Teoremas de Punto Fijo y la Existencia de Equilibrios de Nash para Juegos no Cooperativos

José Miguel Pérez Urquidi

29 de Febrero del 2008

Contenido

Introducción

A diario nos enfrentamos a problemas o situaciones en las que tenemos que tomar decisiones. Tenemos varias formas de afrontar el problema y sin importar cómo razonemos o qué criterio usemos, al final tendremos que decidir que acción realizar. Esta decisión tendrá para nosotros consecuencias favorables o perjudiciales (o tal vez nos sea indiferente).

También, es común observar situaciones de conflicto entre varias personas, empresas, países, etc. De la misma forma, cada uno de los participantes tendrá que elegir una acción, y las consecuencias para cada uno de ellos dependerán no sólo de la acción propia, sino también de las acciones tomadas por los demás participantes. A veces, será posible cooperar entre algunos de los participantes para obtener mejores beneficios y otras veces no.

Una persona no está limitada a tomar siempre la misma acción ante una situación en particular, en algunas ocasiones se decidirá por una acción y en otras elegirá una diferente. La forma de decidir qué acción llevar a cabo se conoce como estrategia.

Ejemplos hay muchos, desde la más simple tarea cotidiana hasta situaciones complicadas poco frecuentes. Un ejemplo es decidir si se va al cine o al teatro con un amigo, o si mejor van a distintos lugares por separado. La situación supone un sentido de recompensa o satisfacción distinta para cada uno. Otro ejemplo es el precio que se le asigna a un artículo en un supermercado. Al asignar un precio alto se pierden clientes ante la competencia pero se gana más por cada artículo vendido, mientras que al asignar un precio bajo la cantidad de ventas es mayor pero con una ganancia menor. También son ejemplos, la cantidad de petróleo que se extrae por una compañía, la decisión que se toma al votar por un partido político y la cantidad de artículos producidos por una fábrica.

El área de las matemáticas que analiza y modela este tipo de situaciones se llama Teoría de Juegos y el objeto de estudio de esta área son los llamados juegos. Los juegos tradicionales entre personas, son posiblemente los ejemplos más fáciles de visualizar, especialmente los juegos sencillos de apuestas. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, el concepto de jugador no se restringe a una persona, éste puede ser una compañía, una fábrica, una nación u otra entidad. Entre las situaciones de mayor interés para su estudio y análisis en esta teoría están los conflictos económicos, políticos y sociales.

En este trabajo nos enfocamos en una clase muy especial de juegos: aquellos donde no hay una cooperación entre los participantes, la cantidad de jugadores es finita y el repertorio de acciones para cada uno también es finito. Estos juegos son llamados juegos finitos no cooperativos de N personas.

En Teoría de Juegos, un concepto muy importante es el de equilibrio del juego. Para dar una idea intuitiva de equilibrio, imagínese las realizaciones sucesivas de un juego entre dos personas. Cada uno aplica su estrategia y después se les da la oportunidad de cambiar de estrategia si lo desean. Es posible que uno o el otro quiera cambiar su estrategia, incluso puede ser que ambos lo deseen. Este proceso puede continuar indefinidamente, aplicando las nuevas estrategias, cambiándolas otra vez y así sucesivamente. Si en lugar de eso, las estrategias fueran tales que ninguno quisiera cambiarlas, entonces ambos utilizarían las mismas estrategias una y otra vez. Sería lógico considerar que los jugadores están en un estado de equilibrio. La pregunta obligada es si, dada una situación, existe un equilibrio.

En 1950, el matemático John Nash introdujo formalmente el concepto de equilibrio, para juegos finitos no cooperativos de N personas y demostró la existencia de dichos equilibrios para esta clase de juegos (ver [11]). Estos equilibrios son conocidos hoy en día como equilibrios de Nash. En este trabajo probamos la existencia de equilibrios basándonos en la demostración original de Nash, la cual hace uso del Teorema de Brouwer.

El Teorema de Brouwer establece que, para ciertas condiciones sobre el dominio, una función continua de un conjunto en sí mismo tiene al menos un punto fijo, es decir, tiene al menos una solución a la ecuación $f(x) = x$.

Podemos hacer la siguiente analogía del teorema con el mundo real. Tome una taza de agua y revuelva el contenido con una cuchara, muy suavemente. Entonces deje reposar el agua hasta que se detenga completamente. El movimiento suave de la cuchara simula la acción de una función continua, mientras que el agua definitivamente va de la taza en la taza. No importa cuánto se revuelva el agua, el Teorema de Brouwer nos asegura que de entre todas las partículas de agua en la taza, al menos una de ellas volverá a su posición original cuando termine el proceso.

Aunque el teorema es fácil de enunciar, su demostración no es nada sencilla. Esta es la razón por la cual se han presentado distintas demostraciones de él a lo largo de los años, esperándose encontrar una mejor presentación (ver [1, 4, 6, 7]). En este trabajo presentamos la demostración de este teorema propuesta por John Milnor en [10]. Esta demostración es relativamente sencilla; primero obtiene el resultado conocido como Teorema de la bola peluda y a partir de éste, hace ingeniosas proyecciones para demostrar el Teorema de Brouwer.

El Teorema de Brouwer es un resultado muy importante en análisis y es la base para teoremas de punto fijo más generales, como es el caso del Teorema de Kakutani, entre otros. Éste extiende el resultado de punto fijo a funciones más generales llamadas correspondencias. Una correspondencia es una función de un conjunto en subconjuntos de algún conjunto, en este caso, tanto el concepto de continuidad como el de punto fijo tiene que redefinirse. El Teorema de Kakutani nos asegura la existencia de puntos fijos para correspondencias, cuando ciertas condiciones se satisfacen.

Actualmente, la forma común de abordar los resultados mencionados, es demostrar el Teorema de Brouwer y a partir de éste generalizar al Teorema de Kakutani (ver [1, 4, 6, 12]). Una vez que se tiene este resultado, se pasa a probar la existencia de equilibrios de Nash (ver por ejemplo [6]).

En este trabajo, siguiendo las ideas en [11], demostramos la existencia de equilibrios, basandonos en el Teorema de Brouwer. Por otro lado se presenta una demostración reciente del Teorema de Kakutani que utiliza una clase especial de juegos, la cual desarrollamos en detalle en esta tesis. Esta demostración fue presentada en el 2005 por Andrew McLennan en [8], y por Andrew McLennan y Rabee Tourky en [9].

Puesto que el Teorema de Brouwer es un caso particular del Teorema de Kakutani, se concluye entonces que los tres resultados mencionados son equivalentes.

A partir de lo expuesto anteriormente, es natural la estructuración de la tesis en tres capítulos. A continuación se presenta un breve resumen de los contenidos de cada uno de ellos.

- Capítulo 1. El propósito de este capítulo es demostrar el Teorema de Brouwer.

  Se comienza introduciendo el concepto de punto fijo y explicar su importancia. Luego se demuestra el Teorema de Punto Fijo de Banach, como iniciación a teoremas de punto fijo y para ser utilizado posteriormente.

  Obtenemos una expresión para el volumen (medida) de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y probamos que $(1+t)^{2k+1/2}$ no es un polinomio en t. Entonces se definen los campos vectoriales tangentes y se prueba que, en general, la esfera no tiene un campo continuo de vectores tangentes no nulos (Teorema de la bola peluda).

  Finalmente presentamos la demostración del Teorema de Brouwer, seguido de algunas implicaciones.

- Capítulo 2. El principal objetivo es probar la existencia de equilibrios de Nash e introducir los juegos de imitación.

  Primero, es necesario introducir todas las definiciones y conceptos nuevos. Entre ellos, la definición de un juego finito no cooperativo, la función de ganancia y el concepto de estrategia.

  Luego, se establece el concepto de equilibrio de Nash. Utilizando el Teorema de Brouwer, se demuestra que todo juego finito no cooperativo tiene al menos un equilibrio.

  Enseguida, se introducen los juegos de imitación, que son un caso particular de los juegos finitos no cooperativos. Obtenemos algunos resultados al respecto, los cuales serán utilizados en el siguiente capítulo.

- Capítulo 3. Aquí, nuestra meta es demostrar el Teorema de Kakutani.

  Nuevamente, introducimos los conceptos nuevos. Se introducen los conceptos de correspondencias, semicontinuidad superior y la variante del concepto de punto fijo para este tipo de funciones.

  Utilizando equilibrios de Nash, definimos una sucesión de juegos de imitación entre el dominio y la imagen de la correspondencia. Usando resultados generales y los ya obtenidos para juegos de imitación, obtenemos un punto fijo de la correspondencia. Esto finaliza la demostración del Teorema de Kakutani y esta tesis.

Capítulo 1

El Teorema de Brouwer

1.1 Introducción

El objetivo principal de este capítulo es demostrar el Teorema de Brouwer, el cual es un teorema de existencia de puntos fijos para una función continua en la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$. Hay muchas maneras en que se puede demostrar este resultado, entre algunas de ellas están: una prueba topológica usando homología de grupos, una analítica que utiliza el Teorema de Green, una prueba combinatoria a través de una generalización del Lema de Sperner o probando su equivalencia al Teorema del juego de Hex (ver [1, 4, 6, 7]).

En este trabajo presentamos una prueba analítica por John Milnor. Seguimos principalmente el esquema que él utiliza en su artículo [10], pero haciendo una distinción notable y ordenada de los resultados presentados, desarrollando cada paso en detalle y claridad posibles. La demostración consiste, en esencia, en utilizar una expresión para el volumen de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y el hecho de que la función $f(t) = (1+t)^{2k+1/2}$ no es un polinomio en t, para probar el comúnmente conocido como Teorema de la bola peluda. A partir de éste se demuestra el Teorema de Brouwer de una forma muy ingeniosa, utilizando proyecciones estereográficas.

Una vez demostrado el Teorema de Brouwer, extenderemos el resultado a conjuntos más generales para el dominio de la función, que utilizaremos en el siguiente capítulo para demostrar la existencia de equilibrios de Nash.

Puede observarse en restrospectiva que el concepto más importante y utilizado a lo largo de toda la tesis, es el concepto de punto fijo. Este es un buen momento para dar una definición formal.

Definición 1.1.

Sea f una función de un conjunto A en sí mismo. Decimos que $x \in A$ es punto fijo de f si $f(x) = x$.

Tratando de dar una idea más intuitiva de este concepto, al aplicar una función a un conjunto podemos imaginar que la función "mueve" a los puntos del conjunto, por ejemplo, la función $f(x) = x + 1$ provoca que los puntos se muevan una unidad a la derecha. Con esta idea de movimiento, un punto fijo es un punto que no se mueve, simplemente se queda fijo donde está. Así, un punto fijo es invariante bajo la función, nunca cambia sin importar cuantas veces se la apliquemos.

Ejemplo 1.2.

Una función puede tener cualquier cantidad de puntos fijos. A continuación vemos ejemplos de funciones con uno, dos, ninguno o una infinidad de puntos fijos.

Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida por:

i) $f(x) = -x$. *Esta función tiene sólo un punto fijo, el cero. Para encontrar todos los puntos fijos debemos entontrar todas las soluciones de la ecuación* $f(x) = x$.

ii) $f(x) = x^2$. *En este caso hay dos puntos fijos, el cero y el uno, pues satisfacen* $f(1) = 1^2 = 1$ *y* $f(0) = 0^2 = 0$, *respectivamente.*

iii) $f(x) = x + 1$. *No tiene puntos fijos, porque* $x = x + 1$ *no tiene solución en los reales.*

iv) $f(x) = x$. *Un claro ejemplo de una infinidad (no numerable) de puntos fijos.*

Nótese que para un punto fijo x_0 de f, se cumple que

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0 \ .$$

En general se cumple $f^n(x_0) = x_0$, es decir, x_0 es invariante bajo f.

