BIBLIOTECA CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
QA329
.G83
15/T1139

UNIVERSIDAD DE SONORA
Escuela de Altos Estudios
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

EL OPERADOR BARREDOR Y APLICACIONES

T E S I S

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presenta

José Manuel Guillén Rodríguez

CENTRO DE INVESTIGACION EN ALIMENTACION Y DESARROLLO, A. C.

Hermosillo, Sonora, México Julio de 1983

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

A Dios.

A mis padres por su ayuda y confianza.

A mis hermanos porque somos una gran familia.

A todos los que han formado parte de mi vida.

A los niños por su ternura.

Al mundo porque vivamos unidos y en paz.

A la naturaleza.

José Manuel

AGRADECIMIENTOS

Hago un reconocimiento al M. en C. Fernando Avila Murillo por su asesoría y dirección y al Dr. Juan Enrique Ramos Salas por su apoyo y colaboración para la realización de este trabajo.

Un agradecimiento especial al Centro de Investigación en Alimentación y Desarrollo, A.C. por todas las facilidades otorgadas.

INDICE GENERAL

Introducción

1.- Antecedentes Matemáticos 1

1.1 Algebra Lineal 1

1.2 Conceptos elementales de Estadística 1

1.3 Modelos de regresión 12

1.3.1 Modelo de regresión lineal múltiple 12

1.3.2 Modelo de regresión por pasos 17

2.- El Operador Barredor 21

2.1 Inversión de matrices 21

2.2 Justificación matemática del operador barredor 28

2.3 Algoritmos 34

3.- Aplicaciones y Conclusiones 37

Bibliografía 51

Apéndice A 53

Apéndice B 54

INTRODUCCION

Con el transcurso del tiempo y con los nuevos avances en la ciencia y la tecnología; el ser humano ha ido realizando -en ocasiones- una serie de esfuerzos, con el propósito de efectuar casi todo tipo de actividades de la vida cotidiana con la economía de los recursos y la optimización de los resultados, siendo más precisos, nos hemos allegado de una gran cantidad de instrumentos y mecanismos necesarios y a veces indispensables para realizar algunas tareas, nos referimos de una manera específica a las microcomputadoras y a los programas de software aplicados a ellas.

Uno de los motivos principales para realizar esta tésis, ha sido el diseño de programas de cómputo estadístico para microcomputadoras, que satisfagan necesidades específicas tales como: algoritmos precisos, rapidez de cómputo y eficiencia en el uso de la capacidad de memoria.

Sin embargo, el objetivo principal de este trabajo es la descripción de cierto tipo de operador para la inversión de matrices, conocido como el operador barredor (Sweep Operator). Este término fue acuñado por Beaton en 1964 (ver 1).

En el primer capítulo de este trabajo se mencionan

los antecedentes necesarios para el desarrollo de la tésis. Dicho capítulo se compone de tres secciones: En la primera se introducen los conceptos necesarios del Algebra Lineal; en la segunda se presentan algunas ideas elementales de estadística; por último, se describen dos modelos de regresión en los que se aplica el operador barredor.

En el segundo capítulo se encuentra la parte más importante de esta tésis: el operador barredor.

Esta parte se divide en tres secciones: Primero, se introducen brevemente los métodos mas usuales de inversión de matrices incluyendo el método de Gauss-Jordan, inversión por particiones. Después, se presenta la justificación matemática del operador barredor y sus ventajas. Finalmente, se desarrolla el algoritmo para la implementación del operador, asi como diversificaciones en casos especiales.

En el tercer capítulo de la tésis se hacen algunas interesantes aplicaciones matemáticas -principalmente estadísticas-. Entre estas se encuentra el análisis de regresión lineal, sea simple o múltiple, y regresión por pasos (Stepwise regression), donde además se observará el importante papel que juega el operador barredor en la inversión de matrices.

Sobre las aplicaciones, agregamos que algunas han formado parte de proyectos de investigación en el Centro de Investigación en Alimentación y Desarrollo, A. C. (CIAD).

Este capítulo incluye algunas conclusiones y observaciones particulares sobre las aplicaciones.

Posteriormente se menciona la bibliografía usada para la realización de este trabajo, y finalmente se muestran los apéndices A y B, donde se detalla un listado de la implementación de los algoritmos, contenidos en el tercer capítulo, en lenguaje BASIC para una microcomputadora TRS-II Radio Shack.

Cabe destacar que existen anexos a esta tésis que muestran listados de los programas empleados en las aplicaciones (ver 20).

Esta trabajo forma parte de un proyecto de investigación en el CIAD, denominado:

"Integración de un software estadístico para el área de alimentos".

1.- ANTECEDENTES MATEMATICOS

En este capítulo se presentan los elementos matemáticos necesarios para lograr la comprensión de los capítulos siguientes. Lo hemos dividido en dos secciones:

En la primera observaremos los conceptos básicos del Algebra Lineal que se deben considerar para el desarrollo y justificación del operador barredor, incluyendo la demostración de los principales teoremas, aunque en ocasiones haremos referencia a la bibliografía para justificar algun resultado. En la segunda sección definiremos algunos conceptos elementales de estadística para proseguir con una breve descripción de dos modelos de regresión, los cuales plantean la necesidad de un perfeccionamiento en algunas partes específicas de su desarrollo, y serán considerados como tema de las aplicaciones del operador barredor.

1.1 ALGEBRA LINEAL

Definición 1.1.1 En esta tésis una matriz A es un arreglo rectangular de números reales. Si A tiene n renglones y p columnas diremos que es de orden nxp.

Notación: La matriz A de orden nxp, se representa como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

o en forma abreviada $A=(a_{ij})$; $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,p$. Cuando no se especifique, i y j varían sobre este rango.

Por conveniencia, usaremos la última forma de notación a lo largo del presente trabajo.

Definición 1.1.2 La transpuesta de una matriz A se denota por A' y es la matriz que se obtiene al intercambiar los renglones y columnas de A. Así tenemos que:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

y su orden es pxn.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Definición 1.1.3 Un vector columna es una matriz de orden pxl que por comodidad escribiremos con un solo índice: $X=(x_i)_{pxl}$.

Definición 1.1.4 Si el número de renglones de una matriz es igual al número de columnas, entonces se dice que la matriz es cuadrada de orden n.

Cuando A es de orden n, se dice que los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ constituyen la diagonal principal de A.

Definición 1.1.5 Una matriz $A=(a_{ij})_{nxp}$ es triangular inferior (superior) si $a_{ij}=0$ para $i<(>)j$ y es diagonal si $a_{ij}=0$ para $i\neq j$.

Definición 1.1.6 Una matriz cuadrada A es simétrica si y sólo si $A=A'$, esto es, si $a_{ij}=a_{ji}$ para todo i,j.

Definición 1.1.7 El producto de una matriz $A=(a_{ij})_{nxp}$ por un número real α es la matriz $B=(\alpha a_{ij})_{nxp}$.

Definición 1.1.8 La suma de las matrices $A=(a_{ij})_{nxp}$ y $B=(b_{ij})_{nxp}$, se define como la nueva matriz $C=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$ de orden nxp. La suma de matrices de distinto orden no esta definida.

Definición 1.1.9 La multiplicación de dos matrices $A=(a_{ij})_{pxm}$

y $B=(b_{ij})_{nxq}$ se define únicamente para el caso de que m=n, y el resultado es la matriz producto $C=AB=(\sum_k a_{ik}b_{kj})_{pxq}$. En particular si $X=(x_i)_{mx1}$, entonces el producto $AX=C=(c_i)=(\sum_k a_{ik}x_k)_{px1}$.

Teorema 1.1.1 $(AB)'=B'A'$

Demostración.- ver referencia (6)

Definición 1.1.10 La matriz $I_n=(\delta_{ij})_{nxn}$, donde $\delta_{ij}=1$ si i=j y $\delta_{ij}=0$ de cualquier otra forma, es llamada la matriz identidad de orden n.

Definición 1.1.11 Sea $A=(a_{ij})_{pxn}$, si escribimos $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ donde A_{11} es una matriz mxq, A_{12} es una matriz mx(n-q), A_{21} es una matriz (p-m)xq y A_{22} es una matriz (p-m)x(n-q), diremos entonces que A es una matriz particionada.

Definición 1.1.12 Una matriz B recibe el nombre de inversa de una matriz cuadrada A si:

$$AB=I$$

en lo sucesivo denotaremos a la inversa de A por A^{-1}.

Definiremos escuetamente el determinante de una matriz cuadrada. Los detalles pueden consultarse en (4) y (10).

Definición 1.1.13 A cada matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{nxn}$ le asociamos un número real llamado su determinante, dado por la expresión

$$|A|=|(a_{ij})|=\Sigma_{\psi\epsilon S_n} E(\psi)a_{1\psi(1)}\ a_{2\psi(2)}\ \cdots a_{n\psi(n)}$$

en donde S_n es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\}$ y $E(\psi)=1$ si la permutación es par y -1 si es impar.

Como cada término de $|A|$ contiene un y solamente un elemento de cada renglón y cada columna de la matriz A, si agrupamos los términos de $|A|$ que contengan a a_{ij} como factor, entonces la suma de estos términos puede escribirse como $a_{ij}c_{ij}$. El factor c_{ij} se llama cofactor de a_{ij}. Los términos de c_{ij} se componen de los elementos de la submatriz M_{ij} de A, que se obtiene al suprimir el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Definición 1.1.14 Una matriz cuyo determinante es distinto de cero, es llamada no singular o no degenerada.

