

UNIVERSIDAD DE SONORA

**Introducción a la Teoría de
Perturbaciones**

Tesis

que para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas

presenta

María Inés Gil Tolano

Contenido

1	Conceptos Básicos	11
1.1	Introducción	11
1.2	Símbolos de Orden	11
1.2.1	Algunos ejemplos	14
1.2.2	Propiedades de los símbolos de orden	14
1.2.3	Derivadas e Integrales	15
1.3	Expansiones Asintóticas	16
2	Ecuaciones Algebraicas y Trascendentes	25
2.1	Introducción	25
2.2	Ecuaciones regulares	25
2.3	Ecuaciones Singulares	29
2.4	Ecuaciones trascendentes	35
3	Un problema de Cauchy. Expansión Regular	37
3.1	Introducción	37
3.2	Análisis Dimensional	37
3.3	El problema del proyectil	39
3.3.1	Derivación de la ecuación	39
3.3.2	El problema adimensional	40
3.3.3	Solución por Perturbación Regular	42
3.3.4	Análisis de la Solución.	45
4	Problema de Valores en la Frontera	47

4.1	Introducción	47
4.2	Las soluciones externa e interna	48
4.3	Un ejemplo	51
4.3.1	La solución externa	51
4.3.2	La solución interna	53
4.3.3	El Término de Acoplamiento	54
5	Problema de Cauchy. Método de Escalas Múltiples	59
5.1	Introducción	59
5.2	Un oscilador lineal. Solución Exacta	60
5.2.1	Un Oscilador Lineal. El Método de Escalas Múltiples	62
5.3	La Ecuación de Duffing con Amortiguamiento	67
5.4	Un Oscilador Forzado	70
	Apéndice. Códigos Maple	77
1	77
2	78
3	79
	Bibliografía	83

Dedicatoria

A mi madre, María Dolores Tolano Vega,

Por su esfuerzo y dedicación.

En memoria de mi padre,

Rigoberto Gil Valdez.

A mis hermanos

José Andrés, Javier, Rosa, Rosario, Cecilia y Beatriz Elena.

A mi esposo, Hugo Alonso.

Agradecimientos

A mi madre, por sacarnos adelante a mis hermanos y a mí, por ser mi apoyo incondicional cuando la he necesitado, por haberme dado una educación, por ser la mejor de mis amigas, por sus consejos, por todo lo que me ha dado sin merecerlo.

Gracias por ser mi madre, por que si me dieran a elegir no te cambiaría por nadie en este mundo. Eres la mejor.

Agradezco a mi hermana Beatriz por apoyarme a lo largo de mi carrera. A mi esposo por su apoyo incondicional.

Agradezco el apoyo brindado por mi director de tesis Dr. Martín Gildardo García Alvarado, por el tiempo que me dedicó en el desarrollo del presente trabajo.

Introducción

Las aproximaciones asintóticas son una herramienta muy usada en las matemáticas aplicadas, incluyendo problemas físicos. Con frecuencia aparecen problemas para los que es difícil encontrar la solución exacta. Las soluciones a estos problemas pueden, a veces, tomar la forma de una aproximación, una solución numérica, y, en algunos casos, de una combinación de ambas. La teoría de perturbaciones es un conjunto de métodos para encontrar soluciones aproximadas analíticas, llamadas aproximaciones asintóticas o soluciones asintóticas, la cual facilita el estudio de problemas complejos en los que aparece un parámetro pequeño.

En el Capítulo 1 se hace una revisión del método de expansiones asintóticas y se analizan los resultados mas importantes.

En el Capítulo 2 estudiaremos el método de solución de ecuaciones algebraicas y trascendentales. Para ilustrar el funcionamiento del metodo, estudiamos algunos ejemplos.

En el Capítulo 3 estudiamos el método de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias regularmente perturbadas. Para ilustrar el funcionamiento del método, estudiamos el problema físico de calcular el tiempo de vuelo de un proyectil bajo la acción de la gravedad.

En los Capítulos 4 y 5 estudiamos un par de métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias singularmente perturbadas.

En el Capítulo 4 analizaremos el método de soluciones asintóticas acopladas, donde veremos su aplicación a algunos fenómenos físicos descritos por ecuaciones diferenciales con condiciones a la frontera singularmente perturbadas en las cuales, típicamente, la derivada de más alto orden aparece multiplicada por un parámetro pequeño.

En el Capítulo 5 veremos el método de escalas múltiples, el cual es aplicable a problemas caracterizados por incorporar dos (o más) procesos físicos gobernados cada uno por su propia escala pero actuando simultáneamente. La idea básica es introducir escalas diferentes asociadas, cada una, con alguna propiedad de la solución.

1 Conceptos Básicos

1.1 Introducción

En este capítulo hacemos una revisión del método de **expansiones asintóticas**. Se presentan las definiciones básicas, se analizan los resultados más importantes y se discuten algunos ejemplos. Casi la totalidad de lo que se expone en este capítulo fué tomado de [4].

1.2 Símbolos de Orden

Para presentar el concepto de expansión asintótica, primero debemos discutir el concepto de **orden**.

Definición 1.1. Sean $f = f(x)$ y $g = g(x)$.

1. Si x_0 es finito, la expresión

$$f = \mathcal{O}(g) \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow x_0 \tag{1.1}$$

significa que existen constantes k y x_1 (independientes de x) tales que

$$|f(x)| \leq k|g(x)| \quad \text{para} \quad |x - x_0| < x_1.$$

Si x_0 es infinito, la expresión (1.1) significa que existen constantes k y $M > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq k|g(x)| \quad \text{para} \quad |x| > M.$$

En este caso se dice que “ f es \mathcal{O} grande de g cuando $x \rightarrow x_0$ ”, o que “ f y g son del mismo orden cuando $x \rightarrow x_0$ ”.

2. Si x_0 es finito, la expresión

$$f = o(g) \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow x_0 \tag{1.2}$$

significa que para cualquier k existe un x_1 (independiente de x) se satisface que

$$|f(x)| \leq k|g(x)| \quad \text{para} \quad |x - x_0| < x_1.$$

Si x_0 es infinito, la expresión (1.2) significa que para cualquier k existe M (independiente de x) tal que

$$|f(x)| \leq k|g(x)| \quad \text{para} \quad |x| > M.$$

En este caso se dice que “ f es o pequeña de g cuando $x \rightarrow x_0$.”

Los símbolos de orden \mathcal{O} y o , llamados también *símbolos de Bachmann-Landau*¹ pueden ser definidos también de la siguiente manera. Supongamos que $g(x) \neq 0$ para $|x - x_0| < x_r$ para algún $x_r > 0$ y consideremos el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{1.3}$$

¹El símbolo $\mathcal{O}(\S)$ aparece por primera vez en el segundo volumen del *Tratado sobre Teoría de Números*, escrito en 1894 por P. G. H. Bachmann (1837 - 1920) y E. G. H. Landau (1877 - 1938) adquiere esta notación del libro de Bachmann. Sin embargo, el símbolo $o(x)$ fue inventado por Landau para sustituir la notación anterior, $\{x\}$. Ver [11].

Se dice que “ f es \mathcal{O} -grande de g cuando $x \rightarrow x_0$ ” (o que “ f es del orden de g ” cuando $x \rightarrow x_0$) si el límite (1.3) existe y es diferente de cero.

A continuación se establece la relación que existe entre estas dos maneras de definir los símbolos de orden.

Teorema 1.1. *i) Si el límite (1.3) existe y es diferente de cero, entonces $f = \mathcal{O}(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$.*

ii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ entonces $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$.

Demostración. 1. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = M$. De la definición de límite tenemos

que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - M \right| < \varepsilon$.

Así,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| - |M| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - M \right| < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon + |M|.$$

Como $\varepsilon > 0$ y $|M| > 0$, entonces, haciendo $k = \varepsilon + |M|$ se tiene

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq k.$$

ii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < k$ si $|x - x_0| < \delta$. Haciendo $x_1 = \delta$ se concluye que $f = o(g)$.

□

1.2.1 Algunos ejemplos

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran el uso de las definiciones de los símbolos de Landau.

1. Sean $f(x) = x^2$, $g_1(x) = x$ y $g_2(x) = -3x^2 + 5x^6$. En este caso, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g_2(x)} = -\frac{1}{3}$. Luego, $f = o(g_1)$ y $f = \mathcal{O}(g_2)$ cuando $x \rightarrow 0$.
2. Sean $f(x) = x \operatorname{sen}(1 + 1/x)$ y $g(x) = x$. Como $|f(x)/g(x)| \leq 1$ para $x > 0$, se concluye que $f = \mathcal{O}(g)$ cuando $x \rightarrow 0$.
3. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Por el teorema de Taylor se tiene que $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(\xi)$ con $0 \leq \xi \leq x$. Entonces, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, de donde se sigue que $\operatorname{sen}(x) = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \rightarrow 0$.
4. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{4 - 5x^2} = \frac{3}{4}$, se concluye que $\frac{3}{4 - 5x^2} = \mathcal{O}(1)$ cuando $x \rightarrow 0$.
5. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4 - 5x^2} = 0$, se concluye que $\frac{3}{4 - 5x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

1.2.2 Propiedades de los símbolos de orden

Las siguientes son propiedades muy simples y útiles, que se desprenden directamente de las definiciones.

1. $f = \mathcal{O}(1)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y sólo si f es acotada en una vecindad de x_0 ;
2. $f = o(1)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$;

3. Si $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ entonces $f = \mathcal{O}(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ (pero no viceversa; por ejemplo, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$).

También existen algunas relaciones útiles entre los símbolos de Landau. Algunas de ellas son las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) } \mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f) & \text{(e) } \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f) \\
 \text{(b) } o(o(f)) = o(f) & \text{(f) } o(f) + o(f) = o(f) \\
 \text{(c) } \mathcal{O}(fg) = \mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) & \text{(g) } o(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f) \\
 \text{(d) } \mathcal{O}(f)o(g) = o(fg) \cdot \mathcal{O}(g) & \text{(h) } \mathcal{O}(o(f)) = o(\mathcal{O}(f)) = o(f).
 \end{array}$$

Estas propiedades se deducen directamente de la Definición 1.1.

Por ejemplo, para probar la propiedad (e), $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$, supóngase que $g_1 = \mathcal{O}(f)$ y que $g_2 = \mathcal{O}(f)$. Esto significa que $\lim \frac{g_1(x)}{f(x)} = M_1$ y que $\lim \frac{g_2(x)}{f(x)} = M_2$. Entonces $\lim \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = M_1 + M_2$, de donde se sigue que $g_1 + g_2 = \mathcal{O}(f)$.

1.2.3 Derivadas e Integrales

Aunque en este trabajo no estaremos interesados en la relación de orden entre derivadas y/o integrales, dedicaremos unos cuantos párrafos a discutir la siguiente pregunta. Si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, ¿qué puede decirse sobre la relación de orden entre las derivadas o las integrales de f y de g ?

Si $f = \mathcal{O}(g)$, no necesariamente se sigue que $f' = \mathcal{O}(g')$, como se puede ver con el siguiente ejemplo. Sean $f(x) = x + \sin(e^x)$ y $g(x) = x$. Si $x \gg 1$ se ve que $f = \mathcal{O}(x)$, pero la derivada de f no es acotada (es decir, f' no es $\mathcal{O}(1)$.) Con respecto a la integral, sin embargo, la situación es diferente. Es posible plantear varios resultados respecto a las integrales, pero aquí sólo mencionamos uno.

Teorema 1.2. Si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen $f = \mathcal{O}(g)$ si $x \rightarrow x_0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = \mathcal{O} \left(\int_{x_0}^x |g(t)| dt \right), \quad x \rightarrow x_0.$$

Demostración. Sea k la constante tal que $|f(t)| \leq k|g(t)|$ para t suficientemente cercana a x_0 , digamos $|t - x_0| < \delta$. Entonces

$$-k|g(t)| \leq f(t) \leq k|g(t)|, \quad \text{para } |t - x_0| < \delta.$$

Aplicando la propiedad de monotonía de la integral se obtiene la conclusión. \square

Es en el plano complejo donde se puede establecer algún enunciado con respecto a la diferenciación de relaciones de orden. Esto se debe, en parte, a que el teorema integral de Cauchy permite representar funciones holomorfas como integrales, las cuales, como se vió en el Teorema 1.2, “se comportan bien” (por decirlo coloquialmente) con respecto a la integral. Un resultado estándar en este sentido es el siguiente teorema.

Teorema 1.3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en una región que contiene el sector anular cerrado $\mathcal{S} = \{z : \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta, |z - z_0| \geq R \geq 0\}$ y supongamos que $f(z) = \mathcal{O}(z^\nu)$ (respectivamente, $f(z) = o(z^\nu)$) cuando $z \rightarrow \infty$ en el sector, para ν real y fijo. Entonces $f^{(n)}(z) = \mathcal{O}(z^{\nu-n})$ (respectivamente, $f^{(n)}(z) = o(z^{\nu-n})$) cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier sector anular cerrado contenido en \mathcal{S} con vértice común z_0 .

La demostración de este hecho aparece en [4] (página 9).

1.3 Expansiones Asintóticas

Las siguientes definiciones fueron dadas por Poincaré (1886).

Definición 1.2. Sea $\{\phi_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ una sucesión de funciones continuas, definidas en algún dominio \mathcal{D} , y sea x_0 un punto límite de \mathcal{D} . Se dice que $\{\phi_n\}$ es una sucesión asintótica si $\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ para toda n .

Existe un gran número de sucesiones asintóticas, pero las más usuales (para el caso en que $x_n \rightarrow x_0$) son:

1. $\phi_n(x) = e^{-n/(x-x_0)}, n = 0, 1, 2, \dots$, cuando $x \rightarrow x_0$;
2. $\phi_n(x) = (x - x_0)^{\nu_n}, n = 0, 1, 2, \dots$, donde ν_n son constantes para las cuales $(x - x_0)^{\nu_{n+1}} = o((x - x_0)^{\nu_n})$ cuando $x \rightarrow x_0$;
3. $\phi_n(x) = x^{-n}$ cuando $x \rightarrow \infty$;
4. $\phi_n(x) = e^{-nx}$ cuando $x \rightarrow \infty$.

(En cada caso se puede verificar que $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_n(x)} \right] = 0$.)