Ejemplo 1.3.

Un punto fijo no depende sólo de la fórmula de la función, también depende del dominio. Considere la función $f(x) = x^2$, esta función no tiene puntos fijos si el dominio es el intervalo $(0, 1)$, a pesar de que tiene dos si se define en $\mathbb{R}$.

Es bueno destacar que en este contexto, un punto se puede referir prácticamente a cualquier cosa, punto es usado para hacer mención a los elementos de un conjunto, donde f es una función definida en el conjunto.

1.2 El Teorema de Punto Fijo de Banach

Iniciamos esta sección definiendo el concepto de espacio métrico completo.

Definición 1.4.

Un espacio métrico completo es una pareja (M, d), donde M es un conjunto no vacío y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ es una función con las siguientes propiedades:

i) $d(a, b) = d(b, a) \geqslant 0$, *donde* $d(a, b) = 0$ *si y sólo si* $a = b$.

ii) $d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$ *(desigualdad del triángulo).*

iii) *Si x_n es una sucesión en M tal que $d(x_p, x_q) \to 0$, entonces existe un punto x en M tal que $d(x_n, x) \to 0$ (completez de M).*

A la función d se le conoce como distancia. Si la distancia satisface sólo las primeras dos condiciones, se dice que (M, d) es un espacio métrico.

Es bien sabido que $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual euclidiana es un espacio métrico completo. Debido a que trabajaremos principalmente en $\mathbb{R}^n$ o subconjuntos de éste, podremos aplicar los resultados que obtengamos para espacios métricos completos. La distancia utilizada para $\mathbb{R}^n$ será la euclidiana, a menos que se especifique lo contrario.

En un espacio métrico completo, una clase importante de funciones es la clase de funciones que encogen o contraen el espacio. Bajo la idea de movimiento explicada en la sección anterior, una función de contracción es aquella que acerca los puntos del conjunto. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.5.

Una función o mapeo $f : M \to M$, donde M es un espacio métrico, se dice que es mapeo de contracción si existe un número real $0 \leqslant \theta < 1$ tal que para toda x, y en M tenemos

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \theta \; d(x, y) \; . \tag{1.1}$$

Los teoremas de punto fijo pueden clasificarse en dos grandes grupos: teoremas de existencia o teoremas de construcción. Un teorema de existencia únicamente nos asegura que, bajo ciertas condiciones, la función tiene un punto fijo, mientras que uno de construcción nos presenta un proceso o algoritmo para encontrar el punto fijo.

Un teorema de construcción es preferible a uno de existencia, en el sentido de que implícitamente también nos asegura la existencia de un punto fijo. Sin embargo, uno de existencia es igualmente importante, pero abordaremos ese tema más adelante, por el momento nos centramos en demostrar el Teorema de Punto Fijo de Banach.

Teorema 1.6.

Sea (M, d) un espacio métrico completo y $f : M \to M$ un mapeo de contracción, entonces f tiene un único punto fijo en M.

Demostración.

Iniciamos con un punto $x_0 \in M$ arbitrario y obtenemos x_n recursivamente mediante

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Probaremos que $d(x_p, x_q) \to 0$ cuando $p, q \to \infty$. Empezamos con la igualdad

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \qquad n = 1, 2, \ldots \ ,$$

que con la propiedad de la contracción se convierte en

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \theta \ d(x_n, x_{n-1}) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

y si repetimos el mismo proceso n veces llegamos al resultado

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \theta^n d(x_1, x_0) \qquad n = 1, 2, \ldots \ . \tag{1.2}$$

Si así se desea, puede probarse más formalmente lo último usando inducción.

Usando la desigualdad del triángulo múltiples veces, la ecuación (1.2) y la progresión geométrica, para $q > p$ obtenemos

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\leqslant \sum_{n=p}^{q-1} d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} \theta^n d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{n=p}^{q-1} \theta^n \leqslant d(x_1, x_0) \sum_{n=p}^{\infty} \theta^n \\ &= d(x_1, x_0) \ \theta^p \ (1 - \theta)^{-1} \ , \end{aligned}$$

pero dado que $d(x_1, x_0)$ y $(1-\theta)^{-1}$ son constantes positivas y debido a que $0 \leqslant \theta < 1$, tenemos que $d(x_q, x_p) \to 0$ cuando $p \to \infty$. Por la completez de M sabemos que existe un $x \in M$ tal que $d(x_n, x) \to 0$ y de la propiedad de contracción de f tenemos

$$d(f(x_n), f(x)) \leqslant \theta \ d(x_n, x) \quad \forall \ n \in N \ .$$

Sustituyendo $f(x_n)$ por x_{n+1} en la ecuación anterior nos da

$$d(x_{n+1}, f(x)) \leqslant \theta \ d(x_n, x) \ ,$$

pero como $d(x_n, x) \to 0$, tomando límite en ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$d(x, f(x)) \leqslant 0 \ ,$$

que por las propiedades de una distancia implica que $f(x) = x$, es decir, x es un punto fijo de f.

Ahora supongamos que x y y son puntos fijos de f. Probaremos que necesariamente $x = y$, lo que significa que el punto fijo es único. La ecuación (1.1) implica

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leqslant \theta \ d(x, y) \ ,$$

por lo tanto $d(x, y) = 0$ porque $0 \leqslant \theta < 1$, de donde concluimos que $x = y$ por la propiedad (i) de la función d, y por lo tanto el punto fijo de f es único. □

El Teorema de Punto Fijo de Banach nos asegura que con suficientes iteraciones, podemos conseguir o aproximarnos a un punto fijo de la función. Éste es un claro ejemplo de un teorema de construcción, donde el proceso para conseguir el punto fijo es iterar la función.

1.3 Campos de vectores tangentes

Antes de empezar esta sección es necesario precisar la notación usada. El producto interior entre dos vectores v y w en $\mathbb{R}^n$ se denotará por $v \cdot w$, mientras que la norma inducida se denotará por $|\cdot|$. Utilizaremos el producto interior y norma usuales en $\mathbb{R}^n$, entonces $|\cdot|$ coindide con el valor absoluto en $\mathbb{R}$. Llamaremos bola n-dimensional unitaria al conjunto

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \leqslant 1\} \ ,$$

esfera n-dimensional unitaria al conjunto

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}$$

y $B_r(c)$ denotará la bola de radio $r \in \mathbb{R}$ centrada en $c \in \mathbb{R}^n$,

$$B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - c| \leqslant r\} \ .$$

Con la notación ya establecida, definimos un campo de vectores tangentes.

Definición 1.7.

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Un campo de vectores tangentes a A es una función $v : A \to \mathbb{R}^n$ tal que para cada punto u de A se tiene $u \cdot v(u) = 0$.

Ejemplo 1.8.

La esfera 2-dimensional, explícitamente $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, tiene el campo de vectores tangentes definido por

$$v(x_1, x_2) = (x_2, -x_1) \ .$$

Calculando el producto interior obtenemos

$$(x_1, x_2) \cdot v(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot (x_2, -x_1) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0 \ .$$

El campo no necesariamente es único, podemos notar que $v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ también es un campo de vectores tangentes.

Ejemplo 1.9.

En general, si n es par, no es difícil probar que la función v definida por

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_n, -x_{n-1}) \ ,$$

es un campo vectorial tangente a S^{n-1}. Además, la función v es continua y no nula, es decir, para n par S^{n-1} tiene un campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Sin embargo, para n impar no existe dicho campo. Esta sección tiene como objetivo final demostrar eso, la no existencia de campos continuos no nulos de vectores tangentes a la esfera unitaria S^{n-1} para n impar.

Ahora enunciamos el Teorema de Cambio de Variable en $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por μ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, la cual extiende los conceptos de longitud en $\mathbb{R}$, el area en $\mathbb{R}^2$ y el volumen (hypervolumen) en dimensiones mayores.

Teorema 1.10.

Sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable y J la matriz Jacobiana asociada a f. Si f es una biyección de V sobre $f(V)$ y $det\ J(x) \neq 0$ para toda $x \in V$, entonces para cada $A \subset V$ Borel-medible tenemos

$$\mu(f(A)) = \int_A |det\ J(x)| dx\ .$$

Si además f es lineal, entonces

$$\mu(f(A)) = \mu(A)\ |det(J)|\ .$$

La demostración puede consultarse en [2] Teorema 15.11 o en [3] Teorema 17.2.

A continuación presentamos una serie de resultados, que utilizaremos para lograr nuestro objetivo de esta sección.

Teorema 1.11.

Sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $v : V \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable. Si $A \subset V$ es un conjunto compacto, entonces v satisface una condición de Lipschitz en A, es decir, existe una constante real λ tal que

$$|v(x) - v(y)| \leqslant \lambda\ |x - y| \quad \forall\ x, y \in A\ . \tag{1.3}$$

Demostración.

Primero consideramos el caso especial en que A es un cubo compacto con aristas paralelas a los ejes coordenados. Si $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son las componentes de v, entonces tenemos

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &= |(v_1(x) - v_1(y), \ldots, v_n(x) - v_n(y))| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |v_i(x) - v_i(y)| \quad \forall\, x, y \in A \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pero usando la desigualdad del triángulo, obtenemos que cada uno de estos sumandos satisface

$$\begin{aligned} |v_i(x) - v_i(y)| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |v_i(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, \ldots, x_n) - v_i(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} c_{ij} |x_j - y_j| \quad \forall\, x, y \in A \ , \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde las constantes c_{ij} son

$$c_{ij} = \sup_{\theta \in A} |\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\theta)| \ .$$

Otra forma de hacer esto último es considerar a v_i como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y aplicar el Corolario 4 en la Sección 3 de [5].

De las ecuaciones (1.4) y (1.5) se sigue que

$$|v(x) - v(y)| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} |x_j - y_j| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} |x - y| \ .$$

Haciendo $C = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}$ obtenemos (1.3) para cubos compactos.

Ahora, si A es un conjunto compacto arbitrario, entonces existen cubos abiertos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ con cerradura contenida en V tales que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j \ .$$

Por la primera parte, existen números $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que satisfacen

$$|v(x) - v(y)| \leqslant C_j |x - y| \quad \forall\, x, y \in I_j \ . \tag{1.6}$$

Sea F el conjunto de pares de puntos (x, y) tales que x y y no pertenecen a un mismo cubo, es decir,

$$F = (A \times A) - \bigcup_{j=1}^{n} (I_j \times I_j) \ .$$

Nótese que F es un conjunto compacto. Si definimos la función $h : F \to \mathbb{R}$ por $h(x, y) = |x - y|$, entonces h es continua, $h(x, y) > 0 \quad \forall\ (x, y) \in F$ y por lo tanto

$$\min_{(x,y)\in F} h(x, y) = \alpha > 0 \ ,$$

pues h está definida en un compacto y alcanza su mínimo. Como v está acotada en A, existe un número real L tal que $|v(x)| \leqslant L$ para toda x en A, entonces

$$|v(x) - v(y)| \leqslant \frac{2L}{\alpha} |x - y| \quad \forall\ (x, y) \in F \ . \tag{1.7}$$

Si $\lambda = \max\{C_1, C_2, \ldots, C_n, 2L/\alpha\}$, entonces por las ecuaciones (1.6) y (1.7) obtenemos el resultado (1.3) para cualquier compacto A. □

Lema 1.12.