Teorema 1.1.2 Una matriz cuadrada tiene una inversa A^{-1} si y sólo si, A es no singular.

Demostración.- ver (6).

Definición 1.1.15 Si eliminamos n-r renglones y n-r columnas de una matriz cuadrada A de orden n, los elementos res-

tantes forman una submatriz cuadrada de A. Al determinante de dicha submatriz cuadrada se le llama menor de orden r de A.

Cuando las columnas y renglones que se eliminan de una matriz A tienen los mismos fndices, la submatriz restante está localizada simétricamente con respecto a la diagonal principal de A, y llamaremos al menor correspondiente menor principal de A.

Definición 1.1.16 Un número real λ es llamado valor propio de la matriz A si existe un vector, diferente de el vector nulo, y llamado vector propio de A, tal que $AX=\lambda X$.

Teorema 1.1.3 λ es un valor propio de A si y sólo si, $|A-\lambda I|=0$.

Demostración.- => Si λ es un valor propio, entonces $AX=\lambda X$ lo que podemos escribir como $(A-\lambda I)X=0$.

El sistema correspondiente de ecuaciones lineales homogéneas tiene soluciones no triviales si y sólo si, el determinante $|A-\lambda I|$ se anula.

<= Si $|A-\lambda I|=0$, el sistema homogéneo $(A-\lambda I)X=0$ tiene una solución no trivial (ver 6), con lo cual tendríamos que para algún vector X se cumpliría la igualdad y asi obtener $AX=\lambda X$.

Teorema 1.1.4 Si A es una matriz simétrica entonces sus valores propios son reales y si X e Y son vectores propios aso

ciados a valores propios distintos, entonces $Y'X=0$.

Demostración.- Para observar que los valores propios son reales ver (18).

Sean λ_1 y λ_2 los valores propios asociados a X e Y, respectivamente, entonces $AX=\lambda_1 X$ y $AY=\lambda_2 Y$;

así tenemos que $X'A'=\lambda_1 X'$ y post multiplicando por Y, obtenemos $X'A'Y=\lambda_1 X'Y$ (1)

además $AY=A'Y=\lambda_2 Y$, y pre multiplicando por X', obtenemos $X'A'Y=X'\lambda_2 Y$ (2)

sustrayendo (2) de (1)

$$0=\lambda_1 X'Y-\lambda_2 X'Y=(\lambda_1-\lambda_2)X'Y \qquad \text{pero } \lambda_1\neq\lambda_2$$

entonces $X'Y=0$.

Teorema 1.1.5 Cualquier matriz simétrica A puede ser escrita en la forma $A=TDT'$ donde D es una matriz diagonal con los valores propios de A y T es una matriz no singular tal que $T'=T^{-1}$.

Demostración.- Ver (18).

Definición 1.1.17 Una forma cuadrática q es un polinomio homogéneo de segundo grado en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Una forma cuadrática siempre es representable por:

$$q=X'AX=\sum_{ij} a_{ij}x_i x_j \qquad a_{ij}=a_{ji};\ i,j=1,\ldots,n.$$

donde X es un vector columna de orden nx1 y A es una matriz simétrica de orden n. La matriz A es llamada la matriz de la forma cuadrática, Así, toda forma cuadrática está asociada de una manera natural con una única matriz simétrica, y recíprocamente cada matriz simétrica puede ser asociada con una forma cuadrática.

Definición 1.1.18 Una forma cuadrática $q=X'AX$ y la matriz A se dicen definidas positivas si para cualquier vector arbitrario X con al menos un elemento distinto de cero, se tiene que $q=X'AX>0$.

Teorema 1.1.6 Para cualquier matriz simétrica A existe una matriz T tal que $T'=T^{-1}$ y $X'AX=\Sigma\lambda_i y_i^2$ donde $Y=(y_i)=T'X$ y los λ_i son los valores propios de A.

Demostración.- Ver (19).

Teorema 1.1.7 Si X'AX es definida positiva, entonces $\lambda_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Demostración.- $X'AX=\Sigma\ \lambda_i y_i^2>0$.

De el teorema 1.1.6 vemos que X=0 implica que Y=0. Escogiendo $y_1=1$, $y_2=\ldots=y_n=0$, deducimos que $\lambda_1>0$. Similarmente $\lambda_i>0$ para todo i.

Corolario 1.1.8 Si X'AX es definida positiva, entonces det A>0.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Teorema 1.1.9 X'AX es definida positiva si y sólo si, todos los menores principales de A son positivos.

Demostración.- $\Rightarrow$ Si X'AX es definida positiva, tomemos el vector X particionado como $\begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y aplicándolo a la forma cuadrática, tendremos

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 A_{11} & X_1 A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} = X_1 A_{11} X_1 > 0.$$

$\Leftarrow$ ver (6).

Teorema 1.1.10 Si X'AX es definida positiva, entonces $a_{ii}>0$ para $i=1,2, \ldots, n$.

Demostración.- Tomemos el vector X con componentes $x_1=1$, $x_2= \ldots =x_n=0$, y aplicándolo en la forma cuadrática q, obtenemos que $a_{11}>0$. De igual forma para todo i.

Teorema 1.1.11 La matriz A es simétrica y definida positiva si y sólo si, A^{-1} existe, es simétrica y definida positiva.

Demostración.- ver (11).

1.2 CONCEPTOS ELEMENTALES DE ESTADISTICA

Se presuponen los conceptos elementales de la teoría de la probabilidad (ver 14).

Definición 1.2.1 Sea Y una variable aleatoria discreta con los posibles valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$ y probabilidades dadas por $f(y_i)=P(Y=y_i)$; $i=1,2, \ldots, k$. El valor esperado de Y se define como

$$E(Y)=\Sigma y_i f(y_i).$$

Si Y es una variable aleatoria continua con función de densidad f. El valor esperado de Y se define por

$$E(Y)=\int yf(y)dy.$$

Una propiedad importante del valor esperado es $E(a+cY)=a+cE(Y)$, donde a y c son valores constantes reales.

Definición 1.2.2 La varianza de Y es denotada por $\sigma^2(Y)$ y se define como

$$\sigma^2(Y)=E((Y-E(Y))^2).$$

La raíz cuadrada de la varianza se llama desviación estándar.

La varianza de una función lineal de Y es necesitada frecuentemente. Denotamos la varianza de a+cY por $\sigma^2(a+cY)$, y es fácil ver que $\sigma^2(a+cY)=c^2\sigma^2(Y)$, a y c contantes.

Daremos de una manera informal definiciones de algunos conceptos estadísticos que son muy intuitivos.

Para un vector aleatorio $X=(x_i)_n$ definimos el vector de valores esperados $E(X)=(E(x_i))_n$ y la matriz de varianza-covarianza $\sigma^2(X)=(E(x_ix_j)-E(x_i)E(x_j))_{nxn}$.

Definición 1.2.3 A un conjunto de objetos acerca de los cuales queremos información lo llamaremos población.

Definición 1.2.4 Una muestra es un subconjunto finito de la población usada para obtener información respecto a la población total. Supondremos siempre que la muestra es aleatoria (ver 13), así que matemáticamente una muestra es una sucesión finita $x_1,\ldots, x_n$ de variables aleatorias definidas en la población.

Definición 1.2.5 Un parámetro es una característica numérica de la población. Uno de los problemas principales de la estadística es poder determinar los parámetros de una población.

Definición 1.2.6 Un estadístico es una característica numérica de la muestra. Matemáticamente un estadístico es una función muestral $f(x_1, \ldots, x_n)$. Cuando usamos un estadístico para evaluar un parámetro poblacional lo llamaremos estimador (del parâmetro). Un estimador es una variable aleatoria.

Definición 1.2.7 Un estimador θ^* de un parámetro θ es insesgado si $E(\theta^*)=\theta$.

Definición 1.2.8 Un estimador θ^* es un estimador consisten-

te de θ si:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta^*-\theta|>\varepsilon)=0 \quad \text{para cualquier } \varepsilon>0.$$

Definición 1.2.9 Un estimador θ^* es un estimador de θ, de mínima varianza si, para cualquier estimador θ':

$$\sigma^2(\theta^*)<\sigma^2(\theta').$$

1.3 MODELOS DE REGRESION

El análisis de regresión lineal trata el problema de encontrar una relación lineal entre una variable dependiente Y y uno o más predictores (variables independientes), $X_1,\ldots X_p$. Esta relación, llamada función de regresión, tiene la forma:

$$Y_i=\beta_0 X_{i0}+\beta_1 X_{i1}+\ldots+\beta_p x_{ip}+e_i; \quad i=1,2,\ldots,n$$

que se aproxima por:

$$\hat{Y}=\beta_0\hat{X}_0+\hat{\beta}_1 X_1+\hat{\beta}_2 X_2+\ldots+\hat{\beta}_p X_p.$$

Los coeficientes $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, ..., $\hat{\beta}_p$ son escogidos de tal manera que el residuo $Y-\hat{Y}$ sea lo más pequeño posible en el sentido de mínimos cuadrados. Trataremos dos casos específicos: la regresión múltiple y la regresión por pasos.

