*

2 $\varphi^{-1}(\widetilde{\mathfrak{h}})$ *es una subálgebra (resp. ideal) de $\mathfrak{g}$, para cada subálgebra (resp. ideal) $\widetilde{\mathfrak{h}}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.*

3 *Si φ es isomorfismo, entonces φ^{-1} también es isomorfismo.*

4 *Si $\psi : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ es un homomorfismo, entonces $\psi \circ \varphi : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ es un homomorfismo.*

5 *Si φ es isomorfismo, entonces $\varphi\big(Z(\mathfrak{g})\big) = Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$ y $\varphi(\mathfrak{g}') = \widetilde{\mathfrak{g}}'$.*

La demostración de estos resultados es sencilla, simplemente se aplica la definición de los conceptos y por tal motivo, se determina excluirla del texto para evitar la rutina.

Un ideal $\mathfrak{i}$ se dice *característico* si es invariante bajo automorfismos, es decir, $\varphi(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Ejemplos de estos ideales son $\mathfrak{g}'$ y $Z(\mathfrak{g})$, como lo muestra la parte 5 del Teorema 4.1. También tenemos que $\mathfrak{g}'$ es el único ideal minimal con cociente abeliano.

Definición 4.9. *Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ es un homomorfismo, definimos el* **kernel** *o* **nucleo** *de φ como el conjunto $\varphi^{-1}(\mathbf{0})$ y lo denotaremos* $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

De la parte 2 en el Teorema 4.1 se sigue que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ es un ideal y a continuación, presentamos otro hecho útil de los homomorfismos.

Proposición 4.2. *Un homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ es monomorfismo si y sólo si* $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$, entonces $\varphi(\boldsymbol{v}) = \widetilde{\mathbf{0}} = \varphi(\mathbf{0})$, por lo que $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Si $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{w})$, entonces $\varphi(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \widetilde{\mathbf{0}}$, es decir, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}\varphi$ y por tanto, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

□

Si $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{j}$ son dos ideales en $\mathfrak{g}$ que lo generan linealmente, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$, y que además tienen intersección nula, entonces la transformación

$$\varphi : \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j} \to \mathfrak{g}$$

definida por $\varphi(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ es un isomorfismo entre las álgebras de Lie $\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$ y $\mathfrak{g}$. En efecto, es claro que $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ pues $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ y por la Proposición 4.2 se tiene que φ es un monomorfismo. Además, como $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$, se tiene que φ es un epimorfismo. En este caso, se dice que $\mathfrak{g}$ es la *suma directa* (interna) de los ideales $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{j}$.

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{i}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Si existe un ideal $\mathfrak{j}$ tal que $\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j} \cong \mathfrak{g}$, decimos que $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{j}$ son *ideales complementarios*. Decimos que el ideal $\mathfrak{i}$ es un *sumando directo* si existe un ideal complementario para $\mathfrak{i}$.

De ahora en adelante, no hay necesidad de hacer distinción entre la suma directa externa y la suma directa interna ya que escencialmente, son las mismas álgebras de Lie. Así, al álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$ simplemente la llamaremos la *suma directa* de $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{j}$, sin preocuparnos por la naturaleza de los sumandos involucrados.

Hay una relación muy estrecha entre ideales, algebras cocientes y homomorfismos de álgebras de Lie que cunstituye uno de los puntos principales de la Teoría introductoria de las álgebras de Lie y tiene concecuencias muy importantes que podremos ver en el siguiente capítulo.

En el siguiente resultado, hemos recopilado los resultados más importantes concernientes a la relación descrita anteriormente. Los nombres de los Teoremas pueden ser familiares para las personas relacionadas con la Teoría de Grupos.

Teorema 4.3. 1 (Primer Teorema de Isomorfismos). *Sea* $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ *un homomorfismo de álgebras de Lie. Si* $\mathfrak{i}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$ *contenido en* $\operatorname{Ker}\varphi$*, existe un único homomorfismo*

$$\psi : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \to \widetilde{\mathfrak{g}},$$

con $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi/\mathfrak{i}$*, que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\nu"'] & \widetilde{\mathfrak{g}} \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

donde $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *es la proyección natural* $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}+\mathfrak{i}$ *y además, tenemos*

$$\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\varphi \cong \varphi(\mathfrak{g}).$$

2 (Segundo Teorema de Isomorfismo). *Si* $\mathfrak{i}$ *y* $\mathfrak{j}$ *son ideales de* $\mathfrak{g}$*, entonces*

$$(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}).$$

3 (Tercer Teorema de Isomorfismo). *Si* $\mathfrak{i}$ *y* $\mathfrak{j}$ *son dos ideales de* $\mathfrak{g}$ *con* $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$*, entonces* $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *y además,*

$$\frac{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}{\mathfrak{j}/\mathfrak{i}} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{j}.$$

4 (Teorema de Correspondencia). *Todo ideal de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *es de la forma* $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$*, donde* $\mathfrak{j}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$ *que contiene a* $\mathfrak{i}$*.*

El que desee ver la demostración, puede hacerlo en [11](p. 10). Como un caso particular del primer Teorema de Isomorfismo, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4. (Teorema Fundamental de Homomorfismos). *Para cada ideal* $\mathfrak{i}$ *de una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, existe un homomorfismo de álgebras de Lie* ν *tal que* $\operatorname{Ker}\nu = \mathfrak{i}$*.*

4.3 Álgebras de Lie lineales

Los ejemplos más clasicos de álgebras de Lie son presisamente las álgebras de Lie de matrices. Ya conocemos el álgebra general lineal, introducida en el Ejemplo 4.1.2. Una álgebra de Lie se dice ser una *álgebra de Lie lineal* si es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$ o bien de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

Aquí se trabajará con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, ya que las matrices son más convenientes que las transformaciones lineales para hacer cálculos explicitos, que es lo que se quiere hacer en esta sección.

Fijemos la base estándar de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ que está conformada por las matrices con un 1 en una entrada determinada y cero en las demás entradas, es decir, $E_{kl} = (e^{ij}_{kl})$, con $e^{ij}_{kl} = \delta^i_k \delta^j_l$, donde

$$\delta^i_k \equiv \delta_{ki} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es el símbolo de Kroneker. Además, no es dificil encontrar la relación

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}; \tag{4.2}$$

nótese que las constantes de estructura de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ son ± 1 o cero.

Ahora, presentaremos cuatro familias muy importantes de álgebras de Lie lineales, llamadas álgebras de Lie clásicas y denotadas tradicionalmente por las letras A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ y D_ℓ:

A_ℓ Consideremos el subespacio de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ conformado por las matrices de traza cero y denotemoslo por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Por las propiedades de la traza, en particular $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, es fácil verificar que $\operatorname{tr}([A, B]) = 0$ por lo que $[\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})] \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Así, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ a la cual le llamaremos el *álgebra especial lineal.*

Si $n = \ell+1$, entonces claramente $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) \leq (\ell+1)^2-1$. Exhibamos un subconjunto linealmente independiente de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ con $(\ell+1)^2 - 1$ elementos: Primero, seleccionemos las matrices E_{ij} con $i \neq j$, las cuales acumulan un total de $(\ell+1)^2 - (\ell+1)$ elementos. Ahora, recolectemos las matrices $H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ para un total de $(\ell+1)^2 - (\ell+1) + \ell$ elementos en la base, que la veremos como la base estándar de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$.

C_ℓ Sean $n = 2\ell$ y $\Omega : \mathbb{F}^{2\ell} \to \mathbb{F}$ una forma simpléctica (es decir, una forma bilineal, antisimétrica y no-degenerada); la matriz W de Ω es

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_\ell \\ -I_\ell & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que la restricción en la dimensión del espacio es necesaria para la existencia de Ω. Denotemos por $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices A que satisfacen la ecuación

$$WA + A^T W = \mathbf{0};$$

es claro que si $A, B \in \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F})$, entonces

$$\begin{aligned} W[A,B] + [A,B]^T W &= W(AB - BA) + (AB - BA)^T W \\ &= WAB - WBA + B^T A^T W - A^T B^T W \\ &= WAB + B^T WA + B^T A^T W + A^T WB \\ &= \left(WA + A^T W\right) B + B^T \left(WA + A^T W\right) \\ &= \mathbf{0}B + B^T \mathbf{0} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

por lo que $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F})$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{F})$ a la cual llamaremos el *álgebra simpléctica*. Si escribimos

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

entonces las matrices M, N, P y Q deben satisfacer las condiciones

$$N^T = N, \quad P^T = P \quad \text{y} \quad M^T = -Q;$$

la última igualdad fuerza a que $\operatorname{tr} A = 0$, es decir, $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{F})$.

Una base para $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F})$ está dada por las ℓ matrices diagonales $E_{i,i} - E_{i+\ell,i+\ell}$, junto con las $\ell^2 - \ell$ matrices $E_{ij} - E_{j+\ell,i+\ell}$ para $i \neq j$; para la matriz N, seleccionamos las ℓ matrices $E_{i,i+\ell}$ y las $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ matrices $E_{i,j+\ell} + E_{j,i+\ell}$ con $i < j$. Similarmente para la matriz P, tomamos las ℓ matrices $E_{i+\ell,i}$ y las $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ matrices $E_{i+\ell,j} + E_{j+\ell,i}$ con $i < j$. En total, recolectamos $2\ell^2 + \ell$ matrices básicas para $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F})$.

B_ℓ Sean $n = 2\ell + 1$ y $\mathcal{B}$ una forma bilineal simétrica con matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_\ell \\ \mathbf{0} & I_\ell & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Denotemos por $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{F})$ al conjunto de matrices A que satisfacen la ecuación

$$BA + A^T B = \mathbf{0}.$$

La demostración de que $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{F})$ es cerrada bajo el conmutador es análoga a la de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$, ya que el requerimiento es el mismo. A ésta subálgebra de $\mathfrak{gl}(2\ell+1, \mathbb{F})$ se le llama el *álgebra ortogonal* impar. Si escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & M & N \\ \boldsymbol{a}_{31} & P & Q \end{pmatrix},$$

entonces tenemos las siguientes condiciones sobre las componentes de A:

$$\begin{gathered} a_{11} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{21} = -\boldsymbol{a}_{13}^T, \quad \boldsymbol{a}_{31} = -\boldsymbol{a}_{12}^T, \\ Q = -M^T, \quad N^T = -N \quad \text{y} \quad P^T = -P; \end{gathered}$$

como se obtuvo para $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$, por $a_{11} = 0$ y $Q = -M^T$ se muestra que $\operatorname{tr} A = 0$ de donde se concluye que $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}(2\ell+1, \mathbb{F})$.

Para formar una base, escoja las ℓ matrices diagonales $E_{ii} - E_{\ell+i,\ell+i}$, con $2 \le i \le \ell+1$, y añada las 2ℓ matrices $E_{1,i+\ell+1} - E_{i+1,1}$ y $E_{1,i+1} - E_{i+\ell+1,1}$. Para Q tome las $\ell^2 - \ell$ matrices $E_{i+1,j+1} - E_{j+\ell+1,i+\ell+1}$ con $i \neq j$; para N y P, seleccione las $\ell(\ell-1)$ matrices $E_{i+1,j+\ell+1} + E_{j+1,i+\ell+1}$ y $E_{i+\ell+1,j+1} + E_{j+\ell+1,i+1}$ con $i \neq j$. Todo esto nos da un total de $2\ell^2 + \ell$ elementos de la base.

D_ℓ Si ahora $n = 2\ell$ y $\mathcal{B}$ tiene como matriz

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_\ell \\ I_\ell & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

definimos $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F})$ de modo análogo al de $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{F})$ y le llamamos el *álgebra ortogonal* par. Si $A \in \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F})$ la escribimos

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

se obtienen las relaciones

$$M^T = -Q, \quad N^T = -N \quad \text{y} \quad P^T = -P,$$

y nuevamente se tiene la contención $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{F})$.

Para obtener una base de $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F})$ basta con tomar las ℓ matrices diagonales $E_{ii} - E_{\ell+i,\ell+i}$ junto con las $2(\ell^2 - \ell)$ matrices $E_{i,j} - E_{j+\ell,i+\ell}$ para Q, $E_{i,j+\ell} + E_{j,i+\ell}$ para N y $E_{i+\ell,j} + E_{j+\ell,i}$ para P, todas con $i \neq j$. En total, tenemos que la dimensión de $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F})$ es $2\ell^2 - \ell$.

Más adelante veremos la importancia de estas cuatro familias de álgebras de Lie. Por el momento, comentaremos que los nombres de éstas álgebras se deben a la estrecha relación que tienen con los grupos clásicos de Lie. Podemos demostrar que $A_1 \cong B_1 \cong C_1$, D_1 es el álgebra abeliana de dimensión 1, $B_2 \cong C_2$ y $D_3 \cong A_3$.

Sea $\mathfrak{s}(n, \mathbb{F})$ el conjunto de matrices escalares, es decir, múltiplos escalares de la matriz identidad. Es obvio que $\mathfrak{s}(n, \mathbb{F})$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ y además, $[A, B] \notin \mathfrak{s}(n, \mathbb{F})$ cuando el campo $\mathbb{F}$ es de caracterísrica cero, pues de lo contrario, $0 = \operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr} aI = an$. También es evidente que $\mathfrak{s}(n, \mathbb{F}) \subset Z(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}))$; si $A \in Z(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}))$, entonces A conmuta con las matrices de la forma $E_{1,i}$ lo que implica que $A \in \mathfrak{s}(n, \mathbb{F})$.