Sea A un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, V un conjunto abierto que contiene a A y $v : V \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable. Para cada real $t \geqslant 0$ sea $f_t : V \to \mathbb{R}^n$ la función definida por

$$f_t(x) = x + tv(x) \ ,$$

entonces existe $t > 0$ tal que f_t es una función biyectiva de A en $f_t(A)$ y la medida de $f_t(A)$ puede expresarse como un polinomio en t.

Demostración.

Como v es continuamente diferenciable y A es compacto, por el Teorema 1.11 existe un real λ tal que $|v(x) - v(y)| \leqslant \lambda |x - y| \quad \forall\ x, y \in A$.

Supongamos que $f_t(x) = f_t(y)$, entonces

$$x + tv(x) = y + tv(y) \ ,$$

de donde se obtiene

$$x - y = t(v(y) - v(x))$$

y por lo tanto

$$|x - y| = t|v(y) - v(x)| \quad \leqslant \quad t\lambda|x - y| \ .$$

Si $t < 1/\lambda$ entonces $|x - y| = 0$, pues si $|x - y| \neq 0$ tendríamos que $1 \leqslant t\lambda < 1$, lo cual no es posible. Por lo tanto f_t es una función biyectiva de A en $f_t(A)$.

Sean $f_t = (f_{t_1}, \ldots, f_{t_n})$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$, para $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tenemos $f_{ti} = x_i + tv_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces tenemos que

$$\frac{\partial f_{t_i}}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} + t\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{1.8}$$

las cuales son las entradas de la matriz Jacobiana $J_t(x)$ de f_t. Considerando a la matriz $J_t(x)$ como función de t, cada entrada es lineal y su determinante es un polinomio en t;

$$det(J_t(x)) = a_0 + a_1(x)t + \ldots + a_n(x)t^n \ .$$

De la ecuación (1.8) es claro que $J_t(x)$ tiende a la matriz identidad uniformemente en A cuando t tiende a cero y entonces su determinante tiende a 1. Por lo tanto $det(J_t(x))$ es estrictamente positivo para $t > 0$ suficientemente pequeña y entonces $|det(J_t(x))| = det(J_t(x))$.

Si integramos respecto a x sobre A y aplicamos el Teorema 1.10 obtenemos

$$\mu(f_t(A)) = \int_A det(J_t(x))dx = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n \ ,$$

donde cada constante b_k es la integral de $a_k(x)$ sobre A. Por lo tanto la medida de $f_t(A)$ es un polinomio en t. $\square$

Lema 1.13.

Si n es un natural impar entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = (1+t^2)^{\frac{n}{2}} \ ,$$

no es un polinomio en t.

Demostración.

Considerando las funciones

$$f_m(t) = (1+t^2)^{\frac{2m-1}{2}} \ ,$$

demostraremos el lema por inducción sobre m.

Para probar la base de inducción, supongamos que $f_1(t) = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}$ sí es un polinomio. Tenemos que $f_1(t)f_1(t) = 1+t^2$, de donde $f_1(t)$ es un polinomio de grado 1, entonces $f_1(t)$ tiene la forma

$$f_1(t) = a_0 + a_1 t \ .$$

Se sigue que $1+t^2 = a_0^2 + 2a_0a_1t + a_1^2t^2$ e igualando coeficientes se tienen que cumplir simultaneamente $a_0 = \pm 1$, $a_1 = \pm 1$ y $a_0a_1 = 0$. Esto es imposible y por lo tanto $f_1(t)$ no es un polinomio.

Supongamos que $f_k(t)$ no es un polinomio para alguna k. Demostraremos por contradicción que $f_{k+1}(t)$ tampoco es un polinomio. Supongamos que $f_{k+1}(t) = (1+t^2)^{\frac{2k+1}{2}}$ es un polinomio, entonces también lo debe ser su derivada

$$f'_{k+1}(t) = \left(\frac{2k+1}{2}\right)(2t)(1+t^2)^{\frac{2k-1}{2}} = c\ tf_k(t) \ ,$$

donde c es una constante distinta de cero.

Como $tf_k(t)$ es un polinomio, debe tener la forma

$$tf_k(t) = b + a_0t + a_1t^2 + \ldots + a_nt^{n+1} \qquad a_n \neq 0 \ .$$

Evaluando en cero obtenemos que $b = 0$, de lo que se sigue que

$$f_k(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n \ ,$$

lo cual es una contradicción, pues $f_k(t)$ por hipótesis no es polinomio.

La suposición inicial de que $f_{k+1}(t)$ era polinomio es falsa, con lo que terminamos la prueba por inducción del lema. □

Lema 1.14.

Si n es impar, entonces S^{n-1} no tiene un campo continuamente diferenciable de vectores tangentes unitarios.

Demostración.

Supongamos que existe un campo de vectores v con dichas propiedades, entonces $|v(u)| = 1$ y también $u \cdot v(u) = 0$ para toda u con $|u| = 1$. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{3}{2}\}$$

y para cada t real positivo sea $A_t \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \frac{1}{2}(1+t^2)^{1/2} \leqslant |x| \leqslant \frac{3}{2}(1+t^2)^{1/2}\} \ .$$

Extendemos la definición de v a $V = \mathbb{R}^n - \{0\}$ como $v(y) = |y|v(y/|y|)$ para $y \in V$.

Denotando a $y/|y|$ por u y teniendo en cuenta que $|u| = 1$, observamos que

$$|v(y)| = |y||v(u)| = |y| \quad \forall \ y \in A \ , \tag{1.9}$$

porque $|v(u)| = 1$. Además tenemos que

$$y \cdot v(y) = |y|u \cdot |y|v(u) = |y|^2 \ u \cdot v(u) = 0 \quad \forall \ y \in A \ , \tag{1.10}$$

porque $u \cdot v(u) = 0$.

Definimos $f_t : V \to \mathbb{R}^n$ como $f_t(x) = x + tv(x)$. Probaremos que para $t > 0$ suficientemente pequeña $A_t \subset f_t(A)$, es decir, que para cada $y \in A_t$ existe un $x \in A$ tal que $y = f_t(x)$.

Supongamos primero que $|y| = 1$ y sea $g : A \to \mathbb{R}^n$ la función definida por

$$g(x) = y - tv(x)$$

Probaremos que si $t \leqslant \frac{1}{3}$, entonces g es una función de A en sí mismo. En este caso, por la ecuación (1.9) tenemos

$$|tv(x)| \leqslant \frac{1}{3}|v(x)| = \frac{1}{3}|x| \leqslant \frac{1}{2} \ ,$$

ya que $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{3}{2}$ para x en A. Luego obtenemos que

$$\frac{1}{2} = |y| - \frac{1}{2} \leqslant |y - tv(x)| \leqslant |y| + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \forall\, x \in A \ ,$$

lo cual significa que la imagen de g está contenida en A.

Sea λ la constante para v del Teorema 1.11. Si $t < 1/\lambda$ entonces

$$|tv(x) - tv(y)| \leqslant t\lambda|x - y| \ ,$$

es decir, g es un mapeo de contracción en A. Por el Teorema 1.6, existe un único punto x_0 en A tal que $x_0 = y - tv(x_0)$, lo que implica que

$$y = x_0 + tv(x_0) = f_t(x_0) \ .$$

Ahora si $y \in A_t$ pero $|y| \neq 1$, consideramos $u = y/|y|$, el cual cumple $|u| = 1$. Por lo anterior, existe $x_1 \in A$ tal que $x_1 + tv(x_1) = u$. Multiplicando por $|y|$ obtenemos

$$|y|x_1 + |y|tv(x_1) = |y|u = y$$

y por lo tanto

$$|y|x_1 + tv(|y|x_1) = y \ .$$

Si denotamos por x_0 al punto $|y|x_1$, entonces $y = f_t(x_0)$ y sólo falta probar que x_0 está en A. Notamos que para un punto x en A, el cuadrado de la norma de su imagen bajo f_t es

$$|x + tv(x)|^2 = (x + tv(x)) \cdot (x + tv(x)) = x \cdot x + 2x \cdot tv(x) + tv(x) \cdot tv(x) \ ,$$

luego, por la ecuación (1.10) tenemos

$$|f_t(x)|^2 = |x|^2 + t^2|x|^2 = |x|^2(1 + t^2) \ ,$$

entonces $|f_t(x)| = |x|(1+t^2)^{1/2}$. Se sigue que $|y| = |x_0|(1+t^2)^{1/2}$, de donde debido a que $y \in A_t$ tenemos que $\frac{1}{2} \leqslant |x_0| \leqslant \frac{3}{2}$, entonces x_0 está en A y por lo tanto $A_t \subset f_t(A)$. Utilizando el Lema 1.12 tenemos que la medida de A_t es un polinomio en t.

Por otra parte, si definimos la función $h : V \to \mathbb{R}^n$ por

$$h(x) = (1+t^2)^{1/2} x \ ,$$

entonces $h(A) = A_t$, h es lineal y por el Teorema 1.10 obtenemos

$$\mu(A_t) = \mu(A)(1+t^2)^{n/2} \ .$$

Usando ésta expresión y el Lema 1.13 tenemos que la medida de A_t no es un polinomio en t puesto que n es impar, pero ya habíamos obtenido que $\mu(A_t)$ era un polinomio. Como no pueden ser ambas verdaderas, tenemos que nuestra suposición inicial de que existe un campo continuamente diferenciable de vectores tangentes unitarios no es cierta. $\square$

Ahora, con los resultados previos, podemos demostrar el comúnmente conocido como Teorema de la bola peluda. Tiene este nombre tan peculiar por la analogía con una pelota con pelos en su superficie, donde los pelos se consideran vectores y peinar la bola significa encontrar un campo continuo de vectores tangentes. La analogía es fácil de imaginar en $\mathbb{R}^3$, donde que no se puede peinar significa que siempre encontraremos algún punto sin pelo o alguna región de pelos parados (no tangentes).

El resultado se consigue casi como un corolario del último lema, pero lo enunciamos como teorema por su importancia y porque en realidad todo el trabajo anterior fue sólo para lograr su demostración.

Teorema 1.15.

Si n es impar, entonces S^{n-1} no tiene un campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Demostración.

Supongamos que v es un campo continuo de vectores tangentes no nulos a la esfera unitaria S^{n-1}. Extendemos la definición de v a todo el espacio por

$$v(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(y) = |y|v(\frac{y}{|y|}) \quad \text{para } y \neq 0 \ .$$

Sea C el cubo n-dimensional

$$C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 \leqslant x_i \leqslant 2 \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \ ,$$

donde x_i son las componentes de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Usando el Teorema de aproximación de Weierstrass en el cubo C, podemos aproximar cada componente $v_i(x)$ de la función v por un polinomio $p_i(x)$ de tal forma que para $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ se cumpla

$$p(u) - (p(u) \cdot u)u \neq 0 \text{ para } |u| = 1 \ . \tag{1.11}$$

Esto es posible pues la expresión tiende a $v(u)$ cuando $p(u)$ tiende a $v(u)$ y $v(u) \neq 0$ para $|u| = 1$. Para ver que la expresión tiende a v simplemente sustituimos p por v en (1.11) y recordamos que $v(u) \cdot u = 0$ para toda u en el espacio.

Ahora consideramos la función w definida por $w(u) = p(u) - (p(u) \cdot u)u$, la cual es continuamente diferenciable (infinitamente diferenciable) por ser una expresión de polinomios. La ecuación 1.11 muestra que estos vectores son no nulos en $|u| = 1$. Además $w(u)$ es campo de vectores tangentes a S^{n-1}, pues para toda u tenemos

$$w(u) \cdot u = p(u) \cdot u - (p(u) \cdot u)u \cdot u = p(u) \cdot u - p(u) \cdot u = 0 \ ,$$

en particular para $|u| = 1$. Por lo tanto $w(u)/|w(u)|$ es un campo continuamente diferenciable de vectores tangentes unitarios a la esfera S^{n-1}. Esto contradice el Lema 1.14 y por lo tanto la suposición de la existencia del campo v es falsa, con lo que concluimos la demostración del teorema. $\square$

1.4 Demostración del Teorema de Brouwer

El Teorema de Brouwer es un teorema de existencia, no nos proporciona la solución explícita a $f(x) = x$, solo nos asegura la existencia de una solución. Podría pensarse que un resultado que habla únicamente de la existencia de soluciones no es de utilidad. Sin duda alguna, está es una idea erronea.

