Homología Singular, Construcción, Ejemplos y Aplicaciones

Jesús Tadeo Ibarra Tacho

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **9**

1.1. Algebraicos 9

1.1.1. Anillos 9

1.1.2. Módulos 11

1.1.3. Teoremas de isomorfismo para módulos 12

1.1.4. Suma directa y módulos libres 13

1.2. Topológicos 16

1.2.1. Espacios topológicos, Definición y Ejemplos 16

1.2.2. Interior y Cerradura 17

1.2.3. Continuidad 18

1.2.4. Homeomorfismos 20

1.2.5. Conexidad y Arcoconexidad 23

2. Geometría Afín y Homología singular **29**

2.1. Geometría Afín 29

2.1.1. Espacio Afín 29

2.1.2. Independencia Afín 31

2.1.3. Transformaciones afines 34

2.1.4. Simplejos Singulares 38

2.1.5. Operador frontera 41

2.1.6. Ciclos y fronteras 47

2.1.7. Homología 48

2.1.8. Homología y Componentes Arcoconexas 49

2.1.9. Homomorfismo inducido 55

3. Teorema de invarianza homotópica **59**
3.1. Homotopía 59
3.1.1. Homotopía de funciones 59
3.1.2. Homotopía de espacios 62
3.2. El teorema de invarianza homotópica 64

4. Homología Relativa **73**
4.1. Homologia relativa 73
4.1.1. Ciclos y fronteras relativas 73
4.1.2. Homomorfismo Inducido 77
4.2. Sucesión Exacta 81

5. El Teorema de escisión **87**
5.1. Dividiendo simplejos afines 87
5.2. El operador Subdivisión 89
5.3. Diametro de la Subdivisión 91
5.4. El Teorema de Excisión 95

6. Aplicaciones **101**
6.1. La homología de las Esferas 101
6.1.1. La esfera y el Disco 101
6.1.2. Homología de S^n 103
6.2. El teorema de Brouwer 106
6.3. Isometrías en la esfera 107
6.4. Campos vectoriales en la esfera S^n 109

Apéndice. Categorias y Funtores **113**

Introducción

La topología es el estudio de la continuidad, esto es, el estudio de todas aquellas propiedades que se preservan bajo funciones continuas. Esta definición si bien no nos dice mucho del concepto, es muy acertada en el siguiente sentido: Cuando estudiamos calculo definimos la continuidad de una función real de variable real, estudiamos sus propiedades y vemos la importancia del concepto, principalmente relacionado con cuestiones de convergencia; el concepto de espacio topológico es una abstracción de las propiedades que se preservan bajo funciones continuas en los espacios euclidianos más en concreto, $\mathbb{R}^n$, de esta forma tiene sentido hablar de funciones continuas en estos espacios. Decimos que dos espacios topológicos son equivalentes si sus topologias son las mismas, salvo quisas por el nombre de los objetos, esto es, existe una función continua con inversa continua entre un espacio y el otro, concepto que veremos con más detalle en el capítulo 1; a esta equivalencia le llamamos homeomorfismo.

Para subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ podemos pensar en homeomorfismos como una función que deforma el espacio doblando, estirando, contrayendo, expandiendo, etc, sin pegar puntos ni hacer cortes, una noción intuitiva por la que la topología es conocida también como la geometría de la bola de goma.

De esta forma, un problema muy importante y a la vez natural es el siguiente: dados dos espacios topológicos, como saber si estos son homeomorfos o no, esto es, si existe una función continua con inversa continua de uno en el otro.

Atacar el problema en general puede muy complicado, de hecho es un problema abierto. En principio si la respuesta fuera afirmativa, tendríamos que exibir una función que cumpla con las condiciones. Si los espacios resultan ser no homeomorfos, la situación puede ser aún más complicada, pues tenemos que demostrar que no existe dicha función, lo cual no podemos descartar simplemente por no tener exito en encontrarla.

Incluso en subespacios de $\mathbb{R}^3$ tenemos este problema como lo muestra la figura 1 . En ella tenemos una esfera, una toro y un doble toro, intuitivamente no podemos deformar la esfera continuamente para obtener el toro, análogamete tenemos la misma situación con cualesquiera dos de ellos, pero demostrar que no existe tal función no depende de propiedades elementales.

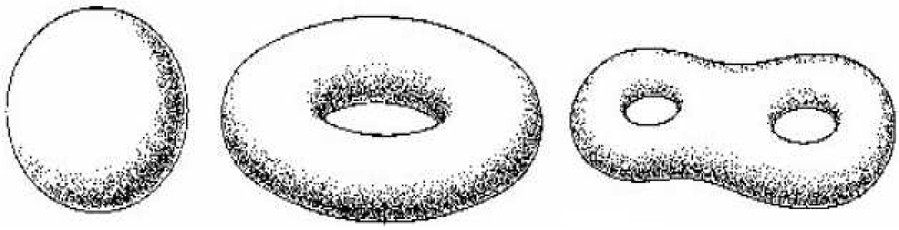


Figura 1: Espacios No Homeomorfos

En un curso básico de topología se estudian invariantes topológicos, esto es, propiedades que se preserven por continuidad, de manera que si tenemos dos espacios topológicos tales que uno de ellos tiene tal propiedad y el otro no la tiene, estos no pueden ser homeomorfos, por lo que tendríamos una respuesta negativa a la pregunta.

Los invariantes que se estudian en topología algebraica son de naturaleza algebraica, esto es, si X es un espacio topológico, a X le asignamos un espacio $h(X)$ de tal forma que $h(X)$ es un grupo,módulo,espacio vectorial o álgebra o alguna otra estructura algebraica, de tal forma que si $f : X \to Y$ es continua, le asignamos una función $h(f) : h(X) \to h(Y)$ que $h(f)$ es un homomorfismo y que $h(fg) = h(f)h(g)$.

De esta manera estamos pasando de la topología al álgebra, por lo que propiedades algebraicas de $h(X)$ serán invariantes topológicos para X, donde en muchas ocaciones, el espacio $h(X)$ es mucho más simple de estudiar.

El invariante a estudiar en esta tesis en un módulo, llamado el módulo de homología de X, que puede ser un grupo abeliano si tomamos coeficientes en $\mathbb{Z}$, hecho que veremos en el capítulo 2. Este invariante funciona muy bien en espacios que provienen directamente de la geometría, pero se define para un espacio topológico arbitrario.

El problema del homeomorfismo es ya de por si, bastante importante para justificar el estudio de la homología, pero más aún, tenemos que esta herramienta una ves contruida y trabajada tiene aplicaciones muy importantes como el teorema del punto fijo de Brouwer, del cual incluimos una demostración en el capítulo 6.

En el capítulo 1 estudiamos todo el material básico sobre algebra y topología, de manera que la tesis es autocontenida.

Aquí definimos módulos, presentamos los teoremas de isomorfismo y estudiamos sumas directas y módulos libres.

En la parte topológica definimos espacio topológico, continuidad , el material básico acerca de esta, conexidad, arcoconexidad y compacidad.

En el capítulo 2 construimos la homología del espacio, empezamos estudiando geometría afín de una manera elemental, obtenemos lo necesario con respecto a la convexidad y las coordenadas baricéntricas.

Cuando definimos homología, calculamos la homología de un punto, vemos lo que pasa en las componentes arcoconexas y otras propiedades elementales, terminamos el capitulo viendo cuestiones funtoriales de ésta.

En el capítulo 3 empezamos estudiando homotopías de manera elemental, definimos la homotopía de funciones y la homotopía de espacios topológicos a travez de la anterior, estudiamos una retracción y vemos que los módulos de homología son invariantes homotópicos.

En el capítulo 4 estudiamos la homología con respecto a un subespacio, recontruimos el concepto de homología ahora para pares de espacios y verificamos sus propiedades elementales, después de esto estudiamos la sucesión exacta de homología, objeto fundamental en el estudio del cálculo de la homología.

En el capítulo 5 estudiamos el teorema de escisión, basicamente buscamos ver que podemos dividir un simplejo en simplejos mas pequeños que representen la misma clase de homología, de esta manera, el teorema de escisión establece que ciertos subespacios son despreciables en términos de homología de una pareja (X, A), esto es,que podemos omitir este subespacio U de X del par (X, A) de manera que la homología permanece intacta.

El ultimo capítulo es de aplicaciones, calculamos la homología de las esferas, demostramos el teorema del punto fijo de Brouwer y el teorema de la Bola peluda.

Por cuestiones de tiempo y espacio, ciertos resultados acerca de la homología quedaron fuera del presente trabajo, ejemplo de ellas fueron grupo fundamental, la relación entre $\pi_1(X)$ y $H_1(X)$, complejos CW, la sucesión de Mayer Vietoris, fundamentales en el cálculo de la homología de una gran cantidad de espacios, esto porque se concentró el trabajo en estudiar la homología de las esferas, estos resultados como muchos otros se pueden encontrar en [4], [3], [9].

Agradecimientos

Deseo agradecer muy en especial a mi familia, pricipalmente a mis padres Evelia Tacho Gomez y Francisco Bernardo Ibarra Dominguez por haberme dado la vida y segundo por haberme apoyado en todo y en particular con mis estudios. Por todo el apoyo incondicional que me dieron para seguir con esto y también por el entendimiento y paciencia sobre el tiempo que pase en la escuela. A mis dos hermanas, Patricia María Ibarra Tacho y Lizette Guadalupe Ibarra Tacho por el apoyo y confianza mostrado a lo largo de este tiempo, así mismo agradesco el apoyo mostrado por mis abuelos, primos, tios y familia en general de la que estoy muy orgulloso de pertenecer.

Agradesco profundamente a mis maestros, a todos los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora por la enorme labor de educación que me brindaron a lo largo de la carrera, todas esas horas de clase donde me fui formando como matemático y que influyeron de gran manera en mis decisiones academicas. Especialmente quiero agradecer a mi director de Tesis Dr. Martín Eduardo Frías Armenta y a mis sinodales M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá, M.C. Guillermo Dávila Rascón y Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa, por el enorme trabajo de revisión de Tesis que estos desarrollaron, por tomarse el tiempo de hacer todas las debidas correcciones, críticas, comentarios así como el apoyo brindado a lo largo de esta, con las cuales este trabajo no sería el mismo. Así Mismo quiero agradecer al Dr. Ramiro Àvila Godoy quien fue mi maestro en la preparatoria y que influyó enormemente para que estudiara esta carrera.

Muy en especial quiero agradecer a Rosa Ileana Ybarra Cruz por ser mi mejor amiga, haber estado conmigo de una u otra forma por todos estos años y por toda esa confianza que siempre senti de ella, que me hizo pasar por grandes momentos y siempre ha estado presente, una persona que indiscutiblemente ha influido mucho en mi vida. Quiero agradecer a mis amigos, compañeros de clase y todas esas personas que han estado conmigo a lo largo de mi vida y que me han apoyado dentro y fuera de la escuela, en cuestiones academicas y otras personales por los grandes momentos que hemos pasado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Algebraicos

1.1.1. Anillos

Definición 1.0.1. *Sea R un conjunto no vacío y sean $+ : R \times R \to R$ y $\cdot : R \times R \to R$ dos operaciones, denotadas como*

$$\begin{aligned} +(a,b) &:= a+b \\ \cdot(a,b) &:= a \cdot b \end{aligned}$$

Llamadas suma y producto respectivamente, se dice que $(R,+,\cdot)$ es un ***anillo*** *si*

1. *$(R,+)$ es un grupo abeliano, esto es:*
   - $(a+b)+c = a+(b+c)$ *para todo $a,b,c \in R$.*
   - *Existe un elemento $0 \in R$ tal que $a+0=0 \quad \forall a \in R$.*
   - *Para cada $a \in R$ existe un elemento $(-a) \in R$ tal que $a+(-a)=0$.*
   - $a+b=b+a \quad \forall a,b \in R$.
2. *$(R,\cdot)$ es un semigrupo, esto es:*
   - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *para todo $a,b \in R$*
3. *se cumplen las leyes distributivas, es decir*

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *para todo* $a, b, c \in R$
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *para todo* $a, b, c \in R$

Usualmente se indicará $(R, +, \cdot)$ simplemente por R, y al producto $a \cdot b$ por yuxtaposición, esto es, ab denotará $a \cdot b$. Al elemento neutro de la suma siempre lo denotaremos por 0. Cuando manejemos expresiones con sumas y productos, el producto tiene prioridad sobre la suma, esto es, $ab + c$ denota $(ab) + c$ y no $a(b + c)$.

A continuación definiremos ciertas clases particulares de anillos, que reciben un nombre especial por cumplir con axiomas adicionales.

Definición 1.0.2. *Si existe un elemento neutro para el producto, decimos que R es un anillo con unitario, o anillo con* 1*, y a ese neutro le llamamos elemento unitario o* 1 *del anillo.*

Si $\cdot$ *es conmutativa, es decir,* $a \cdot b = b \cdot a$ *para cada par* $a, b \in R$*, decimos que R es un anillo conmutativo, si* $(R \backslash \{0\}, \cdot)$ *es un grupo diremos que R es un anillo con división, si se cumplen estas últimas dos, diremos que R es un campo.*

Ejemplo 1.1. *Sean* $(R, +, \cdot) = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$*,* $R = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$*,* $R = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*, ó* $R = (\mathbb{C}, +, \cdot)$*, con las operaciones usuales, entonces R es un anillo, en cualquier caso, conmutativo con 1, nótese que todos excepto* $\mathbb{Z}$ *son campos.*

Ejemplo 1.2. *Sea* $(R, +, \cdot)$ *el conjunto de polinomios con coeficientes complejos con las operaciones + y* $\cdot$ *usuales, este es un anillo conmutativo con 1.*

Ejemplo 1.3. *Sea R el conjunto de matrices cuadradas de nxn con coeficientes complejos, con la suma definida componente a componente y la multiplicación de matrices usual, este es un anillo no conmutativo con* 1 *para* $n > 1$.

Gran parte de la teoría que veremos a lo largo del presente trabajo es cierta para anillos en general, historicamente la homología surgió usando coeficientes enteros, $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con 1, propiedades que son suficientes para establecer los resultados básicos de la teoría, usaremos los axiomas de anillo y estos dos axiomas adicionales para referirnos a un anillo, estas son, conmutatividad y elemento unitario.

Dicho de otra forma, **anillo conmutativo con** 1 **será llamado simplemente anillo** de ahora en adelante.

1.1.2. Módulos

Definición 1.0.3. *Sea R un anillo y $(M, +)$ un grupo abeliano. Diremos que M es un R-**módulo** si existe una función $\cdot : R \times M \to M$,denotada por $\cdot(a, m) \mapsto am$ que cumple lo siguiente:*

1. $(a + b)m = am + bm$ *para cada $a, b \in R$ y para cada $m \in M$*
2. $a(m + n) = am + an$ *para cada $a \in R$ y para cada $m, n \in M$*
3. $ab(m) = a(bm)$ *para cada $a, b \in R$ y para cada $m \in M$*
4. $1m = m$ *para cada $m \in M$*

Ejemplo 1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre F, entonces V es un F-modulo.*

Ejemplo 1.5. *Sea $(G, +)$ un grupo abeliano, entonces G es un $\mathbb{Z}$-módulo, con la operación*

$$nx = \begin{cases} 0x = 0 & \\ (n-1)x + x & si\ n > 0 \\ -((-n)x) & si\ n < 0 \end{cases}$$

Cuando R forma un campo, un R-módulo resulta ser un espacio vectorial, en este sentido el concepto de R-módulo es una generalización de el de espacio vectorial.

Definición 1.0.4. *Sean M, N R-módulos, y $f : M \to N$ decimos que f es un homomorfismo de R-módulos si*

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$
2. $f(am) = af(m)$

Si f es biyectiva decimos que f es un isomorfismo, y que M y N son isomorfos, lo cual denotaremos por $M \cong N$.

Definición 1.0.5. *Sean M, N R-módulos y $f : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos. Se define el núcleo del homomorfismo f como el conjunto*

$$\{m \in M : f(m) = 0\}$$

El cual lo denotaremos como $\ker f$.

Definición 1.0.6. *Sea $N \subset M$, decimos que N es submódulo de M si $(N,+)$ es subgrupo de $(M,+)$ y para cada $a \in R$, y cada $n \in N$ tenemos $an \in N$. Esto lo denotamos por $N \leq M$.*

Nótese que en este caso, N es por sí mismo un R-módulo. De esta forma, como cada subgrupo de un grupo abeliano es normal, podemos formar el grupo cociente M/N

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

donde $m + N = \{m + n : n \in N\}$. De esto se sigue que $m_1, m_2 \in M$ pertenecen a la misma clase si $m_1 - m_2 \in N$, es decir, $m_1 + N = m_2 + N$.

En este caso podemos definir un producto en el conjunto M/N, de tal forma que $M/N, +, \cdot$ sea un R-módulo con las operaciones en M/N definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (m_1 + N) + (m_2 + N) &= (m_1 + m_2) + N \quad \text{si } m_1, m_2 \in M \\ a(m + N) &= (am) + N \quad \text{si } a \in R, m \in M \end{aligned}$$

Se define la proyección natural $\pi : M \to M/N$ como $\pi(m) = m + N$. Es fácil ver que éste es un homomorfismo sobreyectivo de M a M/N.

1.1.3. Teoremas de isomorfismo para módulos

A continuación presentamos los teoremas de isomorfismo para R-módulos, cuya prueba es completamente análoga a la de grupos, y se pueden encontrar en[6], pagina 170-173 y [12] pagina 135-137,165.

Teorema 1.1 (Primer teorema de isomorfismo)**.** *Sean M y N, R-módulos, $f : M \to N$ homomorfismo con núcleo K. Entonces K es submódulo de M, y M/K es isomorfo a la imagen de f, Donde la función $\bar{f} : M/K \to \mathrm{Im}(f)$ dada por $\bar{f}(m + K) = f(m)$ es un isomorfismo.*

Teorema 1.2 (Segundo teorema de isomorfismo)**.** *Sea M un R-módulo, N, K submódulos de M, entonces $N \cap K$ es submódulo de N, y $N/(N \cap K)$ es isomorfo a $(N + K)/K$.*

Teorema 1.3 (Tercer teorema de isomorfismo)**.** *Sea M un módulo, $K \leq N \leq M$, entonces N/K es submódulo de M/K, y además*

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N$$

Teorema 1.4 (Teorema de la correspondencia)**.** *Sea M un módulo, con N un submódulo de M y $\pi : M \to M/N$ el homomorfismo canónico, entonces hay una correspondencia biunívoca entre los submódulos de M/N y los submódulos de M que contienen a N. Más aún, si $N \leq S$, la correspondencia está dada por $F(S) = \pi(S)$.*

1.1.4. Suma directa y módulos libres

Dada una colección de módulos, podemos definir con estos un nuevo módulo, recíprocamente, dado un módulo, podemos preguntarnos si podemos representarlo a través de módulos mas simples.

Dados $N, K \subset M$, donde M es un módulo, recordemos que

$$N + K = \{n + k : n \in N, k \in K\}$$

Definición 1.4.1. *Decimos que M es la suma directa de N y K cuando $N, K \leq M$, $N + K = M$ y $N \cap K = \{0\}$.*

En realidad lo que acabamos de definir es conocida como suma directa interna, nótese que cada elemento de M se expresa de manera única como suma de elementos de N y K.

La suma se dice interna pues N y K son submódulos de M. Si tomamos dos módulos arbitrarios, necesitamos que ambos sean submódulos de un módulo M para que tenga sentido hablar de suma directa interna en el sentido que acabamos de definir.

Definición 1.4.2. *Sean N y K módulos sobre un anillo R, y $M = N \times K$, M con las operaciones definidas*

$$\begin{aligned} (n_1, k_1) + (n_2, k_2) &= (n_1 + n_2, k_1 + k_2) \\ r(n, k) &= (rn, rk) \end{aligned}$$

Es decir, componente a componente , con esto, $M = N \times K$ es un R-módulo, llamado módulo producto, o suma directa externa, y la denotaremos por $M = N \oplus K$.

Notemos que de esta forma, $N \times \{0\} \cong N, \{0\} \times K \cong K$, y que

$$M = (N \times \{0\}) + (\{0\} \times K).$$

Debido a esto, cada suma directa externa viene de una suma directa interna y viceversa.

Podemos definir recursivamente la suma directa de una familia finita $\{M_k\}_{k=1}^n$ de módulos , esto es,

$$\bigoplus_{k=1}^{n} M_k = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = (M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots M_{n-1}) \oplus M_n$$

Incluso si la familia es infinita podemos definir la suma directa de la siguiente forma.

Definición 1.4.3. *Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, una familia de R-módulos, se define la suma directa de la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\lambda}$, denotada como*

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

como el subconjunto del producto cartesiano $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tal que $m_\lambda = 0$ salvo para un conjunto finito de λ 's. Denotamos los elementos de $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ como sumas formales finitas de elementos de M_λ para cada λ esto es,

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \cdots + m_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \Lambda, m_{\lambda_k} \in M_{\lambda_k}\}$$

Un elemento en $M = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ lo denotaremos como

$$m = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \lambda$$

Donde $m_\lambda \in M_\lambda$. Las operaciones en $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ se definen de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda\lambda\right) + \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(m_\lambda + n_\lambda)\lambda$$

$$r\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(rm_\lambda)\lambda$$

Hasta este momento tenemos un punto importante, interpretaremos la suma de elementos en módulos distintos como sumas formales, no se realizará otra operación aunque esta pudiera tener sentido.

Ejemplo 1.6. *Sea* $R = \mathbb{R}$, $M_\lambda = \mathbb{R}$, $\Lambda = \{1, 2, \ldots n\}$ *entonces*

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \mathbb{R}^n$$

Si Λ es finito, la suma directa de la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ coincide con la suma directa definida recursivamente para familias finitas.

Definición 1.4.4. *Sea* M *un* R*-módulo, diremos que* M *es libre si es isomorfo como* R*-módulo a una suma directa de* R *sobre un conjunto* Λ*, esto es, los elementos de* M *son combinaciones lineales de elementos de* R*.*

Cuando hacemos suma directa de la familia $\{\mathbb{R}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ donde $R_\lambda = R$, la familia $\{\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una base para $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ en el sentido de algebra lineal, esto es, un conjunto linealmente independiente sobre R que genera a M.

Los módulos libres son los módulos donde tiene sentido hablar de base, en particular, todo R-Módulo, sobre un campo R es libre, esto es, todo espacio vectorial tiene una base, lo cual es consecuencia del Lema de Zorn, y lo podemos encontrar en [5], pagina 190.

1.2. Topológicos

1.2.1. Espacios topológicos, Definición y Ejemplos

Ahora definiremos nuestro principal objeto de estudio del presente trabajo, éste es el concepto de espacio topológico. La definición formal es abstracta y completamente conjuntista, por lo que a primera vista oculta el sentido geométrico de aplicación de la teoría, afortunadamente el concepto generaliza a los espacios euclidianos ,por lo que manejar el concepto de topología nos acerca a pensar geométricamente en espacios donde la intuición puede resultar engañosa, como los espacios de funciones en análisis por ejemplo.

De esta forma definimos un espacio topológico de la siguiente manera.

Definición 1.4.5. *Sea X un conjunto no vacío, y $\mathscr{T}$ una familia de subconjuntos de X, diremos que $(X, \mathscr{T})$ es un* ***espacio topológico****, cuando*

1. $\emptyset, X \in \mathscr{T}$.
2. *si* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *es una colección de elementos de* $\mathscr{T}$ *entonces* $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i \in \mathscr{T}$.
3. *si* $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ *es una colección de elementos de* $\mathscr{T}$ *entonces* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{T}$.

A los elementos de $\mathscr{T}$ les llamamos ***conjuntos abiertos de*** *X o simplemente abiertos, al conjunto $\mathscr{T}$ le llamamos topología en X.*

Ejemplo 1.7. *Sea $X \neq \emptyset$, y $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$, entonces $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, a esta topología le llamamos* ***topología indiscreta****.*

Ejemplo 1.8. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathscr{T} = 2^X$ entonces $(X, \mathscr{T})$ también es un espacio topológico, a esta topología le llamamos la* ***topología discreta****, que está en un extremo opuesto a la anterior; estos dos ejemplos sirven para ver que siempre podemos definir al menos dos topologias en cualquier conjunto con más de un punto.*

Definición 1.4.6. *Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Se dice que (X, d) es un* ***espacio métrico*** *si*

1. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$
2. $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 1.4.7. *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $x_0 \in X$ *y* $r \in \mathbb{R}$*, definimos la bola con centro en* x_0 *de radio* r*, denotada por* $\mathcal{B}_r(x_0)$ *como el conjunto*

$$\mathcal{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

Ejemplo 1.9. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, vemos a este de manera natural como espacio topológico, donde los abiertos son los conjuntos que son unión de bolas abiertas; siempre que se hable de un espacio métrico como espacio topológico se estará considerando esta topología como la natural.*

Ejemplo 1.10. *Sea* $X = \mathbb{R}^n$ *con la métrica usual, esto es, si* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *entonces*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Por ser d *un caso particular de espacio métrico,* $\mathbb{R}^n$ *con la topología inducida por la métrica es un espacio topológico.*

Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$. Siempre es posible darle una topología al conjunto A en términos de la de X.

Definición 1.4.8. *Sea* $(X, \mathscr{T})$ *espacio topológico, se define el conjunto*

$$\mathscr{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathscr{T}\}$$

a $\mathscr{T}_A$ *le llamamos la* ***topología relativa de*** A *con respecto a* X*.*

Es fácil ver que ésta es en efecto una topología en A. Esta es la topología natural para los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Por economía de notación, cuando se sobrentienda la topologia de X nos referiremos a X como espacio topológico en lugar de $(X, \mathscr{T})$.

1.2.2. Interior y Cerradura

Definición 1.4.9. *Sea* $(X \mathscr{T})$ *un espacio topológico, diremos que* $A \subset X$ *es abierto si* $A \in \mathscr{T}$*.Diremos que* A *es cerrado si* $X \backslash A \in \mathscr{T}$

De esta forma un subconjunto de A puede ser abierto, cerrado, ambas o ninguna , todo depende de la topología de X y del conjunto A en particular.