1.3.1 EL MODELO DE REGRESION LINEAL MULTIPLE

El modelo estadístico se formula usualmente de la si

guiente manera:

$$Y_i=\beta_0 X_{i0}+\beta_1 X_{i1}+ \ldots +\beta_p X_{ip}+e_i; \quad i=1,2,\ldots,n \quad (1)$$

donde

i) Los X_{ij}'s son valores fijos conocidos;

ii) Los Y_i's son valores observados;

iii) Las e_i's son variables aleatorias con $E(e_i)=0$, $var(e_i)=\sigma^2$ (una constante desconocida), y $E(e_i e_j)=0$

iv) Los β_j's son parámetros desconocidos que se estiman según el modelo.

Nos referiremos a Y como la variable dependiente, mientras que las X_j's son las variables independientes o predictores.

En forma matricial, la ecuación (1) puede ser escrita como

$$Y=X\beta+\xi$$

donde

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}; \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}; \quad \xi=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

El teorema de Gauss-Markov (ver 17) establece que los "mejores" estimadores lineales insesgados de los parámetros $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ son los valores $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_p$ que minimizan la forma cuadrática

$$Q=(Y-X\beta)'(Y-X\beta)=\xi'\xi \qquad (2)$$

"mejores" significa, en este caso, que los estimadores tendrán mínima varianza cuando sean comparados con otros estimadores lineales insesgados. Los estimadores son funciones lineales de las observaciones Y_i.

Para minimizar a Q, tomamos las derivadas parciales con respecto a cada β_j y las igualamos a cero. Obtenemos $\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = -2X'(Y-X\beta)=0$; para $j=0,1, \ldots, p$ lo que constituye un sistema lineal de p+1 ecuaciones con p+1 incógnitas. Estas ecuaciones son llamadas <u>las ecuaciones normales</u>; las soluciones $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_p$ son llamados <u>los estimadores de los coeficientes de regresión</u>.

Podemos representar al sistema en forma matricial como

$$X'X\hat{\beta}=X'Y \qquad (3)$$

Nuestra discusión se centrará en el caso en que X'X es invertible (caso de rango completo). El caso en que det (X'X)=0 queda abierto para un trabajo posterior. Con la hipótesis de que X'X es invertible, tenemos que

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y \qquad (4)$$

Un caso especial de (1) que trataremos en detalle es cuando $X_{i0}=1$, para toda i. El modelo entonces viene a ser

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+ \ldots +\beta_pX_{ip}+e_i \qquad (5)$$

en el que nos referiremos a β_0 como el término constante.

El sistema de ecuaciones normales, estará dado por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
n\beta_0+\Sigma X_1\beta_1+\Sigma X_2\beta_2+ \; . \; . \; . \; +\Sigma X_p\beta_p &= \Sigma Y \\
\Sigma X_1\beta_0+\Sigma X_1^2\beta_1+\Sigma X_1X_2\beta_2+ \ldots \; . \; +\Sigma X_1X_p\beta_p &= \Sigma X_1Y \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
\Sigma X_p\beta_0+\Sigma X_1X_p\beta_1+\Sigma X_2X_p\beta_2+ \ldots \; . \; +\Sigma X_p^2\beta_p &= \Sigma X_pY
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Si reescribimos (5) en la forma

$$y'=a_0+a_1x_1'+a_2x_2'+ \ldots +a_px_p'+e \tag{7}$$

donde

$$y'=Y-\overline{Y}, \qquad y \qquad x_j'=X-\overline{X}_j \qquad j=1,2,\ldots,p,$$

$\overline{X}_j$ y $\overline{Y}$ representan las medias aritméticas de las observaciones X_j's y las Y's.

Entonces al nuevo modelo se le asigna el siguiente sistema lineal de ecuaciones normales

$$
\begin{aligned}
na_0+\Sigma x_1'a_1+\Sigma x_2'a_2+ \ldots \; . +\Sigma x_p'a_p &= \Sigma y' \\
\Sigma x_1'a_0+\Sigma x_1'^2a_1+ \; . \; . \; . \quad . +\Sigma x_1'x_p'a_p &= \Sigma x_1'y' \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
\Sigma x_p'a_0+\Sigma x_1'x_p'a_1 \ldots \; . \quad . +\Sigma x_p'^2a_p &= \Sigma x_p'y'
\end{aligned}
$$

la primera ecuación normal se reduce a $na_0=0$ ya que $\Sigma y'=\Sigma x_j'=0$, $j=1,2,\ldots,p$. Se deduce que $a_0=0$, las restantes p ecuaciones normales están dadas en forma matricial por:

$$\overline{M}\,\overline{A}=\overline{B} \tag{8}$$

donde

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \Sigma x_1'^2 & \Sigma x_1' x_2' & \cdots & \Sigma x_1' x_p' \\ \vdots & & & \vdots \\ \Sigma x_1' x_p' & \Sigma x_2' x_p' & \cdots & \Sigma x_p'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n} & \cdots & \Sigma X_1 X_p - \frac{\Sigma X_1 \Sigma X_p}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Sigma X_1 X_p - \frac{\Sigma X_1 \Sigma X_p}{n} & \cdots & \Sigma X_p^2 - \frac{(\Sigma X_p)^2}{n} \end{bmatrix}$$

y

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} \Sigma x_1' y' \\ \Sigma x_2' y' \\ \vdots \\ \Sigma x_p' y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma X_1 Y - \frac{\Sigma X_1 \Sigma Y}{n} \\ \vdots \\ \Sigma X_p Y - \frac{\Sigma X_p \Sigma Y}{n} \end{bmatrix} ; \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

porque

$$\Sigma x_i' x_j' = \Sigma(X_i - \overline{X}_i)(X_j - \overline{X}_j) = \Sigma(X_i X_j - X_i \overline{X}_j - X_j \overline{X}_i + \overline{X}_i \overline{X}_j)$$
$$= \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i \overline{X}_j - \Sigma X_j \overline{X}_i + \Sigma \overline{X}_i \overline{X}_j = \Sigma X_i X_j - n\overline{X}_i \overline{X}_j - n\overline{X}_i \overline{X}_j + n\overline{X}_i \overline{X}_j$$
$$= \Sigma X_i X_j - n\frac{(\Sigma X_i)}{n}\frac{(\Sigma X_j)}{n} = \Sigma X_i X_j - \frac{\Sigma X_i \Sigma X_j}{n} .$$

El sistema formado por estas p ecuaciones recibe el nombre de ecuaciones normales reducidas.

Cabe observar que hemos logrado reducir la dimensión de la matriz de p+1 a p, realizando un ajuste en los datos con respecto a su correspondiente media, logrando trabajar con una ecuación menos. Aún más, podemos dividir los datos entre su desviación estándar lo cual, en cierta forma, representa una ventaja (ver 13), al tratar de calcular la in-

versa de una matriz por medios computarizados.

Para el modelo (1), tenemos que

$$E(Y_i)=\beta_0 X_{i0}+\beta_1 X_{i1}+\cdots+\beta_p X_{ip}$$

porque $E(\beta_i)=\hat{\beta}_i$, $i=0,1,\ldots,p$. También

$$\sigma^2(Y_i)=E((Y_i-E(Y_i))^2)=E(e_i^2)=\sigma^2.$$

Definimos a $R_s=(Y-X\beta)'(Y-X\beta)$, llamado la <u>suma de cuadrados residuales</u>, y a $S_e^2=R_s/(n-p)$, llamado el <u>cuadrado medio residual</u>. Además (ver 9) se establece el hecho de que, $E(S_e^2)=\sigma^2$, de donde observamos que el cuadrado medio residual proporciona un estimador insesgado de la varianza de Y_i. La cantidad S_e es llamada el <u>error estándar del estimador</u> Y_i.

Desarrollando

$$R_s=(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})=(Y'-\hat{\beta}'X')(Y-X\hat{\beta})=Y'Y-\hat{\beta}'X'Y-Y'X\hat{\beta}+\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$
$$=Y'Y-\hat{\beta}'X'Y, \qquad (9)$$

usando la relación (4). Por lo tanto, la suma de cuadrados residuales es igual a la suma total de cuadrados menos la suma de los productos de los estimadores y los miembros del lado derecho de las ecuaciones normales.

Escribiendo sin notación matricial, tendremos que

$$R_s=\Sigma Y_i^2-\Sigma\hat{\beta}_j\Sigma X_{ij}Y_i, \qquad (10)$$

y en el caso de las ecuaciones normales reducidas

$$R_s=\Sigma y_i'^2-\Sigma\hat{\beta}_j\Sigma x'_{ij}y'.$$

1.3.2 MODELO DE REGRESION POR PASOS

Supóngase que tenemos varias variables independien-

tes las cuales queremos analizar en el sentido de regresión con una variable dependiente. Podríamos computar todas las posibles regresiones de la variable dependiente sobre las variables independientes, tomando primero una, después dos,... hasta p variables. En principio, podríamos seleccionar una de esas regresiones como la "mejor" por algún criterio que favorezca a un pequeño número de variables independientes y además tenga una suma de cuadrados residuales muy chica. Un simple argumento combinatorio nos convence de que, este enfoque consumiría una gran cantidad de tiempo-computadora, así que como una alternativa consideraremos un método para seleccionar un subconjunto de variables independientes en un algoritmo paso por paso: en cada paso una variable puede ser seleccionada para ser incluida y una de las variables previamente seleccionadas puede ser eliminada del modelo de regresión. Este método recibe el nombre de regresión por pasos y es probablemente el más usado entre los métodos que buscan no realizar la computación de todas las posibles regresiones.