Recuerdo que de niño se me enseño a sumar y restar. Para mi todo estaba muy claro, hasta que un día mi papá me preguntó:

- ¿Cuánto es 5 menos 7? - sin pensarlo mucho respondí

- No se puede... si tengo 5 manzanas no me puedes quitar 7.

Uno puede darse cuenta del impacto de la existencia de las cosas de este ejemplo (Después se me explicó que le debía dos manzanas a mi papá).

Otro ejemplo es el Teorema Fundamental del Álgebra: que para todo polinomio no constante existe al menos una raíz compleja. Tal vez ese resultado no parezca tan bueno como la formula cuadrática, pero es muy poderoso ya que no existe, ni existirá, una fórmula general para encontrar las raíces de polinomios de grado mayor a cuatro.

A continuación demostramos el Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

Teorema 1.16.

Sea f una función continua de la bola unitaria B^n en sí misma, entonces existe un punto c en B^n tal que $f(c) = c$.

Demostración.

Consideraremos primero el caso en que n es par. La demostración (que dividimos en varios pasos), consiste en suponer que no existe punto fijo para f en B^n y, bajo esta hipótesis, construimos un campo de vectores tangentes continuos en la esfera $(n+1)$-dimensional S^n.

Paso 1. (Definición de la función auxiliar $w : B^n \to \mathbb{R}^n$)

Supongamos que f no tiene punto fijo en la bola unitaria. Como $f(x) \neq x \quad \forall\, x \in B^n$, tenemos que $x - f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in B^n$ y

$$0 < |x - f(x)|^2 = |x|^2 + |f(x)|^2 - 2x \cdot f(x) \leqslant 2 - 2x \cdot f(x) \; .$$

Por lo tanto, si $|x| = 1$ obtenemos

$$x \cdot (x - f(x)) = 1 - x \cdot f(x) > 0 \; . \tag{1.12}$$

Definiremos ahora un campo de vectores w, el cual usaremos después para construir un campo de vectores tangentes. Definimos w en B^n por

$$w(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

donde $\lambda : B^n \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$\lambda(x) = \frac{1 - x \cdot x}{1 - x \cdot f(x)} \; ,$$

cuyo denominador es distinto de cero por la ecuación (1.12). Probaremos que w es una función continua en B^n tal que $w(x) = x$ en la esfera unitaria y que $w(x) \neq 0$ en toda la bola unitaria.

La función w es continua porque la función identidad x, la función λ y f son todas funciones continuas en B^n. Si $|x| = 1$ claramente $w(x) = x$, pues el numerador de $\lambda(x)$ es cero. Ahora para demostrar que $w(x) \neq 0$ en toda la bola unitaria, supongamos que $w(x')$ es cero para algún x' en la bola abierta. Entonces $x' = \lambda(x')f(x')$ y desarrollando obtenemos

$$x' = \frac{1 - x' \cdot x'}{1 - x' \cdot f(x')} f(x') \; .$$

Multiplicando por el denominador obtenemos

$$x' - (x' \cdot f(x'))x' = f(x') - (x' \cdot x')f(x')$$

y sustituyendo $(1/\lambda(x'))x' = f(x')$ tenemos que

$$x' - \frac{1}{\lambda(x')}(x' \cdot x')x' = f(x') - \frac{1}{\lambda(x')}(x' \cdot x')x' \; .$$

Esto implica que $x' = f(x')$, lo cual no es posible y por lo tanto $w(x) \neq 0$ en toda la bola unitaria.

Paso 2. (Construcción del campo vectorial en $S^n \cap H^-_{n+1}$)

Identificaremos la bola B^n con el ecuador

$$E^{n+1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in B^{n+1} \ : \ x_{n+1} = 0\}$$

de la bola B^{n+1}, asociando a cada punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en B^n con el punto del ecuador $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$. Haciendo proyecciones y usando la función w construiremos un campo de vectores tangentes a la esfera unitaria S^n en el hemisferio sur

$$H^-_{n+1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in B^{n+1} \ : \ x_{n+1} \leqslant 0\} \ ,$$

para posteriormente hacerlo de forma análoga en el hemisferio norte y así obtener un campo de vectores tangentes en toda la esfera S^n.

Desde el polo norte $N = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ en B^{n+1}, proyectamos el punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ en el ecuador E^{n+1}, sobre la esfera unitaria S^n.

Sea x un punto en E^{n+1} y sea $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{n+1}(x))$ su proyección sobre H^-_{n+1}, entonces x está en algún punto intermedio de la recta desde N hasta $u(x)$ y por lo tanto para algún θ entre 0 y 1 tenemos

$$x = (1 - \theta)N + \theta u(x) \ .$$

Tomando en cuenta la simplicidad de las coordenadas de N, la ecuación anterior componente a componente es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x_i = \theta u_i(x) \quad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{1.13}$$

$$0 = (1 - \theta) + \theta u_{n+1}(x) \ . \tag{1.14}$$

Tenemos entonces que

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), u_{n+1}(x)) = (\frac{x_1}{\theta}, \frac{x_2}{\theta}, \ldots, \frac{x_n}{\theta}, \frac{\theta - 1}{\theta}) \ . \tag{1.15}$$

Como $u(x)$ está sobre la esfera unitaria tenemos $|u(x)| = 1$, entonces

$$1 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2(x) + u_{n+1}^2(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta^2} + \frac{(\theta-1)^2}{\theta^2} \ ,$$

que multiplicando por θ^2 lleva a

$$\theta^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\theta-1)^2 = |x|^2 + \theta^2 - 2\theta + 1 \ .$$

Luego, $0 = |x|^2 - 2\theta + 1$ y despejando tenemos $\theta = \frac{1}{2}(|x|^2+1)$, de donde $\theta \geqslant \frac{1}{2}$.

Usando las propiedades anteriores, para cada punto x en el ecuador E^{n+1} definiremos a continuación un vector $v(x)$ no nulo y tangente a la esfera unitaria S^n en el punto $u(x)$. Para cada punto x en el ecuador con $|x| < 1$, definimos las siguientes funciones que dependen de la variable $t \geqslant 0$

$$X(t) = x + tw(x)$$

$$U(t) = u(x + tw(x))$$

donde t es suficientemente pequeña para que el segmento $x+tw(x)$ esté completamente contenido en el ecuador E^{n+1}. Es conveniente observar que $X(0) = x$, $U(0) = u(x)$ y también que

$$|U(t)| = |u(x + tw(x))| = 1$$

pues $u(x + tw(x))$ está sobre la esfera unitaria S^n.

Luego, definimos $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_{n+1}(x))$ como

$$v(x) = \frac{d(U(t))}{dt} \text{ evaluada en } t = 0$$

es decir, $v(x) = U'(0)$.

Paso 3. (Propiedades del campo v)

Empezamos por probar que efectivamente el vector $v(x)$, así definido, es tangente a la esfera unitaria en $u(x)$. A partir de la ecuación

$$0 = \frac{d(1)}{dt} = \frac{d(U(t) \cdot U(t))}{dt} = 2U(t) \cdot U'(t) \ ,$$

evaluando en cero obtenemos

$$0 = u(x) \cdot v(x) \ ,$$

es decir, $v(x)$ es tangente a la esfera S^n en $u(x)$.

Ahora pasamos a probar que $v(x) \neq 0$. Para ello, consideramos la proyección del vector $X(t)$ desde el polo norte N. Entonces (ver paso 2) existe una función $\theta(t)$ con $\theta(0) = \theta$ la cual satisface la ecuación

$$X(t) = (1 - \theta(t))N + \theta(t)U(t) \ .$$

Derivando obtenemos

$$w(x) = -\theta'(t)N + \theta'(t)U(t) + \theta(t)U'(t) \ ,$$

que al evaluar en cero y despejar nos da la expresión

$$v(x) = \frac{w(x) + \theta'(0)(N - u(x))}{\theta} \ . \tag{1.16}$$

Tomando en cuenta esta expresión y que $\theta \geqslant \frac{1}{2}$, concluimos que $v \neq 0$ al analizar los siguientes dos casos: Si $\theta'(0) = 0$ entonces $v(x) \neq 0$ porque $w(x) \neq 0$ (ver paso 1). Si $\theta'(0) \neq 0$ entonces $v(x) \neq 0$ porque su $(n{+}1)$-ésima componente es distinta de cero, como podemos apreciar de la expresión

$$v_{n+1}(x) = \frac{0 + \theta'(0)(1 - u_{n+1}(x)))}{\theta} \neq 0$$

pues $u_{n+1}(x) < 0$.

Hemos demostrado, que $v(x) \neq 0$ y $v(x) \cdot u(x) = 0$ en todo el hemisferio sur H^-_{n+1}, que corresponde a los puntos de la esfera unitaria S^n con componente $u_{n+1}(x) < 0$. Además, de (1.13) y (1.14) se sigue que $u(\cdot)$ es continua, y como $w(\cdot)$ es continua (ver paso 1), la ecuación (1.16) implica que $v(\cdot)$ es continua.

Paso 4. (Extensión de v a la esfera S^n)

Extendemos la definición de $v(x)$ a la circunferencia del ecuador E^{n+1} de forma continua, como el límite de la ecuación (1.16) cuando $u(x)$ se acerca al ecuador, es decir, cuando $u_{n+1}(x)$ tiende a cero. En este caso, de las ecuaciones 1.13 y 1.14, claramente tenemos que $\theta \to 1$, $u(x) \to x$ y $|x| \to 1$, entonces

$$v(x) = w(x) + \theta'(0)(N - x) \ .$$

Como $\theta(t) = \frac{1}{2}(|X(t)|^2 + 1)$ tenemos que

$$\theta'(t) = X(t) \cdot X'(t) = (x + tw(x)) \cdot w(x) \ ,$$

que al evaluar en cero nos queda $\theta'(0) = x \cdot w(x)$. Pero como $w(x) = x$ cuando $|x| = 1$ tenemos que $\theta'(0) = x \cdot x = 1$. El valor de $v(x)$ es entonces

$$v(x) = x + N - x = N \ ,$$

es decir, en todo el ecuador los vectores tangentes apuntan al norte.

Hemos definido un campo vectorial continuo de vectores tangentes no nulos en todo el hemisferio sur de la esfera unitaria. Para tener este campo en la totalidad de la esfera unitaria S^n hacemos un proceso análogo en el hemisferio norte, proyectando ahora desde el polo sur $S = (0, 0, \ldots, 0, -1)$, pero en lugar de definir a v como $U'(0)$ lo hacemos como $-U'(0)$. Es claro que v definido de esta forma, es un campo de vectores tangentes no nulos en el hemisferio norte; el propósito del cambio de signo es que las definiciones en el hemisferio sur y norte coincidan en la circunferencia del ecuador.

Logramos construir un campo vectorial continuo de vectores tangentes no nulos en toda la esfera unitaria S^n cuando $n + 1$ es impar. Sin embargo, por el Teorema 1.15 esto es imposible, lo cual implica que nuestra suposición inicial de que $f(x)$ no tiene punto fijo es falsa. En conclusión, el Teorema de Brouwer se cumple para toda n par.