La primera sucesión es útil cuando se tienen que analizar funciones exponencialmente pequeñas. La segunda de estas sucesiones es simplemente una generalización de las funciones que aparecen en series de potencias. De hecho, toda serie de Taylor convergente de una función analítica $f(x)$ sirve como ejemplo de una serie asintótica, tomando a x_0 en el dominio de analiticidad de $f(x)$, $\nu = n$ y los coeficientes $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Una expansión asintótica es una serie formal de funciones tomadas de una sucesión asintótica que tiene la propiedad de que, la truncación de la serie en un número finito de términos, proporciona una aproximación a una función dada cuando el argumento tiende a un valor particular. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.3. Sea $f(x)$ una función definida en \mathcal{D} . Entonces $f(x)$ tiene una expansión asintótica de n términos, con respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$, si y solo si

$$f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \phi_k(x) + o(\phi_m) \text{ para cada } m = 1, \dots, n \text{ cuando } x \rightarrow x_0, \quad (1.4)$$

donde los coeficientes a_k son independientes de x . En este caso, escribimos

$$f(x) \sim a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x) \text{ cuando } x \rightarrow x_0. \quad (1.5)$$

Es necesario hacer tres comentarios.

1. Dada una función $f(x)$ y dado un límite de interés, $x \rightarrow x_0$, la expansión asintótica no es única, sino que depende de la sucesión asintótica que se decida usar (y se supone que se elige la más simple). Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \sin(3x)$. En la siguiente tabla se muestran algunas expansiones asintóticas cuando $x \rightarrow 0$ de $f(x)$, para diferentes sucesiones asintóticas.

Suc. asintótica	Exp. asintótica de $f(x) = \sin(3x)$
$\{x^n\}$	$f(x) \sim 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{4}x^5 + \dots$
$\{\ln(1+x^n)\}$	$f(x) \sim 3 \ln(1+x) + \frac{3}{2} \ln(1+x^2) - \frac{11}{2} \ln(1+x^3) + \dots$
$\left\{ \frac{x^n}{(1+x^2)^{3/2}} \right\}$	$f(x) \sim 3 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{18}{5} \frac{x^5}{(1+x^2)^{3/2}} + \dots$

En la figura siguiente se grafican las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(3x), \\ f_1(x) &= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{4}x^5, \\ f_2(x) &= 3 \ln(1+x) + \frac{3}{2} \ln(1+x^2) - \frac{11}{2} \ln(1+x^3), \\ f_3(x) &= 3 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{18}{5} \frac{x^5}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

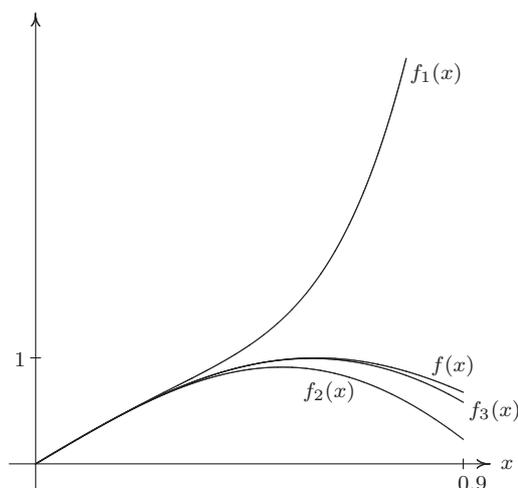


Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x) = \sin(3x)$ y tres diferentes expansiones asintóticas.

para intervalos de la forma $[0, x_0]$.

De manera que dada una función y el límite de interés, es necesario seleccionar una sucesión asintótica apropiada.

2. Dadas una función $f(x)$, un valor límite de x y una sucesión asintótica, los coeficientes de la expansión asintótica son únicos. De hecho, de la Definición (1.3), ecuación (1.4) se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - \sum_{k=1}^m a_k \phi_k(x)}{\phi_m(x)} \right] = 0.$$

Nótese ahora que

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \phi_k(x)}{\phi_m(x)} &= \frac{f(x) - \sum_{k=1}^m a_k \phi_k(x) + a_m \phi_m(x)}{\phi_m(x)} \\ &= \frac{f(x) - \sum_{k=1}^m a_k \phi_k(x)}{\phi_m(x)} + a_m. \end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $x \rightarrow x_0$ se obtiene

$$a_m = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \phi_k(x)}{\phi_m(x)} \right], \quad \text{para } m \geq 0.$$

Estos coeficientes pueden ser calculados usando el código Maple que se muestra en el apartado 1 del apéndice.

Este es el procedimiento que usamos para calcular los coeficientes de cada una de las expansiones asintóticas de la tabla anterior.

3. Finalmente, la expresión $\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k(x)$ no debe ser interpretada como una serie en el sentido convencional. De hecho, muchas series asintóticas, si se miran como una serie convencional, es decir, si se selecciona un valor de x , cercano a x_0 y se calculan los términos de la serie, resultará ser divergente (aunque algunas, ocasionalmente, serán convergentes).

La definición de convergencia puntual de una serie de funciones es la siguiente. Se dice que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge para un valor dado de x si, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \sum_{n=N_1}^{N_2} f_n(x) \right| < \varepsilon$ si $N_1, N_2 > N$. En este sentido se afirma que la serie de Taylor de una función dada es convergente. Pero este tipo de convergencia no es tan útil como se pudiera pensar. Considérese el siguiente ejemplo, que es típico para ilustrar este punto (ver, por ejemplo, [10], [5], pp. 19,20). La *función error* está definida mediante

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

y su gráfica aparece en la figura 1.2

La serie de Taylor para la función analítica $h(t) = e^{-t^2}$ alrededor de $t = 0$ es

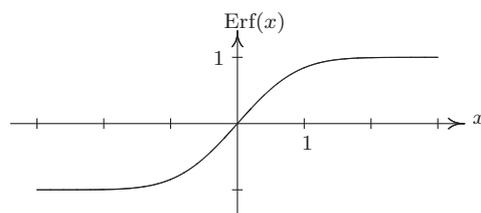


Figura 1.2: La función error, $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$, la cuál tiene un radio de convergencia infinito. Integrando término a término encontramos una serie para la función Erf, que también converge en un radio de convergencia infinito,

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (1.6)$$

Si se toman ocho términos, esta serie aproxima a la función Erf con una precisión de 10^{-5} en el intervalo $[-1, 1]$. Si se quiere truncar la serie para obtener una aproximación a la función Erf en el intervalo $[-2, 2]$ con esta misma precisión (del orden de 10^{-5}) deben tomarse 16 términos; en el intervalo $[-5, 5]$ deben tomarse 75 términos, etcétera. En la Figura 1.3, la curva 1 es la gráfica de la función $\text{Erf}(x)$; las curvas 2 y 3 son las gráficas de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^8 \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ y $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{16} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, respectivamente.

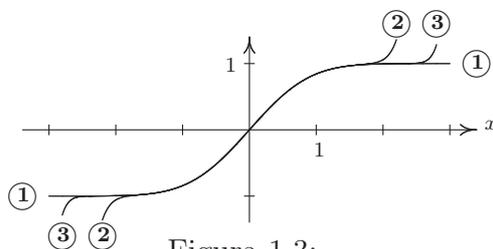


Figura 1.3:

Se ve, entonces, que la serie de Taylor es convergente, aunque para valores muy

grandes de x deben tomarse muchos términos de la serie para obtener un nivel de aproximación suficientemente pequeño.

Una serie alternativa para la función Erf puede obtenerse como sigue.

Nótese que la función error se puede escribir en la forma

$$\operatorname{Erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (1.7)$$

Entonces, escribiendo

$$e^{-t^2} = \frac{1}{t} t e^{-t^2} = \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right)$$

, e integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt. \end{aligned} \quad (1.8)$$

En la última integral en (1.8) escribimos $\frac{1}{t^2} e^{-t^2} = \frac{1}{t^3} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right)$ e integramos nuevamente por partes para obtener

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{1}{t^3} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{t^3} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \left(-\frac{3}{t^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{2x^3} e^{-x^2} - \frac{3}{2} \int_x^\infty \left(\frac{1}{t^4} \right) \left(e^{-t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Continuando de esta manera y sustituyendo (1.8) y los cálculos subsiguientes en (1.7) se obtiene

$$\operatorname{Erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2x)^{2n}} \right]. \quad (1.9)$$

Esta representación en forma de serie de la función error es divergente (es decir, la correspondiente sucesión de sumas parciales es divergente) para cada valor de x . Por ejemplo, para $x_0 = 10$, denotando con $s_n(x_0)$ la sucesión de sumas parciales de la serie (1.9), encontramos que $s_1 = s_2 = \dots = s_{340} = 1$ pero

$$\begin{aligned} s_{365} &= 123.0728267, \\ s_{370} &= -82063.39449, \\ s_{375} &= .59020849 \times 10^8, \\ s_{380} &= -.4537125789 \times 10^{11}, \\ s_{385} &= .3724782450 \times 10^{14}. \end{aligned}$$

Nótese que, en este caso, si x es grande, la Serie de Taylor (1.6) convergerá al valor $\text{Erf}(x)$ para un número muy grande de términos, mientras que la serie asintótica (1.9) divergerá para un número muy grande de términos. Sin embargo, la utilidad de la expansión asintótica está en que unos cuantos términos de la expansión proporcionan una buena aproximación a la función $\text{Erf}(x)$ para x grande. Por ejemplo para $x > 2.5$, los primeros tres términos de la expansión asintótica dan una aproximación del orden del 10^{-5} , mientras que para $x > 3$ sólo dos términos son necesarios. En la Figura 3 se muestran las gráficas de las función $\text{Erf}(x)$ (1.6) y de la serie asintótica (1.9) con tres términos (es decir, $\text{Erf}_{(3)}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{n=1}^3 (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2x)^{2n}} \right]$)

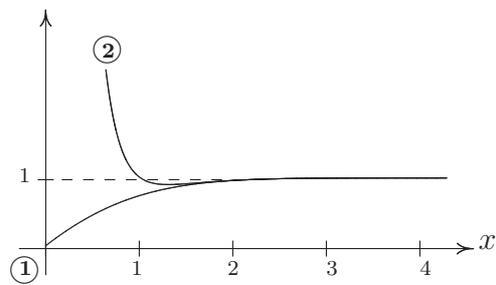


Figura 1.4: Comparación de las gráficas de la función $\text{Erf}(x)$ (1.6) (curva 1) y la serie asintótica (1.9) con tres términos (curva 2).

2 Ecuaciones Algebraicas y Trascendentes

2.1 Introducción

Las sucesiones asintóticas son una herramienta usada en el análisis de las soluciones de problemas que surgen en la Teoría de Perturbaciones. En este capítulo estudiaremos cómo se aplica el método de expansiones asintóticas en la solución de problemas algebraicos y trascendentes.

2.2 Ecuaciones regulares

Considérese el problema de encontrar una solución a la ecuación

$$\psi(x, \varepsilon) = 0, \tag{2.1}$$

que contiene el parámetro ε .

Si $\varepsilon \ll 1$, el problema (2.1) se puede interpretar como una perturbación del problema

$$\psi(x, 0) = 0. \tag{2.2}$$

Si $x(\varepsilon)$ denota la solución al problema (2.1) y si $x(\varepsilon)$ tiende a la solución x_0 del

problema no perturbado (2.2) cuando ε tiende a cero, decimos que el problema (2.1) es del tipo de *perturbación regular*.

El siguiente teorema es la base del método para obtener la solución de un problema de perturbación regular.

Teorema 2.1. (El Teorema Fundamental de la Teoría de Perturbaciones)

Sea $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión asintótica en términos de la variable ε . Supongamos que

$$a_0\phi_0(\varepsilon) + a_1\phi_1(\varepsilon) + \cdots + a_n\phi_n(\varepsilon) + \mathcal{O}(\phi_{n+1}(\varepsilon)) = 0,$$

para ε suficientemente pequeño, y que $\phi_n(\varepsilon)$ no se anula en una vecindad de $\varepsilon = 0$ para toda $n = 0, 1, 2, \dots$. Si los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son independientes de ε , entonces $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Demostración. Definimos

$$P(\varepsilon) = a_0\phi_0(\varepsilon) + a_1\phi_1(\varepsilon) + \cdots + a_n\phi_n(\varepsilon) + \mathcal{O}(\phi_{n+1}(\varepsilon)) = 0. \quad (2.3)$$

Dividiendo ambos lados de (2.3) por $\phi_0(\varepsilon)$ y tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ vemos que

$$P(\varepsilon) = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Ahora dividimos (2.3) por $\phi_1(\varepsilon)$ y tomamos el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Vemos que

$$P(\varepsilon) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Continuando de esta manera obtenemos que

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

□

En el siguiente ejemplo se ilustra cómo encontrar la solución asintótica de una ecuación algebraica regular, usando el teorema 2.1.

Ejemplo. Consideremos la ecuación algebraica

$$x^2 - 2x + \varepsilon = 0. \quad (2.4)$$

Si ε es pequeño, es decir, si $|\varepsilon| \ll 1$, la ecuación anterior se puede ver como una perturbación de la ecuación

$$x^2 - 2x = 0, \quad (2.5)$$

en el sentido de que, si conocemos las soluciones de (2.5) entonces las soluciones de (2.4) están “cercanas” a las soluciones correspondientes de (2.5).

Cuando $\varepsilon = 0$ la ecuación (2.5) (no perturbada) tiene dos raíces

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Ahora, cuando $|\varepsilon| \ll 1$, asumimos que cada raíz de (2.4) tiene una expresión de la forma:

$$x(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (2.6)$$

Entonces, sustituyendo (2.6) en (2.4) obtenemos

$$a_0^2 + 2a_0a_1\varepsilon + (2a_0a_2 + a_1^2)\varepsilon^2 - 2a_0 - 2a_1\varepsilon - 2a_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0.$$

Agrupando en términos de potencias ε tenemos;

$$(a_0^2 - 2a_0)\varepsilon^0 + (2a_0a_1 - 2a_1 + 1)\varepsilon + (2a_0a_2 + a_1^2 - 2a_2)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0.$$

Como el lado derecho en la ecuación anterior es 0, concluimos, con base en el teorema 2.1, que los coeficientes de cada potencia de ε deben ser cero

$$\begin{aligned} a_0^2 - 2a_0 &= 0, \\ (2a_0a_1 - 2a_1 + 1) &= 0, \\ (2a_0a_2 + a_1^2 - 2a_2) &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación en el sistema anterior, cuadrática en la incógnita a_0 , tiene soluciones $a_{01} = 0$ y $a_{02} = 2$. Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación del sistema, la cual es lineal en a_1 , obtenemos $a_{11} = \frac{1}{2}$ y $a_{12} = -\frac{1}{2}$. Finalmente, sustituyendo primero los valores de a_{01} y a_{11} en la tercera ecuación del sistema, la cual es lineal en a_2 , obtenemos $a_{21} = \frac{1}{8}$ y sustituyendo los valores de a_{02} y a_{12} obtenemos $a_{22} = -\frac{1}{8}$. Así, se han encontrado dos soluciones de la forma (2.6) para la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned} x_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ x_2(\varepsilon) &= 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Vemos entonces que estas raíces se reducen a las de la ecuación no-perturbada cuando $\varepsilon = 0$. Podemos comparar nuestra aproximación cuando $\varepsilon = .01$, para las raíces actuales de la ecuación perturbada.

