EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

U N I V E R S I D A D   D E   S O N O R A

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

" LA TEORIA DE DISTRIBUCIONES Y SUS APLICACIONES
A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES "

TESIS PROFESIONAL:

EDUARDO TELLECHEA ARMENTA.

Hermosillo, Sonora, Mayo de 1981.

I N T R O D U C C I O N

En el presente trabajo se pretende dar, de una manera breve, un panorama general de la teoría matemática de las Distribuciones, ejemplificando algunas de sus aplicaciones a la teoría cuantitativa de las Ecuaciones Diferenciales.

El concepto de Distribución, que generaliza el concepto de función, trabajado inicialmente por el físico británico P.A.M. DIRAC, cuando a fines de la década de los veintes, introdujo la "función" δ , la cual tiene la propiedad de ser igual a cero en todo $\mathbb{R}$, excepto en el origen, y tal que su integral en todo $\mathbb{R}$ es igual a 1. Es claro que δ no define una función en el sentido acostumbrado, y los intentos, fructíferos, de dar rigor a la teoría por parte de matemáticos como el soviético SOVOLEV y el francés SCHWARTZ, dieron origen a la moderna teoría de las Distribuciones, donde la δ se define como un operador sobre un espacio de funciones.

Desgraciadamente la mayoría de las presentaciones, o bien enfatizan los aspectos matemáticos de la teoría, elevándola a un alto nivel de abstracción, o bien, desdeñando los detalles de rigor matemático, enfatizan las aplicaciones de las Distribuciones en diversos campos. En la presente tesis buscamos un balance en ambas direcciones, presentando la teoría necesaria para justificar el uso de Distribuciones en problemas físicos modelados por ecuaciones diferenciales. Las partes más abstractas se tratan en los apéndices, y la presentación elemental de la teoría, está desarrollada en el capítulo I. En el capítulo II se aprovecha la teoría desarrollada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, y luego, una ecuación en derivadas parciales: la ecuación del calor.

Desde luego que no se trata de un trabajo exhaustivo, y muchos ejemplos interesantes no fueron cubiertos. Tampoco se presentó la teoría en su máxima generalidad. El lector interesado puede referirse a la bibliografía para ahondar en el tema.

Creemos que el presente trabajo puede ser de utilidad a los estudiantes de Física y Matemáticas del séptimo y octavo semestre, con conocimientos mínimos de Topología y Análisis Funcional. También podría servir para cursos de Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.

I N D I C E

C A P I T U L O   I

TEORIA DE DISTRIBUCIONES.

En este capítulo daremos la definición y propiedades básicas de los objetos matemáticos conocidos como DISTRIBUCIONES o FUNCIONES GENERALIZADAS, las cuales surgen de una manera natural en situaciones donde la noción clásica de función es inadecuada, cuando es entendida en el sentido más general, como se verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1).- Una distribución lineal de masa puede ser convenientemente caracterizada, dando la densidad de la distribución. –

Si m(x) es la densidad de la distribución de la masa en un intervalo $[\alpha,\beta]$, entonces la masa total del sistema es:

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} m(x)dx$$

y la abscisa x_o del centro de masa es:

$$x_o = \frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta} xm(x)dx.$$

Sin embargo, ninguna función ordinaria puede especificar la densidad correspondiente a uno o más puntos con masa positiva. Para resolver este problema, se recurre a la "función" δ de Dirac, la cual tiene las siguientes propiedades:

a).- $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$

b).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$

Supongamos que tenemos un punto material de abscisa x_o y masa m_o. Este sistema puede caracterizarse completamente por la distribución de masa:

$m(x) = m_o\ \delta\ (x_o - x)$, pues la masa M la encontramos:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} m(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} m_o\ \delta\ (x_o - x)dx = m_o \int_{-\infty}^{\infty} \delta\ (x_o - x)dx = m_o,$$

y la abscisa del centro de masa es:

$$\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{\infty} xm_o\,\delta\ (x_o - x)dx = \frac{x_o m_o}{M}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\ (x_o - x)dx = \frac{x_o m_o}{m_o} = x_o.$$

Así, pues, mediante el uso de la "función" δ de Dirac, se pudo caracterizar completamente el sistema; sin embargo, es claro que δ no puede ser una función en el sentido clásico, pues, si una función se anula casi dondequiera, no puede tener integral positiva.

Ejemplo 2).- La gama de problemas en los cuales un proceso físico viene descrito mediante funciones continuas y diferenciables, puede ser ampliado de manera esencial, introduciendo en la discusión soluciones discontinuas de las ecuaciones que los describen; por ejemplo:

Si una cuerda consiste de dos trozos de diferente densidad, entonces, en la ecuación de la cuerda vibrante,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

el coeficiente será igual a una constante diferente en cada uno de los correspondientes trozos, y, por lo tanto, esta ecuación no tendrá, en general, soluciones clásicas, i.e., dos veces continuamente diferenciables.

Supongamos que el coeficiente a es constante, pero que la posición inicial de la cuerda tiene la forma de una línea quebrada, dada por la ecuación $U\big|_{t=0} = \varphi(x)$.

En el vértice de la línea quebrada, la función φ, evidentemente, no puede tener primera derivada; puede probarse que no exis te solución clásica de la ecuación de la cuerda vibrante que satisfaga las condiciones iniciales:

$$U\Big|_{t=0} = \varphi(x) , \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Dando un golpe brusco a cualquier segmento pequeño de la cuerda, las oscilaciones que resultan están descritas por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x,t),$$

donde $f(x,t)$ corresponde al efecto producido, y es una función discontinua, distinta de cero, solamente sobre el pequeño segmento de cuerda, y durante un corto intervalo de tiempo. Esta ecuación tampoco tiene solución clásica.

Así, pues, exigiendo la continuidad de las derivadas para la solución deseada, se restringe fuertemente la clase de problemas que podemos resolver.

En el ejemplo anterior está claro, desde el principio, que el problema en consideración no puede tener soluciones que sean dos veces continuamente diferenciables; en otras palabras, desde el punto de vista del enunciado clásico del problema, éste no tiene solución, no obstante que el correspondiente proceso físico sí ocurre.

1.- DEFINICION Y EJEMPLOS.

Consideremos el espacio dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathfrak{F})$, donde $\mathfrak{F}$ es la topología construida en el apéndice "B".

<u>Definición I.1.1.</u> A los elementos de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, el dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, les llamaremos DISTRIBUCIONES.

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \left\{ T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \;\middle|\; T \text{ es lineal y continuo} \right\}.$$

<u>Teorema I.1.1.</u> Sea $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ un operador lineal, entonces $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (i.e., T es una distribución) sii, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existen $C \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, tales que:

$$|T(\varphi)| \leq C P_N(\varphi), \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \quad .$$

<u>Demostración:</u> Consecuencia de los teoremas B.3 y B.4.

Ejemplo 1).- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable, i.e., para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty ,$$

entonces, el operador

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definido por:}$$

$$(1) \qquad T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

es una distribución, pues, obviamente, es lineal y, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto arbitrario y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_K |f(x)\, \varphi(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \max_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx, \text{ i.e.,}$$

$$|T_f(\varphi)| \leq CP_o(\varphi), \qquad \text{donde} \quad C = \int_K |f(x)|dx.$$

Como un caso particular, podemos obtener la distribución dada por la función de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

donde $T_\theta(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx$; a esta distribución le llamaremos "la distribución de Heaviside".

La función de Heaviside es usada en Electrónica con el nombre de "función unitaria".

Ejemplo 2).- Una distribución que se usa frecuentemente, y que no puede ser obtenida por la fórmula (1), es la distribución de Dirac δ_{x_o}, definida por:

$$\delta_{x_o} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\delta_{x_o}(\varphi) = \varphi(x_o), \qquad x_o \in \mathbb{R}^n.$$

$$\delta_{x_o}(\alpha\phi + \beta\Psi) = \alpha\,\delta(x_o) + \beta\Psi(x_o) = \alpha\,\delta_{x_o}(\phi) + \beta\,\delta_{x_o}(\Psi),$$

y, por lo tanto, δ_{x_o} es lineal.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto arbitrario y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$,
$|\delta_{x_o}(\varphi)| = |\varphi(x_o)| \leq 1 \cdot \max_{x\in K} |\varphi(x)| = 1 \cdot P_o(\varphi)$. De lo anterior concluimos que δ_{x_o} es una distribución.

Cuando $x_o = 0$, escribimos simplemente δ en lugar de δ_{x_o}, i.e., $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

En Electrónica, la distribución de Dirac es llamada "impulso unitario".

Ejemplo 3).- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces T_f es una distribución, pues, obviamente, T_f es lineal, y, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto arbitrario y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \, dx \leq \operatorname*{Max}_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \mu(K)^q \operatorname*{Max}_{x \, K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|^p \, dx,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Así, pues, $|T_f(\varphi)| \leq CP_0(\varphi)$, donde $C = \mu(K)^q \int_K |f(x)| \, dx$, y, por lo tanto, T_f es una distribución.

Ejemplo 4).- Introduciremos otra distribución que no puede ser obtenida por la fórmula (1), y que es muy usada en Mecánica Cuántica.

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, no es integrable en cualquier vecindad del origen. Consideremos la funcional F definida por el valor principal de la integral en el sentido de Cauchy.

$$F(\varphi) = VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx.$$

Es obvio que F es lineal. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un compacto arbitrario y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $K \subset [-\beta, \beta]$, entonces tenemos que:

$$F(\varphi) = VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \varphi(0) VP \int_{-\beta}^{\beta} \frac{dx}{x} +$$

$$+ VP \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx,$$

tomando en cuenta que:

$$\mathrm{VP}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{dx}{x} = 0 \text{ y que } \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \quad \text{es integrable.}$$

Ahora, usando el teorema del valor medio,

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\right| \leq \max_{-\beta\leq x\leq\beta} |\varphi'(x)| ,$$

y, en consecuencia,

$$|F(\varphi)| \leq \int_{-\beta}^{\beta}\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\right| dx \leq 2\beta \max_{-\beta\leq x\leq\beta}|\varphi'(x)| =$$

$= 2\beta P_1(\varphi)$, y, por lo tanto, F es una distribución, la cual será denotada por VP $\frac{1}{x}$ (y algunas veces simplemente por $\frac{1}{x}$), y lo escribiremos:

$$\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}(\varphi) = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

También podemos introducir la distribución $\ln|x|$, por la fórmula:

$$\ln|x|\ (\varphi) = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\ln|x|dx.$$

2.- EL PRODUCTO DE UNA DISTRIBUCION POR UNA FUNCION .

Introduciremos una operación que consiste en multiplicar distribuciones por funciones, de tal manera que extienda la operación de multiplicar dos funciones.

Si T_f es la distribución asociada a la función localmente integrable f, y ψ es una función infinitamente diferenciable, entonces es natural pedir que ψT_f sea la distribución asociada con ψf, i.e., $\psi T_f = T_{\psi f}$, y, si esto sucede, entonces:

$$\psi T_f(\varphi) = T_{\psi f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\psi\varphi)(x) dx =$$

$T_f(\psi\varphi)$. Así, pues, podemos dar la siguiente definición:

Definición I.2.1. Si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, definimos el producto de ψ y T como

$$(\psi T)(\varphi) = T(\psi\varphi), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Esta definición se justifica, pues $\psi\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y el mapeo $\varphi \longrightarrow \psi\varphi$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo es continuo.

Obsérvese que el producto de una distribución con una función infinitamente diferenciable, puede anularse sin que ninguno de los factores sea nulo; por ejemplo, tómese $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\psi(0) = 0$.
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\psi\delta)(\varphi) = \delta(\psi\varphi) = \psi(0)\varphi(0) = 0, \text{ y, por lo tanto, } \psi\delta = 0.$$

Más generalmente, si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\psi(x_0) = 0$, entonces

$$(\psi\delta_{x_0})(\varphi) = \delta_{x_0}(\psi\varphi) = \psi(x_0)\varphi(x_0) = 0, \text{ i.e., } \psi\delta_{x_0} = 0,$$

lo cual escribiremos

$$\psi(x)\delta(x-x_0) = 0, \text{ en particular, } x\delta(x) = 0.$$

En el caso de distribuciones definidas en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema I.2.1. Si $a(x)$ es una función infinitamente diferenciable, y $a'(0) \neq 0$, entonces $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisface

$$a(x)f = 0 \text{ sii } f = \alpha\delta, \text{ para algún escalar } \alpha.$$

Demostración: Es suficiente establecer este hecho en el caso $xf = 0$, pues

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{a'(0)} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es una función infinitamente diferenciable, y, si $a(x)f = 0$, entonces $xf = b(x)a(x)f = 0$, i.e., $xf = 0$. Inversamente, $xf = 0$, implica $a(x)f = 0$.

Probaremos, pues, que

$xf = 0$ sii $f = \alpha\delta$, para algún escalar α.

a).- ($\Leftarrow$) Si $f = \alpha\delta$, entonces $xf = \alpha \cdot x\delta = 0$, para cualquier escalar α.

b).- Si $xf = 0$, entonces $f(x\varphi) = (xf)(\varphi) = 0$, i.e., f se anula en el conjunto de las funciones $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que $\psi(x) = x\,\varphi(x)$, con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, el cual coincide con el conjunto de las funciones $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que $\psi(0) = 0$.