Calculemos $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})'$. Por las propiedades de la traza, sabemos que se satisface la contención $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})' \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. De las relaciones dadas en (4.2), podemos ver que si $i \neq l$ y $j = k$, se tiene que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})' \ni [E_{ij}, E_{jl}] = E_{il} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ y para $i = l, j = k = i + 1$ tenemos que $H_i \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})'$; como los elementos básicos de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ están en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})'$, se tiene $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})'$ y se sigue la igualdad. Más aún, si $i > l$ y $j > i$ o bien $i < l$ y $j < i$, todas las matrices en $[E_{ij}, E_{jl}] = E_{il}$ tienen traza cero así como $H_i = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i}]$, lo que muestra que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})' = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$.

Otra observación es que, cuando la característica del campo es cero, se tiene la descomposición

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{s}(n,\mathbb{F}),$$

ya que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \cap \mathfrak{s}(n,\mathbb{F}) = \{\mathbf{0}\}$ y cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ se puede escribir como

$$A = B + C,$$

con $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ y $C = kI \in \mathfrak{s}(n,\mathbb{F})$, donde

$$k = \frac{1}{n}\operatorname{tr} A, \quad b_{ii} = a_{ii} - k, \quad b_{ij} = a_{ij} \text{ para } i \neq j.$$

Cuando la característica del campo divide a n, se puede mostrar que $\mathfrak{s}(n,\mathbb{F})$ es el centro de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ y la descomposición antes mencionada de una matriz en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ como suma de una matriz de traza cero y un múltiplo escalar de la identidad no es única.

Definamos $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ como el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n que son triangulares superiores, es decir, aquellas matrices $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0$ para $i > j$, es decir,

$$\mathfrak{t}(n,\mathbb{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}.$$

Es fácil ver que $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$, pues si $A, B \in \mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$, entonces

$$[A,B] = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj} - b_{ik}a_{kj}\right)$$

y ésta matriz tiene ceros en las componentes para las cuales $i > j$, pues si se tiene ésta desigualdad, es necesario que $k \geq i$ para que $a_{ik} \neq 0$, pero esto forza a que $b_{kj} = 0$ y de modo similar para b_{ik} y a_{kj}.

A ésta álgebra de Lie se le conoce como el *álgebra de matrices triangulares superiores de orden n.*

Además, la dimensión de $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ es $\frac{1}{2}n(n+1)$ y la base estándar es el conjunto de matrices E_{ij} con $i \leq j$. No es difícil ver que $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra auto-normalizada de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Ahora, consideremos las matrices triangulares estrictamente superiores y denotemos a éste conjunto por $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$, es decir,

$$\mathfrak{n}(n,\mathbb{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ para } i \geq j\}.$$

Es claro que $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F}) \subset \mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ y podemos verificar directamente la contención $[\mathfrak{n}(n,\mathbb{F}), \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})] \subset \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$. Así, $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra de $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$.

A ésta álgebra de Lie le llamaremos el *álgebra de las matrices triangulares superiores nilpotentes de orden n.*

Es evidente que la dimensión de $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ es $\frac{1}{2}n(n-1)$ y la base estándar está conformada por las matrices E_{ij} con $i < j$. Además, podemos ver que $N(\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})) = \mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$.

Finalmente, consideremos el conjunto de matrices diagonales

$$\mathfrak{d}(n,\mathbb{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j\},$$

el cual es claramente una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ ya que la suma y el producto de matrices diagonales es nuevamente una matriz diagonal. De hecho, $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra de $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$.

A ésta álgebra de Lie se le llama el *álgebra de matrices diagonales de orden n.*

La dimensión de $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ es n y la base estándar tiene como elementos a las matrices E_{ii}. Se puede ver que $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra auto-normalizada de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ y también que $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ es una álgebra abeliana.

Evidentemente, podemos descomponer a $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ como suma directa de los subespacios $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ y $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$, es decir, $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F}) = \mathfrak{n}(n,\mathbb{F}) \amalg \mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$.

Además, si $D \in \mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ y $N \in \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$, entonces $[D,N] \in \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$. Esto muestra que el álgebra derivada de $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ es $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ y que $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ no es un ideal de $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$.

Estas tres subálgebras lineales jugarán un papel importante en la teoría más adelante.

4.4 Representaciones y la forma de Killing

En esta sección, presentaremos una herramienta algebraica que resulta ser conveniente, pues hace un vínculo entre el estudio algebraico de las álgebras de Lie con el estudio de operadores lineales en un espacio vectorial.

Definición 4.10. *Una* **representación** *de una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *en un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *sobre* $\mathbb{F}$ *es un homomorfismo* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbf{V})$.

Diremos que la representación ρ es *fiel* si ρ es un monomorfismo. Si $\operatorname{Ker}\rho \neq \mathbf{0}$, se tiene una representación inducida en el cociente $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\rho$ de la manera que indica el Teorema 4.3 en su pare 1. La *representación trivial* es la representación en el espacio de dimensión 1 donde todos los operadores son cero.

Si tenemos dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ y contamos con una representación de $\mathfrak{g}$ en derivaciones de $\mathfrak{h}$, es decir, un homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{h})$, podemos dotar al conjunto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ de una estructura de álgebra de Lie: las operaciones de espacio vectorial se definen por componentes y el producto lo definimos usando la representación ρ, es decir, si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$

$$[(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2)] = \Big([\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]_{\mathfrak{g}}, [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]_{\mathfrak{h}} + \rho(\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{w}_2) - \rho(\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{w}_1)\Big),$$

lo cual le da estructura de álgebra de Lie al producto cartesiano. Esta álgebra de Lie se llama la *suma semidirecta* de las álgebras $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ y lo denotaremos por el símbolo $\mathfrak{g} \oplus_\rho \mathfrak{h}$.

Se puede ver que si ρ es la representación trivial, entonces la suma semidirecta $\mathfrak{g} \oplus_\rho \mathfrak{h}$ es precisamente la suma directa $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

Representación adjunta

Una representación muy importante en el estudio de las álgebras de Lie, es la *representación adjunta* la cual es define por

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \ni \boldsymbol{v} \mapsto \operatorname{ad}\boldsymbol{v} \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Esta es una representación legítima, pues es claro que ad es lineal y además

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}](\boldsymbol{u}) &= [[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]] + [[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{w}] \\
&= [\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]] - [\boldsymbol{w}, [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]] = \operatorname{ad}\boldsymbol{v}([\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]) - \operatorname{ad}\boldsymbol{w}([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]) \\
&= \operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}) - \operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}) = [\operatorname{ad}\boldsymbol{v}, \operatorname{ad}\boldsymbol{w}](\boldsymbol{u}).
\end{aligned}$$

El kernel de ad consiste de todos los vectores $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ tales que $\operatorname{ad} \boldsymbol{v} \equiv \mathbf{0}$, es decir, todos los vectores $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ que satisacen $\operatorname{ad} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$. En otras palabras, $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g})$. El Primer Teorema de Isomorfismo (Teorema 4.3, parte 1) tiene una importante consecuencia:

Corolario 4.5. *Toda álgebra de Lie simple tiene una representación fiel. En otras palabras, si* $\mathfrak{g}$ *es una álgebra de Lie simple, entonces es isomorfa a una álgebra de Lie lineal.*

Demostración. Como $\mathfrak{g}$ es simple, $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$ y así, ad es un monomorfismo. □

Esta es una versión debil del *Teorema de Ado*, que establece que toda álgebra de Lie de dimensión finita sobre un campo de característica cero tiene una representación fiel (ver [6], p. 202). Para el caso de característica p, el resultado se conoce con el nombre de *Teorema de Iwasawa* y se puede encontrar en [6] (p. 203).

Denotaremos por $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ a la imagen de $\mathfrak{g}$ bajo ad en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ y la llamaremos el *álgebra adjunta* de $\mathfrak{g}$. Claramente, $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ es un ideal en $\mathfrak{der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ que se verifica mediante el siguiente cálculo: Sea $\mathcal{D} \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, entonces

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}, \operatorname{ad} \boldsymbol{v}](\boldsymbol{w}) &= \mathcal{D} \operatorname{ad} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}) - \operatorname{ad} \boldsymbol{v} \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) = \mathcal{D}([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]) - [\boldsymbol{v}, \mathcal{D}(\boldsymbol{w})] \\ &= [\boldsymbol{v}, \mathcal{D}(\boldsymbol{w})] + [\mathcal{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}] - [\boldsymbol{v}, \mathcal{D}(\boldsymbol{w})] = [\mathcal{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}] \\ &= \big(\operatorname{ad} \mathcal{D}(\boldsymbol{v})\big)(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{ad} \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Forma de Killing

En esta subsección, estudiaremos una forma de traza inducida por la representación adjunta de una álgebra de Lie.

Definición 4.11. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie y* ad *la representación adjunta de* $\mathfrak{g}$*La* **forma de Killing** *de* $\mathfrak{g}$ *se define como la función*

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} \boldsymbol{v} \operatorname{ad} \boldsymbol{w}).$$

Por las propiedades de la forma de traza, la forma de Killing de una álgebra de Lie es una forma bilineal simétrica en $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 4.4.1. *Supongamos que la característica de $\mathbb{F}$ no es 2 y consideremos el álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ con la base usual*

$$\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Es fácil verificar las siguientes relaciones para estos elementos básicos:

$$[\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}]=2\boldsymbol{x},\qquad [\boldsymbol{h},\boldsymbol{y}]=-2\boldsymbol{y},\qquad [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{h}; \tag{4.3}$$

así, obtenemos las matrices de los operadores adjuntos:

$$\operatorname{ad}\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{ad}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

y

$$\operatorname{ad}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

Si tomamos $\boldsymbol{v}=v^1\boldsymbol{x}+v^2\boldsymbol{h}+v^3\boldsymbol{y}\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, entonces

$$\begin{aligned}\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &= (v^1)^2\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(v^2)^2\kappa(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})+(v^3)^2\kappa(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ &\quad +2\left(v^1v^2\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})+v^1v^3\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+v^2v^3\kappa(\boldsymbol{h},\boldsymbol{y})\right).\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos ver que $\kappa(\boldsymbol{xx})=\kappa(\boldsymbol{xh})=\kappa(\boldsymbol{hy})=\kappa(\boldsymbol{yy})=0$, $\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=4$ y $\kappa(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})=8$, con lo que se infiere la relación

$$\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=8[(v^2)^2+v^1v^3]=4\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}^2). \tag{4.4}$$

Expandiendo linealmente $\kappa(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ y usando la relación (4.4), se obtiene la expresión

$$\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=4\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}). \tag{4.5}$$

Ejemplo 4.4.2. *Considere $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{F})$ con la base usual $\{E_{kl}\}$. Si $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{F})$, el operador $(\operatorname{ad}\boldsymbol{v})^2$ transforma a $\boldsymbol{w}$ en $\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^2$ y si $\boldsymbol{v} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$, la matriz de éste operador es*

$$(\operatorname{ad}\boldsymbol{v})^2 = \begin{pmatrix} 2bc & -ac+cd & -ab+bd & -2bc \\ -ab+bd & 2bc+(a-d)^2 & -2b^2 & ab-bd \\ -ac+cd & -2c^2 & 2bc+(a-d)^2 & ac-cd \\ -2bc & ac-cd & ab-bd & 2bc \end{pmatrix},$$

de donde podemos ver que $\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 8bc + 2(a-d)^2 = 4\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}^2) - 2(\operatorname{tr}\boldsymbol{v})^2$. Con un razonamiento similar al empleado en el Ejemplo 4.4.1, obtenemos la expresión de la forma de Killing

$$\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 4\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) - 2\operatorname{tr}\boldsymbol{v}\operatorname{tr}\boldsymbol{w}.$$

Se puede verificar que la forma de Killing de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ es

$$\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 2n\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) - 2\operatorname{tr}\boldsymbol{v}\operatorname{tr}\boldsymbol{w}.$$

La forma de Killing κ es asociativa en el sentido de que

$$\kappa([\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}],\boldsymbol{u}) = \kappa(\boldsymbol{v},[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}]),$$

como se demuestra en el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \kappa([\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}],\boldsymbol{u}) &= \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w} - \operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{v})\operatorname{ad}\boldsymbol{u}\big) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{u} - \operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{u}) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{u}) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{u}) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{u}) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{u}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}) \\ &= \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}(\operatorname{ad}\boldsymbol{w}\operatorname{ad}\boldsymbol{u} - \operatorname{ad}\boldsymbol{u}\operatorname{ad}\boldsymbol{w})\big) \\ &= \kappa(\boldsymbol{v},[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}]). \end{aligned}$$

En otras palabras, ad es antisimétrico con respecto a κ. Otra propiedad de la forma de Killing es que es invariante bajo automorfismos: Sea φ un automorfismo de $\mathfrak{g}$, entonces

$$\operatorname{ad}\varphi(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}) = [\varphi(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}] = \varphi([\boldsymbol{v},\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})]) = \varphi\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\varphi^{-1}(\boldsymbol{u}),$$

para todo $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{g}$ y así

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi(\boldsymbol{v}),\varphi(\boldsymbol{w})) &= \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}\varphi(\boldsymbol{v}) \circ \operatorname{ad}\varphi(\boldsymbol{w})\big) = \operatorname{tr}(\varphi\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\varphi^{-1} \circ \varphi\operatorname{ad}\boldsymbol{w}\varphi^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}) = \kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

Del mismo modo, es (infinitesimalmente) invariante bajo derivaciones:

$$\kappa(\mathcal{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}) + \kappa(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}(\boldsymbol{u})) = 0.$$

Si $\mathfrak{i}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, con forma de Killing κ, y $\kappa_{\mathfrak{i}}$ es la forma de Killing de $\mathfrak{i}$, visto como álgebra de Lie, entonces $\kappa|_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}} = \kappa_{\mathfrak{i}}$. Esto es puede ver de la siguiente manera: si tenemos una base de $\mathfrak{i}$ y la extendemos a una base de $\mathfrak{g}$, tendremos que la matriz del operador $\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w}$, para $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{i}$, con respecto a esta base tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

donde A es la matriz del operador $\operatorname{ad}\boldsymbol{v}\operatorname{ad}\boldsymbol{w} : \mathfrak{i} \to \mathfrak{i}$.