Proposición 1.4.1. *Sea* $(X, \mathscr{T})$ *espacio topológico y* $\mathscr{F}$ *el conjunto de subconjuntos cerrados de* X. *Entonces*

1. $\emptyset, X \in \mathscr{F}$
2. *Si* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *están en* $\mathscr{F}$, *entonces* $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i \in \mathscr{F}$
3. *Si* $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ *están en* $\mathscr{F}$, *entonces* $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$

Demostración. Se sigue directo de las leyes de D'Morgan. $\square$

Definición 1.4.10. *Sea* $A \subset X$. *Se define el interior de* A *denotado por* A° *como la unión de todos los abiertos contenidos en* A, *esto es*

$$A^\circ = \cup\{U \in \mathscr{T} : U \subset A\}$$

Definimos a la cerradura de A, *denotada por* $\operatorname{cl} A$ *como la intersección de todos los cerrados que contienen a* A, *esto es*

$$\operatorname{cl} A = \cap\{U \in \mathscr{F} : A \subset U\}$$

A° es abierto por la definición 1.4.5 y $\operatorname{cl} A$ es cerrado Por la Proposición 1.4.1 independientemente de como sea A, además se pueden dar los casos $A^\circ = \emptyset$ y $\operatorname{cl} A = X$.

1.2.3. Continuidad

Ahora definiremos continuidad de funciones en espacios topológicos, el concepto más importante de la topología pues las propiedades topológicas son aquellas que se preservan por continuidad.

Definición 1.4.11. *Sean* $(X, \mathscr{T}_X), (Y, \mathscr{T}_Y)$ *espacios topológicos, y* $f : X \to Y$, *diremos que* f ***es continua***, *si* $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X \quad$ *para cada* $U \in \mathscr{T}_Y$.

Proposición 1.4.2. *La composición de funciones continuas es continua.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas,queremos ver que $g \circ f : X \to Z$ es continua.

Sea $U \in \mathscr{T}_Z$, buscamos demostrar que $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X$.

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ g^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}U)$$

pero $g^{-1}U \in \mathscr{T}_Y$ por continuidad de g. De esta forma $f^{-1}(g^{-1}U) \in \mathscr{T}_X$ por continuidad de f. □

La continuidad en un espacio topológico es una generalización de la continuidad en un espacio métrico, así mismo, como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico,

Definición 1.4.12. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que*

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Una función es continua, si lo es en todos los puntos de X.

Esto es, dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que si $x \in \mathcal{B}_{x_0}(\delta)$ entonces $f(x) \in \mathcal{B}_{f(x_0)}(\epsilon)$
Esto ocurre si y solo si $f(\mathcal{B}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{B}_\epsilon(f(x_0))$
Ahora, $f(A) \subset B$ si y sólo si $A \subset f^{-1}(B)$.
Por lo que la condición de continuidad es equivalente a que

$$\text{Para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta \text{ tal que } \mathcal{B}_\delta(x_0) \subset f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x_0)))$$

De aquí viene el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, $f : X \to Y$. f es continua como función entre espacios métricos si y sólo si lo es como función entre espacios topológicos*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea U abierto en Y, queremos ver que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea $x_0 \in f^{-1}(U)$ de aquí, $f(x_0) \in U$, para $\mathcal{B}_\epsilon(f(x_0)) \subset U$ existe δ tal que $\mathcal{B}_\delta(x_0)) \subset f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(U)$, es decir, $\mathcal{B}_\delta(x_0)) \subset f^{-1}(U)$, por lo tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$, $x \in X$, como $\mathcal{B}_\epsilon(f(x))$ es abierto en Y entonces $f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x)))$ es abierto en X, y como $x \in f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x)))$ entonces existe δ tal que

$$\mathcal{B}_\delta(x) \subset f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x)))$$

□

De esta manera el concepto de continuidad $\epsilon - \delta$ es equivalente a la continuidad topológica cuando nos restringimos a los espacios métricos, de aquí que la continuidad topológica resulta ser una generalización de la continuidad métrica.

1.2.4. Homeomorfismos

Ya que tenemos definida la continuidad, necesitamos saber cuales serán nuestras equivalencias en espacios topológicos.

Definición 1.5.1. *Sean $(X, \mathscr{T}_X), (Y, \mathscr{T}_Y)$ espacios topológicos, y $f : X \to Y$. Se dice que f es un* ***homeomorfismo*** *si f es continua, biyectiva y con inversa continua. Si existe f un homeomorfismo f entre X y Y, diremos que X y Y son* ***homeomorfos****.*

Toda propiedad que se preserve bajo funciones continuas es llamada propiedad topológica, o invariante topológico, esto es, si existe un homeomorfismo de X a Y, entonces tenemos los puntos de X en correspondencia biunívoca con los puntos de Y, y los abiertos de X en correspondencia biunívoca con los abiertos de Y, en pocas palabras, un homeomorfismo sólo cambia las etiquetas de los objetos, pero mantiene intactas sus topologías.

Intuitivamente, un homeomorfismo entre dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es una forma de doblar, estirar, encojer, o curvar uno para llegar al otro, sin hacer cortes, ni pegar puntos, esto es, como si los espacios fueran de goma, por lo que la topología en ocasiones es llamada la geometría de la bola de goma.

Ejemplo 1.11. *Un círculo es homeomorfo a un cuadrado*

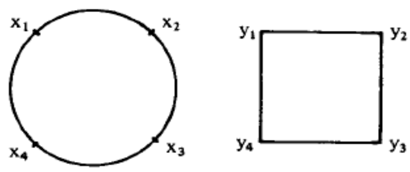


Figura 1.1: Circulo y Cuadrado

El homeomorfismo viene dado de la siguiente forma:
Sean

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ Y &= \{-1, 1\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{-1, 1\} \end{aligned}$$

X es el circulo de radio 1 centrado en el origen y Y es el cuadrado de vértices $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$.

$f : X \to Y$ y $f^{-1} : Y \to X$ están dados por

$$f(x,y) = \frac{1}{m}(x,y) \qquad f^{-1}(x,y) = \frac{1}{r}(x,y)$$

Donde $m = \text{máx}\{|x|,|y|\}$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Geométricamente marcamos cuatro puntos en la circunferencia y enderezamos los arcos correspondientes para obtener el cuadrado como lo ilustra la figura 1.1.

Ejemplo 1.12. *Una el toro (la superficie de una dona) es homeomorfa a una taza de cafe.*

El ejemplo más popular de la topología, los movimientos están ilustrados en la figura 1.2. El hecho es que podemos deformar al toro de manera continua hasta obtener la esfera, este ejemplo da origen al comentario de que un topólogo no distingue entre una dona y una tasa de café.

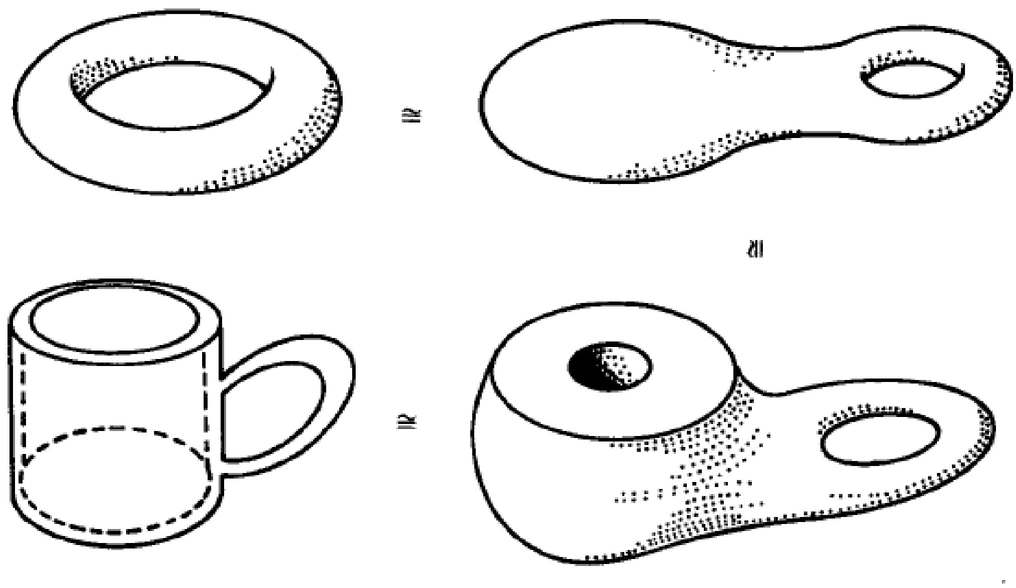


Figura 1.2: La dona y la taza

Ejemplo 1.13. *Dos bandas pegadas son homeomorfas a un toro menos el interior de un disco.*

El homeomorfismo viene dado en la figura 1.3, lo que hacemos en este caso es defomar el espacio continuamente hasta obtener el toro menos el interior de un disco.

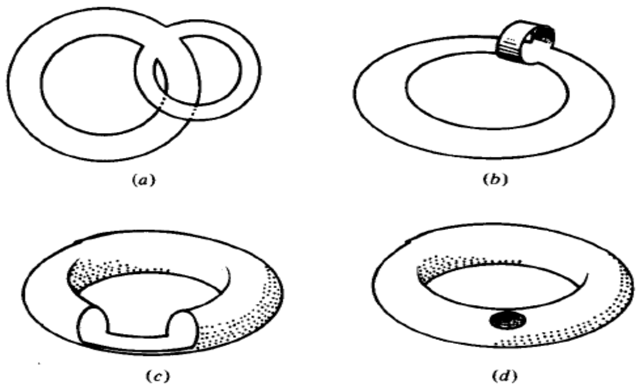


Figura 1.3: Ejemplo de Homeomorfismo

Podemos ver, así tambien, que podemos hacer cortes temporalmente para doblar encojer, y curvar con la condición de que al final peguemos los puntos que hayamos separado al principio, esta idea se formaliza con la topología cociente que podemos encontrar en [11], pagina 136. .

Ejemplo 1.14. *El circulo y el pretzel son homeomorfos*

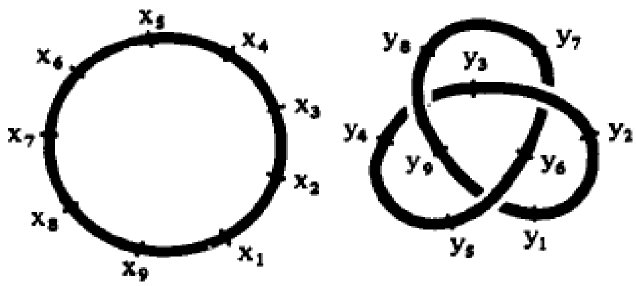


Figura 1.4: Circulo y Pretzel

Esta idea de doblar los espacios puede parecer muy informal y lo que estamos haciendo es definiendo las cosas de manera formal, pero no se presenta dificultad en formalizar estas ideas, pues quedan bien establecidas con el concepto de homotopía, que veremos en el capítulo 3.

1.2.5. Conexidad y Arcoconexidad

Sea X un espacio topológico, queremos decir cuando X es de una sola pieza. Un concepto topológico para esto es llamado conexidad que veremos mas adelante, el problema es que a simple vista no es intuitivo, pues se da en un sentido negativo. El concepto que vamos a estudiar ahora está mas emparentado a nuestra intuición, y es la de que un conjunto es de una pieza si las partes de este se pueden unir por curvas, veamos esto formalmente.

Definición 1.5.2. *Una **trayectoria** en un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es una función continua $f : [0,1] \to X$; si $f(0) = x$ y $f(1) = y$ diremos que f une x con y.*

A una trayectoria también se le conoce como camino o arco.

Definición 1.5.3. *Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es **conexo por trayectorias** o **arcoconexo** si cualesquiera dos puntos en X pueden ser unidos por un arco.*

Ya definido el concepto veamos que ésta es una propiedad topológica

Teorema 1.6. *Sea $(X, \mathscr{T}_X)$ arcoconexo y $f : X \to Y$ continua. Entonces $f(X)$ es arcoconexo. En particular, si f es suprayectiva, entonces $(Y, \mathscr{T}_Y)$ es arcoconexo.*

Demostración. Sean $a, b \in f(X)$. Así, existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = a$, $f(y) = b$. Como X es arcoconexo existe $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. entonces $f \circ \gamma$ es continua y es una trayectoria que une a con b. $\square$

Corolario 1.6.1. *Dados dos espacios topológicos homeomorfos X y Y, X es arcoconexo si y sólo si Y es arcoconexo.*

Este no es el concepto más general de que un espacio sea de una sola pieza, a continuación veamos éste y cual es su relación con arcoconexidad.

Definición 1.6.1. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Diremos que X es **disconexo** si existen conjuntos abiertos $U, V \in \mathscr{T}$ tales que*

$$U \cup V = X \quad U \cap V = \emptyset.$$

*Diremos que $(X, \mathscr{T})$ es **conexo** si no es disconexo.*

Diremos que un subconjunto de un espacio topológico es conexo, si lo es como espacio topológico con la topología relativa.

La definición de conexo, dada en el sentido negativo, nos dice que un espacio topológico es de una sola pieza en el sentido de que no se puede separar por abiertos ajenos.

Ahora, en efecto, la conexidad se preserva por continuidad.

Teorema 1.7. *Sea X conexo. $f : X \to Y$ continua. Entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que f es suprayectiva.

Sean U, V abiertos de Y, con $Y = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, si hacemos $U' = f^{-1}(U)$ y $V' = f^{-1}(V)$ entonces U', V' son abiertos de X tales que $U' \cup V' = X$ y $U' \cap V' = \emptyset$ por lo que uno de ellos es vacío, digamos $V' = \emptyset$ con lo cual $V = \emptyset$ y por lo tanto $f(X)$ es conexo. $\square$

Corolario 1.7.1. *Sean X, Y homemorfos. X es conexo si y sólo si Y lo es.*

Veamos algunas equivalencias las cuales las podemos encontrar en [1], pagina 108.

Teorema 1.8. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es conexo.*
2. *No existen cerrados ajenos U, V tales que $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$.*
3. *No existen conjuntos U, V no vacíos tales que $U \cup V = X$ con $(\operatorname{cl} U \cap V) \cup (U \cap \operatorname{cl} V) = \emptyset$.*
4. *No existe una función $f : X \to \{0, 1\}$ continua y suprayectiva($\{0, 1\}$ con la topología discreta).*

5. Los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados a la vez, son $\emptyset$ y X.

El concepto que hemos definido anteriormente para decir que un espacio es de una sola pieza es el de arcoconexidad, veamos que la conexidad se obtiene de ésta. Más en concreto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Si $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico arcoconexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es arcoconexo, pero no conexo. En estas condiciones existe un subconjunto propio de X, abierto y cerrado, digamos A. Sea $a \in A$ y $b \in X \backslash A$, y $\gamma : [0,1] \to X$ continua, con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$, luego por continuidad, $\gamma^{-1}(A)$ es abierto, cerrado y es un subconjunto propio de $[0,1]$ ya que $1 \notin \gamma^{-1}(A)$, de esto tenemos $[0,1]$, es disconexo, lo cual es una contradicción pues $[0,1]$ es □

El recíproco no es válido como lo muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.15. *El peine y el piojo.*

Sea

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, 0 \leq y \leq 1, \text{ Para algún } n \in \mathbb{N}\} \cup \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

El peine, y sea

$$A = \{(0,1)\}$$

El piojo.

El espacio es conexo, pues el peine es arcoconexo, y cualquier bola que encierre al piojo, debe intersectar al peine, esto porque la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge decrecientemente a 0.

Por el contrario, el espacio no es arcoconexo pues cualquier arco que comience en el piojo no puede cruzar al peine.

Aunque no todo conexo X es arcoconexo, hay un recíproco parcial al teorema 1.9, si suponemos hipótesis adicionales sobre el espacio X, en particular tenemos el siguiente teorema para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.10. *Todo subespacio conexo y abierto de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo.*

Demostración. En [1], página 116. □

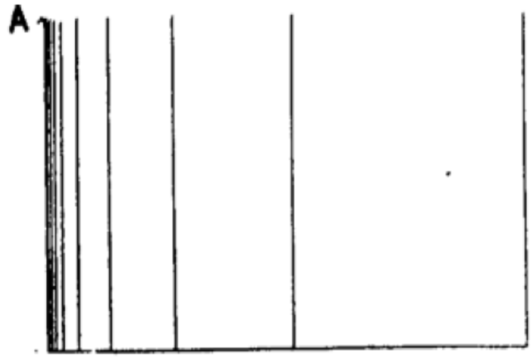


Figura 1.5: El peine y el piojo

Aunque un espacio no sea arcoconexo, veamos que podemos verlo como la unión de conjuntos arcoconexos, aqui tenemos el concepto

Definición 1.10.1. *Sea X un espacio topológico y sean $x, y \in X$. Decimos que $x \sim y$ si existe una trayectoria γ que una a x con y.*

Proposición 1.10.1. *$\sim$ es una relación de equivalencia en X.*

Demostración. Probaremos que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Reflexividad. Sea $x \sim y$, esto es, existe una trayectoria $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Sea $\beta : I \to X$ definida por $\beta(t) = \gamma(1-t)$. Tenemos que β es continua, $\beta(0) = y$ y $\beta(1) = x$ por lo que $y \sim x$.

- Simétría. Sea $x \in X$ y $\gamma : I \to X$ definida por $\gamma(t) = x$ para todo $t \in I$, obtenemos que γ es continua y $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ por lo tanto $x \sim x$.
- Transitividad. Sea $x \sim y$ y $y \sim z$, esto es, existen $\alpha, \beta : I \to X$ tales que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y, \beta(0) = y$ y $\beta(1) = z$, definimos $\gamma : I \to X$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2] \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

entonces γ es continua, $\gamma(0) = xy\gamma(1) = z$. Por lo tanto $x \sim z$.

$\square$

Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de componentes arcoconexas de X. Estas serán importantes en el próximo capítulo pues lo que pase en términos de homología en un espacio X estará determinado por lo que pase en las componentes arcoconexas de X, cosa que precisaremos en el capítulo 2.

Capítulo 2

Geometría Afín y Homología singular

2.1. Geometría Afín

2.1.1. Espacio Afín

A lo largo de la tesis estaremos usando conceptos de geometría afin, por lo que en este momento vamos a definirlos.

Estos pueden darse en lo abstracto, más precisamente usando acciones de grupos. En contexto de las acciones de grupo se define un espacio afín de dimensión n como un conjunto M donde el grupo aditivo de R^n actúa libre y transitivamente. Sin embargo, definiremos espacio afín de una manera que podamos verlo como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, esto para trabajar en un terreno más familiar y no meternos de lleno en otra terminolgía. Las propiedades de espacio afín con acciones de grupo las podemos encontrar en [4], página 36.

Definición 2.0.2. *Sea $M \subset \mathbb{R}^m$, diremos que M es un* ***espacio afín****, si dados $x, y \in M$ la recta que pasa por x y y esta contenida en M, esto es,*

$$tx + (1-t)y \in M \qquad \textit{Para cada } t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.1. *Sea M un subespacio vectorial de R^m entonces M es afin.*

Definición 2.0.3. *Sea $M \subset R^m$, decimos que M es un conjunto* ***convexo*** *si dados $x, y \in M$ el segmento que une x con y está contenido en M, esto es,*

$$tx + (1-t)y \in M \quad \forall t \in [0, 1]$$

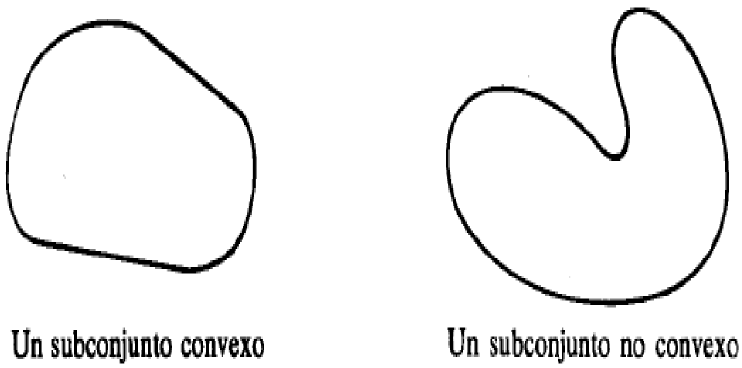


Figura 2.1: Convexidad

Podemos ver de la definición que todo espacio afín es convexo, más no necesariamente todo convexo es afín. Es fácil ver que la intersección de espacios afines (o convexos) es un espacio afín (convexa) respectivamente.

En nuestras definiciones de espacio afín y conjunto convexo dimos la condición para dos puntos, veamos que en general esto se vale para cualquier número de puntos.

Teorema 2.1. *Sea M un espacio afín y $p_0, p_1, \dots p_r \in M$, ademas sean $a_0, a_1, \dots a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$. Entonces $\sum_{i=0}^{r} a_i p_i \in M$*

Ademas, el resultado es cierto para conjuntos convexos con la hìpótesis adicional $a_i \geq 0$ para cada i con $0 \leq i \leq r$

Demostración. Por inducción sobre el número de sumandos.

veamos el caso afín

Sea $r = 1$ por definición $a_0 p_0 + a_1 p_1 \in M$

Supongamos que se vale para r sumandos, sean, $p_0, p_1, \dots, p_r \in M$ y $a_0, a_1, \dots a_r \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$, sea a_k distinta de 1, de aquí $\sum_{i \neq k} a_i = 1 - a_k$, por lo que $\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} = 1$, por hipótesis de inducción tenemos $\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} p_i \in M$

como $a_k + (1 - a_k) = 1$ tenemos $(1 - a_k)\left(\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} a_i p_i\right) + a_k p_k \in M$ pero $(1 - a_k)\left(\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} a_i p_i\right) + a_k p_k = \sum_{i=0}^{r} a_i p_i$ que es lo que queriamos demostrar.

Para el caso convexo, si algún $a_k = 1$ entonces todos los demas son iguales a 0 y $\sum a_i p_i = p_k \in M$ por hipótesis, supongamos que $a_k \neq 1$ para algún k y de esta forma $1 - a_k > 0$ y podemos hacer lo mismo que en el caso afín. $\square$

Las expresiones $\sum a_i p_i$ serán llamadas combinaciones lineales afines y combinaciones lineales convexas, respectivamente, o simplemente combinaciones afines y combinaciones convexas.

Sea A un subconjunto de M, definimos $[A]$ como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. Podemos ver del teorema 2.1 que $[A]$ es el conjunto de combinaciones convexas de elementos de A.

Al conjunto $[A]$ le llamamos la **envolvente convexa de** A. Cuando los escalares no necesariamente son positivos el conjunto es llamado el conjunto afín generado por A pues en este caso coincide con la intersección de todos los conjuntos afines que contienen a A.

Dado A afín, o convexo, con $p \in A$ buscamos representarlo adecuadamente con un vector de coordenadas, y que esta representación sea unica veamos lo que necesitariamos para esto.

2.1.2. Independencia Afín

Definición 2.1.1. *Sea M un conjunto afín con $p_0, p_1, \ldots, p_r \in M$, decimos que $p_0, p_1, \ldots p_r$ son* ***afinmente independientes*** *si los vectores $p_1 - p_0$, $p_2 - p_0, \ldots, p_r - p_0$ son linealmente independientes.*

De la definición tenemos que un conjunto afín tiene a lo más $m+1$ puntos afinmente independientes, sobre un espacio m dimensional. veamos ahora que esta condición es lo que necesitamos para la unicidad en las coordenadas.

Teorema 2.2. *Sea M espacio afín, con $\{p_0, p_1, \ldots, p_r\} \subset M$, los siguientes son equivalentes*

1. *$p_0, p_1, \ldots, p_r$ son afínmente independientes.*

2. *Cuando $s_0, s_1, \ldots, s_r$ satisfacen la condición $\sum_{i=0}^{r} s_i p_i = 0$ con $\sum_{i=0}^{r} s_i = 0$, entonces $s_i = 0$ con $0 \leq i \leq r$*

3. *si x esta en el conjunto afín generado por $p_0, p_1, \ldots, p_r$, entonces x se expresa de manera única como combinación afín de $p_0, p_1, \ldots, p_r$*

Demostración. (1) $\rightarrow$ (2)
Sean $s_0, s_1, \dots, s_r$ con $\sum_{i=0}^{r} s_i p_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{r} s_i = 0$, de aquí tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{r} s_i p_i \\ &= \sum_{i=0}^{r} s_i p_i - 0p_0 \\ &= \sum_{i=0}^{r} s_i p_i - \left(\sum_{i=0}^{r} s_i\right) p_o \\ &= \sum_{i=1}^{r} s_i (p_i - p_0) \end{aligned}$$

Pero $(p_i - p_0)_{i=1}^{r}$ son linealmente independientes. Entonces $s_i = 0 \quad$ para toda i

(2) $\rightarrow$ (3)
Sea $x = \sum_{i=0}^{r} a_i p_i = \sum_{i=0}^{r} b_i p_i$, con $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1, \sum_{i=0}^{r} b_i = 1$, de aquí

$$\sum_{i=0}^{r} (a_i - b_i) = 1 - 1 = 0$$

entonces $x - x = 0 = \sum_{i=0}^{r} (a_i - b_i) p_i$, de (2) tenemos $a_i - b_i = 0 \quad$ para toda i entonces $a_i = b_i$

(3) $\rightarrow$ (1)

Basta ver que si $p_0, p_1, \dots, p_r$ son afinmente dependientes entonces dada una representación podemos contruir otra distinta.

Sean $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots p_r - p_0$ vectores linealmente dependientes, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ no todos 0, digamos, $a_k \neq 0$, tales que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (p_i - p_0) = 0$ entonces

$$0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_r p_r - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) p_0$$

Sea $x = \sum_{i=0}^{r} a_i p_i$ entonces

$$x = x + 0 = x = \sum_{i=0}^{r} a_i p_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (p_i - p_0) = (a_0 - (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i))p_0 + \sum_{i=1}^{r} (a_i + \alpha_i) p_i$$

como α_k es distinto de 0, entonces x tiene dos representaciones distintas. $\square$

Con esto vemos que una condición necesaria y suficiente para que las coordenadas sean únicas, es que los puntos sean afinmente independientes.

Definición 2.2.1. *Sean $p_0, p_1, \ldots, p_r$ puntos afinmente independientes, en un espacio afín E, El conjunto de todas las combinaciones afines es llamado el espacio generado por $p_0, p_1, \ldots p_r$, y es denotado por* $\mathrm{span}(p_0, p_1, \ldots, p_r)$.

De la teorema 2.2 vemos que cada $p \in \mathrm{span}(p_0, p_1, \ldots, p_r)$ tiene una expresión única

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_r p_r \tag{2.1}$$

Tal que $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$.