El tema central de este trabajo, el operador barredor, justifica su uso en este método, porque obtiene un resultado muy preciso, y por consiguiente muy adecuado en el manejo de modelos con muchas variables.

A continuación señalaremos el algoritmo para la regresión por pasos. El algoritmo empieza por el paso 2.

1.- Remueva el predictor que hace menor incremento en la suma de cuadrados residuales escogiéndolo de entre todos los predictores cuya remoción no esta limitada por el valor F-salida.

2.- Dé entrada al predictor que produce el mayor decremento en la suma de cuadrados residuales, escogiéndolo de entre todos los predictores cuya entrada no se encuentra limitada por el valor F-entrada.

Terminaremos el procedimiento por pasos cuando alguno de los siguientes eventos ocurra:

1.- No podemos dar entrada o salida a ningún predictor de acuerdo a los pasos anteriores. Esto incluye el caso donde damos entrada a todos los predictores y no podemos remover a ninguno.

2.- El procedimiento establece que el mismo predictor sea incluido y removido en operaciones sucesivas.

El valor F-entrada es el estadístico F usado para probar la significancia que el coeficiente de regresión del predictor tuviera si se le da entrada al modelo.

El valor F-salida de un predictor que esta incluido en el modelo es simplemente el valor del estadístico F usado

para probar la significancia de su coeficiente de regresión. En una forma escueta podemos definir al estadístico F como;

$$F = \frac{\text{Cambio en la suma de cuadrados residuales}}{\text{La varianza correspondiente al mayor predictor}}.$$

Generalmente los valores de F son tomados de tablas para un cierto nivel de significancia previamente establecido.

Definición 1.3.2.1 El coeficiente de correlación simple entre X_j y X_k esta dado por

$$r_{jk}=\frac{\Sigma(X_{ij}-\bar{X}_j)(X_{ik}-\bar{X}_k)}{\sqrt{\Sigma(X_{ij}-\bar{X}_j)^2\Sigma(X_{ik}-\bar{X}_k)^2}}$$

Definición 1.3.2.2 El coeficiente de correlación múltiple R, estará dado por

$$R=\sqrt{\frac{\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2}{\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

Es conveniente establecer una tolerancia con el propósito de prevenir la entrada de predictores altamente correlacionados y evitar errores de redondeo en las computaciones.

La tolerancia de un predictor que no ha entrado al modelo es uno menos el cuadrado de la correlación múltiple entre el predictor y aquellos predictores que actualmente se encuentran en la función de regresión.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

2.- EL OPERADOR BARREDOR

En este capítulo presentamos el tema principal de la tésis. Lo hemos dividido en 3 secciones:

Primeramente observaremos algunos de los métodos para la inversión de matrices, prosiguiendo con la justificación matemática del operador barredor, y finalizando con varios diagramas de flujo para la implementación del algoritmo del operador barredor.

2.1 INVERSION DE MATRICES

Definición 2.1.1 LLamaremos transformación elemental el realizar cualquiera de las siguientes operaciones sobre matrices;

a).- Intercambiar dos renglones (columnas)

b).- Multiplicar un renglón (columna) por una constante distinta de cero.

c).- Sumar un renglón (columna) a otro renglón (columna).

Definición 2.1.2 Una matriz elemental es cualquier matriz que puede ser obtenida al realizar una transformación elemental por renglón (columna) sobre la matriz identidad.

A cada transformación elemental le corresponde una pre (post) multiplicación de la matriz rectangular por una matriz elemental.

Además, el aplicar varias transformaciones a una matriz rectangular es equivalente a la pre (post) multiplicación por una matriz triangular inferior (superior).

Si A es una matriz no singular de orden n, es fácil establecer que existen matrices elementales, E_i, i=1,...,k tales que

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = I.$$

En consecuencia, vemos que $E_k \ldots E_2 E_1 I = A^{-1}$, así que A^{-1} puede ser formada aplicando las mismas operaciones por renglones a I que las necesarias para reducir A a I.

Este hecho es muy importante ya que forma la base de los métodos directos de inversión de matrices.

a).- Método de Gauss-Jordan

Como se notó anteriormente, la inversa de una matriz A puede ser formada al realizar las mismas operaciones por renglones sobre la matriz identidad que las realizadas sobre

A para reducir ésta a la matriz identidad.

Ambos pasos:

1.- reducir A a I por operaciones por renglón

2.- realizar las mismas operaciones por renglón sobre I

pueden hacerse simultáneamente al aumentar la matriz A con la matriz identidad y después operar sobre la matriz de orde nx2n

Para ilustrar este proceso manejaremos un ejemplo:

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y aumentándola con I, tendremos

$$(A|I) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Después de la primera reducción

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 9/4 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde hemos realizado lo siguiente:

a) multiplicar el primer renglón por 1/4

b) multiplicar el primer renglón por -3 y sumarlo al

segundo renglón

c) multiplicar el primer renglón por -2 y sumarlo al tercero,

en la segunda reducción tendremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

donde para obtenerla

a) sumamos el segundo renglón al primero

b) multiplicamos el segundo renglón por -2

c) sumamos el segundo renglón al tercero.

finalmente obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/8 & -1/4 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & 1/4 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

con las siguientes transformaciones

a) multiplicar el tercen renglón por -1/4

b) multiplicar el tercer renglón por 9/2 y sumarlo al segundo

c) multiplicar el tercer renglón por -5/2 y sumarlo al primero.

b.- Inversión por particiones

Sea A una matriz no singular de orden n, la cual par

ticionamos de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde A_{11} es pxp, A_{22} es qxq y p+q=n.

Si representamos A^{-1} como

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

entonces la representación de las matrices B_{11}, B_{12}, B_{21} y B_{22} en términos de A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22} se obtiene fácilmente de

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

y está dada por la siguiente tabla

Submatriz de A^{-1}	Relacion de la submatriz de A^{-1} a submatrices de A
B_{11}	$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$
B_{12}	$-A_{11}^{-1}A_{21}B_{22}$
B_{21}	$-A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$
B_{22}	$(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$

Operaciones por renglones sobre matrices particionadas.

Consideremos la matriz A anterior y formemos la matriz aumentada

$$A_a = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & I_p & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & I_q \end{bmatrix}$$

y realicemos p operaciones elementales, de tal forma que las primeras p columnas de A_a sean reducidas a las primeras p columnas de I_n. El producto de las matrices elementales que producen las p reducciones puede ser representado en forma particionada como

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

donde B_{11} es pxp y B_{22} es qxq.

Así obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & I_p & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & U & V & I_q \end{bmatrix}$$

de lo anterior, establecemos las siguientes relaciones

$$B_{11}A_{11}+B_{12}A_{21}=I_p$$

$$B_{21}A_{11}+B_{22}A_{21}=0$$

$$B_{11}\cdot 0 +B_{12}I_q =0$$

$$B_{21}\cdot 0 + B_{22}I_q = I_q$$

y las soluciones

$$B_{11}=A_{11}^{-1} \qquad B_{12}=0 \qquad B_{21}=-A_{21}A_{11}^{-1} \qquad B_{22}=I_q$$

Además, U y V deben satisfacer

$$B_{21}A_{12}+B_{22}A_{22}=U \qquad B_{21}I_p+B_{22}\cdot 0=V$$

y sustituyendo los valores apropiados, obtenemos

$$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=U \qquad -A_{21}A_{11}^{-1}=V$$

después de p reducciones la matriz aumentada aparecería de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} I_p & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{21}A_{11}^{-1} & I_q \end{bmatrix}$$

c.- Otros métodos

Existen, además, otros métodos que nos permiten encontrar la inversa de una matriz. Dichos métodos al ser implementados en programas para computadoras o microcomputadoras presentan ciertos aspectos de complejidad o ineficiencia, por mencionar un método, tomemos el siguiente:

Sea A una matriz no singular, y C la correspondiente matriz formada por los cofactores de A, entonces $A^{-1}=\frac{1}{|A|}C'$, por ejemplo:

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces } |A| = 8 \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

así que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -9 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/4 & 5/8 \\ 3/8 & 1/4 & -9/8 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Uno de los grandes problemas del método anterior, radica en el hecho de que al tratar de lograr la inversa de matrices que poseen un orden muy grande, el cálculo del determinante así como la matriz de cofactores se vuelve ineficiente en cuanto a precisión en los resultados ya que implica un número muy grande de operaciones, con el consiguiente error de redondeo, además de aumentar el tiempo máquina para realizarlo.

2.2 JUSTIFICACION MATEMATICA DEL OPERADOR BARREDOR

De los métodos mas convenientes mencionados en la sección anterior, observamos que si tenemos una matriz A de rango completo n, podemos asegurar la existencia de su inversa A^{-1} haciendo uso de operaciones elementales por renglón (columna).

Simbólicamente podemos escribir

$$(A|I) \xrightarrow{E} (I|A)$$

donde E significa el producto de las matrices no singulares que representan a cada reducción que se vaya realizando.

Una característica de este tipo de operaciones es que después de realizar cada transformación elemental, todas las columnas de la matriz identidad están contenidas en la matriz transformada. Se puede decir que ellas únicamente van cambiando su lugar con cada reducción no nula.