Definición 4.12. *Diremos que κ es* **no-degenerada** *si el conjunto*

$$R_\kappa = \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} : \kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}\}$$

es nulo.

A éste conjunto se le llama el *radical* de κ. Es fácil ver que R_κ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. De hecho, la antisimetría de ad con respecto de κ hace de R_κ un ideal, como se puede verificar mediante cálculos rutinarios que no atenderemos aquí.

Un resultado sencillo de Álgebra Lineal, pero que es de mucha utilidad, es el siguiente:

Teorema 4.6. *Sea $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base para una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con forma de Killing κ, entonces κ es no-degenerada si y sólo si la matriz*

$$\begin{pmatrix} \kappa(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \kappa(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \cdots & \kappa(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ \kappa(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & \kappa(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \cdots & \kappa(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & \kappa(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \cdots & \kappa(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

tiene determinante diferente de cero.

Se puede ver la demostración de éste hecho, en una versión mas general, en [10] (p. 236).

4.5 Teorema de Weyl y representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$

En ésta sección se presentarán cuatro resultados que tienen concecuencias muy fuertes en el trabajo que realizaremos en el último capítulo (para las demostraciones, ver [4]).

Un *modulo* sobre $\mathfrak{g}$, o bien, un $\mathfrak{g}$-modulo es un espacio vectorial $\mathbf{V}$ dotado de una operación, o acción, de $\mathfrak{g}$ que denotaremos $\mathfrak{g}\times\mathbf{V}\ni(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})\mapsto\boldsymbol{v}.\boldsymbol{a}\in\mathbf{V}$ que satisface las siguientes propiedades para todos $a,b,v,w\in\mathbb{F}$, $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathfrak{g}$ y $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{V}$:

(M1) $(v\boldsymbol{v}+w\boldsymbol{w}).\boldsymbol{a}=v\boldsymbol{v}.\boldsymbol{a}+w\boldsymbol{w}.\boldsymbol{a}$,

(M2) $\boldsymbol{v}.(a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b})=a\boldsymbol{v}.\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{v}.\boldsymbol{b}$,

(M3) $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}].\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}.\boldsymbol{a}-\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}.\boldsymbol{a}$.

Un subespacio $\mathbf{W}$ cerrado bajo la acción de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}.\mathbf{W}\subset\mathbf{W}$, es llamado un $\mathfrak{g}$-*submodulo*. Claramente, $\mathbf{0}$ y $\mathbf{V}$ son $\mathfrak{g}$-submodulos (triviales) de $\mathbf{V}$. Diremos que $\mathbf{V}$ es un $\mathfrak{g}$-modulo *irreducible* si no posee $\mathfrak{g}$-submodulos propios.

Teorema 4.7. (Weyl) *Sea* $\mathbf{V}$ *un* $\mathfrak{g}$*-modulo de dimensión finita con* $\mathfrak{g}$ *una álgebra semisimple, entonces* $\mathbf{V}$ *es suma directa de* $\mathfrak{g}$*-submodulos irreducibles.*

De aquí en lo que resta de la subsección, consideraremos solamente $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$-modulos. Recordemos la base estandar para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, conformada por las matrices

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

con las relaciones $[\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}]=2\boldsymbol{x}$, $[\boldsymbol{h},\boldsymbol{y}]=-2\boldsymbol{y}$ y $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{h}$.

Sea $\mathbf{V}$ un modulo. Como $\boldsymbol{h}$ es diagonal, entonces actúa diagonalmente y así, $\mathbf{V}=\coprod\mathbf{V}_\lambda$, donde $\mathbf{V}_\lambda=\{\boldsymbol{a}\in\mathbf{V}:\boldsymbol{h}.\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}\}$ con $\lambda\in\mathbb{F}$. Los valores λ para los cuales $\mathbf{V}_\lambda\neq\mathbf{0}$ son llamados *pesos* de $\boldsymbol{h}$.

Lema 4.8. $\boldsymbol{x}.\mathbf{V}_\lambda\subset\mathbf{V}_{\lambda+2}$ *y* $\boldsymbol{y}.\mathbf{V}_\lambda\subset\mathbf{V}_{\lambda-2}$.

Como la dimensión de $\mathbf{V}$ es finita, debe de existir $\mathbf{V}_\mu\neq\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{V}_{\mu+2}=\mathbf{0}$. Cualquier vector diferente de cero $\boldsymbol{a}$ en $\mathbf{V}_\mu$ con $\boldsymbol{x}.\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ es llamado *vector maximal* de peso μ.

Proposición 4.9. *Supongamos que* $\mathbf{V}$ *es irreducible y escoja un vector maximal* $\boldsymbol{m}_0$ *de peso* μ. *Defina* $\boldsymbol{m}_{-1} = \mathbf{0}$ *y para todo entero no negativo* k, $\boldsymbol{m}_k = \frac{1}{k!}\boldsymbol{y}^k.\boldsymbol{m}_0$, *entonces para* $k \geq 0$

$$\boldsymbol{h}.\boldsymbol{m}_k = (\mu - 2k)\boldsymbol{m}_k, \quad \boldsymbol{y}.\boldsymbol{m}_k = (k+1)\boldsymbol{m}_{k+1}, \quad \boldsymbol{x}.\boldsymbol{m}_k = (\mu - k + 1)\boldsymbol{m}_{k-1}.$$

Se puede ver que una base para $\mathbf{V}$ es $\{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_m\}$. Además, $\mu = m = \dim \mathbf{V} - 1$, es decir, el peso de un vector maximal es un entero no negativo; lo llamaremos el *peso mas alto*. Ahora, presentamos el resultado principal de esta subsección.

Teorema 4.10. *Sea* $\mathbf{V}$ *un modulo irreducible.*

(1) Relativo a $\boldsymbol{h}$, $\mathbf{V}$ *es suma directa de espacios* $\mathbf{V}_\lambda$, *con* $\lambda = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, *donde* $m = \dim \mathbf{V} + 1$ *y* $\dim \mathbf{V}_\lambda = 1$ *para cada* λ.

(2) $\mathbf{V}$ *tiene un único vector maximal, salvo múltiplos escalares, cuyo peso es* m.

(3) La acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ *está determinado por las fórmulas de la Proposición 4.9, con una base correctamente seleccionada.*

Como concecuencia directa, tenemos el siguiente

Corolario 4.11. *Sea* $\mathbf{V}$ *un modulo de dimensión finita, entonces los valores propios de* $\boldsymbol{h}$ *son todos enteros, y cada uno de ellos aparece junto con su negativo un número igual de ocaciones. Más aún, en cualquier descomposición de* $\mathbf{V}$ *en submodulos irreducibles, el número de sumandos es presisamente* $\dim \mathbf{V}_0 + \dim \mathbf{V}_1$.

Capítulo 5

Teoría estructural

Este capítulo esta dedicado al estudio de tres tipos especiales de álgebras de Lie y se pretende poner de manifiesto tal importancia. Los nombres de los conceptos aquí presentados tienen mucha relación con los conceptos análogos en la Teoría de Grupos.

5.1 Solubilidad y nilpotencia

Primero estudiaremos las álgebras solubles, que darán lugar a las álgebras semisimples, las cuales ocuparán gran parte de nuestra atención en lo que resta de este trabajo.

Álgebras solubles

Definimos una sucesión de subconjuntos de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como sigue:

$$\mathfrak{g}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}', \quad \mathfrak{g}^{(2)} = (\mathfrak{g}')', \quad \ldots \quad \mathfrak{g}^{(k)} = (\mathfrak{g}^{(k-1)})', \quad \ldots$$

Esta sucesión es llamada la *serie derivada* de $\mathfrak{g}$.

Un elemento $\boldsymbol{v}$ en $\mathfrak{g}^{(k)}$ se puede expresar como combinación lineal de elementos de la forma $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]$, donde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$. En tal caso, escribiremos el símbolo $\boldsymbol{v} = \sum' v^{\boldsymbol{uw}}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]$ para denotar a los elementos de $\mathfrak{g}^{(k)}$, donde $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{w}$ estan en $\mathfrak{g}^{(k-1)}$.

Claramente, $\mathfrak{g}^{(k)} \supset \mathfrak{g}^{(k+1)}$ y cada termino de la serie es un ideal de $\mathfrak{g}$ como se demuestra a continuación: Para $k = 0$ es claro. Supongamos que $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces para $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$, digamos $\boldsymbol{v} = \sum' v^{\boldsymbol{uw}}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]$, y $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}] = \sum{}' v^{\boldsymbol{uw}}[[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{x}] = -\sum{}' v^{\boldsymbol{uw}}\Big([[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}], \boldsymbol{u}] + [[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{w}]\Big) \in \mathfrak{g}^{(k)}.$$

De hecho, se puede demostrar que cada término de esta serie es un ideal característico de $\mathfrak{g}$.

Definición 5.1. *Diremos que* $\mathfrak{g}$ *es* **soluble** *si* $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathbf{0}$ *para algún* k.

De inmediato podemos obtener la siguiente caracterización para la solubilidad de un álgebra de Lie:

Teorema 5.1. *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es soluble si y sólo si existe una cadena de subálgebras* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = \mathbf{0}$ *tal que* $\mathfrak{g}_{i+1}$ *es ideal de* $\mathfrak{g}_i$ *con cociente abeliano.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Tome la serie derivada. ($\Leftarrow$) El hecho de que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}_k$ es consecuencia de la minimalidad de cociente abeliano de los factores de la serie derivada. $\square$

Ejemplos de álgebras solubles son las álgebras abelianas y ejemplo de álgebras que no son solubles son las álgebras simples. Mas adelante, veremos una relación entre las álgebras solubles y el álgebra de matrices triangulares superiores estudiada anteriormente.

Otros resultados notables se resumen en la siguiente:

Proposición 5.2. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie.*

1 *Si* $\mathfrak{g}$ *es soluble, entonces toda subálgebra e imagen homomorfica de* $\mathfrak{g}$ *lo son.*

2 *Si* $\mathfrak{i}$ *es un ideal soluble de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *es soluble, entonces* $\mathfrak{g}$ *es soluble.*

3 *Si* $\mathfrak{i}$ *y* $\mathfrak{j}$ *son ideales solubles de* $\mathfrak{g}$*, entonces también lo es* $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$.

4 $\mathfrak{g}$ *es soluble si y sólo si* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *es soluble.*

La prueba se puede ver en [4] (p. 11).

Si $\mathfrak{i}$ es un ideal soluble maximal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{j}$ es cualquier ideal soluble de $\mathfrak{g}$, entonces la parte 3 del Lema 5.2 implica que $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} = \mathfrak{i}$ por maximalidad, es decir, hay un único ideal soluble maximal. A tal ideal lo llamaremos el *radical* de $\mathfrak{g}$ y lo denotaremos por $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$. Esta discusión nos permite definir un tipo especial de álgebras de Lie.

Definición 5.2. *Diremos que un álgebra de Lie es* **semisimple** *si su radical es cero.*

En la siguiente sección nos dedicaremos al estudio de algunas de las propiedades principales de las álgebras de Lie semisimples, por el momento, sólo presentaremos dos resultado sobre álgebras de Lie semisimples.

Teorema 5.3. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$ es una álgebra de Lie semisimple.*

Demostración. $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$ y por el Teorema 4.3 en su parte 4, existe un ideal $\mathfrak{i}$ tal que $\mathfrak{i}/\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}}$. Por la parte 2 de la Proposición 5.2, $\mathfrak{i}$ es soluble y por maximalidad, $\mathfrak{i} = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$. En consecuencia, tenemos que $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}} = \mathbf{0} + \mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$. □

Teorema 5.4. *Toda álgebra de Lie simple es una álgebra de Lie semisimple.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es simple, entonces no puede ser soluble y $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, por lo que $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{g}$. Esto fuerza a tener $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{0}$. □

Mas adelante estableceremos una descomposición de una álgebra de Lie semisimple como una suma directa de sus ideales simples, la cual tendrá consecuencias interesantes como se verá en la última sección de este capítulo.

Álgebras nilpotentes

Un concepto más moderno que la solubilidad es la nilpotencia. En esta subsección estudiaremos este tipo de álgebras de Lie y veremos una relación entre la nilpotencia y la solubilidad.

Definimos ahora una nueva sucesión se subconjuntos de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de manera recursiva como sigue:

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \text{para } k \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}].$$

A esta sucesión se le conoce con el nombre de la *serie central* de $\mathfrak{g}$.

Note que el k-esimo término de la serie derivada $\mathfrak{g}^{(k)}$ está contenida en el correspondiente k-esimo término de la serie central $\mathfrak{g}^k$.

A cada elemento $\boldsymbol{v}$ de $\mathfrak{g}^k$ lo podemos expresar como combinación lineal de elementos de la forma $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$, donde $\boldsymbol{u}\in\mathfrak{g}^{k-1}$ y $\boldsymbol{w}\in\mathfrak{g}$. En este caso, escribiremos el símbolo $\boldsymbol{v}=\sum v^{\boldsymbol{uw}}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$ para representar a los elementos de $\mathfrak{g}^k$ como una combinación lineal de los elementos de $\boldsymbol{u}\in\mathfrak{g}^{k-1}$ y $\boldsymbol{w}\in\mathfrak{g}$.