El vector de coordenadas $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ es llamado el vector de coordenadas baricéntricas de p con respecto a $\{p_0, p_1, \ldots p_r\}$.

Estas coordenadas son arbitrarias salvo por la condición
$\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$. $a_0, a_1, \ldots a_r$ en la ecuación 2.1 son llamadas las coordenadas baricéntricas de p con respecto a $\{p_0, p_1, \ldots p_r\}$.

Definición 2.2.2. *Sea M un espacio afín y $\{p_0, p_1, \ldots p_r\}$ puntos afínmente independientes en M. El punto $p \in M$ de coordenadas baricéntricas $(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r+1}, \ldots, \frac{1}{r+1})$ es llamado el baricéntro del conjunto $\{p_0, p_1, \ldots p_r\}$.*

Para $r = 1$ el baricéntro de $\{p_0, p_1\}$ es el punto medio del segmento que une p_0 con p_1, para $r = 2$ es el punto donde se cruzan las medianas el triángulo con vértices $\{p_0, p_1, p_2\}$ y así extensiones a otras dimensiones.

Un caso muy importante será precisamente $[p_0, p_1, \ldots, p_r]$. Este es el subconjunto con coordenadas baricéntricas positivas de $\mathrm{span}\{p_0, \ldots p_r\}$. Este conjunto es convexo por el teorema 2.1, por lo que recibirá un nombre especial.

Definición 2.2.3. *Dados $p_0, p_1, \ldots, p_r$ puntos afinmente independientes, el subconjunto de* span$(p_0, p_1, \ldots, p_r)$ *de todos los puntos con coordenadas baricéntricas positivas es llamado simplejo geométrico r-dimensional generado por $p_0, p_1, \ldots, p_r$.*

En ocaciones diremos simplemente r-simplejo geométrico. Un 0-simplejo resulta ser un punto, un 1 simplejo resulta ser un segmento, un 2-simplejo resulta ser un triángulo, un 3-simplejo resulta ser un tetraedro y así extensiones a otras dimensiones, ver figura 2.2.

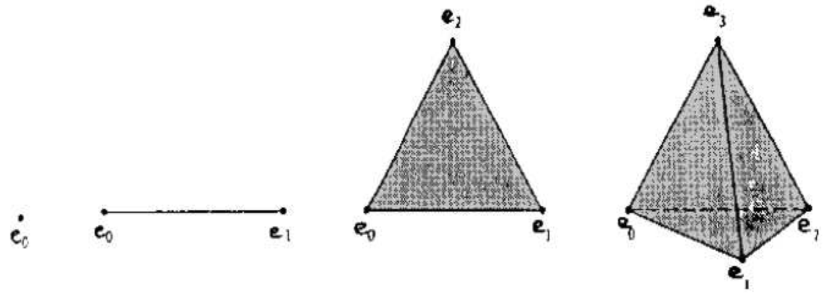


Figura 2.2: Simplejos Geométricos

2.1.3. Transformaciones afines

Sean E, E' espacios afines y $f : E \to E'$. Buscamos definir las propiedades que debe de cumplir f para conservar la estructura afín de $f(E)$. El concepto es el siguiente.

Definición 2.2.4. *Dados E, E' espacios afines, $f : E \to E'$, decimos que f es una transformación afín, si dados $p, q \in E$, y $t \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$f(tp + (1-t)q) = tf(p) + (1-t)f(q)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$

Si $f(p) \neq f(q)$, una transformación afín manda la recta que pasa por p y q en la recta que pasa por $f(p)$ y $f(q)$.

Teorema 2.3. *Sean $f : E \to E'$ una transformación afín, $r \in \mathbb{N}$ $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r \in E$ y $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum\limits_{i=0}^{r} a_i = 1$, entonces*

$$f\left(\sum_{i=0}^{r} a_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{r} a_i f(p_i)$$

Demostración. Por inducción sobre r. Sea $r = 1$, $p_0, p_1 \in E$ y $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tales que $a_0 + a_1 = 1$, tenemos que $a_1 = 1 - a_0$, por lo tanto,

$$f(a_0p_0+a_1p_1) = f(a_0p_0+(1-a_0)p_1) = a_0f(p_0)+(1-a_0)f(p_0) = a_0f(p_0)+a_1f(p_1)$$

.

Supongamos que es válido para cada natural menor que r con $r > 1$. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum a_i = 1$. Alguno de los $\{a_i\}_{i=0}^{r}$ es distinto de 1, pues si todos fueran iguales a 1, tendriamos que $\sum a_i = r > 1$ lo cual no es posible. Supongamos que $a_k \neq 1$, entonces
$\sum\limits_{i\neq k} a_i = 1 - a_k$, de aquí que $\sum\limits_{i\neq k} \frac{a_i}{1-a_k} = 1$.

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$f\left(\sum_{i\neq k} \frac{a_i}{1-a_k} p_i\right) = \sum_{i\neq k} \frac{a_i}{1-a_k} f(p_i)$$

Ademas, $a_k + (1 - a_k)$=1, de lo cual obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=0}^{r} a_i p_i\right) &= f\left(a_k p_k + (1-a_k)\sum_{i\neq k} \left(fraca_i 1 - a_k\right) p_i\right) \\
&= (1-a_k) f\left(\sum_{i\neq k} \left(\frac{a_i}{1-a_k}\right) p_i\right) + a_k f(p_k) \\
&= (1-a_k)\left(\sum_{i\neq k} \left(\frac{a_i}{1-a_k}\right) f(p_i)\right) + a_k f(p_k) \\
&= \sum_{i\neq k} a_i f(p_k) + a_k f(p_k) \\
&= \sum_{i=0}^{r} a_i f(p_i)
\end{aligned}$$

□

Con el teorema 2.3 vemos que una transformación afín uno a uno manda rectas en rectas, planos en planos, etc; conservando sus coordenadas baricéntricas. Si la transformación afín no es uno a uno no podemos asegurar esto, en el sentido de que un plano se puede deformar a una recta o incluso a un punto. Por por ejemplo si

$$f(p) = 0 \quad \text{para cada } p \in E$$

La imagen de un espacio afín es un espacio afín, pues la condición sobre la preimagen de dos puntos y el hecho de que f respeta estos coeficientes es suficiente para esto.

Sea $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y $E, E' \subset \mathbb{R}^n$ espacios afines, si fijamos un punto $O \in E$ y $O' \in E'$ (O ni O' son necesariamente el origen) podemos construir una transformación afín f a partir de $\bar{f}$ tal que $f(O) = O'$. Así mismo, dada una transformación afín f podemos construir una transformación lineal que corresponda a $\bar{f}$. La forma de construirla está dada en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sea* $\bar{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal, y sean* $E, E' \subset \mathbb{R}^m$ *espacios afines, entonces tenemos que la función* $f : E \to E'$ *definida por*

$$f(p) = O' + \bar{f}(p - O)$$

es afín.

De manera recíproca, para cada transformación afín $f : E \to E'$ *tal que* $f(O) = O'$, *tenemos que* $\bar{f}$ *está determinada por la ecuación*

$$\bar{f}(p - O) = f(p) - f(O)$$

Demostración. Dada $\bar{f}$ una transformación lineal, veamos que f es una transformación afín.

$$\begin{aligned}
&f(tp + (1-t)q) \\
&\quad = O' + \bar{f}(tp + (1-t)q - O) \\
&\quad = O' + t\bar{f}(p) + (1-t)\bar{f}(q) - \bar{f}(O) \\
&\quad = tO' + (1-t)O' + t\bar{f}(p) + (1-t)\bar{f}(q) - t\bar{f}(O) - (1-t)\bar{f}(O) \\
&\quad = t(O' + \bar{f}(p) - \bar{f}(O)) + (1-t)(O' + \bar{f}(q) - \bar{f}(O)) \\
&\quad = t(O' + \bar{f}(p - O)) + (1-t)(O' + \bar{f}(q - O))
\end{aligned}$$

Por lo que $f : E \to E'$ es afín.

Para $f : E \to E'$ transformación afín, demostraremos ahora que $\bar{f}$ está determinada por $\bar{f}(p - O) = f(p) - f(O)$.

veamos que $\bar{f}$ definida de esta manera es lineal.

Sean

$$\begin{aligned} S &= \{p - O : p \in E\} \\ S' &= \{p' - O : p' \in E'\} \end{aligned}$$

Veamos que S, S' son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

Para $p_1, p_2 \in E$ tenemos $p_1 + p_2 - O \in E$ pues $1 + 1 - 1 = 1$, de esto deducimos que

$(p_1 + p_2 - O) - O \in S$.

Para $r \in \mathbb{R}$ tenemos $rp + O - rO \in E$ pues $r + 1 - r = 1$. De esta forma

$$(rp + O - rO) - O = r(p - O) \in S$$

análogamente para S'.

$$\bar{f} : S \to S'$$

Sean $p_1 - O, p_2 - O \in S$ y $r \in \mathbb{R}$ tenemos $p_1, p_2 \in E$ por lo que $p_1 + p_2 - O \in E$. Ahora

$$\begin{aligned} \bar{f}((p_1 - O) + (p_2 - O)) &= f(p_1 - O + p_2) - f(O) \\ &= f(p_1) - f(O) + f(p_2) - f(O) \\ &= \bar{f}(p_1 - O) + f(p_2 - O) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(r(p - O)) &= f(rp + (1 - r)O) - f(O) \\ &= rf(p) + (1 - r)f(O) - f(O) \\ &= r(f(p) - f(O)) \\ &= r\bar{f}(p - O) \end{aligned}$$

Solo falta ver que f proviene de $\bar{f}$.

Sea $g : E \to E'$ dada por

$$g(p) = O' + \bar{f}(p - O)$$

Queremos ver que $f = g$, de la definición de $\bar{f}$ tenemos

$$g(p) = O' + (f(p) - f(O))$$

como $f(O) = O'$ tenemos que $f(p) = g(p)$ para todo $p \in E$. $\square$

De esta forma un transformación afín es una transformación lineal seguida de una traslación.

Sea $p_0, p_1, \ldots p_n \in E$ puntos afinmente independientes que generan E (nótese que $E \subset \mathbb{R}^n$, por lo que $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial) una transformación afín está únicamente determinado por el efecto en estos puntos, pues por linealidad, si $p \in E$, entonces existen escalares $a_0, \ldots, a_n$, con $\sum a_i = 1$ y

$$f(p) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i p_i\right) \sum_{i=0}^{n} a_i f(p_i)$$

Recíprocamente si tenemos $q_0, q_1, \ldots, q_n \in E'$ entonces existe un único transformación afín f tal que $f(p_i) = q_i$ para toda i.

2.1.4. Simplejos Singulares

Sea $\mathbb{R}^\infty$ el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ sobre si mismo sobre los naturales, esto es, el espacio de sucesiones reales. Este resulta ser un espacio vectorial, con las operaciones componente a componente, y un espacio topológico con la topología producto; en este espacio consideremos los vectores

$$\begin{aligned} e_0 &= (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Más en específico, el conjunto $\{e_0, e_1, \ldots e_k, \ldots\}$ está definido de tal forma que e_k es la sucesión $e_k = (\delta_{nk})_{n=1}^{\infty}$ donde δ_{nk} es la delta de Kronecker, esto es

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

En $\mathbb{R}^\infty$ Podemos identificar $\mathbb{R}^n$ como el subespacio que tiene todas sus componentes después de la n-ésima iguales a 0, es decir, el subespacio generado por $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Definición 2.4.1. *Sea $q \geq 0$. Llamaremos* q***-simplejo geométrico estandar*** *al q-simplejo geométrico generado por $\{e_0, e_1, \ldots, e_q\}$. Lo denotaremos por Δ_q.*

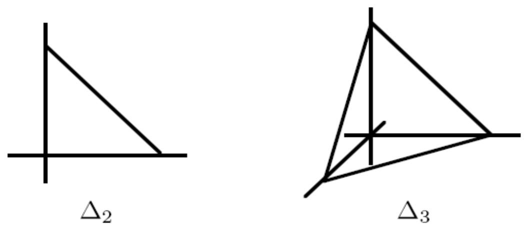


Figura 2.3: Simplejo estandar

Consideramos $\mathbb{R}^\infty$ para tener a los simplejos de todos los ordenes como subconjuntos de un mismo espacio.

Definición 2.4.2. *Sea E un espacio afín y $p_0, p_1, \ldots p_q \in E$. $(p_0, p_1, \ldots, p_q)$ denotará la restricción a Δ_q de la única transformación afín $f : \mathbb{R}^q \to E$ tal que $f(e_0) = p_0, f(e_1) = p_1, \ldots, f(e_q) = p_q$ De aquí que $(e_0, e_1, \ldots, e_q)$ es la función identidad de Δ_q en Δ_q, que denotaremos de ahora en adelante como δ_q.*

Definición 2.4.3. *Dado un espacio topológico X, un q-simplejo singular en X es una función continua $\sigma : \Delta_q \to X$*

Con esto un 0-simplejo lo podemos asociar a un punto, un 1-simplejo a un arco, un 2-simplejo a una deformación de un triángulo, y así sucesivamente extensiones a otras dimensiones.

Nótese que estamos definiendo un simplejo singular como una función y no como la imagen de puntos que toma la función. Además, la imagen de puntos que toma la función no tiene porqué verse como un simplejo, ni tiene porqué ser homeomorfo a Δ_q, ya que puede deformarse, incluso a un punto, de ahí el nombre de simplejo singular.

Ejemplo 2.2. *Sea E un espacio afín y $p_0, p_1, \ldots p_q \in E$, tenemos que la transformación afín $(p_0, p_1, \ldots p_q)$ resulta ser un q-simplejo singular en un espacio afín E.*

Definición 2.4.4. *Sea X un espacio topológico fijo. $\mathscr{F}_q(X)$ será el conjunto de q-simplejos singulares de X, esto es*

$$\mathscr{F}_q(X) = \{\sigma : \Delta_q \to X : \sigma \text{ es continua}\}$$

Notemos que para cada espacio topológico X, $\mathscr{F}_q(X)$ es no vacío pues contiene al menos a todas las funciones constantes de Δ_q en X.

Queremos construir un espacio de q-simplejos, que tenga propiedades algebraicas interesantes, pero a simple vista no tenemos una operación natural entre simplejos, por lo que definimos esta operación formalmente, asi como un producto por elementos de un anillo, esto lo haremos como vimos en el capítulo 1, además lo haremos con escalares sobre un anillo arbitrario, pues la teoría no se hace más ni menos complicada en base a esto; para propositos de aplicación destacan los casos $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 2.4.5. *Sea X un espacio topológico y R un anillo conmutativo con 1, Definimos $S_q(X; R)$ como el módulo libre generado por el conjunto $\mathscr{F}_q(X)$, esto es, $S_q(X; R)$ es el conjunto de sumas formales finitas de productos por escalares en R, de q-simplejos singulares.*

Hemos la convención de que denotar $S_q(X, R)$ simplemente como $S_q(X)$ si trabajamos con un anillo fijo R.

Un elemento $c \in S_q$ se ve de la forma

$$c = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + \cdots + v_k\sigma_k$$

donde $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ son q-simplejos singulares y $v_1, \ldots, v_k$ son elementos de R; esto lo denotaremos por comodidad como

$$c = \sum_{\sigma} v_\sigma \sigma$$

Los elementos de $S_q(X)$ serán llamados q-cadenas singulares de X.

Por como lo hemos definido, el espacio $S_q(X)$ es mu grande, pues el conjunto de funciones continuas de Δ_q a X, por lo general, es muy grande, para empezar tenemos a todas las funciones constantes, por lo que construiremos un espacio a partir de $S_q(X)$ que sea mas fácil de estudiar.

2.1.5. Operador frontera

Para $q > 0$ definimos $F_q^i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, para $0 \leq i \leq q$, como la transformación afín

$$(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots e_q)$$

donde $\widehat{e_i}$ denota que omitimos e_i, en otras palabras,

$$F_q^i(e_j) = \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{cases}$$

Podemos ver que F_q^i mapea Δ_{q-1} continua y afínmente sobre la cara de Δ_q opuesta al vértice e_i, esto lo ilustramos para $q = 2$ en la figura **??**.

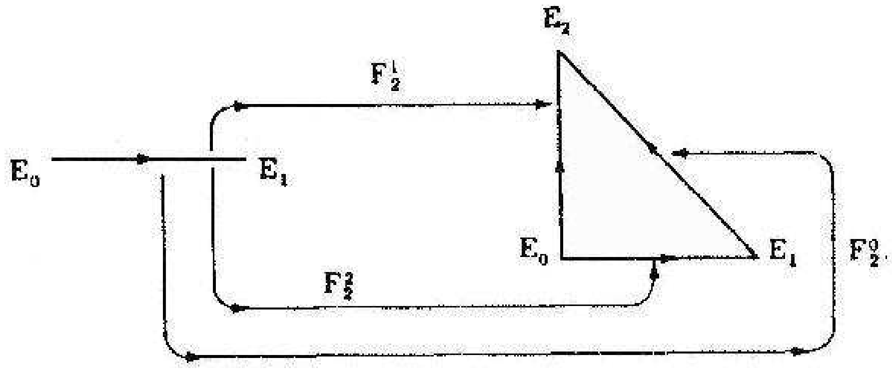


Figura 2.4: Caras de δ_2

Definición 2.4.6. *Para un q-simplejo singular σ en un espacio X, definimos la i-ésima cara de σ como el $(q-1)$-simplejo $\sigma \circ F_q^i$, y la denotaremos por $\sigma^{(i)}$.*

Ejemplo 2.3. *De la definición de F_q^i tenemos que cuando $\sigma = \delta_q$, F_q^i es la i-ésima cara de δ_q, esto es, $\delta_q^{(i)} = F_q^i$.*

Ejemplo 2.4. *Cuando $\sigma = (p_0, p_1, \ldots, p_q)$ con $p_0, \ldots, p_q \in X$, con X espacio afín, entonces*

$$\sigma^{(i)} = (p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_q)$$

Ahora definiremos la frontera de un q-simplejo

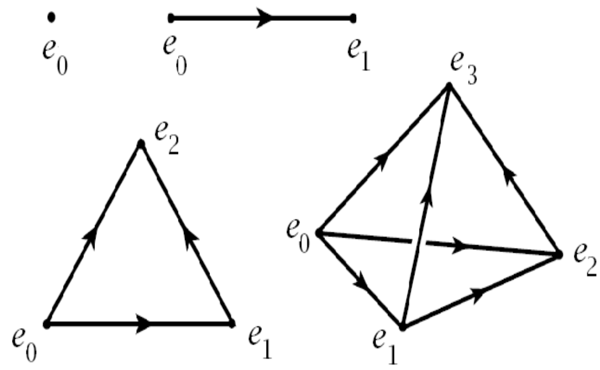


Figura 2.5: Ejemplos de Fronteras

Definición 2.4.7. *Sea $q > 0$, σ un q-simplejo singular. La frontera de σ, denotada por $\partial(\sigma)$, es la $(q-1)$-cadena*

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma^{(i)}$$

Si $q = 0$ definimos la frontera de un 0-simplejo como 0.

Como trabajaremos con distintas q, en ocasiones denotaremos a ∂ como ∂_q para indicar que ∂_q manda un q-simplejo a su frontera. Nótese que tenemos definida ∂_q para toda $q \geq 0$.

Podemos ver en la figura 2.5 que $\partial(\delta_2)$ es la suma de las aristas del triángulo con signos escogidos para que empiece en e_0 y recorra los vértices en sentido creciente hasta volver a e_0, sin embargo, $\partial(\delta_2)$ no es un arco, sino una suma formal de 1-simplejos, tenemos que tener cuidado, pues esta no es la frontera topológica, sino una función de $\mathscr{F}_q$ en $S_{q-1}(X)$, siendo así de naturaleza distinta.

Ejemplo 2.5. *Cuando $\sigma = (p_0, p_1, \ldots, p_q)$, con $p_0, p_1, \ldots, p_q \in E$, E espacio afín, tenemos que*

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i (p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_q)$$

extendemos ∂, a un homomorfismo de módulos $S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ por linealidad, esto es

$$\partial(\sum_{\sigma} v_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma} v_\sigma \partial(\sigma)$$

para $q = 0$ tenemos de nuevo $\partial_0(c) = 0$ para cada 0-cadena c, pues tendremos una suma finita de 0's, esto es, ∂_0 es la función constante 0 de $S_0(X)$ al módulo trivial $\{0\}$, o dicho de otra forma, estamos definiendo $S_{-1}(X) = \{0\}$.

Antes de continuar veamos un resultado técnico.

Lema 2.4.1. *Sean q, i, j enteros tales que $0 \leq j < i \leq q$, entonces*

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j = F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1} \tag{2.2}$$

Donde

$$\begin{aligned} F_{q-1}^j, F_{q-1}^{i-1} &: \Delta_{q-2} \to \Delta_{q-1} \\ F_q^i, F_q^j &: \Delta_{q-1} \to \Delta_q \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} F_q^i \circ F_{q-1}^j &: \Delta_{q-2} \to \Delta_q \\ F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1} &: \Delta_{q-2} \to \Delta_q \end{aligned}$$

Veamoslo por casos

Caso 1 Sea $k < j < i < q$, de esto se sigue que

$$F_q^i F_{q-1}^j(e_k) = F_q^i(e_k) = e_k,$$

como $k < j \leq i - 1$ se tiene que

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1}(e_k) = F_q^j(e_k) = e_k.$$

Caso 2 Sea $k = j < i - 1$ luego

$$F_q^i F_{q-1}^j(e_k) = F_q^i(e_{k+1}) = e_{k+1},$$

ya que $k + 1 < i$.

Por otro lado

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1}(e_k) = F_q^j(e_k) = e_{k+1},$$

ya que $j = k$

Caso 3 Sea $k = j = i - 1$ luego

$$F_q^i F_{q-1}^j(e_k) = F_q^i(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

Por otro lado

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1}(e_k) = F_q^j(e_{k+1}) = e_{k+2},$$

pues $j + 1 = i$

Caso 4 Sea $j < k = i - 1$ luego

$$F_q^i F_{q-1}^j(e_k) = F_q^i(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

Por otro lado

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1}(e_k) = F_q^j(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

Caso 5 Sea $j < i \leq k$ luego

$$F_q^i F_{q-1}^j(e_k) = F_q^i(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

Por otro lado

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1}(e_k) = F_q^j(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

con lo cual cubrimos todos los casos y por lo tanto

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j(e_k) = F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}(e_k),$$

para $k = 0, 1, \ldots, q - 1$.

Por linealidad obtenemos la igualdad para cada $p \in \Delta_{q-2}$ □

Para ahorrar notación hacemos la siguiente convención: denotaremos la composición de dos funciones f y g como fg, a menos que esto se preste a confusión, en cuyo caso la denotaremos como habitualmente lo hacemos, esto es, $f \circ g$.

Con esto ya podemos probar el siguiente teorema que resultará indispensable para definir la homología.

Teorema 2.5. *Sea X espacio topológico, $c \in S_q(X)$, entonces*

$$\partial\partial(c) = 0 \tag{2.3}$$

Demostración. Es suficiente verificar que $\partial_{q-1}\partial_q(\sigma) = 0$ para σ un q-simplejo singular, de nuevo, por linealidad se extendera la igualdad a todo elemento de $S_q(X)$.

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\sigma) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma^{(i)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left(\partial\sigma^{(i)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\left[(\sigma\circ F_q^i)\circ F_{q-1}^j\right]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{i+j}\left[(\sigma\circ F_q^i)\circ F_{q-1}^j\right] \\
&= \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{i+j}\left[\sigma\circ(F_q^i\circ F_{q-1}^j)\right]
\end{aligned}$$

Ahora, podemos separar esta suma en dos partes, sumar primero los terminos donde $j < i$, y luego los términos donde $i \leq j$, esto para cada sumando con $0 \leq i \leq q$, $0 \leq j \leq q-1$. De esta forma tendriamos

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\sigma) &= \sum_{j<i=1}^{q}(-1)^{i+j}\left[(\sigma\circ F_q^i)\circ F_{q-1}^j\right] \\
&+ \sum_{0=i\leq j}^{q-1}(-1)^{i+j}\left[(\sigma\circ F_q^i)\circ F_{q-1}^j\right] \\
&= \sum_{j<i=1}^{q}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^i\circ F_{q-1}^j\right] \\
&+ \sum_{0=i\leq j}^{q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^i\circ F_{q-1}^j\right]
\end{aligned}$$

Por el lema 2.4.1 tenemos

$$\begin{aligned}\partial(\partial\sigma) &= \sum_{j<i=1}^{q}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^j\circ F_{q-1}^{i-1}\right]\\ &+ \sum_{0=i\leq j}^{q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^i\circ F_{q-1}^{j}\right]\end{aligned}\tag{2.4}$$

La primera suma, originalmente se realiza sobre el siguiente conjunto de pares

$$\{(i,j):1\leq i\leq q, 0\leq j\leq q-1, j<i\}$$

Ahora, si renombramos las variables $i'=j, j'=i-1$ en la primera suma tenemos que la suma sería sobre todos los indices donde $i'<j'+1$ desde $j'+1=1$ hasta $j'+1=q$, esto es, la suma se realizaría sobre el conjunto de pares

$$\{(i',j'):0\leq i\leq q-1, 0\leq j'\leq q-1, i'\leq j'\}$$

Que es equivalente a sumar todos los términos que cumplan $i'\leq j'$, desde $i'=0$ hasta $i'=q-1$

Ahora, cada uno de los sumandos de la primera suma, con el cambio de índices quedarían de la siguiente forma

$$(-1)^{i+j}\sigma\circ\left(F_q^jF_{q-1}^{i-1}\right)=(-1)^{(i'+j'-1)}\sigma\circ\left(F_q^{i'}F_{q-1}^{j'}\right)$$

Aplicando a la ecuación 2.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\partial(\partial\sigma) &= \sum_{j<i=1}^{q}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^j\circ F_{q-1}^{i-1}\right]\\ &+ \sum_{0=i\leq j}^{q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^i\circ F_{q-1}^{j}\right]\\ &= \sum_{0=i'\leq j'}^{q-1}(-1)^{i'+j'-1}\sigma\circ\left[F_q^{i'}\circ F_{q-1}^{j'}\right]\\ &+ \sum_{0=i\leq j}^{q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left[F_q^i\circ F_{q-1}^{j}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

Pues cada uno de los sumando de la primera suma se anula con cada uno de los sumando de la segunda suma. □

2.1.6. Ciclos y fronteras

Veamos lo que tenemos hasta ahora, dado un espacio topológico X, para cada $q \geq 0$ hemos construido un módulo libre $S_q(X)$. Ademas, hemos construido un homomorfismo de módulos $\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$. De manera que $\partial\partial = 0$. Esto podemos verlo de la siguiente forma, tenemos el siguiente diagrama

$$\ldots \xrightarrow{\partial} S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_q(X) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\partial} 0$$

con la condición $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ para cada $q > 0$. Esto implica que

$$\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \ker\partial_q$$

Definición 2.5.1. *Sea $c \in S_q(X)$, diremos que c es un q-ciclo si $\partial c = 0$. Diremos que c es una q-frontera si existe $d \in S_{q+1}(X)$ tal que $\partial d = c$, dos cadenas cuya diferencia es una frontera serán llamadas homólogas.*

Al conjunto de q-ciclos lo denotaremos como $Z_q(X; R)$ mientras que al conjunto de fronteras lo denotaremos por $B_q(X; R)$.