Raíces exactas:

$$x_1 = .00501256, \quad x_2 = 1.9949874.$$

Raíces Aproximadas:

$$x_1(.01) = 0.0050125, \quad x_2(.01) = 1.9949875.$$

2.3 Ecuaciones Singulares

En terminos informales se puede decir que un problema de perturbación singular es un problema en el que aparece un parámetro pequeño (problema perturbado) y es tal que si el parámetro toma el valor cero, entonces el problema resultante (problema no perturbado) y el problema original tienen propiedades notablemente diferentes.

Ejemplo 2.1. Consideremos la ecuación

$$\varepsilon x^2 - 2x + 1 = 0 \tag{2.7}$$

Si intentamos encontrar una solución de la forma (2.6) para (2.7) tendremos

$$\varepsilon (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots)^2 - 2(a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots) + 1 = 0$$

Agrupando en términos de ε tenemos;

$$(-2a_0 + 1)\varepsilon^0 + (a_0^2 - 2a_1)\varepsilon + (2a_0a_1 - 2a_2)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0$$

Por el teorema fundamental de la teoría de perturbación tenemos

$$-2a_0 + 1 = 0, \quad a_0^2 - 2a_1 = 0, \quad 2a_0a_1 - 2a_2 = 0,$$

Este sistema tiene una única solución:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{8}, \quad a_2 = \frac{1}{16}.$$

Entonces, encontramos sólo una raíz:

$$x_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon + \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

$x_1(\varepsilon)$ es, como se puede ver, una aproximación a la raíz $x = 1/2$ de (2.7). Esto parece sugerir que la manera como hasta ahora hemos precedido no funciona en este caso, pues la ecuación cuadrática original tiene dos raíces reales (como se puede verificar directamente), y el método nos ha proporcionado sólo una raíz (x_1). ¿Dónde quedó la otra (x_2)?. Primero debemos darnos cuenta que sumar εx^2 a $-2x+1$ es una perturbación pequeña sólo cuando x es de orden uno. Pero cuando x es muy grande, εx^2 puede llegar a ser más grande que x y mucho más grande que 1. Esto es lo que hace que el problema sea singular, pues si se hace $\varepsilon = 0$ en (2.7), el problema que resulta es lineal (y no cuadrático). Gráficamente, lo que ocurre con las raíces se puede ilustrar en la figura 2.1, en la que se indica que una raíz se aproxima a $1/2$ pero la otra crece (tiende a infinito) cuando ε tiende a cero.

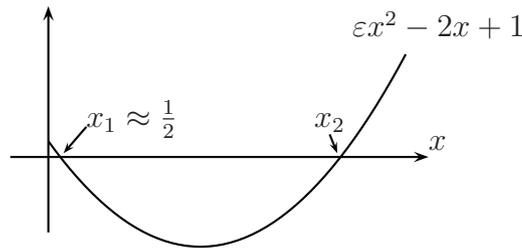


Figura 2.1: Comportamiento de las raíces de la ecuación (2.7) cuando ε es pequeño.

Entonces nos debemos preguntar, ¿cómo podemos conseguir $\varepsilon x^2 - 2x + 1$ se haga cero si ε es pequeño?

Ya hemos encontrado una manera: tratar a x como de orden uno (es decir, $x(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$) y balancear el primero y el segundo términos. Otra manera de conseguir este balance es considerar que $x(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^p)$, es decir, hacer

$$x(\varepsilon) = \varepsilon^p \omega(\varepsilon), \quad (2.8)$$

donde

$$\omega(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Entonces sustituyendo en (2.7) obtenemos

$$\varepsilon^{2p+1}\omega^2 - 2\varepsilon^p\omega + 1 = 0 \quad (2.9)$$

Para hacer que el lado derecho de esta ecuación sea cero debemos encontrar el balance adecuado entre los términos de la izquierda.

Para encontrar el valor adecuado de p , igualamos todos los posibles pares de los exponentes de la función base. Tenemos tres posibilidades.

1. Para que el segundo y tercer términos sean del mismo orden debemos hacer $p = 0$. En este caso la ecuación es $\varepsilon\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$, la cuál es exactamente igual que la original; de modo que en esta caso no se obtiene una raíz adicional;
2. El primer y el tercer términos son del mismo orden si $2p + 1 = 0$, es decir, si $p = -1/2$, y con este valor de p obtenemos la ecuación $\omega^2 - 2\varepsilon^{-1/2}\omega + 1 = 0$. Sin embargo, el segundo término en el lado izquierdo (es decir, $\varepsilon^{-1/2}\omega$) es muy grande cuando $\varepsilon \ll 1$, y no es posible conseguir que el lado derecho se anule;
3. Si hacemos que el primero y el segundo términos sean del mismo orden obtenemos $2p + 1 = p$, es decir, $p = -1$.

Con este valor de p la ecuación (2.9) es $\omega^2 - 2\omega + \varepsilon = 0$. Para esta ecuación (regular) se busca una solución en la forma

$$\omega = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots,$$

y se encuentra que

$$\begin{aligned}\omega_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \omega_2(\varepsilon) &= 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

En términos de la variable original ($x(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\omega(\varepsilon)$), obtenemos.

$$\begin{aligned}x_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ x_2(\varepsilon) &= \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

El método se aplica de manera similar para ecuaciones algebraicas de orden superior, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Consideremos la ecuación $\varepsilon x^3 - 3x + 1 = 0$.

Obsérvese que éste es un problema singular, por lo que es necesario hacer un cambio de variable. Procediendo de manera similar al ejemplo anterior, supongamos que x , es de la forma $x = \varepsilon^p y$. Sustituyendo en la ecuación original tenemos que:

$$\varepsilon^{1+3p}y^3 - 3\varepsilon^p y + 1 = 0.$$

Para que el lado derecho de esta ecuación sea cero, debe buscarse el balance adecuado entre los términos en el lado derecho.

Hay tres posibilidades.

1. Si se hace que $\varepsilon^{1+3p}y^3$ y 1 sean del mismo orden ($\mathcal{O}(1)$), entonces se obtiene

$3p + 1 = 0$, de donde $p = -1/3$. Pero con este valor de p nos queda la ecuación $y^3 - 3\varepsilon^{-1/3}y + 1 = 0$, en la que el segundo término en el lado izquierdo es de orden grande cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, por lo que no es posible que el lado izquierdo sea cero.

2. Si se hace que $3\varepsilon^p y$ y 1 sean del mismo orden (otra vez $\mathcal{O}(1)$), entonces se tiene $p = 0$, con lo que la ecuación es $\varepsilon y^3 - 3y + 1 = 0$. Ésta es idéntica que la original, y por esa razón la descartamos.
3. Finalmente, si se busca un balance entre los primeros dos términos, debemos pedir que $3p + 1 = p$, es decir, $p = -1/2$.

Con este valor de p la ecuación se convierte en $\varepsilon^{-1/2} y^3 - 3\varepsilon^{-1/2} y + 1 = 0$, es decir, en $y^3 - 3y + \varepsilon^{1/2} = 0$. Haciendo $\beta = \varepsilon^{1/2}$ tenemos, finalmente, $y^3 - 3y + \beta = 0$.¹ Como éste es un problema regular, ahora podemos buscar una solución de la forma $y = a_0 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + \dots$. Haciendo la sustitución y agrupando los coeficientes de β^n resulta

$$a_0^3 - 3a_0 + (3a_0^2 a_1 - 3a_1 + 1)\beta + (-3a_2 + a_0(2a_0 a_2 + a_1^2) + 2a_1^2 a_0 + a_2 a_0^2)\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4) = 0$$

Aplicando el teorema fundamental de la teoría de perturbaciones se sigue que

$$\begin{aligned} a_0^3 - 3a_0 &= 0 \\ 3a_0^2 a_1 - 3a_1 + 1 &= 0 \\ -3a_2 + a_0(2a_0 a_2 + a_1^2) + 2a_1^2 a_0 + a_2 a_0^2 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

¹Para evitar este tipo de cambios de parámetro algunos autores (por ejemplo [3], p.19) sugieren que la expansión asintótica de la solución sea, no de la forma (2.6) sino de la forma $z = a_0 + a_1 \varepsilon^\alpha + a_2 \varepsilon^{2\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3\alpha})$ donde $\alpha > 0$ es un número que debe determinarse en cada caso.

Las soluciones a este sistema son:

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, a_2) &= \left(0, \frac{1}{3}, 0\right), \\(a_0, a_1, a_2) &= \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{72}\right), \\(a_0, a_1, a_2) &= \left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{72}\right).\end{aligned}$$

Las tres soluciones son

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{3}\beta + \dots, \\y &= \sqrt{3} - \frac{1}{6}\beta - \frac{\sqrt{3}}{72}\beta^2 + \dots, \\y &= -\sqrt{3} - \frac{1}{6}\beta + \frac{\sqrt{3}}{72}\beta^2 + \dots.\end{aligned}$$

En términos del parámetro original $\varepsilon (= \beta^2)$:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon} + \dots, \\y &= \sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\varepsilon} - \frac{\sqrt{3}}{72}\varepsilon + \dots, \\y &= -\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\sqrt{3}}{72}\varepsilon + \dots.\end{aligned}$$

Finalmente, regresando a la variable original $x (= \varepsilon^p y = \varepsilon^{-1/2} y)$:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3} + \dots, \\x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{72}\sqrt{\varepsilon} + \dots, \\x &= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{72}\sqrt{\varepsilon} + \dots.\end{aligned}$$

De estas expresiones se ve que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ una raíz tiende a $1/3$ y las otras dos tienden, una a $+\infty$ y la otra a $-\infty$.

El método de expansiones asintóticas se puede usar para encontrar soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones algebraicas trascendentes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

2.4 Ecuaciones trascendentes

El método de expansiones asintóticas es útil para analizar la solución de ecuaciones trascendentes en las que aparece un parámetro $\varepsilon \ll 1$, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.3. Consideremos el problema de encontrar la solución x a la ecuación

$$x = \int_0^\pi e^{\varepsilon \operatorname{sen}(x+s)} ds$$

La expansión de Taylor, de la función $e^{\varepsilon \operatorname{sen}(x+s)}$ es

$$e^{\varepsilon \operatorname{sen}(x+s)} = 1 + \operatorname{sen}(x+s)\varepsilon + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(x+s)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\pi (1 + \operatorname{sen}(x+s)\varepsilon + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(x+s)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) ds \\ &= \int_0^\pi ds + \varepsilon \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+s) ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x+s) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \pi - 2\varepsilon \cos(x) + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \pi - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \pi + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \pi - 2\varepsilon \cos(x) + \frac{1}{8} \pi \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Entonces,

$$x = \pi - 2\varepsilon \cos(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Ahora usamos la expansión de Taylor para la función, $\cos(x)$,

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4),$$

para obtener

$$x = \pi - 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Asumimos que x , es de la forma $x \sim x_0 + \varepsilon x_1$. Sustituyendo en la ecuación encontramos que

$$(x_0 + \varepsilon x_1) = \pi - 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}(x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2) + \mathcal{O}(x^4)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

lo que es equivalente a

$$x_0 + \varepsilon x_1 - \pi + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}(x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2) + \mathcal{O}(x^4)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0.$$

Por el teorema fundamental de la teoría de perturbaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x_0 - \pi &= 0 & \text{donde } x_0 &= \pi, \\ x_1 + 2 - x_0^2 &= 0 & \text{donde } x_1 &= \pi^2 - 2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$x \sim \pi + (\pi^2 - 2)\varepsilon.$$

3 Un problema de Cauchy. Expansión Regular

3.1 Introducción

El análisis asintótico y de perturbación ha desempeñado un papel significativo en matemáticas aplicadas y física teórica. En muchos casos, los métodos de perturbación regular no son aplicables, y entonces deben usarse técnicas de perturbación singular. Algunos ejemplos de estas otras técnicas ampliamente utilizadas para las ecuaciones diferenciales ordinarias incluyen los métodos de escalas múltiples, método asintótico de soluciones acopladas, entre otros. Aunque estos métodos son bien conocidos, es necesario considerar en cada caso la pertinencia de la aplicabilidad de cada uno de ellos, ya que un problema particular no puede analizarse usando cualquier método.

De hecho, como se afirma en [8] es probablemente justo decir que la práctica del análisis asintótico tiene algo de arte.

3.2 Analisis Dimensional

Las matemáticas aplicadas tienen que ver con hacer conexiones razonables entre el “mundo real” de objetos físicos y el mundo abstracto de las ecuaciones matemáticas. El elemento

crucial en la fabricación de tal conexión es la noción de medición, que consiste en asignar números a los objetos o fenómenos en el mundo real por varios tipos de procedimientos. El resultado de un proceso de medición es un número, junto con una *unidad*.

Supongamos que hay un sólo objeto, universalmente usado como la longitud estándar, y supongamos que es llamado “barra-pulgadas estándar.” Así, decir que “la altura de una persona es 70” significa que la altura de la persona en cuestión es setenta veces la barra estándar en pulgadas. Entonces no es necesario decir que la altura es *70 pulgadas*, porque se entiende que el número 70 es el cociente de la altura de la persona y la pulgada estándar. Surge la necesidad de distinguir unidades porque hay muchas longitudes estándares (en principio, una cantidad infinita) que pueden ser usadas para medir otras longitudes; por ejemplo la “barra-centímetros estándar.” En términos de la barra-centímetros estándar, la altura de la persona en cuestión es 177.8, y la barra-pulgadas estándar es 2.54 de longitud.