Cada término de la serie central es un ideal de $\mathfrak{g}$. En efecto, $\mathfrak{g}^0$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y si supongamos que $\mathfrak{g}^{k-1}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y tomemos $\boldsymbol{v}=\sum v^{\boldsymbol{uw}}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]\in\mathfrak{g}^k$ con $\boldsymbol{u}\in\mathfrak{g}^{k-1}$ y $\boldsymbol{w}\in\mathfrak{g}$. Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{g}$ tenemos

$$[\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}]=\sum v^{\boldsymbol{uw}}[[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}],\boldsymbol{x}]=-\sum v^{\boldsymbol{uw}}([[\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}],\boldsymbol{u}]+[[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}],\boldsymbol{w}])\in\mathfrak{g}^k,$$

ya que $[[\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}],\boldsymbol{u}]\in[\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^{k-1}]\subset\mathfrak{g}^k$ y $[[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}],\boldsymbol{w}]\in[\mathfrak{g}^{k-1},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}^k$. Como en el caso de la serie derivada, los términos en la serie central son ideales característicos de $\mathfrak{g}$.

Definición 5.3. *Diremos que* $\mathfrak{g}$ *es* **nilpotente** *si* $\mathfrak{g}^k=\mathbf{0}$ *para algún* k.

Las álgebras abelianas son nilpotentes y a su vez las álgebras nilpotentes son solubles, pero soluble no implica nilpotente (ver el Ejemplo 4.1.5).

Un resumen de algunas propiedades notables se presentan en el siguiente resultado:

Proposición 5.5. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie.*

1 *Si* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente, entonces toda subálgebra e imagen homomorfica de* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente y* $Z(\mathfrak{g})\neq\mathbf{0}$.

2 *Si* $\mathfrak{i}$ *es un ideal nilpotente de* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *es nilpotente, entonces* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente. En particular, si* $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ *es nilpotente, entonces* $\mathfrak{g}$ *también lo es.*

3 *Si* $\mathfrak{i}$ *y* $\mathfrak{j}$ *son ideales nilpotentes de* $\mathfrak{g}$, *entonces* $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ *es nilpotente.*

4 $\mathfrak{g}$ *es nilpotente si y sólo si* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *es nilpotente.*

La demostración se puede encontrar en [4] (p. 12).

La condición de nilpotencia para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se puede reescribir de la siguiente forma: para algún número natural n y cualquier conjunto de vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, tenemos

$$\operatorname{ad} \boldsymbol{v}_1 \operatorname{ad} \boldsymbol{v}_2 \cdots \operatorname{ad} \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}.$$

En particular, $(\operatorname{ad} \boldsymbol{v})^n = \mathbf{0}$, es decir, si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ consiste de operadores nilpotentes.

Diremos que un elemento $\boldsymbol{v}$ en $\mathfrak{g}$ es *ad-nilpotente* si $\operatorname{ad} \boldsymbol{v}$ es nilpotente en $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$. Ahora, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.6. *Si $A \in \mathfrak{gl}(\mathbf{V})$ es un operador nilpotente, entonces es ad-nilpotente.*

Demostración. Si definimos los operadores

$$\mathcal{L}_A : \mathfrak{gl}(\mathbf{V}) \ni B \mapsto AB \in \mathfrak{gl}(\mathbf{V})$$

y

$$\mathcal{R}_A : \mathfrak{gl}(\mathbf{V}) \ni B \mapsto BA \in \mathfrak{gl}(\mathbf{V}),$$

es evidente que $\operatorname{ad} A = \mathcal{L}_A - \mathcal{R}_A$. Ahora, los operadores $\mathcal{L}_A$ y $\mathcal{R}_A$ son nilpotentes ya que $\mathcal{L}_A^k = \mathcal{L}_{A^k} = \mathcal{L}_{\mathbf{0}}$ para algún k y analogamente, para $\mathcal{R}_A$ se tiene $\mathcal{R}_A^k = \mathcal{R}_{A^k} = \mathcal{R}_{\mathbf{0}}$ para algún k.

Además, son operadores que conmutan, es decir, $\mathcal{L}_A\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_A\mathcal{L}_A$ y por el Teorema del Binomio de Newton, podemos expandir $(\operatorname{ad} A)^k = (\mathcal{L}_A - \mathcal{R}_A)^k$ como la suma $\sum_{r=0}^{k}(-1)^r \binom{k}{r} \mathcal{L}_A^{k-r}\mathcal{R}_A^r$.

Supongamos que k_1 es el menor entero positivo para el cual $A^{k_1} = \mathbf{0}$ y tomemos $k = 2k_1 - 1$. Si $k - r \leq k_1$, entonces $r \geq k - k_1 = k_1$ y se tiene $\mathcal{R}_A^r = \mathbf{0}$. Del mismo modo, si $k - r > k_1$, entonces $\mathcal{R}_A^{k-r} = \mathbf{0}$ y así,

$$(\operatorname{ad} A)^k = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r \binom{k}{r} \mathcal{L}_A^{k-r}\mathcal{R}_A^r = \mathbf{0}.$$

$\square$

5.2 Criterios de solubilidad y nilpotencia

Aquí, presentaremos tres criterios para determinar la nilpotencia o solubilidad de un álgebra de Lie.

Teorema de Engel

Hemos visto que cuando un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces todos sus elementos son ad-nilpotentes. Aquí veremos que lo recíproco también es válida:

Teorema 5.7. (Engel). *Si todo elemento de $\mathfrak{g}$ es ad-nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Para la demostración, necesitamos del siguiente lema.

Lema 5.8. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$, con $\mathbf{V}$ un espacio de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ consiste de operadores nilpotentes y $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, entonces existe un vector no cero $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}$ para el cual $\mathfrak{g}.\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.*

La demostración se deduce en cuatro pasos (para los detalles, ver [4], p. 13):

1. Se demuestra que toda subálgebra propia $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ está contenida propiamente en su normalizador.

2. Tomemos $\mathfrak{h}$ maximal para tener $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$. Se prueba que $\mathfrak{h}$ es un ideal de codimensión 1.

3. Se muestra que el subespacio $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbf{V} : \mathfrak{h}.\boldsymbol{a} = \mathbf{0}\} \neq \mathbf{0}$ es estable bajo $\mathfrak{g}$.

4. Escriba $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Span}\{\boldsymbol{z}\}$, con $\boldsymbol{z} \notin \mathfrak{h}$. Luego, cualquier vector propio de $\boldsymbol{z}$ en $\mathbf{A}$ termina la prueba.

Demostración. (Teorema de Engel). La subálgebra $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ consiste de operadores nilpotentes, y por el Lema 5.8, existe $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ en $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{g}, \boldsymbol{v}] = \mathbf{0}$, es decir, $\boldsymbol{v} \in Z(\mathfrak{g})$. Ahora, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ consiste de elementos ad-nilpotentes y tiene dimensión menor que $\mathfrak{g}$. Por hipótesis inductiva, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es nilpotente y la Proposición 5.5 parte 2 implica que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. □

Ejemplo 5.2.1. *Considere el álgebra de matrices nilpotentes de orden n sobre el campo $\mathbb{F}$, es decir, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$. Por la Proposición 5.6, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ consiste de elementos* ad*-nilpotentes y por el Teorema de Engel, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ es nilpotente.*

El siguiente resultado nos hace ver que tan común en el álgebra de matrices triangulares superiores nilpotentes entre las álgebras de Lie nilpotentes.

Corolario 5.9. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita positiva. Si $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$ que consiste de operadores nilpotentes, entonces existe una cadena de subespacios de $\mathbf{V}$*

$$\mathbf{0} = \mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{W}_n = \mathbf{V},$$

con $\dim \mathbf{W}_k = k$ y $\mathfrak{g}.\mathbf{W}_k \subset \mathbf{W}_{k-1}$ para toda k. En otras palabras, existe una base de $\mathbf{V}$ para la cual, todas las matrices de $\mathfrak{g}$ estan en $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$.

Demostración. Si $\boldsymbol{a}$ es un vector no nulo de $\mathbf{V}$ con $\mathfrak{g}.\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ y definimos el subespacio $\mathbf{W}_1 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}\}$; la acción inducida de $\mathfrak{g}$ en $\mathbf{V}/\mathbf{W}_1$, es por operadores nilpotentes. Por inducción sobre $\dim \mathbf{V}$, $\mathbf{V}/\mathbf{W}_1$ posee una cadena de subespacios que satisface la conclusión del Corolario y la imagen inversa de ésta cadena en $\mathbf{V}$, también lo hace. □

Proposición 5.10. *Sea $\mathfrak{i}$ un ideal no nulo de una álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq \mathbf{0}$.*

Demostración. $\mathfrak{g}$ actúa en $\mathfrak{i}$ mediante la representación adjunta y el Lema 5.8 asegura la existencia de un vector no nulo $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{i}$ con $[\mathfrak{g}, \boldsymbol{a}] = \mathbf{0}$ y tenemos que $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g})$. □

Teorema de Lie

El Teorema de Lie es similar al Teorema de Engel, la diferencia es que se trabaja con una álgebra soluble en lugar de una nilpotente y es necesario pedir dos propiedades importantes al campo: algebraicamente cerrado y de característica cero. De aquí en adelante, siempre se tendrá ésta hipótesis.

Antes de enunciar el resultado importante de esta subsección, mostraremos un lema que es análogo al Lema 5.8.

Lema 5.11. *Sean $\mathbf{V}$ un espacio vectorial no nulo de dimensión finita y $\mathfrak{g}$ una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$, entonces $\mathbf{V}$ contiene un vector propio común para todos los endomorfismos en $\mathfrak{g}$.*

La demostración se deduce de los siguientes cuatro pasos:

1. Se encuentra un ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1.

2. Se muestra que existen vectores propios comunes a todos los endomorfismos en $\mathfrak{h}$.

3. Defina el subespacio

$$\mathbf{W} = \{\boldsymbol{b} \in \mathbf{V} : \boldsymbol{v}.\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{v})\boldsymbol{b}, \text{ para todo } \boldsymbol{v} \in \mathfrak{h}\}$$

   y se muestra que este subespacio es invariante bajo la acción de $\mathfrak{g}$ (la hipótesis de que la característica del campo es cero es importante).

4. Escriba $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \operatorname{Span}\{\boldsymbol{z}\}$, donde $\boldsymbol{z} \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$; luego, encuentre un vector propio de $\boldsymbol{z}$ en $\mathbf{W}$ (la hipótesis de que $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado es crusial).

El vector propio de $\boldsymbol{z}$ en $\mathbf{W}$ es claramente un vector propio comun a todos los endomorfismos de $\mathfrak{g}$ en $\mathbf{V}$. Para la persona que desee revisar los detalles de la prueba, se recomienda consultar [4] (p. 15).

Teorema 5.12. (Lie) *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$, con $\dim \mathbf{V} = m < \infty$, entonces existe una cadena de subespacios de $\mathbf{V}$ de la forma*

$$\mathbf{0} \subset \mathbf{V}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{V}_m = \mathbf{V},$$

con $\dim \mathbf{V}_i = i$ y la imagen de $\mathbf{V}_i$ bajo $\mathfrak{g}$ está contenida en $\mathbf{V}_i$. Es decir, las matrices de los operadores en $\mathfrak{g}$ con respecto a alguna base de $\mathbf{V}$ son triangulares superiores de orden m.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\dim \mathbf{V}$. El caso $\dim \mathbf{V} = 0$ es evidente, así que supondremos cierta la afirmación del Teorema para todo espacio vectorial de dimensión menor que $\dim \mathbf{V}$. Encontremos un vector no nulo $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{V}$ que sea vector propio común a todos los operadores de $\mathfrak{g}$ y definamos $\mathbf{W}_1 = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{a}\}$. Luego, $\mathfrak{g}$ actúa en $\mathbf{V}/\mathbf{W}_1$ y es claro que $\dim \mathbf{V}/\mathbf{W}_1 = \dim \mathbf{V} - 1 < \dim \mathbf{V}$; por hipótesis inductiva, existe una cadena de subespacios

$$\mathbf{W}_2/\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_3/\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_m/\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}/\mathbf{W}_1$$

que cumple con la conclusión del Teorema. Tomando la imagen inversa de la proyección natural de esta cadena, se obtiene la cadena de subespacios de $\mathbf{V}$ con las propiedades requeridas. $\square$

A continuación, veremos algunas consecuencias de éste Teorema.

Corolario 5.13. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie soluble, entonces existe una cadena de ideales $\mathbf{0} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ con $\dim \mathfrak{g}_i = i$.*

Demostración. Consideremos la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. Sabemos que, por la Proposición 5.2, $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ es soluble y así, estabiliza una cadena

$$\mathbf{0} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

de subespacios con $\dim \mathfrak{g}_i = i$. El que $\mathfrak{g}_i$ sea estáble bajo $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ significa que $\mathfrak{g}_i$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. □

Corolario 5.14. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie soluble, entonces todos los elementos de $\mathfrak{g}'$ son ad-nilpotentes. En particular, $\mathfrak{g}'$ es una álgeba nilpotente. Recíprocamente, si $\mathfrak{g}'$ es una álgebra nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración. Para la primera aseveración, supongamos que $\mathfrak{g}_i$ es una cadena de ideales como en el Corolario 5.13 con $\mathscr{B}_i = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_i\}$ base de $\mathfrak{g}_i$ para $i > 0$. Las matrices de $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ con respecto a la base $\mathscr{B}_n$ están en el álgebra de matrices triangulares superiores $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ introducida en la página 68, así, las matrices de $[\operatorname{ad} \mathfrak{g}, \operatorname{ad} \mathfrak{g}] = \operatorname{ad}[\mathfrak{g}\mathfrak{g}] = \operatorname{ad} \mathfrak{g}'$ están en $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) = \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})'$. Se sigue que cada elemento de $\mathfrak{g}'$ es nilpotente y por el Teorema de Engel, $\mathfrak{g}'$ es nilpotente. La segunda parte, se tiene porque si $i > 0$, tenemos

$$\mathfrak{g}^{(i)} = (\mathfrak{g}')^{(i-1)} \subset (\mathfrak{g}')^{i-1},$$

y $(\mathfrak{g}')^{i-1} = 0$ para algún i. □

Para concluir, estudiaremos un poco mas el álgebra de matrices triangulares superiores.