Denotaremos $Z_q(X; R)$ y $B_q(X; R)$ simplemente por $Z_q(X)$ y $B_q(X)$ si trabajamos con un anillo R fijo.

Es claro que $B_q(X)$ y $Z_q(X)$ son submódulos de $S_q(X)$ pues

$$\begin{aligned} Z_q(X) &= \ker\partial_q \\ B_q(X) &= \operatorname{Im}\partial_{q+1} \end{aligned}$$

Ademas, por la condición $\partial\partial = 0$ tenemos que el conjunto de q-fronteras es submódulo del conjunto de q-ciclos, esto es, $B_q(X) \leq Z_q(X)$.

El término ciclo está inspirado en el caso $q = 1$, para $R = \mathbb{Z}$, una cadena es un cíclo si representa una curva, o un conjunto de curvas que eventualmente se cierran.

Decimos representan porque no tiene que darse la igualdad, sólo el hecho de que sean homólogas a dichas curvas, pasa algo análogo con $q = 2$ pero con superficies cerradas, para $q \geq 3$ no podemos verlo dentro de $\mathbb{R}^3$.

El término frontera está inspirado en el hecho de que un simplejo es frontera si encierra una región dentro de el, para $q = 1$ la figura 2.6

muestra un cíclo que no es frontera para $X = S^1 \times S^1$, el toro.

Para $q = 2$ podemos pensar en fronteras como superficies encerrando regiones sólidas, pero de nuevo no podemos ver que pasa para $q \geq 3$ dentro de $\mathbb{R}^3$.

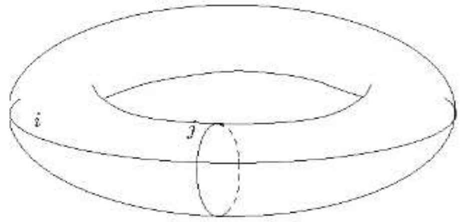


Figura 2.6: i y j representan cíclos que no son fronteras

Esto de que no podamos verlo no es muy preciso, pues usando cocientes por ejemplo, podemos trabajar con estos objetos pero en general no tenemos una visión 3-dimensional de $H_q(X)$ para X arbitrario y $q \geq 3$.

2.1.7. Homología

Definición 2.5.2 (Homología). *Sea X un espacio topológico, definimos el* ***q-ésimo módulo de homología de X sobre*** *R como*

$$Z_q(X;R)/B_q(X;R)$$

Lo denotaremos $H_q(X;R)$. llamaremos homología del espacio X a la sucesión $\{H_q(X;R)\}_{q=0}^{\infty}$.

Seguimos con la convención de denotar $H_q(X;R)$ por $H_q(X)$ para un anillo fijo R.

Cuando tenemos un espacio topológico X, diremos que calculamos la homología de X si hemos identificado cada modulo $H_q(X)$ con algún módulo conocido.

Ejemplo 2.6. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico de un punto, esto es, $X = \{x\}$ y $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$.*

Calcularemos la homología de $\{x\}$.

Dado q existe un único q-simplejo singular σ_q, la función constante, es decir,

$$\sigma_q : \Delta_q \to \{x\} \qquad \sigma_q(p) = x \quad \forall p \in \Delta_q$$

de aquí tenemos que

$$S_q(\{x\}) = \{r\sigma_q : r \in R\} \cong R \qquad \textit{Como } R\textit{-Módulo.}$$

No solo eso, sino que

$$\partial(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_q \circ F_q^i$$

pero $\sigma_q \circ F_q^i$ es un $(q-1)$-simplejo, por lo tanto $\sigma_q \circ F_q^i = \sigma_{q-1}$ y la frontera de σ_q sólo dependerá de la paridad de q, esto es,

$$\partial(\sigma_q) = \begin{cases} \sigma_{q-1} & q \text{ par } > 0 \\ 0 & q \text{ impar} \\ 0 & q = 0 \end{cases}$$

con esto, cuando $q > 0$ tenemos

$$Z_q(x) = B_q(x) = \begin{cases} 0 & q \text{ par} \\ S_q(x) & q \text{ impar} \end{cases}$$

ya con esto $H_q(x) = 0 \quad \forall q > 0$.

Ahora, $Z_0(\{x\}) = S_0(\{x\}) \cong R$, mientras que $B_0(\{x\}) \cong 0$ pues $\partial(r\sigma_1) = r(\sigma_0 - \sigma_0) = 0$, por lo tanto, $H_0(x) = R/0 \cong R$ y el isomorfismo esta dado por $r\sigma_0 \to r$

Cuando probemos el teorema de invarianza homotópica en el próximo capítulo, estableceremos esta como la homología de muchos espacios conocidos, en particular, $\mathbb{R}^n$.

2.1.8. Homología y Componentes Arcoconexas

En el capítulo 1 definimos las componentes arcoconexas de un espacio topológico X como las clases de equivalencia de la relación $x \sim y$ si existe una trayectoria que une x con y. Si conocemos la homología en cada componente de X podemos calcular la homología de todo el espacio pero antes de eso veamos el siguiente resultado.

Lema 2.5.1. *Sea X un espacio topológico arcoconexo y $c \in S_0(X)$ con $c = \sum_i a_i x_i$. Tenemos que $c \in B_0(X)$ si y sólo si $\sum_i a_i = 0$*

Demostración. ($\Rightarrow$)

Sea $c = \partial d, d \in S_1(X)$, sea

$$d = v_1 d_1 + v_2 d_2 + \cdots + v_n d_n$$

con d_i 1-simplejos, entonces d_i es un arco entre dos puntos de X, digamos de x_{2i-1} a x_{2_i}; con esto $\partial(d_i) = x_{2i} - x_{2i-1}$

de esta forma

$$\partial(d) = c = (-v_1x_1+v_1x_2)+(-v_2x_3+v_2x4_)+(-v_3x_5+v_3x_6)+\cdots+(-v_nx_{2n-1}+v_nx_{2n})$$

los puntos x_k no tienen porque ser distintos, pero eso no importa, la suma de los coeficientes de c es entonces

$$(-v_1 + v_1) + (-v_2 + v_2) + (-v_3 + v_3) + \cdots + (-v_n + v_n) = 0$$

$(\Leftarrow)$

Sea $c \in S_0(X)$, con $c = v_1x_1 + \cdots + v_nx_n$, con

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

, entonces $0 = 0x_0 = (\sum_{i=1}^{n} v_i)x_0$, por lo que

$$c = c - 0 = \sum v_ix_i - \sum v_ix_0 = \partial\left(\sum v_i\sigma_{x_i}\right)$$

□

Ahora veamos como se comporta la homología sobre las componentes arcoconexas de X.

Teorema 2.6. *Sean $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ la familia de componentes arcoconexas de X. Existe un isomorfismo canónico*

$$H_q(X) \cong \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} H_q(X_i) \qquad \textit{para cada } q$$

Demostración. Sea σ un q-simplejo. Por definición tenemos $\sigma : \Delta_q \to X$. Ahora, Δ_q es arcoconexo, pues en particular es convexo. Como la imagen continua de arcoconexo es arcoconexo, tenemos que σ manda Δ_q en una de las componentes de X, entonces σ resulta ser un q-simplejo singular en alguna de las componentes arcoconexas de X.

Veamos primero que $S_q(X) \cong \bigoplus_i S_q(X_i)$.

Por linealidad, se induce un homomorfismo

$$f : S_q(X) \to \bigoplus_i S_q(X_i)$$

Donde mandamos cada σ a operar en su clase, esto es, si $c \in S_q(X)$, ordenamos los simplejos de la descomposición de c por clases de tal forma que

$$c = \sum_i c_i,$$

Donde los simplejos de la descomposición de c_i operan sobre la componente X_i, para cada i respectivamente.

Probaremos que f es inyectiva. Sea $f(c) = 0$, entonces c opera de manera nula sobre cada componente, es decir, $c = \sum_i c_i$ donde c_i es un q-simplejo en X_i y ademas $c_i = 0$.

de esta forma, $c = \sum_i 0 = 0$, con esto, f es inyectiva.

Probaremos ahora que f es suprayectiva. Sea $c \in \bigoplus_i S_q(X_i)$, entonces $c = \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i$ con $c_i \in S_q(X_i)$, todas iguales a 0 salvo un número finito, entonces $c = f(\sum c_i)$, por lo tanto f es sobreyectiva. Nótese que la primera suma es la de la suma directa y la segunda la de la definición de $S_q(X)$.

Con esto f es un isomorfismo de módulos y en efecto tenemos $S_q(X) \cong \bigoplus_i S_q(X_i)$.

queremos ver que $H_q(X) \cong \bigoplus_i H_q(X_i)$ por lo que definiremos un homomorfismo $\varphi : H_q(X) \to \bigoplus_i H_q(X_i)$

Si $\sigma : \Delta_q \to X_k$ es un q-simplejo en X que opera sobre la componente X_k, con $k \in \mathcal{I}$, $\sigma \circ F_q^i : \Delta_{q-1} \to X_k$, es decir, cada una de las caras de σ opera sobre la misma componente, por lo que la frontera opera componente a componente.

Si $B_q + c \in H_q(X)$, entonces c se descompone como $c = \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i$ y podemos definir

$$\varphi\left(B_q(X) + \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i\right) = \sum_{i \in \mathcal{I}} (B_q(X_i) + c_i)$$

Veamos que esta bien definida, sean $a + B_q(X) = b + B_q(X)$ entonces $a - b = \partial d$ con $d \in S_{q+1}(X)$, ahora descomponemos a, byc en las cadenas que operan en cada componente. Lo que tenemos es

$$a = \sum_i a_i, b = \sum_i b_i, d = \sum_i d_i$$

, $a - b = \partial d$. Como f es inyectiva tenemos que

$$a_i - b_i = \partial d_i \qquad \text{para cada } i$$

. De esta forma tenemos que

$$a_i + B_q(X_i) = b_i + B_q(X_i)$$

Pues difieren por una frontera en X_i. con esto φ está bien definida.

Probaremos que φ es inyectiva. Sea $c + B_q(X) \in \ker \varphi$, queremos ver que $c = 0$.

Como $\varphi(c + B_q(X)) = 0$ tenemos $c_i + B_q(X_i) = 0$. Por lo tanto $c_i = \partial d_i$ con $d_i \in S_{q+1}(X_i)$, todos iguales a 0 salvo un número finito, por lo que $d = \sum d_i \in S_{q+1}(X)$ y $c = \partial d$ Con esto tenemos que $c + B_q = B_q$(la clase del 0) y por lo tanto ϕ es inyectiva.

Probaremos que φ es suprayectiva. Si tenemos $p = \sum(c_i + B_q(X_i))$, $p \in \bigoplus\limits_i H_q(X_i)$, de aquí $c = \sum c_i \in Z_q(X)$ y $\varphi(c + B_q(X)) = p$

con esto φ es suprayectiva.

De esta manera, hemos probado que φ es biyectiva y por lo tanto es un isomorfismo. □

Corolario 2.6.1. *$H_0(X)$ es un R-módulo libre con tantos generadores como componentes arcoconexas de X.*

Demostración. Como $H_0(X) = \bigoplus\limits_{i \in \mathcal{I}} H_0(X_i)$ es suficiente demostrar que si X es arcoconexo, entonces $H_0(X) = R$. Sea $x_0 \in X$ fijo; dado $x \in X$ sea σ_x un arco de x_0 a x, entonces $\partial(\sigma_x) = x - x_0$.

Por definición, $Z_0(X) = S_0(X)$. Dada una 0-cadena c, con $c = \sum\limits_x v_x x$ donde $x(e_0) = x$ (esto porque los 0-simplejos son funciones constantes).

Definimos la función $\partial^\# : S_0(X) \to R$ como

$$\partial^\#(\sum v_x x) = \sum v_x$$

es decir, la suma de los coeficientes.

Por el Lema 2.5.1, $\partial^\#$ es un homomorfismo de módulos con núcleo $B_0(X)$. Este es suprayectivo pues $\partial^\#(rx) = r$.

Ahora,$Z_0(X) = S_0(X)$ pues $\partial_0 c = 0$ para cada $c \in S_0(X)$.

Por el primer teorema de isomorfismo tenemos que

$$H_0(X) \cong R$$

□

Podemos usar el morfismo $\partial^{\#}$ para definir otro tipo de homología, llamada homología reducida, pero antes de eso veamos un ejemplo.

Usando este teorema podemos ver cual es la homología de un espacio topológico totalmente disconexo.

Ejemplo 2.7. *Sea X un espacio totalmente disconexo , entonces la homología de X es*

$$H_q(X) = \begin{cases} 0 & si\ q > 0 \\ \bigoplus_{x \in X} R & si\ q = 0 \end{cases}$$

Basta ver que las componentes arcoconexas de X son los puntos.

Sabemos por definición todo que todo subconjunto conexo de X tiene a lo más un punto. Como cada componente arcoconexa de X es arcoconexa, en particular es conexa. De esta forma, las componentes arcoconexas son los conjuntos de un solo punto. Por el teorema 2.6 tenemos lo que buscamos.

Proposición 2.6.1. *Sea X un espacio topológico y $c \in S_1(X)$, entonces*

$$\partial^{\#}\partial_1 c = 0$$

Demostración. Por el lema 2.5.1 tenemos que $\partial^{\#}(\partial_1 c)) = 0$ □

Definamos la homología reducida, la homología que hemos estudiado hasta ahora será llamada homología completa.

Definición 2.6.1. *Para cada q entero no negativo definimos $\partial_q^{\#}$ como*

$$\partial_q^{\#} = \begin{cases} \partial_q & si\ q > 0 \\ \partial^{\#} & si\ q = 0 \end{cases}$$

Definimos la homología relativa de X como

$$H_q^{\#}(X) = \ker \partial_q^{\#} / \operatorname{Im} \partial_{q+1}^{\#}$$

La denotamos como $H_q^{\#}(X)$.

Lo que buscamos es que la homología de un espacio trivial, es decir, un punto, sea trivial. Esto no pasa con la homología completa, pero veamos que si con la reducida, más aún tenemos lo siguiente.

Teorema 2.7. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{r}$ las componentes arcoconexas de X, entonces $H_0^{\#}(X)$ es un R-módulo libre con $r-1$ generadores.*

Demostración. Sean $\{x_i\}_{i=1}^r$ representantes de las componentes, fijemos $i_0 \in 1, 2, \ldots, r$.

Sea $\alpha \in S_0(X)$, tenemos $\alpha = \sum\limits_{x\in X} a_x x$, para que $\partial^{\#}\alpha = 0$ tenemos $\sum a_x = 0$.

Se sigue de esto que $\alpha = \sum\limits_{x\in X} a_x(x - x_{i_0})$.

Ahora, para cada $x \in X$ existe $i_x \in \{1, 2, \ldots r\}$ tal que x y x_{i_x} están en la misma clase.

Sea σ_x un arco que empieza en x y termina en x_{i_x}, por definición de ∂_1 tenemos $\partial(\sigma_x) = x_{i_x} - x$ por lo que $x = x_{i_x} - \partial\sigma_x$. De esta forma, x y x_{i_x} son 0-cadenas homólogas.

Como

$$\alpha = \sum_{x\in X} a_x(x - x_{i_0})$$

Tenemos que

$$\bar{\alpha} = \sum_{x\in X} a_x\overline{(x - x_{i_0})} = \sum_{x\in X} a_x(\bar{x} - x_{i_0}) = \sum_{x\in X} a_x(\overline{x_{i_x} - x_{i_0}})$$

reagrupando términos, en cada uno de los factores $(\overline{x_i - x_0})$ tenemos

$$\bar{\alpha} = \sum_{i\neq i_0} b_i(\overline{x_i - x_0})$$

Y como α es arbitrario, tenemos que los $r-1$ elementos $(\overline{x_i - x_0})$ con $i \neq i_0$, generan a $H_0^{\#}(X)$.

Para ver que son independientes, supongamos que

$$\sum_{i\neq i_0} b_i(\overline{x_i - x_{i_0}}) = 0$$

Donde no todos los b_i iguales a 0. De esto se sigue que

$$\sum_{i\neq i_0} b_i(x_i - x_{i_0}) = \partial\sum_{j=1}^{n} c_j\sigma_j = \sum_{j=1}^{n} c_j\partial\sigma_j = \sum_{j=1}^{n} c_j(z_j - y_j), \tag{2.5}$$

donde σ_j es un 1-simplejo que va de y_j a z_j.

Ahora, como cada σ_j actúa en su componente arcoconexa, tenemos que y_j y z_j están en la misma componente, y de la ecuación 2.5 tenemos que $y_j = z_j = x_i$ para alguna i, esto se debe a que los $x_i's$ son representantes de la relación $\sim$ y por lo tanto no tenemos a dos de ellos en la misma clase. Por lo tanto $c_j(z_j - y_j) = 0$ para cada j, luego todo el miembro derecho es nulo, y como S_0 es libre, con 0-simplejos como generadores, tenemos que $b_i = 0$ para cada i de lo que obtenemos la independencia. □

Corolario 2.7.1. *La homología reducida de un punto es trivial, esto es,*

$$H_q^{\#}(\{x\}) = 0 \quad \textit{para toda } q$$

.

2.1.9. Homomorfismo inducido

Ya obtuvimos a partir de un espacio topológico X, una sucesión de módulos $\{H_q(X)\}_{q=0}^{\infty}$. Ahora queremos analizar lo que podemos hacer con dos espacios topológicos y su homología cuando una función continua entre ellos. De esta forma tendremos las propiedades más importantes de la homología, que nos relacionan la topología con el algebra.

Sean X, Y espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función continua; si σ es un q-simplejo en X, entonces podemos ver que $f \circ \sigma$ es un q-simplejo en Y.

De esto podemos extender esta función, a un homomorfismo de R-módulos

$$S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y)$$

de tal forma que

$$S_q(f)\left(\sum_{\sigma} v_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma} v_\sigma (f \circ \sigma)$$

Estas propiedades se deducen de la definición

Proposición 2.7.1. *Sean X, Y, Z espacios topológicos , $id_X : X \to X$ la función identidad en X y $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funciones continuas. Tenemos que*

$$\begin{aligned} S_q(id_X) &= id_{S_q(X)} \\ S_q(gf) &= S_q(g)S_q(f) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donde $id_{S_q(X)}$ es la función identidad en $S_q(X)$.

Demostración. $Sq(id)(\sigma) = id \circ \sigma = \sigma$

y por linealidad $S_q(id_X) = id_{S_q(X)}$

para la segunda parte, sea $f : X \to Y$, y $g : Y \to Z$, entonces

$$S_q(gf)\sigma = (gf) \circ \sigma = g \circ (f\sigma) = (S_q(g))(f\sigma) = (S_q(g) \circ S_q(f))(\sigma)$$

y de nuevo, por linealidad tenemos lo que queriamos □

Otra propiedad importante es que el operador frontera conmuta con $S_q(f)$ en el siguiente sentido

Lema 2.7.1. *Sean X, Y espacios topológicos, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r, "S_q(f)"] \arrow[d, "\partial"] & S_q(Y) \arrow[d, "\partial"] \\ S_{q-1}(X) \arrow[r, "S_{q-1}(f)"] & S_{q-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Donde $\partial S_q(f), \partial S_{q-1}(f) : S_q(X) \to S_{q-1}(Y)$ Esto es,

$$\partial S_q(f) = S_{q-1}(f)\partial \tag{2.7}$$

Demostración. Buscamos la igualdad de las funciones, esta se da si

$$\partial S_q(f)(c) = S_{q-1}(f)\partial(c) \quad \text{para todo } c \in S_q(X).$$

Probaremos la igualdad para un q-simplejo σ y obtendremos la igualdad en cualquier elemento de $S_q(X)$ por linealidad.

$$\begin{aligned} \partial(S_q(f)(\sigma)) &= \partial(f\sigma) \\ &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(f \circ \sigma) \circ F_q^i \\ &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i f \circ (\sigma \circ F_q^i) \\ &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i S_{q-1}(f)\left(\sigma \circ F_q^i\right) \\ &= S_{q-1}(f)\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \circ F_q^i\right) \\ &= S_{q-1}(f)(\partial\sigma) \end{aligned}$$

□

La siguiente propiedad con respecto a los q-simplejos será util más adelante.

Proposición 2.7.2. *Sea σ un q-simplejo en X, entonces*

$$S_q(\sigma)(\delta_q) = \sigma$$

Demostración. $\sigma : \Delta_q \to X$, $\delta_q : \Delta_q \to \Delta_q$ es la identidad, de aquí que $\delta_q \in S_q(\Delta_q)$.

Lo que tenemos que verificar es que $\sigma \circ \delta_q = \sigma$ lo cual es inmediato pues δ_q es la identidad. □

Sea z un q-ciclo en X. Denotamos la clase de homología de z por $\bar{z}$, esto es, $\bar{z} = x + B_q(X)$. Podemos definir un homomorfismo $H_q(X) \to H_q(Y)$ de la siguiente forma

Definición 2.7.1. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua, definimos $H_q(f) : H_q(X) \to H_q(Y)$ como*

$$H_q(f)(\bar{z}) = \overline{S_q(f)(z)}$$

el homomorfismo de módulos $H_q(f)$ será llamado el homomorfismo inducido por f

Teorema 2.8. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, id_X la función identidad en X y $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funciones continuas, se cumple que*

$$H_q(id_X) = id_{H_q(X)} \tag{2.8}$$

$$H_q(gf) = H_q(g) \circ H_q(f) \tag{2.9}$$

Demostración. $H_q(id)(\bar{z}) = \overline{S_q(id)(z)} = \bar{z}$

Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z$ tenemos que

$$\begin{aligned} H_q(gf)(\bar{z}) &= \overline{S_q(gf)(z)} \\ &= \overline{S_q(g)S_q(f)(z)} \\ &= H_q(g)\left(\overline{S_q(f)(z)}\right) \\ &= H_q(g) \circ H_q(f)(\bar{z}) \end{aligned}$$

□

Corolario 2.8.1. *La homología de un espacio es un invariante topológico, esto es, si X, Y son espacios homeomorfos entonces $H_q(X)$ y $H_q(Y)$ son R-módulos isomorfos*

Demostración. Sean X, Y homeomorfos, entonces existen funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que

$$\begin{aligned} f \circ g &= id_Y \\ g \circ f &= id_X \end{aligned}$$

por lo tanto existen homomorfismos de módulos

$$\begin{aligned} H_q(f) : H_q(X) &\to H_q(Y) \\ H_q(g) : H_q(Y) &\to H_q(X) \end{aligned}$$

Tales que $H_q(f) \circ H_q(g) = id_{H_q(Y)}$, y además $H_q(g) \circ H_q(f) = idH_q(X)$ Por proposición **??** $H_q(f)$ es un isomorfimo de módulos entre $H_q(X)$ y $H_q(Y)$ □

Decimos que H_q es un funtor covariante de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los R-módulos, en el sentido de que se cumple el teorema 2.8. También se dice que el homomorfismo inducido $H_q(f)$ es funtorial.

Para vér definición de categoría y funtor ver Apéndice.

Capítulo 3

Teorema de invarianza homotópica

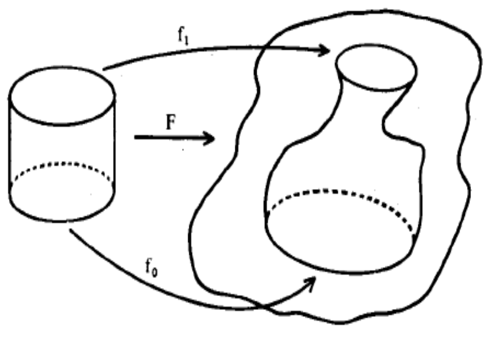
3.1. Homotopía

3.1.1. Homotopía de funciones

En esta sección definiremos una relación de equivalencia de funciones, que dará sentido formal a la idea intuitiva de que un homeomorfismo es una manera de ir transformando el espacio como si se tratara de una bola de goma.

Intuitivamente queremos decir que dos funciones $f, g : X \to Y$ son equivalentes si podemos deformar continuamente f en g.

Definición 3.0.1. *Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f y g son **homotópicas** si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. La aplicación F será llamada una homotopía entre f y g. .Esto lo denotaremos por $F : f \simeq g$.*



Notemos que para cada $t \in [0, 1]$, $F(x, t)$ es una aplicación intermedia entre $f(x)$ y $g(x)$; de esta manera una homotopía es una familia de funciones continuas $f_t(x) = F(x, t)$ que unen f con g, así que tenemos $f_0 = f$ y $f_1 = g$.

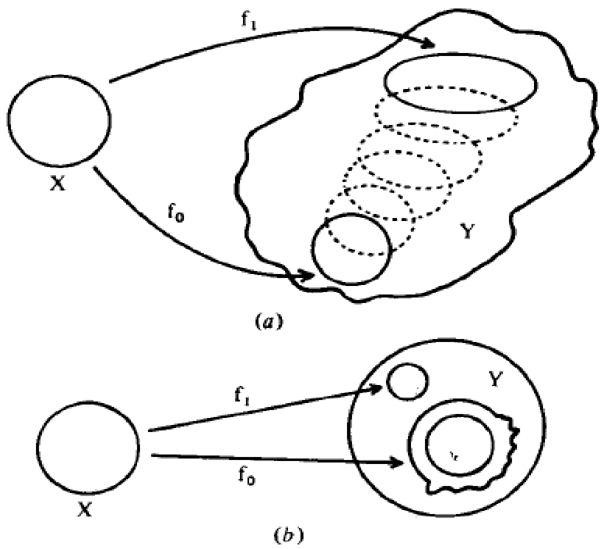


Figura 3.1: Aplicaciones homotópicas y Aplicaciones no homotópicas

En ocaciones queremos que a una homotopía cumpla con propiedades adicionales. Un ejemplo d esto es el siguiente. Sea $f : I \to Y$ esto es, f es una curva, entonces f es homotópica a la función constante $g(x) = f(0)$ con la homotopía $H : I \times I \to Y$, $H(x,t) = f(1-t)x$.