Para completar la demostración, consideremos n impar y la función de la bola B^n en sí misma, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Definimos la función g de la bola B^{n+1} en sí misma como

$$g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = (f_1(x_1,\dots x_n), f_2(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n),0)$$

La función g así definida es claramente continua y entonces por lo que hemos probado, debe existir un punto $c \in B^{n+1}$ tal que $c = g(c)$. Componente a componente c cumple las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 0\ , \\ c_i &= f_i(c_1,c_2,\dots,c_n) \qquad \text{para } i = 1,2,\dots n\ . \end{aligned}$$

Entonces el punto $x = (c_1,c_2,\dots,c_n) \in B^n$ es punto fijo de f y el Teorema de Brouwer se cumple para n impar. Así, terminamos la demostración del Teorema de Brouwer en su totalidad. $\square$

Las hipótesis del Teorema de Brouwer son imprescindibles, si la función no es continua o si no está definida en la bola unitaria, la función podría no tener un punto fijo.

Ejemplo 1.17.

Si la función no es continua podría no tener un punto fijo. Considere la función f definida en la bola unitaria B^1 como $f(x) = 0$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$. Esta función es discontinua sólo en el cero pero eso es suficiente para que no tenga puntos fijos.

Por otro lado si tenemos una función continua de un conjunto en sí mismo, pero el conjunto no es la bola unitaria, la función podría no tener un punto fijo. Considere la función $f(x) = -x$ definida en $B^1 - \{0\}$. La función es continua en todo el dominio, el cual es la bola unitaria sin un punto, pero no tiene puntos fijos.

1.5 Corolarios del Teorema de Brouwer

El Teorema de Brouwer está muy limitado debido a la restricción sobre el dominio de la función, pero podemos extender el resultado a conjuntos más generales. Lo que deseamos obtener para el final de este capítulo es el Teorema de Brouwer para conjuntos compactos y convexos. Estos conjuntos son similares a la bola unitaria, más precisamente diremos que son topológicamente equivalentes, la idea es que podemos obtener uno a partir del otro por medio de una deformación continua, la definición formal es la siguiente.

Definición 1.18.

Sean A, D subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A y D son topológicamente equivalentes, si existe un homeomorfismo h entre ellos, es decir, si existe una biyección continua de A sobre D con inversa continua.

Ahora extendemos el Teorema de Brouwer a conjuntos topológicamente equivalentes a la bola unitaria B^n.

Corolario 1.19.

Sea D topológicamente equivalente a la bola unitaria B^n y sea f una función continua de D en sí misma, entonces f tiene al menos un punto fijo.

Demostración.

Sea h un homeomorfismo entre B^n y D. Definimos la función $g : B^n \to B^n$ como

$$g(x) = h^{-1}(\ f(h(x))\ )\ ,$$

la cual es continua porque h^{-1}, f y h son continuas. Usando el Teorema 1.16 obtenemos un punto fijo x_0 de g, es decir,

$$g(x_0) = h^{-1}(\ f(h(x_0))\ ) = x_0\ .$$

Aplicando h en la ecuación anterior obtenemos

$$f(h(x_0)) = h(x_0) \ ,$$

por lo tanto $h(x_0)$ es punto fijo de f. $\square$

A continuación observamos algunos de los conjuntos topológicamente equivalentes a la bola unitaria B^n, para los cuales cualquier función definida de ellos en sí mismos tendrá al menos un punto fijo.

Corolario 1.20.

Toda bola $B_r(c)$ en $\mathbb{R}^n$ es topológicamente equivalente a la bola unitaria B^n.

Demostración.

No es difícil ver que la función $h_1 : B^n \to B_r(0)$ definida por $h_1(x) = rx$, es un homeomorfismo entre la bola unitaria B^n y la bola centrada en el origen $B_r(0)$.

Tampoco es difícil ver que la función $h_2 : B_r(0) \to B_r(c)$ definida por $h_1(x) = x+c$, es un homeomorfismo entre la bola centrada en el origen $B_r(0)$ y la bola $B_r(c)$.

Entonces claramente la composición $h_2 \circ h_1 : B^n \to B_r(c)$ es un homeomorfismo de B^n a $B_r(c)$, por ser composición de funciones biyectivas y continuas, al igual que su inversa $(h_2 \circ h_1)^{-1} = h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$. $\square$

Para lograr nuestro propósito podríamos demostrar que todo subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ es topológicamente equivalente a la bola unitaria B^n (ver [6] página 247), pero debido a que no necesitamos este resultado en particular y sólo deseamos extender el Teorema de Brouwer, procederemos de forma más directa.

Lema 1.21.

Sea K un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función continua de K en sí misma. Entonces f tiene al menos un punto fijo en K.

Demostración.

Como K es acotado, existe una bola $B(r)$, de radio r suficientemente grande, que contiene a K. Consideramos la función $g : B(r) \to K$ definida por $g(x) = y$, donde $y \in K$ es tal que

$$d(x, y) = \min_{z \in K} d(x, z) \ .$$

Para empezar, dicha y existe porque K es cerrado. Además, la función g está bien definida porque K es convexo, pues si dos puntos distintos $y_1, y_2 \in K$ son tales que $d(x, y_1) = d(x, y_2)$, entonces

$$d(x, \frac{y_1 + y_2}{2}) < d(x, y_1) \ ,$$

por lo tanto no podrían ser los puntos a una mínima distancia de x. Además, es claro que si $x \in K$ entonces $g(x) = x$.

Por último, sea x_n una sucesión en $B(r)$ que converge a un punto x. Si $\varepsilon > 0$ entonces existe un natural N tal que

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2 \quad \forall\ n \geqslant N \ .$$

De la definición de g tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, g(x_n)) &\leqslant d(x_n, g(x)) \leqslant d(x_n, x) + d(x, g(x)) \\ &< d(x, g(x)) + \varepsilon/2 \quad \forall\ n \geqslant N \ . \end{aligned}$$

Usando esta última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} d(x, g(x)) &\leqslant d(x, g(x_n)) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, g(x_n)) \\ &< d(x_n, g(x_n)) + \varepsilon/2 < d(x, g(x)) + \varepsilon \quad \forall\ n \geqslant N \ , \end{aligned}$$

es decir,

$$d(x, g(x)) \leqslant d(x, g(x_n)) < d(x, g(x)) + \varepsilon \quad \forall\ n \geqslant N \ .$$

Esto implica que $d(x, g(x_n)) \to d(x, g(x))$ y por la unicidad de $g(x)$ se sigue que $g(x_n) \to g(x)$, por lo tanto g es continua.

La composición $f \circ g : B(r) \to K$ es continua por ser composición de funciones continuas y la podemos considerar como función de $B(r)$ en sí misma debido a que $K \subset B(r)$. Por el Corolario 1.19 y el Corolario 1.20, existe un punto $x_0 \in B(r)$ tal que

$$f(g(x_0)) = x_0 \ . \tag{1.17}$$

Pero como la imagen de $f \circ g$ está contenida en K, entonces $x_0 \in K$ y $g(x_0) = x_0$, por lo tanto sustituyendo en la ecuación (1.17) obtenemos $f(x_0) = x_0$. $\square$

Capítulo 2

Equilibrios de Nash

2.1 Introducción

En este capítulo, iniciamos introduciendo el concepto de juegos no cooperativos. Puede pensarse en uno de estos juegos como un proceso llevado a cabo por varias personas, donde cada una de ellas realiza una acción y dependiendo de las acciones de todos, cada uno recibe una ganancia o sufre una pérdida.

Después, definiremos el concepto de equilibrio en un juego, concepto que fue introducido por John Nash en 1950 y es ahora comúnmente conocido como equilibrio de Nash. Lo que él definió es un equilibrio en el sentido de que, si a los jugadores se les diera la oportunidad de cambiar su forma de jugar no lo harían. Enseguida usaremos el Teorema de Brouwer para probar que todo juego finito no cooperativo tiene un equilibrio, de la misma forma en que lo hizo Nash en [11].

Finalmente, introduciremos un caso muy particular de juegos finitos no cooperativos, los juegos de imitación. Un juego de imitación se realiza únicamente entre dos personas, donde el objetivo de la segunda es el de lograr imitar a la primera. Presentaremos también algunos resultados acerca de este tipo de juegos, los cuales serán utilizados en la demostración del Teorema de Kakutani en el siguiente capítulo.

2.2 Juegos no Cooperativos

Al momento de enfrentarnos a una situación a veces resulta preferible cooperar con otros participantes para obtener mejores resultados. Primero debemos decidir si cooperar nos beneficiará y de ser así, hay que decidir con quien o quienes hacerlo y esperar que ellos también quieran cooperar con nosotros. La gama de posibilidades se vuelve muy amplia y el análisis de la situación se complica rápidamente. Hay situaciones en las que no es posible cooperar con otros, como las situaciones de rivalidad entre dos entidades. Nos enfocaremos únicamente en situaciones donde los jugadores deciden no cooperar, no nos vamos a preocupar por ningún tipo de alianza o posible comunicación entre los participantes.

Definición 2.1.

Un juego no cooperativo de N personas es un sistema

$$\Gamma := ((A_i, r_i) \ : \ i \in I)$$

donde I es el conjunto $\{1, 2, \ldots, N\}$ de los jugadores, A_i es el conjunto de todas las acciones posibles del jugador i y r_i es una función del conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$ en los reales conocida como la recompensa del jugador i.

Si además todos los conjuntos A_i son finitos, se dice que Γ es un juego finito no cooperativo de N personas.

El juego se interpreta de la siguiente manera: los jugadores eligen cada uno una acción de su conjunto de acciones posibles simultanea e independientemente. Si cada jugador i elige la acción a_i en A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, entonces el jugador j recibe $r_j(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ como recompensa.

Ejemplo 2.2.

Podemos analizar el clásico juego de piedra, papel o tijeras, como un juego no cooperativo de dos personas. En este juego dos personas eligen simultaneamente entre piedra, papel o tijeras. El juego termina en empate si eligieron lo mismo, de lo *contrario uno de ellos gana de acuerdo a la regla: tijeras vence a papel, papel vence a piedra y piedra vence a tijeras. Podemos considerar que un jugador obtiene un punto por cada juego ganado.*

El juego no cooperativo de dos personas es $\Gamma = \{(A_1, r_1), (A_2, r_2)\}$*, donde el conjunto de acciones es el mismo para ambos jugadores,* A_1=A_2=$\{$*piedra,papel,tijeras*$\}$*, y las funciones de recompensa están determinadas por las reglas anteriores, por ejemplo,* r_1*(papel,papel)*$= 0$*,* r_1*(piedra,tijeras)*$= 1$*,* r_2*(piedra,papel)*$= 1$*,* r_1*(pedra,papel)*$= 0$*.*

Sobre que elegir cada vez que se repita el experimento depende de los jugadores completamente. Si quieren pueden elegir siempre lo mismo o escoger un orden entre las opciones y seguir ese patrón repetitivamente, pueden proceder de la forma que les parezca más conveniente para ganar más veces.

Se le llama estrategia, a la forma en que un jugador elige qué acción utilizar. Una clase importante de estrategias de un jugador es la clase de aquellas donde la elección de la acción se realiza mediante un procedimiento aleatorio, en este caso tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.

En un juego finito no cooperativo de N *personas, una estrategia mixta* γ^i *para el jugador* i *es una medida de probabilidad en* A_i*. El conjunto de todas las estrategias mixtas para el jugador* i *se denota por* S_i *y el producto* $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N$ *se denota por* S*.*

Si el conjunto de acciones del jugador i es $A_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$, entonces γ^i se puede representar por el vector $(\gamma^i_1, \gamma^i_2, \ldots, \gamma^i_{m_i})$, donde $\gamma^i_j = \gamma^i(j)$ y j es un elemento de A_i. En este caso, cuando el jugador i utiliza la estrategia mixta γ^i, la componente γ^i_j representa la probabilidad de que el jugador elija la acción j.