Ejemplo 5.2.2. *Considere el álgebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ de matrices triangulares superiores de orden n sobre el campo $\mathbb{F}$, que se supone algebraicamente cerrado y de característica cero. Recordemos que $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})' = \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ la cual vimos que es nilpotente (Ejemplo 5.2.1). Por el Corolario 5.14, concluimos que $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ es soluble.*

Criterio de Cartan

El criterio de Cartan nos permite determinar la solubilidad de una álgebra de Lie mediante el cálculo de la traza de ciertos operadores, pero antes, un criterio para nilpotencia.

Lema 5.15. *Sean* $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ *dos subespacios de* $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$*, con* $\dim \mathbf{V} < \infty$*, y defínase el subespacio*

$$\mathbf{M} = \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{gl}(\mathbf{V}) : [\boldsymbol{v}, \mathbf{B}] \subset \mathbf{A}\}.$$

Supongamos que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{M}$ *satisface* $\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = 0$ *para todo* $\boldsymbol{w} \in \mathbf{M}$*. Entonces* $\boldsymbol{v}$ *es un endomorismo nilpotente de* $\mathbf{V}$*.*

La demostración se puede revisar en [4], página 19.

Teorema 5.16. (Criterio de Cartan). *Sean* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* $\mathfrak{g}$ *una subálgebra de* $\mathfrak{gl}(\mathbf{V})$*. Supongamos que* $\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = 0$ *para todo* $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}'$ *y todo* $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$*. Entonces* $\mathfrak{g}$ *es soluble.*

Demostración. Bastará con probar que $\mathfrak{g}'$ es nilpotente y a su vez, será suficiente probar que cada elemento de $\mathfrak{g}'$ es un endomorfismo nilpotente de $\mathbf{V}$.

Tomemos $\mathbf{A} = \mathfrak{g}'$ y $\mathbf{B} = \mathfrak{g}$, así, $\mathbf{M}$ es el subespacio

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{gl}(\mathbf{V}) : [\boldsymbol{v}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}'\}.$$

Es claro que $\mathfrak{g} \subset \mathbf{M}$ y la hipótesis del Teorema nos dice que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = 0$ para $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}'$ y $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$; así, tenemos que probar que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = 0$ para $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}'$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbf{M}$. En efecto, si $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]$ es un generador de $\mathfrak{g}'$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbf{M}$, entonces

$$\operatorname{tr}([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]\boldsymbol{w}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{v}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]) = \operatorname{tr}([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]\boldsymbol{v}) = 0,$$

pues $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}] \in \mathfrak{g}'$. Ahora, aplicamos el Lema 5.15 y esto termina la demostración. □

Corolario 5.17. *Si* $\mathfrak{g}$ *es una álgebra de Lie tal que* $\kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ *para* $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}'$ *y* $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es soluble.*

Demostración. Por hipótesis, $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ cumple las condiciones del criterio de Cartan, por lo que $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ es soluble. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, y como $Z(\mathfrak{g})$ es soluble, por la Proposición 5.2 parte 2, $\mathfrak{g}$ es soluble. □

5.3 Álgebras semisimples

Ya se había definido éste concepto, pero ahora, queremos enfatizar la definición que usaremos y veremos algunas caracterizaciones.

Definición 5.4. *Una álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es* **semisimple** *si su radical* $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}}$*, su ideal soluble maximal, es cero.*

En particular, el centro de una álgebra semisimple es $\mathbf{0}$, pues el centro es un ideal abeliano (y por tanto, soluble). En consecuencia, ad es un monomorfismo ($\operatorname{Ker}\operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g})$) y $\mathfrak{g}$ se puede ver como una álgebra de operadores en algún espacio vectorial. Así, podemos definir la parte *semisimple* de un elemento $\boldsymbol{v}$ de $\mathfrak{g}$ como aquel elemento $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$ tal que $\operatorname{ad}\boldsymbol{w}$ es la parte diagonalizable en la descomposición de Jordan del operador $\operatorname{ad}\boldsymbol{v}$. Del mismo modo, se define la parte *nilpotente* de $\boldsymbol{v}$. Usualmente, denotaremos estos vectores como $\boldsymbol{v}_s$ y $\boldsymbol{v}_n$, respectivamente.

Otra manera de ver la semisimplicidad de una álgebra es la siguiente.

Teorema 5.18. *Una álgebra de Lie es semisimple si y sólo si no posee ideales abelianos distintos de cero.*

Demostración. Cada ideal abeliano es un ideal soluble, por lo que está contenido en el radical. Cuando $\mathfrak{g}$ es semisimple y $\mathfrak{a}$ es un ideal abeliano, tenemos $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{0}$. Recíprocamente, si $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} \neq \mathbf{0}$ y

$$\mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}^{(0)}, \mathfrak{h}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{h}^{(k-1)}, \mathfrak{h}^{(k)} = \mathbf{0}$$

es la serie derivada del radical, entonces cada $\mathfrak{h}^{(i)}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}^{(k-1)} \neq 0$ es un ideal abeliano. □

Una de las herramientas que nos ayudarán en el estudio de las álgebras semisimples es la forma de Killing. Ya se presentó el Criterio de Cartan, que nos permite saber cuando una álgebra de Lie es soluble verificando su forma de Killing. Ahora, daremos un criterio análogo para álgebras semisimples. Recordemos que la forma de Killing es no-degenerada si el ideal

$$R_\kappa = \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} : \kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}\},$$

llamado el radical de κ, es igual a cero. También, es importante recordar que la forma de Killing de un ideal se obtiene de restringir la forma de Killing del álgebra de Lie en el producto cartesiano del ideal.

Teorema 5.19. *Una álgebra de Lie es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no-degenerada.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si R es el radical de κ, entonces $\kappa_R = 0$, en particular, $\kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ para $\boldsymbol{v} \in R', \boldsymbol{w} \in R$ y por el Corolario 5.17, R es soluble. Por tanto, $R \subset \mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Si κ es no-degenerada, bastará con probar que todo ideal abeliano $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ está contenido en R, por el Teorema 5.18. Supongamos que $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{a}$ y $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\operatorname{ad} \boldsymbol{v} \operatorname{ad} \boldsymbol{w} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$$

y

$$(\operatorname{ad} \boldsymbol{v} \operatorname{ad} \boldsymbol{w})^2 : \mathfrak{g} \to \mathbf{0},$$

lo que indica que el operador $\operatorname{ad} \boldsymbol{v} \operatorname{ad} \boldsymbol{w}$ es nilpotente y por tanto,

$$\kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} \boldsymbol{v} \operatorname{ad} \boldsymbol{w}) = 0 \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g},$$

es decir, $\mathfrak{a} \subset R = \mathbf{0}$. $\square$

La no-degeneración de la forma de Killing tiene consecuencias muy importantes, como la identificación canónica de $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}^*$ (ver Proposición 1.7).

Propiedades principales de las álgebras de Lie semisimples

En esta subsección, presentamos un resumen de las propiedades más importantes de las álgebras semisimples que nos ayudarán a dar una clasificación completa de éstas y también simplifican el trabajo al concentrar nuestra atención en los ideales simples de las álgebras semisimples.

Comenzaremos estableciendo una descomposición de una álgebra semisimple en suma directa de ideales simples.

Proposición 5.20. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra semisimple, entonces existen ideales simples $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ tales que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k.$$

Más aún, cada ideal simple de $\mathfrak{g}$ coincide con uno de los $\mathfrak{g}_i$'s.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\dim \mathfrak{g}$: Si $\mathfrak{g}$ no tiene ideales propios, entonces $\mathfrak{g}$ es simple y acabaríamos con la prueba. Si suponemos lo contrario, sea $\mathfrak{h}$ un ideal propio minimal de $\mathfrak{g}$. Cada ideal de $\mathfrak{h}$, es un ideal de $\mathfrak{g}$ y el ideal soluble maximal de $\mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, y así, $\mathfrak{h}$ es semisimple; más aún, por minimalidad, $\mathfrak{h}$ es simple. Por la misma razon, $\mathfrak{h}^{\perp}$ es semisimple y $\dim \mathfrak{h}^{\perp} < \dim \mathfrak{g}$. Por hipótesis inductiva, $\mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ con $\mathfrak{g}_i$ simple; si definimos $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}$, tenemos el resultado.

Si $\mathfrak{i}$ es un ideal simple de $\mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \neq \mathbf{0}$ es un ideal de $\mathfrak{i}$ y por simplicidad, igual a $\mathfrak{i}$. Por otro lado, tenemos $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] = \bigoplus [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{i}]$. Así, existe un único índice $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ para el que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{i}] \neq \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}_i$. □

Inmediatamente, tenemos las siguientes concecuencias de tal descomposición.

Corolario 5.21. *Si* $\mathfrak{g}$ *es semisimple, entonces* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$.

Demostración. Recordando la definición del álgebra derivada tenemos

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigoplus [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}] = \bigoplus \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}.$$

□

Corolario 5.22. *Si* $\mathfrak{g}$ *es semisimple, entonces todo ideal de* $\mathfrak{g}$ *es también semisimple. Además, toda imagen homomorfica de* $\mathfrak{g}$ *es semisimple.*

Demostración. La primera parte se demostró en la Proposición 5.20. Ahora, sean $\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ un epimorfismo y $\mathfrak{r}$ el radical de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, entonces $\varphi^{-1}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{0}$ y como φ es epimorfismo, $\mathbf{0} = \varphi\varphi^{-1}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$. □

Finalizamos esta subsección con dos resultados mas.

Proposición 5.23. *Cada ideal de una álgebra semisimple* $\mathfrak{g}$ *se escribe como suma de algúnos de los ideales simples* $\mathfrak{g}_i$.

Demostración. Sea $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cap \bigoplus \mathfrak{g}_i = \bigoplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i, \tag{5.1}$$

donde no todos los $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ son distintos de cero. Ahora, cada $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \neq \mathbf{0}$ es un ideal en el correspondiente $\mathfrak{g}_i$ y así $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$. Por tanto, la suma de los ideales del lado deracho en (5.1) que no sean cero es la descomposición del ideal $\mathfrak{h}$. □

Proposición 5.24. *Toda derivación de una álgebra semisimple $\mathfrak{g}$ es interior.*

Demostración. Como $\mathfrak{g}$ es semisimple, su centro es cero y por tanto, $\mathfrak{g} \cong \operatorname{ad}\mathfrak{g}$, por lo que $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ es semisimple. Como $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$, la forma de Killing del álgebra adjunta se obtiene de restringir la forma de Killing del álgebra de derivaciones. Si $\mathfrak{h} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}^{\perp}$, entonces $\mathbf{0} = \mathfrak{h} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g} \supset [\mathfrak{h}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}]$, es decir, para cada $\mathcal{D} \in \mathfrak{h}$ y cada $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$,

$$\mathbf{0} = [\mathcal{D}, \operatorname{ad}\boldsymbol{v}](\boldsymbol{w}) = (\operatorname{ad}\mathcal{D}(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{w}) \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}.$$

Como ad es un monomorfismo, $\mathcal{D} = 0$. En consecuencia

$$\mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}.$$

□

Teorema de Levi-Malcev

La importancia del estudio de álgebras semisimples radica en un resultado que presentaremos como el *Teorema de Levi-Malcev*, el cual, enunciaremos sin demostración.

Teorema 5.25. (Levi-Malcev) *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie, entonces existen un ideal soluble $\mathfrak{r}$, una subálgebra semisimple $\mathfrak{s}$ y una representación ρ de $\mathfrak{s}$ en $\mathfrak{r}$ por derivaciones tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_{\rho} \mathfrak{r}$.*

La demostración de éste Teorema se puede revisar [6] (p. 91). Grácias a éste teorema, vemos que si queremos conocer todas las álgebras de Lie basta con conocer las semisimples y las solubles.

Capítulo 6

Raíces de una álgebra de Lie semisimple

En este capítulo nos concentraremos más en el estudio de la estructura de las álgebras de Lie semisimples y encontraremos la relación entre los sistemas de raíces estudiados en el capítulo 2 y las álgebras de Lie semisimples haciendo uso del Teorema 2.9. Además, presentamos algunos resultados importantes como el Teorema de Isomorfismo para álgebras de Lie y el Teorema de Serre.

Recordemos que en todo este capítulo, el campo $\mathbb{F}$ se supone algebraicamente cerrado y de característica cero.

6.1 Descomposición de Cartan

En esta sección, estudiaremos una descomporsición de una álgebra d eLie semisimple $\mathfrak{g}$ en suma directa de subespacios proporcionada por los operadores adjuntos de una determinada subálgebra de $\mathfrak{g}$. Para esto, necesitamos determinar cuales subálgebras nos son de utilidad.