Como es bien sabido, las unidades de medición puede manipularse algebraicamente; por ejemplo

$$70in = (70in) \left(\frac{2.54cm}{1in} \right) = 177.8cm,$$

Supongamos ahora que se propone un nuevo método de medición de altura: La altura de cada persona puede ser medida usando sus nudillos. Supóngase que los nudillos de una persona miden 1.1 pulgadas (2.794 cm) de longitud. Entonces la altura, en el nuevo sistema, es

$$\frac{70in}{1.1in} = \frac{177.8cm}{2.794cm} = 63.63.$$

Las pulgadas se cancelan; los centímetros se cancelan; el número 63.63 es lo mismo a no tener unidades y algunas veces el llamado “número puro” o “longitud adimensional.”

Para evitar la necesidad de hacer referencia al tipo particular de unidades que se están usando en el análisis de un problema dado es conveniente plantear la versión *adimensional* del problema.

Un ejemplo simple que ilustra el concepto de variable adimensional es el siguiente. Supongamos un sistema físico (un resorte, por ejemplo) en el que están involucradas las siguientes variables: el tiempo T (seg), la masa m (kg), la constante de Hooke de un resorte lineal, k (kg/seg²) y la aceleración de la gravedad (m/seg²). Con éstas cuatro variables sólo es posible formar una variable adimensional, que es $\frac{T^2 k}{m}$.

En la siguiente sección se discute cómo hacer el análisis dimensional (es decir, como escribir la versión adimensional) de un problema físico y se encuentran la solución exacta y la expansión asintótica.

3.3 El problema del proyectil

El problema del proyectil, discutido en [9], es un ejemplo ilustrativo de cómo se aplica el método de perturbación regular.

3.3.1 Derivación de la ecuación

Un proyectil es lanzado verticalmente de la superficie terrestre con velocidad V (después todo el combustible se quema en un corto periodo de tiempo). Supongamos que el eje vertical es x^* y que el movimiento del proyectil es descrito por $x^*(t^*)$, donde

$$\left. \begin{aligned} x^*(0) &= 0, \\ \frac{dx^*}{dt^*}(0) &= V. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

El proyectil experimenta una fuerza dada, según la ley de gravitación de Newton, por

$$F(x^*) = -G \frac{Mm}{(R + x^*)^2},$$

donde G es la constante de gravitación, M la masa de la tierra, R el radio de la tierra, y m la masa del proyectil. Como la fuerza en la superficie de la tierra es $F(0) = -mg$, tenemos $g = GM/R^2$, y la ecuación de movimiento se sigue de la segunda ley de Newton:

$$-\frac{R^2 gm}{(R + x^*)^2} = m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}}.$$

Por tanto, la altura del proyectil está gobernada por el problema

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} &= -\frac{R^2 g}{(R + x^*)^2}, \\ x^*(0) &= 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

3.3.2 El problema adimensional

Consideramos el problema en el caso en el que V es muy pequeña comparada con la velocidad de escape de la tierra (esta velocidad, la cual es alrededor de 11,200 m/s, puede ser obtenida a partir de la misma ecuación, como veremos después).

El problema que consideramos es sólo uno de varios casos especiales. Como la velocidad inicial no es muy grande, no se espera que el proyectil suba muy alto. Por lo tanto, dado que $x^* \ll R$,

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} \approx -g.$$

de donde obtenemos

$$x^*(t^*) \approx -\frac{1}{2}gt^{*2} + Vt^*. \quad (3.3)$$

En particular la altura máxima aproximada se sigue de (3.3) tomando en cuenta que el tiempo para alcanzar la máxima altura está dado por

$$-gt^* + V = 0,$$

ó

$$t_{\max} = \frac{V}{g}.$$

Así,

$$x_{\max} \approx -\frac{1}{2}g\left(\frac{V}{g}\right)^2 + V\left(\frac{V}{g}\right) = \frac{1}{2}\frac{V^2}{g}.$$

Las escalas adecuadas para el tiempo y la distancia son, por tanto

$$X = \frac{V^2}{g}, \quad T = \frac{V}{g}. \quad (3.4)$$

Es decir, si definimos las variables adimensionales $x = \frac{x^*}{X}$, $t = \frac{t^*}{T}$, y usamos el hecho de que $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = T \frac{d}{dt^*}$, $\frac{d^2}{dt^2} = T^2 \frac{d^2}{dt^{*2}}$, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{x^*}{X} \right) = \frac{1}{X} \frac{d^2x^*}{dt^2} \\ &= \frac{1}{X} T^2 \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = \frac{1}{X} T^2 \left(-\frac{R^2g}{(R + Xx)^2} \right) \\ &= -\frac{R^2T^2g}{X} \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{1 + Xx/R} \right)^2 = -\frac{1}{(1 + \varepsilon x)^2}, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = \frac{x^*(0)}{X} = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{dx}{dt}(0) = T \frac{dx}{dt^*}(0) = \frac{T}{X} \frac{dx^*}{dt^*}(0) = \frac{T}{X} V = 1,$$

es decir

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{1}{(1 + \varepsilon x)^2}, \\ x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \\ \text{con } \varepsilon &= \frac{V^2}{Rg}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

No es posible expresar la solución en la forma $x = x(t, \varepsilon)$ en términos de funciones elementales (aunque esto no es obvio). Obsérvese también que ε es aproximadamente igual a $2x_{\max}/R$.

3.3.3 Solución por Perturbación Regular

Para resolver el problema (3.5) por perturbación regular, sustituimos la expresión

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (3.6)$$

en la ecuación (3.5):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots = -(1 + \varepsilon x)^{-2} \\ &= - \left[1 + (-2)\varepsilon x + \frac{(-2)(-3)}{2}(\varepsilon x)^2 + \dots \right] \\ &= -1 + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) - 3\varepsilon^2 x_0^2 + \\ &= -1 + \varepsilon 2x_0 + \varepsilon^2(2x_1 - 3x_0^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Igualando los coeficientes de cada potencia de ε esto nos lleva a

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 &= -1, \\ \ddot{x}_1 &= 2x_0, \\ \ddot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_0^2, \\ \ddot{x}_3 &= 2x_2 + 2x_0x_1 - 2x_0(2x_1 + x_0^2) - 2(2x_1 - 3x_0^2)x_0, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

(Para obtener la última ecuación, la expansión en (3.7) tiene que extenderse un paso más).

Para obtener las condiciones iniciales, es suficiente tener en cuenta que

$$\left. \begin{aligned} x_0(0) &= 0, & \dot{x}_0(0) &= 1, \\ x_1(0) &= 0, & \dot{x}_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0, \\ && \vdots & \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Así, las condiciones iniciales del problema son tomadas en consideración sólo en x_0 .

La solución en el orden principal (ε^0) se obtiene de manera inmediata:

$$x_0(t) = t - \frac{1}{2}t^2, \quad (3.10)$$

y sustituyendo (3.10) en la segunda ecuación de (3.8), obtenemos

$$\ddot{x}_1 = 2x_0 = 2 \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right),$$

cuya solución es

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4.$$

Es comun que los procedimientos algebraicos que se requieren para continuar construyendo la solución sean complicados. Por eso es conveniente usar algun programa de cálculo simbólico. Usando **Maple** (ver código en apartado 2 del apéndice) obtenemos

$$x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.11)$$

Usando (3.11), tambien obtenemos la aproximación al tiempo de vuelo para la máxima altura de

$$0 = \frac{d}{dt}x(t) \approx (1 - t) + \varepsilon \left(t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right) + \varepsilon^2 \left(-t^3 + \frac{11}{12}t^4 - \frac{11}{60}t^5 \right). \quad (3.12)$$

Esta es una ecuación de quinto orden, pero como esperamos que la solución t_{\max} sea cercana a 1, tratamos de encontrar una solución de perturbación de la forma

$$t_{\max} = 1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

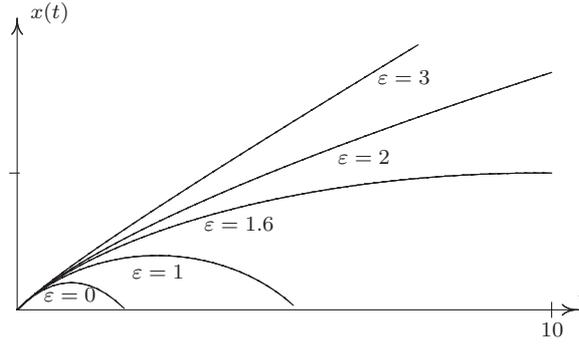


Figura 3.1: Soluciones numéricas (obtenidas con el método Runge-Kutta de cuarto orden) para diferentes valores de ε del problema (3.5).

Sustituimos esta ecuación en (3.12), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2) + \varepsilon(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^2 - \frac{1}{3}\varepsilon(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^3 - \varepsilon^2(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^3 \\ &\quad + \frac{11}{12}\varepsilon^2(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^4 - \frac{11}{60}\varepsilon^2(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \left(-a + \frac{2}{3}\right)\varepsilon + \left(a - b - \frac{4}{15}\right)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Para la aproximación de orden 2 del tiempo máximo de vuelo se tiene, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{5}$, y, entonces

$$t_{\max} = 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.13)$$

Es razonable que el tiempo para la máxima altura es creciente comparado con el valor de 1, ya que la atracción gravitacional es gradualmente más débil a medida que el proyectil suba.

Numéricamente obtenemos soluciones como se muestran en la figura 3.1.

En la figura 3.2 se muestran la solución numérica obtenida con el método Runge-Kutta de cuarto orden (línea punteada) y asintótica, (3.11) (línea sólida) del problema (3.5) para $\varepsilon = 0.4$. El valor de t_{\max} que se muestra en la figura es el que se obtiene de

(3.13). El código para el método Runge-Kutta de cuarto orden se muestra en el apartado 3 del apéndice.

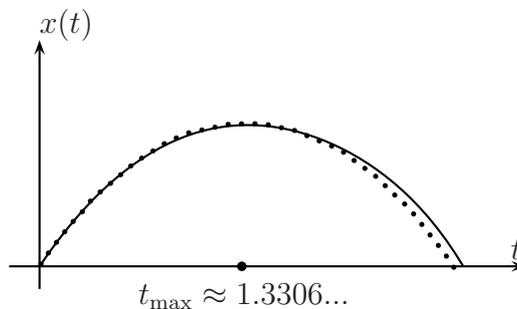


Figura 3.2: Comparación entre la solución numérica (línea punteada) y la solución asintótica con $\varepsilon = 0.4$ del problema (3.5)

3.3.4 Análisis de la Solución.

Como se comentó anteriormente, no es posible escribir la solución de

$$\ddot{x} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon x)^2}, \quad (3.14)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$$

en términos de funciones elementales. Sin embargo, después de multiplicar la ecuación por \dot{x} obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2/2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \varepsilon x} \right),$$

o

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \varepsilon x} = \text{constante.}$$

Esto simplemente establece que el movimiento es *conservativo* en el sentido de que la suma de la energía cinética y potencial es igual a una constante. Usando las condiciones

iniciales, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$, vemos que la constante es $1/2 - 1/\varepsilon$. Esto nos da la ecuación de primer orden

$$\dot{x}^2 = \frac{1 + (\varepsilon - 2)x}{1 + \varepsilon x} = \frac{1}{\varepsilon} \left[(\varepsilon - 2) + \frac{2}{1 + \varepsilon x} \right]. \quad (3.15)$$

Si $\varepsilon < 2$, \dot{x} es 0 para

$$x_{\max} = \frac{1}{2 - \varepsilon}, x(0) = 0.$$

En la figura 3.3 se muestran soluciones típicas de (3.15) para los casos $\varepsilon < 2$ y $\varepsilon > 2$.

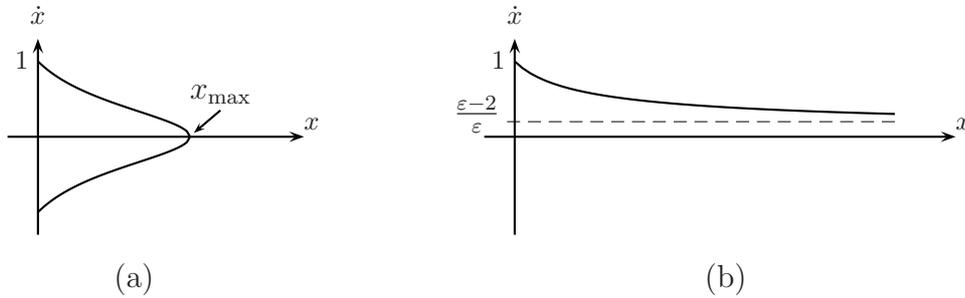


Figura 3.3: Graficas típicas de las curvas solución de la ecuación (3.15)

(a) para $\varepsilon < 2$ (donde $x_{\max} = \frac{1}{2 - \varepsilon}$) y (b) para $\varepsilon > 2$.

Esta es la *máxima altura* (exacta) para el proyectil cuando $\varepsilon < 2$. Si $\varepsilon > 2$, la velocidad será siempre positiva y el proyectil continuará moviéndose indefinidamente. Si $\varepsilon = 2$ tendríamos

$$V = \sqrt{2Rg} \approx 11,170, \text{ m/s} = 40,212 \text{ Km/h}. \quad (3.16)$$

Esto nos da una interpretación alternativa de ε ,

$$\varepsilon = \frac{V^2}{Rg} = 2 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2,$$

donde V_0 es la velocidad de escape definida en la ecuación (3.16).

4 Problema de Valores en la Frontera

4.1 Introducción

El Método de Expansiones Asintóticas Acopladas (llamado, a veces, método de expansión interior y exterior) se aplica a numerosos problemas físicos modelados por ecuaciones diferenciales con condiciones a la frontera singularmente perturbadas en las, que típicamente, la derivada de más alto orden en la ecuación aparece multiplicada por un parámetro pequeño.

Aquí nos interesa el problema de la forma

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + b(x) \frac{dy}{dx} + c(x)y &= 0, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) &= \beta, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

con $b(x) \neq 0$ para $x \in [0, 1]$.