De hecho, si $\psi(0) = 0$, entonces la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \psi'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es infinitamente diferenciable y, por lo tanto, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, lo cual implica que $\psi(x) = x\,\varphi(x)$.

Sea ahora $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tal que $\varphi_0(0) = 1$. Entonces, para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$\varphi(x) = \lambda\varphi_0(x) + \psi(x)$, donde $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(0) = 0$ y $\lambda = \varphi(0)$;

así, pues, tenemos que:

$f(\psi) = f(x\,\varphi(x)) = 0$, y, por lo tanto,

$f(\varphi) = f(\lambda\varphi_0 + \psi) = \lambda f(\varphi_0) + f(\psi) = \lambda f(\varphi_0) = \varphi(0)f(\varphi_0) =$
$= \alpha\varphi(0) = \alpha\,\delta(\varphi)$, i.e.,

$f = \alpha\delta$, donde $\alpha = f(\varphi_0)$, que es lo que deseábamos probar.

Consideremos la distribución f de la forma

(2) $f(x) = VP\,\frac{1}{x} + \alpha\delta(x)$, con α escalar. Si multiplicamos amboa lados por $a(x) = x$, tendremos

$xf(x) = xVP\,\frac{1}{x} + x\,\alpha\delta(x) = xVP\,\frac{1}{x}$,

tomando en cuenta que $x\,\alpha\delta(x) = \alpha\,[x\,\delta(x)] = 0$, y

$$(x\mathrm{VP}\,\frac{1}{x})(\varphi) = (\mathrm{VP}\,\frac{1}{x})(x\varphi) = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1(\varphi),$$

i.e.,

(3) $\quad xf(x) = 1.$

Así pues, las distribuciones de la forma (2) son soluciones de (3), y veremos que el recíproco también es válido.

Como $x\mathrm{VP}\,\frac{1}{x} = 1$, entonces una solución de (3) es $f_o(x)=\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}$.

Si f_1 es otra solución, entonces

$xf_o(x) = xf_1(x)$, y, por lo tanto,

$x\,[f_1(x) - f_o(x)] = 0$, lo cual implica que

$f_1(x) - f_o(x) = \alpha\,\delta(x)$, i.e., $f_1(x) = \mathrm{VP}\,\frac{1}{x} + \alpha\,\delta(x)$.

Es un hecho conocido en la teoría de funciones, que la solución de la ecuación $xf(x) = 1$ es $f_1(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$, y no definida en $x = 0$. En la teoría de distribuciones, la solución de esta ecuación puede ser escrita simplemente

$$\frac{1}{x} + \alpha\,\delta(x).$$

Consideremos ahora el caso más general, una ecuación de la forma:

(4) $\quad a(x)f(x) = 1$, donde a es una función infinitamente diferenciable, tal que $a(0) = 0$ y $a(x) \neq 0$, para $x \neq 0$.

La solución de (4) es:

$f(x) = \frac{1}{a(x)} + \alpha\,\delta(x)$, donde $\frac{1}{a(x)}$ significa:

$$\frac{1}{a(x)}(\varphi) = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{a(x)}dx.$$

Se prueba fácilmente que f es solución de (4),

$$a(x)\left(\frac{1}{a(x)}\right)(\varphi) = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)a(x)}{a(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1(\varphi),$$ y, por lo

tanto, $a(x)f(x) = 1$.

3.- DIFERENCIACION DE DISTRIBUCIONES.

Definiremos la derivada de una distribución, de tal manera que generalice la derivada de funciones ordinarias, i.e., pediremos que, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces T'_f coincida con $T_{f'}$, i.e.,

$$T'_f(\varphi) = T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)dx = -T_f(\varphi')$$

Así, pues, debe cumplirse $T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi')$. Más generalmente, como

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x)\,\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)D^\alpha \varphi(x)dx \;:$$

Definición I.3.1. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y α es un multiíndice, definimos

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \text{ para } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

Obsérvese que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, pues, obviamente, $D^\alpha T$ es lineal, y, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto arbitrario y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$|(D^\alpha T)(\varphi)| = |T(D^\alpha \varphi)| \leq C \max_{\substack{|\beta+\alpha| \leq N \\ x \in K}} |D^{\beta+\alpha}\varphi(x)| \text{, i.e.,}$$

$|(D^\alpha T)(\varphi)| \leq CP_{N+|\alpha|}(\varphi)$, y, por lo tanto, $D^\alpha T$ es una distribución.

Cualquier distribución tiene derivadas sucesivas de todo orden, y puede intercambiarse el orden de diferenciación, pues,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\,\partial x_j}(\varphi) = (-1)^2 T\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) = T\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right), \text{ y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\, \partial x_i}\,(\varphi) = (-1)^2\, T\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j\, \partial x_i}\right) = T\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_j}\right),$$ pues φ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

Para el producto de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ por una función infinitamente diferenciable ψ , tenemos la fórmula usual de diferenciabilidad

$(\psi T)' = \psi' T + \psi T'$, pues, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$(\psi T)'(\varphi) = (-1)(\psi T)(\varphi') = -T(\psi \varphi') = -T((\psi\varphi)' - \psi'\varphi) =$
$- T(\psi\varphi)' + T(\psi'\varphi) = T'(\psi\varphi) + T(\psi'\varphi) = \psi T'(\varphi) + \psi' T(\varphi) =$
$(\psi T' + \psi' T)(\varphi)$.

Si una función localmente integrable f no tiene derivada continua, la derivada de la distribución T_f, en general, no es igual a la distribución definida por f'.

Consideremos, por ejemplo, la función de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Esta función tiene derivada $\theta'(x) = 0$, para $x \neq 0$. Para $x = 0$, la función no tiene derivada.

La distribución dada por la función $\theta'(x)$ es, obviamente, cero, mientras que la distribución dada por θ , tiene derivada θ' dada por la fórmula

$$\theta'(\varphi) = -\theta(\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Se sigue que la derivada de θ es la distribución δ .

(obsérvese que escribimos $\theta'(\varphi)$, en lugar de $T'_\theta(\varphi)$).

La segunda derivada de la función de Heaviside, es la derivada de la distribución δ , y está dada por la fórmula

$\theta''(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$.

En general, tenemos

$$\theta^{(n)}(\varphi) = \delta^{(n-1)}(\varphi) = (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(0).$$

También se cumple la igualdad

$$\delta^{(n)}(\varphi) = (-1)^{n} \varphi^{(n)}(0).$$

Nótese que si a(x) es una función real de variable real, con primera derivada continua en una vecindad del origen, entonces

(5) $a\delta' = a(0)\delta' - a'(0)\delta$, pues, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tenemos

$$(a\delta')(\varphi) = \delta'(a\varphi) = -(a\varphi)'(0) = -a(0)\varphi'(0) - a'(0)\varphi(0) =$$
$$= (a(0)\delta' - a'(0)\delta)(\varphi),$$ y esto implica (5).

En particular, si tomamos a(x) = x, entonces

$$x\delta' = -\delta.$$

Más generalmente, podemos establecer la igualdad

$$x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}, \text{ para } n \in \mathbb{N} .$$

Calcularemos ahora la derivada de la distribución definida por la función $\ln|x|$.

$$(\ln|x|)'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\ln|x|\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi'(x)\ln x\,dx + \right.$$
$$\left. + \int_{\varepsilon}^{\infty}\varphi'(x)\ln|x|\,dx\right] = -\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx -$$
$$-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \right.$$
$$\left. + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon\right],$$ y, como

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \varphi'(\gamma)(2\varepsilon), \text{ con } \gamma \in (-\varepsilon,\varepsilon) \text{ y } \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi'(\gamma) = \varphi'(0),$$

y $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0$, tenemos que

$$(\ln|x|)'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

i.e., $(\ln|x|)' = \mathrm{VP}\,\frac{1}{x}$.

Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definida por una función f, la cual tiene derivada continua para $x \neq x_0$, y supongamos también que f tiene límites laterales $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ en x_0. Entonces la derivada de T será

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = \int_{-\infty}^{x_0} \varphi'(x) f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\infty} \varphi'(x) f(x)\,dx =$$

$$= \varphi(x) f(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} \varphi(x) f'(x)\,dx + \varphi(x) f(x)\Big|_{x_0}^{\infty} -$$

$$- \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) f'(x)\,dx = \varphi(x_0)\left[f(x_0^-) - f(x_0^+)\right] -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f'(x)\,dx.$$

Si denotamos por $\{T'\}$ la distribución dada por la función f', y por $s(x_0) = [f(x_0^+) - f(x_0^-)]$ el salto de la función f en x_0, entonces la fórmula anterior nos da:

$$T' = \{T'\} + s(x_0)\,\delta_{x_0}.$$

Más generalmente, si f tiene derivada continua, casi dondequiera, excepto, posiblemente, en un conjunto de puntos aislados x_i, con saltos $s(x_i)$, entonces

$$T' = \{T'\} + \sum_i s(x_i)\,\delta_{x_i}.$$

Por ejemplo, consideremos la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x < 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \lambda = \beta - \gamma > 0.$$

En los puntos $x < 0$, f tiene derivada igual a cero, mientras que en los puntos $x > 0$, la derivada es igual a α. En el origen, la función f(x) tiene un salto igual a λ . Así, pues, la derivada de f, es la distribución

$f' = \alpha\,\theta + \lambda\,\delta$, donde θ es la función de Heaviside.

4.- CONVOLUCION DE DISTRIBUCIONES.

Para motivar la definición de convolución de dos distribuciones, consideremos primero el caso en que f y g son dos funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, una de las cuales tiene soporte compacto. Su convolución se define clásicamente como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Si f es una función definida en $\mathbb{R}^n$, definimos $\check{f}$ y $\tau_a f$ como $\check{f}(x) = f(-x)$, y, para cada $a \in \mathbb{R}^n$, $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$. Con esta notación $(\tau_x \check{f})(y) = \check{f}(y - x) = f(x - y)$, y

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x \check{f})(y)g(y)dy.$$

Así, pues, podemos definir la convolución de una distribución con una función infinitamente diferenciable de soporte compacto, de la siguiente manera:

<u>Definición I.4.1.</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos la CONVOLUCION de T y φ como:

$$(T * \varphi)(x) = T(\tau_x \check{\varphi}), \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \quad .$$

<u>Definición I.4.2.</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, definimos el SOPORTE de T como:

$$\text{Sop } T = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, V(x) \;\exists\; \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V(x)) \ni T(\varphi) \neq 0 \right\}.$$

OBSERVACIONES:

1).- Sop T es un conjunto cerrado.

Sea $x_0 \in (\text{Sop } T)^c$, entonces existe $V(x_0)$, tal que $T(\varphi) = 0$, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V(x))$, i.e., $V(x_0) \subset (\text{Sop } T)^c$, y, por lo tanto, $(\text{Sop } T)^c$ es abierto, de lo cual concluimos que Sop T es cerrado.

2).- $T = 0$ en $(\text{Sop } T)^c$.

3).- Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, tal que $(\text{Sop } T) \cap (\text{Sop } \varphi) = \emptyset$, entonces $T(\varphi) = 0$.

Si $(\text{Sop } T) \cap (\text{Sop } \varphi) = \emptyset$, entonces $\text{Sop}\,\varphi \subset (\text{Sop } T)^c$, y, por lo tanto, $T(\varphi) = 0$.

Si T es una distribución de soporte compacto, podemos darle significado a la expresión $T(\psi)$, con $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, de la siguiente manera:

Sea $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi = 1$ en $K = \text{Sop } T$, entonces $\chi\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, y definimos $T(\psi) = T(\chi\psi)$.

$T(\psi)$ está bien definida, ya que no depende de la elección de χ, pues, si tomamos χ_1 con la misma propiedad que χ, entonces $[\text{Sop } (\chi_1 - \chi)\psi] \cap K = \emptyset$, i.e., $T[(\chi_1 - \chi)\psi] = 0$, y, por lo tanto, $T(\chi_1\psi) = T(\chi\psi)$.

<u>Teorema I.4.1.</u> Sean $U, V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y a,b constantes. Entonces

1).- $\text{Sop } (U * \phi) \subset \text{Sop } U + \text{Sop}\,\phi$.

2).- $U * (a\phi + b\psi) = a(U * \phi) + b(V * \psi)$.

3).- $(aU + bV) * \phi = a(U * \phi) + b(V * \phi)$.

4).- $U * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(U * \phi) = (D^\alpha U) * \phi = U * (D^\alpha \phi)$.

5).- $U * (\phi * \psi) = (U * \phi) * \psi$.

6).- $\tau_x(U * \phi) = U * (\tau_x \phi) = (\tau_x U) * \phi$.

Denotaremos por $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la topología del apéndice "B".

<u>Teorema I.4.2.</u> Sea $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $L_U : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, tal que $L_U(\phi) = U * \phi$, entonces L_U conmuta con traslación, i.e., $L_U(\tau_x \phi) = \tau_x L_U(\phi)$. Recíprocamente, si $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal

continuo, que conmuta con traslación, entonces existe una única distribución U tal que $L = L_U$.

<u>Demostración</u>: De las propiedades 2) y 6) del teorema I.4.1, se concluye que L_U es lineal y conmuta con traslación. Así, pues, sólo nos resta probar que L_U es continuo, i.e., probaremos que, si $\phi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces $U * \phi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, o, equivalentemente, $D^\alpha(U * \phi_n) \longrightarrow 0$ uniformemente en K, para todo $k \subset \mathbb{R}^n$ compacto, y α cualquier multiíndice.

Como $D^\alpha(U * \phi_n) = U * (D^\alpha \phi_n)$, sólo nos resta probar que $U * \phi_n \longrightarrow 0$ en K, si $\phi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Si $\phi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tal que Sop $\phi_n \equiv K_1$, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$(U * \phi_n)(x) = U[\tau_x \check{\phi}_n]$, y, para $x \in K$, Sop $\tau_x \check{\phi}_n(y) =$
$=$ Sop $\phi_n(x-y) \subset K - K_1$.

$$(U * \phi_n)(x) \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq N \\ y \in K-K_1}} \left| D_y^\alpha \tau_x \check{\phi}_n(y) \right|$$

$$(U * \phi_n)(x) \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq N \\ y \in K-K_1}} D_y^\alpha \phi_n(x-y) \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq N \\ z \in K_1}} \left| D_z^\alpha \phi_n(z) \right| \longrightarrow 0,$$

pues $\phi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y, por lo tanto, L_U es continuo.

Si $L(\phi) = L_U(\phi)$, entonces $L(\phi) = U * \phi$, i.e., para que $L = L_U$, necesitamos que $(L\check{\phi})(0) = (U * \phi)^\vee(0) = U(\phi)$. Así, pues, tomemos U tal que $U(\phi) \equiv (L\check{\phi})(0)$.

1).- $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pues es composición de operadores continuos.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\vee} & \mathcal{D} & \xrightarrow{L} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \phi & \longmapsto & \check{\phi} & \longmapsto & L\check{\phi} & \longrightarrow & (L\check{\phi})(0) \end{array}$$

2).- $L = L_U$.

$$[L_U(\phi)](x) = (U * \phi)(x) = U[\tau_x \check{\phi}] = L[(\tau_x \check{\phi})^\vee](0) =$$

$$= L[\tau_{-x}\phi](0) = [\tau_{-x} L(\phi)](0) = [L(\phi)](x), \text{ y,}$$

por lo tanto, $L = L_U$.

3).- Unicidad.

Supongamos que existe U_1 con la misma propiedad que U, i.e., $L_{U_1}(\phi) = L_U(\phi)$. Entonces $U_1 * \phi = U * \phi$, pero, en este caso, $U_1 = (U_1 * \phi^{\vee})(0) = (U * \phi^{\vee})(0) = U$, y, por lo tanto, $U_1 = U$, con lo cual queda demostrado el teorema.

Sean $U, V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con Sop V compacto, y L_U, L_V los operadores

$$\mathcal{D} \xrightarrow{L_U} \mathcal{E} \xrightarrow{L_V} \mathcal{E}$$
$$\phi \longmapsto L_U(\phi) \longrightarrow L_V[L_U(\phi)].$$

$L_V \circ L_U$ es lineal, continuo y conmuta con traslación. Por el teorema I.4.2, existe una única $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $L_V \circ L_U = L_W$, i.e., $W * \phi = V * (U * \phi)$. Así, pues:

<u>Definición I.4.3.</u> Si $U, V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, Sop V compacto. Definimos $(V * U)(\phi) = W(\phi)$ o $(V * U)(\phi) = V * (U * \phi)$, para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

δ es una distribución de soporte compacto.

1).- Para toda V(0), es posible encontrar $\varphi \in C_0^{\infty}(V(0))$ tal que $\delta(\varphi) = \varphi(0) = 1$. Si $x \neq 0$, podemos encontrar V(x), y $\varphi \in C_0^{\infty}(V(x))$ tal que $\delta(\varphi) = \varphi(0) = 0$.

De lo anterior concluimos que Sop $\delta = \{0\}$.

<u>Teorema I.4.3.</u> Si $U, V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y Sop V compacto, entonces

1).- $U * V = V * U$

2).- $U * \delta = U$

3).- $D^{\alpha} U = (D^{\alpha}\delta) * U$

4).- $D^{\alpha}(U * V) = (D^{\alpha} U) * V = U * (D^{\alpha} V)$.

<u>Demostración:</u> Probaremos 3) y 4)

3).- $(D^{\alpha} U) * (\phi) = U * D^{\alpha}\phi = U * D^{\alpha}(\delta * \phi) = U * (D^{\alpha}\delta * \phi) =$

$= (U * D^{\alpha}\delta) * \phi = (D^{\alpha}\delta * U) * \phi$, y, por lo tanto, $D^{\alpha} U = D^{\alpha}\delta * U$.

4).- D (U V) = D (U V) = (D) U V = (D U) V.

$D^{\alpha} U = D^{\alpha}\delta * U.$

4).- $D^{\alpha}(U * V) = D^{\alpha}\delta * (U * V) = \left[(D^{\alpha}\delta) * U\right] * V = (D^{\alpha}U) * V.$

5.- SOLUCIONES FUNDAMENTALES.

Sea $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} D^{\alpha}$ un operador diferencial con coeficientes constantes, donde

$$D^{\alpha} f = D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \; .$$

$P(D)T = S$, donde S es una distribución dada y T una distribución incógnita, es una ecuación diferencial parcial, lineal, con coeficientes constantes.

Definición I.5.1. $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es llamada una SOLUCION FUNDAMENTAL de $P(D)$, si $P(D)E = \delta$.

Por ejemplo,

$$E(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \; y > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}$$

es una solución fundamental de

$$P(D) = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \quad , \text{ pues:}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}(\varphi) = U\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y}\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y}(x,y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx \right] dy = \int_0^\infty - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,y)\, dy = \varphi(0,0) = \delta(\varphi),$$

y, por lo tanto, $P(D)E = \delta$.

<u>Teorema I.5.1.</u> Si E es una solución fundamental de $P(D)$, y si S es una distribución con soporte compacto, entonces $T=S * E$ - es una solución de $P(D)T = S$.

<u>Demostración:</u> $P(D)(S * E) = S * (P(D)E) = S * \delta = S$.

Este teorema muestra la importancia del resultado obtenido, en forma independiente, por Malgrange y Ehrenpreis, de que todo operador diferencial parcial, con coeficientes constantes, tiene una solución fundamental.

6.- TRANSFORMADA DE FOURIER.

En esta sección introduciremos la transformada de Fourier de distribuciones, empezando por recordar que, si $f(x)$ es una función con valores complejos, entonces la función con valores complejos $\hat{f}(t)$, definida por

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx} f(x)dx,$$

es llamada LA TRANSFORMADA DE FOURIER de f.

$\hat{f}(t)$ existe si f es integrable, y, en este caso, $\hat{f}(t)$ es una función continua por el teorema de Lebesgue, pues

$e^{-2\pi itx} f(x)$ es continua para x fijo,

$\left| e^{-2\pi itx} f(x)\right| = | f(x)|$, y, como

$|\hat{f}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$, entonces $|\hat{f}(t)| \leq \| f\|_{L^1}$.

<u>Teorema I.6.1</u>. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe la transformada de Fourier

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx} f(x)dx,$$

la cual es continua, acotada, tiende a cero cuando $|t| \to \infty$ y

$|\hat{f}(t)| \leq \| f\|_{L^1}$.

Si $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ y si $f^{(k)}(x)$ es integrable para $k = 0,1,2,\dots,m$, entonces

$[f^{(m)}]^\wedge = (2\pi it)^m \hat{f}(t)$ y

$|2\pi t|^m |\hat{f}(t)| \leq \| f^{(m)}\|_{L^1}$.

Si $x^m f(x)$ es integrable, entonces $\hat{f}(t)$ es m veces continuamente diferenciable, y

$$\left[(-2\pi ix)^m f(x)\right]^{\wedge} = \hat{f}^{(m)}(t).$$

Teorema I.6.2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $k \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{t}{k}\right) = \left[f(kx)\right]^{\wedge} .$$

En particular, $\hat{f}(-t) = \left[f(-x)\right]^{\wedge}$.

Sea $\mathcal{S}$ el espacio de las funciones complejas en $\mathbb{R}$, las cuales son infinitamente diferenciables, tales que, junto con todas sus derivadas, decrecen más rápidamente que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$, cuando $|x| \to \infty$.

De la definición de $\mathcal{S}$, podemos hacer las siguientes observaciones para $\varphi \in \mathcal{S}$:

1).- Si $l, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $x^l \varphi^{(m)}(x)$ es acotada e integrable, pues, como

$\left| x^{l+2} \varphi^{(m)}(x) \right| \leq M$, entonces $\left| x^l \varphi^{(m)}(x) \right| \leq \frac{M}{x^2}$, y, por lo tanto, $x^l \varphi^{(m)}(x)$ es integrable.

2).- $\left[x^l \varphi(x)\right]^{(m)}$ es acotada e integrable (Leibnitz).

La convergencia en el espacio $\mathcal{S}$ estará dada de la siguiente manera:

$\varphi_n \longrightarrow 0$ si, para cualesquiera $l,m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $x^l \varphi_n^{(m)}$ converge uniformemente a cero.

Teorema I.6.3. Si $\varphi(x) \in \mathcal{S}_x$, entonces $\hat{\varphi}(t) \in \mathcal{S}_t$. También, si $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}_x$, entonces $\hat{\varphi}_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}_t$.

Demostración: Como $\varphi \in \mathcal{S}$, $x^l \varphi(x)$ es integrable para todo entero $l \geq 0$, y, por la segunda parte del teorema I.6.1, $\hat{\varphi}(t)$ es infinitamente diferenciable.

Si $l \geq 0$, cada derivada de $\hat{\varphi}(t)$ decrece más rápidamente que cualquier potencia de $\frac{1}{|t|}$, cuando $|t| \to \infty$. Además,

$$\left| (2\pi t)^m \hat{\varphi}^{(l)}(t) \right| \leq \left\| \left[(2\pi i x)^l \varphi(x)\right]^{(m)} \right\|_{L^1}, \quad y$$

$$\left| (2\pi t)^m \hat{\varphi}_n^{(l)}(t) \right| \leq \left\| \left[(2\pi i x)^l \varphi_n(x)\right]^{(m)} \right\|_{L^1}.$$

El lado derecho de la última desigualdad converge a cero, cuando $n \to \infty$, y, por lo tanto, $\left\{t^m \hat{\varphi}_n^{(l)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a cero, cuando $n \to \infty$.

Como un ejemplo, encontraremos la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi i t x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi (x+it)^2 - \pi t^2} dx.$$

Sea $z = x + it$, entonces

$$\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2} \int_{it-\infty}^{it+\infty} e^{-\pi z^2} dz.$$

Ahora,

$$\int_{it-\infty}^{it+\infty} e^{-\pi z^2} dz = \lim_{A \to \infty} \left[\int_{it-A}^{-A} e^{-\pi z^2} dz + \int_{-A}^{A} e^{-\pi z^2} dz + \int_{A}^{it+A} e^{-\pi z^2} dz. \right].$$ La primera y la tercera de estas integrales tienden a cero, cuando $A \to \infty$; por ejemplo,

$$\left| \int_{it-A}^{-A} e^{-\pi z^2} dz \right| = \left| \int_0^t e^{-\pi (A^2 - y^2) - 2\pi i A y} i dy \right| \leq |t| \, e^{-\pi (A^2 - t^2)} \longrightarrow 0.$$

Así pues,

$$\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\pi z^2}dz = e^{-\pi t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = e^{-\pi t^2}, \text{ pues}$$

$\int e^{-\pi x^2}dx = 1$, y, por lo tanto,

$$\left[e^{-\pi x^2}\right]^\wedge = e^{-\pi t^2}.$$

Aplicando el teorema I.6.2, con $k>0$, obtenemos

$$\left[e^{-kx^2}\right]^\wedge = \left[e^{-\pi(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\,x)^2}\right]^\wedge = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\pi(\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,t)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{\pi^2}{k}t^2},$$ y, por lo tanto,

$$\left[e^{-kx^2}\right]^\wedge = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{\pi^2}{k}t^2}.$$

<u>Teorema I.6.4.</u> Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)g(t)e^{2\pi itx}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\hat{g}(t)dt.$$

<u>Demostración:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)g(t)e^{2\pi itx}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int e^{-2\pi iyt}f(y)dy\right]g(t)e^{2\pi itx}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(y-x)t}g(t)dt\right] f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(y-x)f(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)f(x+t)dt.$$

En particular, tomando $x=0$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)dt,$$

y, como $\mathcal{S}\subset L^2$, pues $\mathcal{S}\subset L^1$ y $fg\in\mathcal{S}$, si $f,g\in\mathcal{S}$, entonces

$$\langle \hat{f},\bar{g}\rangle_{L^2} = \langle f,\bar{\hat{g}}\rangle_{L^2}.$$

<u>Teorema I.6.5</u> (de Fourier). $\wedge : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es lineal, continuo, uno a uno y sobre. De hecho

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi itx}\,\hat{f}(t)dt.$$

<u>Demostración:</u> Sea $g(x) = e^{-\pi x^2}$, y definamos $g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$. Entonces, como ya probamos que $\hat{g}(x) = e^{-\pi x^2}$, tenemos que

$$\hat{g}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,\hat{g}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)f(t)e^{2\pi itx}dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\hat{g}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\varepsilon w)g(w)dw, \text{ i.e.,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)f(t)e^{2\pi itx}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\varepsilon t)g(t)dt, \text{ donde}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)f(t)e^{2\pi itx}dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi itx}dt, \text{ y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\varepsilon t)g(t)dt \longrightarrow f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt, \text{ y, como } \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1,$$

tenemos $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{2\pi itx}dt.$$

De este resultado, se sigue que, si $f = 0$, entonces $\hat{f} = 0$, y, por lo tanto, $\wedge$ es uno a uno.

$$(\hat{f})^\wedge(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx}\,\hat{f}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it(-x)}\,\hat{f}(t)dt = f^i(x),$$

donde $f^i(x) = f(-x)$. Así pues, $\hat{\hat{f}} = f^i$.