Subálgebras torales y subálgebras de Cartan

Si una álgebra de Lie está compuesta por elementos ad-nilpotentes, entonces es nilpotente (Engel). Ahora, si $\boldsymbol{v}$ es un elemento de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con $\operatorname{ad}\boldsymbol{v}$ diagonalizable (ad-semisimple), entonces la subálgebra que éste elemento genera es una álgebra compuesta por elementos ad-semisimples.

Sin embargo, tal subálgebra no es semisimple. Ésto muestra que existen subálgebras con todos sus elementos ad-semisimples.

En el caso cuando $\mathfrak{g}$ es semisimple, sabemos que $\mathfrak{g} \cong \operatorname{ad} \mathfrak{g}$ y así, a los elementos ad-semisimples los llamaremos sólo *semisimples*.

Definición 6.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra $\mathfrak{h}$ con todos sus elementos* ad*-semisimples se llama una subálgebra* **toral** *de $\mathfrak{g}$.*

Ejemplo 6.1.1. *Considere el álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Por las relaciones (4.3) dadas en el ejemplo 4.4.1 (p. 72) para los elemetos*

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos verificar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es una álgebra de Lie simple cono sigue:

Si $\mathfrak{i} \neq \mathbf{0}$ es un ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, entonces contiene a algúno de los elementos básicos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{h}$. Suponga que $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{i}$, entonces $[\boldsymbol{h}, \frac{1}{2}\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x}$ y $[\boldsymbol{h}, -\frac{1}{2}\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{y}$ deben de ser elementos de $\mathfrak{i}$ y vemos así que $\mathfrak{i} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Los casos cuando $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{i}$ y $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{i}$ son análogos. De esto se concluye que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es una álgebra de Lie simple.

Por el Teorema 5.4, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es semisimple y se puede ver que $\operatorname{Span}\{\boldsymbol{h}\}$ *sólo contiene elementos semisimples, es decir,* $\operatorname{Span}\{\boldsymbol{h}\}$ *es una subálgebra toral de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

Un primer resultado para álgebras torales es el siguiente.

Proposición 6.1. *Toda subálgebra toral de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana.*

Demostración. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra toral de $\mathfrak{g}$, basta con probar que los valores propios de $\operatorname{ad} \boldsymbol{v} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ son ceros para todos los $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{h}$. Supongamos que existe un valor propio $a \neq 0$ de $\operatorname{ad} \boldsymbol{v}$ y sea $\boldsymbol{w}$ un vector propio asociado a dicho valor propio, entonces $\operatorname{ad} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) = -a\boldsymbol{w}$ es un vector propio de $\operatorname{ad} \boldsymbol{w} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ asociado al valor propio cero. Por otra parte, como $\operatorname{ad} \boldsymbol{w}$ es diagonalizable, existe una base de $\mathfrak{g}$ formada por vectores propios de $\operatorname{ad} \boldsymbol{w}$, digamos $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$, y así, podemos escribir a $\boldsymbol{v}$ como suma de vectrores propios de $\operatorname{ad} \boldsymbol{w}$. Despues de aplicar $\operatorname{ad} \boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{v}$, tenemos una suma no cero de vectores propios correspondientes a valores propios distintos de cero, lo que es absurdo. $\square$

Ahora, fijemos una subálgebra toral maximal $\mathfrak{h}$. Por la Proposición 6.1, $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$ es una familia de endomorfismos semisimples de $\mathfrak{g}$ que conmutan. Por el Teorema 1.6, podemos escribir a $\mathfrak{g}$ como una suma directa de subespacios $\mathfrak{g} = \coprod \mathfrak{g}_\alpha$, donde

$$\mathfrak{g}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} : \operatorname{ad}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}) = \alpha(\boldsymbol{h})\boldsymbol{v} \text{ para todo } \boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}\},$$

con $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Claramente, sólo un número finito $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ satisfacen la condición $\mathfrak{g}_\alpha \neq \mathbf{0}$. Por la Proposición 6.1, $C(\mathfrak{h})$ contiene a $\mathfrak{h}$ es claro que $\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{h})$.

Al conjunto de todos los funcionales α para los que $\mathfrak{g}_\alpha \neq \mathbf{0}$ lo denotaremos por Φ y llamaremos a sus elementos *raíces* de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$.

Definición 6.2. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple y $\mathfrak{h}$ una subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$. La descomposición*

$$\mathfrak{g} = C(\mathfrak{h}) \amalg \coprod_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

se le llama **descomposición de Cartan** *de $\mathfrak{g}$.*

Despues veremos que la descomposición de Cartan no depende de manera fuerte de la subálgerba toral maximal que elijamos.

A continuación, presentamos algunas propiedades de la descomposición de Cartan de una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$.

Teorema 6.2. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie semisimple y $\mathfrak{h}$ una subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$ de tal manera que $\mathfrak{g} = C(\mathfrak{h}) \amalg \coprod_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ es su descomposición de Cartan, entonces*

1. *Para $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, tenemos $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*
2. *Si $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\operatorname{ad}\boldsymbol{v}$ es nilpotente.*
3. *Si $\alpha + \beta \neq 0$, los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}_\beta$ son ortogonales con respecto a la forma de Killing.*
4. *La restricción de la forma de Killing a $C(\mathfrak{h})$ es no-degenerada.*

Demostración. 1. Se sigue de la identidad de Jacobi y bilinealidad del corchete de Lie.

2. Se sigue de la parte 1.

3. Sea $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}$ tal que $(\alpha+\beta)(\boldsymbol{h}) \neq 0$, enotnces para $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_\alpha, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}_\beta$ tenemos

$$\alpha(\boldsymbol{h})\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \kappa([\boldsymbol{h},\boldsymbol{w}],\boldsymbol{w}) = -\kappa(\boldsymbol{v},[\boldsymbol{h},\boldsymbol{w}]) = -\beta(\boldsymbol{h})\kappa(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}).$$

4. $C(\mathfrak{h})$ es ortogonal a todos los $\mathfrak{g}_\alpha$, con $\alpha \neq 0$. Si $\boldsymbol{v} \in C(\mathfrak{h})$ es ortogonal a $C(\mathfrak{h})$, entonces es ortogonal a todo $\mathfrak{g}$ y κ es no-degenerada.

□

Ahora, presentaremos mas propiedades de la descomposicón de Cartan que la simplificaran un poco.

Proposición 6.3. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra toral maximal y Φ el conjunto de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$. Si $\alpha \in \Phi$, entonces $-\alpha \in \Phi$*

Demostración. Si $-\alpha \notin \Phi$, entonces $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbf{0}$ y así, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathbf{0}$ para todo $\beta \in \mathfrak{h}^*$. Por tanto, $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$, lo que es absurdo, pues κ es no-degenerada y $\mathfrak{g}_\alpha \neq \mathbf{0}$. □

Ahora, veremos que $\mathfrak{h}$ es *autocentralizada.*

Proposición 6.4. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple y $\mathfrak{h}$ una subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h} = C(\mathfrak{h})$.*

La prueba se hace por pasos. Para ver los detalles, consulte [4] (p. 36).

(1) *$C(\mathfrak{h})$ contiene las partes semisimples y nilpotentes de todos sus elementos.*

(2) *Todas las partes semisimples de los elementos de $C(\mathfrak{h})$ está en $\mathfrak{h}$.*

(3) *La restricción de κ a $\mathfrak{h}$ es no-degenerada.*

(4) *$C(\mathfrak{h})$ es nilpotente.*

(5) *La intersección de $\mathfrak{h}$ con $(C(\mathfrak{h}))'$ es cero.*

(6) *$C(\mathfrak{h})$ es abeliana.*

(7) *$\mathfrak{h}$ es autocentralizada.*

Para uso posterior, enunciaremos el siguiente resultado.

Corolario 6.5. *La foram de Killing κ de $\mathfrak{g}$ restringida a $\mathfrak{h}$ es no-degenerada.*

Éste corolario nos permite identificar a $\mathfrak{h}$ con su dual $\mathfrak{h}^*$ mediante la relación $\alpha(\boldsymbol{h}) = \kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{h})$ como se presenta en la Proposición 1.7. Gracias a la Proposición 6.4, la descomposición de Cartan de una álgebra de Lie semisimple queda de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \amalg \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{6.1}$$

Definición 6.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una* **subálgebra de Cartan** *de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra nilpotente $\mathfrak{h}$ que es auto-normalizada, es decir, $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ (ver p. 58).*

El concepto de subálgebra de Cartan es la manera en que los textos clásicos (ver [11], [6]) abordan el estudio de las álgebras de Lie semisimples y el concepto de subálgebra toral, es una manera alternativa (ver [4]). En el caso cuando se trabaja con subálgebras de Cartan, se puede demostrar que si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie semisimple, entonces las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ son precisamente las subálgebras torales maximales (ver [11], p. 36). Aquí, mostraremos mas adelante que las subálgebras torales maximales de las álgebras de Lie semisimples son subálgebras de Cartan para así tener la equivalencia de estos dos conceptos.

Teorema 6.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgerba de Lie semisimple y $\mathfrak{h}$ una subálgerba toral maximal de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Por la Proposición 6.1, $\mathfrak{h}$ es abeliana y por tanto, nilpotente. Para ver que es auto-normalizada, sea $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}$ tal que $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}] \in \mathfrak{h}$ para todo $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}$. Por la descomposicón de Cartan en su forma reducida (6.1), podemos escribir $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{x}} + \sum_{\alpha \in \Phi} \boldsymbol{x}_\alpha$ donde $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{x}} \in \mathfrak{h}$ y $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ para $\alpha \in \Phi$. Por el Teorema 6.2 parte 1, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ y así, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}] \in \mathfrak{h}$ si y sólo si $[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{h}] = \boldsymbol{0}$ para toda $\alpha \in \Phi$. Así se concluye que $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{h}$. $\square$

La ventaja de trabajar ahora con subálgebras de Cartan es que podremos probar que la descomposicón de Cartan no depende de la subálgebra de Cartan que se elija, como se mostrará en la siguiente subsección.

Conjugación de subálgebras de Cartan

Éste teorema nos permite justificar la definición del rango de una álgebra de Lie y también nos dice que Φ no depende de $\mathfrak{h}$ en la correspondencia (6.2). Recordemos que el grupo de automorfismos interiores es denotado por $\operatorname{Inn}\mathfrak{g}$.

Teorema 6.7. *Cualesquiera dos subálgebras de Cartan de una álgebra de Lie semisimple* $\mathfrak{g}$ *son conjugadas bajo algún automorfismo* $\mathcal{A} \in \operatorname{Inn}\mathfrak{g}$.

Para la demostración se siguen los siguientes pasos, donde $\mathfrak{g}$ denotará una álgebra de Lie arbitraria:

1. Para cada elemento $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$, se define una *descomposición relativa al operador lineal* $\operatorname{ad}\boldsymbol{v}$ en subespacios invariantes $\mathfrak{g} = \coprod \mathfrak{g}_a(\operatorname{ad}\boldsymbol{v})$, donde

$$\mathfrak{g}_a(\operatorname{ad}\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g} : [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = a\boldsymbol{w}\}.$$

2. Las subálgebras $\mathfrak{g}_0(\operatorname{ad}\boldsymbol{v})$ se llaman *subálgebras de Engel.* Se demuestra que las subálgebras de Engel son auto-normalizadas.

3. Se define subálgebra de Cartan para $\mathfrak{g}$ de la misma forma que en el caso semisimple (recuerde que $\mathfrak{g}$ no necesariamente es semisimple).

4. Se demuestra que una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es de Cartan si y sólo si es de Engel y es minimal.

5. Decimos que $\boldsymbol{v}$ es *fuertemente* ad-*nilpotente* si existe un vector $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{g}$ tal que $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_a(\operatorname{ad}\boldsymbol{w})$, para algún $a \neq 0$. Denote por $\mathfrak{sn}(\mathfrak{g})$ el conjunto de todos los elementos fuertemente ad-nilpotentes de $\mathfrak{g}$ y por $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ al subgrupo de $\operatorname{Inn}\mathfrak{g}$ generado por $\exp^{\operatorname{ad}\boldsymbol{v}}$, con $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{sn}$.

6. Se demuestra que cuando $\mathfrak{g}$ es semisimple, $\mathscr{E}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Inn}\mathfrak{g}$.

7. Se demuestra que las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ son conjugadas bajo $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$, en el caso cuando $\mathfrak{g}$ es soluble.

8. Se demuestra que las subálgebras solubles maximales son conjugadas bajo $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$.

Ahora, si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}$ es nilpotente y por tanto, soluble. Luego, debe estar contenida en alguna subálgebra soluble maximal, que por el paso 8, son conjugadas bajo $\operatorname{Inn}\mathfrak{g}$. Finalmente, por el paso 7, se tiene el resultado. Para ver los detalles, consulte [4] en la página 78.

Ahora, se puede ver que el rango de una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, es igual al rango del sistema de raíces asociado a $\mathfrak{h}$ y de la relación (6.1) y la Proposición 6.9, se tiene la fórmula

$$\dim\mathfrak{g} = \operatorname{rank}\Phi + |\Phi|,$$

donde $|\Phi|$ denota la *cardinalidad* de Φ.

Recordemos el álgebra de las matrices diagonales $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$. Sabemos que es una álgebra abeliana y que además, es auto-normalizada, es decir, es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Luego, las subálgebras

$$\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})\cap\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}),$$

$$\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})\cap\mathfrak{o}(n,\mathbb{F}) \subset \mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$$

y

$$\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})\cap\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F}) \subset \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$$

son subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$ y $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$, respectivamente, y por el Teorema de Conjugación (6.7), sabemos que se pueden tomar estas subálgebras de Cartan para el caso de álgebras lineales.