Para evitar estas situaciones definiremos el concepto de homotopía relativa.

Definición 3.0.2. *Sea $A \subset (X)$ y $f_0, f_1 : X \to Y$. Diremos que f_0 y f_1 son* ***homotópicas relativas a*** *A si existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ tal que $H(a,t) = f_0(a) \quad \forall a \in A$, $\forall t \in I$. Lo cual denotaremos por $f_0 \simeq f_1$ $(relA)$ o $f_0 \simeq_{relA} f_1$*

De esta forma una homotopía relativa a A es una homotopía tal que cada valor de t, deja fijo a cada elemento de A con respecto a su valor en f_0.

Ya con esto, si $A = \{0,1\}$, en el ejemplo de la curva, tenemos que f(x) ya no necesariamente es homotópica a una aplicación constante, pues $f(1)$ no tiene que permanecer constante a lo largo de t, y en nuestro ejemplo anterior este no era el caso.

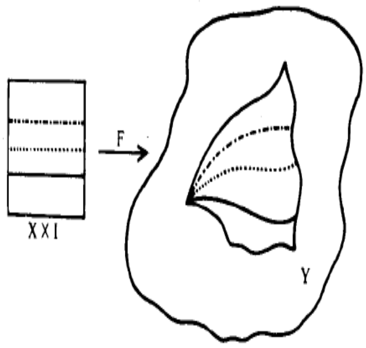


Figura 3.2: Homotopía Relativa a $\{0, 1\}$

El concepto de homotopía es un caso particular de el de homotopía relativa pues si hacemos $A = \emptyset$ tenemos que una homotopía relativa a A resulta ser una homotopía.

Ya tenemos definida nuestra relación, ahora falta ver que esta es una relación de equivalencia.

Proposición 3.0.1. *La relación $\simeq_{relA}$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones continuas de X a Y.*

Demostración.

(reflexividad) Sea $H : X \times I \to Y$ definida por$H(x, t) = f(x)$, entonces $H : f \simeq_{relA} f$

(simétría) Sea $F : f_0 \simeq_{relA} f_1$, definimos $G : X \times I \to Y$ como $G(x, t) = F(x, 1-t)$. Tenemos que $G : f_1 \simeq_{relA} f_0$

(transitividad) Sean $F, G : X \times I \to Y$ tales que $F : f \simeq_{relA} g$ y $G : g \simeq_{relA} h$. Definimos

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

con esto, $H : f \simeq_{relA} h$

□

3.1.2. Homotopía de espacios

Ahora definiremos la equivalencia homotópica de espacios, en base a la equivalencia homotópica de funciones.

Definición 3.0.3. *Sean X, Y dos espacios topológicos. Diremos que X* ***es homotópico a*** *Y si existen funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que*

$$fg \simeq id : Y \to Y$$
$$gf \simeq id : X \to X$$

Cada una de las funciones f, g son llamadas equivalencias homotópicas.

También diremos que X y Y tienen la misma homotopía o que X es homotópicamente equivalente a Y si X es homotópico a Y.

De esta forma si X y Y son homeomorfos, entonces son homotópicamente equivalentes. Veamos que no ocurre el recíproco.

Ejemplo 3.1. *Sea $X = D^n = \{x \in R^n : ||x|| \leq 1\}$, y $Y = 0 \in D^n$, donde 0 denota el vector cero en $\mathbb{R}^n$. Tenemos que X y Y no son homeomorfos pues no tienen la misma cardinalidad por lo que no existen funciones biyectivas entre ellos.*

Sea $f : D^n \to \{0\}$ definida como $f(x) = 0$ y $i : Y \to X$ denota la inclusión, esto es,$i(0) = 0$, entonces $fi = id_Y$, y $if = 0$.

Si hacemos

$$H(x, t) = tx + (1 - t)y$$

tenemos $H : if \simeq id_X$

Los espacios con la misma homotopía que un punto reciben un nombre especial.

Definición 3.0.4. *Un espacio homotópico a un punto se llamará espacio contractible.*

Un hecho importante en el ejemplo 3.1 es que teniamos un subconjunto A (en el ejemplo 3.1 $A = \{0\}$) de nuestro espacio X (en el ejemplo 3.1 $X = D^n$) y una de las funciones involucradas en la homotopía era la inclusión.

Definición 3.0.5. *Sea $A \subset X$, decimos que A es un retracto de deformación si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $ir \simeq id : X \to X$ y $ri = id : A \to A$ donde $i : A \to X$ es la inclusión. Si además tenemos que $ir \simeq_{relA} id : X \to X$ diremos que A es un retracto de deformación fuerte. a función r será llamada una retracción. Tambien diremos que A es un retracto de X*

Tenemos que tener cuidado con esto porque este concepto puede tener otro significado, pero en nuestro caso no tendremos problema pues siempre que hablemos de un retracto este será un retracto de deformación o un retracto de deformación fuerte.

Ejemplo 3.2. *Sea $X = S^1 \times I$ el cilindro y $A = S^1 \times \{0\} \cong S^1$ el círculo inferior, vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, esto es,*

$$X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

y hagamos $r : X \to A$, como $r(x, y, z) = (x, y, 0)$, sabemos que $i : A \to X$ esta dada por $i(x, y, 0) = (x, y, 0)$ por lo que $ri = id_A$, ahora $ir(x, y, z) = (x, y, 0)$ sea $H((x, y, z), t) = (x, y, (1 - t)z)$ es una homotopia relativa a A, de ir a id_X.

Intuitivamente una retracción es una deformación continua del espacio a un subespacio, volviendo a la idea de ir torciendo un espacio hasta obtener otro, volviendo a nuestra noción intuitiva de homeomorfismo.

Una retracción nos da un caso particular de homotopia de espacios, pero muy importante.

Un hecho importante es que estamos definiendo una nueva categoría, esta es, la categoría de los espacios homotópicos, **hTop**, donde los objetos son los espacios topológicos, los morfismos son las clases de homotopía de funciones continuas, esto es, $[f] \in Hom(A, B)$ si $f : A \to B$ es continua y $g \in [f] \Rightarrow g \simeq f$; la composición es la composición usual.

En esta categoría dos objetos son isomorfos si son espacios homotópicos, y cuando estudiamos propiedades homotópicas, implicitamente lo que estamos haciendo es estudiar esta categoría. Para definición de categoría ver Apéndice.

Lo que estamos haciendo es estudiar otro tipo de equivalencia entre espacios topológicos, esta es la equivalencia homotópica, y como espacios homeomorfos son en particular homotópicos, nuestros invariantes homotópicos serán tambien invariantes topológicos.

3.2. El teorema de invarianza homotópica

Ahora mostraremos que los módulos de homología son invariantes homotópicos, no solo invariantes topológicos, el teorema fuerte que queremos probar es el siguiente.

Teorema 3.1. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Si f y g son homotópicas , entonces para cada q, los homomorfismo inducidos $H_q(f)$ y $H_q(g)$ son iguales en el R-módulo $H_q(X)$.*

Este teorema quedará establecido al final del capítulo después de que veamos algunos resultados.

Definición 3.1.1. *Sea $t \in I$ fijo. Definimos $\lambda_t : X \to X \times I$ como $\lambda_t(x) = (x, t)$ para cada $x \in X$*

Por definición tenemos que $\lambda_t : \lambda_0 \simeq \lambda_1$.

Para cada q queremos construir un homomorfismo

$$P_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X \times I)$$

tal que

$$\partial_{q+1} P_q + P_{q-1}\partial_q = S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0) \tag{3.1}$$

Donde cada uno de los morfismos anteriores van de $S_q(X)$ a $S_q(X \times I)$.

Por la ecuación 3.1 diremos que $S_q(\lambda_0)$ y $S_q(\lambda_1)$ son homotópicos por cadenas.

El homomorfismo P será llamado el **operador prisma** y será construido de tal forma satisfaga la siguiente propiedad funtorial:

Para cada función continua $h : Y \to X$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_q(Y) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S_q(h)"'] & S_{q+1}(Y \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(h \times id)"] \\ S_q(X) \arrow[r, "P"] & S_{q+1}(X \times I) \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

es conmutativo.

Teorema 3.2. *El diagrama 3.2 es conmutativo si y sólo si para cada q-simplejo singular $\sigma : \Delta_q \to X$ tenemos*

$$P(\sigma) = S_{q+1}(\sigma \times id)P(\delta_q)$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $Y = \Delta_q$ y $h = \sigma$. Como $\delta_q : \Delta_q \to \Delta_q$ es la identidad, entonces $\delta_q \in S_q(\Delta_q)$.

Siguiendo las flechas del diagrama, empezando en $S_q(\Delta_q)$ abajo y luego derecha obtenemos $PS_q(\sigma)(\delta_q)$; ahora, si nos vamos derecha y luego abajo obtenemos $S_{q+1}(\sigma \times id)P(\delta_q)$, como el diagrama es conmutativo estos dos terminos son iguales, pero por proposición 2.7.2, $S_q(\sigma)(\delta_q) = \sigma$ de donde tenemos

$$P(\sigma) = S_{q+1}(\sigma \times id)P(\delta_q)$$

($\Leftarrow$) Sea $\sigma : \Delta_q \to Y$ un q-simplejo, y $h : Y \to X$ continua. Nos fijamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S_q(\Delta_q) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S_q(\sigma)"'] & S_{q+1}(\Delta_q \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(\sigma\times id)"] \\
S_q(Y) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S_q(h)"'] & S_{q+1}(Y \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(h\times id)"] \\
S_q(X) \arrow[r, "P"] & S_{q+1}(X \times I)
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} P(\sigma) &= S_{q+1}(\sigma \times id)P(\delta_q) \\ P(h\sigma) &= S_{q+1}(h\sigma \times id)P(\delta_q) \end{aligned}$$

Y queremos ver que

$$P(S_q(h)(\sigma)) = S_{q+1}(h \times id)P(\sigma)$$

Ahora, $S_q(h)(\sigma) = h\sigma$, y $h\sigma \times id = (h \times id)(\sigma \times id)$, de lo que tenemos que

$$P(h\sigma) = S_{q+1}(h \times id)\left[S_{q+1}(\sigma \times id)P(\delta_q)\right] = S_{q+1}(h \times id)P(\sigma)$$

$\square$

Del teorema anterior, vemos que solo es necesario definir $P(\delta_q)$.

Ahora, $\Delta_q \times I$ tiene vertices $A_0 = (e_0, 0), A_1 = (e_1, 0) \ldots, A_q = (e_q, 0)$, $B_0 = (e_0, 1), B_1 = (e_1, 1), \ldots, B_q = (e_q, 1)$.

Definición 3.2.1. *definimos $P(\delta_q)$ como*

$$P(\delta_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (A_0, A_1, \dots, A_i, B_i, \dots B_q)$$

Ejemplo 3.3. *Sea $q = 1$, $P(\delta_1) = (A_0, B_0, B_1) - (A_0, A_1, B_1)$*
Como lo ilustra la figura 3.3

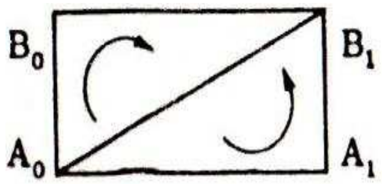


Figura 3.3: $P(\delta_1)$

Lema 3.2.1.

$$(F_q^h \times id) \circ (A_0 \dots A_k B_k \dots B_{q-1})$$

$$= \begin{cases} (A_0 \dots A_k B_k \dots \hat{B}_h \dots B_q) & h > k \\ (A_0 \dots \hat{A}_h \dots A_{k+1} B_{k+1} \dots B_q) & h \leq k \end{cases}$$

Demostración. Queremos ver que la composición de las dos transformaciones afines es el mapeo afín correspondiente, para esto basta ver que las funciones coinciden en los vértices de Δ_q.

En el caso $h > k$. Veamos primero la acción de $(A_0 \dots A_k B_k \dots B_{q-1})$

$$\begin{array}{rcl} e_0 & \mapsto & (e_0, 0) \\ e_1 & \mapsto & (e_1, 0) \\ \vdots & & \\ e_k & \mapsto & (e_k, 0) \\ e_{k+1} & \mapsto & (e_k, 1) \\ \vdots & & \\ e_q & \mapsto & (e_{q-1}, 1) \end{array}$$

Componiendo con $(e_0 e_1 \ldots \hat{e}_h \ldots e_q) \times id$ tenemos

$$\begin{array}{rcl}
e_0 & \mapsto & (e_0, 0) \\
e_1 & \mapsto & (e_1, 0) \\
\vdots & & \\
e_k & \mapsto & (e_k, 0) \\
e_{k+1} & \mapsto & (e_k, 1) \\
\vdots & & \\
e_h & \mapsto & (e_{h-1}, 1) \\
e_{h+1} & \mapsto & (e_{h+1}, 1) \\
\vdots & & \\
e_q & \mapsto & (e_q, 1)
\end{array}$$

Que es igual a $(A_0 \ldots A_k B_k \ldots \hat{B}_h \ldots B_q)$

Para el caso $h \leq k$, de manera análoga tenemos que $(F_q^h \times id) \circ (A_0 \ldots A_k B_k \ldots B_q)$ actúa de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl}
e_0 & \mapsto & (e_0, 0) \\
e_1 & \mapsto & (e_1, 0) \\
\vdots & & \\
e_h & \mapsto & (e_{h+1}, 0) \\
\vdots & & \\
e_k & \mapsto & (e_{k+1}, 0) \\
e_{k+1} & \mapsto & (e_{k+1}, 1) \\
\vdots & & \\
e_q & \mapsto & (e_q, 1)
\end{array}$$

Que es igual a $(A_0 \ldots \hat{A}_h \ldots A_{k+1} B_{k+1} \ldots B_q)$ □

Proposición 3.2.1. $\partial P \delta_q + P \partial \delta_q = S_q(\lambda_1)(\delta_q) - S_q(\lambda_0)(\delta_q)$

Demostración. Como $\lambda_0(e_k) = (e_k, 0)$ y
$\lambda_1(e_k) = (e_k, 1)$, además de que

$$S_q(\lambda_k)(\delta_q) = \lambda_k \text{ con } k = 0, 1,$$

Tenemos que $\lambda_1(\delta_q) - \lambda_0(\delta_q) = (B_0 \dots B_q) - (A_0 \dots A_q)$; calculado $\partial P\delta_q$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial(P\delta_q) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial(A_0 \dots A_i B_i \dots B_q) \\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \left(\sum_{k=0}^{q+1} (-1)^j (A_0 \dots A_i B_i \dots B_q) F_{q+1}^k \right) \\
&= \sum_{i=0}^{q} \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^{i+k} (A_0 \dots A_i B_i \dots B_q) F_{q+1}^k
\end{aligned}$$

Ahora, separamos esta suma en dos partes, recorriendo los índices que cumplen con la condición correspondiente, esto es

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \leq i=0}^{q} (-1)^{i+j} (A_0 \dots \widehat{A}_j \dots A_i B_i \dots B_q) \\
&+ \sum_{i \leq j=0}^{q} (-1)^{i+j+1} (A_0 \dots A_i B_i \dots \widehat{A}_j \dots B_q)
\end{aligned}$$

Nos fijamos en los índices de ambas sumas en los cuales $i = j$. Esta resulta ser una suma telescópica ya que $(A_0 \dots \widehat{A}_{i+1} B_{i+1} \dots B_q) = (A_0 \dots A_i \widehat{B}_i \dots B_q)$, esto es

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{q} \Big((A_0 \dots \widehat{A}_i B_i \dots B_q) - (A_0 \dots A_i \widehat{B}_i \dots B_q) \Big) \\
=\ & (B_0 \dots B_q) - (A_0 B_1 \dots B_q) + (A_0 B_1 \dots B_q) \\
& + \dots + (A_0 \dots A_{q-1} B_q) - (A_0 \dots A_q) \\
=\ & (B_0 \dots B_q) - (A_0 \dots A_q)
\end{aligned}$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
\partial P\delta_q &= (B_0 \dots B_q) - (A_0 \dots A_q) \\
&\quad + \sum_{j<i=1}^{q} (-1)^{i+j} (A_0 \dots \widehat{A}_j \dots A_i B_i \dots B_q) \\
&\quad + \sum_{i<j=1}^{q} (-1)^{i+j+1} (A_0 \dots A_i B_i \dots \widehat{A}_j \dots B_q)
\end{aligned}$$

Para $P\partial\delta_q$, tenemos que

$$P\partial\delta_q = P\left(\sum_{h=0}^{q}(-1)^h F_q^h\right) = \sum_{h=0}^{q}(-1)^h P(F_q^h)$$

$$= \sum_{h=0}^{q}(-1)^h S_q(F_q^h \times id)P\delta_{q-1}$$

Esto por el teorema 3.2.

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}
P\partial\delta_q &= \sum_{h=0}^{q}(-1)^h S_q(F_q^h \times id)P\delta_{q-1} \\
&= \sum_{h=0}^{q}(-1)^h S_q(F_q^h \times id)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k(A_0\ldots A_k B_k\ldots B_q)\right) \\
&= \sum_{h=0}^{q}(-1)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k S_q(F_q^h \times id)(A_0\ldots A_k B_k\ldots B_{q-1})\right) \\
&= \sum_{h=0}^{q}\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^{h+k}(F_q^h \times id)\circ(A_0\ldots A_k B_k\ldots B_{q-1})
\end{aligned}$$

Separando en dos sumas, por el lema 3.2 tenemos que

$$P\partial\delta_q = \sum_{k<h}(-1)^{h+k}(A_0\ldots A_k B_k\ldots \widehat{B}_h\ldots B_q)$$

$$+\sum_{h\leq k}(-1)^{h+k}(A_0\ldots \widehat{A}_h\ldots A_{k+1}B_{k+1}\ldots B_q)$$

Haciendo $h = j$ y $k+1 = i$ en la segunda suma. Tenemos$h \leq k$ si y sólo si $j < i$.

Haciendo el cambio de variable obtenemos

$$P\partial\delta_q = \sum_{k<h}(-1)^{h+k}(A_0\ldots A_k B_k\ldots \widehat{B}_h\ldots B_q)$$

$$+\sum_{j\leq i}(-1)^{i+j-1}(A_0\ldots \widehat{A}_h\ldots A_i B_i\ldots B_q)$$

De la identidad para $\partial P\delta_q$ y esta última tenemos que

$$\partial P\delta_q + P\partial\delta_q = S_q(\lambda_1)(\delta_q) - S_q(\lambda_0)(\delta_q)$$

que es lo queríamos demostrar. □

Teorema 3.3. *Sea X un espacio topológico, se cumple que*

$$\partial P + P\partial = S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0)$$

Como homomorfismos de $S_q(X)$ a $S_q(X \times I)$

Demostración. Basta probar la igualdad para un q-simplejo σ, sabemos que

$$P\partial\delta_q + \partial P\delta_q = S_q(\lambda_1)(\delta_q) - S_q(\lambda_0)(\delta_q)$$

.

Aplicando $S_q(\sigma \times id)$ a ambos lados de la igualdad tendremos lo que buscamos.

Para $P\partial$ tenemos

$$S_q(\sigma \times id)P\partial\delta_q = PS_{q-1}(\sigma)(\partial\delta_q) = P\partial S_q(\sigma)(\delta_q) = P\partial\sigma$$

para ∂P tenemos

$$S_q(\sigma \times id)\partial P\delta_q = \partial S_{q+1}(\sigma \times id)P(\delta_q) = \partial P\sigma$$

Para $S_q(\lambda_k)$ con $k = 0, 1$, vemos que $(\sigma \times id) \circ \lambda_k = \lambda_k \circ \sigma$, de esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
S_q(\sigma \times id)(S_q(\lambda_k))(\delta_q) &= S_q((\sigma \times id) \circ \lambda_k)(\delta_q) \\
&= S_q(\lambda_k \circ \sigma)(\delta_q) \\
&= S_q(\lambda_k)S_q(\sigma)(\delta_q) \\
&= S_q(\lambda_k)(\sigma)
\end{aligned}$$

y de esta manera, aplicando a ambos lados de $S_q(\sigma \times id)$ obtenemos

$$\partial P\sigma + P\partial\sigma = S_q(\lambda_1)(\sigma) - S_q(\lambda_0)(\sigma)$$

□

Con lo que hemos probado hasta el momento estamos listos para probar el teorema principal.

Teorema 3.4. *Sean $f, g : X \to Y$ funciones homotópicas, entonces $H_q(f) = H_q(g)$ para todo q.*

Demostración. Sea $G : f \cong g$, $c \in Z_q(X)$, tenemos

$$\partial Pc + P\partial c = S_q(\lambda_1)c - S_q(\lambda_0)c = \partial(Pc)$$

Por lo tanto $S_q(\lambda_1)$ es homotópico por cadenas a $S_q(\lambda_0)$, (esto es, $S_q(\lambda_1)(c)$ es homotópico a $S_q(\lambda_0)(c)$ para cada q-ciclo pues difieren por $\partial(Pc)$).

Como $\overline{S_q(\lambda_1)(c)} = \overline{S_q(\lambda_0(c))}$ para cada q-ciclo c, entonces

$$H_q(\lambda_1) = H_q(\lambda_0)$$

Ahora, $G \circ \lambda_0 = f$, mientras que $G \circ \lambda_1 = g$, por lo tanto

$$H_q(f) = H_q(G\lambda_0) = H_q(G)H_q(\lambda_0) = H_q(G)H_q(\lambda_1) = H_q(G\lambda_1) = H_q(g)$$

$\square$

De esta forma, como ya hemos calculado la homología de un punto, ésta resulta ser la homología de cualquier espacio contractible, en particular $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 4

Homología Relativa

4.1. Homologia relativa

4.1.1. Ciclos y fronteras relativas

Sea $A \subset X$, A es un espacio topológico con la topología relativa a X. $S_q(A)$ está formado de las combinaciones lineales de simplejos de X cuya imagen esta contenida en A. De esta forma para cada q tenemos que $S_q(A)$ es submódulo de $S_q(X)$, Tomando cociente obtenemos el módulo $S_q(X)/S_q(A)$.

Definición 4.0.1. *Definimos el homomorfismo*

$$\bar{\partial} : S_q(X)/S_q(A) \to S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)$$

de la siguiente forma

$$\bar{\partial}\,(c + S_q(A)) = (\partial(c) + S_{q-1}(A))$$

Proposición 4.0.1. *$\bar{\partial}$ está bien definido, esto es, si $c_1 - c_2 \in S_q(A)$ entonces $\partial c_1 - \partial c_2 \in S_{q-1}(A)$*

Demostración. Aplicando ∂ a $c_1 - c_2$ obtenemos una $q-1$-cadena en A pues σF_q^i es un $(q-1)$-simplejo en A para cada i siempre que σ sea un q-simplejo en A. Aplicamos este argumento a cada simplejo de la expresión de $c_1 - c_2$. □

Teorema 4.1. *El siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & S_q(X)/S_q(A) \arrow[d, "\bar{\partial}"] \\ S_{q-1}(X) \arrow[r] & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Demostración. Sea $c \in S_q(X)$, aplicando la proyección en $S_q(A)$ obtenemos $c + S_q(A)$ y componiendo con $\bar{\partial}$ tenemos $\partial c + S_{q-1}(A)$.

Por otro lado, aplicando primero ∂ tenemos ∂c y aplicando la proyección en $S_{q-1}(A)$ obtenemos $\partial c + S_{q-1}(A)$.

Por lo tanto se tiene la igualdad y el diagrama conmuta. □

Para $\bar{\partial}$ se cumple una condición análoga a la de ∂, la cual vemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.

$$\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$$

Demostración.

$$\bar{\partial}\left(\partial(c) + S_{q-1}(A)\right) = \partial\partial(c) + S_{q-2}(A) = 0 + S_{q-2}(A) = 0 \mod S_{q-2}(A)$$

□

En base a esto, nos fijamos los módulos

1. $\ker(\bar{\partial}_q)$
2. $\operatorname{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$

Como $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ tenemos que $\operatorname{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) \leq \ker(\bar{\partial}_q)$.

Definición 4.2.1. *Definimos el q-ésimo módulo de homología de X relativo a A sobre R como el módulo*

$$\ker(\bar{\partial}_q)/\operatorname{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$$

Y lo denotaremos por $H_q(X, A; R)$

Analogamente a $H_q(X)$, omitiremos R si el anillo R queda fijo y denotaremos simplemente como $H_q(X, A)$.

Veamos que podemos definir $H_q(X, A)$ directamente de $S_q(X)$. Denotando π_q a la proyección de $S_q(A)$ en $S_q(X)$, es decir, $\pi_q(c) = c + S_q(A)$ para cada $c \in S_q(X)$.

Nos fijamos en la imagen inversa de $\ker(\bar{\partial}_q)$, esta es, $\pi_q^{-1}(\ker \bar{\partial}_q)$. La denotamos por $Z_q(X, A)$. Los elementos de $Z_q(X, A)$ serán llamados q-ciclos relativos de A.

Teorema 4.3.

$$Z_q(X, A) = \{c \in S_q(X) : \partial(c) \in S_{q-1}(A)\}$$

Demostración. $\bar{\partial}(c+S_q(A)) = 0 \Leftrightarrow \partial(c)+S_{q-1}(A) = 0 \Leftrightarrow \partial(c) \in S_{q-1}(A)$ □

La figura 4.1 ilustra un 1-ciclo relativo. Esta curva es un ciclo relativo pues sus puntos inicial y final están en A.

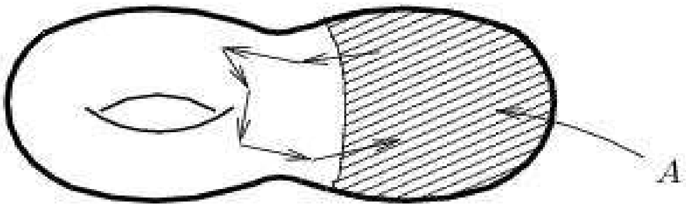


Figura 4.1: Ciclo relativo a A

De manera similar definimos $B_q(X, A)$ como $\pi_q^{-1} \operatorname{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$.Los elementos de $B_q(X, A)$ les llamamos q-fronteras relativas de A.