Observemos de inmediato que para la k-ésima reducción, la k-ésima columna de la matriz actual es el centro de interés pero el k-ésimo renglón es el punto focal para realizar operaciones. Por esta razón, llamaremos al k-ésimo renglón, el renglón pivote y al k-ésimo elemento en ese renglón (que se encuentra sobre la diagonal de la matriz), el elemento pivote.

Como cada reducción introduce un vector columna unitario en el área ocupada originalmente por A y modifica uno de los vectores columnas ocupados por la identidad, podemos sacar provecho de este hecho, el cual evita la necesidad de aumentar A con I cuando queremos A^{-1}.

Usando esta modificación de conservar espacio, los resultados en el ejemplo de la sección anterior son:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 3/4 & -1/2 & 9/4 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 5/2 \\ 3/2 & -2 & -9/2 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/8 & -1/4 & 5/8 \\ 3/8 & 1/4 & -9/8 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Un "barrido" del renglón y la columna k significa para la k-ésima reducción, unida a la idea de conservar espacio, sobreentender el vector unitario creado por la reducción.

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz cuadrada cuyo k-ésimo elemento en la diagonal es diferente de cero, $a_{kk}\neq 0$.

El resultado de barrer la matriz A en su k-ésimo elemento de la diagonal es una nueva matriz $\tilde{A}=(a_{ij})$ de igual tamaño dada por:

$$\tilde{a}_{kk} = -\frac{1}{a_{kk}}$$

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \qquad i\neq k$$

$$\tilde{a}_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \qquad j\neq k$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} \qquad i\neq k,\ j\neq k,\ i,j=1,\ldots,n.$$

Una de las ventajas del operador barredor es que transforma matrices simétricas en matrices simétricas, ya que $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} = a_{ji} - \frac{a_{ki}a_{jk}}{a_{kk}} = a_{ji} - \frac{a_{jk}a_{ki}}{a_{kk}} = \tilde{a}_{ji}$.

Posteriormente, haremos notar que este resultado nos será de provecho en la implementación del programa de cómputo.

Es útil caracterizar el operador barredor, observándolo como un intercambio de la siguiente forma:

Teorema 1.- Sean U y V matrices de igual orden, digamos nxp, y sea A una matriz cuadrada de orden p tal que

$$V=UA$$

Si $\tilde{U}$ es obtenida de U reemplazando su k-ésima columna por la k-ésima columna de V y $\tilde{V}$ es obtenida de V al reemplazar su k-ésima columna por menos la k-ésima columna de U.

Si el k-ésimo elemento diagonal de A es distinto de cero y $\tilde{A}$ es el resultado de aplicar el operador barredor a A en dicho elemento, entonces

$$\tilde{V}=\tilde{U}\tilde{A}.$$

Demostración.- Denotemos por $u_1, u_2, \ldots, u_p$ y $v_1, v_2, \ldots, v_p$ las columnas de U y V respectivamente.

Entonces para toda j

$$v_j=\sum_i a_{ij}u_i$$

así, para j=k

$$v_k=-u_k=-a_{kk}^{-1}(v_k-\sum_{i\neq k} a_{ik}u_i)$$

$$=-\frac{v_k}{a_{kk}}+\sum_{i\neq k}\frac{a_{ik}}{a_{kk}}u_i$$

$$=\tilde{a}_{kk}\tilde{u}_k+\sum_{i\neq k}\tilde{a}_{ik}\tilde{u}_i=\sum_i \tilde{a}_{ik}\tilde{u}_i.$$

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Similarmente, para toda $j \neq k$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_j = v_j &= \sum_{i \neq k} a_{ij}u_i + a_{kj}u_k \\
&= \sum_{i \neq k} a_{ij}u_i + a_{kj}a_{kk}^{-1}(v_k - \sum_{i \neq k} a_{ik}u_i) \\
&= \sum_{i \neq k}(a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}})u_i + \frac{a_{kj}}{a_{kk}} v_k \\
&= \sum_{i \neq k} \tilde{a}_{ij}\tilde{u}_i + \tilde{a}_{kj}\tilde{u}_k \\
&= \sum_{i} \tilde{a}_{ij}\tilde{u}_i,
\end{aligned}$$

Así observamos que $\tilde{v}_j = \sum_i \tilde{a}_{ij}\tilde{u}_i$ es la forma vectorial de la aseveración $\tilde{V} = \tilde{U}\tilde{A}$. Esto completa la demostración.

En forma de tabla, la caracterización de un barrido sobre el primer elemento diagonal de (a_{ij}), puede ser:

	v_1	v_2	...	v_p
u_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1p}
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2p}
:	:			:
u_p	a_{p1}	a_{p2}	...	a_{pp}

$\longrightarrow$

	$-u_1$	v_2	...	v_p
v_1	$\tilde{a}_{11}$	$\tilde{a}_{12}$	...	$\tilde{a}_{1p}$
u_2	$\tilde{a}_{21}$	$\tilde{a}_{22}$	...	$\tilde{a}_{2p}$
:	:	:		:
u_p	$\tilde{a}_{p1}$	$\tilde{a}_{p2}$	...	$\tilde{a}_{pp}$

Los coeficientes $\tilde{a}_{ij}$ dentro de la tabla son usados para expresar los cruces entre vectores, es decir, los de la parte superior como combinación lineal de los vectores laterales.

A un barrido sobre a_{11} le corresponde cambiar el signo de u_1 e intercambiarlo con v_1.

Corolario.- El inverso de un barrido es igual al cubo del barrido en el mismo elemento.

Teorema 2.- Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, si es posible aplicar el operador barredor a la parte izquierda y sobre cada elemento diagonal de la submatriz A_{11}, en algún orden, i.e., si el elemento requerido es distinto de cero, entonces A_{11} es no singular y el resultado del barrido es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Demostración.- Sea $\tilde{A}$ la matriz particionada e I la identidad del mismo orden. La igualdad trivial A=IA puede ser escrita en forma particionada como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{A}$ el resultado de aplicar el operador barredor. Usando la misma partición que antes, la caracterización del teorema 1, nos da

$$\begin{bmatrix} -I_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

BIBLIOTECA

lo cual implica que

$$-I_{11}=A_{11}\tilde{A}_{11} \qquad A_{12}=A_{11}\tilde{A}_{12}$$

$$0=A_{21}\tilde{A}_{11}+\tilde{A}_{21} \qquad A_{22}=A_{21}\tilde{A}_{12}+\tilde{A}_{22}$$

de donde facílmente obtenemos que

$$\tilde{A}_{11}=-A_{11}^{-1} \qquad \tilde{A}_{12}=A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$\tilde{A}_{21}=A_{21}A_{11}^{-1} \qquad \tilde{A}_{22}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

lo cual prueba el teorema.

Corolario.- Si es posible aplicar el operador barredor sobre un conjunto de elementos diagonales de una matriz A en más de un orden, el resultado obtenido es independiente del orden usado.

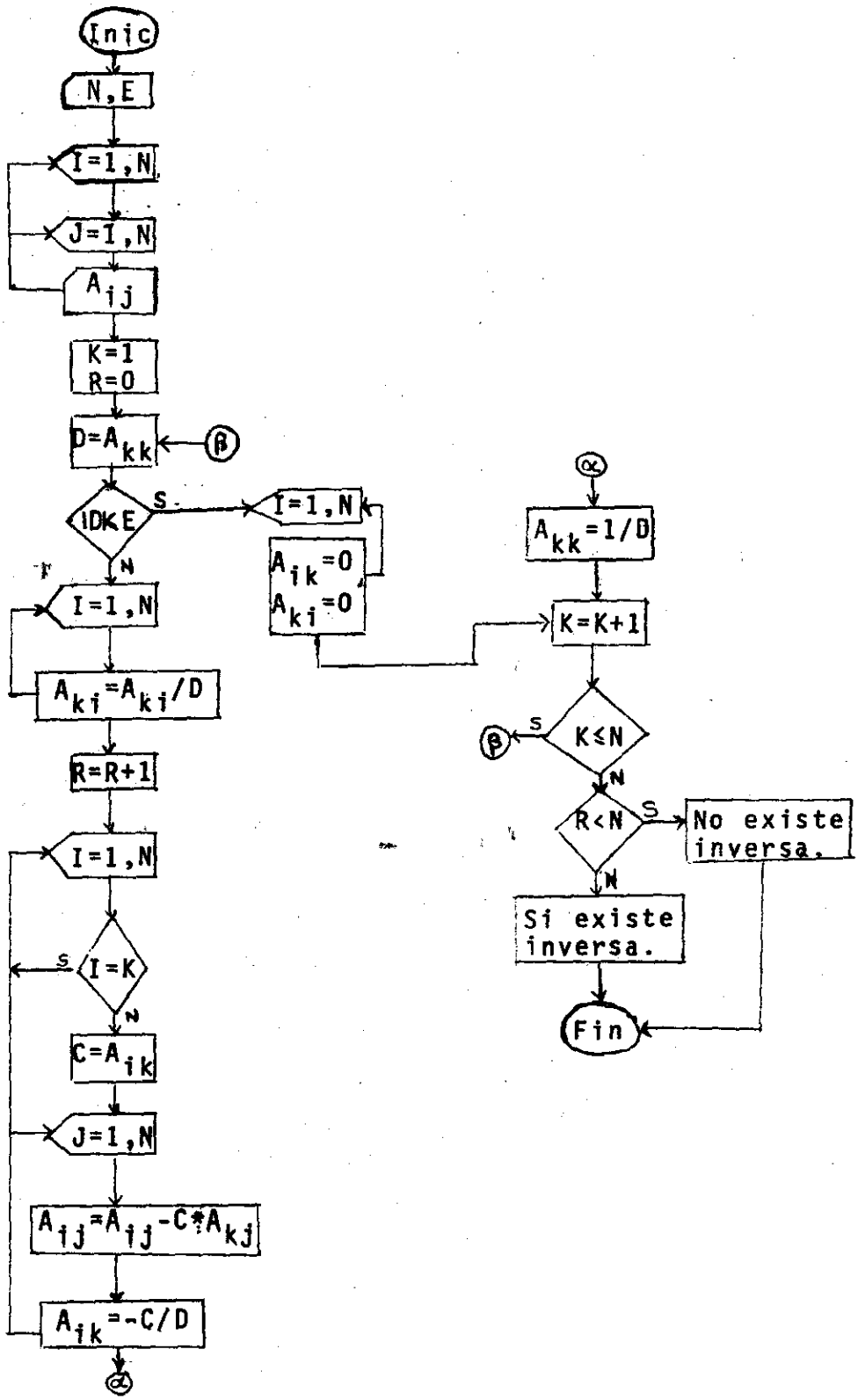
Teorema 3.- Si A es una matriz definida positiva, entonces sus elementos diagonales son distintos de cero y permanecen no cero después de cualquier sucesión de barridos.