En el caso de las álgebras excepcionales se puede recurrir al Teorema de Serre que presentaremos a continuación. Para un caso particular, puede consultar [3] en la página 339 o bien [4] en la página 103, donde se construye el álgebra G_2 y se determina una subálgebra de Cartan para esta.

Nota. A lo largo de este texto, no se ha demostrado que las álgebras clásicas $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ sean semisimples. Una idea para la demostración se encuentra en [4] en la página 102. Además, se puede demostrar que los primeros cuatro sistemas de raíces que se presentan en el Teorema 3.13 corresponden a las álgebras $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$, respectivamente (es por tal motivo que se denotan con los mismos símbolos).

Para encontrar ejemplos donde se traten las álgebras excepcionales F_4, E_6, E_7, E_8 puede consultar [3], en la página 359.

6.2 Propiedades de las raíces de una álgebra de Lie semisimple

En esta sección nos ocuparemos de vincular las propiedades del conjunto Φ de raíces de una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ con respecto a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y la definición de sistema de raíces dada en el capítulo 2.

Relaciones con la forma de Killing

En esta subsección veremos algunas consecuencias que tiene a no-degeneración de la foram de Killing en la propiedades de las raíces de una álgebra de Lie semisimple.

En toda esta subsección, $\mathfrak{g}$ denotará una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ el conjunto de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ y κ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$.

Proposición 6.8. *El conjunto Φ genera a todo el espacio $\mathfrak{h}^*$.*

Demostración. Si no fuese así, existiera un vector $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$ en $\mathfrak{h}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{h}) = 0$ para toda $\alpha \in \Phi$, es decir, $[\boldsymbol{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \Phi$. Como $\mathfrak{h}$ es abeliana, $[\boldsymbol{h}, \mathfrak{h}] = \mathbf{0}$. Por tanto, $[\boldsymbol{h}, \mathfrak{g}] = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{h} \in Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$, lo que es absurdo. □

Veamos las relciones de conmutación para los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$.

Proposición 6.9. *Para $\alpha \in \Phi$, seleccione $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, entonces $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{k}_\alpha$, donde $\alpha(\boldsymbol{h}) = \kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{h})$ para toda $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}$. Además, $\{\boldsymbol{k}_\alpha\}$ es base de $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.*

Demostración. La segunda aseveración se sigue de la Proposición 6.3 y de la primera. Si $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{h}$, entonces

$$\begin{aligned} \kappa(\boldsymbol{h}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]) &= \kappa([\boldsymbol{h}, \boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{h})\kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{h})\kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ &= \kappa(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}_\alpha)\kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \kappa(\boldsymbol{h}, \kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{k}_\alpha), \end{aligned}$$

por lo que $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] - \kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{k}_\alpha$ es ortogonal a $\mathfrak{h}$. La igualdad se sigue del Corolario 6.5. □

Es claro que si $\alpha \in \Phi$, entonces $\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha) \neq 0$. En efecto, si $\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha) = 0$, tendríamos que $[\boldsymbol{k}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = [\boldsymbol{k}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbf{0}$. Seleccione $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $\boldsymbol{y}_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tales que $\kappa(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{y}_\alpha) = 1$ para tener $[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{y}_\alpha] = \boldsymbol{k}_\alpha$. Luego, la subálgebra de $\mathfrak{g}$ generada por $\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{y}_\alpha, \boldsymbol{k}_\alpha$ es soluble, en particular, su álgebra derivada es nilpotente. Así, $\operatorname{ad} \boldsymbol{k}_\alpha$ es semisimple y nilpotente a la vez, lo que implica que $\operatorname{ad} \boldsymbol{k}_\alpha = \mathbf{0}$. Por tanto, $\boldsymbol{k}_\alpha \in Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$, lo que es absurdo. Éste hecho tiene la siguiente consecuencia.

Proposición 6.10. *Si $\alpha \in \Phi$ y $\boldsymbol{x}$ es un elemento no nulo de $\mathfrak{g}_\alpha$, entonces existe $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que la subálgebra generada por $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{h} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$. Además, $\boldsymbol{h}_\alpha = \frac{2}{\kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{k}_\alpha)} \boldsymbol{k}_\alpha$ y $\boldsymbol{k}_\alpha = -\boldsymbol{k}_{-\alpha}$.*

Demostración. Por la Proposición 6.3, podemos encontrar $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{2}{\kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{k}_\alpha)}$. Luego, definamos $\boldsymbol{h} = \frac{2}{\kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{k}_\alpha)} \boldsymbol{k}_\alpha$ para tener $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \boldsymbol{h}$. Mediante un cálculo rutinario, se muestra que éstos tres vectores satisfacen las relaciones $[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{x}] = 2\boldsymbol{x}$ y $[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}] = -2\boldsymbol{y}$. Luego, si definimos la función $\boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{h} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la extendemos linealmente, se obtine un isomorfismo como el que se requiere. La segunda aseveración se sigue por la manera en que se define $\boldsymbol{h}$. $\square$

Integridad y racionalidad de las raíces

En esta subsección haremos uso de los resultados recopilados en la sección 4.5 para desarrollar algunas de las propiedades más importantes de las raíces de una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ con respecto a la subálgerba de Cartan $\mathfrak{h}$.

Como se ve en la Proposición 6.10, para cada par de raíces α y $-\alpha$, tenemos una subálgebra $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ y gracias a los resultados de la subsección anterior, podemos dar una descripción completa de los $\mathfrak{s}_\alpha$-modulos, en particular, podemos describir $\operatorname{ad} \mathfrak{s}_\alpha$.

En este resultado se muestra además que el conjunto de raíces de una álgebra de Lie semisimple satisface el axioma (R2) de la Definición 2.2.

Proposición 6.11. *Para cada raíz α, el subespacio $\mathfrak{g}_\alpha$ es unidimensional y los únicos múltiplos de α que son raíces son $\pm\alpha$.*

Demostración. Consideremos el subespacio $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ generado por $\mathfrak{h}$ y todos los subespacios $\mathfrak{g}_{c\alpha}$, con $c \in \mathbb{F}$. Como $[\mathfrak{g}_{c\alpha}, \mathfrak{g}_{c'\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(c+c')\alpha}$, $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{s}_\alpha$-submodulo y por el Teorema 4.10, los pesos de $\boldsymbol{h}_\alpha$ son los enteros 0 y $2c = c\alpha(\boldsymbol{h}_\alpha)$, para $c \neq 0$ con $\mathfrak{g}_{c\alpha} \neq \mathbf{0}$; en particular, todos los posibles valores de c son múltiplos enteros de $\frac{1}{2}$. Ahora, $\mathfrak{s}_\alpha$ actúa trivialmente en $\operatorname{Ker}\alpha \cong \mathfrak{h}/\operatorname{Span}\{\boldsymbol{h}_\alpha\}$, mientras que $\mathfrak{s}_\alpha$ es un submodulo irreducible de $\mathfrak{a}$ sobre sí mismo. Así, $\operatorname{Ker}\alpha$ y $\mathfrak{s}_\alpha$ agotan la ocurrencia del peso 0 de $\boldsymbol{h}_\alpha$ y los únicos pesos pares en $\mathfrak{a}$ son ± 2, es decir, el doble de una raíz no es una raíz. Ésto implica que $\frac{1}{2}\alpha$ no es raíz, por lo que 1 no es peso de $\boldsymbol{h}_\alpha$ en $\mathfrak{a}$ y como los pesos forman una serie aritmética con diferencia 2, se sigue la segunda aseveración de la proposición. Finalmente, el Corolario 4.11 muestra que $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}_\alpha$; en particular, cada subespacio $\mathfrak{g}_\alpha$ tiene dimensión 1. $\square$

Para examinar la acción de $\mathfrak{s}_\alpha$ en los subespacios $\mathfrak{g}_\beta$, definimos la *α-cadena que pasa por β*, o bien la *α-cadena por β*, como el conjunto de todas las raíces de la forma $\beta + k\alpha$, para $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \neq \pm\beta$.

Proposición 6.12. *Si la suma de dos raíces α y β es nuevamente una raíz, entonces $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Además, el número $\beta(\boldsymbol{h}_\alpha)$ es un entero y $\beta - \beta(\boldsymbol{h}_\alpha)\alpha \in \Phi$. Más aún, si q y r son los enteros no negativos más grandes para los que $\beta - r\alpha$ y $\beta + q\alpha$ son raíces, entonces $\beta + k\alpha \in \Phi$, para todo entero $-r \leq k \leq q$ y $r - q = \beta(\boldsymbol{h}_\alpha)$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{b} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$. Por la Proposición 6.11, cada $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ tiene dimensión 1 y $\beta \neq k\alpha$, por lo que $\mathfrak{b}$ es un $\mathfrak{s}_\alpha$-submodulo de $\mathfrak{g}$ cuyo espacio correspondiente al peso $\beta(\boldsymbol{h}_\alpha) + 2k$ es unidimensional, para los distintos valores de k. Como los únicos pesos que aquí aparecen son 0 y 1, el Corolario 4.11 implica que $\mathfrak{b}$ es irreducible. Si q y r son seleccionados como en el enunciado de la proposición, entonces el peso más alto es $\beta(\boldsymbol{h}_\alpha) + 2q$ y el más bajo es $\beta(\boldsymbol{h}_\alpha) - 2r$. Los pesos en $\mathfrak{b}$ forman una progresión aritmética con diferencia 2, lo que implica que las raíces $\beta + k\alpha$ forman una cadena. Nótese también que $(\beta - r\alpha)(\boldsymbol{h}_\alpha) = -(\beta + q\alpha)(\boldsymbol{h}_\alpha)$. Finalmente, la imagen de $\mathfrak{g}_\beta$ bajo $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$ es $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, por la Proposición 4.9. $\square$

Podemos ver que la Proposición 6.12 muestra que el conjunto Φ de raíces de una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ con respecto a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ satisface las condiciones del Teorema 2.9 de la Página 19. Otra concecuencia importante de la Proposicón 6.12 es la siguiente.

Corolario 6.13. $\mathfrak{g}$ *es generada, como álgebra de Lie, por los espacios* $\mathfrak{g}_\alpha$.

Por el Corolario 6.5, podemos definir en $\mathfrak{h}^*$ una forma bilineal a travéz de la forma de Killing, $\langle \alpha, \beta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \kappa(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{k}_\beta)$. Sea $\Delta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ una base de $\mathfrak{h}^*$ conformada por raíces. El siguiente resultado nos muestra la especial naturaleza de ésta base.

Proposición 6.14. *Si β es una raíz, entonces β se expresa como combinación lineal racional de las raíces α_i. Además, la forma $\langle , \rangle$ es racional en el $\mathbb{Q}$-subespacio $\mathbf{Q}$ de $\mathfrak{h}^*$ generado por las raíces.*

Demostración. Escribamos $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $\langle \beta, \alpha_j \rangle = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ y multilpicando ambos lados por $\frac{2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$, se tiene

$$2 \frac{\langle \beta, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} c_i,$$

lo que podemos interpretar como un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros de orden $\ell \times \ell$. Como Δ es una base y la forma $\langle , \rangle$ es no-degenerada, la matriz

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle & \cdots & \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle & \cdots & \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \end{pmatrix}$$

tiene determinante distinto de cero, por lo que la matriz del sistema también satisface tal condición. Por tanto, existe una única solución sobre $\mathbb{Q}$. Así se tiene la primera aseveración.

Ahora, para $\gamma, \delta \in \mathfrak{h}^*$, tenemos que

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \kappa(\boldsymbol{k}_\gamma, \boldsymbol{k}_\delta) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(\boldsymbol{k}_\gamma) \alpha(\boldsymbol{k}_\delta) = \sum_{\alpha \in \Phi} \langle \alpha, \gamma \rangle \langle \alpha, \delta \rangle ;$$

en particular, para $\beta \in \Phi$, se tiene $\langle \beta, \beta \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \langle \alpha, \beta \rangle^2$ y dividiendo por $\langle \beta, \beta \rangle^2$, tenemos

$$\frac{1}{\langle \beta, \beta \rangle} = \sum_{\alpha \in \Phi} \left(\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \right)^2 \in \mathbb{Q},$$

pues $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$. Se concluye que $\langle \beta, \beta \rangle$ es racional y por bilinealidad, todos los productos de raíces son racionales. Como Φ genera a $\mathbf{Q}$, se sigue la segunda afirmación. $\square$

Corolario 6.15. *La forma* $\langle , \rangle$ *es positiva definida en* $\mathbf{Q}$.

Demostración. Para $\gamma \in \mathbf{Q}$, tenemos $\langle \gamma, \gamma \rangle = \sum \langle \alpha, \gamma \rangle^2$, es decir, $\langle \gamma, \gamma \rangle$ es suma de cuadrados de números racionales y por tanto, es positivo. $\square$

Ahora, consideremos el espacio $\mathbf{E} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{Q}$ y definamos las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (a \otimes \boldsymbol{v}) + (b \otimes \boldsymbol{w}) &= (a + b) \otimes (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \\ \alpha(a \otimes \boldsymbol{v}) &= (\alpha a) \otimes \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Es claro que $\mathbf{E}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales y que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{E} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{Q} = \ell$.

Además, con la forma bilineal $\langle , \rangle : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbb{Q}$ definiremos una forma en $\mathbf{E}$ de la siguiente manera: para $a \otimes \boldsymbol{v}, b \otimes \boldsymbol{w} \in \mathbf{E}$ definimos $\langle a \otimes \boldsymbol{v}, b \otimes \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$.