Teorema 4.4.

$$B_q(X, A) = \{c \in S_q(X) : \exists c_A \in S_q(A) \textit{ tal que } c \textit{ homologo a } c_A\}$$

, esto es, $c \in B_q(X, A)$ si y sólo si existe $c_A \in S_q(A)$ y $d \in S_{q+1}(X)$ tales que

$$c - c_A = \partial d$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea E el conjunto definido en el enunciado del teorema,si $c \in B_q(X, A)$, entonces existe $d \in S_{q+1}(X)$ con $c + S_q(A) = \partial(d) + S_q(A)$, esto es, $c - \partial(d) \in S_q(A)$, sea $c_A = c - \partial(d)$ queremos ver que c es homologo a c_A, pero $c - c_A = \partial(d)$, de aquí que $c \in E$ y por lo tanto $B_q(X, A) \subset E$

($\Leftarrow$) Sea $c \in E$, de aqui que $\exists c_A \in S_q(A)$ tal que $c - c_A = \partial d$ para alguna $(q + 1)$-cadena d, de nuevo tenemos $c - \partial d = c_A$ por lo tanto $c + S_q(A) = \partial d + S_q(A)$ y obtenemos $c \in B_q(X, A)$ y por lo tanto $E \subset B_q(X, A)$ □

De este modo es fácil ver que $B_q(X, A) \leq Z_q(X, A)$ y tomando cociente obtenemos lo que buscamos

Teorema 4.5. $H_q(X, A) = Z_q(X, A)/B_q(X, A)$

Demostración. Del primer teorema de isomorfismo tenemos que

$$Z_q(X, A)/S_q(A) = (a)$$

y

$$B_q(X, A)/S_q(A) = (b)$$

.

lo que queremos ver que

$$(Z_q(X, A)/S_q(A)) \,/\, (B_q(X, A)/S_q(A)) = Z_q(X, A)/B_q(X, A)$$

Lo cual se sigue del tercer teorema de isomorfismo. $\square$

El siguient ejemplo muestra una frontera relativa que no es una frontera. Para ver que esta es una frontera relativa usaremos la caracterización descrita en el teorema anterior.

Ejemplo 4.1. *Sea X el cilindro $S^1 \times I$ y A el subespacio $\{1\} \times S^1$ como lo muestra la figura 4.2*

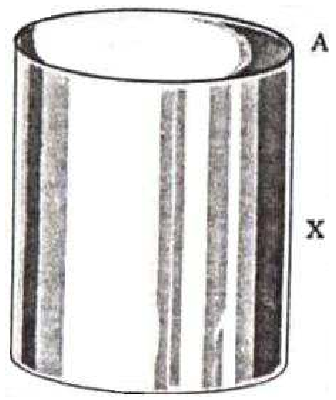


Figura 4.2: Frontera relativa a A

Sea $0 \leq t < 1$. Definimos los 1-cíclos $s, s_{t_0} : I \to X$ como

$$\begin{aligned} s(t) &= (e^{2\pi i t}, 1) \quad \textit{para cada } t \in I \\ s_{t_0}(t) &= (e^{2\pi i t}, t_0) \quad \textit{para cada } t \in I \end{aligned}$$

Podemos ver geométricamente que s_{t_0} no es una frontera, pues no encierra una región plana en el cilindro.

Veamos que s_{t_0} es una 1-frontera relativa. Para esto es suficiente ver que s_{t_0} es homóloga a s pues $s \in S_q(A)$. Definimos la 2-cadena d en X de la siguiente forma. tomamos el segmento $\{(1,t) \in S^1 \times I : 0 \leq t \leq 1\}$ Y separamos temporalmente el cilindro. Nos quedará rectángulo como en la figura 4.3 donde las flechas verticales indican indentificación mientras que las horizontales indican la orientación de los 1-ciclos $s, -s_{t_0}$.

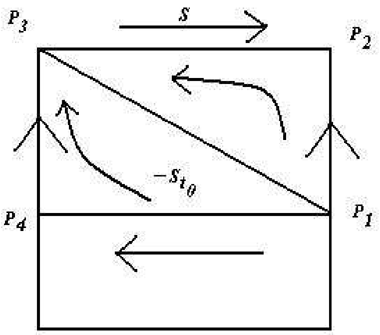


Figura 4.3: Cilindro

Llamamos p_0, p_1, p_2, p_4 a los vértices del rectángulo ilustrado en la figura. De esta forma, definimos d_1 como la aplicación cociente (pegar el cuadrado de nuevo) composición la transformación afín (p_1, p_2, p_3). Para d_2 hacemos algo análogo pero con la composición afín (p_1, p_4, p_3).

De esta forma, $\partial d = s - s_{t_0}$ y por lo tanto, estas son cadenas homólogas que es lo que queriamos ver.

4.1.2. Homomorfismo Inducido

Definición 4.5.1. *Sean X, Y espacios topológicos, con $A \subset X, B \subset Y$, diremos que f es una función continua entre el par (X, A) y (Y, B) si $f : X \to Y$ y $f(A) \subset B$. Esto lo denotaremos por $f : (X, A) \to (Y, B)$.*

Sea $f : (X, A) \to (Y, B)$ y $S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y)$ como $f(A) \subset B$ tenemos que $S_q(f)$ manda $S_q(A)$ en $S_q(B)$, esto pues cada simplejo en A composición f es un simplejo en B. Más aún, tenemos lo siguiente

Proposición 4.5.1.

$$\begin{aligned} S_q(f)(Z_q(X, A)) &\subset Z_q(Y, B) \\ S_q(f)(B_q(X, A)) &\subset B_q(y, B) \end{aligned}$$

Demostración. sea $c \in Z_q(X,A)$, tenemos $\partial c \in S_{q-1}(A)$, queremos ver que

$$\partial S_q(f)(c) \in S_{q-1}(B)$$

Ahora como

$$\partial(S_q(f)(c)) = S_{q-1}(f)\partial c$$

y $S_{q-1}(A) \subset S_{q-1}(B)$ tenemos que

$$S_{q-1}(\partial c) \in S_{q-1}(B)$$

y como es igual a $\partial S_q(f)(c)$ tenemos que $S_q(f)(c) \in Z_q(X,A)$.

Para $c \in B_q(X,A)$ con $c - c_A = \partial d$

Donde $c_A \in S_q(A)$ y $d \in S_{q+1}(X)$ de aqui tenemos que

$$S_q(f)(c) - S_q(f)(c_A) = S_q(\partial d)$$

donde $S_q(f)(c_A) \in S_q(B)$ y como

$$S_q(f)(\partial d) = \partial S_{q+1}(d) \in B_q(Y)$$

tenemos que $c \in B_q(Y,B)$. $\square$

De esta forma podemos definir un homomorfismo en el cociente $H_q(X,A)$ al cociente $H_q(Y,B)$ denotado por $H_q(f)$, dado de la forma

$$H_q(f)(c + B_q(X,A)) = S_q(f)(c) + B_q(Y,B)$$

Lo primero que tenemos que ver es que está bien definido, pues lo hemos definido por representantes, y en efecto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.5.2. *Sea $c_1 - c_2 \in B_q(X,A)$ entonces*
$S_q(f)(c_1) - S_q(f)(c_2) \in B_q(Y,B)$

Demostración. Por la proposición anterior $S_q(f)(c_1 - c_2) \in B_q(Y,B)$ y como $S_q(f)$ es un homomorfismo tenemos lo que buscamos. $\square$

Teorema 4.6. *Sean X, Y espacios topológicos con $A \subset X$ y $B \subset Y$ y $f : (X,A) \to (Y,B)$ continuua. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
Z_q(X,A) \arrow[r, "S_q(f)"] \arrow[d] & Z_q(Y,B) \arrow[d] \\
Z_q(x,A)/B_q(X,A) \arrow[r, "H_q(f)"] & Z_q(Y,B)/B_q(Y,B)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $c \in Z_q(X, A)$ pasando al cociente tenemos $c + B_q(X, A)$ y aplicando $H_q(f)$ tenemos $S_q(f)(c) + B_q(Y, B)$, por otro lado, si recorremos de X a Y tenemos $S_q(f)(c)$ y pasando al cociente $S_q(f)(c) + B_q(Y, B)$ que es lo que queriamos. $\square$

Y de nuevo, tenemos funtorialidad. Esto es,

Teorema 4.7. *Sean X, Y espacios topológicos con $A \subset X$ y $B \subset Y$ y $f : (X, A) \to (Y, B)$ continuua. Entonces*

$$\begin{aligned} H_q(fg) &= H_q(f)H_q(g) \\ H_q(id) &= id \end{aligned}$$

Demostración. $(X, A) \xrightarrow{g} (Y, B) \xrightarrow{f} (Z, C)$

$$\begin{aligned} S_q(fg)(c + B_q(X, A)) &= S_q(fg)(c) + B_q(Z, C) \\ &= S_q(f)S_q(g)(c) + B_q(Z, C) \\ &= H_q(f)\left(S_q(g)(c) + B_q(Y, B)\right) \\ &= H_q(f)H_q(g)(c + B_q(X, A)) \end{aligned}$$

$\square$

Una observación importante es que, si $A = \emptyset$, entonces $S_q(A) = 0$ por lo que $H_q(X, \emptyset) = H_q(X)$, de esta forma, la homología absoluta es un caso particular de la homología relativa y cualquier discusión acerca de homología relativa incluye a la homología absoluta como caso particular.

Ejemplo 4.2. *Sea $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ la identidad, entonces tenemos un homomorfismo $H_q(j) : H_q(X) \to H_q(X, A)$, si ademas nos fijamos en $i : A \to X$ la inclusión, tenemos un morfismo $H_q(i) : H_q(A) \to H_q(X)$, nos preguntamos por $H_q(ji) : H_q(A, \emptyset) \to H_q(X, A)$*

Proposición 4.7.1. $H_q(ji) = 0$

Demostración. Como $Z_q(A) \subset S_q(A) \subset B_q(X, A)$ tenemos que

$$H_q(ji)(c + B_q(A)) = S_q(j)(S_q(i)(c) + B_q(c)) = S_q(j)S_q(i)(c) + B_q(X, A)$$

pero $c \in S_q(A)$, entonces $S_q(ji)(c) \in B_q(X, A)$ de aqui tenemos que

$$H_q(ji)(c) = 0$$

$\square$

Teorema 4.8. *Sea $f:(X,A)\to(Y,B)$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc} H_q(A) & \xrightarrow{H_q(i)} & H_q(X) & \xrightarrow{H_q(j)} & H_q(X,A) \\ \downarrow{\scriptstyle H_q(fi)} & & \downarrow{\scriptstyle H_q(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_q(f)} \\ H_q(B) & \xrightarrow{H_q(i')} & H_q(Y) & \xrightarrow{H_q(j')} & H_q(Y,B) \end{array}$$

Demostración. Dado que $H_q(j)H_q(i)=0$, basta probar que los dos cuadrados pequeños son conmutativos.

Sea $c+B_q(A)\in H_q(A)$, si aplicamos $H_q(fi)$ y despues $H_q(i')$ obtenemos

$$H_q(i')(S_q(f)S_q(i)(c)+B_q(B))=S_q(f)(c)+B_q(Y)$$

y si aplicamos $H_q(i)$ y despues $H_q(f)$ obtenemos

$$H_q(f)H_q(i)(c+B_q(A))=H_q(f)(c+B_q(X))=S_q(f)(c)+B_q(Y)$$

Por otro lado, sea $c+B_q(X)$, aplicando $H_q(f)$ y después $H_q(j')$ tenemos

$$H_q(j)(S_q(f)(c)+B_q(Y))=S_q(f)(c)+B_q(Y,B)$$

y si aplicandos primero $H_q(j)$ y después $H_q(f)$ obtenemos

$$H_q(f)(c+B_q(X,A))=S_q(c)+B_q(Y,B)$$

. □

Teorema 4.9. *Sean $\{X_k\}_{k\in K}$ las componentes arcoconexas de X, si denotamos $A_k=A\cap X_k$ entonces*

$$H_q(X,A)=\bigoplus_{k\in K}H_q(X_k,A_k)$$

Demostración. Sea $i_k:(X_k,A_k)\to(X,A)$ la inclusión, Definimos

$$\varphi:\bigoplus_{k\in K}S_q(X_k)\to S_q(X)$$

como

$$\varphi\left(\sum_{k\in K}c_k\right)=\sum_{k\in K}S_q(i_k)(c_k)$$

De nuevo, como cada simplejo actúa por componentes, y como vimos en el capitulo 2, este es un isomorfismo de módulos. Ahora,

$$\bigoplus Z_q(X_k, A_k) \xrightarrow{\varphi} Z_q(X, A)$$

Es un isomorfismo, ya que ∂ actúa por componentes, esto es, si $\partial c \in S_{q-1}A$ y $c = \sum\limits_{k \in K} c_k$ entonces $\partial c_k \in S_{q-1}(A)$ y como $c_k \in S_{q-1}(X)$ tenemos que $\partial c_k \in S_{q-1}(A_k)$.

De aqui tenemos que $\partial c_k \in S_{q-1}(A_k) \Leftrightarrow \partial \left(\sum\limits_{k \in K} S_q(i_k)(c) \right) \in S_{q-1}(A)$.

De manera similar, $\bigoplus B_q(X_k, A_k) \xrightarrow{\varphi} B_q(X, A)$ es un isomorfismo, esto es, si $c - c_A = \partial d$, donde $c = \sum c_k, d = \sum d_k$ y $c_A = \sum c_{A_k}$ entonces $c_k - d_k = \partial d_k$. De esta forma φ induce un isomorfismo en el cociente, esto es, φ' tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus Z_q(X_k, A_k) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Z_q(X, A) \arrow[d] \\
\bigoplus H_q(X_k, A_k) \arrow[r, "\varphi'"] & H_q(X, A)
\end{tikzcd}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
\varphi' \left(\sum c_k + B_q(X_k, A_k) \right) &= \left(\sum S_q(i_k) c_k + B_q(X, A) \right) \\
&= \sum H_q(i_k)(c_k + B_q(X_k, A_k))
\end{aligned}$$

Y por lo tanto φ' es un isomorfismo. □

4.2. Sucesión Exacta

Definición 4.9.1. *Sea $(M_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complejo de cadenas, esto es, una sucesión de módulos y homomorfismos*

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \xrightarrow{\varphi i-1} \cdots$$

Decimos que la sucesión (M_i, φ_i) es exacta si

$$\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$$

Y además $\ker \varphi_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1}$

Como vimos en el Capítulo 2, si $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$ entonces $Im\varphi_{i+1} \subset \ker \varphi_i$. El hecho de que una sucesión sea exacta, es que la otra contención también se cumple, esta es, $\ker \varphi_i \subset Im\varphi_{i+1}$

Ejemplo 4.3. *Sea $X = x$ y tomamos la sucesión $\{S_q(X), \partial_q^{\#}\}$, recordemos que la frontera reducida es igual a la frontera salvo en el caso $\partial_0^{\#}$ donde es igual a la suma de las componentes; recordemos que $H_q^{\#}(X) = \ker \partial_q^{\#}/Im\partial_{q+1}^{\#} = 0$ para cada q, por lo tanto la sucesión es exacta.*

Este ejemplo nos muestra que la homología reducida de un espacio topológico trivial, es trivial, es decir, es igual a 0 para toda q. De esta forma podemos ver que los módulos de homología nos dan una idea algebraica de qué tan exacta es la sucesión (S_q, ∂) o topológicamente que tan trivial es el espacio X.

El propósito de esta sección, es contruir un homomorfismo de $H_q(X, A)$ a $H_{q-1}(A)$ de tal forma que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \longrightarrow H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Es exacta. (Definimos $H_q(X) = 0$ para $q < 0$).

Este homomorfismo será llamado homomorfismo de enlace, y lo denotaremos también como ∂.

Definición 4.9.2. *Definimos $\partial : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ de la siguiente forma*

$$\partial(c + B_q(X, A)) = (\partial c) + B_{q-1}(A)$$

Lo primero que tenemos que hacer, es ver que está bien definido y en efecto tenemos

Proposición 4.9.1. *Si $c_1 - c_2 \in B_q(X, A)$, entonces $\partial(c_1 - c_2) \in B_{q-1}(A)$*

Demostración. Como $c_1, c_2 \in Z_q(X, A)$ tenemos $\partial c_1, \partial c_2 \in S_{q-1}(A)$.

Ahora, $c_1 - c_2 = \partial d + c_A$ donde $d \in S_{q+1}(X)$ y $c_A \in S_q(A)$, esto porque $c_1 - c_2 \in B_q(X, A)$. Aplicando ∂ tenemos

$$\partial(c_1 - c_2) = \partial\partial d + \partial c_A = \partial c_A$$

que es lo que queriamos demostrar. □

De esta manera, ya definido el homomorfismo de enlace ∂, este cumple con la exactitud de la sucesión de homología, más en concreto tenemos el siguiente teorema

Teorema 4.10. *La sucesión*

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

es exacta

Demostración. Demostraremos la exactitud para cada caso, primero en $H_q(X)$.

Como vimos en la sección anterior, $H_q(ji) = 0$, solo falta demostrar $\ker H_q(j) \subset ImH_q(i)$.

Sea $H_q(j)(c + B_q(X)) = 0$, entonces $c + B_q(X,A) = B_q(X,A)$ por lo que $c \in B_q(X,A)$, $c - c_A = \partial d$.

Como $c_A = c - \partial d$ tenemos $\partial c_A = \partial c - \partial\partial d = 0$ con lo que $c_A \in Z_q(A)$, basta ver que $H_q(i)(c_A + B_q(A)) = c + B_q(X)$, lo cual es cierto ya que $c - c_A = \partial d$.

Ahora veamos la exactitud en $H_q(X,A)$.

$$\partial H_q(j)(c + B_q(X)) = \partial c + B_{q-1}(A) = B_{q-1}(A)$$

pues $\partial c = 0$.

Veamos que $\ker \partial \subset ImH_q(j)$ Sea $\partial(c + B_q(X,A)) = 0$, entonces $\partial c \in B_{q-1}(A)$, de aqui $\partial c = \partial c_A$ para algún $c_A \in S_q(A)$, ahora $c - c_A \in Z_q(X)$. Queremos ver que

$$H_q(j)(c - c_A + B_q(X)) = H_q(j)(c + B_q(X,A))$$

En efecto, $(c - c_A) + B_q(X,A) = c + B_q(X,A)$ ya que

$$c - (c - c_A) = c_A \in S_q(A)$$

por lo que $c - (c - c_A) \in B_q(X,A)$ de lo cual

$$H_q(j)((c - c_A) + B_q(X)) = c + B_q(X,A)$$

Ahora veamos la exactitud en $H_q(A)$.

$$H_q(i)\partial(c + B_{q+1}(X,A)) = H_q(i)(\partial c + B_q(A)) = \partial c + B_q(X) = B_q(X)$$

Pues $\partial c \in B_q(X)$

Ahora veamos que $\ker H_q(i) \subset Im\partial$, sea $c + B_q(A)$ tal que

$$H_q(i)(c + B_q(A)) = 0$$

, de aqui $c + B_q(X) = B_q(X)$ con lo que $c = \partial d$ para $d \in S_{q+1}(X)$ ahora, $d \in Z_{q+1}(X, A)$ pues $\partial d = c \in S_q(A)$, de cual tenemos que

$$d + B_{q+1}(X, A) \in H_{q+1}(X, A)$$

, ahora,

$$\partial(d + B_{q+1}(X, A)) = \partial d + B_q(A) = c + B_q(A)$$

pues $c - \partial d = 0$ □

La exactitud de la sucesión de homología nos da cierta información sobre los módulos de homología, en particular, ésta y el teorema de excisión que veremos en el próximo capítulo nos servirán para determinar la homología de las esferas S^n. Por el momento veamos un ejemplo simple de su utilidad

Proposición 4.10.1. *Si $A = \{x\}$, entonces $H_q(j) : H_q(X) \to H_q(X, A)$ es un isomorfismo para $q > 0$.*

Demostración. Para $q > 1$, $H_q(A) = 0$, por lo que

$$0 \longrightarrow H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \longrightarrow 0$$

Es exacta.

Como $ImH_q(i) = 0 = \ker H_q(j)$, tenemos que $H_q(j)$ es inyectiva.

Por otro lado, como $ImH_q(j) = \ker \partial = H_q(X, A)$ tenemos que $H_q(j)$ es sobre.

Para q=1, tenemos que

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{H_1(j)} H_1(X, A) \longrightarrow R$$

Ahora, Como $H_1(i) = 0$ y $\ker H_1(j) = ImH_q(i) = 0$, tenemos que $H_1(j)$ es sobre, como $B_1(X, x) = 0$ tenemos que $H_1(X, x) = Z_1(X, x)$ y $\partial : Z_1(X, x) \to R$ es el homomorfismo 0, de esta forma $H_q(j)$ es uno a uno.

De esta forma $H_q(j)$ es biyectiva y por lo tanto es un isomorfismo. □

Ahora veamos que la sucesión exacta de homología es funtorial, en el sentido dado a continuación

Teorema 4.11. *Sea $f:(X,A)\to(Y,B)$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
H_q(A) \arrow[r, "H_q(i)"] \arrow[d, "H_q(fi)"] & H_q(X) \arrow[r, "H_q(j)"] \arrow[d, "H_q(f)"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_q(f)"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "H_{q-1}(fi)"] \\
H_q(B) \arrow[r, "H_q(i')"] & H_q(Y) \arrow[r, "H_q(j')"] & H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el teorema es suficiente ver la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_q(f)"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "H_{q-1}(fi)"] \\
H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Sea $c+B_q(X,A)\in H_q(X,A)$, aplicando $H_q(f)$ y luego ∂ tenemos

$$\partial H_q(c+B_q(X,A)) = \partial(S_q(f)c+B_q(Y,B)) = \partial S_q(f)c+B_{q-1}(Y,B))$$

Por otro lado, aplicando primero ∂ y luego $H_{q-1}(fi)$ tenemos

$$H_{q-1}(fi)\partial(c+B_q(X,A)) = H_{q-1}(fi)(\partial c+B_{q-1}(X,A)) = S_{q-1}(f)\partial c+Bq-1(Y,A)$$

Pero $S_{q-1}(f)\partial=\partial S_q(f)$ y obtenemos lo que buscabamos. $\square$

Capítulo 5

El Teorema de escisión

5.1. Dividiendo simplejos afines

Ahora presentaremos otro de los resultados fundamentales para la homología singular, que nos permitirá, entre otras cosas, calcular la homología de las esferas S^n para cada n.

Para probar este resultado, primero tenemos que formalizar un hecho intuitivamente obvio, el cual dice que un simplejo se puede dividir en simplejos arbitrariamente pequeños, tenemos en esto una dificultad, pues si X no es un espacio métrico, no sabemos con certeza que quiere decir arbitrariamente pequeño.

En el caso métrico, podriamos pensar en que las divisiones son arbitrariamente pequeñas si para cada punto del espacio $x \in X$ y cada radio r_x por más pequeño que sea, tenemos que cada división está completamente contenida en una de las bolas $\mathcal{B}_{r_x}(x)$.

Notemos que en este caso, para cualquier elección de los radios, tenemos que $\{\mathcal{B}_{r_x}(x)\}_{x\in X}$ es una cubierta de X por bolas arbitrariamente pequeñas, cuando pasamos a espacios topológicos no necesariamente tenemos métrica, pero podemos pedir que se cumpla la condición para una cubierta arbitraria del espacio, lo cual siempre es posible. Formalmente queremos esto.

Definición 5.0.1. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una cubierta abierta de X,diremos que un q-simplejo singular σ en X es pequeño de orden $\mathscr{U}$ si σ manda Δ_q en uno de los abiertos U_i.*

Buscamos probar que cada clase de homología relativa de (X, A) tiene un representante que es combinación lineal de simplejos pequeños de orden $\mathscr{U}$, para lo cual construiremos un homomorfismo

$$\mathrm{Sd}: S_q(X) \to S_q(X)$$

llamado operador subdivisión.

Ilustramos para $q = 2$ lo que el operador subdivisión hará.

Sea $c \in S_q(X)$, para comparar c y $S_d(c)$ construiremos otro operador

$$T: S_q(X) \to S_{q+1}(X)$$

tanto para S_d como para T pondremos subindice q si el contexto fuera causa de ambiguedad. Antes de definir S_q y T, consideremos ciertos detalles

Definición 5.0.2. *Sea $\sigma = (p_0, p_1, \ldots, p_q)$ un simplejo singular afín en un espacio afín A y $B \in A$, definimos $B\sigma$ como el $q+1$-simplejo*

$$B\sigma = (B, p_0, p_1, \ldots, p_q)$$

extendemos B a $S_q(A)$ por linealidad, esto es, si $c = \sum v_i \sigma_i$ entonces

$$Bc = B(\sum_i v_i \sigma_i) = \sum_i v_i B\sigma_i$$

Proposición 5.0.1.

$$\partial Bc = \begin{cases} c - B\partial c & q > 0 \\ c - (\sum_i v_i)B & q = 0 \end{cases}$$

Demostración. Sea $q > 0$, es suficiente verificarlo para $\sigma = (p_0 p_1 \ldots p_q)$

$$\begin{aligned}
\partial B\sigma &= \partial(Bp_0p_1\ldots p_q) \\
&= (\hat{B}p_0p_1\ldots p_q) - (B\hat{p}_0\ldots p_q) + \cdots + (-1)^{q+1}(Bp_0\ldots \hat{p}_q) \\
&= \sigma - B((\hat{p}_0p_1\ldots p_q) - (p_0\hat{p}_1\ldots p_q) + \cdots + (-1)^q(p_0\ldots \hat{p}_q)) \\
&= \sigma - B(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(p_o\ldots \hat{p}_i\ldots p_q)) \\
&= \sigma - B\partial\sigma
\end{aligned}$$

para $q = 0$ sea $c \in S_q(A)$, con $c = \sum_i v_i x_i$, para $x_i \in X$ tenemos que $\partial(B, x_i) = x_i - B$, de lo cual concluimos

$$\partial Bc = \sum_i v_i \partial(B, x_i) = \sum_i v_i x_i - \sum_i v_i B = c - \sum_i v_i B$$

$\square$

5.2. El operador Subdivisión

Ahora estamos listos para definir Sd y T, lo haremos de tal forma que si tenemos $f : X \to Y$, entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r, "\mathrm{Sd}"] \arrow[d, "S_q(f)"'] & S_q(X) \arrow[d, "S_q(f)"] \\ S_q(Y) \arrow[r, "\mathrm{Sd}"] & S_q(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S_q(f)"'] & S_{q+1}(X) \arrow[d, "S_{q+1}(f)"] \\ S_q(Y) \arrow[r, "T"] & S_{q+1}(Y) \end{tikzcd}$$

sean conmutativos.