Demostración.- El resultado de una secuencia de barridos es mostrado a la derecha de (1). Como A es definida positiva, A_{11}^{-1} y $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ también lo son y consecuentemente esas dos matrices tienen elementos diagonales diferentes de cero.

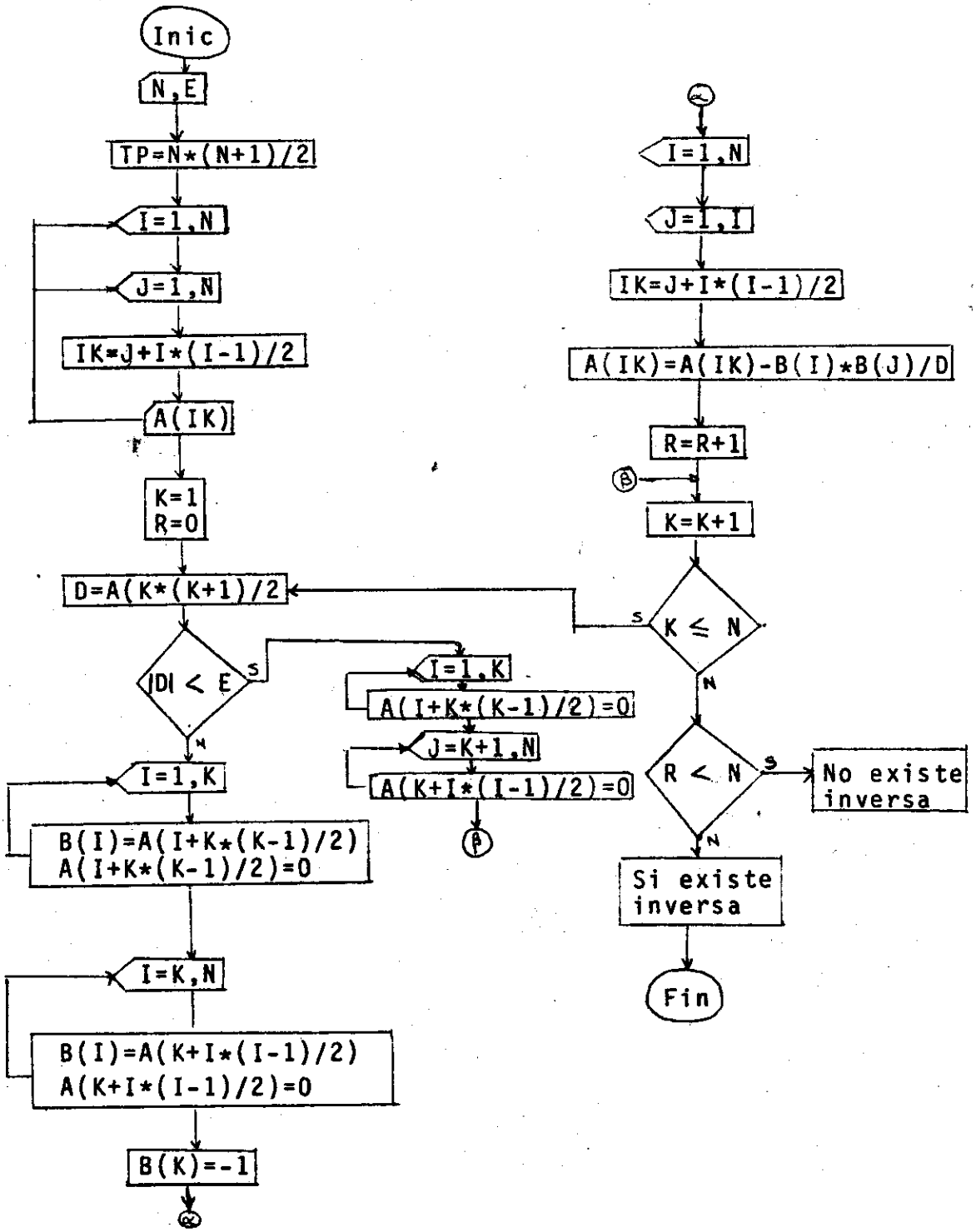
2.3 ALGORITMOS

Sea A cualquier matriz, entonces podemos calcular su

inversa implementando el siguiente diagrama de flujo.



Ahora, observaremos el caso en que A es una matriz simétrica, resaltando el hecho de que podemos trabajar unicamente con la parte superior o inferior de ella. El diagrama de flujo es el siguiente:



3.- APLICACIONES

En este capítulo daremos dos aplicaciones del operadob barredor así como ejemplos de ellas.

Regresión Lineal Múltiple.-

De el modelo de regresión lineal, tenemos

$$Y=X\beta+\xi$$

formando la matriz

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{bmatrix}$$

de acuerdo al teorema 2 del capítulo anterior, si barremos sobre la submatriz X'X, tendremos

$$\begin{bmatrix} -(X'X)^{-1} & (X'X)^{-1}X'Y \\ Y'X(x'X)^{-1} & Y'Y-Y'X(X'X)^{-1}X'Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(X'X)^{-1} & \hat{\beta} \\ \hat{\beta}' & Y'Y-\hat{\beta}'X'Y \end{bmatrix}$$

donde observamos que en la parte superior izquierda se encuentra la inversa de las ecuaciones normales con signo menos, en la última columna tenemos a los estimadores de los coeficientes de regresión y en el término inferior derecho, la suma de cuadrados residuales, con esto, la ventaja que muestra el uso del operador barredor es clara, ya que no tenemos que hacer cálculos extras para obtener los anteriores resultados.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Regresión por pasos.-

Ahora procederemos a dar un bosquejo sobre la aplicación del operador barredor en la regresión por pasos. (ver 9, 12 y 13)

Sea X particionada como (X_1, X_2) donde X_1 es de orden nxk y X_2 es nx(p-k). Bajo estos supuestos podemos tener

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'Y \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'Y \\ Y'X_1 & Y'X_2 & Y'Y \end{bmatrix}$$

Si realizamos k reducciones sobre esta matriz al barrer sobre los primeros k renglones, la matriz resultante es

$$\begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1} & (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 & \hat{\beta} \\ -X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} & X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 & X_2'Y - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'Y \\ -\hat{\beta}' & Y'X_2 - Y'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 & Y'Y - \hat{\beta}'X_1'Y \end{bmatrix}$$

en forma abreviada representaremos esta matriz como:

$$\begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1} & A & \hat{\beta} \\ -A' & & C \\ -\hat{\beta}' & & \end{bmatrix}$$

En esta etapa diremos que el modelo contiene las k variables independientes $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Sea q=p-k+1, así que C es de orden qxq. Si consideramos en esta etapa, la entrada de una de las variables $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_p$ en el modelo actual, quisieramos dar entrada al predictor que produzca la menor suma de cuadrados residuales de entre todas las posible selecciones. Como c_{qq} es la suma de cuadrados para el ajuste actual, trataremos de escoger aquel que produzca que el elemento c_{qq} sea menor después de realizar la reducción. Hemmerle (9) ha demostrado que si damos entrada a X_{k+j}, (j=1,2,..., p-k) entonces la suma de cuadrados residuales vendrá a ser

$$c_{qq} - \frac{c_{jq}^2}{c_{jj}} \qquad (1)$$

de esta manera diremos que X_{k+j} es el mejor candidato para entrar si j es tal que

$$\frac{c_{jq}^2}{c_{jj}} \geq \frac{c_{iq}^2}{c_{ii}} \quad \text{para toda } i \neq j = 1, 2, \ldots, p-k. \qquad (2)$$

Supóngase que consideraremos la salida de uno de los predictores $X_1, X_2, \ldots, X_k$ que se encuentran en el modelo. De la misma forma que para darle entrada, Hemmerle (9) ha demostrado que la suma de cuadrados que resulta cuando X_i (i=1,2, ..., k) es eliminada es

$$c_{qq} + \frac{\beta_i^2}{((X_1'X_1)^{-1})_{ii}} \qquad (3)$$

de modo que la más apropiada selección de X_i es aquella para la cual

$$\frac{\beta_i^2}{((X_1'X_1)^{-1})_{ii}} \leq \frac{\beta_j^2}{((X_1'X_1)^{-1})_{jj}} \qquad (4)$$

para toda $j \neq i = 1, 2, \ldots, k$; las ecuaciones 2 y 4 son empleadas para calcular los valores de F requeridos en el algoritmo de la regresión por pasos para la entrada y salida de las variables.