Inmediatamente se verifica que la función $\langle , \rangle : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica positiva definida. Así, $(\mathbf{E}, \langle , \rangle)$ es un espacio euclidiano y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.16. *Sean* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie semisipmle,* $\mathfrak{h}$ *una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *y* Φ *el conjunto de raíces de* $\mathfrak{g}$ *con respecto a* $\mathfrak{h}$*, entonces* Φ *es un sistema de raíces en el sentido de la definición 2.2*

Así, hemos establecido una correspondencia

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \mapsto (\mathbf{E}, \Phi). \tag{6.2}$$

A continuación, veremos que la asignación (6.2) es uno-a-uno.

6.3 Teorema de isomorfismo

La importancia del teorema de isomorismo es que muestra que si dos álgerbas de Lie semisimples tienen el mismo sistema de raíces, entonces son isomorfas, es decir, la correspondencia (6.2) es uno-a-uno. Primero, reduciremos el problema al caso cuando $\mathfrak{g}$ es simple.

Proposición 6.17. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie simple con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y sistema de raíces Φ, entonces Φ es irreducible.*

Demostración. Supongamos que la conclusión de la proposición es falsa, entonces Φ se puede descomponer como la unión de dos subconjuntos, digamos Φ_1 y Φ_2, no vacíos mutuamente ortogonales. Si $\alpha \in \Phi_1$ y $\beta \in \Phi_2$, entonces $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle \neq 0$ para $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ y así, $\alpha + \beta$ no es una raíz y $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathbf{0}$. Luego, la subálgebra $\mathfrak{a}$ generada por los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$, con $\alpha \in \Phi_1$, es centralizada por todos los espacios $\mathfrak{g}_\beta$, con $\beta \in \Phi_2$; en particular, $\mathfrak{a}$ es una subálgebra propia de $\mathfrak{g}$, pues $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$. Más aún, para $\alpha \in \Phi_1$ tenemos $\mathfrak{g}_\alpha \subset N(\mathfrak{a})$ y por tanto, $N(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{a}$ es un ideal propio de $\mathfrak{g}$. Esto contradice la simplicidad de $\mathfrak{g}$. □

En adelante, $\mathfrak{g}$ será una álgebra de Lie semisimple con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y sistema de raíces Φ.

Corolario 6.18. *Si $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ es la descomposición en ideales simples, entonces $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ son subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}_i$ y el correspondiente sistema de raíces irreducible Φ_i es un subsistema de Φ tal que $\Phi = \bigcup \Phi_i$ es la descomposición en sus componentes conexas.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cap \bigoplus \mathfrak{g}_i = \bigoplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = \bigoplus \mathfrak{h}_i$ y que cada $\mathfrak{h}_i$ es una subálgebra toral de $\mathfrak{g}_i$. La maximalidad de $\mathfrak{h}_i$ es como sigue: Si $\mathfrak{b}$ es una subálgebra toral de $\mathfrak{g}_i$ que contiene propiamente a $\mathfrak{h}_i$, entonces $\mathfrak{b}$ es subálgebra toral de $\mathfrak{g}$, centraliza a todas las subálgebras $\mathfrak{h}_j$ para toda $j \neq i$ y se genera con $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{h}_j$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene propiamente a $\mathfrak{h}$, lo que es absurdo. Ahora, si $\alpha \in \Phi_i$, entonces podemos extender el funcional α a un funcional en $\mathfrak{h}$ definiendolo como 0 en $\mathfrak{h}_j$, para $j \neq i$. Así, α es un raíz de $\mathfrak{g}$ relativa a $\mathfrak{h}$. Recíprocamente, si $\alpha \in \Phi$, existe un índice i tal que $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_\alpha] \neq \mathbf{0}$ y por tal razón, $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i$. Concluimos que $\alpha|_{\mathfrak{h}_i}$ es una raíz de $\mathfrak{g}_i$ relativa a $\mathfrak{h}_i$. □

Este resultado reduce el problema de caracterizar las álgebras de Lie semisimples por su sistema de raíces al problema de caracterizar las álgebras simples por su sistema de raíces irreducible. Ahora, encontraremos un conjunto de generadores para $\mathfrak{g}$.

Proposición 6.19. *$\mathfrak{g}$ es generado por los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ con $\alpha \in \Delta$.*

Demostración. Sea β una raíz positiva, por el Corolario 2.15, existen raíces simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (no necesariamente diferentes) tales que

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$$

y para $1 \leq j \leq k$ cada suma parcial $\alpha_1 + \cdots + \alpha_j$ es una raíz positiva y por la Proposición 6.12, sabemos que si γ y δ son raíces cuya suma también es raíz, entonces $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\delta] = \mathfrak{g}_{\gamma+\delta}$. Usando inducción sobre k, podemos mostrar que $\mathfrak{g}_\beta$ esta contenida en la subálgebra de $\mathfrak{g}$ generada por los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$, con α simple; similarmente, si β es negativa, esta contenida en la subálgebra generada por los espacios $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, con α simple. Finalmente, como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \amalg \coprod_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha\in\Phi}[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, se sigue el resultado. $\square$

La demostración se puede encontrar en [4] en la página 74. Este resultado nos dice que es suficiente concentrarnos en las raíces simples en lugar de trabajar con todo el sistema de raíces.

Recordemos que un isomorfismo de sistemas de raíces proviene de un isomorfismo de los espacios euclidianos donde los sistemas se encuentran. Además, el isomorfismo puede tomarse como una isometría, pues los axiomas de sistemas de raíces no se afectan si multiplicamos por un escalar positivo al producto interior, pues sólo aparecen razones de los productos interiores de las raíces.

Teorema 6.20. (Teorema de Isomorfismo). *Sea $\widetilde{\mathfrak{g}}$ una álgebra simple con subálgebra de Cartan $\widetilde{\mathfrak{h}}$ y sistema de raíces $\widetilde{\Phi}$. Supongamos que $\phi : \Phi \to \widetilde{\Phi}$ es un isomorfismo, entonces ϕ induce un isomorfismo φ entre las subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}$ y $\widetilde{\mathfrak{h}}$. Para cada $\alpha \in \Delta$, seleccione isomorfismos de álgebras de Lie $\varphi_\alpha : \mathfrak{g}_\alpha \to \widetilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}}$, entonces existe un único isomorfismo que extiende al isomorfismo φ y a todos los φ_α.*

Demostración. (Unicidad). Cada $\boldsymbol{x}_\alpha \neq \mathbf{0}$ en $\mathfrak{g}_\alpha$ determina un único vector $\boldsymbol{y}_\alpha$ en $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{y}_\alpha] = \boldsymbol{h}_\alpha$, para cada $\alpha \in \Delta$; por la Proposición 6.19, $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{y}_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto de generadores para $\mathfrak{g}$. Si $\bar{\varphi}$ y ψ son dos extensiones de φ y de los φ_α, entonces $\bar{\varphi} = \varphi_\alpha = \psi$ en cada $\mathfrak{g}_\alpha$, con $\alpha \in \Delta$. Por linealidad, $\bar{\varphi} = \psi$.

(Existencia). Se puede resumir en los siguientes tres pasos:

1. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son escencialmente la misma álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ contiene una subálgebra $\mathfrak{d} = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}\} \cong \mathfrak{g}$.

2. Muestre que $\mathfrak{d}$ es una subálgebra propia.

3. Muestre que las proyecciones de $\mathfrak{d}$ sobre el primer y segundo factor es un isomorfismo de álgebras de Lie.

□

Para los detalles, vease [4] (p. 75).

6.4 Teorema de Serre

Éste Teorema nos permite relacionar a cada Sistema de raíces Φ una álgebra de Lie de dimensión finita que resulta ser semisimple y su sistema de raíces es presisamente Φ, es decir, es la asignación inversa de (6.2).

Teorema 6.21. (Serre). *Sean Φ un sistema de raíces, con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$, y $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie generada por los 3ℓ generadores $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{h}_i$ sujetos a las siguientes relaciones:*

(S1) $[\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{h}_j] = \mathbf{0}$;

(S2) $[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i] = \boldsymbol{h}_i$ *y si* $i \neq j$, $[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j] = \mathbf{0}$;

(S3) $[\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{x}_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \boldsymbol{x}_j$ *y* $[\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{y}_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \boldsymbol{y}_j$.

(S_{ij}^+) $(\operatorname{ad} \boldsymbol{x}_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(\boldsymbol{x}_i) = \mathbf{0}$, *y*

(S_{ij}^-) $(\operatorname{ad} \boldsymbol{y}_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(\boldsymbol{y}_i) = \mathbf{0}$,

Entonces $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie semisimple, con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ generada por los $\boldsymbol{h}_i$ y con sistema de raíces Φ.

Aquí, $\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{h}_{\alpha_i}$ con $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \alpha_i(\boldsymbol{h}_j)$.

La demostración requiere del estudio de álgebras de Lie definidas por *generadores y relaciones* que dan origen a lo que se conoce como una *presentación del álgebra de Lie* y se puede encontrar en [4] (p. 95).

6.5 Teorema de clasificación de álgebras de Lie simples

Como consecuencia de la vinculación de los sistemas de raíces y las álgebras de Lie semisimples, vemos que el Teorema de Clasificación de los sistemas de raíces irreducibles son genera un Teorema de Clasificación para las álgebras de Lie simples. En esta sección, enunciaremos este Teorema.

Teorema 6.22. *Las álgebras de Lie simples a las cuales se les asocian los sistemas de raíces irreducibles clasificados en el Teorema 3.13 están descritas por la siguiente tabla:*

Tabla 6.1: Álgebras de Lie simples.

Sistema de raíces	Álgebra de Lie	Rango	Dimensión
A_ℓ	$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{F})$	$\ell \geq 1$	$\ell(\ell+2)$
B_ℓ	$\mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{F})$	$\ell \geq 2$	$\ell(2\ell+1)$
C_ℓ	$\mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{F})$	$\ell \geq 3$	$\ell(2\ell+1)$
D_ℓ	$\mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{F})$	$\ell \geq 4$	$\ell(2\ell-1)$
E_6	$\mathfrak{e}_6$	6	78
E_7	$\mathfrak{e}_7$	7	133
E_8	$\mathfrak{e}_8$	8	248
F_4	$\mathfrak{f}_4$	4	52
G_2	$\mathfrak{g}_2$	2	14

Conclusiones

En un principio, el problema de clasificar las álgebras de Lie semisimples sobre un campo algebraicamente cerrado y de característica cero puede verse un poco difícil. Aun que es posible simplificar el trabajo de clasificación a sólo tener que conocer las álgebras de Lie simples, la tarea de clasificar estas estructuras es bastante complicada.

En cambio, la clasificación de los sistemas de raíces abstractas no exige más conocimientos que los fundamentos del álgebra lineal, los espacios euclidianos, un poco de topología de espacios con producto interior y geometría euclidiana. Además, el Teorema de Clasificación de los diagramas de Dynkin para los sistemas irreducibles no presenta mayor dificultad que el ir eliminando casos, gracias a las propiedades de los sistemas de raíces previamente estudiadas.

La relación entre las álgebras de Lie y los sistemas de raíces en abstracto presentada en el Teorema de Isomorfismo nos asegura que se puede trasladar la clasificación de los sistemas irreducibles para obtener la clasificación de las álgebras de Lie simples. Al conocer las álgebras de Lie simples, se pueden obtener las álgebras de Lie semisimples mediante sumas directas de álgebras simples, como lo vimos en el estudio de las propiedades principales de álgebras de Lie semisimples.

A su vez, la importancia del estudio de las álgebras de Lie semisimples sobre un campo algebraicamente cerrado y de característica cero radica en el Teorema de descomposición de Levi, al permitirnos expresar a una álgebra de Lie general como una suma semidirecta de un ideal soluble y una subálgebra semisimple.

Así, los sistemas de raíces se convierten en una herramienta muy útil en el estudio de álgebras de Lie, además de ser un objeto independiente y por tal motivo, merece atención especial. Es por eso que el enfoque de este trabajo fue el estudiar los sistemas de raíces antes de introducirnos a la Teoría de álgebras de Lie, donde históricamente se presenta una excelente aplicación de los sistemas de raíces.

Concluyo este trabajo, esperando haber dado una motivación para acercarse a la Teoría de álgebras de Lie y a sus sistemas de raíces, encontrando en estas áreas un buen lugar para aplicar muchos de los conocimientos adquiridos en los cursos de álgebra abstracta y álgebra lineal.

Bibliografía

[1] Birkhoff, G.; MacLane, S., *A Survey of Modern Algebra, 4th edition*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1977.

[2] Dávila, G.; Flores, R.; Voroviev, Yu., *Álgebra Lineal: Teoría y Problemas*. México: UniSon, 2006.

[3] Fulton, W.; Harris, J., *Representation Theory: A First Course*. New York: Springer, 1991.

[4] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1972.

[5] Hungerford, T. W., *Algebra*. New York: Springer, 1974.

[6] Jacobson, N., *Lie Algebras*. New York: Wiley Interscience, 1962.

[7] Knapp, A. W., *Lie Groups Beyond an Introduction*. Boston: Birkhäuser, 1996.

[8] Lang, S., *Álgebra*. Madrid: Aguilar S. A. de Ediciones, 1973.

[9] Lang, S. *Álgebra Lineal*. México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

[10] Rotman, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups, fourth edition*. New York: Springer-Verlag, 1995.

[11] Samelson, H., *Notes on Lie Algebras*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1969.