Proposición 5.0.2. *Sea $\sigma \in S_q(X)$, tenemos que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sd}\,\sigma &= S_q(\sigma)\,\mathrm{Sd}\,\delta_q \\ T\sigma &= S_{q+1}(\sigma)T\delta_q \end{aligned}$$

Demostración. Por la conmutatividad de los diagramas, como $\delta_q \in S_q(\Delta_q)$ y $S_q(\sigma)(\delta_q) = \sigma$ tenemos lo que buscamos. □

Las funciones serán definidas recursivamente, esto es

Definición 5.0.3. *Para $X = \Delta_q$ y $\delta_q \in S_q(\Delta_q)$ la identidad, definimos*

$$\mathrm{Sd}\,\delta_q = \begin{cases} \delta_0 & q = 0 \\ B_q\,\mathrm{Sd}\;\partial\delta_q & q > 0 \end{cases}$$

$$T\delta_q = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ B_q(\delta_q - \mathrm{Sd}\,\delta_q - T\partial\delta_q) & q > 0 \end{cases}$$

Donde B_q es el baricentro de Δ_q, esto es,

$$B_q = \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{q+1} e_i$$

Ejemplo 5.1. *Veamos como actúa* Sd *sobre δ_q para $q = 0, 1, 2, 3$.*

Esto lo podemos ver en la figura 5.1

Lema 5.0.1.

$$\begin{aligned} \partial\,\mathrm{Sd} &= \mathrm{Sd}\,\partial \\ \partial T &= id - \mathrm{Sd} - T\partial \end{aligned}$$

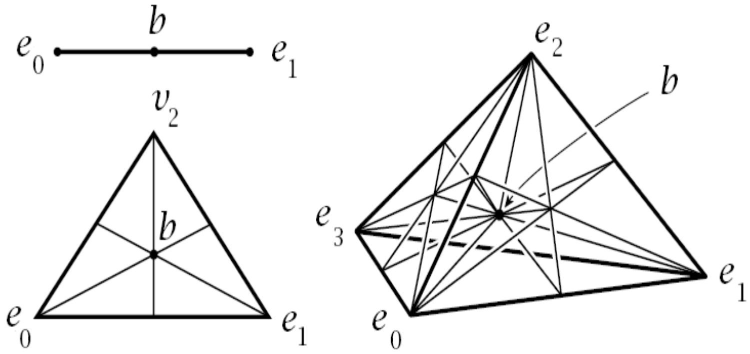


Figura 5.1: Subdivisión de un Simplejo

Demostración. Por inducción sobre q, primero hagamoslo para Sd,

para $q = 0$ tenemos $\partial \operatorname{Sd} x = 0 = \operatorname{Sd} \partial x$, pues todo 0-simplejo tiene frontera trivial y Sd es un homomorfismo, por lo que $\operatorname{Sd}(0) = 0$.

Supongamos que la igualdad es cierta para todo entero menor que q,verifiquemos la igualdad para δ_q y luego usemos funtorialidad.

$$\partial \operatorname{Sd} \delta_q = \partial B_q S_d \delta_q = \operatorname{Sd} \partial \delta_q - B_q \partial \operatorname{Sd} \partial \delta_q$$

Esto por la proposición 5.0.1.

pero por hipótesis de inducción,

$$B_q(\partial \operatorname{Sd} \partial \delta_q) = B_q(\operatorname{Sd} \partial^2 \delta_q) = 0$$

Ahora para T, $\partial T \delta_0 = \partial 0 = 0$, por otro lado,

$$id\delta_0 - \operatorname{Sd} \delta_0 - T\partial \delta_0 = \delta_0 - \delta_0 - 0 = 0$$

.

suponiendo cierta la igualdad para cada entero menor que q, tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial T \delta_q &= \partial B_q(\delta_q - \operatorname{Sd} \delta_q - T\partial \delta_q) \\
&= \delta_q - \operatorname{Sd} \delta_q - T\partial \delta_q - B_q \partial(\delta_q - \operatorname{Sd} \delta_q - T\partial \delta_q) \\
&= \delta_q - \operatorname{Sd} \delta_q - T\partial \delta_q - B_q(\partial \delta_q - \partial \operatorname{Sd} \delta_q - \partial T \partial \delta_q)
\end{aligned}$$

Ahora, $\partial \operatorname{Sd} \delta_q = \operatorname{Sd} \partial \delta_q$,mientras que

$$\partial T \partial \delta_q = \partial \delta_q - \operatorname{Sd} \partial \delta_q - T\partial^2 \delta_q$$

por hipótesis de inducción. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial T\delta_q &= \delta_q - \mathrm{Sd}\,\delta_q - T\partial\delta_q - B_q(\partial\delta_q - \mathrm{Sd}\,\partial\delta_q - \partial\delta_q + \mathrm{Sd}\,\partial\delta_q + T\partial^2\delta_q) \\
&= \delta_q - \mathrm{Sd}\,\delta_q - T\partial\delta_q - B_q(0) \\
&= \delta_q - \mathrm{Sd}\,\delta_q - T\partial\delta_q
\end{aligned}$$

Que es la igualdad deseada para δ_q. Ahora verifiquemos la igualdad para un simplejo singular σ, y quedará establecida para cualquier q-cadena singular de X.

$$\begin{aligned}
\partial\,\mathrm{Sd}\,\sigma &= \partial\,\mathrm{Sd}\,S_q(\sigma)\delta_q \\
&= \partial S_q(\sigma)\,\mathrm{Sd}\,\delta_q \\
&= S_{q-1}(\sigma)\partial\,\mathrm{Sd}\,\delta_q \\
&= S_{q-1}(\sigma)\,\mathrm{Sd}\,\partial\delta_q \\
&= \mathrm{Sd}\,S_{q-1}(\sigma)\partial\delta_q \\
&= \mathrm{Sd}\,\partial S_q(\sigma)\delta_q \\
&= \mathrm{Sd}\,\partial\sigma
\end{aligned}$$

Para T tenemos

$$\begin{aligned}
\partial T\sigma &= \partial S_{q+1}(\sigma)T\delta_q \\
&= S_q(\sigma)\partial T\delta_q \\
&= S_q(\sigma)(\delta_q - \mathrm{Sd}\,\delta_q - T\partial\delta_q) \\
&= S_q(\sigma)\delta_q - S_q(\sigma)\,\mathrm{Sd}\,\delta_q - S_q(\sigma)T\partial\delta_q \\
&= \sigma - \mathrm{Sd}\,S_q(\sigma)\delta_q - TS_{q-1}(\sigma)\partial\delta_q \\
&= \sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - T\partial S_q(\sigma)\delta_q \\
&= \sigma - \mathrm{Sd}\,\sigma - T\partial\sigma
\end{aligned}$$

Que es lo que queriamos demostrar □

5.3. Diametro de la Subdivisión

Ahora veamos que pasa en los espacios afines, sea $\sigma = (p_o \dots p_q)$ un mapeo afín en el espacio afín A, como Δ_q es compacto, tenemos que $\sigma(\Delta_q)$ es compacto en A.

Definición 5.0.4. *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $U \subset X$ *subconjunto de* X*, definimos el diametro de* U*, denotado por* $D(U)$ *como*

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$$

Para ahorrar notación denotamos $D(\sigma(\Delta_q))$ como $d(\sigma)$ y lo llamaremos simplemente como diametro de σ. Sabemos que todo compacto métrico es acotado, por lo tanto $d(\sigma)$ es finito, más aún, podemos calcular el valor de $d(\sigma)$, veamos esto despues del siguiente Lema.

Lema 5.0.2. *Sea* $\sigma = (p_0 \dots p_1)$*,* $x, y \in \sigma(\Delta_q)$*, entonces*

$$||x - y|| \leq \max_{0 \leq i \leq q} ||x - p_i||$$

Demostración. Ahora, sean $x, y \in \sigma(\Delta_q)$, $x = \sum_{i=0}^{q} v_i p_i$, $y = \sum_{i=0}^{q} w_i p_i$ donde $v_i, w_i \geq 0$ y $\sum v_i = \sum w_i = 1$

ahora,

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{i=0}^{q} v_i (p_i - y) \right\| \leq v_i \, \|p_i - y\|$$

sabemos que $\|p_k - y\| \leq \max_{0 \leq i \leq q} \|p_i - y\|$ para cada k, de lo cual tenemos que

$$\sum_{k=0}^{q} v_k \, \|p_k - y\| \leq \sum_{k=0}^{q} v_k (\max_{0 \leq i \leq q} \|p_i - y\|) = \max_{0 \leq i \leq q} \|p_i - y\|$$

y con esto

$$\|x - y\| \, | \leq \max_{0 \leq i \leq q} \|p_i - y\|$$

□

Proposición 5.0.3. $d(\sigma)$ *es el máximo de las longitudes de las aristas del simplejo* $\sigma(\Delta_q)$

Demostración. Sea $L = \max_{0 \leq i, j \leq q} \|p_i - p_j\|$ donde $\sigma = (p_0 \dots p_q)$, queremos ver que $L = d(\sigma)$.

Como $\{\|p_i - p_j\| : 0 \leq i, j \leq q\}$ es un conjunto finito, existen i_0, j_0 donde se alcanza el máximo, esto es, $L = \|p_{i_0} - p_{j_0}\| \leq d(\sigma)$.

Ahora, repitiendo el argumento del lema anterior con p_i tenemos que

$$\|p_i - y\| \leq \max_{0\leq j\leq q} \|p_i - p_j\|$$

para cada i. De lo cual obtenemos

$$\|x - y\| \leq \max_{0\leq i\leq q} \|p_i - y\| \max_{0\leq i,j\leq q} \|p_i - p_j\| = L$$

Para todo x, y en $\sigma(\Delta_q)$, tomando supremo del lado izquierdo obtenemos que $d(\sigma) \leq L$ □

Lema 5.0.3. *Sea $\sigma = (p_0 \dots p_q)$, cada simplejo que aparece en la cadena* $\operatorname{Sd}\sigma$ *tiene diametro menor que*

$$\frac{q}{q+1} d(\sigma)$$

Demostración. Sea $\sigma = (p_0 \dots p_q)$ con $x \in \sigma(\Delta_q)$, $x = \sum_{i=0}^{q} a_i p_i$, sabemos que $\|x - p_i|\| \leq d(\sigma)$, ahora

$$\|x - p_i\| = \left\| \sum_{j=0}^{q} a_j (p_i - p_j) \right\| \leq \sum_{j\neq i} a_j \|p_i - p_j\| \leq \sum_{j\neq i} a_j (\max_{0\leq i,j\leq q} \|p_i - p_j\|) = (1 - a_i) d(\sigma).$$

En particular, para el baricentro $B = \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{q+1} p_i$ tenemos

$$\|p_i - B\| \leq \left(1 - \frac{1}{q+1}\right) d(\sigma) = \frac{q}{q+1} d(\sigma)$$

y como vimos antes, tenemos que

$$||x - B|| \leq \max_{i} ||p_i - B|| \leq \frac{q}{q+1} d(\sigma)$$

Ahora hagamos inducción sobre q para probar lo que buscamos:

Para $q = 0$ el resultado es cierto, pues $d(\sigma) = 0$. Supongamos cierto para $q - 1$, como

$$\operatorname{Sd}\sigma = B_q \operatorname{Sd}\partial\sigma$$

para simplejos afines, tenemos que si τ es un simplejo de la subdivisión $\operatorname{Sd}\sigma$, entonces $\tau = B_q \tau'$ para alguno de los simplejos de la descomposición de

$\mathrm{Sd}\,\partial\sigma$, más precisamente, τ' es uno de los simplejos de la descomposición de $\mathrm{Sd}\,\rho$ para un ρ en la descomposición de $\partial\sigma$.

De esta forma $\rho(\Delta_q) \subset \sigma(\Delta_q)$ por lo que $d(\rho) \leq d(\sigma)$

Ahora, por hipótesis de inducción para τ' y $\mathrm{Sd}\,\rho$ tenemos que

$$d(\tau') \leq \frac{q-1}{q} d(\rho) \leq \frac{q-1}{q} d(\sigma) \leq \frac{q}{q+1} d(\sigma)$$

Estimemos la distancia entre los vértices de τ y veamos que ninguno supera esta cota.

Si $\tau = (r_0 \ldots r_q)$, entonces $r_0 = B_q$ por construcción, de esta forma si $i, j \neq 0$, $||r_i - r_j|| \leq \frac{q}{q+1} d(\sigma)$ pues los vértices r_i, r_j son vértices de $\tau' = (r_1 \ldots r_q)$ donde se cumple la desigualdad.

De otra forma, si uno de los vertices es B_q, como $r_i \in \sigma(\Delta_q)$, por la proposición 5.0.3 tenemos que $||B_q - r_i|| \leq ||B_q - p_j||$ para algún j, pero entonces

$$\begin{aligned}
||B_q - r_i|| &\leq ||B_q - p_j|| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{q+1} p_i - p_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{i \neq j} \frac{1}{q+1} (p_i - p_j) \right\| \\
&\leq \sum_{\neq j} \left\| \frac{1}{q+1} (p_i - p_j) \right\| \\
&= \frac{1}{q+1} \sum_{i \neq j} ||p_i - p_j|| \\
&\leq \frac{1}{q+1} \sum_{i \neq j} d(\sigma) \\
&= \frac{q}{q+1} d(\sigma)
\end{aligned}$$

Que es lo que queriamos demostrar $\square$

Para probar lo que queremos, necesitamos un pequeño resultado técnico para espacios métricos compactos, este resultado aplicado a Δ_q nos dará lo que queremos, veamos esto

Teorema 5.1 (De la cubierta de Lebesgue). *Sea (X,d) un espacio métrico, y $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una cubierta abierta de X.Entonces existe ϵ tal que todo subconjunto de X de diametro menor que ϵ está contenido en uno de los abiertos U_i con $U_i \in \mathscr{U}$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea $r_x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}_{r_x}(x) \subset U_i$ para algún $i \in \mathcal{I}$.

De esta forma tenemos que $\{\mathcal{B}_{r_x/2}(x)\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta de X, por lo que existe una subcubierta finita $\mathcal{B}_{r_{x_1}/2}(x_1), \mathcal{B}_{r_{x_2/2}}(x_2), \ldots, \mathcal{B}_{r_{x_n/2}}(x_n)$.

Sea $\epsilon = \min\limits_{1\le i\le n} r_{x_i}/2$, de esta forma, si $A \subset X$ con $D(A) < \epsilon$ y $x \in A$ entonces

$$\mathcal{B}_\epsilon(x) \subset \mathcal{B}_\epsilon(x_k) \subset \mathcal{B}_{\ r_{x_k}/2}(x_k)$$

para algún k con $1 \le k \le n$.

pero como $\mathcal{B}_{r_{x_k}/2}(x_k) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathcal{I}$ entonces $x \in U_\alpha$ y como x es arbitrario, tenemos que $A \subset U_\alpha$. $\square$

5.4. El Teorema de Excisión

Teorema 5.2. *Sea σ un complejo singular en X, $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un r tal que $\operatorname{Sd}^r(\sigma)$ es una combinación lineal de complejos singulares pequeños de orden $\mathscr{U}$*

Demostración. Sea $\mathscr{U}'$ la cubierta abierta de Δ_q dada por $U_i' = \sigma^{-1}(U_i)$. Como Δ_q es un espacio métrico completo, para cada x, existe ϵ tal que $\mathcal{B}_\epsilon(x)$ está en uno de los abiertos, digamos U_{i_x}', esto es, $\sigma(\mathcal{B}_\epsilon(x)) \subset U_{i_x}$

Como $\lim\limits_{r\to\infty}\left(\frac{q}{q+1}\right) = 0$, existe r tal que $\operatorname{Sd}^r \delta_q$ es una combinación lineal de simplejos de diametro menor que ϵ.

Por funtorialidad tenemos que $\operatorname{Sd}^r \sigma = S_q(\sigma)\operatorname{Sd}^r(\delta_q)$, con lo que se cumple lo que queriamos.

$\square$

Corolario 5.2.1. *Sea $z \in S_q(X)$, $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un r tal que $\operatorname{Sd}^r(z)$ es una combinación lineal de simplejos singulares pequeños de orden $\mathscr{U}$*

Demostración. Si $z = \sum\limits_i \sigma_i$, aplicamos el teorema anterior a cada uno de los σ_i y como Sd es homomorfimos tenemos lo que buscamos. $\square$

Hasta este momento, hemos visto que dada una q-cadena $z \in S_q(X)$, podemos hacerla tan pequeña como queramos, en términos de que podemos dividirla en pedazos más pequeños que cualquier recubrimiento abierto del espacio, pero hasta este momento no hemos comparado z con $\operatorname{Sd} z$, el siguiente teorema nos afirma que en efecto, son homologos relativos a A.

Teorema 5.3. *Sea $z \in Z_q(X, A)$, entonces*

$$z - \operatorname{Sd} z \in B_q(X, A)$$

Demostración. Del lema 5.0.1 sabemos que

$$\partial T z = z - \operatorname{Sd} z - T\partial z$$

Esto es,

$$z - \operatorname{Sd} z = \partial T z + T\partial z$$

Como $\partial z \in S_{q-1}(A)$, tenemos que $T\partial z \in S_{q-1}(A)$. Por otro lado, $\partial T z \in B_q(X, A)$ pues $B_q(X) \subset B_q(X, A)$.

De esta forma tenemos $z - \operatorname{Sd} z \in B_q(X, A)$

□

Ahora podemos enunciar y probar el teorema de escisión, intuitivamente nos dice que si tenemos un subespacio U suficientemente pequeño, podemos omitir U en (X, A) de manera que no se afecta la homología de (X, A), formalmente definimos una escisión de la siguiente forma.

Definición 5.3.1. *Sea X espacio topológico, con $U \subset A \subset X$, decimos que U puede ser excindido del par (X, A) si la inclusión*

$$i : (X \backslash U, A \backslash U) \to (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_q(i) : H_q(X \backslash U, A \backslash U) \to H_q(X, A)$$

Teorema 5.4 (Teorema de Excisión)**.** *Si* $\operatorname{cl} U \subset A^\circ$ *entonces U puede ser excidido.*

Demostración. Demostraremos que $H_q(i) : H_q(X\backslash U, A\backslash U) \to H_q(X, A)$ es biyectiva.

Para ver que $H_q(i)$ es suprayectiva, sea $c + B_q(X, A) \in H_q(X, A)$, como $\operatorname{cl} U \subset A^{\circ}$ tenemos que $\{X\backslash \operatorname{cl} U, A^{\circ}\}$ es una cubierta abierta de X.

Por el teorema tenemos que existe r tal que $\operatorname{Sd}^r c = z$ donde $z = \sum\limits_i \sigma_i$, de tal forma que σ_i es pequeño de orden $\{X\backslash \operatorname{cl} U, A^{\circ}\}$.

Ahora, si σ_{i_0} no manda Δ_q en $X - U$, como $X\backslash \operatorname{cl} U \subset X\backslash U$, tenemos que $\sigma_{i_0}(\Delta_q) \subset A^{\circ} \subset A$, de esta manera

$\sigma_{i_0} \in B_q(X, A)$ y podemos omitirlo de $\sum\limits_i \sigma_i$, obteniendo un ciclo homologo.

De esta forma podemos suponer que $z = \sum\limits_i \sigma_i$ donde $\sigma_i(\Delta_q) \subset X\backslash U$ para cada i.

Y como σ_i manda Δ_q fuera de U, cada uno de los simplejos de $\partial\sigma_i$ también lo hace, agregando el hecho de que $\partial\sigma_i \in S_{q-1}(A)$ tenemos que $z \in Z_q(X\backslash U, A\backslash U)$.

Por lo que

$$H_q(i)(z + B_q(X\backslash U, A\backslash U)) = c + B_q(X, A)$$

Y se sigue que $H_q(i)$ es sobre.

Veamos que $H_q(i)$ es uno a uno.

Sea $z \in Z_q(X\backslash U, A\backslash U)$ tal que $H_q(i)(z) = 0$.

Esto es, que $z \in B_q(X, A)$ por lo que existen z' una q-cadena en A y w una $(q + 1)$-cadena en X tales que

$$z = z' + \partial w$$

Por el teorema 5.2 existe r tal que $\operatorname{Sd}^r w$ es combinación lineal de simplejos de orden $\{X\backslash \operatorname{cl} U, A^{\circ}\}$, por lo que podemos escribir

$$\operatorname{Sd}^r w = w_1 + w_2$$

Donde los simplejos de w_1 mandan Δ_{q+1} en $X\backslash U$ y los simplejos de w_2 mandan Δ_{q+1} en A.

De esta forma tenemos

$$\operatorname{Sd}^r z = \operatorname{Sd}^r z' + \partial w_1 + \partial w_2,$$

de lo cual
$$\operatorname{Sd}^r z - \partial w_1 = \operatorname{Sd}^r z' + \partial w_2.$$

El lado izquierdo es una cadena en $(X\backslash U)$ mientras que el lado derecho es una cadena en A, de lo cual ambas son cadenas en $A\backslash U$, en particular el lado derecho.

De esto tenemos que $\operatorname{Sd}^r z$ es homólogo a una cadena en $A\backslash U$, por lo que
$$\operatorname{Sd}^r z \in B_q(X\backslash U, A\backslash U)$$
Como la clase de z y $\operatorname{Sd}^r z$ son las mismas en $H_q(X\backslash U, A\backslash U)$ tenemos que $z + B_q(X\backslash U, A\backslash U) = B_q(X\backslash U, A\backslash U) = 0$ en $H_q(X\backslash U, A\backslash U)$.

De esta forma $H_q(i)$ es uno a uno. ☐

Corolario 5.4.1. *Sea X espacio topológico con $A \subset X$, $V \subset U \subset A$, Supongamos, además que*

- *V puede ser escindido*
- *$(X\backslash U, A\backslash U)$ es un retracto de deformación de $(X\backslash V, A\backslash V)$*

Entonces U puede ser escindido.

Demostración. Sean
$$\begin{aligned} j : (X\backslash V, A\backslash V) &\rightarrow (X, A) \\ i : (X\backslash U, A\backslash U) &\rightarrow (X\backslash V, A\backslash V) \end{aligned}$$
la inclusión de cada subespacio respectivamente, tenemos que la primera induce un isomorfimo
$$H_q(j) : H_q(X\backslash V) \rightarrow (A\backslash V)$$

Ademas, existe $r : (X\backslash V, A\backslash V) \rightarrow (X\backslash U, A\backslash U)$ una retracción, esto es, que

- $ri : (X\backslash U, A\backslash U) \rightarrow (X\backslash U, A\backslash U)$ es la identidad
- $ir : (X\backslash V, A\backslash V) \rightarrow (X\backslash V, A\backslash V)$ es homotópica a una aplicación constante.

Si llamamos id_U, id_V a la función indentidad de cada espacio respectivamente, y id las identidades en los módulos de homología, por el teorema de invarianza homotópica, tenemos que

$$\begin{aligned} id = H_q(id_U) = H_q(ri) = H_q(r)H_q(i) \\ id = H_q(id_V) = H_q(ir) = H_q(i)H_q(r) \end{aligned}$$

De esta manera $H_q(i)$ y $H_q(r)$ son biyectivas, una inversa de la otra y como

$$ji : (X\backslash U, A\backslash U) \to (X, A)$$

es la inclusión, y $H_q(j)$ es isomorfimo, tenemos que $H_q(ji)$ es isomorfimo, por lo que U puede ser excindido. □

El corolario al teorema de escisión es importante, ya que nos dice que no necesitamos que se den las condiciones del teorema de escisión sino con que se den las condiciones al nivel de homotopía es suficiente para poder escindir el subespacio que buscamos, condición mucho más débil que usaremos en el proximo capítulo.

El teorema de escisión es muy importante para calcular la homología de ciertos espacios, en particular nos servirá para calcular la homología de las esferas y plantear algunas aplicaciones importantes.

Capítulo 6

Aplicaciones

6.1. La homología de las Esferas

6.1.1. La esfera y el Disco

Cuando calculamos la homología de un espacio topológico, a menos que X tenga una estructura muy simple como la de un punto por ejemplo usar la definición es algoritmicamente imposible, pues tendriamos que identificar $S_q(X), B_q(X)$ y $Z_q(X)$, hacer el cociente e identificar con algún módulo conocido. Esto pasa porque $S_q(X)$, $B_q(X)$ y $Z_q(X)$ por lo general son muy grandes, esto es, la mayoria de las veces tienen una infinidad no numerable de generadores, pues como recordamos son espacios de funciones.

Una de las grandes ventajas de los módulos de homología con respecto a otras estructuras, es que gracias a la teoría establecida hasta este momento, es relativamente fácil calcular la homología de muchos espacios.

En particular usaremos el teorema de escisión y la sucesión exacta de homología y el teorema de invarianza homotópica para calcular la homología de las esferas S^n para cada n, lo cual no podríamos hacer si no tubiéramos estas herramientas , por lo que el alto nivel de abstracción al que hemos llegado hasta ahora rendirá fruto.

Primero veamos algunos detalles al respecto.

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ dotado de la topología relativa de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ahora definiremos algunos subespacios de S^n.

Definición 6.0.1. *Definimos el hemisferio norte y el hemisferio sur de* S^n

como

$$E_n^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$$

$$E_n^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$$

Definimos el ecuador de la esfera S^n como $E_n^+ \cap E_n^-$, esto es,

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} = 0\}$$

Recordemos que $E_n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$, el disco n-dimensional es un espacio contractible, ademas sabemos que la esfera S^{n-1} es la frontera del disco E_n , ahora podemos ver que son los otros espacios

Proposición 6.0.1. *Cada uno de los hemisferios E_n^+ y E_n^- es homeomorfo al disco E_n, el ecuador $E_n^+ \cap E_n^-$ es homeomorfo a S^{n-1}.*

Demostración. Como Sea $x \in E_n^+$ con $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, definimos $f : E_n^+ \to E_n$ como

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

f es continua pues es continua por componentes ya que las proyecciones son continuas.

Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, y $a = \sqrt{1 - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2}$, de esta forma tenemos que

$$a^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 - \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$$

Por lo que $(x_1, \ldots, x_n, a) \in S^n$.

Ademas $a \geq 0$, por lo que $(x_1, \ldots, x_n, a) \in E_n^+$ y por lo tanto f es sobre.

Para ver que f es uno a uno, basta ver que si $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(y_1, \ldots, y_{n+1})$, entonces $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq n$, y como $x_{n+1} = \sqrt{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ tenemos que $x_{n+1} = y_{n+1}$, por lo que f es uno a uno.

Como f es continua y biyectiva, E_n^+ es compacto y E_n es Hausdorff, tenemos que f es un homeomorfimo. La prueba para E_n^- es análoga.

Para el ecuador tenemos que si $x \in E_n^+ \cap E_n^-$, $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, entonces $x_{n+1} = 0$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, definimos $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$ y la prueba de que f es un homeomorfismo es analoga. $\square$

Con esta proposición, como cada esfera S^n es homeomorfa al ecuador de S^{n+1} no distinguiremos entre estos dos, hablaremos del ecuador de S^n como S^{n-1}, de esta forma ya podemos enunciar el siguiente resultado

Teorema 6.1. *Sea $n \geq 1$, entonces*

$$i : (E_n^+, S^{n-1}) \to (S_n, E_n^-)$$

es una escisión, esto es, $(E_n^-)^o$ puede ser excindido de (S^n, E_n^-)

Demostración. Sea V el subespacio de S^n

$$V = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} < -1/2\}$$

En la figura 6.1 tenemos una imagen de V cuando $q = 2$

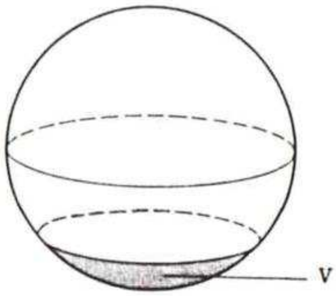


Figura 6.1: Escisión para la esfera S^2

Como

$$\operatorname{cl} V = \{(x : x_{n+1} \leq -1/2\} \subset \{x : x_{n+1} < 0\} = (E_n^-)^{\mathrm{o}}$$

Por el teorema de escisión tenemos que V puede ser excindido.

Pero (E_n^+, S^{n-1}) es un retracto de deformación de $(X\backslash V, E_n^-\backslash V)$, por el corolario 5.4.1 tenemos que $(E_n^-)^{\mathrm{o}}$ puede ser excindido. □

6.1.2. Homología de S^n

Teorema 6.2. *El homomorfismo de enlace $\partial : H_q(E^n, S^{n-1}) \to H_{q-1}(S^{n-1})$ es un isomorfismo para toda $q \geq 2$*

Demostración. Como E^n es contractible tenemos $H_q(E^n) = 0$ para toda $q \geq 1$, de esta forma, como la sucesión

$$0 \xrightarrow{H_q(j)} H_q(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_q(i)} 0$$

Es exacta, por un lado, $\ker \partial = \operatorname{Im} H_q(j) = 0$ por lo que ∂ es uno a uno.

Por otro lado, $\operatorname{Im} \partial = \ker H_q(i) = H_{q-1}(S^{n-1})$ por lo que ∂ es sobre.

Deducimos de esto que ∂ es biyectiva y por lo tanto es un isomorfismo. □

Esto es suficiente para calcular la homología de las esferas

Teorema 6.3. *Sea $q > 0$, entonces*

$$H_q(S^n) = \begin{cases} R & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

$$H_q(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} R & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que el homomorfismo de enlace

$$\partial : H_q(E^n, S^{n-1}) \to H_{q-1}(S^{n-1})$$

es un isomorfismo para toda $q \geq 2$.

Por otro lado, como E_n^- es contractible, tomando un punto $x_0 \in E_n^-$, por el cororalio al teorema de escisión $i' : H_q(S^n, x_0) \to H_q(S^n, E_n^-)$ es un isomorfismo donde $i' : E{\cdot}n^- \to S^n$ es la inclusión, esto implica que

$$H_q(j) : H_q(S^n) \to H_q(S^n, E_n^-)$$

Es un isomorfismo para $q \geq 2$ y $n \geq 1$.

Ademas de que

$$H_q(i) : H_q(E_n^+, S^{n-1}) \to (S^n, E_n^-)$$

es un isomorfismo por el teorema de escisón, por lo que haciendo composición, tenemos que

$$\partial H_q(i)^{-1} H_q(j) : H_q(S^n) \to H_{q-1}(S^{n-1})$$

Es un isomorfismo para $q \geq 2$ y $n \geq 1$

Como la sucesión

$$0 \to H_1(E^n, S^{n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \to H_0(E^n) \to 0$$

Es exacta, para $n > 1$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \to H_1(E^n, S^{n-1}) \to R \to R \to 0$$

como $H_0(i) : R \to R$ es sobre, por el primer teorema de isomorfismo tenemos que $R = \operatorname{Im} H_0(i) \cong R/\ker H_0(i)$ de lo que deducimos que $\ker H_0(i) = \{0\}$ y por lo tanto $H_0(i)$ es un isomorfismo, entonces es un isomorfismo, de esta manera, $\partial : H_1(E^n, S^{n-1}) \to R$ es el morfismo 0, pues $\operatorname{Im} \partial = \ker H_q(i) = 0$ y como ∂ es uno a uno tenemos que $H_1(E^n, S^{n-1}) = 0$.

Para $n = 1$ tenemos que S^0 tiene dos componentes arcoconexas, por lo que $H_0(S^0) = R \times R$, de esta forma tenemos la sucesión exacta.

$$0 \to H_1(E^1, S^0) \to R \times R \to R \to 0$$

donde $\partial : H_1(E^1, S^0) \to R \times R$ es uno a uno y $H_q(i) : R \times R \to R$ es sobre, por el primer teorema de isomorfismo $\ker H_q(i) \cong R$ de lo cual tenemos que $\operatorname{Im} \partial = R$ de nuevo por el primer teorema de isomorfismo $H_1(E^1, S^0) \cong R$.

Resumiendo

$$H_1(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ R & n = 1 \end{cases}$$

De esta manera tenemos lo que buscamos, iterando n y q, más en concreto

$$H_q(S^n) \cong H_q(E^n, S^{n-1})$$

Para $q = n$ tenemos $R = H_1(S^1) = H_2(S^2) \ldots H_n(S^n)$

Para $n \neq q$ con $n > 1$ tenemos dos casos,

Para $1 < n < q$ tenemos

$$H_q(S^n) = H_{q-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_{q-(n-1)}(S^1) = 0 \quad \text{pues q-(n-1)¿1}$$

Para $1 < q < n$ tenemos

$$H_q(S^n) = H_{q-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_{1)}(S^{n-(q-1)}) = 0 \quad \text{pues n-(q-1)¿1}$$

□

Corolario 6.3.1. *S^{n-1} no es un retracto de deformación de E^n*

Demostración. Si así fuera sería homotópicos y de esta manera, sus módulos de homología serían isomorfos, lo cual no es el caso. □

De ésta forma la esfera y el disco no pueden ser homeomorfos, ni siquiera homotópicos, un hecho intuitivamente obvio pero difícil de probar.

6.2. El teorema de Brouwer

Ahora deduciremos un teorema de gran importancia para la matemática en general, probado por Brouwer en 1910.

Teorema 6.4 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer)**.** *Toda función continua*

$$f : E^n \to E^n$$

tiene un punto fijo.

Demostración. Supongamos que $f : E^n \to E^n$ es continua y no tiene puntos fijos, sea $x \in D$ y nos fijamos en el segmento que va de $f(x)$ a x, de ésta forma, proyectamos sobre la esfera S^{n-1} en la dirección de $f(x)$ a x y a ese punto le llamamos $r(x)$ como lo ilustra la figura 6.2 para $n = 1$.

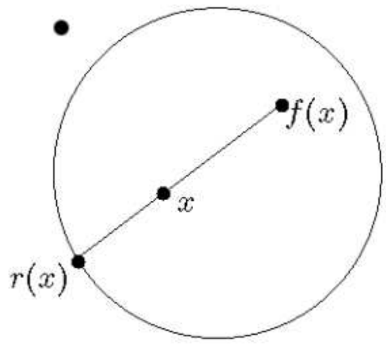


Figura 6.2: El Teorema de Brouwer

Es facil ver que r es continua pues puede expresarse en términos de las coordenas, siendo producto de composición de funciones continuas.

Ademas r es una retracción fuerte de la esfera en el disco, lo cual no es posible pues éstos no pueden ser homotópicos. $\square$

Cabe señalar que el teorema de punto fijo de Brouwer es fundamental dentro y fuera de la topología y que éste no admite una prueba elemental, a pesar de lo simple de su enunciado.

6.3. Isometrías en la esfera

Una isometría en $\mathbb{R}^n$ es una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva distancias, es fácil ver que esto pasa si y solo si preserva el producto interior usual de $\mathbb{R}^n$.

Estamos interesados en las isometrías que mandan en el 0, de manera que no estamos interesados en traslaciones, estas isometrías mandan la esfera en la esfera y además están completamente determinada por lo que hace en la esfera S^{n-1}, más aún son transformaciones lineales y forman un grupo.

Definición 6.4.1. *Definimos el grupo general lineal de* $(n, \mathbb{R})$ *como el conjunto de todas las matrices invertibles de* $n \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *y lo denotaremos por* $GL(n, \mathbb{R})$*.*

Podemos ver que en efecto, $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo con la operación producto de matrices.

Definición 6.4.2. *Definimos el grupo Ortogonal* $(n, \mathbb{R})$ *como el conjunto de todas las matrices cuadradas invertibles de* $n \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *tales que su inversa es igual a su transpuesta y lo denotaremos por* $O(n, \mathbb{R})$

Podemos ver que en efecto, $O(n, \mathbb{R})$ es un grupo con la operación producto de matrices y por definición tenemos $O(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$. Como $\det A = \det A^T$ y si $A \in O(n)$ entonces $AA^T = I$ tenemos que $1 = (\det A)^2$, por lo que $\det A = \pm 1$.

Definimos $SO(n, \mathbb{R}) \leq O(n, \mathbb{R})$ como el subgrupo de matrices de determinante 1, es llamado el grupo especial ortogonal.

Estos grupos tienen una interpretación geométrica muy importante, cada isometría que manda el origen al origen tiene por matríz de representación una matríz de $O(n, \mathbb{R})$, más aún, las matrices de $SO(n, \mathbb{R})$ determinan las rotaciones mientras que las demas determinan traslaciones.

Estamos interesados en $H_q(T)$ donde $T \in O(n, \mathbb{R})$, veamos que pasa con las rotaciones

Proposición 6.4.1. *Sea* $T \in SO(n + 1, \mathbb{R})$*, entonces* $H_q(T)$ *es la identidad en* S^n*.*

Demostración. Podemos representar una rotación como producto de rotaciones elementales, esto es, si definimos $R_{\theta,1,2}$ como

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Esta es una rotación en ángulo θ con sobre el plano determinado por e_1, e_2, si definimos $R_{\theta,i,j}$ intercambiando el orden de la base tendremos una matriz de forma muy similar, simplemento permutando los renglones y columnas $(1,2)$ por los renglones y columnas (i,j).

Toda rotación se puede ver como producto de este tipo de rotaciones elementales, así que veamos que $H_q(R_{\theta,i,j})$ es la identidad.

Sea

$$F(x,t) = R_{(1-t)\theta,i,j}(x)$$

Esta es una homotopía que manda $R_{\theta,i,j}$ en la identidad, por lo que del teorema de invarianza homotópica tenemos que $H_q(R_{\theta,i,j}) = id_{H_q(X)}$ que es lo que queriamos demostrar. □

Para clasificar $H_q(f)$ cuando f es una reflexión veamos un caso particular y con este construiremos cualquier caso

Proposición 6.4.2. *sea* $f(x_0,\dots,x_n,x_n) = (1x_0,\dots,x_n)$ *entonces*

$$H_q(f)(x) = -x$$

en $H_q(S^n)$.

Demostración. Por inducción sobre n

Veamos el caso $n=0$, para un 0-simplejo p_0, esto es, $\sigma(x) = p_0$, tenemos que

$$H_q(f)(\bar{p_0}) = -\bar{p}_0 = -\bar{p_0}$$

Por lo tanto $H_q(f)(x) = -x$ que es lo que queriamos .

Para $n \geq 0$, si llamamos φ a nuestro isomorfismo usamos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] \\ H_n(S^n) \arrow[r, "\varphi"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Esto es,

$$\varphi(H_n(f)(\bar{(c)})) = \varphi(\bar{-c})$$

Como φ es un isomorfismo, esto pasa si y solo si $H_q(f)(\bar{c}) = -\bar{c}$. □

Teorema 6.5. *Sea $g \in O(n+1, \mathbb{R})$ entonces*

$$H_n(g)(\bar{c}) = (\det g)(\bar{c})$$

Demostración. Si $g \in SO(n+1, \mathbb{R})$, por proposición 6.3 tenemos $H_q(g)(x) = \det g(x)$. Supongamos que $\det g = -1$, y sea $r(x_0, \ldots, x_n) = (-x_0, \ldots, x_n)$, como $det(r) = -1$ tenemos que $\det rg = 1$.

Ahora,

$$\bar{c} = H_q(rg)(\bar{c}) = H_q(r)H_q(g)(\bar{c}) = -H_q(g)(\bar{c})$$

Por lo tanto

$$H_q(g)(\bar{c}) = -\bar{c}$$

Que es lo que queriamos demostrar. □

Corolario 6.5.1. *Sea f el mapeo antipodal, esto es, $f(x) = -x$, entonces $H_q(f)$ es multiplicación por* $(-1)^{\det f}$

Demostración. $f(x) = -Ix$, donde I es la matriz identidad. □

6.4. Campos vectoriales en la esfera S^n

Otra forma de probar el teorema de punto fijo de Brouwer es a travez de un resultado, conocido coloquialmente como el teorema de la bola peluda. Esto porque, a grandes rasgos el teorema afirma que no podemos peinar una esfera de manera que no tengamos remolinos.

Más en concreto, necesitamos ver que entendemos por peinar la esfera. Un campo vectorial en S^n es una función continua $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que x

es perpendicular a $v(x)$ para cada $x \in S^n$, esto tiene sentido pues x y $v(x)$ son vectores en $\mathbb{R}^{n+1}$. Si anclamos $v(x)$ en el punto x obtenemos una forma de peinar la esfera, pues $v(x)$ resulta ser un vector tangente a S^n para cada $x \in X$, decimos que v es no nulo si $v(x) \neq 0$ para cada $x \in X$.

De esta forma el teorema de la bola peluda se enuncia de esta forma.

Teorema 6.6. *S^n tiene un campo vectorial no nulo si y sólo si n es impar*

Demostración. Si n es impar , digamos $n = 2k + 1$ tenemos que v definido de la siguiente forma

$$v(x_0, \ldots, x_{2_k+1}) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2, \ldots, -x_{2k+1}), x_{2_k}$$

Es un campo vectorial no nulo.

Ahora, para n par supongamos que v cumple la condición, entonces

$$w)(x) = \frac{x}{v(x)}$$

Es una función $S^n \to S^n$ con $x \cdot w(x) = 0$ para todo $x \in S^n$ como lo ilustra la figura 6.3.

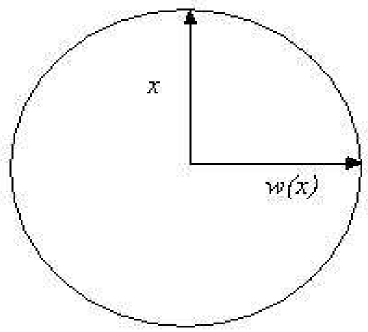


Figura 6.3: Campos Vectoriales en la Esfera S^n

Sea

$$F(x, t) = x \cos(\pi t) + w(x) \operatorname{sen}(\pi t)$$

Esta función define una homotopía tal que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1/2) = w(x)$, $F(x, 1) = -x$

De esta manera, $id \simeq w \simeq a$, esto es, son funciones homotópicas, donde a es el mapeo antipodal, es decir, $a(x) = -x$ por lo que la identidad es homotópica al mapeo antipodal, pero $H_q(id) = id$, y $H_q(a)(x) = -x$, esto es, de esta forma el mapeo antipodal no es homotópica a una aplicación constante y tenemos una contradicción

$\square$

Apéndice. Categorias y Funtores

Dado un espacio topológico X, en el capítulo 2 definimos para cada q un módulo $H_q(X)$, y dada una función continua $f : X \to Y$ definimos un homomorfismo de módulos

$$H_q(f) : H_q(X) \to H_q(Y)$$

Tal que H_q de la identidad es la identidad y H_q de una composición de funciones continuas es la composición de homomorfismos.

Estos conceptos se pueden generalizar a otras estructuras con el concepto de categoría

Definición .6.1. *Una categoria $\mathcal{C}$ consta de tres partes*

- *Una colección $Obj\mathcal{C}$ a cuyos elementos llamaremos objetos de $\mathcal{C}$*
- *Para cada par de objetos A, B un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$; los elementos de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ serán llamados morfismos de A en B.*
- *Dados tres objetos A, B, C, una regla de composición de morfismos, esto es, dados $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, existe un morfismo*

  $f \circ g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$

Que cumplen las siguientes propiedades

1. ***Asociatividad**. Dados $h \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C), f \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ tenemos $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$*

2. ***Elemento neutro***. *Para cada objeto A, existe un morfismo $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ tal que para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y para cada $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ tenemos que $f \circ 1_A = f$,*
   $1_A \circ g = g$.

Cabe hacer algunas aclaraciones en este momento. $Obj(\mathcal{C})$ no tiene porque ser un conjunto, podría serlo pero no necesariamente. Ilustremos esta situación para una categoría.

Sea $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ la categoría de todos los conjuntos, podemos ver que $Obj(\mathcal{C})$ no es un conjunto, pues el conjunto de todos los conjuntos no existe, si este objeto existiera se nos presentaría la paradoja de Russell, la cual la podemos ver en [5], pagina 13.

Sin embargo si definimos $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ como las funciones de A en B y la composición de funciones usual obtenemos una categoria, así que podemos trabajar con familias aunque estas no sean conjuntos.

El concepto de clase soluciona este problema y existe una axiomatización de esto conocida como $Bernays - G\ddot{o}$ o simplemente BG, la cual podemos encontrar en [5], pagina 321.

Para lo que vamos a trabajar en momento no necesitamos mas herramienta, solo basta ver a una clase como todo aquello que ponemos a la derecha del simbolo $\in$ y que no necesariamente puede ponerse a la izquierda.

Denotamos $f : A \to B$ si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ aunque f no tiene porque ser una función. Así mismo $f \circ g$ no tiene porque ser la composición de funciones usual.

Para mostrar lo general de la teoría veamos algunos ejemplos.

Ejemplo .1. *La categoria **Set**.*

*Obj**Set** es la clase de todos los conjuntos, $Hom(A,B)$ es el conjunto de funciones de A en B, y la composición de morfismos es la composición de funciones usual.*

Ejemplo .2. *La categoria Top.*

ObjTop es la clase de todos los espaciones topológicos, $Hom(A,B)$ son las funciones continuas de A en B y la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

Ejemplo .3. *Las categorias Gr y Ab. Los objetos de la primera es la clase de todos los grupos y de la segunda, la clase de todos los grupos abelianos, $Hom(A,B)$ es el conjunto de homomorfismos de grupo de A en B, respectivamente con la composición usual de funciones.*

Ejemplo .4. *Las categorias Ring y Rng.*

Ring es la categoria de anillos con elemento unitario, y Rng es la categoria de anillos en general, $Hom(A, B)$ son los homomorfismos de anillos con la composición correspondiente.

Ejemplo .5. *La categoria Met.*

Los objetos de esta categoria son los espacios métricos. Uno podria pensar que los morfismos entre estos objetos son las funciones continuas, pero la noción de que dos espacios métricos sean iguales es que sean isométricos.

De esta manera, podemos definir $Hom(A, B)$ como las contracciones de A en B con la composición de funciones usual.

Ejemplo .6. *Las categorías Vec_F Mod_R y ${}_R\mathrm{Mod}$.*

Espacios vectoriales sobre un campo fijo F, R-módulos derechos y R-módulos izquierdos respectivamente. $Hom(A, B)$ es el conjunto de transformaciones lineales de A en B, o el conjunto de homomorfismos de módulos respectivamente.

Ejemplo .7. *Af La categoría de todos los espacios afines. $Hom(A, B)$ son todos las transformaciones afines con la composición usual.*

Ejemplo .8. *La categoria Graf.*

ObjGraf es la clase de todas las graficas finitas. Un homomorfismo de gráficas es una función que manda vertices en vertices y aristas en aristas. $Hom(A, B)$ es el conjunto de homomorfismos de gráficas con la composición usual.

Ejemplo .9. *Sea G un grupo, definimos la categoría $\mathscr{G}$.*

$Obj\mathscr{G} = G$, si $g, h \in G$ definimos $Hom(g, h) = \{gh^{-1}\}$ y la composición de morfismos viene dada por multiplicación del grupo.

Esta es una categoria pues $Hom(g, g) = \{gg^{-1}\} = \{e\}$ que resulta ser el morfismo identidad.

Estas así como muchas otras estructuras de naturaleza algebraica, analítica, topológica, o de incluso ninguna de estas son categorias.

Dos elementos son equivalentes de alguna forma si podemos ir del uno al otro con un morfismo biyectivo, esto lo tomamos de esta forma, pues como definimos nuestras estructuras, los morfismos buscamos que conserven esta estructura. En abstracto esta es la definición.

Definición .6.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoria, $A, B \in Obj\mathcal{C}$, decimos que A y B son isomorfos si existen morfismos $f \in Hom(A, B)$ y $g \in Hom(B, A)$ tales que $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$.*

Ejemplo .10. *Sea $\mathcal{C} = Top$, entonces dos objetos isomorfos, resultan ser dos espacios topológicos homeomorfos.*

De manera análoga con los morfismos entre objetos, queremos relacionar dos categorias de alguna forma, aquí tenemos el concepto.

Definición .6.3. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorias, un funtor F es un transformación $F : Obj\mathcal{C} \to Obj\mathcal{D}$, donde denontando $F(A)$ o FA a la imagen de $A \in Obj\mathcal{C}$ tenemos que:*

- *Para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, existe un transformación*
$$F : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$$
tal que a cada morfismo $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ tenemos un morfismo $F\varphi$
- *Hay compatibilidad con las composiciones, es decir, si $\varphi : A \to B$ $\psi : B \to C$ entonces tenemos que $F(\psi\varphi) = F(\psi)F(\varphi)$.*
- *para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ tenemos que $F(1_A) = 1_F(A)$.*

Es importante notar, que aunque estamos usando F para denotar el transformación entre objetos, y cada uno de los transformación entre morfismos, estos son diferentes entre si, pese a esto, usaremos la misma letra, dando sentido a la funcionalidad de F de acuerdo al contexto.

Ahora, podemos ver que un funtor relaciona las tres partes de una categoria, los cuales son, los objetos, los morfismos y la regla de correspondencia, conservando identidades.

En nuestra definición de funtor el sentido de todas las flechas se conserva, esto es, si $\varphi : A \to B$ entonces $F\varphi : FA \to FB$; este tipo de funtores son llamados funtores covariantes, cuando el sentido de las flechas y el sentido de la composición se invierten, entonces el funtor recibe en nombre de funtor contravariante. En esta tesis todos nuestros funtores serán covariantes, los funtores contravariantes aparecen, por ejemplo, cuando trabajamos con cohomología.

Ahora si, en terminos de categorías, podemos establecer el sentido funtorial de la homología.

Ejemplo .11. *para cada q tenemos que H_q es un funtor entre las categorias Top y ${}_R$Mod. Las propiedades que tenemos que verificar han sido establecidas en la sección anterior.*

Lo importante de las relaciones funtoriales entre categorias, es que de las propiedades establecidas anteriormente, un funtor manda dos objetos isomorfos en la primera categoria en dos objetos isomorfos en la segunda. Que la imagen de dos objetos sea isomorfa en la segunda, en general no nos garantiza la isomorfia de los objetos en la primera, pero puede establecer ciertas propiedades en común entre los objetos, de ahi la importancia de los funtores.

Pareciera que la teoría se complica por la abstracción, pero la idea es más simple, pues por ejemplo, en nuestro caso es mas fácil estudiar módulos, grupos abelianos o espacios vectoriales, que estudiar espacios topológicos, por lo que los funtores pueden ser muy importantes, y hasta fundamentales en el estudio de estructuras aparentemente muy diferentes.

Bibliografía

[1] Dugundji James (1966)*Topology* , Editorial Allyn and Bacon Inc.

[2] Fraleigh John B. (1993)*A basic course in Abstract Algebra(Fifh Edition)*, Editorial Addison Wesley.

[3] Fulton William(1991)*Algebraic Topology, a first course*,

[4] Greenberg Marvin (1967)*Lectures on Algebraic Topology*, Editorial Benjamon Inc.Editorial Board.

[5] Hernandez Hernandez Fernando (2003)*Introducción a la teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana.

[6] Hungerford Thomas W. (1974)*Algebra* , Editorial Board.

[7] Kelley John L.(1955)*General Topology*, Editorial Board.

[8] Lang Serge (2002)*Algebra (Third Edition)*, Editorial Board.

[9] Massey W.S.(1991)*A basic course in Algebraic Topology*, Editorial Board.

[10] Munkres James R.(1984)*Elements of Algebraic Topology*, Editorial Persers Books.

[11] Munkres James Raymond (2000) *Topology (Second Edition)* , Editorial Prentice Hall Inc.

[12] Nathan Jacobson(1951)*Basic Concepts, Lectures in Abstract Algebra*, Nostrand Company.

[13] Rotman Joseph (2003)*Advanced Modern Algebra*, Editorial Prentice Hall

[14] Simmons G.F. (1963) *Introduction to topology and modern analysis*, Editorial Mac Graw Hill.

[15] Wallace Andrew H.(1963)*An introduction to Algebraic Topology*, Editorial Pergamon Press.