Aplicaciones en Ciencias Biológicas y Médicas de la regresión lineal múltiple.-

En la práctica médica, los valores hematológicos de un sujeto son frecuentemente utilizados para evaluar su estado de salud. Así, por ejemplo, si su valor de hematocrito se encuentra por abajo de un cierto límite preestablecido como normal, se considera al sujeto anémico.

Por lo anterior, resulta evidente la importancia de una determinación adecuada de éstos límites considerados como normales.

Existen diferentes factores que influyen sobre el valor de dichos límites. Entre los más importantes se encuen-

tran la edad de los sujetos que componen la población de estudio y la altura sobre el nivel del mar a la que viven.

Ciertas investigaciones han encontrado una relación directa entre la altura sobre el nivel del mar a la que vive la persona y su valor de hematocrito.

Estas relaciones señalan que no podemos utilizar límites normales o estándares hematológicos sin antes revisar las condiciones bajo las cuales fueron establecidos.

Así, para mencionar un ejemplo de la regresión lineal múltiple, tomemos las siguientes variables:

1.- Hematocrito (Hto)
2.- Hemoglobina (Hg)
3.- Concentración Hemoglobina Globular Media (CHGM)
4.- Volumen Globular Medio (VGM)
5.- Capacidad Libre de Fijación de Hierro (UIBC)
6.- Capacidad Total de Fijación de Hierro (TIBC)
7.- Proteínas Séricas (PS)

Esta aplicación forma parte del proyecto: "Elaboración de estándares bioquímicos para población preescolar y escolar", integrado en el CIAD.

Los valores de las observaciones, son omitidos por ser una gran cantidad, pero los interesados pueden consultarlos en el CIAD.

Fueron analizados un total de 130 sujetos, los cuales se encontraban entre 9 y 12 años de edad, esta cantidad

de sujetos fue seleccionada de una mayor población después de cumplir ciertos requisitos.

En las siguientes páginas, se muestran los resultados obtenidos.

De los resultados, observamos que la aproximación al modelo lineal es:

$$Y=Hto=25.8196+2.796\ Hg\ -.353\ CHGM\ -.103\ VGM\ -.011\ CHS\ -.005\ UIBC\ +.004\ TIBC.$$

Además el ajuste al modelo es aproximadamente en un 89%.

TITULO

CIERTO DIA DE ALGUN MES

REGRESION LINEAL MULTIPLE

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA PARA LA REGRESION LINEAL MULTIPLE

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIB.	SUMA DE CUADRADOS	MEDIA CUADRATICA	VALOR DE F
REGRESION	6	445.9780	74.3297	79.0043
RESIDUAL	123	115.7220	0.9408	
TOTAL	129	561.7000		

VARIABLE	ESTIMADOR	ERROR STD	VALOR T	G. DE LIB.
HEMOGLOBINA	2.796	0.131	21.288	%123
CHGM	-0.353	0.085	-4.140	%123
VGM	-0.103	0.020	-5.063	%123
CHS	-0.011	0.011	-1.063	%123
UIBC	-0.005	0.010	-0.521	%123
TIBC	0.004	0.010	0.342	%123

VALOR CONSTANTE (Beta Cero) = 25.8196

COEFICIENTE DE DETERMINACION = 0.794

CALCULO DE PREDICCIONES (S/N) ? N

TITULO

CIERTO DIA DE AlGUN MES

REGRESION LINEAL MULTIPLE

VARIABLE	MEDIA	VARIANZA	DESV. STD.
HEMATOCRITO	41.100	4.3543E+00	2.0867E+00
HEMOGLOBINA	13.416	5.2223E-01	7.2266E-01
CHGM	32.439	1.1473E+00	1.0711E+00
VGM	90.400	2.1126E+01	4.5963E+00
CHS	124.715	1.1321E+03	3.3647E+01
UIBC	242.762	2.2425E+03	4.7355E+01
TIBC	366.708	1.9623E+03	4.4298E+01

MATRIZ DE CORRELACION: -

1.000000	0.340906	0.214177	0.147372	0.026632	0.124509
0.836774					
0.340906	1.000000	0.091637	0.104583	-0.067001	0.014320
0.118062					
0.214177	0.091637	1.000000	0.024702	0.129048	0.215961
-0.040978					
0.147372	0.104583	0.024702	1.000000	-0.452970	0.282832
0.010132					
0.026632	-0.067001	0.129048	-0.452970	1.000000	0.708693
0.022970					
0.124509	0.014320	0.215961	0.282832	0.708693	1.000000
0.004881					
0.836774	0.118062	-0.040978	0.010132	0.022970	0.004881
1.000000					

Dual Routing now OFF

Aplicación de la regresión por pasos en la Ingeniería.

En la industria de la construcción es de gran interés medir la calidad y cantidad de los elementos necesarios para la consecución de sus objetivos.

Específicamente, en la elaboración del cemento, es necesario determinar -de acuerdo a cierto criterio- la importancia de cada componente sobre el calor desprendido durante el endurecimiento.

En particular, para este ejemplo, se desea obtener una mezcla que presenta cierto tipo de reacción exotérmica con el consiguiente desprendimiento de calor y determinar cuales de sus componentes tienen influencia significativa. Los compuestos químicos involucrados son: Aluminato Tricálcico, Silicato Tricálcico, Ferrato Aluminio Tetracálcico y Silicato Dicálcico.

Por lo anterior, consideremos las siguientes variables:

X_1=cantidad de aluminato tricálcico $3CaO\ Al_2O_3$

X_2=cantidad de silicato tricálcico $3CaO\ S_iO_2$

X_3=cantidad de ferrato aluminio tetracálcico $4CaO\ Al_2O_3Fe_2O_3$

X_4=cantidad de silicato dicálcico $2CaO\ S_iO_2$

$Y=X_5$=calor desprendido, durante el endurecimiento, en calorías por gramo de cemento.

X_1, X_2, X_3 y X_4 son medidos en porcentaje del peso

de los moldes donde fue hecha la mezcla.

A continuación se muestran los datos observados para las variables:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	7	26	6	60	78.5
2	1	29	15	52	74.3
3	11	56	8	20	104.3
4	11	31	8	47	87.6
5	7	52	6	33	95.9
6	11	55	9	22	109.2
7	3	71	17	6	102.7
8	1	31	22	44	72.5
9	2	54	18	22	93.1
10	21	47	4	26	115.9
11	1	40	23	34	83.8
12	11	66	9	12	113.3
13	10	68	8	12	109.4

En las siguientes páginas, se muestra el resultado que se obtiene al aplicar la regresión por pasos.

Al final encontramos que las únicas variables que muestran una importancia significativa son X_1 y X_2, y la ecuación de regresión está dada por

$$Y=52.5774+1.4683X_1+0.6622X_2.$$

NOMBRE DEL ARCHIVO:- ABMATDYS

NUMERO DE VARIABLES INDEPENDIENTES: 4

NUMERO DE OBSERVACIONES: 13

VARIABLE DEPENDIENTE: X5

COLUMNA QUE OCUPA LA VARIABLE DEPENDIENTE: 5

VALOR DE F PARA ENTRAR: ? 4

VALOR DE F PARA SALIR: ? 3.9

TOLERANCIA PERMITIDA: ? .001

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA PARA LA REGRESION POR PASOS

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIB.	SUMA DE CUADRADOS	MEDIA CUADRATICA	VALOR DE F
REGRESION	1	1831.9000	1831.9000	22.7986
RESIDUAL	11	883.8640	80.3513	
TOTAL	12	2715.7600		

DESVIACION ESTANDAR RESIDUAL 8.96389

COEFICIENTE DE CORRELACION MULTIPLE (R) .821306

COEFICIENTE DE DETERMINACION (R↑2) .674543

VARIABLES QUE SE ENCUENTRAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	COEFICIENTE	ERROR ESTANDARD	F PARA SALIR
X4	-0.7382	0.1546	22.7986

VALOR DE LA INTERCEPCION 117.568

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

VARIABLES QUE NO ESTAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	TOLERANCIA	CORRELACION PARCIAL	F PARA ENTRAR
X1	0.939757	0.956775	108.229000
X2	0.053358	0.130206	0.172459
X3	0.999128	-0.895083	40.295100

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA PARA LA REGRESION POR PASOS

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIB.	SUMA DE CUADRADOS	MEDIA CUADRATICA	VALOR DE F
REGRESION	2	2641.0000	1320.5000	176.6360
RESIDUAL	10	74.7582	7.4758	
TOTAL	12	2715.7600		

DESVIACION ESTANDAR RESIDUAL 2.7342

COEFICIENTE DE CORRELACION MULTIPLE (R) .98614

COEFICIENTE DE DETERMINACION (R↑2) .972473

VARIABLES QUE SE ENCUENTRAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	COEFICIENTE	ERROR ESTANDARD	F PARA SALIR
X1	1.4400	0.1384	108.2300
X4	-0.6140	0.0486	159.3030