Como $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi itx}\,f(t)dt$, entonces

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx}\,\bar{\hat{f}}(t)dt = (\bar{\hat{f}})^\wedge, \text{ i.e.,}$$

$$\bar{f} = (\bar{\hat{f}})^\wedge.$$

Si $g \in \mathcal{S}$, tomamos $f = \hat{g}^{\wedge\wedge}$, y entonces $\hat{f} = (\hat{g}^{\wedge\wedge})^\wedge = (g^i)^i = g$; por lo tanto, $\wedge$ es sobre.

Sea $h = \bar{\hat{g}}$, i.e., $\bar{h} = \hat{g}$, entonces $\hat{\bar{h}} = \overline{(\bar{\hat{g}})^{\wedge}} = \bar{\bar{g}} = g$.
Por el teorema I.6.4

$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = \langle f, \hat{\hat{h}} \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$. En particular, tomando $g = f$, tenemos que

$$\| \hat{f} \|_{L^2} = \| f \|_{L^2}.$$ Teorema de Plancherel-Parseval

Antes de definir la transformada de Fourier de una distribución, supongamos que f es una función integrable. Entonces,

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx} f(x)\varphi(t)dxdt.$$

$e^{-2\pi itx} f(x)\, \varphi(t)$ es integrable, pues

$\left| e^{-2\pi itx} f(x)\, \varphi(t) \right| = |f(x)|\, |\varphi(t)|$. Así pues, es posible escribir

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx} \varphi(t)dt = T_f(\hat{\varphi}).$$

Sin embargo, la igualdad $\hat{T}_f(\varphi) = T_f(\hat{\varphi})$ no es válida si $\varphi \in \mathcal{D}$ (a menos que $\varphi = 0$); pero sí lo es cuando $\varphi \in L^1$.

En vista de esta dificultad, consideraremos un tipo particular de distribuciones para definir la transformada de Fourier.

De la definición del espacio $\mathcal{S}$ y su topología, puede verse que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ y que, si $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$, entonces $\hat{\varphi}_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$.

<u>Definición I.6.1.</u> Decimos que una distribución T es una DISTRIBUCION TEMPERADA, si puede ser extendida a un funcional lineal continuo en $\mathcal{S}$.

Ejemplo 1).- Una función acotada es una distribución temperada, pues

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)dx$$ existe, ya que $\varphi \in \mathcal{S} \subset L^1$.

Ejemplo 2).- Una función integrable es una distribución temperada, pues

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)dx \quad \text{existe si } \varphi \text{ es acotada,}$$

y éste es el caso, ya que $\varphi \in \mathcal{S}$.

Ejemplo 3).- Cualquier función f localmente integrable, lentamente creciente, i.e.,

$|f(x)| \leqslant A|x|^k$, cuando $|x| \to \infty$, para algún $k \in \mathbb{N}$

es una distribución temperada, pues si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces

$|\varphi(x)| < \dfrac{B}{|x|^{k+2}}$ si $|x| \to \infty$, y así

$|f(x)\,\varphi(x)| < \dfrac{AB}{|x|^2}$,

y, por lo tanto, $f\varphi$ es integrable.

El término "temperada" involucra este lento crecimiento en el infinito.

Ejemplo 4).- Una distribución con soporte compacto es una distribución temperada, pues $T(\varphi)$ tiene sentido para toda φ infinitamente diferenciable.

Ejemplo 5).- Si T es una distribución temperada, también lo son todas sus derivadas sucesivas, pues

$T'(\varphi) = -T(\varphi')$, y, si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $\varphi' \in \mathcal{S}$.

Ejemplo 6).- Si T es una distribución temperada y $P(x)$ es un polinomio, entonces $P(x)T$ es una distribución temperada, pues

$(P(x)T)(\varphi) = T(P(x)\,\varphi(x))$, y $[P(x)\,\varphi(x)] \in \mathcal{S}$ si $\varphi \in \mathcal{S}$.

<u>Definición I.6.2.</u> Si T es una distribución temperada, definimos su transformada de Fourier, $\hat{T}$, como

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}), \text{ para cualquier } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Obsérvese que esta relación define un mapeo lineal continuo sobre $\mathcal{S}$, pues, si $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$, entonces $\hat{\varphi}_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$.

Ejemplo.- δ es una distribución de soporte compacto, y, por lo tanto, es una distribución temperada. Encontremos su transformada de Fourier.

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1(\varphi). \text{ Así pues,}$$

$$\hat{\delta} = 1.$$

Más generalmente,

$$\hat{\delta}_{x_0}(\varphi) = \delta_{x_0}(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx_0}\varphi(t)dt = e^{-2\ itx_0}(\varphi),$$

y, por lo tanto, $\hat{\delta}_{x_0} = e^{-2\pi itx_0}$ o $\delta(x-x_0) = e^{-2\pi itx_0}$.

Teorema I.6.6. Si T es una distribución temperada, entonces

1).- $\left[T^{(m)}\right]^\wedge = (2\pi it)^m \hat{T}$.
2).- $\left[(-2\pi ix)^m T\right]^\wedge = \hat{T}^{(m)}$.

Demostración: Consecuencia directa de la definición y del teorema I.6.1. Por ejemplo, demostremos 2).

$$\left[(-2\pi ix)^m T\right]^\wedge(\varphi) = \left[(-2\pi ix)^m T\right](\hat{\varphi}) = T\left[(-2\pi ix)^m\hat{\varphi}\right] =$$
$$= T\left[(-1)^m(2\pi ix)^m\hat{\varphi}\right] = T\left[(-1)^m\hat{\varphi}^{(m)}\right] = \hat{T}\left[(-1)^m\hat{\varphi}^{(m)}\right] =$$
$$= \hat{T}^{(m)}(\varphi).$$

Podemos hacer uso de este teorema para encontrar la transformada de Fourier de $\delta^{(m)}$.

$$\widehat{\delta^{(m)}} = (2\pi it)^m\hat{\delta} = (2\pi it)^m.$$

También, usando 1) con $T = 1$ y $m = 1$, T es temperada, pues es una función acotada.

$0 = (1')^\wedge = (2\pi it)\,\hat{1}$, i.e., $t\,\hat{1} = 0$, lo cual implica que

$\hat{1} = \alpha\delta$.

Sea $\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$, entonces

$\hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = 1(e^{-\pi x^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$. Por otro lado,

$\alpha\delta(\varphi) = \alpha\,\varphi(0) = \alpha$, y, por lo tanto, $\alpha = 1$, i.e.,

$$\hat{1} = \delta \, .$$

C A P I T U L O   II

APLICACION A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Consideremos la ecuación

(1) $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f,$

donde $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ y f una distribución.

Para aplicaciones, estamos interesados en soluciones fundamentales que se anulan para $t < 0$.

Si g satisface

$$a_0 g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \ldots + a_n g = \delta \quad ,$$

i.e., si g es una solución fundamental, entonces, para cualquier distribución f de soporte acotado por la izquierda, la ecuación (1) tiene una solución de la forma

$$x = g * f.$$

Si g es una solución fundamental, entonces $g_s = \tau_s g$ es solución de la ecuación

(2) $a_0 g_s^{(n)} + a_1 g_s^{(n-1)} + \ldots + a_n g_s = \delta_s,$ donde $(\tau_s g)(\varphi) = g(\tau_{-s}\varphi)$, pues

$$\delta_s * g = (\tau_s \delta) * g = \delta * (\tau_s g) = \tau_s g, \text{ y}$$

$a_0 g_s^{(n)} + a_1 g_s^{(n-1)} + \ldots + a_n g_s = a_0 (\delta_s * g)^{(n)} + \ldots + a_n (\delta_s * g) =$

$= \delta_s * (a_0 g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \ldots + a_n g) = \delta_s * \delta = \delta_s$, i.e.,

g_s es solución de (2).

Daremos un método para encontrar una solución fundamental g.

Consideremos un sistema fundamental $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de soluciones de $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0$, y tomemos

$$e_0(t) = a_1 x_1(t) + \ldots + a_n x_n(t)$$

$$e_1(t) = b_1 x_1(t) + \ldots + b_n x_n(t), \text{ y}$$

$$g(t) = \begin{cases} e_o(t) & \text{si } t < 0 \\ e_1(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Entonces, para que g sea una solución fundamental, es suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

$$(3) \quad \begin{aligned} & e_1^{(k)}(0) = e_o^{(k)}(0), \qquad k = 0,1,2,\ldots,(n-2). \\ & e_1^{(n-1)}(0) = e_o^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_o}, \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} g &= \{g\} \\ g' &= \{g'\} + s(0)\delta \\ g'' &= \{g''\} + s(0)\delta' + s_1(0)\delta \\ &\vdots \\ g^{(n)} &= \{g^{(n)}\} + s(0)\delta^{(n-1)} + s_1(0)\delta^{(n-2)} + \ldots + s_{n-1}(0)\,\delta, \end{aligned}$$

de acuerdo a la notación del capítulo I, y donde

$s_k(0) = g^{(k)}(0^+) - g^{(k)}(0^-)$, el salto de la k-ésima derivada de g en $t = 0$.

Entonces tendremos

$a_o g^{(n)} + \ldots + a_n g = a_o\{g^{(n)}\} + a_1\{g^{(n-1)}\} + \ldots + a_n\{g\} + a_o s(0)\delta^{(n-1)} + \ldots + a_o s_{n-1}(0)\,\delta = \delta$, ya que $s_k(0) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots, n-2$ y $s_{n-1}(0) = \frac{1}{a_o}$, de las condiciones (3).

Si denotamos por $c_i = b_i - a_i$, de las condiciones (3), tenemos

$$\begin{aligned} c_1x_1(0) + \ldots + c_nx_n(0) &= 0 \\ c_1x_1'(0) + \ldots + c_nx_n'(0) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ c_1x_1^{(n-2)}(0) + \ldots + c_nx_n^{(n-2)}(0) &= 0, \text{ y} \end{aligned}$$

$$c_1x_1^{(n-1)}(0) + \ldots + c_nx_n^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_o}.$$

El determinante de este sistema es distinto de cero, pues éste es el Wronskiano en $t = 0$, y las soluciones $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ son linealmente independientes. Así, pues, obtenemos una única solución $c_1,\ldots,c_n$, y, en consecuencia, tenemos una familia infinita de sistemas de números $a_1,\ldots,a_n$ y $b_1,\ldots,b_n$, con la ayuda de los cuales podemos obtener soluciones fundamentales.

En las aplicaciones, juegan un papel muy importante las soluciones fundamentales g, tales que $g(t) = 0$, para $t < 0$. Estas soluciones son únicas y pueden ser obtenidas considerando la solución $x(t) = e(t)$ de la ecuación homogénea, que satisface

$$\begin{aligned} &e^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots,(n-2) \\ (4)\quad &e^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_o}, \end{aligned}$$

y tomando $g(t) = \theta(t)e(t)$, donde θ es la función de Heaviside.

Encontraremos la solución fundamental

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

en un caso particular.

Sea $A(p) = a_op^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$ y $p_1,\ldots,p_n$ sus raíces. Supondremos que las raíces de este polinomio son reales y distintas, y, en este caso, las funciones

$$x_k(t) = e^{p_kt}, \qquad k = 1,2,\ldots,n,$$

son soluciones linealmente independientes de la homogénea.

El sistema en el cual $c_i = b_i$, es

$$\begin{aligned} b_1 &+ b_2 + \ldots + b_n = 0 \\ p_1b_1 &+ p_2b_2 + \ldots + p_nb_n = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$p_1^{n-1}\, b_1 \; + \; p_2^{n-1}\, b_2 \; + \ldots + \; p_n^{n-1}\, b_n \; = \; \frac{1}{a_o}$$

y su determinante, es el determinante de Vandermonde

$$W_o = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \ldots & p_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (p_1-p_2)\ldots(p_1-p_n)(p_2-p_3)\ldots(p_2-p_n)\ldots(p_{n-1}-p_n),$$

y, por la regla de Cramer, obtenemos

$$b_k = \frac{W_k}{W_o}, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \text{ donde}$$

$$W_k = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ p_1 & \ldots & p_{k-1} & 0 & p_{k+1} & \ldots & p_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1^{n-1} & \ldots & p_{k-1}^{n-1} & 0 & p_{k+1}^{n-1} & \ldots & p_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+k} \frac{1}{a_o} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p_1 & \ldots & p_{k-1} & p_{k+1} & \ldots & p_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1^{n-2} & \ldots & p_{k-1}^{n-2} & p_{k+1}^{n-2} & \ldots & p_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+k} \frac{1}{a_o} W_k^*.$$

El determinante W_k^*, es también un determinante de Vandermonde, con los números $p_1,\ldots,p_{k-1},p_{k+1},\ldots,p_n$. Así pues, el desarrollo de W_K^* estará dado por una fórmula similar a la de $W_\circ$, pero en la cual los factores (p_i-p_j) que contienen a p_k desaparecen, y

$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ se cambia por $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$, y, por lo tanto,

$$b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{a_\circ(p_1-p_k)\ldots(p_{k-1}-p_k)(p_k-p_{k+1})\ldots(p_k-p_n)} =$$

$$= \frac{1}{a_\circ(p_k-p_1)\ldots(p_k-p_{k+1})(p_k-p_{k+1})\ldots(p_k-p_n)} = \frac{1}{A'(p_k)},$$

y, por lo tanto, la solución fundamental es:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{A'(p_k)} e^{p_k t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Calculemos, en un ejemplo, la solución fundamental del tipo antes descrito.

Consideremos la ecuación

$$x'' + w^2 x = \delta \qquad (w \in \mathbb{R}\ , \ w \neq 0).$$

El polinomio $\quad A(p) = p^2 + w^2$

tiene las raíces complejas

$p_1 = iw$, $p_2 = -iw$ y, en consecuencia, dos soluciones linealmente independientes de la homogénea, son

$x_1(t) = \cos wt$, $\quad x_2(t) = \operatorname{sen} wt$.

Para encontrar la solución fundamental, escribiremos primero la solución general de la ecuación homogénea

$x(t) = a\cos wt + b\,\mathrm{sen}\, wt.$

Determinamos a y b, de tal manera que cumplan

$x(0) = 0$ y $x'(0) = 1.$

$$0 = x(0) = a$$

$$1 = x'(0) = -aw\,\mathrm{sen}\, wt + bw\cos wt \Big|_{t=0} = bw,$$

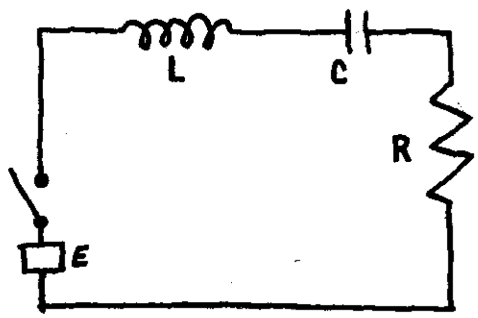
de donde $a = 0$ y $b = \frac{1}{w}$,

y, por lo tanto, la solución fundamental es

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{w}\,\mathrm{sen}\, wt & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

APLICACION A CIRCUITOS ELECTRICOS.

Consideremos el circuito eléctrico



con una resistencia R, un condensador de capacitancia C y una inductancia L. Supongamos que en el momento $t = t_o$, la corriente es nula, y que de t_o en adelante, pasa una corriente inducida por una tensión $E = E(t)$, que depende del tiempo. Sea $I(t)$ la corriente que pasa a través del circuito.

Podemos suponer que $E(t)$, $I(t)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$, tomando $E(t) = I(t) = 0$, para $t < t_o$.

La intensidad obviamente depende de la tensión, i.e., $I=F(E)$. Sean $E_1 = E_1(t)$, $E_2 = E_2(t)$, $I_1 = F(E_1)$, $I_2 = F(E_2)$, entonces $F(E_1 + E_2) = I_1 + I_2 = F(E_1) + F(E_2)$, y, si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $F(\lambda E) = \lambda I = \lambda F(E)$, i.e., F es lineal.

El circuito es un sistema físico estacionario, i.e., si $E_o(t) = E(t - t_o)$, entonces $I_o(t) = I(t - t_o)$, donde $I_o = F(E_o)$.

Teóricamente, la distribución de Dirac, δ, puede ser considerada como una tensión, la cual corresponde a una excitación que actúa de una manera muy fuerte, en un corto tiempo.

Es un hecho conocido que la intensidad de la corriente es la derivada, con respecto al tiempo, de la cantidad de electricidad que pasa a través del circuito. Supóngase que del momento t_o en adelante, pasa una cantidad de corriente constante e igual a λ, entonces la cantidad de electricidad está dada por la ecuación

$$q(t) = \lambda\,\theta(t - t_0)$$

donde θ es la función de Heaviside.

La intensidad, entonces, será igual a

$$I(t) = \lambda\,\delta(t - t_0)$$

donde δ es la distribución de Dirac.

En vista de lo anterior, es útil considerar a F como un operador lineal definido en $\mathcal{D}'^{+}(\mathbb{R})$ (distribuciones con soporte acotado por la izquierda), y con valores en $\mathcal{D}'^{+}(\mathbb{R})$; este operador debe suponerse también continuo.

Debido a la linealidad, continuidad y la invariancia ante traslaciones, i.e.,

$$F(\tau_s x) = \tau_s F(x),$$

al igual que en el teorema I.4.2, podemos encontrar una distribución a, tal que

$$F(x) = a \star x.$$

Más precisamente, a es la respuesta impulsiva del sistema, i.e., la intensidad que se obtiene como respuesta a la tensión δ .

En nuestro caso, la relación existente entre la tensión y la intensidad, para $t_0 = 0$, está dada por

$$(1) \quad E(t) = RI(t) + L\,\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt,$$

que es un resultado en Electrónica.

Sea $Z = R\delta + L\delta' + \frac{1}{C}\theta$, entonces (1) puede ser escrita como

$$E = Z \star I.$$

$Z \in \mathcal{D}'^{+}(\mathbb{R})$ es llamada la IMPEDANCIA del circuito. La distribución A tal que

$$Z \star A = \delta \ ,$$

es llamada la ADMITANCIA del circuito.

Derivando la distribución Z, obtenemos

$$Z' = L\delta'' + R\delta' + \frac{1}{C}\delta \ ,$$

y, como $Z' \star A = (Z \star A)' = \delta'$, tenemos que

(2) $LA'' + RA' + \frac{1}{C}A = \delta'$, y se sigue que la admitancia del circui-

(2) $LA'' + RA' + \frac{1}{C} A = \delta '$, y se sigue que la admitancia del circuito es la solución de (2).

Obtendremos la expresión de la intensidad de la corriente, para el caso en el cual, en $t = 0$, se aplica una tensión constante E_o. En este caso, la tensión estará dada por

$E(t) = E_o \, \theta(t)$.

Tomando en cuenta la definición de admitancia, tenemos que

$A * E = A * (Z * I) = (A * Z) * I = \delta * I = I$, i.e.,

$I = A * E$.

Si denotamos por x_o la solución fundamental (que se anula para $t < 0$), de (2), i.e., la solución de

$Lx'' + Rx' + \frac{1}{C} x = \delta$,

entonces la admitancia será $A = x_o * \delta' = x_o' * \delta = x_o'$, i.e.,

$A = x_o'$, y, por lo tanto,

$I = A * E = x_o' * E = (x_o' * \delta) * E = x_o' * (\delta * E) = x_o * (\delta' * E) =$
$= x_o * (\delta * E') = x_o * E' = x_o * (E_o \delta) = E_o x_o$.

De lo anterior concluimos que es suficiente considerar las soluciones fundamentales x_o.

La ecuación homogénea asociada con (2) es

$LCx'' + RCx' + x = 0$,

y la ecuación característica es

$LCP^2 + RCP + 1 = 0$, con raíces P_1 y P_2.

Supondremos que

$R \neq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, pero consideraremos solamente el caso en que

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, i.e., $R^2C^2 - 4LC < 0$. Entonces las raíces son $P_1 = \alpha + i\beta$, $P_2 = \alpha - i\beta$, donde

$$\alpha = - \frac{R}{2L} , \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} ,$$

y la solución general $x(t)$ de la ecuación homogénea es

$$x(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos\beta t + \mu \operatorname{sen}\beta t).$$

Entonces, la solución que satisface las condiciones

$x(0) = 0$ y $x'(0) = \frac{1}{L}$, está dada por

$x(t) = \frac{1}{L\beta} e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t$, y, por lo tanto, la intensidad será

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{E_o}{L\beta} e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

APLICACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A LA SOLUCION DE LA ECUACION DEL CALOR.

Considérese una barra de longitud infinita, en la cual el calor es transmitido solamente por conducción. El calor específico lineal es c y la conductividad térmica es γ . La ecuación de la conducción del calor es

$$c\,\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \rho \qquad ,$$

donde suponemos que la fuente de calor está distribuida a lo largo de la barra, y la densidad de la fuente de calor es $\rho(x,t)$.

Supondremos que esta ecuación sigue siendo válida, si U y son distribuciones; por ejemplo, $\rho(x,t) = \delta(x)$ significa que la única fuente está en el origen y proporciona una cantidad unitaria de calor, estacionariamente; $\rho(x,t) = \delta(x)\,\delta(t)$ significa una fuente localizada en el origen que irradia una cantidad unitaria de calor solamente para $t=0$.

El problema clásico de Cauchy consiste en encontrar, para $t>0$, una solución $U(x,t)$, para $\rho(x,t)$ dado, y una distribución inicial de temperatura $U(x,0) = U_0(x)$.

Extenderemos U y ρ para toda $t\in\mathbb{R}$, tomándolas iguales a cero para $t<0$. Las relaciones de derivación en el sentido distribucional, para funciones discontinuas, son

$$\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} , \qquad \frac{\partial\tilde{U}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t}\right\} + U_0(x)\,\delta(t),$$

donde $\tilde{U}$ y $\tilde{\rho}$ son las extensiones de U y ρ , respectivamente.

Es fácil ver que U satisface la ecuación diferencial parcial

$$(1) \qquad c\,\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t} - \gamma\,\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial x^2} = \tilde{\rho} + cU_0(x)\,\delta(t).$$

Supondremos que para toda t, $\tilde{\rho}$, considerada como una función de x, es temperada, y le llamaremos $\tilde{\sigma}(\lambda,t)$ a su transformada de Fourier, para t fijo, e igual a cero si $t<0$; i.e.,

$\hat{\tilde{\rho}}(x,t) = \tilde{\sigma}(\lambda,t)$.

También supondremos que $U_o(x)$ es temperada y

$\hat{U}_o(x) = V_o(\lambda)$.

Trataremos de encontrar, si existe, una solución al problema de Cauchy, la cual sea una distribución temperada de la variable x, para toda t con

$$\tilde{V}(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(x,t)e^{-2\pi i\lambda x}dx.$$

Por lo tanto, tomando transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad (1), tenemos

$$(2) \qquad c\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + 4\pi^2\gamma\lambda^2\tilde{V} = \tilde{\sigma}(\lambda,t) + cV_o(\lambda)\,\delta(t),$$

considerando a esta ecuación solamente en la variable t, para λ fija.

La solución de

$$c\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + 4\pi^2\gamma\lambda^2\tilde{V} = \delta \quad \text{es} \quad F(t) = \frac{1}{c}\,\theta(t)e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t},$$

donde $\theta(t)$ es la función de Heaviside; por lo tanto, la solución de (2) es

$$F(t) \star \left[\tilde{\sigma}(\lambda,t) + cV_o(\lambda)\,\delta(t)\right] = \tilde{V}(\lambda,t), \text{ i.e.,}$$

$$(3) \qquad \tilde{V}(\lambda,t) = \tilde{\sigma}(\lambda,t) \star \frac{1}{c}\theta(t)e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t} + V_o(\lambda)\,\theta(t)e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t}.$$

Por el teorema de inversión de Fourier, encontramos la solución $U(x,t)$ para t fijo.

Supóngase, por ejemplo, que para $t<0$, la barra tiene temperatura igual a cero, y que en el instante $t = 0$, una fuente en $x = 0$ comunica instantáneamente una cantidad unitaria de calor a la barra; entonces

$U_o(x) = 0$, $\tilde{\rho}(x,t) = \delta(x)\,\delta(t)$, y así pues, $V_o(\lambda) = 0$ y

$\tilde{\sigma}(\lambda,t) = \delta(t)$.

De (3) tenemos que

$$\tilde{V}(\lambda,t) = \frac{1}{c}\,\theta(t)e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t}$$

De (3) tenemos que

$$\tilde{V}(\lambda,t) = \frac{1}{c}\,\theta(t)\,e^{-4\pi^2 \frac{\gamma}{c}\lambda^2 t},$$

de donde obtenemos

$$U(x,t) = \frac{1}{c}\,\theta(t)\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{\gamma}\pi t}}\quad e^{-\left[\frac{x^2}{4\left(\frac{\gamma}{c}\right)}\,t\right]}.$$

A P E N D I C E "A"

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

Denotaremos por $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial de las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores reales o complejos, las cuales tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, i.e.

$$\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \mid D^{\alpha}\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, \alpha \}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multiíndice con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$D^{\alpha}\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{y} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n .$$

Daremos a este espacio una topología definida por medio de una familia de seminormas, convirtiéndolo en un espacio vectorial topológico localmente convexo, según las siguientes definiciones y teoremas.

Definición A.1. Un espacio vectorial V sobre un campo K, con una topología $\mathcal{F}$ es llamado un ESPACIO VECTORIAL TOPOLOGICO si las operaciones $+: V \times V \longrightarrow V$ y $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ son continuas.

Definición A.2. $A \subset \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ se dice CONVEXO si

$$tA + (1-t)A \subseteq A \quad \text{si } 0 \leq t \leq 1.$$

Definición A.3. $A \subset \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ se dice ABSORBENTE si $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \exists\, \alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}\varphi \in A$.

Definición A.4. Una SEMINORMA P en $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es una función $P: \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ tal que si φ y $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y α es un escalar, se cumplen:

a).- $P(\varphi+\psi) \leq P(\varphi) + P(\psi)$

b).- $P(\alpha\varphi) = |\alpha|\, P(\varphi)$

<u>Teorema A.1.</u> Si $P: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una seminorma, entonces:

a).- $P(0) = 0$

b).- $|P(\varphi) - P(\psi)| \quad P(\varphi - \psi)$

c).- $P(\phi) \geqslant 0$

<u>Definición A.5.</u> Sea $A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Decimos que A es EQUILIBRADO si $\forall$ $\varphi \in A$ y α escalar con $|\alpha| \leq 1$ se cumple que $\alpha\varphi \in A$.

<u>Definición A.6.</u> Sea $A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ absorbente, definimos LA FUNCIONAL DE MINKOWSKY μ_A como la función:

$\mu_A : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

$$\mu_A(\varphi) = \operatorname{Inf}\{\sigma > 0 \mid \sigma^{-1}\varphi \in A\}.$$

<u>Teorema A.2.</u> Sea $P: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una seminorma, y sea $B_\varepsilon = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid P(\phi) < \varepsilon\}$

entonces B_ε es convexo, equilibrado y absorbente, y además, $\mu_{B_1} = P$.

<u>Demostración:</u>

1).- B_ε es convexo:

Sean $\phi, \psi \in B_\varepsilon$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces:

$P(t\phi + (1-t)\psi) \leq tP(\phi) + (1-t)P(\psi) < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon$

y, por lo tanto, $t\phi + (1-t)\psi \in B_\varepsilon$ y concluimos que B_ε es convexo.

2).- B_ε es equilibrado:

Sea $\phi \in B_\varepsilon$ y α escalar tal que $|\alpha| \leq 1$.

$P(\alpha\phi) = |\alpha|\, P(\phi) < \varepsilon$, i.e., $\alpha\phi \in B_\varepsilon$ y, por lo tanto, B_ε es equilibrado.

3).- B_ε es absorbente:

Sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$P(\alpha^{-1}\phi) = \alpha^{-1}P(\phi) < \varepsilon$ si $\alpha > \frac{1}{\varepsilon}P(\phi)$,
i.e., si $\alpha > \frac{1}{\varepsilon}P(\phi)$, entonces $P(\alpha^{-1}\phi) = \alpha^{-1}P(\phi) < \frac{\varepsilon}{P(\phi)}P(\phi) = \varepsilon$
y, por lo tanto, B_ε es absorbente.

4).- $\mu_{B_1} = P$.
Sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mu_{B_1}(\phi) = \text{Inf}\{\sigma>0 \mid \sigma^{-1}\phi \in B_1\}$.
Sea $A = \{\sigma>0 \mid \sigma^{-1}\phi \in B_1\}$.
Si $\alpha > P(\phi)$, entonces $\alpha^{-1}\phi \in B_1$, i.e., $\alpha \in A$ y, por lo tanto $\alpha \geq \mu_{B_1}(\phi)$.
Si $\mu_{B_1}(\phi) > P(\phi)$, tomamos $P(\phi) < \alpha_1 < \mu_{B_1}(\phi)$, y, entonces, $\alpha_1 \geq \mu_{B_1}(\phi)$, lo cual es una contradicción, y, por lo tanto,

(1) $$\mu_{B_1} \leq P$$

Sea $\alpha < P(\phi)$, entonces $\alpha^{-1}\phi \notin B_1$, i.e., si $\alpha \in A$, $\alpha \geq P(\phi)$ y, por lo tanto,

(2) $$\mu_{B_1} \geq P$$

se sigue de (1) y (2) que $\mu_{B_1} = P$.

Teorema A.3. Sea $A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ equilibrado, absorbente y convexo, entonces μ_A es una seminorma.

Demostración: Sea $A_\phi = \{\sigma>0 \mid \sigma^{-1}\phi \in A\}$, $\mu_A(\phi) = \text{Inf } A_\phi$
Sea $\varepsilon > 0$, $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces existen $0<\alpha \in A_\phi$, $0<\beta \in A_\psi$ tales que $\alpha \leq \mu_A(\phi) + \varepsilon/2$, $\beta \leq \mu_A(\psi) + \varepsilon/2$, y, como A es convexo,

$$\frac{\phi+\psi}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\alpha^{-1}\phi + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\beta^{-1}\psi \in A,$$

i.e., $(\alpha+\beta)^{-1}(\phi+\psi) \in A$ y, por lo tanto, $\alpha+\beta \in A_{\phi+\psi}$ y
$\mu_A(\phi+\psi) \leq \alpha+\beta \leq \mu_A(\phi) + \mu_A(\psi) + \varepsilon$; $\forall \varepsilon > 0$, y, por lo tanto,

(3) $$\mu_A(\phi+\psi) \leq \mu_A(\phi) + \mu_A(\psi)$$

Probaremos ahora que $\mu_A(\alpha\phi) = |\alpha|\mu_A(\phi)$.

a).- Si $\alpha = 0$.

$$\mu_A(0\cdot\phi) = \mu_A(0) = \text{Inf}\{\sigma > 0 \mid \sigma^{-1}\phi \in A\} = \text{Inf } \mathbb{R}^+ = 0 = |0|\,\mu_A(\phi).$$

b).- Si $\alpha \neq 0$.

Sea $\sigma \in A_\phi$, i.e., $\sigma^{-1}\phi \in A$ y, como A es equilibrado y $\left|\frac{\alpha}{|\alpha|}\right| = 1$,

$\frac{\alpha}{|\alpha|}(\sigma^{-1}\phi) \in A$, i.e., $(|\alpha|\sigma)^{-1}(\alpha\phi) \in A$, i.e., $|\alpha|\sigma \in A_{\alpha\phi}$ y, por lo tanto, $\mu_A(\alpha\phi) \leq |\alpha|\sigma$ $\forall$ $\sigma \in A_\phi$, i.e., $|\alpha|^{-1}\mu_A(\alpha\phi) \leq \sigma$, i.e., $|\alpha|^{-1}\mu_A(\alpha\phi) \leq \mu_A(\phi)$, y, en consecuencia, $\mu_A(\alpha\phi) \leq |\alpha|\mu_A(\phi)$.

Ahora, como $\mu_A(\phi) = \mu_A(\alpha\alpha^{-1}\phi) \leq |\alpha|^{-1}\mu_A(\alpha\phi)$, entonces $\mu_A(\alpha\phi) \geq$ $\mu_A(\alpha\phi) \geq |\alpha|\mu_A(\phi)$ y, por lo tanto,

(4) $\mu_A(\alpha\phi) = |\alpha|\ \mu_A(\phi)$.

De (3) y (4) concluimos que μ_A es una seminorma.

<u>Teorema A.4.</u> Sea X un espacio vectorial topológico, y $T_x : X \longrightarrow X$, $M_\lambda : X \longrightarrow X$ tales que:

$T(y) = x + y$, $M(x) = \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$,

entonces, T_x y M_λ son homeomorfismos y, por lo tanto, si A es abierto en X, entonces los conjuntos $x + A$ y λA también son abiertos en X.

<u>Definición A.7.</u> Decimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es una BASE LOCAL para X si cada vecindad de cero, está contenida en algún miembro de $\mathcal{B}$. Las VECINDADES DE CERO son los conjuntos $V \in \mathcal{F}$ que contienen al cero.

<u>Definición A.8.</u> Decimos que un espacio vectorial topológico X es LOCALMENTE CONVEXO (E.L.C.) si en X se puede encontrar una base local de vecindades convexas.

<u>Teorema A.5.</u> Si X es un espacio vectorial topológico, U abierto tal que $0 \in U$, entonces:

1).- U es absorbente

2).- Existe V abierto tal que $0 \in V$ equilibrado, tal que $V \subset U$.

<u>Demostración:</u> Como el operador

1).- $K \longrightarrow X$

$(\lambda \longrightarrow \lambda x_0)$ es continuo, si tomamos $\lambda = 0$, existe $\delta > 0$,

$|\lambda|<\delta$, entonces $\lambda x_0 \in U$, para cada $x_0 \in X$, y, por lo tanto, U es absorbente.

Como el operador

2).- $K \times X \longrightarrow X$

$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ es continuo, tomando $\lambda = 0$, $x = 0$, tenemos que existe $\delta > 0$ y W tal que $0 \in W$, de tal manera que si $|\lambda|<\delta$ y $x \in W$, entonces $\lambda x \in U$.

Sea $V = \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda W \subset U$. Claramente V es abierto, pues es unión de abiertos. Probaremos, pues, que V es equilibrado.

Sea $\alpha \in K$ $|\alpha| \leq 1$ y $x \in \alpha V$, entonces $x = \alpha v$, con $v \in V$, lo que implica que $v \in \lambda_0 W$, para algún $\lambda_0 \ni$ $|\lambda_0|<\delta$, i.e., $v = \lambda_0 w$, con $w \in W$, entonces $x = \alpha\lambda_0 w$, y, como $|\alpha\lambda_0| = |\alpha||\lambda_0| < \delta$, $x = (\alpha\lambda_0)w \in \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda W = V$, y, por lo tanto, V es equilibrado.

<u>Corolario:</u> Si $\mathcal{B}$ es una base local para un espacio vectorial topológico X, entonces consiste de vecindades absorbentes y equilibradas.

<u>Teorema A.6.</u> Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces:

a).- Existe una base local $\mathcal{B} \ni \forall B \in \mathcal{B}$, B es equilibrado y absorbente.

b).- $\forall B \in \mathcal{B} \; \exists B_1 \in \mathcal{B} \ni B_1 + B_1 \subset B$

c).- $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \; \exists B \in \mathcal{B} \ni B \subset B_1 \cap B_2$

d).- $\forall B \in \mathcal{B}$ y $x \in B \; \exists B_1 \in \mathcal{B} \ni x + B_1 \subset B$

<u>Demostración:</u>

a).- Corolario anterior.

b).- Como $X \times X \longrightarrow X$

$(x,y) \longrightarrow x + y$ es continuo, tomando $x = y = 0$, existen V_1, V_2 vecindades de cero tales que $V_1 + V_2 \subset B$; tomando $B_1 = V_1 \cap V_2$, $B_1 + B_1 \subset V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_2 \subset V_1 + V_2 \subset B$.

c).- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 \cap B_2$ es vecindad de cero, y, como $\mathcal{B}$ es base local en cero, existe $B \in \mathcal{B} \ni B \subset B_1 \cap B_2$.

d).- Como $X \times X \longrightarrow X$

$(x,y) = x + y$ es continuo, tomando $y = 0$, existen W_x, W_o vecindades de x y o, respectivamente, tales que:

$$W_x + W_o \subset B.$$

Ahora, como $\mathcal{B}$ es base local, existe $B_1 \in \mathcal{B}$ talque $B_1 \subset W_o$, y, por lo tanto, $W_x + B_1 \subset W_x + W_o \subset B$ y, en consecuencia, $x + B_1 \subset B$.

Teorema A.7. Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos que satisface a) y b) del teorema A.6, entonces, también se cumple:

e).- $\forall\ B \in \mathcal{B}$ y $\alpha \neq 0$, $\exists_n\ B_n \in \mathcal{B} \ni \alpha B_n \subset B$.

Demostración: Sea $B \in \mathcal{B}$ y $\alpha \neq 0$, por b) $\exists\ B_1 \in \mathcal{B} \ni B_1 + B_1 \subset B$. Aplicando nuevamente b), existe $B_2 \in \mathcal{B} \ni B_2 + B_2 \subset B_1$ y así, $B_2 + B_2 + B_2 + B_2 \subset B_1 + B_1 \subset B$, i.e., $4B_2 \subset B$. Prosiguiendo de esta manera, podemos encontrar $B_n \in \mathcal{B} \ni 2^n B_n \subset B$ y basta tomar $n \in \mathbb{N} \ni 2^n > \alpha$, y, entonces, $\frac{\alpha}{2^n} < 1$, y $\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) 2^n B_n \subset B$, i.e., $\alpha B_n \subset B$.

Teorema A.8. Sea X un espacio vectorial, $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos que satisfacen a), b), c) y d) del teorema A.6, entonces existe una topología $\mathfrak{F}$ de X, tal que $(X,\mathfrak{F})$ es un espacio vectorial topológico, y $\mathcal{B}$ es una base local para X.

Demostración: $\mathfrak{F} = \{A \subset X \mid \forall\ x \in A\ \exists\ B \in \mathcal{B} \ni x + B \subset A\}$.
Probaremos que $\mathfrak{F}$ es una topología para X.

1).- Claramente, X y $\emptyset$ pertenecen a $\mathfrak{F}$.

2).- Sean A_1 y $A_2 \in \mathfrak{F}$ y $x \in A_1 \cap A_2$, entonces existen B_1, B_2 $x + B_1 \subset A_1$ y $x + B_2 \subset A_2$.

Sea $B \in \mathcal{B} \ni B \subset B_1 \cap B_2$

$$x + B \subset x + B_1 \cap B_2 \begin{cases} \subset x + B_1 \subset A_1 \\ \subset x + B_2 \subset A_2 \end{cases}$$

es decir, $x + B \subset A_1 \cap A_2$. y, por lo tanto, $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{F}$.

3).- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta} \subset \mathfrak{F}$ y $x \in \bigcup_{\lambda \in \Delta} A_\lambda$, entonces $x \in A_{\lambda_o}$ para algún $\lambda_o \in \Delta$, y, por lo tanto, existe $B \in \mathcal{B} \ni x + B \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Delta} A$, i.e., $\bigcup_{\lambda \in \Delta} A_\lambda \in \mathcal{F}$ y de 1), 2) y 3) se concluye que $\mathcal{F}$ es una topología para X.

Ahora probaremos que las operaciones + y $\cdot$ del espacio vectorial son continuas con respecto a esta topología.

a).- $+ : X \times X \longrightarrow X$ es continua.

$(x,y) \longmapsto x + y.$

Sea A_{x+y} una vecindad para $x + y \in X$, entonces existe $B \in \mathcal{B} \ni (x+y) + B \subset A_{x+y}$. También existe $B_1 \in \mathcal{B} \ni B_1 + B_1 \subset B$, entonces $(x + B_1) + (y + B_1) \subset (x + y) + B \subset A_{x+y}$, y, por lo tanto, + es continua.

b).- $\cdot : K \times X \longrightarrow X$

$(\lambda_0, x_0) \longmapsto \lambda_0 x_0$ es continua.

Sea $V_{\lambda_0 x_0}$ una vecindad de $\lambda_0 x_0$, entonces existe $B \in \mathcal{B} \ni \lambda_0 x_0 + B \subset V_{\lambda_0 x_0}$. Tenemos que probar que existe $\delta > 0$ y $U_{x_0} \ni$ si $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$ y $x \in U_{x_0}$, entonces $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + B \subset V_{\lambda_0 x_0}$, i.e., $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in B$ si $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ y $x \in U_{x_0}$.

$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0).$

Sea $B_1 \in \mathcal{B} \ni B_1 + B_1 + B_1 \subset B$. Entonces existe $U \in \mathcal{B} \ni \lambda_0 U \subset B$.

Sea V equilibrado tal que $V \subset U \cap B_1$, entonces existe $\delta > 0 \ni \delta^{-1} x_0 \in V$. Sea $\beta \ni |\beta| < \delta$, entonces $(\frac{\beta}{\delta}) \delta^{-1} x_0 \in V$, i.e., $\beta x_0 \in V$ si $|\beta| < \delta$. Si $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, entonces $(\lambda - \lambda_0) x_0 \in V \subset U \cap B_1 \subset B_1$; por otro lado, $x - x_0 \in V$ si tomamos $U_{x_0} = x_0 + V$, y, por lo tanto, $\lambda_0 (x - x_0) \in \lambda_0 V \subset \lambda_0 (U \cap B_1) \subset \lambda_0 U \subset B_1$.

Análogamente, se prueba que $(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) \in B_1$, y, por lo tanto, $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in B$ si $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ y $x \in U_{x_0}$. De todo lo anterior se concluye que $\cdot$ es continua.

Teorema A.9. Sea X un espacio vectorial topológico y $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de seminormas en X.

Sea $\mathcal{S} = \left\{ V_{\gamma,\varepsilon} = \{ x \in X \mid P_\gamma(x) < \varepsilon \} \mid \gamma \in \Gamma \text{ y } \varepsilon > 0 \right\}$

$\mathcal{B}$ la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base local de una topología para X que lo hace localmente convexo, y con respecto a la cual cada seminorma P_γ es -

localmente convexo, y con respecto a la cual cada seminorma P_γ es continua. Además, si $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ separa puntos, entonces X es un espacio de Hausdorff.

Demostración:

a).- Si $B\in\mathcal{B}$, entonces $B = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \varepsilon_i}$ y, por lo tanto es equilibrado, absorbente y convexo.

b).- Sea $B\in\mathcal{B}$, $B = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \varepsilon_i}$

Sea $B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \frac{\varepsilon_i}{2}}$, entonces $B_1 + B_1 \subset B$, pues, si $X\in B_1 + B_1$, entonces $x = x_1 + x_1'$, con $x_1, x_1' \in B_1$.

$P_{\gamma_i}(x) \leq P_{\gamma_i}(x_1) + P_{\gamma_i}(x_1') < \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i = \varepsilon_i$, y, por lo tanto, $x\in B$.

c).- Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces

$B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \varepsilon_i}$, $B_2 = \bigcap_{j=1}^{K} V_{\gamma_j' \varepsilon_j'}$.

Tomando $B = B_1 \cap B_2$, se cumple que $B \subset B_1 \cap B_2$.

d).- Sea $B\in\mathcal{B}$ y $x\in B$.

$B = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \varepsilon_i}$, $\delta_j = \varepsilon_j - P_{\gamma_j}(x)$, $B = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \delta_i}$.

$x + B_1 \subset B$, pues, si $y\in x + B_1$, entonces $y = x + v_1$, con $v_1 \in B_1$.

$P_{\gamma_j}(y) = P_{\gamma_j}(x + v_1) \leq P_{\gamma_j}(x) + P_{\gamma_j}(v_1) < P_{\gamma_j}(x) + \delta_j = \varepsilon_j$, i.e., $y \in x + B_1$, lo cual implica que $y\in B$ y $x + B_1 \subset B$.

Como $\mathcal{B}$ satisface a), b), c) y d), es una base local de una topología para X, que lo hace un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Supongamos ahora que $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ separa puntos, y sea $x_0\in X$ tal que $x_0 \neq 0$, entonces existe $\gamma_0\in\Gamma$, tal que $P_{\gamma_0}(x_0) \neq 0$, i.e., $P_{\gamma_0}(x_0) = \alpha > 0$.

Sea $U = \{ x\in X \mid P_{\gamma_0}(x) < \frac{\alpha}{2} \}$, una vecindad de cero y $x_0 + U$ vecindad de x_0, también se cumple que $U \cap (x_0 + U) = \emptyset$, pues, de lo contrario, existiría $x\in U\cap(x_0 + U)$, i.e., $x = x_0 + u_0$, con $u_0\in U$ y $x\in U$, lo cual implicaría que $P_{\gamma_0}(x) < \frac{\alpha}{2}$, y, tomando $x = x_0 - (-u_0)$, tendríamos:

$P_{\gamma_0}(x) \geq P_{\gamma_0}(x_0) - P_{\gamma_0}(u_0) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$, lo cual es una contradicción, y, por lo tanto, X es un espacio de Hausdorff.

Teorema A.10. Sea X un espacio vectorial topológico y U abierto, convexo, tal que $0 \in U$. Entonces existe un abierto V convexo, equilibrado, tal que $0 \in V \subset U$.

Demostración: Como U es convexo, $tU = 0(1 - t) + tU \subset U$. Sea $U_1 = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$, entonces existe un abierto y equilibrado W, tal que $0 \in W \subset U$, i.e., si $|\alpha| = 1$, $0 \in W = \alpha W \subset \alpha U$, i.e., $0 \in \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = U_1$, entonces, si tomamos $V = U_1^{\circ}$, obviamente $0 \in V$. Además, podemos probar que:

a).- V es equilibrado.

Si $\alpha = 0$, $\alpha V = \{0\} \subset V$.

Supongamos, pues, que $0 < |\alpha| \leq 1$.

$\alpha V = \alpha U_1^{\circ} \subset \alpha U_1 = \frac{\alpha}{|\alpha|} |\alpha| U_1 \subset \frac{\alpha}{|\alpha|} U_1 = \bigcap_{|\beta|=1} \frac{\alpha}{|\alpha|} \beta U \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma U = U_1$, i.e., $\alpha V \subset U_1^{\circ} = V$, y, por lo tanto, V es equilibrado.

b).- V es convexo.

Sea $0 \leq t \leq 1$.

1).- Si $t = 0$, $(1 - t)V + tV = V \subset V$.

2).- Si $0 < t \leq 1$, $(1 - t)V + tV \subset (1 - t)U_1 + tU_1 \subset U_1$, pues U_1 es convexo, entonces $(1 - t)V + tV \subset U_1^{\circ} = V$, y, por lo tanto, V es convexo.

Teorema A.11. Sea X un espacio vectorial, $V \subset X$, V equilibrado. Entonces $\{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\} \subseteq V \subseteq \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

Además, si X es un espacio vectorial topológico y V es abierto, entonces μ_V es continua, $V = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\}$ y $\overline{V} = \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

Demostración:

1).- $\{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\} \subseteq V$.

Sea $x \in X \ni \mu_V(x) < 1$, entonces existe $\sigma > 0 \ni \mu_V(x) \leq \sigma < 1$, tal que $\sigma^{-1} x \in V$, y, por lo tanto, $x = \sigma \sigma^{-1} x \in V$.

2).- $V \subset \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

Sea $x \in V$, $1^{-1} x = 1^{-1} \cdot 1x \in V$, i.e., $\mu_V(x) \leq 1$, y, por lo tanto,

$V \subset \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

3).- Si X es un espacio vectorial topológico y V abierto, entonces μ_V es continua.

$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x - y)$.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $x - y \in \frac{1}{2}\varepsilon V$, entonces $(\frac{\varepsilon}{2})^{-1}(x - y) \in V$, i.e., $\mu_V(x - y) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, y, por lo tanto, μ_V es continua.

4).- Si V es abierto, entonces:

$V = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\}$ y $\overline{V} = \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

Sea $x \in V$, como:

$K \times X \longrightarrow X$

$(1,x) \longmapsto x$ es continua, existe $\varepsilon > 0 \ni$ si $|1 - \lambda| < \varepsilon$, entonces $\lambda x \in V$. Tomando $\lambda = 1 + \varepsilon/2$, $(1 + \varepsilon/2)x \in V$, y, por lo tanto, $\mu_V(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon/2} < 1$, i.e., $V \subseteq \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\}$ y, por lo tanto, $V = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\}$.

Como μ_V es continua y V abierto, contenido en el cerrado $\{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$, entonces $\overline{V} \subset \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

Para que $\{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\} \subseteq \overline{V}$, basta ver que, si $\mu_V(x) = 1$, entonces $x \in \overline{V}$.

Supongamos, pues, que $\mu_V(x) = 1$, entonces existe una sucesión $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \ni \sigma_n^{-1}x \in V$, con $1 \leq \sigma_n \leq 1 + 1/n$ y $\sigma_n^{-1} \longrightarrow 1$.

$x = 1\,x = (\lim \sigma_n^{-1})x = \lim \sigma_n^{-1}x \in \overline{V}$ y, en consecuencia, $x \in \overline{V}$, lo cual implica que $\{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\} \subseteq \overline{V}$, y, por lo tanto, $\overline{V} = \{x \in X \mid \mu_V(x) \leq 1\}$.

<u>Teorema A.12.</u> Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo. Entonces, la topología de X está generada por una familia de seminormas continuas; además, X es un espacio de Hausdorff sii la familia de seminormas separa puntos.

<u>Demostración:</u> Si X es localmente convexo, entonces existe una base local $\mathcal{B}$ cuyos elementos son convexos y equilibrados. $\mathcal{S} = \{\mu_V \mid V \in \mathcal{B}\}$ es una familia de seminormas en X, y, por lo tanto, genera una topología $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ que hace de X un espacio vectorial

topológico localmente convexo.

Probaremos que la topología $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ es igual a la topología original $\mathfrak{T}$ de X.

1).- $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathfrak{T}$ es obvio.

2).- $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$

Sea $V \in \mathfrak{T}$, entonces $V = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\} \in \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$, y, por lo tanto, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$.

3).- Si $\mathcal{S}$ separa puntos, entonces X es un espacio de Hausdorff (la misma demostración que en el teorema A.9).

4).- Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $\mathcal{S}$ separa puntos.

Sea $x \in X \ni x \neq 0$, existen vecidades V_0 y V_x de cero y x, respectivamente, tales que $V_0 \cap V_x = \phi$.

$V_x = \bigcup_{\gamma \in \Gamma' \subset \Gamma} \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i \varepsilon_i} \right)$, $V_0 = \{x \in X \mid \mu_{V_0}(x) < 1\}$,

y, como $x \notin V_0$, entonces $\mu_{V_0}(x) \geqslant 1$, lo cual implica que $\mu_{V_0}(x) \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathcal{S}$ es una familia de seminormas que separa puntos.

A P E N D I C E "B"

Definamos en $\mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ las seminormas:

$$P_n(\phi) = \text{Max}\left\{ |D^{\alpha}\phi(x)| \; : |\alpha| \leq n \;\; y \;\; x \in K_{n+1}\right\} \qquad n = 1,2,3,...$$

donde $K_i \subset \mathbb{R}^n$ es compacto para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \mathbb{R}^n$; además, $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ $\quad i = 1,2,3,....$

Esta familia de seminormas generan una topología para $\mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con la cual se convierte en un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\mathcal{E}^{\infty}_K(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \,|\, \text{Sop } f \subseteq K\right\}$, donde $\text{Sop } f = \left\{ \overline{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \neq 0}\right\}$.

$\mathcal{E}^{\infty}_K(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y denotaremos por $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ a este subespacio con la topología heredada de $\mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Explícitamente, esta topología está generada por la familia de seminormas

$$q_n(f) = \text{Max}\left\{ |D^{\alpha} f(x)| \; : |\alpha| \leq n, \; x \in K\right\}.$$

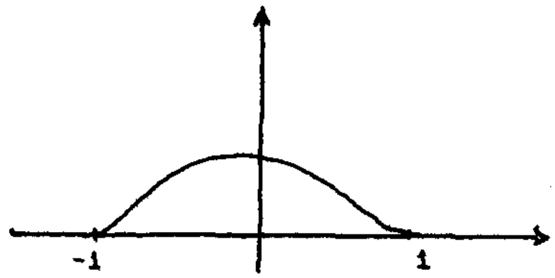
Sea $\mathcal{E}^{\infty}_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \;|\; \text{Sop}\phi \subset \mathbb{R}^n \text{ es compacto}\right\}$. Consideremos ahora a $\mathcal{E}^{\infty}_0(\mathbb{R}^n)$ con la topología $\mathfrak{F}_0$ inducida por $\mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, la cual está generada por la familia de seminormas

$$P_n(f) = \text{Max}\left\{ |D^{\alpha} f(x)| \; : |\alpha| \leq n, \;\; x \in \mathbb{R}^n\right\} .$$ Sin embargo,

$\mathcal{E}^{\infty}_0(\mathbb{R}^n)$ con esta topología no resulta ser completo, pues:

Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$



$f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

Sea $\phi(x) = cf(2x)$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathrm{Sop}\,\phi \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Sea $\psi_m(x) = \sum_{\mu=1}^{m} 2^{-\mu} \phi(x - \mu)$, $\psi_m \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

$$d(f,g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{P_\nu(f-g)}{1+P_\nu(f-g)}$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{K=\nu+1}^{\infty} 2^{-K} < \varepsilon$, $C_N = \mathrm{Max}\,\{|D^\alpha \phi(y)| : |\alpha| \leq N,\ y \in \mathbb{R}\}$

y N_0 tal que $\sum_{K=N_0+1}^{\infty} 2^{-K} < \varepsilon/2C_N$

$$|D^\alpha(\psi_{n+p} - \psi_n)(x)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} 2^{-\nu} |D^\alpha \phi(x-\nu)| \leq C_N \sum_{\nu=n+1}^{n+p} 2^{-\nu} < \varepsilon/2$$

Por lo tanto, para $n \geq N_0$, $p \in \mathbb{N}$ y $|\alpha| \leq n$, $P_n(\psi_{n+p} - \psi_n) \leq \varepsilon/2$.

$$d(\psi_{n+p} - \psi_n) = \sum_{\nu=1}^{N} 2^{-\nu} \frac{P_\nu(\psi_{n+p} - \psi_n)}{1+P_\nu(\psi_{n+p} - \psi_n)} + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{P_\nu(\psi_{n+p} - \psi_n)}{1+P_\nu(\psi_{n+p} - \psi_n)} <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{N} 2^{-\nu} P_\nu(\psi_{n+p} - \psi_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{\nu=1}^{N} 2^{-\nu} P_N(\psi_{n+p} - \psi_n) + \varepsilon/2 <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Así pues, hemos probado que $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y, sin embargo, $\lim \psi_n \notin \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; por lo tanto, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ no es completo.

Daremos a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una topología $\mathfrak{F}$ que lo haga completo.

Sea $\mathcal{B} = \{ W \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid W$ es equilibrado, convexo y, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $W \cap \mathcal{D}_K$ es abierto en $\mathcal{D}_K \}$.

<u>Teorema B.1.</u> En $\mathcal{B}$, así definida, se cumple:

a).- $W \in \mathcal{B}$ es equilibrado, absorbente y convexo.

b).- $\forall \; W \in \mathcal{B} \;\; \exists \;\; W_0 \in \mathcal{B} \;\; \ni \;\; W_0 + W_0 \subseteq W$.

c).- Si W_1 , $W_2 \in \mathcal{B}$, existe $W_0 \in \mathcal{B}$ tal que $W_0 \subseteq W_1 \cap W_2$.

d).- Si $W \in \mathcal{B}$ y $x \in W$, existe $W_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x + W_0 \subseteq W$.

<u>Demostración:</u>

a).- Solamente tenemos que probar que W es absorbente. Sea $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\Psi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ para algún compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea $W \in \mathcal{B}$, entonces $W \cap \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ es abierto en $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, y, por lo tanto, es absorbente, i.e., existe $\sigma > 0$ tal que $\sigma^{-1}\Psi \in W \cap \mathcal{D}_K \subset W$, y, en consecuencia, W es absorbente.

b).- Como W es convexo, $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subseteq W$, y, tomando $W_0 = \frac{1}{2}W$, se cumple que $W_0 + W_0 \subseteq W$.

c).- Tomando $W_0 = W_1 \cap W_2$, se cumple que $W_0 \subseteq W_1 \cap W_2$.

d).- Sea $W \in \mathcal{B}$, entonces $\mu_W : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una seminorma. $P|_{\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)} \equiv P_{W,K} = \mu_{W \cap \mathcal{D}_K}$ es una seminorma en $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, y, por lo tanto, es continua, y entonces, $P = P_{W,K}(\Psi) < 1$, si $\Psi \in W \cap \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$. Sea $W_0 = \{ \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid P(\phi) < 1 - P(\Psi) \}$. W_0 es convexo, equilibrado y, además, como $W_0 \cap \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) = P^{-1}[(-\infty, 1 - P(\Psi))]$ y P es continua, se cumple que $W_0 \cap \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ es abierto en $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, y, por lo tanto, $W_0 \in \mathcal{B}$. Sea $\phi \in W_0$, entonces $P(\phi + \Psi) \leq P(\phi) + P(\Psi) < 1 - P(\Psi) + P(\Psi) = 1$, de lo que concluimos que $\phi + \Psi \in W$, i.e., $\Psi + W_0 \subseteq W$, con lo cual queda probado d).

Por el teorema A.8, existe una topología $\mathcal{T}_0$ para $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_0)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, y $\mathcal{B}$ es una base local para $\mathcal{T}_0$.

<u>Definición B.1.</u> Sea X un espacio vectorial topológico, decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}^{\infty} \subset X$ es de Cauchy, si, para toda U vecindad de cero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n - x_m) \in U$, si $m,n \geq N$, y decimos que X es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en X.

Denotaremos por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial topológico $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con la topología antes descrita.

<u>Teorema B.2.</u>

a).- Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ la inclusión

$i_K : \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es continua y

$\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) = \{ W \cap \mathcal{D}_K \mid W \in \mathfrak{F}_0 \}$.

b).- Sea E acotado en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $E \subset \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe M_n tal que, para toda $\varphi \in E$, se cumple que $P_n(\varphi) \leq M_n$.

c).- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.

d).- Si $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, para algún compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P_n(\varphi_i - \varphi_j) < \varepsilon$, si $i,j \geq N$.

e).- $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge a cero sii existe K compacto en $\mathbb{R}^n$ tal que Sop $\varphi_i \subseteq K$, y, para todo multiíndice α , $D^{\alpha}\varphi_i \xrightarrow{unif.} 0$.

f).- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es completo.

<u>Teorema B.3.</u> Sean X,Y espacios vectoriales topológicos, y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas que generan la topología de Y, $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo sii, para toda $P \in \mathcal{P}$ existe U vecindad de cero en X, tal que, para toda $x \in U$ se cumple que $P(Tx) \leq 1$. Si, además, $\mathfrak{M}$ es una familia de seminormas cerrada bajo máximo que genera la topología de X, entonces:

T es continuo sii para toda $P \in \mathcal{P}$ existe $m \in \mathfrak{M}$ tal que $P(Tx) \leq Mm(x)$, para toda $x \in X$.

<u>Demostración:</u> ($\Longrightarrow$) Supongamos que $T : X \longrightarrow Y$ es continuo

y sea $P \in \mathcal{P}$. $\{y \in Y \mid P(y) < 1\}$ es una vecindad de cero en Y, y, por lo tanto, existe U vecindad de cero en X tal que $T(U) \subset \{y \in Y \mid P(y) < 1\}$, i.e., $P(Tx) < 1$, para toda $x \in U$.

($\Leftarrow$) Sea V vecindad de cero en Y, entonces existen conjuntos básicos $V_i = \{y \subset | P_i(y) < \varepsilon_i\}$, tal que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V$. Para cada uno de estos V_i, existe U_i tal que, para toda $x \in U_i$, se cumple que $P(Tx) \leq 1$.

Tomando $\varepsilon = \text{Min}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ y $U = \varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)$, se cumple que $T(U) \subset V$, pues, si $x \in U$, $P_i(T(\varepsilon x)) = \varepsilon P_i(Tx) < \varepsilon \leq \varepsilon_i$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$, y, en consecuencia, $T(x) \in V$; por lo tanto, $T(U) \subset V$.

Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ es cerrada bajo máximo y $T: X \longrightarrow Y$ es continuo.

Sea $P \in \mathcal{P}$, $\{x \in X \mid P(x) < \varepsilon\}$ es una vecindad de cero en Y, entonces existe una vecindad U de cero en X tal que:

$T(U) \subset \{y \in Y \mid P(y) < 1\}$, i.e., si $x \in U$, entonces $P(Tx) < 1$.

Existe $m \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{x \in X \mid m(x) < \varepsilon\} \subset U$.

Si $m(x) < \varepsilon$, entonces $x \in U$, i.e., $P(Tx) < 1$.

Si $m(x) = 0$, entonces $m(\lambda x) = 0$ y, por lo tanto $P(T(\lambda x)) < 1$, i.e., $P(Tx) < 1/\lambda$, lo cual implica que $P(Tx) = 0$.

Supongamos ahora que $m(x) > 0$ y sea $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{2m(x)}$.

$m(\lambda x) = \lambda\, m(x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, lo cual implica que $P(T(\lambda x)) < 1$, i.e., $P(Tx) < \frac{2}{\varepsilon}\, m(x)$.

<u>Teorema B.4.</u> Sea Y un espacio vectorial localmente convexo, $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Y$ un operador lineal, entonces los siguientes hechos son equivalentes:

a).- T es continuo

b).- T es acotado

c).- Las restricciones de T a cada $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ son continuas.

d).- Si $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces $T\varphi_n \longrightarrow 0$ en Y.

R E F E R E N C I A S

1.- APLICATIONS OF THE THEORY OF DISTRIBUTIONS
Romulus Cristescu - Gheorghe Martinescu.
John Wiley. 1973.

2.- MATHEMATICS FOR THE PHYSICAL SCIENCES
L. Schwartz.
Addison - Wesley. 1966.

3.- Apuntes del curso: TOPICOS EN ANALISIS FUNCIONAL
impartido por el Dr. Saul Hahn Goldberg
en el CIEA-IPN en septiembre de 1977.

4.- AN INTRODUCTION TO DISTRIBUTIONS
John Horváth.
The American Mathematical Monthly. 1974.

5.- APLICATIONS OF DISTRIBUTIONS TO PDE THEORY
F. Treves.
The American Mathematical Monthly. 1974.

6.- LA MATEMATICA: SU CONTENIDO, METODOS Y SIGNIFICADO
Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros.
Alianza Universidad. 1979.

7.- TEORIA DE LAS DISTRIBUCIONES
Carlos Perelló.
Sociedad Matemática Mexicana. 1968.

8.- FUNCTIONAL ANALYSIS
Walter Rudin
Tata Mc Graw-Hill. 1974.

9.- PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
Fritz John
Springer Verlag. 1978.