Si la derivada de más alto orden se ignora (es decir, si se elimina el término $\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2}$) se obtendría una reducción singular del orden de la ecuación, excepto en regiones donde la derivada varía rápidamente, en las que el valor grande de la derivada cancela el efecto de multiplicar por un parámetro pequeño. Es decir, un término de la forma $\varepsilon y''$ podría ignorarse, sin cambiar esencialmente la naturaleza de la ecuación diferencial, sólo si la

segunda derivada y'' no fuera grande, porque, en este caso, el producto $\varepsilon y''$ sería pequeño. Pero si el factor y'' es muy grande, entonces la eliminación del término $\varepsilon y''$ llevaría a una reducción singular. Con frecuencia, las regiones de rápido cambio de y'' ocurren en las fronteras del dominio, y por esta razón estas regiones se conocen como *capas frontera*¹.

4.2 Las soluciones externa e interna

En cualquier problema de perturbación en que esté involucrado un parámetro positivo pequeño ε , es natural buscar una solución de la forma

$$y^\varepsilon(x) = a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

En un problema de perturbación singular (como el que nos ocupa en este capítulo), tal expansión puede no ser válida uniformemente en x . (Por ejemplo, esta solución puede dejar de satisfacer alguna de las condiciones de la frontera). La región de no uniformidad (es decir, la región en la que y^ε no es solución del problema de condiciones a la frontera) es, a veces, llamada *región (o, capa) de transición*. La región en la que la expansión y^ε es solución al problema original se llama *región externa*, y a la función $y^\varepsilon(x)$ se le llama *solución externa*.

Si $b(x) > 0$ la región de transición se presenta cerca de la condición inicial (es decir, en $x = 0$), pero si $b(x) < 0$, la región de transición se presenta cerca de la condición terminal ($x = 1$). Si $b(x)$ cambia de signo en el intervalo $[0, 1]$ o $b(x) = 0$ para toda $x \in [0, 1]$, entonces pueden presentarse situaciones muy complicadas, tales como capas de transición en ambos puntos extremos del dominio o en puntos interiores. Estas consideraciones

¹Boundary layers

aparecen, sin demostraciones, en las referencias bibliográficas, por ejemplo en [6] (pp. 417, 418). También se afirma que el problema de valores a la frontera siempre tiene solución única en el caso no oscilatorio. En el caso de coeficientes constantes, la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ es no oscilatoria si y sólo si $b^2 - 4ac > 0$. El problema con coeficientes no constantes $ay'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ (con a constante) es no oscilatorio si $b(x)^2 - 4ac(x) + 2ab'(x) > K$ para alguna $K > 0$ para toda x en el dominio de interés. Como en nuestro caso el dominio es el intervalo compacto $0 \leq x \leq 1$, es suficiente requerir que $b(x)^2 - 4ac(x) + 2ab'(x) > 0$.

Para analizar regiones de la convergencia no uniforme, se introduce una transformación (o cambio de variable) $\xi = \psi(x, \varepsilon)$ que “estira” la región de no uniformidad (cerca de una parte de la frontera en la que las condiciones a la frontera no se satisfacen por y^e). Con el cambio de variable $\xi = \psi(x, \varepsilon)$ el problema original en el plano x - y se transforma en un problema en el plano ξ - y en el que la región de no uniformidad resulta “estirada”.

Por ejemplo, la transformación $\xi = x/\varepsilon$ es comunmente utilizada para estudiar la convergencia cuando la región de no uniformidad se presenta en $x = 0$. Si ξ es fijo y $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces $x \rightarrow 0$, mientras que si $x > 0$ es fijo y $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $\xi \rightarrow \infty$. Si el problema estuviera formulado en el intervalo $A \leq x \leq B$ y la región de no uniformidad se presentara en $x = A$, la transformación sería $\xi = \frac{x - A}{\varepsilon}$.

En términos de la variable ξ , se busca una solución asintótica de la forma

$$y^i = b_0(\xi) + \varepsilon b_1(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

válida para valores de ξ en “región interna” (región donde ocurre la singularidad). Por esta razón a y^i se le llama *expansión interna*. La expansión interna toma en cuenta las

condiciones a la frontera ignoradas por la expansión externa.

En la mayoría de los problemas es posible determinar tanto la expansión interna como la expansión exterior y^i y y^e mediante procedimientos de expansión directa. Puesto que ambas expansiones deben representar la solución del problema original asintóticamente en las diferentes regiones, debe buscarse la manera de “acoplarlas”; es decir, se debe buscar la manera de relacionar formalmente, usando la transformación $\xi = \psi(x, \varepsilon)$, la expansión externa en la región interna (región donde ocurre la singularidad) $(y^e)^i$ y la expansión interna en la región exterior (fuera de donde se presenta la singularidad) $(y^i)^e$. El procedimiento para lograr este acoplamiento con toda la generalidad, puede ser muy complicado. Más aún, en general, no hay una razón a priori para garantizar la existencia de un dominio traslapado (donde es posible acoplar las soluciones externa e interna).

Frecuentemente, es posible obtener una expansión compuesta y^c uniformemente válida en todo el dominio. Esto se consigue haciendo

$$y^c = y^e + y^i - (y^i)^e. \quad (4.2)$$

De manera que, en resumen, el procedimiento para buscar una solución asintótica al problema (4.1) puede describirse como sigue:

1. Verificar que el problema es no oscilatorio;
2. Decidir en cuál extremo del dominio se presenta la región de no uniformidad;
3. Buscar una solución externa $(y^e(x))$;
4. Hacer un cambio de variable ($\xi = \psi(x, \varepsilon)$) para buscar la solución interna $(y^i(\xi))$ en la capa frontera correspondiente;

5. Calcular el término de acoplamiento $((y^e)^i(\xi)$ o $(y^i)^e(x)$);
6. Formar la solución compuesta (o completa) $y^c(x)$.

4.3 Un ejemplo

Consideramos el problema

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

y obtengamos una aproximación asintótica de la solución por el método de expansiones asintóticas acopladas (ver [1], pp. 18-21).

De acuerdo a los comentarios anteriores, este problema es no oscilatorio. Como $b(x) = b = 1 (> 0)$, la región de no uniformidad se presenta en una vecindad de $x = 0$.

4.3.1 La solución externa

Buscamos una expansión externa como una serie de potencias asintóticas

$$y^e(x) = a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

valido para $0 < x \leq 1$.

La expansión externa debe satisfacer asintóticamente la ecuación diferencial y la condición a la frontera en $x = 1$, es decir,

$$\varepsilon(a_0'' + \varepsilon a_1'' + \varepsilon^2 a_2'' + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) + (a_0' + \varepsilon a_1' + \varepsilon^2 a_2' + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) + (a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) = 0,$$

y

$$a_0(1) + \varepsilon a_1(1) + \varepsilon^2 a_2(1) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \beta.$$

Así, las ecuaciones de los coeficientes de las potencias de ε son

$$a_0' + a_0 = 0, \quad a_0(1) = \beta, \quad (4.4)$$

$$a_1' + a_1 + a_0'' = 0, \quad a_1(1) = 0, \quad (4.5)$$

\vdots

Esta sucesión de ecuaciones diferenciales se resuelve iterativamente. Así resolvemos (4.4)

$$a_0(x) = c_1 e^{-x}$$

Aplicando la condición a la frontera encontramos que $c_1 = \beta e$. Así que

$$a_0(x) = \beta e^{1-x}. \quad (4.6)$$

Ahora resolvemos (4.5). Sustituyendo a_0 en la ecuación (4.5) ($a_0(x) = \beta e^{1-x}$, $a_0'(x) = -\beta e^{1-x}$, $a_0''(x) = \beta e^{1-x}$), tenemos

$$a_1'(x) + a_1 + \beta e^{1-x} = 0 \quad (4.7)$$

$$a_1'(x) + a_1(x) = -\beta e^{1-x}$$

Esta es una ecuación lineal de orden 1, cuya solución es $a_1(x) = c_1 e^{-x} - \beta e^{1-x}$. Aplicando las condiciones iniciales tenemos, $c_1 = \beta e$, así que

$$a_1(x) = (1-x)\beta e^{1-x}. \quad (4.8)$$

La solución externa es, entonces,

$$y^e(x) = \beta e^{1-x} + \varepsilon(1-x)\beta e^{1-x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.9)$$

4.3.2 La solución interna

Ahora hacemos el cambio de variable $\xi = x/\varepsilon$ y buscamos una solución en una vecindad de $x = 0$ que satisfaga la condición $y(0) = \alpha$.

En términos de ξ , y usando el hecho de que $\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\xi}$ y $\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2}{d\xi^2}$, la ecuación diferencial en (4.3) es

$$y_{\xi\xi} + y_{\xi} + \varepsilon y = 0.$$

Así, la expansión interna $y^i(\xi)$ debe satisfacer asintóticamente esta ecuación diferencial y la condición inicial en 0 (que es $y(0) = \alpha$); es decir,

$$(b_{0_{\xi\xi}} + \varepsilon b_{1_{\xi\xi}} + \varepsilon^2 b_{2_{\xi\xi}}) + (b_{0_{\xi}} + \varepsilon b_{1_{\xi}} + \varepsilon^2 b_{2_{\xi}}) + \varepsilon(b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0$$

y

$$b_0(0) + \varepsilon b_1(0) + \varepsilon^2 b_2(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \alpha.$$

Entonces,

$$b_{0_{\xi\xi}} + b_{0_{\xi}} = 0, \quad b_0(0) = \alpha, \quad (4.10)$$

$$b_{1_{\xi\xi}} + b_{1_{\xi}} + b_0 = 0, \quad b_1(0) = 0, \quad (4.11)$$

$$b_{2_{\xi\xi}} + b_{2_{\xi}} + b_1 = 0, \quad b_2(0) = 0, \quad (4.12)$$

⋮

Nótese que cada una de las anteriores es una ecuación de orden dos con sólo una condición inicial, de modo que aparecerá una constante arbitraria de integración en cada una de ellas. La solución de (4.10) es

$$b_0(\xi) = c_1 + c_2 e^{-\xi}$$

Aplicando la condición inicial tenemos, $c_2 = \alpha - c_1$; así

$$b_0(\xi) = c_1 + (\alpha - c_1)e^{-1\xi}.$$

Ahora resolvemos (4.11). Sustituimos $b_0(\xi)$ en la ecuación (4.11) para obtener:

$$b_1''(\xi) + b_1'(\xi) = -c_1 - (\alpha - c_1)e^{-1\xi}.$$

La solución de esta ecuación lineal no homogénea de orden 2 es

$$b_1(\xi) = [(\xi + 1)(\alpha - c_1) - c_3]e^{-\xi} - c_1\xi + c_4$$

Aplicando la condición inicial encontramos que $c_4 = c_3 - (\alpha - c_1)$. Así

$$b_1(\xi) = -c_1\xi + (\alpha - c_1)[(\xi + 1)e^{-\xi} - 1] + c_3(1 - e^{-\xi}).$$

donde c_1 y c_3 son constantes indeterminadas. Entonces, la solución interna es

$$y^i(\xi) = [c_1 + (\alpha - c_1)e^{-\xi}] + \varepsilon \left(-c_1\xi + (\alpha - c_1)[(\xi + 1)e^{-\xi} - 1] + c_3(1 - e^{-\xi}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Las dos constantes arbitrarias que aparecen en $y^i(\xi)$ se determinan mediante la condición de acoplamiento de las soluciones, como se hace enseguida.

4.3.3 El Término de Acoplamiento

El término de acoplamiento se obtiene requiriendo que $(y^e)^i = (y^i)^e$. La expresión $(y^e)^i$ significa que debemos escribir la solución externa y^e , que originalmente depende de la variable externa x , en términos de la variable interna ξ . Similarmente, $(y^i)^e$ significa que debemos escribir la solución interna y^i , que originalmente depende de la variable interna ξ , en términos de la variable externa x .

Así,

$$\begin{aligned}
 y^e(x) &= \beta e^{1-x} + \varepsilon(1-x)\beta e^{1-x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \beta e e^{-\varepsilon\xi} + \varepsilon(1-\varepsilon\xi)\beta e e^{-\varepsilon\xi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \beta e e^{-\varepsilon\xi}(1 + \varepsilon(1-\varepsilon\xi)) + \dots \\
 &= \beta e(1-\varepsilon\xi)(1 + \varepsilon - \varepsilon^2\xi) + \dots \\
 &= \beta e(1 + \varepsilon - \varepsilon^2\xi - \varepsilon\xi - \varepsilon^2\xi + \varepsilon^3\xi^2) + \dots
 \end{aligned}$$

Descartamos los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ para obtener;

$$(y^e(x))^i \approx \beta e(1 + \varepsilon(1 - \xi))$$

Análogamente, escribimos la expansión interna en términos de la variable externa x para $x > 0$. Como el término $e^{-\xi}$ es asintóticamente despreciable, encontramos que

$$(y^i(x))^e \approx c_1(1-x) + \varepsilon(c_1 - \alpha + c_3).$$

Para acoplar las soluciones interna y externa (es decir, para que $(y^i(x))^e = (y^e(x))^i$) es necesario que

$$\beta e \left(1 + \varepsilon \left(1 - \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = c_1(1-x) + \varepsilon(c_1 - \alpha + c_3)$$

de donde se obtiene, igualando coeficientes de potencias similares de ε ;

$$c_1 = \beta e, \quad c_3 = \alpha.$$

Resumiendo los cálculos hechos hasta aquí, tenemos :

1. la solución externa, y^e es

$$y^e \approx \beta e e^{-x} + \varepsilon(1-x)\beta e e^{-x},$$

2. la solución interna y^i (en términos de la variable externa x) es

$$y^i \approx [\beta e + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon}] + \varepsilon \left(-\beta e \frac{x}{\varepsilon} + (\alpha - \beta e) [(x/\varepsilon + 1)e^{-x/\varepsilon} - 1] + \alpha(1 - e^{-x/\varepsilon}) \right),$$

3. el término de acoplamiento $(y^i(x))^e$,

$$(y^i(x))^e \approx \beta e(1 - x) + \varepsilon(\beta e)$$

Entonces, tenemos que la aproximación compuesta (4.2), es

$$\begin{aligned} y^c(x) \approx & [\beta e^{1-x} + \varepsilon(1 - x)\beta e^{1-x}] + \left[\beta e + (\alpha_0 - \beta e)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(-\beta e^{-x/\varepsilon} + (\alpha - \beta e) [(x/\varepsilon + 1)e^{-x/\varepsilon} - 1] + \alpha(1 - e^{-x/\varepsilon}) \right) \right] \\ & - [\beta e(1 - x) + \varepsilon(\beta e)] \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$y^c(x) \approx (\alpha - \beta e)(1 + x)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \beta e(e^{-x} + x) - \beta \varepsilon(e^{1-x}(-1 + x) + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}(1 + e))$$

Por ejemplo, supongamos que $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\varepsilon = 0.1$. En la figura 4.1 se muestran la solución interna $y^i(x)$, la solución externa $y^e(x)$ y el término de acoplamiento, $(y^i(x))^e$. en la figura 4.2 se muestran las funciones $y^i(x)$, $y^e(x)$, $(y^i(x))^e$, y la solución compuesta, $y^c(x)$. En la figura 4.3 se muestran la solución asintótica $y^c(x)$ y la solución numérica obtenida con el método del disparo (“shooting method”).

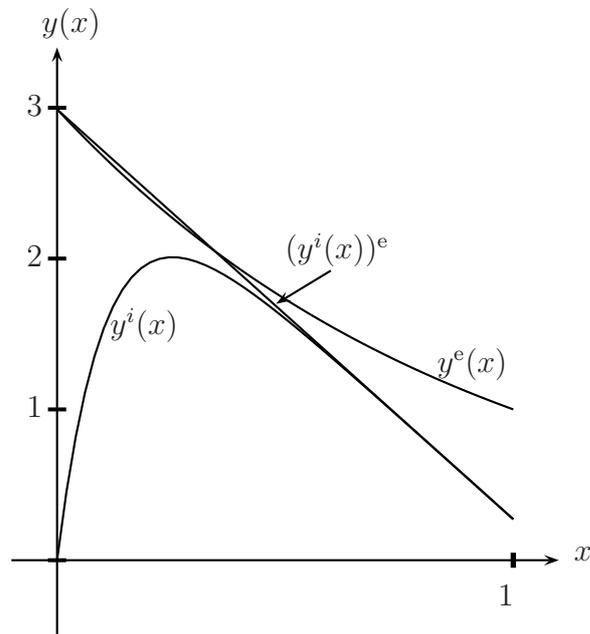


Figura 4.1: Las soluciones interna $y^i(x)$ y externa $y^e(x)$ y el término de acoplamiento $(y^i(x))^e$.

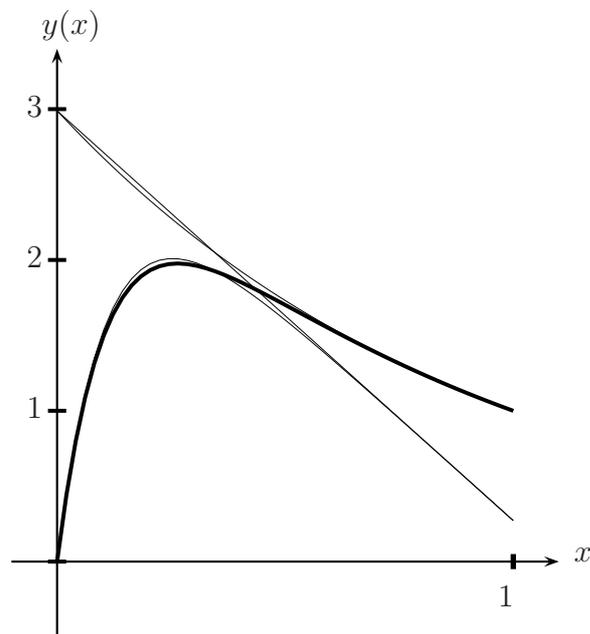


Figura 4.2: $y^i(x)$, $y^e(x)$, $(y^i(x))^e$ y la solución completa $y^c(x)$ (línea gruesa).

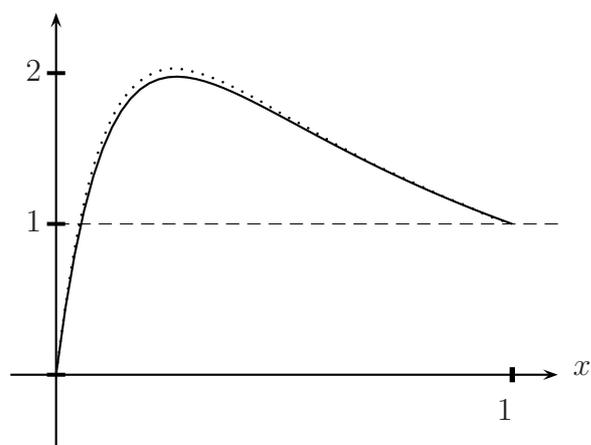


Figura 4.3: Las solución asintótica $y^c(x)$ (sólida) y la numérica (punteada).

5 Problema de Cauchy. Método de Escalas Múltiples

5.1 Introducción

En este capítulo revisamos el método de escalas múltiples. Este método es aplicable a problemas caracterizados por incorporar dos (o más) procesos físicos gobernados cada uno por su propia escala pero actuando simultáneamente ¹. La idea básica en este método es, como su nombre lo indica, introducir varias escalas diferentes (medidas en términos del parámetro pequeño del problema) asociadas cada una con alguna propiedad de la solución. Por ejemplo, en un fenómeno oscilatorio puede ocurrir que sea necesaria una escala para describir la frecuencia y otra para la amplitud de la oscilación. De hecho, iniciaremos nuestra exposición estudiando un problema de este tipo, que es particularmente sencillo pero del que pueden extraerse los aspectos esenciales del método.

Antes de empezar haremos una aclaración. El proceso transforma cualquier ecuación diferencial (ordinaria) en una ecuación diferencial parcial. Esto podría parecer una dificultad; sin embargo debemos anticipar que el problema que resulta no es más complicado que el problema original. Lo que generalmente ocurre es que, en los procesos de integración que aparecen al aplicar el método, en lugar de aparecer constantes arbitrarias aparecen

¹Ver [5], p.116

funciones arbitrarias de las otras variables.

5.2 Un oscilador lineal. Solución Exacta

Empezaremos estudiando un problema para el cual podemos encontrar la solución exacta ². Consideremos la ecuación lineal del oscilador amortiguado, dada por

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x &= 0 \\ x(0; \varepsilon) &= 0, \quad \dot{x}(0; \varepsilon) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

con $\varepsilon \rightarrow 0^+$. La solución exacta de este problema es

$$x_E(t; \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \frac{\text{sen}(t\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (5.2)$$

El subíndice “E” denota “solución exacta”. La solución (5.2) representa una función oscilatoria, con período fijo, cuya amplitud decae, aunque muy lentamente, a cero. La solución correspondiente a $\varepsilon = 0.1$ aparece en la figura 5.1.

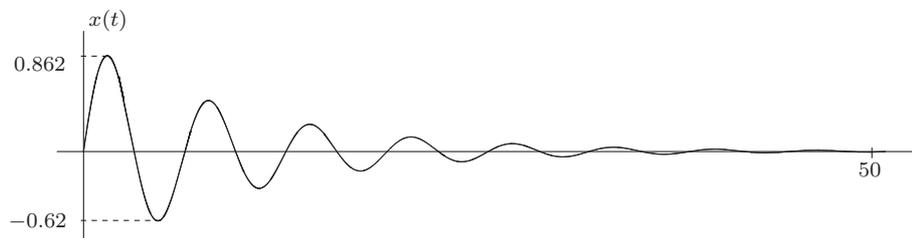


Figura 5.1: Gráfica de la función $x_E(t; \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \frac{\text{sen}(t\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $0 \leq t \leq 50$, para $\varepsilon = 0.1$.

La solución (5.2) tiene tres características, que anotamos a continuación:

(a) es una función oscilatoria cuya frecuencia se puede controlar por medio de

$$T = t\sqrt{1-\varepsilon^2}. \text{ A } T \text{ se le conoce como } \textit{escala rápida};$$

²Ver [7], p.157

- (b) la amplitud de la oscilación decae de acuerdo con $\tau = \varepsilon t$, conocido como *escala lenta*;
- (c) aún si expresamos la solución x_E en términos de T y de τ , la presencia del factor $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ en el denominador hace que sea necesario el uso de una expansión asintótica para analizar la solución cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Estos elementos deben tenerse en cuenta cuando se busca una solución asintótica de (5.1).

Es claro cómo aparecen las dos escalas en (5.2): en términos de T (la escala rápida) y de τ (la escala lenta), podemos escribir la solución en la forma

$$X = e^{-\tau} \frac{\text{sen } T}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad T = t\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \tau = \varepsilon t.$$

La idea central del método de escalas múltiples consiste en formular el problema original en términos de estas dos escalas desde el principio y analizar a $X(T, \tau; \varepsilon)$, como función de dos variables, en vez de $x(t; \varepsilon)$.

Ahora, es claro que T y τ no son independientes (de hecho, nótese que $\varepsilon T = \tau\sqrt{1 - \varepsilon^2}$), de manera que tenemos, aparentemente, una inconsistencia. Pero ésta es sólo aparente. La justificación se puede explicar como sigue. Buscamos una solución asintótica para $X(T, \tau; \varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, como una función cuyo dominio es el espacio de dos dimensiones. El objetivo es obtener una expansión uniformemente válida en $T \geq 0$, $\tau \geq 0$ en el espacio (T, τ) . Como la solución es válida en esta región, debe ser también válida a lo largo de cualquier trayectoria que escojamos en esa región; en particular, será válida a lo largo de la recta $\tau = (\varepsilon/\sqrt{1 - \varepsilon^2})T$, lo que corresponde al hecho de que T y τ están relacionadas. En la figura 5.2 se representa esta interpretación de manera esquemática.

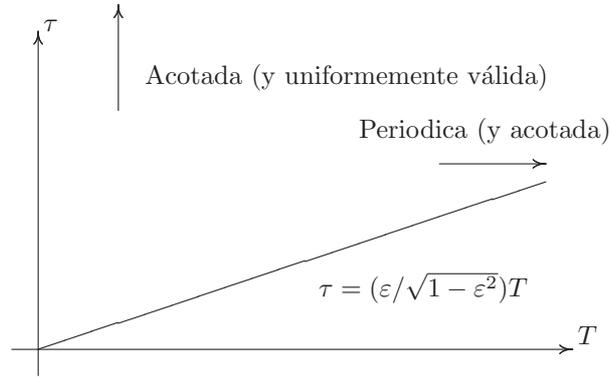


Figura 5.2: Las escalas T y τ , y sus implicaciones en el comportamiento de la solución $X(T, \tau; \varepsilon)$. Si $\tau = \tau_0$ permanece constante, la solución $X(T, \tau_0; \varepsilon)$ debe ser oscilatoria (con respecto a T). Si $T = T_0$ es constante, la amplitud de la solución $X(T_0, \tau; \varepsilon)$ debe ser acotada.

A continuación aplicamos este método para resolver (5.1)

5.2.1 Un Oscilador Lineal. El Método de Escalas Múltiples

Consideremos el problema

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

con condiciones iniciales

$$x(0; \varepsilon) = 0, \quad \dot{x}(0; \varepsilon) = 1. \quad (5.4)$$

Supongamos que T es una función lineal en t y analítica en ε (es decir, que se puede representar mediante una serie de potencias de ε convergente):

$$\tau = \varepsilon t \quad \text{y} \quad T = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n\right) t, \quad (5.5)$$

donde los ω_n 's son constantes, y escribimos

$$x(t; \varepsilon) \equiv X(T, \tau; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(T, \tau), \quad (5.6)$$

donde cada X_n debe ser periódica en T y, esperamos, uniformemente válida cuando $T \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow \infty$. A partir de (5.5) obtenemos el operador

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \right) \frac{\partial}{\partial T} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau},$$

en términos del cual la ecuación (5.3) se escribe como

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \right)^2 X_{TT} + 2\varepsilon \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \right) X_{T\tau} \\ & + \varepsilon^2 X_{\tau\tau} + 2\varepsilon \left\{ \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \right) X_T + \varepsilon X_\tau \right\} + X = 0, \end{aligned}$$

donde “=0” significa cero en todos los ordenes de ε . Cuando sustituímos (5.6) obtenemos la sucesión de ecuaciones

$$X_{0TT} + X_0 = 0, \quad (5.7)$$

$$X_{1TT} + X_1 + 2\omega_1 X_{0T\tau} + 2X_{0T\tau} + 2X_{0T} = 0, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} X_{2TT} + X_2 + (2\omega_2 + \omega_1^2) X_{0TT} + 2\omega_1 (X_{1T\tau} + X_{0T\tau}) \\ + 2X_{1T\tau} + X_{0\tau\tau} + 2(X_{1T} + \omega_1 X_{0T} + X_{0\tau}) = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

etcétera. Las condiciones iniciales (5.4) son

$$X(0, 0; \varepsilon) = 0, \quad \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n \right) X_T(0, 0; \varepsilon) + \varepsilon X_\tau(0, 0; \varepsilon) = 1,$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} X_n(0, 0) &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ X_{0T}(0, 0) &= 1, \\ X_{1T}(0, 0) + \omega_1 X_{0\tau}(0, 0) + X_{0\tau}(0, 0) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ahora, cada uno de estos problemas se puede resolver directamente, de manera sucesiva.

La solución general de (5.7) es

$$X_0(T, \tau) = a_0(\tau) \operatorname{sen} T + b_0(\tau) \operatorname{cos} T = A_0(\tau) \operatorname{sen} (T + \phi_0(\tau)),$$

donde A_0 y ϕ_0 son funciones arbitrarias de τ . Debido a (5.10), se requiere que

$$A_0(0) \operatorname{sen}(\phi_0(0)) = 0 \quad \text{y} \quad A_0(0) \operatorname{cos}(\phi_0(0)) = 1,$$

de donde se obtiene

$$A_0(0) = 1 \quad \text{y} \quad \phi_0(0) = 0. \quad (5.11)$$

Ahora escribimos la ecuación para $X_1(T, \tau)$, (5.8), en la forma

$$X_{1_{TT}} + X_1 = 2\omega_1 A_0 \operatorname{sen} \theta_0 - 2[A_0' \operatorname{cos} \theta_0 - A_0 \phi_0' \operatorname{sen} \theta_0] - 2A_0 \operatorname{cos} \theta_0, \quad (5.12)$$

donde, para abreviar la notación, hemos definido $\theta_0 = T + \phi_0(\tau)$. Pero para que $X_1(T, \tau)$ sea periódico en T , todos los términos en el lado derecho, en $\operatorname{sen} \theta_0$ y $\operatorname{cos} \theta_0$, deben anularse, porque si no es así, al momento de integrar para obtener X_1 , se obtendrían términos como $T \operatorname{sen}(T + \phi_0(\tau))$, los cuales son no periódicos cuando $T \rightarrow \infty$. Para eliminar estos términos *seculares* (es decir, no periódicos) se debe requerir

$$A_0' + A_0 = 0, \quad (5.13)$$

$$(\omega_1 + \phi_0')A_0 = 0. \quad (5.14)$$

Al resolver primero (5.13) y luego (5.14) usando las condiciones iniciales (5.11) obtenemos

$$A_0(\tau) = e^{-\tau} \quad \text{y} \quad \phi_0(\tau) = -\omega_1 \tau.$$

Con estas expresiones para $A_0(\tau)$ y $\phi_0(\tau)$ la solución general de la ecuación (5.12) es

$$X_1(T, \tau) = A_1(\tau) \operatorname{sen}(T + \phi_1(\tau)). \quad (5.15)$$

De manera que hasta este momento tenemos la solución asintótica

$$X(T, \tau; \varepsilon) \sim e^{-\tau} \operatorname{sen}(T - \omega_1 \tau), \quad (5.16)$$

donde A_1, ϕ_1 y ω_1 son todavía desconocidas.

Antes de proceder con el análisis de la ecuación para X_2 observemos que, en (5.16) la componente oscilatoria de la solución depende de

$$T - \omega_1 \tau \sim (1 + \varepsilon \omega_1)t - \omega_1 \varepsilon t = t.$$

Así, en este orden, ω_1 se anula, y podemos hacer $\omega_1 = 0$; esta es una simplificación que se hace con frecuencia y que nosotros adoptaremos en los problemas que estudiaremos. La razón para esta redundancia es muy clara: en la definición de la escala rápida el término $\varepsilon \omega_1 t$ pudo haber sido escrito como $\omega_1 \tau$ y ser así incorporado en la dependencia de τ de la solución. De manera que está permitido hacer $\omega_1 = 0$ desde el principio.

A partir de (5.9) y tomando $\omega_1 = 0$, la ecuación para X_2 es

$$X_{2TT} + X_2 = (2\omega_2 A_0 - 2A_0' - A_0'') \sin T - 2(A_1' \cos \theta_1 - A_1 \phi_1' \sin \theta_1) - 2A_1 \cos \theta_1,$$

donde $\theta_1 = T + \phi_1(\tau)$. Para hacer visibles todos los términos que generan un comportamiento secular (que son $\sin T$ y $\cos T$) escribimos

$$\begin{aligned} X_{2TT} + X_2 &= (2\omega_2 A_0 - 2A_0' - A_0'') \sin T \\ &- 2(A_1 + A_1')(\cos T \cos \phi_1 - \sin T \sin \phi_1) + 2A_1 \phi_1'(\sin T \cos \phi_1 + \cos T \sin \phi_1). \end{aligned}$$

Se ve entonces que $X_2(T, \tau)$ es periódica en T si

$$A_0'' + 2A_0' - 2\omega_2 A_0 - 2(A_1 + A_1') \sin \phi_1 - 2A_1 \phi_1' \cos \phi_1 = 0, \quad (5.17)$$

$$(A_1 + A_1') \cos \phi_1 - A_1 \phi_1' \sin \phi_1 = 0, \quad (5.18)$$

con condiciones iniciales (de (5.10))

$$A_1(0) \sin \phi_1(0) = 0, \quad A_1(0) \cos \phi_1(0) = 0,$$

de manera que

$$A_1(0) = 0 \quad \text{con} \quad \phi_1(0) \text{ arbitrario.} \quad (5.19)$$

La ecuación (5.18) puede escribirse en la forma

$$(A_1 \cos \phi_1)' + A_1 \cos \phi_1 = 0,$$

de donde obtenemos

$$A_1(\tau) \cos \phi_1(\tau) = C_1 e^{-\tau},$$

donde C_1 es una constante arbitraria. Pero por (5.19) tenemos

$$A_1(\tau) \cos \phi_1(\tau) = 0. \quad (5.20)$$

De manera similar, la ecuación (5.17) se puede escribir en la forma

$$(A_1 \sen \phi_1)' + A_1 \sen \phi_1 = \frac{1}{2} A_0'' + A_0' - \omega_2 A_0 = - \left(\frac{1}{2} + \omega_2 \right) e^{-\tau}$$

y, al integrar esta ecuación, vemos que la solución $A_1 \sen \phi_1$ contendrá el término $\tau e^{-\tau}$ a menos que $\omega_2 = -1/2$. Es así como debemos tomar el valor de ω_2 para garantizar la uniformidad de la solución cuando $\tau \rightarrow \infty$ (pues este segundo término crecería como τ en relación al primero). De manera que lo que nos queda es

$$A_1(\tau) \sen \phi_1(\tau) = 0,$$

y, tomando en cuenta (5.20), tenemos que $A_1(\tau) \equiv 0$ (y la $\phi_1(0)$ arbitraria ahora no tiene importancia). De manera que tenemos la solución

$$X(T, \tau; \varepsilon) = e^{-\tau} \sen T + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

con $T \sim \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) t$

Hemos usado este ejemplo para ilustrar el funcionamiento del método de escalas múltiples y sus principales aspectos, entre los que se pueden mencionar los siguientes.

- (a) En este ejemplo se ve cómo la transformación de una ecuación diferencial ordinaria en una ecuación diferencial parcial no introduce dificultades insalvables.
- (b) Se deben imponer condiciones de periodicidad y uniformidad en todos los órdenes y de aquí se obtienen las condiciones para calcular la solución única en el orden previo. De hecho, en el método de escalas múltiples, el principio de eliminar términos *seculares* es fundamental.
- (c) Como se vió en el ejemplo, se tiene cierta libertad en la elección de la escala rápida que permite eliminar también los términos no uniformes.

La cuestión que queda en este contexto de ecuaciones diferenciales ordinarias es cómo se aplica el método cuando no se dispone de la solución exacta (de manera que no se tiene una guía sobre la forma de la solución). A continuación analizamos este aspecto, a través de un ejemplo.

5.3 La Ecuación de Duffing con Amortiguamiento

Consideremos el problema

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(2\lambda\dot{x} - x^3) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.21)$$

con condiciones iniciales

$$x(0; \varepsilon) = 1, \quad \dot{x}(0; \varepsilon) = 0, \quad (5.22)$$

donde $\varepsilon \rightarrow 0^+$ y $\lambda (> 0)$ es una constante independiente de ε . Buscamos una solución en la forma

$$x(t; \varepsilon) \equiv X(T, \tau; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(T, \tau),$$

donde

$$T \sim \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n\right) t, \quad \tau = \varepsilon t.$$

Nótese que, de acuerdo a nuestras observaciones anteriores, hemos omitido el término $\varepsilon \omega_1 t$. Al sustituir en la ecuación (5.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n\right)^2 X_{TT} + 2\varepsilon \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n\right) X_{T\tau} + \varepsilon^2 X_{\tau\tau} + X \\ + 2\varepsilon \lambda \left\{ \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n\right) X_T + \varepsilon X_\tau \right\} - \varepsilon X^3 = 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$X_{0TT} + X_0 = 0; \quad (5.23)$$

$$X_{1TT} + X_1 + 2X_{0T\tau} + 2\lambda X_{0T} - X_0^3 = 0, \quad (5.24)$$

$$X_{2TT} + X_2 + 2\omega_2 X_{0TT} + 2X_{1T\tau} \quad (5.25)$$

$$+ X_{0\tau\tau} + 2\lambda(X_{1T} + X_{0\tau}) - 3X_0^2 X_1 = 0,$$

etcétera. De (5.22) obtenemos las condiciones iniciales para los términos hasta $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$:

$$X_0(0, 0) = 1, \quad X_n(0, 0) = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.26)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{0T}(0, 0) &= 0, \\ X_{1T}(0, 0) + X_{0\tau}(0, 0) &= 0, \\ X_{2T}(0, 0) + \omega_2 X_{0T}(0, 0) + X_{1\tau}(0, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

La solución de (5.23) con condiciones (5.26) y (5.27) es

$$X_0(T, \tau) = A_0(\tau) \cos(T + \phi_0(\tau)) \quad \text{con } A_0(0) = 1 \quad \text{y} \quad \phi_0(0) = 0. \quad (5.28)$$

La ecuación para (5.23) es

$$\begin{aligned} X_{1_{TT}} + X_1 &= 2(A_0' \operatorname{sen} \theta_0 + A_0 \phi_0' \cos \theta_0) - 2\lambda A_0 \operatorname{sen} \theta_0 - A_0^3 \cos^3 \theta_0 \\ &= 2(A_0' + \lambda A_0) \operatorname{sen} \theta_0 + \left(2A_0 \phi_0' - \frac{3}{4} A_0^3\right) \cos \theta_0 - \frac{1}{4} A_0^3 \cos 3\theta_0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde $\theta_0 = T + \phi_0(\tau)$, con condiciones iniciales

$$X_1(0, 0) = 0, \quad X_{1_T}(0, 0) = -A_0'(0). \quad (5.30)$$

La función $X_1(T, \tau)$ es periódica en T sólo si

$$A_0' + \lambda A_0 = 0 \quad \text{y} \quad \phi_0' = \frac{3}{8} A_0^2.$$

Tomando en cuenta (5.28) obtenemos

$$A_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}, \quad \phi_0(\tau) = \frac{3}{16\lambda} (1 - e^{-2\lambda\tau}). \quad (5.31)$$

Entonces, la solución de (5.29) es

$$X_1(T, \tau) = A_1(\tau) \cos(T + \phi_1(\tau)) + \frac{1}{32} e^{-3\lambda\tau} \cos(3(T + \phi_0(\tau))),$$

con

$$A_1(0) \cos \phi_1(0) = -\frac{1}{32}, \quad A_1(0) \operatorname{sen} \phi_1(0) = -\lambda.$$

De manera similar se hace el análisis de la ecuación (5.24) para $X_2(T, \tau)$, pero los cálculos son mucho más laboriosos. La solución hasta este orden es

$$x \sim e^{-\lambda\tau} \cos \left[t + \frac{3}{16\lambda} (1 - e^{-2\lambda\tau}) \right] \quad (5.32)$$

$$+ \varepsilon \left\{ A_1(\tau) \cos(t + \phi_1(\tau)) + \frac{1}{32} e^{-3\lambda\tau} \cos \left[3t + \frac{9}{16\lambda} (1 - e^{-2\lambda\tau}) \right] \right\} \quad (5.33)$$

5.4 Un Oscilador Forzado

Como ilustración adicional del método de escalas múltiples, resolvemos el siguiente problema.

La elongación $y(t)$ de un resorte cuya constante de restitución es ε , al que se ha sujetado una masa unitaria, en un medio que no ejerce fricción sobre el que actúa una fuerza externa de magnitud variable, $f(t) = \varepsilon \sin t$,

$$\begin{aligned} y''(t) + \varepsilon y(t) &= \varepsilon \sin(t), \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Buscamos la solución de la forma:

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{5.35}$$

Sustituyendo (5.35) en (5.34) tenemos que

$$(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) = \varepsilon \sin(t)$$

y

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 1 \quad y \quad y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) + \varepsilon^2 y_2'(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0$$

El procedimiento para encontrar los términos de la expansión se sigue del argumento usado para resolver ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones que surgen para las diferentes potencias de ε son las siguientes

$$y_0''(t) = 0, \quad y_0(0) = 1, y_0'(0) = 0 \tag{5.36}$$

$$y_1''(t) + y_0(t) = \sin(t), \quad y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0 \tag{5.37}$$

$$y_2''(t) + y_1(t) = 0, \quad y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0. \tag{5.38}$$

La solución del sistema (5.36) es $y_0(t) = 1$. Ahora resolvemos (5.38). Sustituyendo y_0 en la ecuación (5.38)

$$y_1''(t) = \text{sen}(t) - 1$$

así

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \cos(t) - t + c_1 \\ y_1(t) &= -\text{sen}(t) - \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2 \end{aligned}$$

aplicando condiciones iniciales tenemos, $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$. Así que

$$y_1(t) = t - \frac{1}{2}t^2 - \text{sen}(t).$$

Resolvemos el sistema (5.38). Sustituyendo y_1 en la ecuación (5.38)

$$y_2''(t) = -t + \frac{1}{2}t^2 + \text{sen}(t)$$

así

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cos(t) + c_1 \\ y_2(t) &= -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \text{sen}(t) + c_1t + c_2 \end{aligned}$$

Aplicando condiciones iniciales tenemos, $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$. Así que

$$y_2(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \text{sen}(t)$$

Encontramos que;

$$y(t) = 1 + \left(t - \frac{1}{2}t^2 - \text{sen}(t) \right) \varepsilon + \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \text{sen}(t) \right) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Vemos que aparecen términos seculares. Consideramos la variable lenta $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$. Si escribimos nuestra expansión en términos de ésta, algunos de los términos cambiarán de orden.

$$\begin{aligned}
y &= 1 + \left(t - \frac{1}{2}t^2 - \operatorname{sen}(t)\right) \varepsilon + \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \operatorname{sen}(t)\right) \varepsilon^2 \\
&= 1 + \varepsilon t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2 - \varepsilon \operatorname{sen}(t) + \varepsilon^2 t - \frac{1}{6}\varepsilon^2 t^3 + \frac{1}{24}\varepsilon^2 t^4 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}(t) \\
&= 1 + \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\varepsilon - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \varepsilon - \varepsilon \operatorname{sen}(t) + \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\varepsilon^2 - \frac{\left(\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^3}{6}\varepsilon^2 + \frac{\left(\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4}{24}\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}(t) + \dots \\
&= 1 + \tau\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{2}\tau^2 - \varepsilon \operatorname{sen}(t) + \tau\varepsilon^{\frac{3}{2}} - \frac{\tau^3}{6}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\tau^4}{24} - \varepsilon^2 \operatorname{sen}(t) + \dots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 + \dots\right) + \left(\tau - \frac{1}{6}\tau^3 + \dots\right) \sqrt{\varepsilon} + (\operatorname{sen}(t) + \dots) \varepsilon + \dots
\end{aligned}$$

Esto sugiere que nuestra solución depende de ambos de t y del tiempo lento τ . Buscaremos una solución en términos de estas dos variables

$$y = z(t, \tau)$$

y escribimos la ecuación diferencial parcial para z usando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} \\
\frac{d}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial t^2} + 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau^2}
\end{aligned}$$

Encontramos que el problema (5.34) se convierte en

$$\left. \begin{aligned}
z_{tt} + 2\sqrt{\varepsilon}z_{t\tau} + \varepsilon z_{\tau\tau} + \varepsilon z &= \varepsilon \operatorname{sen}(t), \\
z(0, 0) = 1, \text{ y } z_t(0, 0) + \sqrt{\varepsilon}z_\tau(0, 0) &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Ahora buscaremos una solución z de la forma

$$z = z^0 + \sqrt{\varepsilon}z^1 + \varepsilon z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \quad (5.40)$$

Sustituyendo (5.40) en (5.39), tenemos

$$(z_{tt}^0 + \sqrt{\varepsilon}z_{tt}^1 + \varepsilon z_{tt}^2 + \dots) + 2\sqrt{\varepsilon}(z_{t\tau}^0 + \sqrt{\varepsilon}z_{t\tau}^1 + \varepsilon z_{t\tau}^2 + \dots) + \varepsilon(z_{\tau\tau}^0 + \sqrt{\varepsilon}z_{\tau\tau}^1 + \varepsilon z_{\tau\tau}^2 + \dots) + \varepsilon(z^0 + \sqrt{\varepsilon}z^1 + \varepsilon z^2 + \dots) = \varepsilon \operatorname{sen}(t)$$

y

$$z^0(0,0) + \sqrt{\varepsilon}z^1(0,0) + \varepsilon z^2(0,0) + \dots = 1$$

$$z_t^0(0,0) + \sqrt{\varepsilon}z_t^1(0,0) + \varepsilon z_t^2(0,0) + \dots + \sqrt{\varepsilon}(z_\tau^0(0,0) + \sqrt{\varepsilon}z_\tau^1(0,0) + \varepsilon z_\tau^2(0,0) + \dots) = 0$$

Los problemas que resultan para las distintas potencias de ε son

$$z_{tt}^0 = 0, \quad z^0(0,0) = 1, \quad z_t^0(0,0) = 0 \quad (5.41)$$

$$z_{tt}^1 + 2z_{t\tau}^0 = 0, \quad z^1(0,0) = 0, \quad z^1(0,0) + z_\tau^0(0,0) = 0 \quad (5.42)$$

$$z_{tt}^2 + 2z_{t\tau}^1 + z_{\tau\tau}^0 + z^0 = \operatorname{sen}(t), \quad z^2(0,0) = 0, \quad z^2(0,0) + z_\tau^1(0,0) = 0. \quad (5.43)$$

La solución de la ecuación diferencial en (5.41) es

$$z^0 = a(\tau)t + b(\tau)$$

Usando las condiciones iniciales tenemos, $b(0) = 1$ y $a(0) = 0$. Así,

$$z^0(t, \tau) = a(\tau)t + b(\tau), \quad \text{con } a(0) = 0 \text{ y } b(0) = 1.$$

Tenemos ahora el problema de determinar $a(\tau)$ y $b(\tau)$. Tomamos la ecuación del siguiente orden, (5.42). Sustituyendo z^0 en la ecuación (5.42) tenemos;

$$z_{tt}^1 = -2z_{t\tau}^0 = -2a'(\tau)$$

$$z^1(0,0) = 0, \quad z_t^1 = -z_\tau^0(0,0) = -b'(\tau) = -b'(0)$$

asi $z^1 = -t^2 a'(\tau) + c(\tau)t + d(\tau)$, y aplicando condiciones iniciales encontramos que $d(0) = 0$ y $c(0) = -b'(0)$. Así que

$$z^1(t, \tau) = -t^2 a'(\tau) + c(\tau)t + d(\tau), \text{ con } d(0) = 0, \text{ y } c(0) = -b'(0).$$

Notemos que el término $\sqrt{\varepsilon}z^1$ en (5.40) es

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon}z^1 &= (-t^2 a'(\tau) + c(\tau)t + d(\tau))\sqrt{\varepsilon} \\ &= -\sqrt{\varepsilon}t^2 a'(\tau) + \sqrt{\varepsilon}tc(\tau) + \sqrt{\varepsilon}d(\tau) \\ &= -\tau t a'(\tau) + \tau c(\tau) + \sqrt{\varepsilon}d(\tau), \end{aligned}$$

donde, en la segunda igualdad, se ha usado el hecho de que $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$. Para eliminar los términos seculares debemos requerir que $a'(\tau) = 0$ y $c(\tau) = 0$. Como $a(0) = 0$ concluimos que $a(\tau) = 0$. Hasta ahora tenemos

$$\begin{aligned} z^0 &= b(\tau), \text{ con } b(0) = 1, b'(0) = 0, \\ z^1 &= d(\tau), \text{ con } d(0) = 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que, en orden $\sqrt{\varepsilon}$, la solución siempre depende de una variable lenta en el tiempo. Ahora el termino del siguiente orden sería la ecuación (5.43). Sustituyendo z^0 y z^1 en la ecuación (5.43) tenemos;

$$\left. \begin{aligned} z_{tt}^2 &= \text{sen}(t) - b''(\tau) - b(\tau) \\ z^2(0, 0) &= 0, \quad z_t^2(0, 0) = -z_\tau^1(0, 0) = -d'(0) \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$z^1 = -\text{sen}(t) - \frac{1}{2}(b''(\tau) + b(\tau))t^2 + e(\tau)t + f(\tau).$$

Aplicando las condiciones iniciales tenemos, $f(0) = 0$ y $e(0) = 1 - d'(0)$. Así que

$$z^2(t, \tau) = -\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}(b''(\tau) + b(\tau))t^2 + e(\tau)t + f(\tau), \text{ con } f(0) = 0, e(0) = 1 - d'(0).$$

Nuevamente notamos que el término $\varepsilon z^2(t, \tau)$ de la solución (5.40) es

$$\begin{aligned} \varepsilon z^2(t, \tau) &= \varepsilon \left[-\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}(b''(\tau) + b(\tau))t^2 + e(\tau)t + f(\tau) \right] \\ &= -\varepsilon \operatorname{sen}(t) - \varepsilon \frac{1}{2}(b''(\tau) + b(\tau))t^2 + \varepsilon e(\tau)t + \varepsilon f(\tau) \\ &= -\varepsilon \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}(b''(\tau) + b(\tau))\tau^2 + \sqrt{\varepsilon}e(\tau)\tau + \varepsilon f(\tau). \end{aligned}$$

Como los términos $-\frac{1}{2}(b''(\tau) + b(\tau))\tau^2 + \sqrt{\varepsilon}e(\tau)\tau$ son seculares, debemos requerir que

$$b''(\tau) + b(\tau) = 0,$$

$$e(\tau) = 0.$$

Como las condiciones iniciales para $b(\tau)$ son $b(0) = 1$ y $b'(0) = 0$, encontramos que $b(\tau) = \cos \tau$. Así tenemos, $z^0(t, \tau) = \cos(\tau)$.

Nota: recordemos que $z^0 = b(\tau)$. Como

$$z^1(t, \tau) = d(\tau), \text{ con } d(0) = 0, d'(0) = 1,$$

entonces

$$z^1 = \operatorname{sen}(\tau)$$

y

$$z^2 = -\operatorname{sen}(t) + f(\tau), \text{ con } f(0) = 0.$$

Entonces,

$$z^2 = -\operatorname{sen}(t).$$

Continuando con este procedimiento tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(\tau) + \operatorname{sen}(\tau)\sqrt{\varepsilon} - \operatorname{sen}(t)\varepsilon + \operatorname{sen}(\tau)\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \cos(\sqrt{\varepsilon}t) + \sqrt{\varepsilon}\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}t) - \varepsilon\operatorname{sen}(t) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.44)$$

En la figura 5.3 se muestran la solución numérica al problema (5.34) obtenida con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, cuyo código aparece en el apartado 3 de apéndice, así como la gráfica de la solución asintótica (5.44), para $\varepsilon = 0.6$.

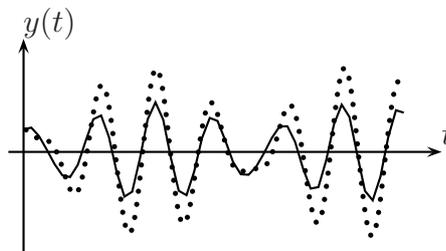


Figura 5.3: La solución numérica (línea punteada) y la solución asintótica con $\varepsilon = 0.6$ del problema (5.34)

Apéndice. Códigos Maple

1

Con el siguiente código Maple se calculan los coeficientes de la expansión asintótica (1.4). Los datos de entrada son: el número N de coeficientes que se desean calcular, la función $f(x)$, a la que se quiere encontrar su expansión asintótica y la sucesión asintótica $\phi_n(x)$.

```
> restart;
```

Este código calcula los coeficientes de la serie asintótica

para la función $f(x)$ basada en la suc. asintótica

$\{\phi_n(x)\}$ para N términos.

```
> N:=30;
```

```
> f:=x->sin(3*x);
```

```
> for n from 1 to N do phi[n](x):=x^n od:
```

```
> a[1]:=limit(f(x)/phi[1](x),x=0);
```

```
> for m from 2 to N do
```

```
  a[m]:=limit((f(x)-add(a[k]*phi[k](x),k=1..m-1))/phi[m](x),x=0) od:
```

```
> SerieAsintotica:=add(a[k]*phi[k](x),k=1..m);
```

2

Con respecto al problema (3.5), una vez conocidas las funciones $x_0(t) = t - \frac{1}{2}t^2$ y $x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4$, para encontrar $x_2(t)$ necesitamos resolver la tercera ecuación en (3.8) con condiciones iniciales dadas en (3.9) (tercera línea). Esto se consigue con el siguiente código

```
> restart:
```

```
> x[0]:=t->t-t^2/2; x[1]:=t->t^3/3-t^4/12;
```

```
> ode := diff(x[2](t),t,t)-2*x[1](t)+3*x[0](t)^2=0;
```

El coeficiente de ϵ^2 es:

```
> dsolve( {ode, x[2](0)=0, D(x[2])(0)=0});
```

$x(t)$ es, entonces,

```
>x:=x[0](t+epsilon*x[1](t+epsilon^2*(-11/360*t^6+11/60*t^5-1/4*t^4));
```

3

Código Maple para el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

```
> restart:
```

```
Este programa es el Runge-Kutta de cuarto orden para
sistema no autónomo  $dy/dt = f(t,y)$ .
```

```
Si  $y$  es variable vectorial de dimensión  $n$ , entonces
```

```
 $y = \text{matrix}([y[1], y[2], y[3], y[n]])$ 
```

```
> with(linalg):
```

```
> epsilon:=.6;
```

```
> f := proc(t,y1,y2)
```

```
description "la función vectorial en el lado derecho de
la ecuación diferencial";
```

```
matrix([[y2],[epsilon*(sin(t)-y1)])])
```

```
> end proc;
```

```
Los valores límite de la var. independiente  $x$ , el número
de pasos  $N$  y el tamaño del paso  $h$ .
```

```
> tmin:=0; tmax:=50; N:=1000.; h:=(tmax-tmin)/N;
```

```
Las condiciones iniciales :
```

```
> y[0]:=matrix([[1],[0]]);
```

```
El algoritmo R-K4:
```

```
> for i from 0 to N do
```

```
k1:=scalarmul(f(i*h,y[i][1,1],y[i][2,1]),h):
```

```
k2:=scalarmul(f(i*h+h/2,y[i][1,1]+k1[1,1]/2,y[i][2,1]+k1[2,1]/2),h):
k3:=scalarmul(f(i*h+h/2,y[i][1,1]+k2[1,1]/2,y[i][2,1]+k2[2,1]/2),h):
k4:=scalarmul(f(i*h,y[i][1,1]+k3[1,1],y[i][2,1]+k3[2,1]/2),h):
k23:=matadd(k2,k3):
k14:=matadd(k1,k4):
k:=matadd(k14,scalarmul(k23,2)):
y[i+1]:=matadd(y[i],scalarmul(k,1/6)): od:
> for i from 0 to N do t[i]:=i*h; z[i]:=y[i][1,1] od:
> for k from 0 to N-1 do printf("\(%4.2f,%4.2f)", t[k],z[k]) od;
```

Conclusión

En este trabajo hemos analizado algunos métodos de perturbación, tanto regular como singular. Hemos visto cómo, en matemáticas aplicadas, surgen de manera frecuente, problemas para los que no es sencillo (y, a veces, no es posible) encontrar la solución exacta. Si en la formulación del problema aparece un parámetro pequeño, entonces es posible intentar usar la teoría de perturbaciones. Los problemas de tipo singular tienen diferentes variantes que sugieren el uso de diferentes métodos, como los que aquí estudiamos, tales como el método de escalas múltiples y el método de expansiones asintóticas acoplados.

Aunque estos métodos son bien conocidos, es necesario considerar en cada caso la pertinencia de la aplicabilidad de cada uno de ellos, ya que un problema particular no puede analizarse usando cualquier método.

La teoría de perturbaciones es una área muy extensa de las matemáticas aplicadas, en la que la bibliografía es muy extensa y especializada. En este trabajo no hemos limitado a estudiar sólo algunos de los conceptos y métodos básicos, que son los más usuales en las aplicaciones prácticas.

Bibliografía

- [1] O'Malley, Robert E. *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York, 1974
- [2] Keener, J. P., *Principles and Techniques of Applied Mathematics, Transformation and Approximation*, Addison Wesley Publication Company, 1988.
- [3] Holmes, Mark H., *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag New York, Inc., 1995.
- [4] Olver, F. W. J., *Asymptotics and special functions*, New York, Academic Press, 1974
- [5] Hinch, E. J., *Perturbation Methods*, Cambridge University Press, 1991.
- [6] Murdock, James A., *Perturbations : theory and methods*, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999, Philadelphia, PA, U.S.A.
- [7] Johnson, R. S., *Singular Perturbation Theory, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*, Springer, 2005.
- [8] *Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory*, Lin-Yuan Chen, Nigel Goldenfeld, and Y. Oono.

- [9] *Regular Perturbation and the Projectile Problem*, H.E. Krogstad, IMF 2002
- [10] *Mathematical methods in the physical sciences* , Boas, M. L., 3a edición, New York, Editorial John Wiley, 2006
- [11] <http://mathworld.wolfram.com/LandauSymbols.html>