Si además, el vector γ^i tiene la forma $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, entonces se dice que γ^i es la estrategia pura δ^i_k, donde i es el jugador al que nos referimos y k es la acción a la que se le asigna probabilidad 1. La estrategia pura δ^i_k es simplemente aquella estrategia mixta γ^i tal que $\gamma^i_j = \delta_{jk}$, donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Una estrategia pura se interpreta como la estrategia en la que un jugador utiliza siempre la misma acción.

Cuando el conjunto de acciones es finito, también podemos representar al conjunto S_i como el subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$,

$$S_i = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \ : \ s_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{m_i} s_j = 1\} \ .$$

Similarmente S es subconjunto de $\mathbb{R}^{m_1+m_2+\ldots+m_N}$ y a continuación enunciamos un resultado importante al respecto.

Lema 2.4.

En un juego finito no cooperativo de N personas, S es un subconjunto acotado, cerrado y convexo de $\mathbb{R}^m$, donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$.

Demostración.

Primero probamos que S es acotado. Cada conjunto S_i consta de elementos en $\mathbb{R}^{m_i}$ de componentes no negativas cuya suma es 1, entonces

$$S_i \subset \{(a_1, a_2, \ldots, a_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \ : \ 0 \leqslant a_j \leqslant 1 \quad \forall \ j\} \ ,$$

el cual es acotado. Luego el conjunto S es acotado.

Probaremos que S es cerrado. Sea $\theta_n = ((\theta_n)^1, (\theta_n)^2, \ldots, (\theta_n)^N) \in S$ una sucesión convergente a $\theta = (\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^N)$. Para mostrar que θ también es elemento de S probaremos que cada θ^i es una medida de probabilidad.

Tenemos que $(\theta_n)^i_j \geqslant 0 \quad \forall \ n$, por ser cada una de ellas una medida de probabilidad, entonces $\theta^i_j \geqslant 0$. También tenemos que $\sum_{j=1}^{m_i} (\theta_n)^i_j = 1 \quad \forall \ n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m_i} (\theta_n)^i_j = 1$$

pero por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m_i} (\theta_n)^i_j = \sum_{j=1}^{m_i} \lim_{n\to\infty} (\theta_n)^i_j = \sum_{j=1}^{m_i} \theta^i_j$$

y por lo tanto $\sum_{j=1}^{m_i} \theta_j^i = 1$. Esto significa que cada θ^i es medida de probabilidad y $\theta \in S$.

Finalmente probaremos que S es convexo. Sean $\gamma, \rho \in S$, hay que probar que $\alpha\gamma + (1-\alpha)\rho \in S$ para cualquier α en el intervalo $[0,1]$, que equivale a demostrar que cada componente $\alpha\gamma^i + (1-\alpha)\rho^i$ es una medida de probabilidad.

Tenemos que $\alpha, (1-\alpha), \gamma_j^i, \rho_j^i \geqslant 0$, entonces $\alpha\gamma_j^i + (1-\alpha)\rho_j^i \geqslant 0$. Haciendo cálculos vemos que

$$\sum_{j=1}^{m_i} [\alpha\gamma_j^i + (1-\alpha)\rho_j^i] = \alpha \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_j^i + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{m_i} \rho_j^i = \alpha + 1 - \alpha = 1 \ ,$$

entonces $\alpha\gamma^i + (1-\alpha)\rho^i$ es una medida de probabilidad y por lo tanto S es convexo.

Así, hemos demostrado que S es compacto y convexo. $\square$

Definición 2.5.

En un juego finito no cooperativo de N personas, para $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^N) \in S$, definimos la función de ganancia $R_i : S \to \mathbb{R}$ para el jugador i como

$$R_i(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^N) = \sum_{j_N=1}^{m_N} \cdots \sum_{j_1=1}^{m_1} \gamma_{j_1}^1 \gamma_{j_2}^2 \ldots \gamma_{j_N}^N r_i(j_1, j_2, \ldots, j_N) \ ,$$

donde el conjunto A_k del k-ésimo jugador consta de m_k acciones posibles.

Similarmente, definimos las funciones $R_{ij} : S \to \mathbb{R}$ para cada acción j del jugador i como

$$R_{ij}(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^{i-1}, \gamma^i, \gamma^{i+1}, \ldots, \gamma^N) = R_i(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^{i-1}, \delta_j^i, \gamma^{i+1}, \ldots, \gamma^N) \ ,$$

es decir, $R_{ij}(\gamma)$ es la ganancia del jugador i si éste cambia a la estrategia pura δ_j^i, mientras el resto de los jugadores conservan sus estrategias correspondientes.

Corolario 2.6.

En un juego finito no cooperativo de N personas, podemos expresar la función de ganancia R_i para $\gamma \in S$ como

$$R_i(\gamma) = \sum_{l=1}^{m_i} \gamma_l^i R_{il}(\gamma) \ ,$$

donde l recorre las acciones del jugador i.

Demostración.

Demostrarlo es sólo cuestión de desarrollar la expresión de R_i sumando de forma adecuada:

$$\begin{aligned} R_i(\gamma) &= \sum_{j_i=1}^{m_i} \gamma_{j_i}^i \left(\sum_{j_N=1}^{m_N} \dots \sum_{j_{i-1}=1}^{m_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{m_{i+1}} \dots \sum_{j_1=1}^{m_1} \gamma_{j_1}^1 \dots \gamma_{j_{i-1}}^{i-1} \gamma_{j_{i+1}}^{i+1} \dots \gamma_{j_N}^N r_i(j_1, \dots, j_N) \right) \\ &= \sum_{j_i=1}^{m_i} \gamma_{j_i}^i R_{ij_i}(\gamma) = \sum_{l=1}^{m_i} \gamma_l^i R_{il}(\gamma) \ , \end{aligned}$$

donde j_i recorre las acciones del jugador i y podemos denotarlo por l. □

2.3 Existencia de Equilibrios de Nash

Definición 2.7.

En un juego finito no cooperativo de N personas, un equilibrio de Nash es un elemento $\rho = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N)$ de S tal que para cada $i \in I$,

$$R_i(\rho) \geqslant R_i(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{i-1}, \beta^i, \rho^{i+1}, \dots, \rho^N) \quad \forall \ \beta^i \in S_i \ .$$

En palabras, desde la perspectiva de cada jugador i, si las estrategias del resto de los jugadores están fijas como las respectivas ρ^j, entonces ρ^i es una estrategia que optimiza la ganancia del jugador i. Ahora, desde un punto de vista exterior, considerando a los jugadores como un todo, ρ es un estado en el cual a ningún jugador le conviene cambiar de estrategia pues su ganancia podría disminuir.

Para juegos finitos no cooperativos se puede caracterizar un equilibrio de Nash a través de su comportamiento con respecto a las estrategias puras de cada jugador. Tenemos un equilibrio de Nash si para cada jugador, la ganancia al aplicar su estrategia mixta supera la ganancia si aplicara cualquiera de sus estrategias puras posibles. Demostramos este resultado en el siguiente lema.

Lema 2.8.
En un juego finito no cooperativo de N personas, $\rho = (\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^N) \in S$ es equilibrio de Nash si y sólo si para cada $i \in I$,

$$R_i(\rho) \geqslant R_{ij}(\rho) \quad \forall\, j \in A_i \ , \tag{2.1}$$

donde A_i es el conjunto de acciones posibles del jugador i.

Demostración.
Si ρ es equilibrio de Nash, la desigualdad se cumple trivialmente. Ahora, para un jugador i fijo, sea $\beta^i \in S_i$ una estrategia mixta arbitraria. Si ρ satisface (2.1), naturalmente también se cumplen las desigualdades:

$$\beta^i_j R_i(\rho) \geqslant \beta^i_j R_{ij}(\rho) \quad \forall\, j \in A_i \ .$$

Sumando sobre el índice j, debido a que $\sum_{j=1}^{m_i} \beta^i_j = 1$ y al Corolario 2.6 tenemos

$$\begin{aligned} R_i(\rho) = \sum_{j=1}^{m_i} \beta^i_j R_i(\rho) &\geqslant \sum_{j=1}^{m_i} \beta^i_j R_{ij}(\rho) \\ &= R_i(\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^{i-1}, \beta^i, \rho^{i+1}, \ldots, \rho^N) \quad \forall\, \beta^i \in S_i \ . \end{aligned}$$

Esto se cumple para cada jugador y entonces ρ es un equilibrio de Nash para el juego. $\square$

Este concepto de equilibrio fue introducido por J. Nash en su artículo [11], en donde demuestra el siguiente Teorema, el cual es uno de los resultados más importantes en Teoría de Juegos.

Teorema 2.9.
Todo juego finito no cooperativo de N personas tiene un equilibrio de Nash en S.

Demostración.
Sea $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^N) \in S$. Para cada jugador i y cada una de sus posibles acciones j, definimos la función $\varphi_{ij} : S \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_{ij}(\gamma) = max(0, R_{ij}(\gamma) - R_i(\gamma)) \ , \tag{2.2}$$

para cada i, j en el rango $i = 1, 2, \ldots, N$ y $j = 1, 2, \ldots, m_i$. Esta función es continua en S, pues tanto R_{ij} como R_i lo son por ser combinación lineal de sus componentes y por lo tanto su diferencia es continua, como el máximo de dos funciones continuas es continuo, entonces φ_{ij} es continua.

Luego, si $\gamma^i = (\gamma^i_1, \gamma^i_2, \ldots, \gamma^i_{m_i})$ definimos

$$(\gamma^i_j)' = \frac{\gamma^i_j + \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} \ . \tag{2.3}$$

Probaremos que $(\gamma^i)' = ((\gamma^i_1)', (\gamma^i_2)', \ldots, (\gamma^i_{m_i})')$ es un elemento de S_i, es decir, $(\gamma^i_j)' \geqslant 0$ y $\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma^i_j)' = 1$.

Para la primera parte, por definición $\varphi_{ij} \geqslant 0$ y $\gamma^i_j \geqslant 0$ por ser γ^i una medida de probabilidad, entonces el numerador de $(\gamma^i_j)'$ es no negativo y el denominador es positivo, de donde se sigue que $(\gamma^i_j)' \geqslant 0$.

Para la segunda parte, simplemente hacemos los cálculos necesarios:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma^i_j)' &= \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\gamma^i_j + \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} \right) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma^i_j + \varphi_{ij}(\gamma))}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} \\ &= \frac{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} = 1 \ ,\end{aligned}$$

por lo tanto $(\gamma^i)' \in S_i \quad \forall\, i$.

Ahora sea $T : S \to S$ la función definida por

$$T(\gamma) = \gamma' \ .$$

La función T es continua pues como ya vimos, todas las funciones φ_{ij} son continuas. Además, por el lema Lema 2.4 S es cerrado, acotado y convexo. Por lo tanto T cumple con las hipótesis del Lema 1.21 y por lo tanto tiene al menos un punto fijo. Sea $\rho = (\rho^1, \ldots, \rho^N) \in S$ un punto fijo de T. Probaremos que ρ es un equilibrio de Nash para el juego.

Centramos nuestra atención en el jugador i, sea $l \in A_i$ tal que

$$\begin{aligned} &R_i(\rho^1, \ldots, \rho^{i-1}, \delta_l^i, \rho^{i+1}, \ldots, \rho^N) = \\ &\qquad min\{R_i(\rho^1, \ldots, \rho^{i-1}, \delta_k^i, \rho^{i+1}, \ldots, \rho^1) \ : \ k = 1, 2, \ldots, m_i\} \ . \end{aligned}$$

Podemos notar que lo anterior se puede expresar como $R_{il}(\rho) \leqslant R_{ik}(\rho) \quad \forall\, k \in A_i$, que es simplemente pedir que δ_l^i sea la estrategia pura que le da la menor ganancia al jugador i.

Teniendo $R_{il}(\rho) \leqslant R_{ik}(\rho) \quad \forall\, k$, es inmediato que

$$R_{il}(\rho) \leqslant \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k R_{ik}(\rho) \ ,$$

siempre que $\sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k = 1$. Luego $R_{il}(\rho) \leqslant R_i(\rho)$ y de la ecuación (2.2) es claro que $\varphi_{il}(\rho) = 0$.

Utilizando lo anterior y tomando en cuenta que ρ es punto fijo, de la ecuación (2.3) obtenemos

$$\rho_l^i = \frac{\rho_l^i + \varphi_{il}(\rho)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\rho)} = \frac{\rho_l^i}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\rho)} \ ,$$

de donde se sigue que $1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\rho) = 1$ y entonces $\varphi_{ik}(\rho) = 0 \quad \forall\, k$.

Esto implica que $R_i(\rho) \geqslant R_{ij}(\rho) \quad \forall\ j \in A_i$. Como nuestra elección del jugador i fue arbitraria, lo anterior se cumple para todo jugador y por el Lema 2.8, ρ es un equilibrio de Nash. $\square$

2.4 Juegos de imitación

Definición 2.10.

Sea Γ un juego no cooperativo de dos personas y sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, los conjuntos de acciones posibles para el primer y segundo jugador respectivamente. Diremos que Γ es un juego de imitación, si la función de recompensa r_2 del segundo jugador es

$$r_2(a_i, b_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m \ ,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. En este caso le llamamos líder al primer jugador e imitador al segundo.

Vale la pena mencionar que algunos autores exigen que los conjuntos de acciones posibles para el líder e imitador sean los mismos. Preferimos hacer la definición para conjuntos arbitrarios con la misma cantidad de elementos pues es más general, siendo la otra definición un caso particular de ésta, pero debe notarse que los conjuntos de acciones posibles deben considerarse ordenados.

Observamos que en un juego de imitación, la función de ganancia R_2 del imitador tiene la forma

$$R_2(\gamma^1, \gamma^2) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^1 \gamma_i^2 \tag{2.4}$$

donde γ^1, γ^2 son estrategias mixtas del líder e imitador respectivamente.

Corolario 2.11.

Todo juego de imitación tiene al menos un equilibrio de Nash.

Demostración.

Un juego de imitación es un caso particular de un juego finito no cooperativo, por el Teorema 2.9 tiene al menos un equilibrio de Nash. □

Definición 2.12.

El soporte de una estrategia mixta $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m_i}^i)$, es el conjunto de índices j tales que $\gamma_j^i > 0$ y lo denotamos por sop(γ^i).

Lema 2.13.

Sea Γ un juego de imitación. Si (α, β) es un equilibrio de Nash para Γ, entonces el soporte de β está contenido en el soporte de α.

Demostración.

Sea R_2 la función de ganancia del imitador y supóngase que cada jugador tiene m acciones posibles.

Sea $l \in sop(\beta)$, para probar que $\alpha_l > 0$ supongamos que no es así. Dado que $\alpha_l = 0$, existe otro índice k tal que $\alpha_k > 0$.

Consideremos la estrategia mixta $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ donde $\theta_l = 0$, $\theta_k = \beta_k + \beta_l$ y $\theta_i = \beta_i \quad \forall\ i \neq k, l$. A partir de la expresión para R_2 en (2.4), se tiene que $R_2(\alpha, \theta) > R_2(\alpha, \beta)$, lo cual contradice que (α, β) sea un equilibrio de Nash. Por lo tanto $sop(\beta) \subset sop(\alpha)$. □

Definición 2.14.

Sea Γ un juego de imitación y β una estrategia mixta del imitador. Para el líder una respuesta óptima a β es una estrategia mixta $\alpha \in S_1$ tal que

$$R_1(\alpha, \beta) \geqslant R_1(\gamma^1, \beta) \quad \forall\ \gamma^1 \in S_1\ .$$

Similarmente, se dice que δ_l^1 *es una respuesta óptima pura a* β *si*

$$R_1(\delta_l^1, \beta) \geqslant R_1(\delta_j^1, \beta) \quad \forall\ j \in A_1\ .$$

En palabras, una respuesta óptima del líder es una estrategia mixta que optimiza su ganancia, dado que la estrategia mixta del imitador se considera fija.

Lema 2.15.

Sea Γ *un juego de imitación. Si* (α, β) *es un equilibrio de Nash para* Γ*, entonces el soporte de* α *está contenido en el conjunto de los índices* i *tales que* δ_i^1 *es una respuesta óptima pura del líder a* β*.*

Demostración.

Sea R_1 la función de ganancia del líder y digamos que ambos jugadores cuentan con m acciones cada uno.

Sea $l \in sop(\alpha)$, para demostrar que $R_{1l}(\alpha, \beta) \geqslant R_{1j}(\alpha, \beta) \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, m$, lo haremos por contradicción, suponiendo que existe otro índice k tal que $R_{1k}(\alpha, \beta) > R_{1l}(\alpha, \beta)$.

Consideremos la estrategia mixta para el líder $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ donde $\theta_l = 0$, $\theta_k = \alpha_k + \alpha_l$ y $\theta_i = \alpha_i$ para $i \neq k, l$. La ganancia del líder para (α, β) puede expresarse como

$$R_1(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i R_{1i}(\alpha, \beta)\ ,$$

mientras que para (θ, β) es

$$R_1(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i R_{1i}(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i R_{1i}(\alpha, \beta) + \alpha_l (R_{1k}(\alpha, \beta) - R_{1l}(\alpha, \beta))\ ,$$

por la elección de las componentes de θ. Debido a que $R_{1k}(\alpha, \beta) > R_{1l}(\alpha, \beta)$ y $\alpha_l > 0$, podemos apreciar que $R_1(\theta, \beta) > R_1(\alpha, \beta)$.

Hemos llegado a una contradicción de nuestra hipótesis de que (α, β) es un equilibrio de Nash, con lo cual finalizamos la demostración del lema. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Kakutani

3.1 Introducción

En este último capítulo, nuestro propósito es demostrar el Teorema de Kakutani, el cual es un teorema de punto fijo para correspondencias. Empezaremos entonces por definir lo que son las correspondencias, también conocidas como multifunciones. Adicionalmente definiremos vecindad de un conjunto, el concepto de semicontinuidad superior de una correspondencia y la distancia de un punto a un conjunto.

Luego estableceremos algunos resultados generales. Uno acerca de sucesiones en un conjunto compacto, otro sobre la distancia de un punto a un conjunto y uno último acerca de vecindandes cerradas y convexas de un conjunto. Utilizando estos resultados y los del capítulo anterior podremos demostrar el teorema.

Como puede observarse, este capítulo consiste de muchas definiciones y unos cuantos resultados que finalmente culminan en la demostración del Teorema de Kakutani. Esto sólo es posible debido al trabajo previo, especialmente los resultados acerca de los juegos de imitación. La demostración que aquí presentamos es relativamente nueva, propuesta en el 2005 por Andrew McLennan y Rabee Tourky en sus trabajos [8, 9].

3.2 Correspondencias

Denotamos por $P(A)$ al conjunto potencia de A, es decir,

$$P(A) = \{B \ : \ B \subset A\} \ .$$

Definición 3.1.

Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia de X en Y es una función $\varphi : X \to P(Y)$, que a cada punto x en X le asigna un subconjunto no vacío $\varphi(x)$ de Y.

Definición 3.2.

Una vecindad de un conjunto A es cualquier conjunto V tal que existe un abierto B que satisface $A \subset B \subset V$.

Definición 3.3.

Sean X, Y espacios métricos. Una correspondencia $\varphi : X \to P(Y)$ es semicontinua superiormente en $x \in X$ si para cada vecindad U de $\varphi(x)$, existe una vecindad V de x tal que si $z \in V$ entonces $\varphi(z) \subset U$.

La correspondencia φ se dice ser semicontinua superiormente en X si es semicontinua superiormente en todo punto $x \in X$.

Ejemplo 3.4.

Los ejemplos más sencillos de correspondencias semicontinuas superiormente son las correspondencias constantes. Es decir, correspondencias $\varphi : X \to P(Y)$, tales que $\varphi(x) = A \quad \forall \ x \in X$, donde A es un subconjunto de Y.

Demostrarlo no es díficil. Sea $x \in X$ arbitrario, entonces para cualquier vecindad U de A, existe la vecindad $V = X$ de x tal que si $z \in X$ entonces $\varphi(z) = A \subset U$, debido a que U es vecindad de A.

Ejemplo 3.5.

Considere la correspondencia $\varphi : [0,2] \to P([0,4])$ *definida por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{2\} & si\ x = 1\ , \\ [0,4] & si\ x \neq 1\ . \end{cases}$$

Esta correspondencia no es semicontinua superiormente en el 1. Para la vecindad $[1,3]$ *de* $\varphi(1) = \{2\}$*, cualquier vecindad del* 1 *contiene un punto cuya imagen bajo* φ *es el* $[0,4]$*, el cual no está contenido en* $[1,3]$*. Aunque* φ *es constante en su dominio excepto sólo por el* 1*, no es semicontinua superiormente.*

Por otro lado, la correspondencia $\psi : [0,2] \to P([0,4])$ *definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} \{2\} & si\ x \neq 1\ , \\ [0,4] & si\ x = 1\ , \end{cases}$$

es semicontinua superiormente. También lo es la correspondencia $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *definida por*

$$\phi(x) = [0,x]\ .$$

Las anteriores son ejemplos de correspondencias no constantes y semicontinuas superiormente.

Definición 3.6.

Para una correspondencia $\varphi : X \to P(X)$*, un punto fijo es un punto* $x \in X$ *tal que* $x \in \varphi(x)$*.*

3.3 Lemas preliminares

Lema 3.7.

Si C *es un conjunto compacto de un espacio normado y* $\{x_n\}$ *una sucesión en* C*,* *entonces*

$$\lim_{m\to\infty}\min_{i\leqslant m}||x_i - x_{m+1}|| = 0$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la cubierta $\{B_{\varepsilon/2}(x)\}_{x\in C}$ del compacto C. Entonces existe una colección de puntos $G = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ tal que $\{B_{\varepsilon/2}(z_i)\}_{z_i\in G}$ es una subcubierta finita de C.

Después de esto, la idea intuitiva es que la sucesión $\{x_n\}$ ocupa a lo más l de éstas k bolas, una vez ocupadas las l bolas siempre existirá un índice i tal que x_i y x_{m+1} están en la misma bola y por lo tanto el mínimo de las normas es menor que ε. A continuación desarrollamos esto formalmente.

Sea $G' = \{z_i \in G \ : \ \exists\ x_j \in B_{\varepsilon/2}(z_i)\}$ y simplemente reorganizamos los índices como $G' = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$. Luego sean n_i tales que $x_{n_i} \in B_{\varepsilon/2}(y_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ y sea

$$N = \max_{i\leqslant l} n_i \ .$$

Si $m \geqslant N$, entonces $x_{m+1} \in B_{\varepsilon/2}(y_j)$ para algún $j \leqslant l$. Se sigue que

$$\min_{i\leqslant m}||x_i - x_{m+1}|| < \varepsilon \ ,$$

porque $x_{n_j} \in B_{\varepsilon/2}(y_j)$ con $n_j \leqslant m$, lo cual demuestra el lema. □

Definición 3.8.

Sea C un subconjunto de un espacio métrico (X, d). Definimos la distancia del punto x al conjunto C como

$$d(x, C) = inf\{d(x, y) \ : \ y \in C\}$$

Lema 3.9.

Sea C un subconjunto de un espacio métrico (X,d). Entonces para cualesquiera dos puntos $x,y \in X$ tenemos que

$$d(x,C) \leqslant d(x,y) + d(y,C) \ .$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$ y $z_0 \in C$ tal que $d(y,z_0) < d(y,C) + \varepsilon$. Tenemos que $d(x,C) \leqslant d(x,z)$ para toda $z \in C$, en particular se cumple para z_0. Se sigue que

$$d(x,C) \leqslant d(x,y) + d(y,z_0) < d(x,y) + d(y,C) + \varepsilon$$

y por lo tanto $d(x,C) \leqslant d(x,y) + d(y,C)$. □

Lema 3.10.

Sea C un conjunto cerrado y convexo en un espacio normado X y sea

$$W = \{V \subset X \ : \ V \textit{ es vecindad cerrada y convexa de } C\} \ ,$$

entonces $C = \bigcap_{V \in W} V$.

Demostración.

La contención $C \subset \bigcap_{V \in W} V$ es inmediata. Sea $x \in \bigcap_{V \in W} V$ y supongamos que $x \notin C$. Entonces $d(x,C) > 0$ ó de lo contrario x sería punto de acumulación y elemento de C. Sea $\alpha = d(x,C)/2$ y consideremos la vecindad

$$V_\alpha = \{y \in X \ : \ d(y,C) \leqslant \alpha\} \ ,$$

demostraremos que V_α es cerrada y convexa.

Sea $\{y_n\}$ una sucesión en V_α que converge a y, demostraremos que $y \in V_\alpha$. Por el Lema 3.9 tenemos

$$d(y,C) \leqslant d(y,y_n) + d(y_n,C) \leqslant d(y,y_n) + \alpha$$

y tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos $d(y, C) \leqslant \alpha$, por lo tanto $y \in V_\alpha$ y V_α es cerrado.

Sean $y, z \in V_\alpha$, se sigue que para $\varepsilon > 0$ existen $y', z' \in C$ con $||y - y'|| \leqslant \alpha + \varepsilon$ y $||z - z'|| \leqslant \alpha + \varepsilon$. Para cualquier $\theta \in [0, 1]$ tenemos

$$||[\theta y + (1 - \theta)z] - [\theta y' + (1 - \theta)z']|| \leqslant \theta||y - y'|| + (1 - \theta)||z - z'|| \leqslant \alpha + \varepsilon \ ,$$

donde $\theta y' + (1 - \theta)z' \in C$ por ser éste convexo, por lo tanto $\theta y + (1 - \theta)z \in V_\alpha$ y V_α es convexo.

Tenemos pues que V_α es una vecindad cerrada y convexa de C, sin embargo $x \notin V_\alpha$ y entonces $x \notin \bigcap_{V \in W} V$, lo cual es una contradicción. Nuestra suposición de que $x \notin C$ es falsa, lo que nos da la otra contención y demuestra el lema. $\square$

3.4 Demostración del Teorema de Kakutani

Teorema 3.11.

Sea C un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Si $F : C \to P(C)$ es una correspondencia semicontinua superiormente cuyos valores son cerrados y convexos, entonces F tiene al menos un punto fijo, es decir, existe un punto $x^* \in C$ tal que $x^* \in F(x^*)$.

Demostración.

Empezamos escogiendo un punto $x_1 \in C$ arbitrario y cualquier $y_1 \in F(x_1)$. Supongamos que los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C$ ya han sido elegidos.

Consideraremos el juego de imitación donde el conjunto de acciones del líder es $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, el del imitador es $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ y donde la función de recompensa a^n del líder está dada por

$$a^n(x_i, y_j) = -||x_i - y_j||^2 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Sea (α^n, β^n) un equilibrio de Nash del juego de imitación descrito.

Ahora escogemos los siguientes términos de la sucesión recursivamente como

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n y_j, \qquad y_{n+1} \in F(x_{n+1}) \ . \tag{3.1}$$

Procedemos a probar que el soporte de β^n es subconjunto del conjunto M de los índices i para los cuales $||x_i - x_{n+1}||$ es mínimo. Utilizaremos esto más adelante para concluir la demostración.

Para cada i fija tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n a^n(x_i, y_j) = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n ||x_i - y_j||^2 &= -\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n ||(x_i - x_{n+1}) + (x_{n+1} - y_j)||^2 \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n < x_i - x_{n+1}, x_i - x_{n+1} > \\ &\quad - 2\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n < x_i - x_{n+1}, x_{n+1} - y_j > \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n < x_{n+1} - y_j, x_{n+1} - y_j > \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notamos que por la definición de x_{n+1} en (3.1) tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n (x_{n+1} - y_j) \ = \ x_{n+1} \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n y_j \ = \ x_{n+1} - x_{n+1} \ = \ 0 \ ,$$

usando esto y la bilinealidad del producto interior obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n < x_i - x_{n+1}, x_{n+1} - y_j > = < x_i - x_{n+1}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n (x_{n+1} - y_j) > = \ 0 \ . \tag{3.3}$$

De las ecuaciones (3.2) y (3.3) obtenemos la expresión

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n a^n(x_i, y_j) = -||x_i - x_{n+1}||^2 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n ||x_{n+1} - y_j|| \ . \tag{3.4}$$

Si el líder utiliza la estrategia pura $\delta^1_{x_i}$, entonces su ganancia es precisamente $\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n a^n(x_i, y_j)$. Se sigue que una respuesta óptima pura del líder a (α^n, β^n) minimiza $||x_i - x_{n+1}||$, porque el otro sumando de la ganancia en (3.4) no depende de i. Por el Lema 2.13 tenemos que $sop(\beta^n) \subset sop(\alpha^n)$ y por el Lema 2.15 que $sop(\alpha^n) \subset M$, entonces el soporte de β^n es subconjunto de M.

Sea x^* un punto de acumulación de la sucesión (x_n) y V una vecindad cerrada y convexa de $F(x^*)$. Como F es semicontinua superiormente, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$||x - x^*|| < \varepsilon \quad \text{implica} \quad F(x) \subset V \ . \tag{3.5}$$

Como x^* es punto de acumulación de la sucesión (x_n), hay una subsucesión (x_{n_k}) tal que x_{n_k+1} converge a x^* y por lo tanto existe una N_1 tal que

$$||x_{n_k+1} - x^*|| < \varepsilon/2 \quad \forall\ n_k \geqslant N_1 \ . \tag{3.6}$$

Por el Lema 3.7 existe una N_2 tal que

$$\min_{i \leqslant n_k} ||x_i - x_{n_k+1}|| < \varepsilon/2 \quad \forall\ n_k \geqslant N_2 \ .$$

Si además $\beta_i^{n_k} > 0$ entonces

$$||x_i - x_{n_k+1}|| = \min_{j \leqslant n_k} ||x_j - x_{n_k+1}|| < \varepsilon/2 \quad \forall\ n_k \geqslant N_2 \ , \tag{3.7}$$

porque el soporte de β^{n_k} está contenido en M. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces por las ecuaciones (3.6) y (3.7), para cada $n_k \geqslant N$ obtenemos

$$||x_i - x^*|| \leqslant ||x_i - x_{n_k+1}|| + ||x_{n_k+1} - x^*|| < \varepsilon \quad \forall\ \beta_i^{n_k} > 0 \ ,$$

La ecuación anterior junto con la ecuación (3.5) implican que $F(x_i) \subset V$, por lo tanto $y_i \in V$ cuando $\beta_i^{n_k} > 0$, $n_k \geqslant N$.

Como V es convexo, se tiene que

$$x_{n_k+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{n_k} y_i \in V \quad \forall\ n_k \geqslant N \ ,$$

pues acabamos de probar que $y_i \in V$ para el soporte de β^{n_k}. Como además V es cerrado obtenemos que $x^* \in V$, porque x_{n_k+1} converge a x^* y V contiene todos los puntos x_{n_k+1} para $n_k \geqslant N$. Puesto que $F(x^*)$ es cerrado y convexo, del Lema 3.10 se sigue que

$$F(x^*) = \bigcap_{V \in W} V \ ,$$

donde W es la familia de vecindades cerradas y convexas de $F(x^*)$. Dado que probamos que $x^* \in V$ para cualquiera de estas vecindades, se concluye que $x^* \in F(x^*)$, lo que demuestra el teorema. $\square$

Conclusiones

Es aquí donde concluimos este trabajo de tesis. En el primer capítulo de esta tesis presentamos una demostración sencilla, aunque extensa, del Teorema de Brouwer, sólo es necesario tener conocimientos básicos de análisis para darle seguimiento. La demostración se hizo de forma detallada, lo más claro posible y haciendo un mínimo de referencias a otras fuentes, con el propósito de dejarla al alcance del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, sin que tenga la necesidad de consultar numerosos libros y artículos a los cuales tal vez no tenga acceso. El segundo capítulo es una breve introducción a los conceptos básicos de la Teoría de Juegos, como lo son estrategia mixta, ganancia y equilibrio de Nash, entre otros. Ahí, demostramos el Teorema de Nash, donde adoptamos el enfoque de su creador al demostrarlo usando el Teorema de Brouwer. Posteriormente discutimos la clase particular de juegos de imitación, la cual utilizaríamos en el último capítulo. En el tercer capítulo se sentaron las bases para enunciar el Teorema de Kakutani y luego demostrarlo, a través de herramientas de Teoría de Juegos.

En esencia, demostramos el Teorema de Brouwer, a partir de éste demostramos el Teorema de Nash y aplicándolo a un caso particular obtuvimos el Teorema de Kakutani. Además, como se observó en la introducción, el Teorema de Kakutani es una generalización del Teorema de Brouwer. Hemos completado entonces un ciclo entre los tres resultados que estudiamos en este trabajo, es decir, podemos obtener cualquiera de los resultados a partir de otro de ellos. Lo expuesto en esta tesis hace evidente la fuerte relación entre áreas tan distintas de la Matemática como son el análisis matemático y la Teoría de Juegos.

Bibliografía

[1] C.D. Aliprantis, K.C. Border (2006), *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Verlag

[2] T.M. Apostol (1981), *Análisis Matemático (2da edición)*. Reverté

[3] P. Billingsley (1979), *Probability and Measure*. Wiley

[4] K.C. Border (1999), *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press

[5] C. Chapman (2002), *Real Mathematical Analysis*. Springer-Verlag

[6] J. Franklin (1980), *Methods of Mathematical Economics*. Springer-Verlag

[7] D. Gale (1979), *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem*. American Mathematical Monthly 86-10: 818-827

[8] A. Mclennan, *Kakutani's Fixed Point Theorem: A new proof*. http://www.econ.umn.edu/~mclennan/Classes/Ec8103/Lectures/ec8103-lec04.pdf

[9] A. Mclennan, R. Tourky, *From imitation games to Kakutani*. http://www.econ.umn.edu/~mclennan/Classes/Ec8103/Lectures/kakutani24.pdf

[10] J. Milnor (1978), *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem*. American Mathematical Monthly 85-7: 521-524

[11] J. Nash (1951), *Non-cooperative Games*. Annals of Mathematics 54: 286-295

[12] A.C. Thompson (1984), *Theory of Correspondences*. Wiley