VALOR DE LA INTERCEPCION 103.097

VARIABLES QUE NO ESTAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	TOLERANCIA	CORRELACION PARCIAL	F PARA ENTRAR
X2	0.053247	0.598589	5.025440
X3	0.289053	-0.565728	4.236230

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA PARA LA REGRESION POR PASOS

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIB.	SUMA DE CUADRADOS	MEDIA CUADRATICA	VALOR DE F
REGRESION	3	2667.7900	889.2630	166.8350
RESIDUAL	9	47.9717	5.3302	
TOTAL	12	2715.7600		

DESVIACION ESTANDAR RESIDUAL 2.30872

COEFICIENTE DE CORRELACION MULTIPLE (R) .991129

COEFICIENTE DE DETERMINACION (R→2) .982336

VARIABLES QUE SE ENCUENTRAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	COEFICIENTE	ERROR ESTANDARD	F PARA SALIR
X1	1.4519	0.1170	154.0110
X2	0.4161	0.1856	5.0254
X4	-0.2366	0.1733	1.8635

VALOR DE LA INTERCEPCION 71.6498

VARIABLES QUE NO ESTAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	TOLERANCIA	CORRELACION PARCIAL	F PARA ENTRAR
X3	0.021334	0.047548	0.018127

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA PARA LA REGRESION POR PASOS

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIB.	SUMA DE CUADRADOS	MEDIA CUADRATICA	VALOR DE F
REGRESION	2	2657.8600	1328.9300	229.5020
RESIDUAL	10	57.9048	5.7905	
TOTAL	12	2715.7600		

DESVIACION ESTANDAR RESIDUAL 2.40634

COEFICIENTE DE DETERMINACION (R→2) .978678

VARIABLES QUE SE ENCUENTRAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	COEFICIENTE	ERROR ESTANDARD	F PARA SALIR
X1	1.4683	0.1213	146.5220
X2	0.6622	0.0459	208.5800

VALOR DE LA INTERCEPCION 52.5774

VARIABLES QUE NO ESTAN EN LA FUNCION DE REGRESION

VARIABLE	TOLERANCIA	CORRELACION PARCIAL	F PARA ENTRAR
X3	0.318258	0.411258	1.832060
X4	0.052797	-0.414176	1.863550

BIBLIOGRAFIA

1.- Beaton, A., The use of special matrix operators in statistical calculus; Educational Testing Service, RB 64-51, Princenton. 1964

2.- Efroymson M. A., Multiple Regression Analysis, in mathematical methods for digital computers. A. Ralston and H. S. Wilf (eds.), Wiley, New York, 1960.

3.- Dempster A. P., Elements of continuos multivariate analysis, Wiley, New York, 1966.

4.- Dettman, John W., Introduction to linear algebra and differential equations, Mc Graw-Hill, Inc. Tokyo, Japan, 1974.

5.- Draper N.R. and Smith H., Applied Regression Analysis, Wiley, New York, 1966.

6.- Faddev D.K. and Faddeeva V.N., Computational methods of linear algebra; W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1963.

7.- Gantmacher F., The theory of matrices; vol I., Chelsea publishing Co., New York, 1960.

8.- Graybill Franklin A., Introduction to matrices with applications in statistics, Wadsworth Co., Belmont, 1969.

9.- Hemmerle William J, Statistical computations on digital computers, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Mass., 1967

10.-Herstein N. I., Algebra moderna, Edit. Trillas. México, 1979.

11.-Hohn Franz E., Algebra de matrices, Edit Trillas. México, 1970.

12.-Jenrich Robert I., Stepwise Regression in statistical methods for digital computers, K. Enslein, A. Ralston, H. Wilf,(eds). Cap 4 (vol III), Wiley-Interscience, New York, 1979.

13.-Kennedy William Jr. and Gentle James E., Statistical computing, New York; Marcel Dekker Inc., 1980.

14.-Meyer Paul L., Probabilidad y aplicaciones matemáticas; fondo educativo interamericano, México, D.F., 1973.

15.-Moore David S., Statistics, concepts and controversies, San Fco, Cal; W.H. Freeman and Co., 1979.

16.-Neter John and Wasserman William., Applied Linear Statistical models, Illinois; Richard D. Irwin, Inc. 1974.

17.-Sheffé Henry. The analysis of variance, John Wiles, New York, 1959.

18.-Wilkinson J.H., the algebraic eigenvalue problem, clarendon press-oxford. Oxford, 1965.

19.-Mardia K.V., Kent J.T. and Bibby J.M., multivariate analysis, Academic press, New York, 1979.

20.-Guillén R. J. M., Anexos: Listado de programas., Biblioteca del CIAD, 1983.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES
EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

APENDICE A

```
10 'PROGRAMA <<<INVERSO>>>
20 'PROGRAMA PARA CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ USANDO
30 'EL OPERADOR BARREDOR
40 CLS:INPUT"CUAL ES EL ORDEN DE LA MATRIZ ";N
50 PRINT:INPUT"CUAL ES LA TOLERANCIA ";E
60 CLS
70 DIM A(N,N),AR(N,N),PR(N,N)
80 PRINT TAB(0)"RENGLON ";TAB(20)"COLUMNA ";TAB(40)"VALOR"
90 PRINT
100 FOR I=1 TO N
110 FOR J=1 TO N
120 PRINT TAB(3);I;TAB(23);J;TAB(41);:INPUT A(I,J)
130 AR(I,J)=A(I,J)
140 NEXT J
150 NEXT I
160 K=1:R=0
170 D=A(K,K)
180 IF ABS(D)<E THEN 190 ELSE 230
190 FOR I=1 TO N
200 A(I,K)=0:A(K,I)=0
210 NEXT I
220 GOTO 360
230 FOR I=1 TO N
240 A(K,I)=A(K,I)/D
250 NEXT I
260 R=R+1
270 FOR I=1 TO N
280 IF I=K THEN 340 ELSE 290
290 C=A(I,K)
300 FOR J=1 TO N
310 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
320 A(I,K)=-C/D
330 NEXT J
340 NEXT I
350 A(K,K)=1/D
360 K=K+1
370 IF K<=N THEN 170 ELSE 380
380 IF R=N THEN 410 ELSE 390
390 PRINT:PRINT"LA MATRIZ NO TIENE INVERSA, YA QUE SU RANGO ";R
400 PRINT "ES MENOR QUE SU ORDEN ";N:END
410 CLS:PRINT"MATRIZ ORIGINAL "
420 FOR I=1 TO N
430 FOR J=1 TO N
440 PRINT AR(I,J),:NEXT J:PRINT:NEXT I
450 PRINT"MATRIZ INVERSA "
460 FOR I=1 TO N
470 FOR J=1 TO N
480 PRINT A(I,J),:NEXT J:PRINT:NEXT I
490 END
```

APENDICE B

```
10 'PROGRAMA <<<INVERSO.SIM>>>
20 'PROGRAMA PARA CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ SIMETRICA
30 'USANDO EL OPERADOR BARREDOR
40 CLS:INPUT"CUAL ES EL ORDEN DE LA MATRIZ ";N
50 PRINT:INPUT"CUAL ES LA TOLERANCIA ";E
60 TP=N*(N+1)/2
70 DIM A(TP),AR(TP),PR(TP)
80 CLS:PRINT TAB(0)"RENGLON ";TAB(20)"COLUMNA ";TAB(40)"VALOR "
90 PRINT:FOR I=1 TO N
100 FOR J=1 TO I
110 IK=J+(I*(I-1)/2)
120 PRINT TAB(3);I;TAB(23);J;TAB(41);:INPUT A(IK)
130 AR(IK)=A(IK)
140 NEXT J
150 NEXT I
160 K=1:R=0
170 D=A(K*(K+1)/2)
180 IF ABS(D)<E THEN 190 ELSE 220
190 FOR I=1 TO K:A(I+K*(K-1)/2)=0:NEXT I
200 FOR I=K+1 TO N:A(K+I*(I-1)/2)=0:NEXT I
210 GOTO 330
220 FOR I=1 TO K
230 B(I)=A(I+K*(K-1)/2)
240 A(I+K*(K-1)/2)=0:NEXT I
250 FOR I=K TO N
260 B(I)=A(K+I*(I-1)/2):A(K+I*(I-1)/2)=0
270 NEXT I
280 B(K)=-1
290 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO I
300 A(J+I*(I-1)/2)=A(J+I*(I-1)/2)-B(I)*B(J)/D
310 NEXT J:NEXT I
320 R=R+1
330 K=K+1
340 IF K<=N THEN 170 ELSE 350
350 IF R=N THEN 380 ELSE 360
360 PRINT:PRINT"LA MATRIZ NO TIENE INVERSA, YA QUE SU RANGO ";R
370 PRINT"ES MENOR QUE SU ORDEN ";N:END
380 CLS
390 PRINT"MATRIZ ORIGINAL "
400 FOR I=1 TO N
410 FOR J=1 TO I
420 IK=J+I*(I-1)/2
430 PRINT AR(IK),:NEXT J:PRINT:NEXT I
440 PRINT "MATRIZ INVERSA "
450 FOR I=1 TO N
460 FOR J=1 TO I
470 IK=J+I*(I-1)/2
480 PRINT -A(IK),:NEXT J:PRINT:NEXT I
490 END
```

EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES