UNIVERSIDAD DE SONORA
ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO Y SUS GENERALIZACIONES.

TESIS

QUE PARA OBTENER AL TITULO DE LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

Jorge Alejandro Villa Carrillo.

Hermosillo, Sonora. *Septiembre de 1985.*

DEDICATORIAS

A MIS PADRES:

Dolores Carrillo Aganza.
Manuel Villa Romo.

A MI ESPOSA:

Plácida Guillen Jimenez.

A MIS HIJOS:

Diana Evelyn Villa Guillen
Hans Villa Sánchez.

A LA MEMORIA DE MI ABUELO:

Rodolfo Carrillo Quijada.

A G R A D E C I M I E N T O S

Agradezco al Dr. Rubén Flores Espinoza y al M.C. Marco Antonio Valencia Arvizu por la amabilidad que tuvieron en brindarme su asesoría tiempo y paciencia durante la elaboración de esta tesis.

Agradezco a mi tío Rodolfo Carrillo Aganza por sus consejos, paciencia y su ejemplo y dedicación al trabajo, que me han servido para continuar mi trabajo.

Especialmente a mi esposa Placy, y a mis hijos Diana y Hans porque han sido siempre apoyo y motivación para caminar por la vida.

Y por último quiero agradecer también a todas aquellas personas, que de alguna u otra forma me ayudaron a realizar este trabajo, en particular a Blanca Irene Tapia Vásquez, por su trabajo tan eficaz al mecanografiar este.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Y

SUS GENERALIZACIONES

I N D I C E

CAPITULO VI

6.- EL TEOREMA FUNDAMENTAL Y MEDIDA DE BOREL

CAPITULO VII

7.- EL TEOREMA DE BESICOVITCH Y OTRA DEMOSTRACION DEL TEOREMA LEBESGUE-RADON-NIKODYM

PRESENTACION

El objetivo fundamental de este trabajo es el de exhibir una presentación unificada del "Teorema Fundamental del Cálculo". el cual se ha desarrollado a la par de los conceptos de medida, integral y función.

1) Versión elemental. Sea f una función integrable según Riemann, entonces se tiene

$$a)\quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

si la función es continua en el punto x, y

$$b)\quad \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

si F es absolutamente continua. Nótese que como consecuencia de que F sea absolutamente continua, su derivada es integrable según Riemann, aunque no necesariamente continua.

La importancia del T.F.C. estriba en que establece relaciones que involucran los conceptos y los procesos fundamentales del análisis, que son el concepto de función, integral, derivada, medida, integral indefinida y bases de diferenciación.

La primera versión elemental que se trabajó fué la siguiente:

Sea f una función continua, construímos la función

$$F(x)= \int_a^x f(t)dt + C$$

asi tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt + C\right] = f(x)$$

como observamos F tiene derivada en todos sus puntos y al derivarla recuperamos el integrando, y

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ donde } F'(x) = f(x).$$

o sea, al valuar F en los extremos nos da el efecto total del proceso de cambio continua. A tal F le llamamos integral indefinida o primitiva.

Después se dieron cuenta que no necesariamente la función f usada para construir

$$F(x)= \int_a^x f(t)dt + C,$$

tenía que ser continua, y que bastaba que fuera integrable, de todas maneras la función F obtenida es absolutamente continua.

En otras palabras la primera relación del T.F.C. afirma que la velocidad con que varía el área bajo la curva es igual al valor de la función en el punto considerado, si la función es continua. La segunda relación del T.F.C. afirma que cada función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada.

El panorama cambia si solo le pedimos a f que sea Riemann integrable, pues existen funciones

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

que no tienen derivada en algunos puntos, asi no podemos afirmar la ralación a) en este caso.

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si} \quad x=\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad (m,n)=1, \\ 0, & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

$f:[0,1] \to R$

sea $\quad F(x)= \int_a^x f(t)dt + C$

asi $F'(x)=0$ en todos los puntos, pero f no, porque tiene un valor distinto de cero en los racionales. Este ejemplo nos permite sospechar que la relación tal vez pueda extender al caso casi-dondequiera, pues tenemos

$$F'(x)= f(x) \quad \text{c.d.}$$

Tomamos en cuenta otro ejemplo. Volterra probó la existencia de una función g con derivada g', acotada en un intervalo, tal que g' no es Riemann integrable y al aplicar b) la integral no existe, o sea

$$g(b)-g(a)= \int_a^b g'(x)dx$$

no se tiene, ya que g' no es Riemann integrable por ser demasiado discontinua. Asi que la fórmula no sea cierta es atribuible más a la noción de integrable de Riemann que a la propia función g; en efecto se puede demostrar que por ser la derivada g' acotada, tal fórmula es cierta cuando se toma en el sentido de Lebesgue. Tal función se obtiene de la siguiente manera: sea E el conjunto de cantor de medida positiva obtenido al quitar en cada paso intervalos de longitud 5^{-n}. Este conjunto E es el complementario en $[0,1]$ de la unión de una familia numerable $\{I_k\}$ de intervalos abiertos disjuntos.

La función g vale cero en E, y en cada uno de los intervalos I_k se define asi:

Sea (a,b) uno de tales intervalos; la función

$$h(x) = (x-a)^2 \quad \text{sen} \frac{1}{x-a}$$

tiene derivada en (a,b), y para algún c situado entre a y el punto medio de (a,b) se verifica $h'(c) = 0$. Se define entonces g en (a,b) de manera que coincida con h en el intervalo (a,c), valga h(c) entre c y el punto medio de (a,b), y se completa - por simetría.

Estos hechos ponen de manifiesto, por una parte, que la noción de integral de Riemann presenta algunos inconvenientes y, por otra que el ámbito de las funciones continuas no parece el más adecuado para el desarrollo de la teoria de integración.

Ya Riemann empezó a plantearse el problema de caracterizar las funciones a las cuales era aplicable su proceso de integración.Después Lebesgue probó que una función es Riemann integrable si y solo si el conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero.

2) Sea f una función integrable según Lebesgue y la familia de funciones, las funciones medibles; la médida, la medida de Lebesgue.

Entonces se tiene:

a) $$\frac{d}{dx} \int_a^x f \quad dM = f(x) \quad c.d.$$

es válida si f es Lebesgue integrable, y

b) $$\int_a^b F'(t)dM = F(b) - F(a)$$

es válida si F es absolutamente continua.

Observemos que las relaciones a) y b) son una generalización de las relaciones de la sección precedente y tal generalización se ha hecho en dos sentidos.

I) La familia de las funciones medibles contiene a las funciones continuas, porque una función medible exige solo que la imagen inversa de un abierto sea medible, mientras que una función continua exige que la imagen inversa abiertos sean abierto, los que claramente son medibles.

II) Hay funciones que no son integrables según Riemann y si lo son según Lebesgue, luego la integral de Lebesque abarca una familia más amplia de funciones. Además en la integral de Lebesgue podemos manejar límites con facilidad y tenemos cerradura en la familia de funciones medibles.

3) Sea f una función integrable según Lebesgue y la familia de funciones, las funciones medibles, la medida m, la medida de Lebesgue. Sean las relaciones

a) $$\lim_{Q(x)\to x} \frac{1}{m(Q(x))} \int_Q f(y)dm = f(x) \quad \text{c.d.}$$

b) Sea f una función integrable respecto a la medida M, y consideremos la función de conjunto

$$v(E) = \int_E f \, d\, M,$$ donde M es una medida arbitraria

entonces, V es una medida absolutamente continua respecto a la medida M. Además podemos afirmar un recíproco restringido: si V es una medida absolutamente continua respecto M y M es σ-finita, entonces existe la función f, o sea podemos recuperar la función original.

La primera expresión es equivalente a la primera de la sección anterior en el caso R, la generalización estriba en que esta relación vale para R^n y sugiere

$$\lim_{Q(x)\to x} \frac{M(Q(x))}{m(Q(x))} = D(M,x)$$

que es una relación más general y abre la rama de diferenciación de funciones de conjunto monótonas en R^n. También se generaliza en el sentido de que no es necesario que la sucesión de conjuntos sea de intervalos; el teorema vale si la sucesión de conjuntos se contrae regularmente hacia x.

El recíproco restringido del que se habla en la segunda relación es el teorema de Radon y Nikodym y podemos pensar en la función V como una especie de primitiva y escribir

$$\left[\frac{dv}{dM}\right] = f$$

Lo cual generaliza la segunda relación de la sección anterior por lo siguiente: F es absolutamente continua, entonces es de variación acotada y por lo tanto se puede escribir como la diferencia de dos funciones crecientes, a las cuales se les puede asociar una medida y cada una de estas correspondería a la medida V. En la segunda relación de la sección precedente se esta integrando respecto a la medida de Lebesgue y esta es σ-finita, y en b) también se respeta esta condición.

4) Integral de Lebesgue Stieltjes, medidas asociadas a una función creciente, funciones medibles.

En este casose tiene que

$$\text{a) } f(x+) - f(a+) = \int_{(a,x]} \frac{df}{d\phi}\, dM\phi$$

con f creciente y M_ϕ la medida asociada a una función creciente y f absoltamente continua respecto a ϕ.

La generalización en a) es en dos sentidos:

I) Se esta integrando respecto a una medida asociada, y en el caso de Lebesgue, sería una medida asociada a una función lineal de pendiente uno, que es un caso muy particular.

II) Ahora se le pide a f que sea absolutamente continua respecto a ϕ, que f sea creciente, esto permite extender el resultado aprovechando la linealidad de la integral, a funciones de variación acotada que sean absolutamente continuas respecto a ϕ, la cual es una familia bastante amplia de funciones. Así, sea H de variación acotada y absolutamente continua respecto a ϕ, luego $H(x)= f(x)- g(x)$, donde f y g son crecientes y absolutamente continuas respecto a ϕ, luego tenemos

$$\left[f(x+0)- f(a+0) \right] - \left[g(x+)- g(a+) \right]= \int_{(a,x]} \frac{dH}{d\phi} \, dM_\phi$$

Nótese que el concepto de integral indefinida primero se considero como función del punto final, o sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

que también se puede pensar como una función conjuntista tal que a cada intervalo $[a,x]$ le asocia un número real.

Como tal concepto es difícil de trabajar como función del punto final en espacios más complicados como R^n o espacios abstractos, generalizaremos también nuestro concepto de integral indefinida de la siguiente manera

$$F(E) = \int_E f dM$$, donde E es un conjunto medible y M una medida

esta forma también nos permite trabajar sucesiones de conjuntos más complicados que las sucesiones de conjuntos formados por intervalos.

En términos generales pasamos de la familia de funciones continuas, a la familia de funciones medibles; de la integral de Riemann a la integral de Lebesgue-Stieltjes y de la integral indefinida como función del punto final, a la integral indefinida como función de conjunto.

La importancia de este trabajo estriba en que permite observar un hecho (el T.F.C.) a través de los distintos niveles de desarrollo de la matemática y también que cada generalización obliga a inventar nueva herramienta para su tratamiento. En este trabajo se exponen los teoremas clásicos de Vitali, Radon-Nikodym, de diferenciación de Lebesgue etc.

El teorema de diferenciación de Lebesgue se puede generalizar a medidas arbitrarias, donde los teoremas sobre cubiertas necesitar ser de caracter puramente geométrico, porque las medidas pueden ser no-invariantes ante traslaciones, el teorema del que hablamos es el teorema de Besicovith.

En la versión de Lebesgue-Stieltjes se utilizan medidas asociadas a una función creciente y como el conjunto de discontinuidades de la función asociada a la medida puede ser diferente del vacío, entonces no podemos aplicar al teorema sobre cubiertas de Vitali, lo que obliga a trabajar con otras herramientas.

Se presenta en el capítulo VII el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym del cual se ofrece una prueba que presenta ciertos elementos originales y otras herramientas como diferenciación de medidas.

Fué presentado por Miguel de Guzmán y Baldemero Rubio en el año de 1972 en la AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY.

CAPITULO I

1.1 REFERENCIAS HISTORICAS (MEDIDA)

Historicamente el intento de medir conjuntos arbitrarios de puntos en la recta tiene su origen en la dependencia entre integrabilidad en el sentido de Riemann y la continuidad. Una función es integrable si no tiene "muchas" discontinuidades, por ejemplo, como la integral bajo un punto es cero, no afectamos el resultado de una integración si modificamos una función continua en un conjunto finito de puntos; sin embargo, surge la pregunta ¿cómo debe ser el conjunto de discontinuidades para que la función sea integrable según Riemann? Es decir, ¿cómo caracterizar el conjunto de discontinuidades para obtener un critero que diga si una función es o no es integrable según Riemann?

Lo anterior condujo a buscar una *medida* para el conjunto de puntos de discontinuidad de una función, de manera que la condición de integrabilidad pudiera expresarse en términos de tal medida.

Otro motivo para medir conjuntos es la necesidad de extender el concepto de longitud de un intervalo a conjuntos más complicados. Dicho con mayor precisión, se quería extender la función conjuntista que asocie a cada intervalo el número real obtenido al restar al punto final del intervalo el inicial (pertenezcan o no al intervalo). A continuación enumeramos algunas de las características esenciales que debe presentar tal función según nuestra experiencia en la recta y que pretendemos exigir a cualquier extensión de ella ("medida"). Si I representa un intervalo y L(I) su longitud o medida, entonces

1) $L(I) \geq 0$ (no-negatividad)
2) Si $I_1, I_2, \ldots$ son intervalos mutuamente ajenos, entonces $L(I_1 \cup I_2 \cup \ldots) = L(I_1)+L(I_2)+L(I_3)+\ldots$ (aditividad numerable)
3) Si $I_1 \subset I_2$, entonces $L(I_1) \leq L(I_2)$ (monotonía)
4) Si $t \in R$ y $I=\{x \mid a \leq x \leq b\}$, entonces su traslación bajo t, $I+t= \{x+t \mid x \in I\}$ coincide con I en longitud o medida, o sea $L(I)= L(I+t)$ (invarianza ante traslaciones)

Uno de los intentos por definir una medida fue dado por Stolz ( ) y Harnak ( ) en 1884. Definieron la medida de un conjunto acotado A a partir de familias finitas de intervalos cuya unión contenía a A; para cada familia consideraron la suma de las longitudes de sus miembros y al ínfimo de tales sumas lo llamaron la medida de A. Como puede observarse, existen conjuntos que esperamos sean medibles los cuales no pueden ser cubiertos por ninguna familia finita de intervalos "arbitrariamente pequeños"; por lo tanto, esta definición de medida no cubre el primer requisito que inocentemente podemos esperar: que para cada subconjunto arbitrario de los reales se tenga asignada una medida.

George Cantor (1845, 1918) en 1885 se refiere a un conjunto acotado A de R^n considerando para cada $r>0$, la unión A_r de todas las esferas de radio r centradas en los puntos de A y llama medida de A al ínfimo de la suma de los volúmenes de tales Ar, cuando r varía.

Ambas definiciones pretenden definir una medida digamos desde arriba, con lo cual tenemos el inconveniente de que la unión de dos conjuntos ajenos puede tener una medida estrictamente menor que la suma de las medidas de tales conjuntos, contrario a lo que se esperaba, que la suma de las medidas de conjuntos ajenos fuera igual a la medida de la unión: o sea: $m(A)+m(B)= m(A\cup B)$ si $A\cap B=\phi$ (aditividad).

Los matemáticos Peano y Jordan en 1890 se dieron cuenta de que al pretender ver las cosas "desde arriba" no les daba una visión buena y había que ver las cosas también "desde adentro", así que además de la medida de Cantor m(A) la cual podemos pensar como una medida desde arriba o medida exterior, consideran una medida interior $mi(A)= m(I) -m(I-A)$, donde I es un intervalo que contiene a A. Con esto se lograba sensibilizar la "medida", o sea que no midiera puntos no considerados en el con junto y se llamó conjuntos medibles a los que verificaban la igualdad $m(A)= mi(A)$. Se tenía entonces que para dos conjuntos P y Q ajenos, $P\cup Q$ es también medible y $m(P\cup Q)= m(P)+m(Q)$, es decir aditiva en la clase de conjuntos medibles definida más arriba.

Borel (1871, 1956) en 1898 se limita a algo más concreto y constructivo, considera primero la medida de un intervalo abierto, luego, como un conjunto abierto es la unión numerable ajena de intervalos abiertos, define la medida de los abiertos, en general Borel se reduce a la familia de conjuntos que se pueden obtener a partir de operaciones conjuntistas numerables, tomando como base los intervalos abiertos. Posteriormente demuestra que tomando como base cualquier tipo de intervalos se puede hacer la misma construcción.

A la familia de conjuntos que se puede obtener a partir de los intervalos usando operaciones conjuntistas numerables se les llamó entonces *Borelianos*. Con lo anterior se lograba obtener una definición más constructiva de la medida respetando la aditividad.

Cabe aclarar que Cantor, aunque ya sabía que un abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia numerable de intervalos abiertos ajenos, no llegó a la forma constructiva de Borel.

Lebesque (1875, 1941) ya en los primeros años del siglo XX, precisa las indicaciones hechas por Borel. Sigue exactamente el mismo camino. nada más que él, no se limita a los *Borelianos*. Define una medida m para los abiertos. Para un conjunto acotado A define la medida exterior m_e (A) como el ínfimo de la suma de los abiertos que lo contienen, y la medida interior como m(I) $-m_e$ (I-A), siendo I un intervalo que contiene a A; con esto queda prácticmaente establecida la teoría de la medida como hoy se conoce.

1.2 FUNCION

Un concepto que también debemos considerar es el concepto de función pues está estrechamente vinculado a la teoría de integración y generación de medidas. Ya Euler (1707, 1783) tuvo una concepción moderna del concepto de función, para él era una curva arbitraria en el plano, tal que cada vertical la cortaba en un sólo punto; aunque su concepción era más bien de correspondencia, pues él imaginaba las funciones siempre descritas por una fórmula o varias. Sin embargo durante muchos años los trabajos matemáticos se refirieron a funciones aproximadamente continuas. La célebre función de Dirichlet (1805, 1859) que toma un valor en los racionales y un valor diferente en los irracionales, surgía como el más sencillo ejemplo de función discontinua, y corresponde a él precisamente, establecer el concepto de función tal como se considera hoy.

1.3 INTEGRACION

La primera formulación del concepto de integral corresponde a Cauchy. Se limitaba a considerar una función f continua en un intervalo $[a,b]$, y entendía la integral de f como el límite de las sumas

$$f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

cuando la amplitud del mayor de los intervalos parciales tiende a cero. A pesar de no haber apreciado la noción de continuidad uniforme, Cauchy probó la existencia de tal límite, así como su obtención mediante la sustitución, en las sumas, del valor de f en el extremo izquierdo de cada intervalo, por el valor en un punto arbitrario del mismo.

Riemann (1826-1866) utilizó un método análogo el de Cauchy, pero no se limitó a la consideración de funciones continuas, sino que se preocupó por investigar para que funciones era factible el proceso de integración, estableciendo condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad.

La definición de integral superior e inferior corresponde a Darboux (1842-1917), quien al considerar una función f acotada en un intervalo $[a,b]$ define las sumas

$$S=(x_1-a)M_1+\ldots+(b-x_{n-1})M_n$$

$$s=(x_1-a)m_1+\ldots+(b-x_{n-1})m_n.$$

donde M_k y m_k son el supremo y el ínfimo de f en el intervalo correspondiente. Probaba que el límite de las sumas S cuando la longitud del intervalo parcial máximo tiende a cero coincide con el ínfimo de éstas, y que el límite de las sumas s coincide con el supremo.

Tales números se conocen hoy con los nombres de inte-ral superior e inferior en el sentido de Darboux, aunque también es usual referirse a ellas con el nombre de Riemann. La definición de integrabilidad establecida por Darboux era la coincidencia de ambas integrales que equivale a la condición de integrabilidad dada por Riemann. Después Dirichlet (1805-1859) y Hölder (1860-1937) extienden la noción de integral a funciones no acotadas. En los mismos años, Cantor estudiaba los conjuntos y su medida, lo cual sería de gran utilidad en el desarrollo posterior de la teoría de integración.

Los trabajos de Fourier (1768-1830) contribuyeron en mucho al desarrollo de los conceptos de función e integral. Por otra parte, se pudo comprobar que familias bastante generales podían expresarse analíticamente como sumas de series trigonométricas. Además los coeficientes de tales series se obtenían mediante integrales; esto obligaba a pensar acerca del sentido que convenía dar a éstas, y sobre todo el campo de funciones a los que eran aplicables los desarrollos en serie.

Hablando de Riemann, quizá su mayor mérito en este sentido fué su interés por considerar la familia más amplia de funciones a la que era aplicable su proceso de integración.

Sin embargo, en las condiciones de integrabilidad que él estableció no aparece la noción de descontinuidad. Fué Du Bois Reymond (1831-1889) el primero que relacionó la integrabilidad de una función con el conjunto de puntos de descontinuidad de la misma. Aquí tuvo su origen el problema de medir conjuntos.

Después de la definición de conjunto medible dada por PEANO y JORDAN pudo establecerse una definición geométrica de la integral de Riemann en el siguiente sentido: una condición necesaria y suficiente para que una función f no-negativa y acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ sea Riemann integrable es que el conjunto de puntos (x,y) del plano tales que $x \in [a,b]$ y $0 \leq y \leq f(x)$ sea medible según la definición dada por PEANO y JORDAN; además, la medida de tal conjunto y la integral coinciden.

El procedimiento que siguió Lebesque fue el siguiente: considera el problema de la integral en su aspecto formal, es decir, analiza qué propiedades debe tener la aplicación que asigne a cada función su integral. Este análisis le hace ver que el problema fundamental consiste en definir la integral de la función característica o indicadora de un conjunto. Parece natural que tal integral sea la medida del conjunto, lo cual le obliga a limitarse a los conjuntos medibles que ya había caracterizado.

1.4 INTEGRAL DE LEBESQUE

Para definir la integral de una función f acotada Lebesque toma las particiones del intervalo de variación de f, en lugar de las particiones del intervalo en que f esta definida, como lo hacían Cauchy y Riemann. Para comprender el principio fundamental de esta integral, consideremos el siguiente ejemplo: imaginemos un conjunto de monedas de distinto valor cuyo monto deseamos encontrar. Podemos hacerlo de dos maneras: colocamos las monedas en fila y sumamos el valor de cada una, al valor de las precedentes, o bien formamos conjuntos de monedas agrupando las del mismo valor, después contamos el número de monedas de cada conjunto y enseguida multiplicamos ese número por el valor de la moneda; hacemos lo mismo para cada conjunto y finalmente sumamos. El primer método de conteo corresponde al proceso de integración de Riemann y el segundo al proceso de integración de Lebesque. En este ejemplo elemental puede observarse una mayor simplicidad en la integral de Lebesque.

Para cada partición $\{h_k, k=0,1,...N\}$ del intervalo de oscilación de f calculamos las sumas finitas

$$\sum_{k=1}^{N} m\,\{x:\ h_{k-1} < f(x) \leq h_k\} h_k$$

$$\sum_{k=1}^{N} m\,\{x:\ h_{k-1} \leq f(x) < h_k\} h_{k-1}$$

La integral de f en el sentido de Lebesque se define entonces como el límite común de estas sumas cuando la amplitud máxima de los intervalos (h_{k-1}, h_k) tiende a cero. Naturalmente, y es necesario enfatizarlo, la definición requiere la medibilidad de los conjuntos

$$\{x: h_{k-1} < f(x) \leqslant h_k\} \text{ y } \{x: h_{k-1} \leqslant f(x) < h_k\},$$

para funciones no-acotadas Lebesque considera las series

$$\sum_{-\infty}^{\infty} m\{x: h_{k-1} < f(x) \leqslant h_k\}\, h_k$$

y

$$\sum_{-\infty}^{\infty} m\{x: h_{k-1} \leqslant f(x) < h_k\}\, h_{k-1}$$

donde

$$-\infty \ldots\ldots < h_{-3} < h_{-2} < h_{-1} < h_0 < h_1 < h_2 < h_3 < \ldots\ldots \infty$$

y llama sumable a la función para la cual estas series resultan convergentes para alguna elección en los h_k, y tienen el mismo límite cuando la amplitud máximo de los intervalos (h_{k-1}, h_k) tiende a cero; tal límite es la integral de la función.

Otra manera dada por Lebesque para definir la integral, es la siguiente: dada una función no-negativa f, las integrales de las funciones $f_k = \min\,(f,k)$ convergen la integral de f, lo cual significa un método para definir la integral de funciones no-acotadas. Hoy es habitual asociar a cada función medible no-negativa una sucesión monótona en funciones simples (funciones simples son aquellas que tienen valores constantes en conjuntos medibles) convergente a ella y definir la integral de f como el límite de las integrales de tales funciones. Esta manera de definir la integral es la que adoptaremos en este trabajo.

1.5 TEOREMA FUNDAMENTAL

La noción de integral y de la derivada estaban bastante desarrollados antes de los trabajos de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716). Todo el desarrollo de la teoría dependía de que se descubriera que la derivación y la integración de una función realmente representaban procedimientos inversos como la suma y la resta, la multiplicación y la división. El hecho de que Newton y Leibniz se dieran cuenta de esto y formularán y utilizaran lo que llamamos "TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO", con el cual se podía calcular la integral usando derivadas, no debe sorprender. Esto simplificó mucho el trabajo y estableció que no había dos cálculos sino uno solo. Básicamente el teorema fundamental del cálculo expresa el hecho de que para una función continua, la velocidad con que varía el área en un punto, es igual al valor de la función en ese punto:

Si $F(x)= \int_a^x f(u)\,du$, entonces

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(u)\,du = f(x).$$

Esta puede considerarse una primera versión del T.F.C.; una segunda versión es la siguiente /

$$\int_a^b f(u)\,du = G(b) - G(a), \quad \text{donde} \quad G'(x) = f(x)$$

Geométricamente Cauchy, para una función continua f, llama integral indefinida de f a la solución general de la ecuación $y' = f(x)$, y si g es una solución establece que

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a);$$

en este caso, una tal g esta definida como

$$\int_a^x f(u)\,du = g(x)$$

Con Riemann empiezan a plantearse problemas en este aspecto, pues existen funciones f Riemann integrales tales que

$$\int_a^x f(u)\,du$$

no tiene derivada en algunos puntos.

Lebesque establece que cuando una función f es integrable en $[a,b]$ resulta que la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

tiene derivada igual a $f(x)$ en casi todos los puntos de $[a,b]$ y, recíprocamente, si g tiene derivada acotada en $[a,b]$, resulta

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(u)du.$$

Es de señalarse que en el caso de ser $g'(x)$ no acotada puede ser también no integrable. Se plantea así el problema de caracterizar las funciones g tales que g' existe un casi todo punto y sea integrable. Lebesque probó que una f así, tiene que ser de variación acotada, y que recíprocamente, si g es de variación acotada, g' existe en casi todo punto y es integrable, aunque puede no resultar la igualdad

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(u)du$$

Pero entonces, ¿bajo que condiciones podemos afirmar que es válida la igualdad anterior? finalmente las funciones de variación acotada que verifican la referida fórmula son aquellas cuya variación total en un abierto G (es decir la suma de las variación totales en los intervalos componentes de G) tiende a cero cuando la medida de G tiende a cero. A estas funciones Valali los designó con el nombre de funciones absolutamente continuas.

1.6 TEOREMA DE RADON Y NIKODYM

Finalmente consideremos una función real f medible en R, integrable en cada conjunto cerrado y acotado, Lebesque define una función g de conjunto mediante

$$g(E)= \int_E f(x)\, dx.$$

Esta función es completamente aditiva respecto al conjunto de integración y absolutamente continua en el sentido de que g(E) tiende a cero, cuando la medida de E tiende a cero.

Lebesque definió una derivada puntual para la función g y comprobó que tal derivada coincide con f en casi todo punto respecto a la medida de Lebesque sobre los reales. Con esto empezó la teoría de diferenciación de medidas e integrales, que esta muy vinculada al clásico teorema de Vitali y a otros teoremas de recubrimiento obtenidos después. Esta teoría constituye hoy una herramienta muy importante en diversas ramas del análisis.

La noción de función de conjunto completamente aditiva, intrdroducida por Borel y Lebesque, fué considerada después de Radón en 1913 como una generalización del concepto de medida. Radón comprobó que cada función de conjunto completamente aditiva y absolutamente continua respecto de una medida, era una integral respecto de dicha medida. Este teorema fué generalizado en 1930 por Nikodym, por eso hoy lo llamamos Teorema de Radón y Nikodym.

1.7 TEOREMA DE DIFERENCIACION DE LEBESQUE

Si se tiene una función $f:R\to R$ continua e integrable sobre R y se considera la función

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

el T.F.C. afirma que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in R$.

Podemos generalizar la situación anterior dándole la siguiente interpretación. La función f determina una medida (signada) M definida sobre los conjuntos de Lebesque de R

$$M(E)=\int_E f(y)\,dy$$

Sea $x\in R$ y $\{I_k(x)\}$ una sucesión cualquiera de intervalos que contienen a x, tales que $\delta((I_k(x))\to 0$, entonces se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\frac{M(I_k(x))}{m(I_k(x))}=\lim_{k\to\infty}\frac{\int_{I_k(x)} f(y)\,dy}{m(I_k(x))}=f(x)$$

donde m es la medida de Lebesque en la recta.

Preguntamos ahora ¿seguirá siendo válido el T.F.C. si solamente le pedimos a la función f que sea integrable? ¿podemos afirmar este resultado en el caso n-dimensional?, o sea, si f es $L(R^n)$, se tendrá

$$\lim_{\delta(Q(x))\to 0} \frac{1}{m(Q(x))} \int_{Q(x)} f(y)\,dy = f(x)$$

En realidad, si se dan las igualdades anteriores pero casi-dondequiera. Con lo anterior se logra una buena generalización del Teorema Fundamental del cálculo.

1.8 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO Y MEDIDA DE BOREL

También podemos generalizar el T.F.C. integrando respecto a una medida asociada a una función creciente ϕ y no tan solo respecto a una medida asociada a ϕ, donde ϕ es lineal y de pendiente uno.

Para ello se define la derivada de la función f respecto a una función creciente ϕ (se toma la ϕ creciente para reflejar comportamiento de la f) y se define la medida asociada a una función ϕ creciente, como el "crecimiento" de la función en el conjunto que se esta considerando. Así podemos afirmar casi dondequiera que

$$f(x+0) - f(a+0) = \int_{[a,x]} \frac{df}{d\phi}\, dM_{\phi}$$ donde M_{ϕ} es la medida asociada a ϕ

CAPITULO II

Nuestro objetivo primordial es examinar el teorema fundamental del cálculo, en los diferentes niveles de desarrollo. En la primera parte de este capítulo analizaremos el caso más sencillo, usando la integral de Riemann.

Si f es continua, entonces

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$

o sea la derivada de la integral indefinida es el integrando y,

$$(2)\quad \int_a^b f(x)dx= F(b) - F(a),\ \text{donde } F'(x)= f(x)$$

A estas dos afirmaciones conjuntas nosotros le llamamos El Teorema Fundamental del Cálculo.

Comenzaremos estableciendo un teorema el cual será una piedra angular en todo el desarrollo de esta teoría.

2.1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL

Sea f(x) una función continua definida en un intervalo $[a,b]$, entonces existe $\xi\varepsilon[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

En realidad lo que estamos afirmando es que existe un promedio de los valores de la función en el intervalo.

Demostración:

Tenemos que hacer 2 consideraciones

1.- A partir del promedio de un número finito de cantidades, por un proceso de límite, tenemos que llegar al promedio de un número infinito de cantidades.

2.- Como el límite puede depender de las cantidades que se tomen y con el propósito de no cargar esas cantidades en ningún sentido, subdividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, y tomaremos esos puntos para evaluar la función.

El número

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

sería el promedio de una cantidad finita de valores de la función y sea

$\Delta X_i = \frac{b-a}{n}$, donde X_i son los puntos de la partición, luego

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} = \frac{(b-a)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{(b-a)\ n}$$

$$= \frac{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{b-a} = \frac{\Delta x_i \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{b-a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}{b-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+ f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

ahora como la función es continua y alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo, entonces el valor promedio pertenece al rango de la función, luego para algún $\xi\varepsilon[a,b]$ se tiene

$$f(\xi)= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Definición: Llamamos integral indefinida de una función continua f a una función $\phi(x)$ descrita por la relación

$$\phi(x)= \int_\alpha^x f(u)du, \text{ donde } \alpha \text{ es fijo y } x \text{ es variable}$$

y ambos pertenecen al dominio de la función. Diremos una integral indefinida, porque podríamos haber elegido cualquier otro límite inferior y de esa manera 2 integrales indefinidas difieren tan solo una constante.

2.2 Ahora demostraremos 2 propiedades de la integral indefinida de una función continua

1) La integral indefinida de una función continua es continua

2) Es una función creciente si $f>0$

Demostración:

Sea $[a,b]$ el intervalo donde f es continua, entonces por el teorema del valor medio para la integral, tenemos para x,y en el intervalo

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_x^y f(x)\,dx = f(\xi_y)(y-x)$$

donde $\xi \varepsilon [x,y]$

$$\phi(y) = \phi(x) + f(\xi_y)\ (y-x)$$

$$\lim_{y\to x} \phi(y) = \lim_{y\to x} \left[\phi(x) + f(\xi_y)(y-x)\right] = \phi(x) + f(x)0 = \phi(x)$$

luego la integral indefinida es continua.

Ahora si $f(x)>0$ tenemos que para $y>x$ $\phi(y) = \phi(x) + f(\xi_y)$ $(y-x) > \phi(x)$, entonces la integral indefinida es creciente.

2.3 Teorema fundamental del cálculo (parte 1)

La integral indefinida de una función continua $f(x)$ posee siempre una derivada $\phi'(x)$ y, además, $\phi'(x) = f(x)$ así

$$\frac{d}{dx}\int_\alpha^x f(u)\,du = f(x)$$

en otras palabras, la velocidad con que varía el área bajo la curva $y = f(x)$, cuando x crece es igual a la altura de la curva en el punto x.

Demostración:

La demostración es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio del cálculo integral. Luego para cualesquier valores x, x+h en el dominio de f, se tiene

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_x^{x+h} f(u)\,du = f(\xi_h)h, \text{ donde } \xi \varepsilon \left[x, x+h\right]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Llamamos primitiva de $f(x)$, a cualquier función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

La parte 1 que acabamos de demostrar, se expresaría de la siguiente manera:

Toda la integral indefinida $\phi(x)$ de una función $f(x)$, es una primitiva de $f(x)$.

Pero si nos planteamos el problema de encontrar todas las primitivas de $f(x)$, es claro que aún no lo hemos resuelto y el problema corresponde a lo que llamaremos segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

Teorema: Toda función primitiva $F(x)$ de una función dada $f(x)$, continua en el intervalo, puede ser representada en la forma

$$F(x) = c + \phi(x) = \int_\alpha^x f(u)\,du + c$$

donde c y α son constantes, y α, x estan en el intervalo; y, recíprocamente, para cualesquier valores de α y c, elegidos arbitrariamente (siempre que α este en el dominio de f) esta expresión representa una función primitiva.

En otras palabras, la diferencia de dos primitivas $F_1(x)$ y $F_2(x)$ de una función f(x) es siempre una constante

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

así, a partir de cualquier función primitiva F(x) pueden obtenerse todas las demás en la forma

$$F(x)+c$$

mediante una elección adecuada de la constante C. Recíprocamente, para cada valor de la constante c, la expresión $F_1(x)+c$ representa una función primitiva de f(x).

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}c = F'(x) + 0 = f(x)$$

luego si F(x) es una primitiva, también lo es F(x)+c. Ahora demostraremos que la diferencia de dos funciones primitivas es una constante.

Sea

$$F_1(x) - F_2(x) = G(x) \quad \text{luego}$$
$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

se puede probar a partir del teorema del valor medio del cálculo diferencial, que una función cuya derivada se hace cero en todas partes de un intervalo, es una constante. Por lo tanto G(x) es una constante.

Combinando lo que acabamos de probar tenemos

$$F(x)= C + \phi(x)= C + \int_a^x f(u)\,du$$

Ahora, aquí estamos usando dos conceptos: integral indefinida y función primitiva, en base a unificarlos haremos la siguiente observación:

Consideremos la función $f(x)= \sqrt{x}$. Entonces la integral indefinida es

$$\phi(x)= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

y como el dominio de $f(x)$ es $[0,\infty)$ entonces tanto X como "a" son no-negativos, y de esa manera la función

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 5$$

es una función primitiva que no es una integral indefinida, luego agregando a la integral indefinida la constante c, evitaríamos este problema. Así definiremos de nuevo el concepto de integral indefinida.

Definición: $\phi(x)$ es una integral indefinida de una función continua $f(x)$ si es de la forma

$$\phi(x)= C + \int_\alpha^x f(u)\,du,$$

donde α es fijo y x variable y ambos están en el dominio de f.

De esta manera, ya no habrá necesidad de distinguir entre función primitiva e integral indefinida pues ambos conceptos coinciden.

2.4 Ahora deseamos mostrar la igualdad (parte II del T.F.C.)

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

donde $F'(X) = f(x)$ y $f(x)$ es continua.

Demostración:

Sea $\phi(x) = \int_a^x f(u)du$ y $F(x)$ otra primitiva

luego $\phi(x) = F(x)+C$

$0 = \phi(a) = F(a)+C$

$c = -F(a)$ y

$$\phi(x) = F(x) - F(a)$$

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a)$$

evaluando en b, tenemos

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

con lo cual completamos lo propuesto

CAPITULO III

TEOREMA FUNDAMENTAL CON INTEGRAL DE LEBESGUE. Nuestro propósito ahora es estudiar las relaciones

1) $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

2) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy = f(x)$

donde la integral es la de Lebesgue y las funciones son medibles.

Dicho en otras palabras, queremos establecer las condiciones en las cuales se dan las igualdades, solo que ahora estamos abarcando una familia más amplia de funciones, las funciones medibles y hemos generalizado nuestro criterio de equivalencia de funciones. Hablando más explícitamente, ¿qué condiciones debe cumplir la función para satisfacer la igualdad? Para satisfacer la igualdad 1), como veremos posteriormente, la función f debe ser absolutamente continua, y en la relación 2), sólo necesitamos que f sea integrable según Lebesgue, (en el caso de la integral de Riemann, necesitamos que f sea continua en el punto considerado).

Observemos un poco más la relación 1) antes de empezar a construir la teoría para su demostración; para ello obtendremos una función continua en el intervalo real [0,1], cuya construcción esta basada en el conjunto de Cantor de medida cero. Sea f_n una función que tiene un comportamiento constante en cada conjunto que se ha quitado, de la siguiente manera

y sea $f= \lim f_n$; a esta función le llamamos función de Cantor y observemos una característica en la cual estamos especialmente interesados; la función tiene derivada cero en $[0,1]-C$ (donde C es el conjunto de Cantor), en otras palabras tiene derivada cero en casi todo el intervalo y aún así crece de 0 al 1. ¿Verifica la relación uno?

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1)-f(0).$$

Como la derivada es cero casi - dondequiera en el intervalo $[0,1]$ tenemos que el miembro de la izquierda vale cero, mientras que $f(1)=1$ y $f(0)=0$, luego el miembro de la derecha vale 1; no cumple con la igualdad a pesar de ser el límite uniforme de funciones continuas y por lo tanto continua, luego no basta que sea continua y derivable casi-dondequiera como en este caso. Como ya hemos dicho se necesita que la función sea absolutamente continua, que es una condición mucho más fuerte.

En el caso elemental de una variable, usando la integral de Riemann necesitábamos que la función estuviera definida en un intervalo $[a,b]$ y continua, por lo tanto acotada, lo cual sólo permite aplicar el T.F.C. a una familia un poco reducida de funciones; usando la integral de Lebesgue, no tendremos la restricción de que la función sea acotada con tal de que sea integrable (la función puede ser $\pm\infty$ en un conjunto de medida cero).

También las afirmaciones que haremos, tendrán un dominio mucho más amplio, debido a que se ha generalizado el concepto de igualdad de funciones. Consideremos iguales a dos funciones si difieren sólo en un conjunto de medida cero.

Como puede observarse, ambas funciones tendrían la misma integral, debido a que usando la aditividad de la integral, podemos separarla en dos conjuntos: uno donde ambas funciones son iguales y el otro donde difieren, como este tiene medida cero, las integrales son iguales.

Otra de las diferencias que tendremos se refiere a los teoremas de convergencia. Usando la integral de Riemann podemos afirmar el cambio entre límite e integral si la función f esta definida en un intervalo $[a,b]$, es acotada y la convergencia de las f_n, tales que lim $f_n=f$ se realiza uniformemente; en cambio con la integral de Lebesgue no necesitamos que las funciones sean acotadas, sino integrables; y la convergencia no necesita ser uniforme sino nada más puntual.

En el caso de que las funciones sean acotadas, ambas integrales, la de Riemann y la de Lebesgue, coinciden (si la integral de Riemann existe). Muchas funciones que no son integrables según Riemann, como por ejemplo

$$f(x)= \begin{matrix} 0 & \text{si} & x\varepsilon\ [0,1]-Q \\ 1 & \text{si} & x\varepsilon Q \end{matrix}$$

$$f:\ [0,1]\to R$$

de comportamiento muy sencillo porque se puede considerar equivalente a la función idéntica a cero, no son integrables según Riemann pero si según Lebesgue, así la integral de Lebesgue abarca una familia mucho más amplia de funciones; nos estamos refiriendo obviamente a la familia de funciones medibles. Por otra parte, las propiedades algebraicas de la integral de Riemann también las posee la integral de Lebesgue, y por último, Sea ahora una función f no-acotada, definamos f_n como sigue

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Observemos lo siguientes: las f_n son acotadas, no negativas, la sucesión es creciente y $f_n \to f$; por el teorema de la convergencia monótona, podemos afirmar que

$$\int f = \int \lim f_n = \lim \int f_n;$$

así, dado $\varepsilon > o$ podemos encontrar una N, tal que para toda $n \geq N$ se tiene

$$\left| \int_A f - \int_A f_n \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

luego, como $f \geq f_n$

$$\int_A (f - f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Calculemos

$$\int_A f = \int_A (f - f_N) + \int_A f_N < \frac{\varepsilon}{2} + NmA$$

haciendo $mA < \delta = \frac{\varepsilon}{2N}$, obtenemos

$$\int_A f < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{N\varepsilon}{2N} = \varepsilon,$$

la integral de Lebesgue maneja límites con facilidad mientras que la integral de Riemann no. Con lo dicho anteriormente, nos damos cuenta de que la integral de Lebesgue representa una generalización y una herramienta mucho más poderosa. A continuación nos ocupamos de la demostración de algunos teoremas que nos llevarán a la caracterización de las funciones que cumplen con las igualdades 1) y 2).

Teorema 1.- Continuidad absoluta de la integral. Sea f una función no-negativa integrable sobre un conjunto E. Entonces, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para cada conjunto $A \subset E$ con $mA<\delta$, tenemos

$$\int_A f < \varepsilon$$

Prueba.- Haremos la demostración en dos pasos. El primer paso consiste en el caso acotado. Sea f tal que

$$|f(x)| < M, \text{ para toda } x \in E, \text{ calculemos}$$

$\int_A f < \int_A M = M\, mA$, luego haciendo $mA = \frac{\varepsilon}{M} \leq \delta$,

se tiene

$$\int_A f \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

con lo cual tenemos que la integral como función de conjunto es absolutamente continua.

Definición: Sea d una colección de intervalos. Entonces decimos que d cubre un conjunto E es el sentido de Vitali, si para cada $\varepsilon > o$ y cualquier $x \varepsilon E$, hay un intervalo $I \varepsilon d$, tal que $x \varepsilon I$ y $1(I) < \varepsilon$. En otras palabras cada elemento del conjunto esta cubierto por intervalos arbitrariamente pequeños.

A continuación demostraremos un teorema sobre cubiertas, el lema de Vitali el cual será muy importante en las demostraciones posteriores.

Lema de Vitali. Sea E un conjunto de medida exterior finita y d una colección de intervalos que cubre a E en el sentido de Vitali. Entonces dado $\varepsilon > o$, existe una colección disjunta finita $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\}$ de intervalos en d tal que

$$m^* \left[E - \bigcup_{n=1}^{N} In \right] < \varepsilon$$

Este teorema nos permite lo siguiente:

a) Sustituir el conjunto de medida exterior finita por una unión finita y ajena de intervalos con un error menor que ε, lo cual nos da una precisión bastante aceptable.

b) Al sustituir el conjunto E por una colección de intervalos, tenemos un fácil manejo, además como la medida exterior siempre existe, no nos impone gran restricción, salvo la de que sea finita.

Demostración.- Lo probaremos para el caso en que cada intervalo de la colección sea cerrado, lo que no impone ninguna restricción puesto que la medida de un cerrado y el abierto correspondiente es igual, y elegimos un conjunto 0 abierto de medida finita que contenga a E tal que cada intervalo de la cubierta de Vitali este contenido en el.

Vamos a elegir una sucesión de intervalos disjuntos de d por inducción. Supongamos que I_1, $I_2, \ldots, I_n$ han sido ya elegidos y sea

$$K_n = \sup \{L(I) \mid I \, I_k = \phi, \; k=1,2,\ldots,n\}$$

ya que cada $I \subset 0$, tenemos

$$k_n \leq m0 < \infty$$

si $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, entonces

$$m^* \left[E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i \right] = m^* \phi = 0 < \varepsilon$$

y tendríamos la afirmación

si $E \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, entonces el siguiente intervalo lo podemos elegir de tal manera que

$$L(I_{n+1}) > \frac{kn}{2} \text{ y } I_{n+1} \text{ disjunto de } I_1, I_2, \ldots, I_n;$$

así sucesivamente elegimos los intervalos siguientes, luego

$$k_{n+1} = \sup\{L(I) \mid I \cap I_k = \phi,\ k=1,2,\ldots,n+1\}$$

y tendremos una sucesión I_n de intervalos disjuntos que, por la forma en que se eligen, van agotando todo E

$$\text{ya que } \cup I_n \subset 0$$

$$L(\cup I_n) = \Sigma L(I_n) \leq m0 < \infty$$

y como la serie converge, su "cola" tiende a cero, por lo tanto podemos encontrar una n tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} L(I_i) < \frac{\varepsilon}{5};$$

sea $\qquad R = E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i,$

el lema quedará establecido si podemos demostrar que

$$m^*R = m^* \left[E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right] < \varepsilon.$$

Sea $x \varepsilon R$, ya que $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ es un conjunto cerrado que no contiene a x, podemos encontrar un intervalo $I \varepsilon d$, el cual contiene a x cuya longitud es tan pequeña que es ajeno a cualquiera de los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Cabe hacer notar que si los I_n fueran abiertos no podríamos hacer la afirmación anterior, por eso los intervalos los elegimos cerrados. Tenemos pues

$$I \; I_i = \phi \text{ para } i \leqslant n, \text{ luego}$$

$$L(I) \leqslant k_n < 2L(I_{n+1})$$

ya que $\lim_{i \to \infty} L(I_i) = 0$ y la sucesión $\{I_i\}$ es exhaustiva, el intervalo I debe tener intersección no vacía con alguno de los I_n.

Sea N el menor entero tal que $I \cap I_N \neq \phi$,

$$L(I) \leqslant k_{N-1} \leqslant 2 \; L(I_N)$$

ya que $x \varepsilon I$ y I tiene al menos un punto común con I_N se sigue que la distancia de x al punto medio de I_N

es a lo más $L(I) + \frac{L(I_N)}{2} \leq \frac{5L(I_N)}{2}$,

así $x \varepsilon J_N$ que tiene el mismo punto medio que I_N y 5 veces su longitud, luego cada elemento de R lo podemos incluir en un J_N, entonces

$$R \subset \bigcup_{N=n+1}^{\infty} J_n = 5 \sum_{N=n+1}^{\infty} L(I_n) = 5 . \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

luego

$$m^* \left[E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i \right] < \varepsilon$$

que es lo que queríamos demostrar.

DERIVADAS DE DINI

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^- f(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$D_+ f(x) = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_- f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Definición : Si $D^{+}f(x) = D_{+}f(x) = D^{-}f(x) = D_{-}f(x) \neq \pm \infty$, decimos que f es derivable en x y definimos la derivada f'(x) como el valor común.

A continuación demostraremos un teorema que da una cota para la integral de la derivada de una función creciente.

Teorema.- Sea f una función creciente de valores reales sobre un intervalo [a,b]. Entonces f es derivable casi-dondequiera, la derivada f' es medible y de variación acotada

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

Prueba: Para demostrar que la función creciente es derivable, se demostrará que el conjunto donde las dos variables son distintas tiene medida cero.

$$E = \{x \mid D^{+} f(x) > D_{-}f(x)\}$$

Los otros conjuntos que resultan de las otras combinaciones se pueden manejar de igual forma.

$$E = \bigcup_{u,v \in Q} E_{u,v} \text{ donde } E_{u,v} = \{x \mid D^{+}f(x) > u > v > D_{-}f(x)\};$$

queremos demostrar que $m^*E_{u,v}=0$.

Sea $s= m^*E_{u,v}$ y $\varepsilon>o$ y encerramos el conjunto $E_{u,v}$ en un abierto 0

$E_{u,v}$

0

con $m0<s+\varepsilon$, o sea se eligió un abierto 0 que contiene al conjunto con un error menor que ε.

Para la demostración, lo que haremos será acotar la variación de la función en intervalos cerrados muy pequeños usando el hecho de que las derivadas existen.

Para cada $x\varepsilon E_{u,v}$ existe un intervalo arbitrariamente pequeño $[x-h,x]$ contenido en 0, tal que

$$f(x)- f(x-h) < vh,$$

estamos usando que $D_-f(x)$ existe y que $D_-f(x)<v$.

Por el lema de Vitali podemos escoger una colección finita $\{I_1,I_2,....,I_n\}$ de intervalos cerrados cuyos interiores cubren a un subconjunto A de $E_{u,v}$ de medida exterior más grande que $s-\varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{N} \left[f(x_n) - f(x_n - h_n) \right] < \sum_{n=1}^{N} v h_n = v \sum_{n=1}^{N} h_n < vm0 < v(s+\varepsilon)$$

Ahora cada punto $y \varepsilon A$ es el punto final izquierdo de un intervalo arbitrariamente pequeño $(y, y+k)$, el cual está contenido en algún I_n y tal que

$$f(y+k) - f(y) > uk,$$

aquí estamos usando que $D^+f(x)$ existe y que $D^+f(x) > u$.

Usando el lema de Vitali de nuevo, podemos seleccionar una colección finita $\{j_1, j_2, \ldots . j_M\}$ de tales intervalos tales que en unión contiene un subconjunto de A de medida exterior más grande que $s-2\varepsilon$. Entonces sumando sobre todos los intervalos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \sum_{i=1}^{M} k_i > u(s-2\varepsilon)$$

Cada j_i está contenido en algún intervalo I_n y si sumamos sobre todo los i, los cuales cumplen $j_i \subset I_n$, entonces

$$\Sigma \left[f(y_i + k_i) - f(y_i) \right] \leqslant f(x_n) - f(x_n - h_n)$$

ya que f es creciente

$$\sum_{n=1}^{N} \left[f(x_n) - f(x_n - h_n) \right] < \sum_{n=1}^{N} vh_n = v\sum_{n=1}^{N} h_n < vm0 < v(s+\varepsilon)$$

Ahora cada punto $y \in A$ es el punto final izquierdo de un intervalo arbitrariamente pequeño $(y, y+k)$, el cual está contenido en algún I_n y tal que

$$f(y+k) - f(y) > uk,$$

aquí estamos usando que $D^+f(x)$ existe y que $D^+f(x) > u$.

Usando el lema de Vitali de nuevo, podemos seleccionar una colección finita $\{j_1, j_2, \ldots, j_M\}$ de tales intervalos tales que en unión contiene un subconjunto de A de medida exterior más grande que $s-2\varepsilon$. Entonces sumando sobre todos los intervalos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i) - f(y_i) > u \sum_{i=1}^{M} k_i > u(s-2\varepsilon)$$

Cada j_i está contenido en algún intervalo I_n y si sumamos sobre todo los i, los cuales cumplen $j_i \subset I_n$, entonces

$$\sum \left[f(y_i+k_i) - f(y_i) \right] \leq f(x_n) - f(x_n - h_n)$$

ya que f es creciente

así $g_n(x)$ converge a $g(x)$. Pero como f es medible por ser creciente, g_n también y así $g(x)$, luego $f'(x)$ es medible.

Demostraremos ahora que la integral de la derivada de la función f creciente está acotada por arriba por $f(b)-f(a)$.

Observemos que ya que f es creciente, tenemos que $g_n(x) \geq 0$, luego usando el lema de FATOU

$$\int_a^b g \leq \underline{\lim} \int_a^b g_n = \underline{\lim} \int_a^b n \left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \right] dx$$

$$= \underline{\lim}\ n \int_a^b \left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \right] dx:$$

definimos $f(x) = f(b)$ para $x \geq b$, luego

$$= \underline{\lim}\ n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right]$$

$$= \underline{\lim}\ n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx + \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \right]$$

$$\leq \underline{\lim}\ n \left[\frac{f(b)}{n} - \frac{f(a+\frac{1}{n})}{n} \right] = \underline{\lim} \left[f(b) - f(a+\frac{1}{n}) \right]$$

$$= \underline{\lim}\ f(b) - \underline{\lim}\ f(a+\frac{1}{n}) = f(b) - f(a).$$

Así

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a).$$

Podemos observar que además de que f'(x) es integrable, es finita casi-dondequiera

Definición.- Una función f es de variación acotada si la variación total es finita, y lo denotamos

$$\underset{a}{\overset{b}{T}} f = \text{finita.}$$

La importancia de las funciones de variación acotada estriba en que se pueden escribir como la diferencia de dos funciones crecientes; en otras palabras, si una función es de variación acotada, entonces su f'(x) existe casi-dondequiera y es medible. Entonces, si f(x) es de variación acotada,

$$f(x) = g(x) - h(x), \text{ donde } g \text{ y } h \text{ son crecientes}$$

$$\int_a^b g'(x)\,dx \leq g(b) - g(a) \text{ y}$$

$$\int_a^b h'(x)\,dx \leq h(b) - h(a)$$

pero como no podemos restar desigualdades, no podemos generalizar el resultado. Pero ¿porqué no se puede generalizar el resultado?; porque en realidad pedir que una función sea de variación acotada es pedir poco, se necesitan funciones muy patológicas para que no sean de variación acotada. Además como se pudo haber concluído, la función de Cantor es una función de variación acotada en el $[0,1]$ y como ya vimos no cumple con la igualdad uno, luego no es suficiente que sea de variación acotada para que cumpla con la igualdad uno, así puede observarse que necesitamos una condición más fuerte, que es, como lo hemos venido diciendo, la continuidad absoluta.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO (PARTE UNO)

Ahora nos referimos a la igualdad uno, o sea a

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy = f(x)$$

queremos demostrar que la igualdad se tiene c.d. si f(x) es integrable según Lebesgue, que es un resultado más general al que se tenía usando la integral de Riemann, donde se obtiene la igualdad si x es un punto de continuidad de f. Para concluir esta relación, realizaremos los siguientes pasos:

1) Demostrar que la integral indefinida es continua
2) Demostrar que la integral indefinida es una función de variación acotada y que por lo tanto existe su derivada casi-dondequiera en el intervalo $[a,b]$ de definición
3) Usando que f es integrable según Lebesgue concluir la igualdad.

La parte uno ya está demostrada, puesto que ya se vió que la integral indefinida es absolutamente continua. Demostraremos ahora que la integral indefinida es una función de variación acotada

Sea

$$F(x)= \int_a^x f(y)\,dy$$

y $a= x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k=b$ cualquier subdivisión de $[a,b]$. Calculemos la variación

$$\sum_{i=1}^{k} |F(x_i)- F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^{x_i} f(y)\,dy - \int_a^{x_{i-1}} f(y)\,dy \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(y)\,dy \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(y)|\,dy = \int_a^b |f(y)|\,dy.$$

Tomando el sup sobre todas las particiones

$$T_a^b(F) \leq \int_a^b |f(y)|\,dy < \infty,$$ puesto que f es integrable,

luego $F(x)$ es de variación acotada por lo tanto derivable casi-dondequiera en $[a,b]$.

A continuación demostraremos que $F'(x)= f(x)$ c.d. en $[a,b]$ para ello estableceremos los siguientes 3 teoremas; el primero lo necesitaremos para asegurar la igualdad de dos funciones c.d., a través de que la integral de su diferencia sea cero; el segundo en el caso acotado y el tercero es la generalización.

Teorema 1.- Si f es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^x f(t)\,dt=0$$

para toda $x\varepsilon [a,b]$, entonces $f(y)=0$ c.d. en $[a,b]$.

Demostración.- Haremos un razonamiento por contradicción. Supongamos que $f(x)>0$ sobre un conjunto E de medida positiva. Entonces existe un conjunto cerrado $F \subset E$, con $mF>0$.

Sea $O=(a,b)-F$

$$0=\int_a^b f=\int_F f+\int_O f \quad \text{por hipótesis.}$$

Por el supuesto

$$0 \neq -\int_F f=\int_O f=\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt,$$

donde $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\ b_n)$.

Como la integral es diferente de cero, para algún n debemos tener

$\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$, y así, una u otra

$$\int_a^{a_n} f \neq 0 \quad o \quad \int_a^{b_n} f \neq 0,$$

y en cualquier caso tenemos que si f es positiva en un conjunto de medida positiva, para algún $x\varepsilon[a,b]$ se tiene $\int_a^x f \neq 0$ lo cual es una contradicción, luego tenemos la afirmación.

Teorema.- Si f es acotada y medible sobre $[a,b]$ y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ entonces $F'(x)=f(x)$ para casi-toda x en $[a,b]$.

Prueba.- Como ya sabemos que F es de variación acotada sobre $[a,b]$, sabemos también que $F'(x)$ existe para casi toda $x\varepsilon[a,b]$.

Sea $|f|< k$, entonces

$$f_n(x) = \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(X)}{\frac{1}{n}}$$

$$= n\left[\int_a^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

pero como $|f(t)|\leqslant k$, tenemos

$$\leqslant n \int_x^{x+\frac{1}{n}} k\, dt = nk\cdot\frac{1}{n} = k,$$

así $|f_n(x)| \leqslant k$, luego tenemos una sucesión en funciones acotadas $f_n(x)$, tal que $f_n(x) \to F'(x)$.

Por el teorema de la convergencia acotada, para cualquier $c \in [a,b]$.

$$\int_a^c F'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \int_a^c \left[F(x+\tfrac{1}{n}) - F(x) \right] dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\int_a^c F(x+\tfrac{1}{n})\,dx - \int_a^c F(x)\,dx \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \int_a^c F(x+\tfrac{1}{n})\,dx - \lim_{n\to\infty} n \int_a^c F(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - \lim_{n\to\infty} n \int_a^c F(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{c} F(x)\,dx + \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - \int_{a+\frac{1}{n}}^{c} F(x)\,dx \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,dx \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx}{\frac{1}{n}} - \frac{\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,dx}{\frac{1}{n}} \right].$$

Como F es continua

$$= F(c) - F(a)$$

luego $\int_a^c F'(x)\,dx = F(c) - F(a)$, pero $\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$,

por lo que $\int_a^c \left[F'(x) - f(x) \right] dx = 0$ y

$$F'(x) = f(x) \text{ c.d.}$$

La idea es que si la función f está acotada, los promedios también están acotados y convergen hacia la derivada de la integral indefinida, así podemos aplicar al teorema de la convergencia acotada para cada elemento c del intervalo y a través de que la integral es cero para cada elemento del intervalo obtener la igualdad $F'(x) = f(x)$.

Teorema.- Sea f una función integrable sobre $[a,b]$, y sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

entonces $F'(x) = f(x)$ para casi-todo $x \varepsilon [a,b]$.

Demostración.- Cabe hacer notar que ya estamos en el caso general puesto que no estamos pidiendo que f sea acotada.

ya que

$$\int f = \int f^{+} - \int f^{-}$$

y ambas f^{+}, f^{-} son positivas, entonces

$$F(x) = \int_a^x f^{+}(t)\,dt - \int_a^x f^{-}(t)\,dt \quad y$$

$F'(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x) = f(x)$, podemos suponer que la función f es positiva

Sea pues $f \geq 0$ y

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

luego $f_n \uparrow f$ y $f - f_n \geq 0$,

así $\quad G_n(x) = \int_a^x (f - f_n)$.

G_n es una función creciente en x, porque $f - f_n \geq 0$, entonces debe tener derivada casi-dondequiera y su derivada debe ser no-negativa

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x (f-f_n)(t)\,dt + \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

$F'(x)$ = un número no negativo + $f_n(x)$,

luego, $F'(x) \geq f_n(x)$,

y así es mayor o igual que cada f_n, entonces es mayor o igual al sup:

$$F'(x) \geq f(x)$$

$$\int_a^b F'(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

así

$$\int_a^b F'(x)\,dx \geq F(b)-F(a)$$

Como la función $f \geq 0$, entonces $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es creciente y

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq F(b)-F(a),$$

luego

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

pero

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

entonces

$$\int_a^b \left[F'(x)-f(x)\right]dx =0, \text{ y como } F'(x)-f(x)\geqslant 0,$$

entonces

$$F'(x)-f(x)=0 \quad y \quad F'(x)= f(x),$$

con lo cual tenemos la igualdad dos.

También podríamos haber hecho

$$F(x)= F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

sin que hubiera cambio alguno.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO (PARTE II)

Caracterizamos las funciones tales que

$$\int_a^b f'(x)dx= f(b)-f(a);$$

como ya hemos dicho, f debe ser absolutamente continua.

Definición.- Una función de valores reales en $[a,b]$ se dice absolutamente continua en $[a,b]$ si dado $\varepsilon > o$ existe $\delta > o$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

para cada colección finita ajena de intervalos tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \delta;$$

dicho en otras palabras, la variación total en un abierto, tiende a cero, cuando la medida del abierto tiende a cero.

Teorema.- Si f es absolutamente continua en $[a,b]$, entonces es de variación acotada en $[a,b]$.

Prueba.- Como es absolutamente continua, entonces, dado $\varepsilon=1$, existe un $\delta > o$ tal que

$$\text{si } \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \delta, \text{ entonces } \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Sea δ el de la definición de continuidad absoluta, que corresponde a $\varepsilon=1$.

Sea

$$k = \left[\frac{b-a}{\delta} + 1 \right] \text{ el entero mayor}$$

Damos una subdivisión

$$a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots . < x_n = b$$

agregamos puntos a fin de obtener un refinamiento donde cada intervalo tenga longitud menor que δ.

Sea $\{t_i \mid i=1, 2, \ldots, k\}$ tal refinamiento, aplicando la continuidad absoluta, tenemos que

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta, \text{ se tiene } |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1,$$

luego

$$\sum_{i=1}^{k} |t_i - t_{i-1}| < b-a, \text{ y entonces } \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < k;$$

tomando el sup

$$T_a^b f \leqslant k, \text{ luego f es de variación acotada.}$$

Por lo tanto ya tenemos que una función absolutamente continua es derivable casi-dondequiera.

Teorema.- Si f es absolutamente continua en $[a,b]$ y $f'(x)=0$ c.d., entonces f es constante.

Demostración.- Deseamos probar que $f(a)= f(c)$ para toda $c\varepsilon[a,b]$.

Sea

$$E= \{x\varepsilon(a,c) \mid f'(x)=0\}$$

$$mE= c-a \text{ (puesto que } f'(x)= 0 \text{ c.d. en } [a,b])$$

Sea d una cubierta de Vitali del conjunto E, luego para cada $x\varepsilon E$, existe h tal que $[x, x+h] \subset (a,c)$, donde los h son suficientemente pequeños para darnos una buena aproximación de la derivada. Sean ε, η números positivos arbitrariamente pequeños.

Para h suficientemente pequeño tenemos

$$\frac{f(x+h)- f(x)}{h} <\eta, \text{ o sea}$$

$$|f(x+h)- f(x)| < \eta h.$$

Sea $[x_k, y_k]$ una colección finita ajena que cubre casi todo E salvo un conjunto A con $mA<\delta$ (donde δ es la correspondiente al ε de la definición de continuidad absoluta).

Consideremos un orden de los intervalos, de modo que

$$y_\circ = a \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n \leq c = x_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - y_k| < \delta \text{ entonces } \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon$$

por la continuidad absoluta. Aplicando 1, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \eta \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \eta\,(c-a);$$

calculemos ahora

$$\begin{aligned}
|f(c)-f(a)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k) + f(y_k) - f(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| + \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| \\
&< \varepsilon + \eta\,(c-a).
\end{aligned}$$

Como ε y η son positivos arbitrarios, tenemos que

$$f(c) - f(a) = 0$$

$f(c) = f(a)$, como c es arbitrario entonces la función es constante.

Teorema.- Una función F es una integral indefinida si y sólo si es absolutamente continua.

Prueba.- Si la función es una integral indefinida ya demostraremos que es absolutamente continua. Faltaría por demostrar que si es absolutamente continua, entonces es una integral indefinida.

Sea F una función absolutamente continua sobre $[a,b]$. Entonces F es de variación acotada y la podemos escribir como

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

donde F_1 y F_2 son funciones crecientes, y así $F'(x)$ existe casi-dondequiera en $[a,b]$ y

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x)$$

$$\int_a^b |F'(x)|dx \leq \int_a^b F_1'(x)dx + \int_a^b F_2'(x)dx \leq F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) < \infty$$

por lo tanto $|F'(x)|$ es integrable y en consecuencia $F'(x)$ también

Sea $G(x) = \int_a^x F'(t)\,dt$, entonces G es absolutamente continua y así $f(x) = F(x) - G(x)$, también es absolutamente continua, y se sigue que

$f'(x) = F'(x) - G'(x) = F'(x) - F'(x) = 0$, entonces $f(x)$ es una constante

$$F(x) = \text{constante} + G(x)$$

Valuando en a, tenemos

$F(a) = \text{constante} + G(a)$, pero $G(a) = 0$.

$F(a) = \text{constante}$, luego

$$F(x) = F(a) + \int_a^b F'(t)\,dt,$$

así, si es absolutamente continua, entonces es una integral indefinida. De esta manera tenemos que cada función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada, luego

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

tenemos así la igualdad si F es absolutamente continua y de esta manera hemos generalizado la parte dos del teorema fundamental del cálculo.

CAPITULO IV
TEOREMA DE RADON Y NIKODYM

Considere la siguiente función de conjunto

$$V(E) = \int_E f(x)dx$$

donde f es una función medible e integrable en cada conjunto compacto. Esta función es completamente aditiva y absolutamente continua, en el sentido de que V(E) tiende a cero con la medida de E. Nuestro propósito es demostrar que la derivada de tal función coincide con f en casi todo punto.

El teorema de Radon y Nikodym afirma que cada función de conjunto no-negativa completamente aditiva y absolutamente continua con respecto de una medida σ-finita, es la integral de una función respecto de dicha medida.

Es decir existe una función f medible no-negativa tal que

$$V(E) = \int_E f dM$$

lo anterior es suficiente porque si v es una medida consideraríamos la parte positiva y negativa de V, y así tendríamos

$$v^+(E) = \int_E f^+ dM \quad \text{y} \quad v^-(E) = \int_E f^- dM$$

donde al menos una de ellas es acotada, luego

$$f(x)= f^{+}(x)- f^{-}(x)$$

Realmente el teorema de Radon y Nikodym es un recíproco restringido de lo siguiente:
Fija una función integrable f, se asocia a cada conjunto medible E, la integral de f en E, definida

$$\int_E f\ dM = \int_x f\ I_E\ dM$$

La función así obtenida puede tomar en caso de no ser acotada los valores $+\infty$ ó $-\infty$ pero sólo uno de ellos. Como puede observarse puede tomar valores positivos y negativos, luego es una medida con signo definida en la misma σ algebra que M.

Si V es la función definida

$$V(E)= \int_E f\ dM$$

donde M es σ-finita, no-negativa y completa, definida sobre una σ-algebra B y la función f es integrable no negativa; entonces es una función completamente aditiva, σ-finita y una medida absolutamente continua respecto M.

Dicho de una manera más simple. Dada una función f medible e integrable, la función de conjunto

$$v(E)= \int_E f\ dM$$

es completamente aditiva y absolutamente continua respecto de M. Ahora dada una medida v que es absolutamente continua respecto de M, ¿existe una función f tal que

$$v(E) = \int_E f \, dM \quad ..$$

La respuesta será afirmativa solo en el caso en que M sea σ-finita, por eso decimos que el teorema de Radon y Nikodym, es un recíproco restringido.

Teorema: Sea M una medida σ-finita, no negativa y completa definida en una σ-algebra B de X, y f una función integrable respecto a M. Para cada medible E sea

$$v(E) = \int_E f \, dM$$

entonces, v es una medida con signo, σ-finita y continua respecto de M.

Demostración: Suponemos oue $f \geq 0$. Si $E = \phi$, entonces $f \cdot I\phi$ se hace cero dondequiera y así

$$v(\phi) = \int_\phi f \, I\phi \, dM = 0$$

además, $v(E) \geq 0$. Ahora demostraremos que v es σ-aditiva

Sea $\{E_n\}$ una sucesión disjunta de conjuntos en B, tal que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad f_n = \sum_{k=1}^{n} f \; I_{E_K}, \text{ así}$$

$$\int f_n \, dM = \int \sum_{k=1}^{n} f \; I_{E_K} \, dM = \sum_{k=1}^{n} \int f \; I_{E_K} \, dM = \sum_{k=1}^{n} v(E_k)$$

luego tenemos que

$$v\left(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right) = \sum_{k=1}^{n} v(E_k)$$

ya que f_n es una sucesión de funciones medibles no-negativas creciente que converge a $f \; I_E$, aplicando el teorema de la convergencia monótona

$$v(E) = \int_E f dM = \int f I_E dM = \int \lim_{n\to\infty} f_n \; dM = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} v(E_k)$$

con lo cual tenemos la σ-aditividad.

Probaremos ahora que la medida v es σ-finita si M lo es. Sea $\{x_k\}$ una descomposición de X, tal que $M(x_k)<\infty$ para k=1,2,.... . Definimos

$$X_{jk} = \{x \varepsilon X_k : f(x) \leq j\} \text{ para } j,k=1,2,3,\ldots \infty,$$

ahora $v(X_{jk}) = \int_{X_{jk}} f \, dM \leq jM(X_{jk}) < \infty$

con lo cual la medida v es σ-finita.

Es continua respecto de M porque si $M(E)=0$, entonces $v(E)=0$. Esto completa la demostración cuando f es no-negativa.

Si f es una función arbitraria integrable respecto a M, consideraremos las partes positiva y negativa de f y definimos

$$v^{+}(E) = \int_E f^{+}\, dM \qquad v^{-}(E) = \int_E f^{-}\, dM$$

para cada medible E y es claro que $v=v^{+}-v^{-}$ y que v^{+} y v^{-} son medidas σ-finitas, no-negativas y continuas respecto de M, y una de ellas al menos es acotada. Por lo tanto v es también σ-finita y continua respecto a M.

Lema: Supóngase que para cada α en un conjunto contable D de números reales, existe asignado un conjunto $B\alpha \varepsilon B$, tal que $B_\alpha c B_\beta$ si $\alpha<\beta$. Entonces existe una función medible de valores reales extendidos f sobre X tal que $f\leq\alpha$ sobre $B\alpha$ y $f\geq\alpha$ sobre $X-B\alpha$.

Prueba: Para cada $x\varepsilon X$, sea $f(x)= \inf \{\alpha \mid x\varepsilon B_\alpha\}$ o sea el índice del primer conjunto que lo contiene. Es evidente que $\inf \phi=\infty$.

Sea $x\varepsilon B\alpha$ y si $B\alpha$ es el primero que contiene a x, tendríamos que $f(x)=\alpha$, pero si no lo es, tendríamos $f(x)<\alpha$, así, si $x\varepsilon B\alpha$, entonces $f(x)\leq\alpha$.

Si $x\notin B\alpha$, entonces $x\varepsilon B_\beta$ para $\beta>\alpha$ porque la sucesión es creciente, así $f(x)>\alpha$, luego

$$\{x|f(x)<\alpha\} \subset B\alpha = \{x|f(x)\leq\alpha\}$$

luego $f(x)\leq\alpha$ para $x\varepsilon B\alpha$ y $f>\alpha$ para $x\varepsilon X-B\alpha$ así tendríamos la afirmación en el caso en que f sea medible, que es lo único que faltaría por demostrar.

Sea α cualquier número real

entonces

$$\{x|f(x)<\alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$$

demostraremos la igualdad:

Si $f(x)<\alpha$, entonces $X\varepsilon B_\beta$ para algún $\beta<\alpha$.

Si $X\varepsilon B_\beta$ para algún $\beta<\alpha$, entonces $f(x)\leq\beta<\alpha$. Luego los conjuntos son iguales y como cada uno de los B_β es medible la unión es medible y así f es medible.

Lema: Supóngase que para cada α en un conjunto contable D de números reales, hay asignado un conjunto $B_\alpha \varepsilon B$ tal que $M(B\alpha - B_\beta)= 0$ para cada $\alpha<\beta$. Entonces existe una función medible f tal que $f\leq\alpha$ c.d sobre $B\alpha$ y $f\geq\alpha$ c.d sobre $X-B\alpha$.

Demostración:

Sea $C= \bigcup_{\alpha<\beta} B\alpha - B_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} (B\alpha - B_\beta)$

$M(C)= M(\bigcup_{\alpha<\beta} (B\alpha - B_\beta)) \leq \sum_{\alpha<\beta} M(B\alpha - B_\beta)= 0$

Sea $B\alpha' = B\alpha \cup C$. Si $\alpha<\beta$, tenemos $B\alpha' - B_\beta' =(B\alpha - B_\beta)- C= \phi$, entonces $B\alpha' \subset B_\beta'$ por el lema anterior, existe una función medible f tal que

$f \leq \alpha$ sobre B'_α y $f \geq \alpha$ sobre $X-B'_\alpha$

así

$f \leq \alpha$ sobre B_α y $f \geq \alpha$ sobre $X-B_\alpha$, excepto por los $X \varepsilon C$, y como C tiene medida cero, tenemos que

$$f \leq \alpha \text{ c.d sobre } B_\alpha \quad y \quad f \geq \alpha \text{ c.d sobre } X-B_\alpha.$$

Teorema: (Radon y Nikodym): Sea (X, B, M) un espacio medible σ-finito, y sea v una medida definida sobre la σ-algebra B, la cual es absolutamente continua respecto a M. Entonces existe una función medible no-negativa f tal que para cada conjunto E en B tenemos

$$v(E) = \int_E f \, dM$$

La función f es única en el sentido de que si g es cualquier función medible con esta propiedad g=f c.d. [M]

Prueba: Suponemos primero que M es finita. Entonces $v-\alpha M$ es una medida signada para cada número racional α.

Sea (A_α, B_α) una descomposición de Hahn para $v-\alpha M$, y tomamos $A_0=X$, $B_0=\phi$ (porque v y M son medidas no-negativas). Ahora, como $B_\alpha - B_\beta = B_\alpha \cdot A_\beta$ tenemos que

$$(v - \alpha M)(B_\alpha - B_\beta) \leq 0 \quad y$$
$$(v - \beta M)(B_\alpha - B_\beta) \geq 0$$

Si $\alpha<\beta$, entonces

$$v(B_\alpha - B_\beta) - \alpha M(B_\alpha - B_\beta) \leqslant 0 \leqslant v(B_\alpha - B_\beta) - \beta M(B_\alpha - B_\beta)$$

$$(\beta - \alpha) M(B_\alpha - B_\beta) \leqslant 0$$

como $\beta - \alpha > 0$, tenemos que $M(B_\alpha - B_\beta) = 0$

Luego existe una función medible f tal que para cada racional α, tenemos $f \geqslant \alpha$ c.d sobre A_α y $f \leqslant \alpha$ c.d sobre B_α. Ya que $B_0 = \phi$, podemos tomar a f como no-negativa.

Sea E un conjunto arbitrario en B, y sea

$$E_k = E \cap (B_{\frac{k+1}{N}} - B_{\frac{k}{N}}), \quad E_\infty = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{k}{N}}$$

entonces $E = E_\infty \cup \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \right]$ por construcción esta es una unión disjunta, luego

$$v(E) = v(E_\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} v(E_k)$$

como $E_k = E \cap (B_{\frac{k+1}{N}} - B_{\frac{k}{N}}) = E \cap (B_{\frac{k+1}{N}} \cap A_{\frac{k}{N}})$

así

$$E_k \subset B_{\frac{k+1}{N}} \quad A_{\frac{k}{N}}$$

luego $\frac{k}{N} \leqslant f \leqslant \frac{k+1}{N}$

$$(1) \quad \frac{k}{N} ME_k \leq \int_{E_k} f \, dM \leq \frac{k+1}{N} M E_k$$

así

$$\frac{k}{N} ME_k \leq vE_k \leq \frac{k+1}{N} M E_k$$

quitando vE_k

$$\frac{k}{N} ME_k - vE_k \leq 0 \leq \frac{k+1}{N} M E_k - vE_k$$

multiplicando por -1

$$vE_k - \frac{k+1}{N} ME_k \leq 0 \leq vE_k - \frac{k}{N} M E_k$$

Sumando con (1)

$$vE_k - \frac{k+1}{N} ME_k + \frac{k}{N} ME_k \leq \int_{E_k} f \, dM \leq vE_k - \frac{k}{N} ME_k + \frac{k+1}{N} ME_k$$

$$(2) \quad vE_k - \frac{1}{N} ME_k \leq \int_{E_k} f \, dM \leq vE_k + \frac{1}{N} ME_k$$

Sobre E_∞, tenemos que $f=\infty$ c.d. Si $ME_\infty>0$ debemos tener $vE_\infty = \infty$ ya que

$$(v-\alpha M)E_\infty > 0 \text{ para cada } \alpha$$

$$vE_\infty - \alpha M E_\infty > 0$$

$$vE_\infty > \alpha ME_\infty$$

Si $ME_\infty = 0$, tenemos que $vE_\infty = 0$, porque $v \ll M$, en cualquier caso

$$vE_\infty = \int_{E_\infty} f \; dM.$$

como
$$vE = v\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} v\,E_k$$

$$ME = M\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} M\,E_k$$

y
$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} f \; sM = \int_{\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k} dM = \int_{E} f \; dM$$

luego
$$\sum_{k=0}^{\infty} \{vE_k - \frac{1}{N} ME_k \leqslant \int_{E_k} f \; dM \leqslant vE_k + \frac{1}{N} ME_k\}$$

$$vE - \frac{1}{N} ME \leqslant \int_E f \; dM \leqslant v\,E + \frac{1}{N} ME$$

ya que ME es finita y N arbitrario, debemos tener

$$vE = \int_E f \; dM$$

La función f es llamada derivada de Radon y Nikodym de v con respecto de M y se denota

$$\left[\frac{dv}{dM}\right] = f.$$

Unicidad. Supongamos g es otra función que cumple con la condición, entonces

$$v(E)= \int_E f \; dM= \int_E g \; dM, \text{ luego}$$

$$(*) \quad 0= \int_E (f-g)\,dM, \qquad E\varepsilon B$$

Sea $E_1= \{x|f(x)>g(x)\}$ y $E_2 = \{x|f(x)<g(x)\}$ como (*) vale para todo $E\epsilon B$ en particular para E_1 y E_2

$$\int_{E_1} (f-g)\,dM= 0 \quad y \quad \int_{E_2} (g-f)\,dM= 0$$

Como $f-g>0$ sobre E_1, entonces $ME_1= 0$

como $g-f>0$ sobre E_2, entonces $ME_2= 0$

$M(E_1 U E_2) \leq ME_1 + ME_2 = 0$, tenemos $M(E_1 U E_2)= 0$

Con lo cual tenemos que $f=g$ c.d $[M]$

Extensión al caso σ-finito.

Supongamos que v y M son σ-finitas y sea x_n una sucesión creciente de conjuntos en B tales que

$$v(X_n) <\infty, \; M(X_n)<\infty$$

Aplicando el argumento anterior obtenemos una función h_n medible positiva la cual se hace cero para $x \notin X_n$, tal que si E es un subconjunto medible de X_n, entonces

$$v(E) = \int_E h_n \, dM$$

Si $n \leq m$, entonces $X_n \subset X_m$ y tenemos que

$$\int_E h_n \, dM = \int_E h_m \, dM$$

luego $h_n = h_m$ c.d $[M]$ sobre X_n cuando $n \leq m$.

Sea $f_n = \text{Sup}\ \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, de modo que f_n es una sucesión monótona creciente de funciones medibles no-negativas y sea

$$f = \lim f_n$$

Si $E \in B$, entonces

$$v(E \cap X_n) = \int_E f_n \chi_{X_n} \, dM = \int_E f_n \, dM.$$

Ya que $E \, X_n$ es una sucesión creciente cuya unión es E, sea

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap X_n = E$$

aplicando el teorema de la convergencia monótona

$$v(E) = \lim_{n \to \infty} v(E \cap X_n) = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, dM = \int_E \lim_{n \to \infty} f_n \, dM = \int_E f \, dM.$$

y así

$$v(E) = \int_E f \, dM$$

con lo cual concluimos la extensión.

Ahora mostraremos un ejemplo donde se observa que es necesario respetar la condición, de σ-finites de la medida sobre la cual se intrega, para afirmar la existencia de la función de la cual habla el teorema de Radon y Nikodym.

Sean dos medidas M y v sobre un espacio medible (X,B) tal que v es absolutamente continua respecto de M y para la cual no existe función f tal que

$$v(E)=\int_E f(x)\, dM, \text{ para todo } E\varepsilon B.$$

Demostración: Sea X=R y sea B la σ-algebra de Lebesque. Para cualquier conjunto $E\varepsilon B$ se define

$$v(E)=\begin{cases} 0 \text{ , si E es contable} \\ \infty \text{ , si E no es contable}\end{cases}$$

$$M(E)=\begin{cases} n \text{ , si E consiste de n puntos, } n\geq 0 \\ \infty \text{ , si E es infinito}\end{cases}$$

Entonces $M(E)=0$, $E=\phi$ y $v(E)=0$, luego v es absolutamente continua respecto de M.

Por otro lado, si f es una función tal que

$$v(E) = \int_E f(X)\, dM$$

Para todos los conjuntos E, entonces se tiene en particular cuando E es un conjunto arbitrario de un punto, $E = \{Y\}$, en cuyo caso

$$v(E) = 0 = \int_E f(x)\,dM = f(y)$$

pero esto significa que la función es idéntica a cero, y que en consecuencia $v(E) = 0$, para cada $E \varepsilon B$, con lo cual tenemos una contradicción, entonces tal función no existe, asi se necesita que M sea σ-finita.

CAPITULO V

TEOREMA DE DIFERENCIACION DE LEBESQUE

El teorema fundamental del cálculo afirma que si

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy \quad (a \leq x \leq b)$$

entonces $F'(x) = f(x)$ si f es continua en x. En esta afirmación se utilizó la integral indefinida como función del punto final, pero cuando consideramos la versión en R^n es más dificil de trabajar; por ello adoptamos la integral indefinida como función de conjunto.

$$F(E) = \int_E f, \text{ donde } E \text{ es un medible tal que } E \subset A \text{ y } f \in L(A).$$

Con lo anterior nos vemos obligados a dar una definición de lo que vamos a entender por función de conjunto.

Función Conjuntista. Es una función de valores reales definida sobre una σ-algebra Σ de conjuntos medibles tal que

1) $F(E)$ es finita para cada conjunto $E \in \Sigma$

2) F es aditiva contable, es decir, si $E = \bigcup_k E_k$

es una función disjunta y $E_k \in \Sigma$, entonces

$$F(E) = F\left(\bigcup_k E_k\right) = \sum_k F(E_k)$$

Teorema de Diferenciación de Lebesque. Sea f $\varepsilon L(R^n)$ y F la integral indefinida

$$F(E)= \int_E f$$

Dado x, sean Q los cubos centrados en x, entonces el promedio

$$\frac{F(Q)}{m\,Q} = \frac{1}{mQ} \int_Q f(y)\,dy$$

converge c.d. a f(x) cuando Q se contrae hacia x. Si converge en x lo escribimos

$$\lim_{Q\to x} \frac{F(Q)}{m\,Q} = \lim_{Q\to x} \frac{1}{mQ} \int_Q f(y)\,dy= f(x), \quad \text{c.d.}$$

Corolario, la versión elemental del teorema anterior diría que si F es Riemann integrable entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy= f(x), \qquad \text{c.d. o sea}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y)\,dy= f(x)$$

Este resultado podía haberse obtenido observando que si f es Riemann integrable entonces el conjunto de discontinuidades tiene medida cero, luego la afirmación del teorema sería en el complemento de ese conjunto de medida cero.

Procederemos a establecer las herramientas que serán usadas en la prueba. Sea

$$f^*(x) = \operatorname{Sup} \frac{1}{mQ} \int_Q |f(y)|dy,$$

donde el sup es tomado sobre todos los cubos con centro en x. Esta función la usaremos para establecer una cota.

Observemos primero que la afirmación anterior, es fácil de probar para funciones continuas. Sea pues f continua y Q un cubo con centro en x, entonces

$$\left| \frac{1}{mQ} \int_Q f(y)\,dy - f(x) \right| = \left| \frac{1}{mQ} \int_Q \left[f(y) - f(x) \right] dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{mQ} \int_Q |f(y) - f(x)|dy \leq \operatorname*{Sup}_{y \varepsilon Q} |f(y) - f(x)|$$

el cual tiende a cero cuando Q se contrae hacia x, porque f es continua en x.

La estrategia de la prueba será aproximarse a la función $f \varepsilon L(R^n)$ por funciones continuas C_k. Será necesario encontrar una manera de calcular el comportamiento local (es decir el promedio) de $f-C_k$, por un estimador global que consiste en calcular el tamaño de f^* en términos de $\int|f|$.

Lema.- Si $f\varepsilon$ (R^n), existe una sucesión $\{C_k\}$ de funciones continuas con soporte compacto tal que

$$\text{A)} \quad \int_{R^n} |f - C_k|\, dx \to 0, \text{ cuando } k\to\infty$$

Prueba.- Si f es una función integrable para la cual la afirmación se tiene, decimos que f tiene la propiedad A. Probaremos el lema condierando una serie especial de casos. Para ayudarnos en el paso de un caso al siguiente, primero mostraremos que

1) Una combinación lineal finita de funciones con la propiedad A, tiene la propiedad A.
2) Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones con la propiedad A, y $\int_{R^n} |f- f_k|\to 0$, entonces f tiene la propiedad A.

Primero vemos que

$0\leqslant \int |af - ac| \leqslant |a| \int |f - c|$, y

$0\leqslant \int |(f_1+f_2) - (C_1+C_2)| \leqslant \int |f_1-C_1|+\int |f_2-C_2|$

de donde, si f tiene la propiedad A, también af, y si f_1 y f_2 tienen la propiedad A, también $f_1 + f_2$.

Probaremos (2). Sean $\{f_k\}$ y f, funciones que satisfacen las hipótesis de (2). Ya que f_k es integrable y

$$\int|f| = \int|f - f_k + f_k| \leq \int|f - f_k| + \int|f_k|,$$

tenemos que f es integrable.

Dado $\varepsilon>0$, elegimos k_o de manera que

$$\int|f - f_{k_o}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, elegimos una función C continua, con soporte compacto tal que

$$\int|f_{k_o} - C| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$\int|f-c| = \int|f-f_{k_o} + f_{k_o} - c| \leq \int|f-f_{k_o}| + \int|f_{k_o} - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y observamos que f tiene la propiedad A.

Para probar el lema, sea $f \in L(R^n)$. Escribimos $f = f^+ - f^-$ y podemos suponer por (1) que $f \geq 0$. Luego existe una sucesión de funciones simples no-negativas $f_k \uparrow f$. Asi $f_k \in L(R^n)$ y $\int|f - f_k| \to 0$ y por (2) podamos suponer que $f = X_E$, $mE<\infty$.

Dado $\varepsilon>0$ elegimos un abierto G tal que $E \subset G$ y $m(G-E)<\varepsilon$. Entonces

$$\int |X_G - X_E| = m(G - E) < \varepsilon$$

así, podemos suponer que f= X_G para un abierto G con m $G<\infty$. Como

$$G= \cup I_k \text{ (donde los } I_k \text{ son intervalos abiertos disjuntos)}$$

entonces sea f_N la función característica de $\bigcup_{k=1}^{N} I_k$, como

$$\int |f - f_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} mI_k \to 0, \text{ ya que } \sum_{k=1}^{\infty} mI_k = mG<\infty$$

por (2), es suficiente probar que cada f_N tiene la propiedad A. Pero f_N es la suma de X_{I_k}, $k=1,2,\ldots,N$, es suficiente por (1) mostrar que la función característica de cualquier intervalo I tiene la propiedad A. Si I* denota un intervalo el cual contiene la cerradura de I y satisface $m(I^*-I)<\varepsilon$, entonces para cualquier función continua C, $0\leq c\leq 1$, la cual es 1 en I y cero fura de I*, tenemos

$$\int |X_I-C| \leq \quad m(I^*-I)<\varepsilon$$

lo cual completa la prueba.

Lema.- Sea E un subconjunto de R^n, con m_e $E<\varepsilon$, y sea K una colección de cubos Q que cubren a E. Entonces existe una constante positiva β que depende solamente de n, y un número finito de cubos disjuntos $Q_1,Q_2,\ldots,Q_N$ en K tales tales que

$$\sum_{j=1}^{N} m\, Q_j \geqslant \beta\, m_e E.$$

Prueba.- Indicaremos el tamaño del cubo Q escribiendo $Q= Q(t)$ donde t es la longitud de la orilla del cubo.
Sea $K_1=k$ y

$$t_1^*= \sup \{t: \; Q = Q(t) \in k_1\}$$

Si $t_1^*= \infty$, entonces k_1 contiene una sucesión de cubos Q tales que $mQ\to\infty$. En este caso, tomemos β como cualquier número mayor que cero y simplemente elegimos un $Q\varepsilon k_1$ tal que

$$mQ \geqslant \beta \; m_e E.$$

Si $t_1^*<\infty$, la idea es seleccionar un cubo relativamente grande. Elegimos $Q_1=Q_1(t_1)\varepsilon k_1$ tal que $t_1> \frac{1}{2} t_1^*$

0

$$\frac{1}{2} t_1^* < t_1 \quad t_1^*$$

ahora separemos $K_1= K_2 \cup K_2'$, donde K_2 consiste de aquellos cubos en K_1 los cuales son disjuntos de Q_1.

Sea Q_1^* un cubo concentrico con Q_1, cuya longitud de la orilla es $5t_1$. Así $m\, Q_1^*= 5^n mQ_1$ y, ya que $2t_1>t_1^*$ cada cubo en K_2' esta contenido en Q_1^*.

Comenzando con k=2, continuamos este proceso de selección para j=1,2,..., permitiendo que

$$t_j^* = \sup\{t: Q= Q(t) \varepsilon\ k_j\}.$$

elegimos un cubo $Q_j= Q_j(t_j) \varepsilon\ k_j$, tal que $t_j > \frac{1}{2} t_j^*$ y separando $K_j= K_{j+1} \cup K'_{j+1}$ donde K_{j+1} consiste de todos aquellos cubos de k_j los cuales son ajenos de Q_j. Si k_{j+1} es vacía el proceso termina. Tenemos que $t_j^* \geq t_{j+1}^*$ (por la forma en que se obtuvieron); más aún para cada j, los $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j$ son ajenos uno de otro y cada cubo en K'_{j+1} esta contenido en el cubo Q_j^* concentrico con Q_j, cuya longitud es $5t_j$. Note que $mQ_j^*= 5^n mQ_j$

Sea la sucesión $t_1^* \geq t_2^* \geq t_3^* \geq \ldots$. Si algún K_{n+1} es vacío (esto es $t_j^* =0$, para $j \geq n+1$), entonces ya que

$$K_1= K_2 \cup K'_2= K_3 \cup K'_3 \cup K'_2= K_4 \cup K'_4 \cup K'_3 \cup K'_2= \ldots.$$
$$= K_{n+1} \cup K'_{n+1} \cup K'_n \cup \ldots \cup K'_3 \cup K'_2$$

y E esta cubierto por los cubos en K_1, se sigue que E esta cubierto por los cubos en $K'_{n+1} \cup K'_n \cup \ldots \cup K'_j \cup K'_2$. Ya que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q_j^* ,$$

entonces

$$m_e E \leq \sum_{j=1}^{N} mQ_j^* = 5^n \sum_{j=1}^{N} m\, Q_j$$

tomando $\beta=5^{-n}$, tendremos

$$\sum_{j=1}^{N} m\, Q_j \geqslant \beta \; m_e E$$

Por otro lado si t_j^* no es cero, entonces se da uno de los dos casos siguientes

1) Existe un $\delta>0$, tal que $t_j^*>\delta$ para toda j

2) $t_j^* \to 0$

En el primer caso $t_j \geqslant \frac{1}{2}\delta$ para toda j y en consecuencia

$$\sum_{j=1}^{N} mQ_j \to\infty, \text{ cuando } N\to\infty, \text{ y}$$

dado cualquier $\beta>0$, el lema se sigue eligiendo N suficientemente grande.

En el segundo caso, exigimos que cada cubo en K_1 este contenido en $\bigcup_j Q_j^*$, de otra manera existiría un cubo $Q=Q(t)$ que no intersecta a ningún Q_j. Ya que este cubo debe pertenecer a K_j para cada j, t debe satisfacer $t<t_j$ para cada j

y en consecuencia t=0. Esta contradicción establece lo que exigimos.

Ya que E esta cubierto por los cubos en K_1, se sigue que

$$m_e E \leq \sum_j mQ_j^* = 5^n \sum_j mQ_j$$

De aquí, dado β, tal que $0<\beta< \frac{1}{5^n}$, existe un N tal que

$$\beta\, m_e E \leq \sum_{j=1}^{N} mQ_j.$$

con lo cual completamos la prueba.

Recordemos la desigualdad de Tchebyshev

$$m\{X\varepsilon R^n: |f(x)|> \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \int_{R^n}|f(x)|dx$$

De aquí, si f ε $L(R^n)$, entonces existe una constante c independiente de α tal que

$$m\{X\varepsilon R^n: | f(x)|> \alpha\} \leq \frac{c}{\alpha}, \quad (\alpha>0)$$

Cualquier función medible integrable o no que cumple la desigualdad anterior se dice que pertenece al espacio débil $L(R^n)$

Lema.- (Hardy-Littlewood). Si $f \varepsilon L(R^n)$, entonces f^* pertenece al espacio débil $L(R^n)$. Más aún, existe una constante c independiente de f y α tal que

$$m\{X \varepsilon R^n: f^*(x) > \alpha\} \leq \frac{c}{\alpha} \int_{R^n} |f|, \quad \alpha > 0$$

Prueba.- Supondremos además de que f sea integrable, que tiene soporte compacto.

El conjunto $\{f^* > \alpha\}$ tiene medida finita, porque de otra manera f no sería integrable. Fijamos $\alpha > 0$ y sea

$$E = \{f^* > \alpha\}$$

Si $x \varepsilon E$, entonces por definición de E y f^*, existe un cubo Q_x con centro en x tal que

$$\frac{1}{mQ_x} \int_{Q_x} |f| > \alpha$$

$$mQ_x < \frac{1}{\alpha} \int_{Q_x} |f|$$

la colección de tales Q_x cubre E, entonces existe un $\beta > 0$ y $x_1, x_2, \ldots, x_N$ en E, tales que $Q_{x_1}, Q_{x_2}, \ldots, Q_{x_N}$ son ajenos y

$$mE < \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \int_{Q_{x_j}} |f| = \frac{1}{\beta\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{N} Q_{x_i}} |f| \leq \frac{1}{\beta\alpha} \int_{R^n} |f|$$

esto prueba el resultado para tal f con $c = \beta^{-1}$.

PRUEBA DEL TEOREMA DE LEBESQUE

Dado $f \in L(R^n)$ existe una sucesión de funciones integrables continuas C_k tal que

$$\int_{R^n} |f - C_k| \to 0, \text{ cuando } k \to \infty$$

sea $F(Q) = \int_Q f$ y $F_k(Q) = \int_Q C_k$

entonces para cualquier k.

$$\overline{\lim_{Q \to x}} \sup \left| \frac{F(Q)}{m\,Q} - f(x) \right| \leqslant \overline{\lim_{Q \to x}} \sup \left| \frac{F(Q)}{m\,Q} - \frac{F_k(Q)}{m\,Q} \right|$$

$$+ \lim_{Q \to x} \sup \left| \frac{F_k(Q)}{m\,Q} - C_k(x) \right| + \left| C_k(x) - f(x) \right|$$

donde el límite superior es tomado sobre todos los cubos Q con centro en x que se contraen hacia x. Ya que C_k es continua el segundo término de la derecha es cero. Además

$$\left| \frac{F(Q)}{m\,Q} - \frac{F_k(Q)}{m\,Q} \right| = \frac{1}{mQ} \left| F(Q) - F_k(Q) \right| = \frac{1}{mQ} \left| \int_Q f - \int_Q C_k \right|$$

$$= \frac{1}{mQ} \left| \int_Q (f - C_k) \right| \leqslant \frac{1}{mQ} \int_Q \left| f - C_k \right| \leqslant (f - C_k)^*(x)$$

y en consecuencia el primer término de la derecha esta acotado por $(f - C_k)^*(x)$.

Así para cada k tendremos

$$\lim_{Q\to x} \sup \left| \frac{F(Q)}{m\,Q} - f(x) \right| \leq (f - C_k)^*(x) + \left| f(x) - C_k(x) \right|$$

Dado $\varepsilon>0$, sea E_ε el conjunto sobre el cual el lado izquierdo excede a ε.

$$E_\varepsilon \subset \{x:\ (f - C_k)^*(x) > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x:\ |f(x) - C_k(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

Aplicando el lema de Hardy-Littlewood al primer conjunto de la derecha y la desigualdad de Techebyshev al segundo tenemos

$$m\{x\varepsilon R^n:\ (f - C_k)^* > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \leq c(\tfrac{\varepsilon}{2})^{-1} \int_{R^n} |f - C_k|$$

y

$$m\{x\varepsilon R^n:\ |f(x) - C_k(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \leq (\tfrac{\varepsilon}{2})^{-1} \int_{R^n} |f(x) - C_k(x)|$$

$$m_e\, E_\varepsilon \leq c(\tfrac{\varepsilon}{2})^{-1} \int_{R^n} |f - C_k| + (\tfrac{\varepsilon}{2})^{-1} \int_{R^n} |f - C_k|$$

ya que C es independiente de K se sigue permitiendo que $k\to\infty$, que $mE_{\varepsilon=0}$.

Sea E el conjunto donde el lado izquierdo es positivo. Entonces $E = \bigcup_k E_{\varepsilon_k}$ para cualquier sucesión de $\varepsilon_k \to 0$, en consecuencia m E=0

Así

$$\lim_{Q \to x} \frac{1}{mQ} \int_Q f(y)\,dy = f(x), \text{ c.d.}$$

Ahora realizaremos varias extensiones y corolarios del teorema de diferenciación de Lebesque.

Definición.- Una función medible f definida sobre R^n se dice localmente integrable sobre R^n si es integrable sobre cada subconjunto medible acotado.

Teorema: La conclusión del teorema de Lebesque es válida si en lugar de ser integrable, f es localmente integrable sobre R^n.

Prueba.- Es suficiente mostrar que la conclusión se tiene casi-dondequiera sobre cada bola abierta. Fijamos una bola y reemplazamos f por cero fuera de ella. Esta nueva función es integrable sobre R^n y su integral es diferenciable casi-dondequiera y, ya que la diferenciabilidad es una propiedad local, la función inicial f es diferenciable casi-dondequiera sobre la bola. Esto completa la prueba.

Ahora observemos que si E es un conjunto medible

$$\frac{1}{mQ}\int_Q \chi_E = \frac{m(E \cap Q)}{mQ}, \quad \text{luego}$$

$$\lim_{Q\to x} \frac{1}{mQ}\int_Q \chi_E = \lim_{Q\to x} \frac{m(E \cap Q)}{mQ} = \chi_E(x) \quad \text{c.d.}$$

Un punto en el cual el límite es 1 es llamado punto de densidad y un punto para el cual el límite es cero es llamado punto de dispersión de E. Como $\frac{m(Q\cap E)}{mQ} + \frac{m(Q\cap E^c)}{mQ} = 1$, tenemos que cada punto de densidad de E, es un punto de dispersión del complemento y viceversa. Hemos mostrado que

Teorema.- Sea E un conjunto medible. Entonces casi-todo punto de E es un punto de densidad de E.

Definición: Un punto x en el cual la afirmación

$$\lim_{Q\to x} \frac{1}{mQ}\int_Q |f(y) - f(x) \quad dy| = 0$$

es llamado punto de Lebesgue de f, y la colección de todos sus puntos es llamado conjunto de Lebesgue de f.

Teorema.- Sea f localmente integable sobre R^n. Entonces casi-todo punto de R^n es un punto de Lebesgue de f; esto es, existe un conjunto Z (que depende de f) de medida cero tal que

$$\lim_{Q\to x} \frac{1}{mQ}\int_Q |f(y) - f(x)|\, dy = 0$$

se tiene para $x \notin Z$.

Prueba.- Sea $\{\gamma_k\}$ los números racionales, y sea Z_k el conjunto donde la fórmula

$$\lim_{Q\to x} \frac{1}{mQ} \int |f(y) - \gamma_k|\, dy = |f(x) - \gamma_k|$$

no es válida. Ya que $|f(y) - \gamma_k|$ es localmente integrable, tenemos que $mZ_{k=0}$. Sea $Z= \cup Z_k$; entonces $mZ=0$.

Para cualquier Q, x, y γ_k

$$\frac{1}{mQ} \int_Q |f(y)-f(x)|dy \leq \frac{1}{mQ} \int_Q |f(y)- \gamma_k|dy + \frac{1}{mQ} \int |f(x)- \gamma_k|dy$$

$$= \frac{1}{mQ} \int_Q |f(y)- \gamma_k|dy + |f(x)- \gamma_k|$$

para $x \notin Z$.

$$\limsup_{Q\to x} \frac{1}{mQ} \int_Q |f(y)-f(x)|dy \leq 2|f(x)- \gamma_k|$$

para cada γ_k. Para un x en la cual $f(x)$ es finita (en particular casi-dondequiera) podemos elegir γ_k tal que $|f(x)-\gamma_k|$ sea arbitrariamente pequeño. Esto muestra que

$$\limsup_{Q\to x} \frac{1}{mQ} \int_Q |f(y)-f(x)|\, dy= 0$$

para casi-todo el conjunto.

Así como los conjuntos que se contraen hacia x, son cubos centrados en x con sus cortes paralelos a los ejes coordenados, muchos otros conjuntos pueden ser usados.

Definición.- Una familia $\{S\}$ de conjuntos medibles se dice que se contrae regularmente hacia x si

1) Los diámetros de los conjuntos S tienden a cero
2) Sea Q es el cubo más pequeño con centro en x, el cual contiene a S, existe una constante K independiente de S, tal que

$$m\, Q \leq k\, m\, (S)$$

Nótese que los conjuntos S no necesitan contener a x.

Teorema.- Sea f localmente integrable en R^n. Entonces en cada punto x del conjunto de Lebesque de f (en particular casi-dondequiera).

$$\frac{1}{mS} \int_S |f(y)-f(x)|dy \to 0$$

para cualquier familia la cual se contrae regularmente hacia x. Así también

$$\frac{1}{mQ}\int_S f(y)\,dy \longrightarrow f(x) \qquad \text{casi-dondequiera}$$

Prueba.- Si S C Q, tenemos

$$\int_S |f(y)-f(x)|\,dy \leq \int_Q |f(y)-f(x)|\,dy$$

de aquí si {S} se contrae regularmente hacia x, y Q es el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S, entonces

$$\frac{1}{mS}\int_S |f(y)-f(x)|\,dy \leq \frac{mQ}{mSmQ}\int_Q |f(y)-f(x)|\,dy$$

$$\leq \frac{k}{mQ}\int_Q |f(y)-f(x)|\,dy$$

si x es un punto de Lebesque, la última expresión tiende a cero, y se sigue el teorema (nótese que el valor de k puede variar de punto a punto).

En particular si la función es de una sola variable

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy = f(x) \qquad \text{c.d.}$$

CAPITULO VI

EL TEOREMA FUNDAMENTAL Y MEDIDA DE BOREL

En el capítulo anterior, nuestros esfuerzos estuvieron dirigidos a caracterizar las funciones tales que cumplen con la relación

$$F(x)- F(a)= \int_a^x F'(t)dt$$

usando la integral de Lebesgue. Ahora generalizaremos la relación al considerar la integral de Lebesgue Stieltjes. De esta manera, queremos caracterizar las funciones tales que cumplen con la relación

$$f(b)-f(a)= \int_a^b \frac{df}{d\phi}\, dM\phi,$$

donde ϕ es una función creciente sobre $[a,b]$ y $M\phi$ es la medida asociada con ϕ.

Lo anterior lo realizaremos en 3 teoremas.

Teorema 1.- Si f y ϕ son crecientes sobre $[a,b]$, $\frac{df}{d\phi}$ es finita $M\phi$-c. sobre $[a,b]$.

Teorema 2.- Si f es $M\phi$-integrable sobre $[a,b]$ y

$$F(x)= \int_a^x f dM\phi, \text{ entonces } \frac{dF}{d\phi} = f, M\phi\text{-c.d. sobre}$$

$[a,b]$.

Teorema 3.- Si f es creciente y absolutamente continua, respecto a una función creciente ϕ sobre $[a,b]$, entonces

$$f(x+0)- \quad f(a+0)= \int_{(a,x]} \frac{df}{d\phi} dM\phi,$$

como puede observarse en la última fórmula, si la función $\phi(x)=x-a$, tenemos que $M\phi$ es la medida de Lebesgue, y tendremos así el resultado clásico.

Antes de continuar daremos algunas definiciones, y generalizaremos el concepto de continuidad absoluta.

Definición.- La derivada de f con respecto a ϕ en x_o es d, si para $\varepsilon>o$ existe un intervalo abierto (u,v) que contenga a x_o tal que, para $x_o \varepsilon (x,y) c (u,v)$ se tiene

$$\left| \frac{f(y)- f(x)}{\phi(y)- \phi(x)} -d \right| < \varepsilon$$

Si d existe, escribimos

$$\lim_{x_0} \frac{f(y)- \; f(x)}{\phi(y)- \; \phi(x)} = d = \left.\frac{df}{d\phi}\right|_{x_0}$$

Si f y ϕ son crecientes en $[a,b]$ y $E(\phi)$ es el conjunto de discontinuidaes de ϕ, entonces, con el ánimo de extender el dominio de la derivada, definimos

$$\left.\frac{df}{d\phi}\right|_{x_0} = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+0)- f(x_0-0)}{\phi(x_0+0)- \phi(x_0-0)}, & \text{si } x_0 \varepsilon E(\phi) \\[2ex] \lim\limits_{y\to x_0} \dfrac{f(x)- \; f(x_0)}{\phi(y)- \; \phi(x_0)}, & \text{si el límite existe} \end{cases}$$

De acuerdo con el uso común, sea $\phi(I)= \phi(b)- \phi(a)$, donde $I=(a,b)$.

Definición.- Para cualquier función creciente ϕ sobre $[a,b]$ y $AC(a,b)$ sea

$$M_\phi(A)= \inf\{\sum_n \phi(I_n) \mid AC \bigcup_n I_n\}$$

Así tenemos una función conjuntista, tal que a cada conjunto A le asocia al número $M_\phi(A)$, donde A es un subconjunto de Borel de (a,b). Esta función conjuntista es la medida de Borel asociada a ϕ.

Definición.- Es natural considerar equivalentes, en una intervalo $[a,b]$ en su crecimiento, a dos funciones crecientes ϕ y ψ si:

a) Tienen el mismo conjunto E_d de discontinuidades

b) Su diferencia $\phi(x)-\psi(x)$ es constante en $(a,b)-E_d$.

Luego cabe hacer la siguiente observación: Dos funciones crecientes ϕ y ψ sobre $[a,b]$ son equivalentes si y solo si $M\phi(A)=M\psi(A)$ para todo subconjunto de Borel A de (a,b). De lo anterior se concluye fácilmente que $\phi^{+}(x)=\phi(X+0)$, $\phi^{-}(x)=\phi(x-0)$, son equivalentes a ϕ.

Definición.- Una función f es absolutamente continua respecto a una función creciente ϕ sobre $[a,b]$, si para $\varepsilon>o$, existe $\delta>0$ tal que

$$\sum_n |f(I_n)|<\varepsilon$$

Para toda sucesión de disjuntos $I_n C\ [a,b]$, para los cuales

$$\sum_n \phi(I_n) <\delta.$$

En otras palabras, la variación de la función f tiende a cero, cuando la variación de la función ϕ tiende a cero.

De lo anterior podemos concluir que, si E(f) es conjunto de discontinuidades de f y f es absolutamente continua respecto a una función creciente ϕ, entonces

$$M\phi(A)=0 \quad \text{implica} \quad M_f(A)=0$$

DISCUSION DE LA PRUEBA DEL TEOREMA 1

Las ideas de la prueba de Riesz del teoremam de que una función monótona es diferenciable casi-dondequiera son centrales en la prueba del teorema 1. Es necesario hacer una observación, el teorema sobre la cubierta de Vitali no es útil para medidas $M\phi$ tales que $E(\phi) \neq$ vacío, porque la idea central es que podemos cubrir "por dentro" casi todo el conjunto, para el cual se tiene una medida exterior finita, lo cual no es siempre posible en la medida de Borel ya que si "a" es un punto de discontinuidad de ϕ, entonces $M_\phi(\{a\})= \phi(a+0)- \phi(a-0)$; y es claro que, no podemos cubrir el conjunto $\{a\}$ "por dentro", con una unión finita ajena de intervalos. Lo cual es una de - las principales dificultades.

Sea f, ϕ funciones crecientes sobre $[a,b]$ y $E(f)$, $E(\phi)$ sus conjuntos de discontinuidades. Sea F cualquiera de, las funciones f, $f^+(x) = f(x+0)$, $f^-(x) = f(x-0)$ y sea ϕ cualquiera de ϕ, ϕ^+ y ϕ^-.

Consideremos las derivadas de Dini.

$$D_R^{\phi}F(x) = \inf_{x<\beta} \sup_{x<y<\beta} \frac{F(y) - F(x)}{\phi(y) - \phi(x)}$$

$$D_r^{\phi}F(x) = \sup_{x<\beta} \inf_{x<y<\beta} \frac{F(y) - F(x)}{\phi(y) - \phi(x)}$$

$$D_L^{\phi}f(x) = \inf_{\alpha<x} \sup_{\alpha<y<x} \frac{F(y) - F(x)}{\phi(y) - \phi(x)}$$

$$D_l^{\phi}F(x) = \sup_{\alpha<x} \inf_{\alpha<y<x} \frac{F(y) - F(x)}{\phi(y) - \phi(x)}$$

Para $x \in [a,b]$, sea $C_x = \{y \mid \phi(y) = \phi(x)\}$. Sea $\lambda_x = \inf C_x \leq x \leq \sup C_x = \rho_x$. El conjunto de intervalos abiertos disjuntos no vacíos (λ_n, ρ_n) es contable. Sea

$$C(\phi) = \bigcup_n (\lambda_n, \rho_n), \qquad C^*(\phi) = \bigcup_n [\lambda_n, \rho_n]$$

Con lo cual, separamos el intervalo $[a,b]$ en $C(\phi)$, donde ϕ tiene un comportamiento constante y $[a,b] - C(\phi)$ donde no lo tiene, y como $M\phi(A)$ realmente mide el crecimiento de ϕ en A, tenemos la siguiente proposición

Proposición 1.- $M\phi(C(\phi))=0$ y si $x\varepsilon\left[(a,b) - C^*(\phi)\right]$ y $a \leq y'<x<y''<b$, entonces $\phi(y') < \phi(x) < \phi(y'')$

Prueba:

Ya que ϕ es constante sobre cada (λ_n,ρ_n), tenemos que

$$M\phi((\lambda_n,\rho_n))= 0 \quad \text{y así}$$

$$M\phi(C(\phi))= M\phi(\underset{n}{U}(\lambda_n,\rho_n))= \sum_n M\phi((\lambda_n,\rho_n))= 0$$

Supongamos lo contrario, o sea supongamos que

$$\phi(y')= \phi(x)= \phi(y''), \text{ luego si}$$

$$\phi(y')= \phi(x), \text{ entonces } \lambda_x \leq y'<x\leq \rho_x$$
$$\phi(y'')= \phi(x), \text{ entonces } \lambda_x \leq x <y''\leq \rho_x$$

Pero en uno, u otro caso tenemos que $x\varepsilon\left[\lambda_n,\rho_n\right]$ para algún n, contrario a la forma en que se eligió, luego la afirmación es verdadera.

Proposición 2.- Si $x\varepsilon(a,b)-(E(f)UE(\phi))UC^*(\phi))$, entonces

$$0\leqslant D_1^{\phi^-} f^+(x)\leqslant D_1^{\phi} f(x)\leqslant D_L^{\phi} f(x)\leqslant D_L^{\phi+}f^-(x)\leqslant \infty$$

$$0\leqslant D_r^{\phi+}f^-(x)\leqslant D_r^{\phi} f(x)\leqslant D_R^{\phi} f(x)\leqslant D_R^{\phi-}f^+(x)\leqslant \infty$$

Prueba: Supóngase que $x\varepsilon(y',y'')\,c(\alpha,\beta)c(a,b)$. De la hipó-tesis y la proposición 1

$$f^-(y')\leqslant f(y')\leqslant f^-(x)=f(x)=f^+(x)\leqslant f(y'')\leqslant f^+(y'')$$
$$\phi^-(y')\leqslant\phi(y')<\phi^-(x)=\phi(x)=\phi^+(x)<\phi(y'')\leqslant\phi^+(y'')$$

luego tenemos

$$0\leqslant \frac{f^+(x)-f^+(y')}{\phi^-(x)-\phi^-(y')}\leqslant\frac{f(x)-f(y')}{\phi(x)-\phi(y')}\leqslant\frac{f^-(x)-f^-(y')}{\phi^+(x)-\phi^+(y')}\leqslant\infty$$

$$0\leqslant \frac{f^-(y'')-f^-(x)}{\phi^+(y'')-\phi^+(x)}\leqslant\frac{f(y'')-f(x)}{\phi(y'')-\phi(x)}\leqslant\frac{f^+(y'')-f^+(x)}{\phi^-(y'')-\phi^-(x)}\leqslant\infty$$

Aplicando las definiciones, tenemos

$$0\leqslant \overset{\phi^-}{\underset{1}{D}} f^+(x)\leqslant \overset{\phi}{\underset{1}{D}} f(x)\leqslant \overset{\phi}{\underset{L}{D}} f(x)\leqslant \overset{\phi^+}{\underset{L}{D}} f^-(x)\leqslant\infty$$
$$0\leqslant \overset{\phi^+}{\underset{r}{D}} f^-(x)\leqslant \overset{\phi}{\underset{r}{D}} f(x)\leqslant \overset{\phi}{\underset{R}{D}} f(x)\leqslant \overset{\phi^-}{\underset{R}{D}} f^+(x)\leqslant\infty$$

Ahora como nuestro objetivo es demostrar que el conjunto donde la derivada no existe, o es infinita, entonces tiene $M\phi$ medida cero, definiremos los siguientes conjuntos, los cuales nos servirán para tal propósito. A los siguientes conjuntos los llamaremos conjuntos de Riesz.

Sea

$$E^{\phi^-}_{l,R}(f^+) = \{x\varepsilon(a,b) \mid D^{\phi^-}_{l} f^+(x) < D^{\phi^-}_{R} f^+(x)\}$$

$$E^{\phi^+}_{r,L}(f^-) = \{x\varepsilon(a,b) \mid D^{\phi^+}_{r} f^-(x) < D^{\phi^+}_{L} f^-(x)\}$$

$$E^{\phi^-}_{R,\infty}(f^+) = \{x\varepsilon(a,b) \mid D^{\phi^-}_{R} f^+(x) = \infty\}$$

también consideremos el conjunto

$$E = [E(\phi)] \cup [E(f)] \cup [C^*(\phi)] \cup [E^{\phi^-}_{\ell,R}(f^+)] \cup [E^{\phi^+}_{r,L}(f^-)] \cup [E^{\phi^-}_{R,\infty}(f^+)]$$

Primero, demostraremos que la derivada existe y es finita en en $(a,b)- (E-E(\phi))$ y después demostraremos que $E- E(\phi)$ tiene $M\phi$-medida cero

Proposición 3.- Si $x\varepsilon[(a,b)- (E - E(\phi))]$, entonces $\left.\frac{df}{d\phi}\right|_x$ es finita.

Prueba.- Por la definición de los conjuntos de RiEsz y la proposición 2, si $x\varepsilon(a,b) - E$

$$0 \leq D_R^{\phi^-} f^+(x) \leq D_\ell^{\phi^-} f^+(x) \leq D_L^{\phi} f_-(x) \leq D_L^{\phi^+} f^-(x) \leq D_r^{\phi^+} f^-(x)$$

$$\leq D_r^{\phi} f(x) \leq D_R^{\phi} f(x) \leq D_R^{\phi^-} f^+(x) < \infty$$

Así las 4 derivadas de Dini en x de f con respecto a ϕ son iguales a

$$D_R^{\phi^-} f^+(x),$$

y ya que $x \notin E_{R,\infty}^{\phi^-}(f^+)$, siendo entonces

$$0 \leq \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{\phi(y) - \phi(x)} < +\infty$$

Y ya que tenemos definida la derivada, en el conjunto de puntos de discontinuidad de ϕ, como el cociente de los saltos, podemos agregar este conjunto, $E(\phi)$ al conjunto anterior donde la derivada existe y es finita, y asi tendremos que

$$0 \leq \left.\frac{df}{d\phi}\right|_x < +\infty \text{ , para } x \in (a,b) - (E - E(\phi))$$

Proposición 4.- $M\phi[((E(f) \cup C^*(\phi)) - E(\phi))] = 0$

Prueba: Usando el hecho de que, una función creciente de

KK-T842

finida en un intervalo [a,b], tiene a lo sumo un conjunto numerable de discontinuidades, tenemos que los conjuntos $E(f)-E(\phi)$ y $[C^*(\phi)-C(\phi)]-E(\phi)$ son contables y la función ϕ es continua, luego

$$M\phi(E(f)-E(\phi)) = M\phi([C^*(\phi)-C(\phi)]-E(\phi)) = 0$$

$$(E(f) \cup C^*(\phi))-E(\phi)=[E(f)-E(\phi)] \cup [C(\phi)] \cup [(C^*(\phi)-C(\phi))-E(\phi)].$$

y como

$$M\phi\ (C(\phi))=0, \text{ tenemos}$$

$$M\phi\ ([E(f) \cup C^*(\phi)]-E(\phi)) = 0$$

Mencionaremos ahora el usado lema de Riesz

Proposición 5.- Si $g(x+0)$, $g(x-0)$ existen sobre $[\alpha,\beta]$ y $g(x)=\max\{g(x+0), g(x-0)\}$, entonces existen susceciones de intervalos abiertos disjuntos (a_n, b_n), (c_n, d_n) de (α,β) tal que

$$\{x\varepsilon(\alpha,\beta) \mid g(y)>g(x) \text{ para alguna } y\varepsilon(\alpha,x)\} = \bigcup_n (a_n,b_n), \text{ y } g(a_n) \geq g(b_n-0) \text{ para toda n.}$$

Estamos afirmando que el conjunto donde es decreciente es un abierto.

Análogamente

$\{x\varepsilon(\alpha,\beta) \mid g(y)>g(x)$ para algún $y\varepsilon\ (x,\beta)\} = \bigcup\limits_n ((c_n,d_n)$, y $g(c_n+0)\leq g(d_n)$ para toda n.

Estamos afirmando que el conjunto donde es creciente es un a bierto. La demostración es idéntica a la usada con la proposición de que un abierto es la unión numerable de intervalos abiertos ajenos.

Nota.- Si ϕ y ψ son crecientes sobre $[\alpha,\beta]$ existen sucesiones $\{a_k\}$, $\{b_k\} \subset (\alpha,\beta)$ tales que $a_k\downarrow\alpha$, $b_k\uparrow\beta$ y ϕ y ψ son continuas en cada a_k, b_k. Los intervalos $I_k = (a_k, a_{k-1})$, donde $a_\circ=\beta$ son disjuntos y también lo son $J_k = (b_{k-1}, b_k)$ donde $b_\circ=\alpha$.

Además

$$\psi(\beta)-\psi(\alpha+0)= \sum_k\psi(I_k)$$

$$\psi(\beta-0)-\psi(\alpha)= \sum_k\psi(J_k)$$

$$M\phi(\{a_k \mid k\varepsilon N\}) = M\phi(\{b_k \mid k\varepsilon N\}) = 0$$

$$(\alpha,\beta)=[\bigcup_k I_k] \cup \{a_k \mid k\varepsilon N\}= [\bigcup_k J_k] \cup \{b_k \mid k\varepsilon N\}.$$

Nota.- Para $t>0$, $g_t(x)= f^+(x) - t\,\phi^-(x)$ satisface las hipótesis de la proposición 5 sobre $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$.

Definición: Si $I=(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ definimos

$$E^I_{u,v} = \{x\in I \mid D_l^{\phi^-} f^+(x) < u < v < D_R^{\phi^-} f^+(x)\}$$

Proposición 6.- Si $I=(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ existen $M\subset I$ y un conjunto contable S de subintervalos J_k disjuntos de I tales que

$$M_{\phi^-}(M) = 0,\ \text{y } S \text{ cubre} \left[E^I_{u,v} - M\right] \text{ y}$$

$$\sum_{J_k\in S} \phi^-(J_k) \leq \frac{u}{v}\,\phi^-(I)$$

Prueba.- Para $x\in E^I_{u,v}$, $D_l^{\phi^-} f^+(x)<u$, de donde

$$\frac{f^+(y)- f^+(x)}{\phi^-(y)- \phi^-(x)} < u \text{ para algún } y\in(\alpha,x)$$

así

$$f^+(y)- f^+(x) > u\,(\phi^-(y) - \phi^-(x))$$

$$f^+(y)- f^+(x) > u\,\phi^-(y)- u\phi^-(x)$$

$$g_u(y)= f^+(y)- u\phi^-(y) > f^+(x)- u\phi^-(x)= g_u(x)$$

así $g_u(y) > g_u(x)$, donde $y<x$, luego g_u es decreciente y por la proposición 5 existen disjuntos I_n tales que

$$E^I_{u,v} \subset \bigcup_n I_n = \bigcup_n (a_n, b_n) \subset I$$

y así tenemos una cubierta abierta para $E^I_{u,v}$, y ya que $\phi^-(x-0)=\phi^-(x)$

$$\frac{f(b_n-0) - f^+(a_n)}{\phi^-(b_n) - \phi^-(a_n)} < u$$

y asi tenemos

(1) $f(b_n-0)- f^+(a_n)) \leq u \ (\phi^-(b_n)- \phi^-(a_n)) < u\ \phi^-(I)$, para toda n. Además para cada n, existe una sucesión $\{b_{n,m}\} \subset I_n$ tal que, ϕ^- es continua en cada $b_{n,m}$ y $b_{n,m} \uparrow b_n$. Sea

$M'= \{b_{n,m} | n,m \in N\}$, $b_{n,0} = a_n$ y $I_{n,m} = (b_{n,m-1}, b_{n,m})$

entonces

(2) $M_{\phi^-}(M')= 0$, $[E^I_{u,v} - M'] \subset \bigcup_{n,m} I_{n,m}$ ya que los disjuntos $I_n \subset I$ y f^+, ϕ^- crecen sobre I si sigue (1) que

$$(3)\ \sum_n \sum_m f^+(I_{n,m}) = \sum_n [f^+(b_n - 0) - f^+(a_n)] \leq u \sum_n \phi(I_n) \leq u\phi(I).$$

Ahora para cada n,m y $x \in [E^I_{u,v} \cap I_{n,m}]$, $D^\phi_R f^+(x) > v$

luego

$$\frac{f^+(y) - f^+(x)}{\phi^-(y) - \phi^-(x)} > v \quad \text{para algún } y \in (x, b_{n,m})$$

$$f^+(y) - f^+(x) > v\,(\phi^-(y)) - \phi^-(x))$$

$$f^+(y) - f^+(x) > v\,\phi^-(y) - v\phi^-(x)$$

$$f^+(y) - v\phi^-(y) > f^+(x) - v\phi^-(x)$$

$$g_v(y) > g_v(x). \text{ para } y > x \text{ luego}$$

g_v es creciente en x y existen conjuntos $I_{n,m,p} = (c_{n,m,p}, d_{n,m,p})$ tales que g_v es creciente en la unión de ellos, así

$$\left[E^I_{u,v} \cap I_{n,m}\right] \subset \left[\bigcup_p I_{n,m,p}\right] \subset I_{n,m}$$ y, ya que $f^+(x+0) = f^+(x)$

$$f^+(c_{n,m,p}) - v\,\phi^-(c_{n,m,p}) = g_v(c_{n,m,p}) \leq g_v(d_{n,m,p}) =$$

$f^+(d_{n,m,p}) - v\,\phi^-(d_{n,m,p})$ para todo p. Ya que $I_{n,m,p}$ son disjuntos y f^+ crece sobre los $I_{n,m}$

$$v\,\phi^{-}(d_{n,m,p}) - v\,\phi^{-}(c_{n,m,p}) \quad f^{+}(d_{n,m,p}) - f^{+}(c_{n,m,p})$$

$$(4)\quad v \sum_{p} \left[\phi^{-}(d_{n,m,p}) - \phi^{-}(c_{n,m,p}) \right] \leq \sum_{p} f^{+}(I_{n,m,p}) \leq f^{+}(I_{n,m})$$

para toda n,m.

Para n,m,p existe una sucesión $\{c_{n,m,p,q}\} \subset I_{n,m,p}$ tal ϕ^{-} es continua en cada $c_{n,m,p,q}$ y $c_{n,m,p,q} \downarrow c_{n,m,p}$.
Sea $M'' = \{c_{n,m,p,q} | n,m,p,q \in N\}$, $c_{n,m,p,0} = d_{n,m,p}$ y $I_{n,m,p,q} = (c_{n,m,p,q} \quad c_{n,m,p,q-1})$. Entonces los $I_{n,m,p,q}$ son disjuntos, y

$$(5)\quad \phi^{-}(d_{n,m,p}) - \phi^{-}(c_{n,m,p}) = \sum_{q} \phi^{-}(I_{n,m,p,q}), \text{ para toda } n,m,p$$

$$(6)\quad M_{\phi}-(M'') = 0,$$

$$\left(\left[E^{I}_{u,v} \quad I_{n,m} \right] - M'' \right) \subset \bigcup_{p,q} I_{n,m,p,q} \subset I_{n,m}, \text{ para toda } n,m.$$

De (2) y (6)

$$M_{\phi}-(M' \cup M'') = 0, \quad \left[E^{I}_{u,v} - (M' \cup M'') \right] \subset \bigcup_{n,m,p,q} I_{n,m,p,q}$$

de (3), (4) y (5)

$$\sum_n \sum_m, \sum_p \sum_q \phi^-(I_{n,m,p,q}) = \sum_n \sum_m \sum_p [\phi^-(d_{n,m,p}) - \phi(c_{n,m,p})]$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_n \sum_m f^+(I_{n,m}) = \frac{1}{v} \sum_n \sum_m [f^+(b_n - 0) - f^+(c_n)] \leq \frac{u}{v} \phi^-(I)$$

de aquí $M = M' \cup M''$ y $S = \{I_{n,m,p,q} | n,m,p,q \in N\}$ tienen dos propiedades requeridas.

Proposición 7.- Para $n \in N$, existe M_n C(a,b) y un conjunto contable S_n de subintervalos abiertos disjuntos de (a,b) tales que

$$\text{i})_n \quad M_{\phi^-}(M_n) = 0$$

$$\text{ii})_n \quad S_n \text{ cubre } E^{a,b}_{u,v} - M_n$$

$$\text{iii})_n \quad \sum_{J \in J_n} \phi^-(J) \leq \left(\frac{u}{v}\right)^n \phi^-((a,b))$$

Prueba.- Los conjuntos M y S de la proposición 6, con $I = (a,b)$ tienen las propiedades requeridas con n=1,. Supongamos que M_n y $S_n = \{J_k | k \in N\}$ satisfacen las hipótesis y tienen las propiedades i) $_n$, ii) $_n$, iii) $_n$. Para cada k sea M_k', S_k' los conjuntos de la proposición 6 con $I = J_k$. Así

$$M_{\phi^-}(M_k') = 0, \quad S_k' \text{ cubre } ([E^{a,b}_{u,v} \cap J_k] - M_k'), \text{ y}$$

Entonces $M_{\phi^-}(M) = \sum_n M_{\phi^-}(M_n) = 0$, y S_n de la proposición 7 cubre $E^{a,b}_{u,v} - M$ para toda n. Ya que $0 < \frac{u}{v} < 1$ y $0 \leq \phi^-(b) - \phi^-(a) < \infty$

$$\sum_{J \varepsilon J_n} \phi^-(J) \leq \left(\frac{u}{v}\right)^n \phi^-(a,b),$$ pero el término de la derecha tiende a cero, luego

$$M_{\phi^-}(E^{a,b}_{u,v} - M) = \inf \{ \sum_{J \varepsilon S_n} \phi^-(J) \mid [E^{a,b}_{u,v} - M] \subset S_n \} = 0$$

$$M_{\phi^-}(E^{a,b}_{u,v}) = M_{\phi^-}(E^{a,b}_{u,v} - M) + M_{\phi^-}(M) = 0$$

y, ya que

$$E^{\phi^-}_{\ell,R}(f^+) = \cup \{ E^{a,b}_{u,v} \mid u,v \text{ son racionales} \}$$

tenemos

$$M\phi\ (E^{\phi^-}_{\ell,R}(f^-)) = 0$$

Proposición 9.- $M_{\phi^+}(E^{\phi^+}_{r,L}(f^-)) = 0$

Prueba.- Para $\xi = -x$, sea $h(\xi) = -f^-(x)$ y $\psi(\xi) = -\phi^+(x)$.

Entonces sobre $[-b, -a]$, $h(\xi) = h(\xi+0)$ y $\psi(\xi) = \psi(\xi-0)$. De aquí las proposiciones 7,8,9 se tienen que f^+ es sustituída por h y, ϕ^- sustituída por ψ.

$$M_\psi(E^\psi_{\ell,R}(h)) = 0$$

para $\xi = -x$, $\eta = -y$

$$\frac{h(\eta) - h(\xi)}{\psi(\eta) - \psi(\xi)} = \frac{-f^-(y) - (-\phi^-(x))}{-\phi^+(y) - (-\phi^+(x))} = \frac{f^-(y) - f^-(x)}{\phi^+(y) - \phi^+(x)}$$

así el cociente de las diferencias existe. De aquí para $\xi = -x$

$$D^\psi_\ell h(\xi) = D^{\phi^+}_r f^-(x) \quad \text{y} \quad D^\psi_R h(\xi) = D^{\phi^+}_L f^-(x)$$

$x \varepsilon E^{\phi^+}_{r,L}(f^-)$ si y solo si $\xi = -x \;\varepsilon\; E^\psi_{\ell,R}(h)$

y

$E^{\phi^+}_{r,L}(f^-) \subset \underset{n}{U}(a_n, b_n)$ si y solo si $E^\psi_{\ell,R}(h) \subset \underset{n}{U}(-b_n, -a_n)$

y

$$\sum_n (\phi^+(b_n) - \phi^+(a_n)) = \sum_n (\psi(-a_n) - \psi(-b_n))$$

y como $M\psi\ (E^{\psi}_{\ell,R}(h)) = 0$ tendremos

$$M\phi^{+}\ (E^{\phi^{+}}_{r,L}(f^{-})) = 0$$

Proposición 10.- $M_{\phi^{-}}(E^{\phi^{-}}_{R,\infty}(f^{+})) = 0$

Prueba.- Para $x \in E^{\phi^{-}}_{R,\infty}(f^{+})$ y $v>0$, $D^{\phi^{-}}_{R}\ f^{+}(x) > v$ y para algún $y \in (x,b)$ se tiene

$$\frac{f^{+}(y) - f^{+}(x)}{\phi^{-}(y) - \phi^{-}(x)} > v$$

$$f^{+}(y) - f^{+}(x) > v(\phi^{-}(y) - \phi^{-}(x))$$

$$f^{+}(y) - f^{+}(x) > v\phi^{-}(y) - v\phi^{-}(x)$$

$$f^{+}(y) - v\,\phi^{-}(y) > f^{+}(x) - v\,\phi^{-}(x)$$

$g_v(y) > g_v(x)$ para $y > x$, entonces existen conjuntos disjuntos $I_n = (c_n, d_n) \subset (a,b)$ tales que

$E^{\phi^{-}}_{R,\infty}(f^{+}) \subset \bigcup_n I_n$, y ya que $f^{+}(x+0) = f^{+}(x)$

$f^{+}(c_n) - v\phi^{-}(c_n) \leq f^{+}(d_n) - v\phi^{-}(d_n)$, para toda n

$$v\phi^{-}(d_n) - v\phi^{-}(c_n) \leq f^{+}(d_n) - f^{+}(c_n)$$

$$v[\phi^{-}(d_n) - \phi^{-}(c_n)] \leq f^{+}(d_n) - f^{+}(c_n)$$

$$(1)\quad \sum_n [\phi^-(d_n)-\phi^-(c_n)] \leq \frac{1}{v}\sum_n [f^+(d_n)-f^+(d_n)] = \frac{1}{v}\Sigma f^+(I_n)$$

$$\leq \frac{1}{v} f^+(a,b))$$

Para cada n, existe una sucesión $\{c_{n,j}\} \subset (c_n,d_n)$ que ϕ^- es continua en cada $c_{n,j}$ y $c_{n,j}\downarrow c_n$, tomando $C_{n,0}=d_n$, los $I_{n,j}=(c_{n,j},\ c_{n,j-1})$ son disjuntos y de (1)

$$\sum_n\sum_j \phi^-(I_{n,j}) = \sum_n [\phi^-(d_n)-\phi^-(c_n+0)] \leq \frac{1}{v} f^+\ (a,b))$$

Sea $M=\{C_{n,j} | n,j \in N\}$, entonces $M_{\phi^-}(M)=0$ y

$$(3)\quad E^{\phi^-}_{R,\infty} - M \subset \bigcup_{n,j} I_{n,j}$$

así

$$M_{\phi^-}(E^{\phi^-}_{R,\infty} - M) \leq M_{\phi^-}(\bigcup_{n,j} I_{n,j}) \leq \frac{1}{v}\ f^+(a,b))$$

pero como $v>0$ es arbitrario y $f^+((a,b))<\infty$, tenemos que

$$M_{\phi^-}(E^{\phi^-}_{R,\infty} - M) = 0$$

asi

$$M\phi \; (E^{\phi}_{R,\infty}) = M_{\phi^-} \; (E^{\phi^-}_{R,\infty} - M) + M_{\phi^-} \; (M) = 0$$

Teorema 1.- Si f y ϕ son funciones crecientes sobre [a,b] y

$$E=[E(f)]U[E(\phi)]U[C^*(\phi)]U[E^{\phi^-}_{\ell,R}(f^+)]U[E^{\phi^+}_{r,L}(f^-)]U[E^{\phi^-}_{R,\infty}\;(f^+)].$$

entonces $\frac{df}{d\phi}$ es finita sobre (a,b)- (E- E(ϕ)) y

$$M_{\phi} \; (E- E\,(\phi)) = 0$$

Prueba: Ya que ϕ , ϕ^+, ϕ^- son funciones crecientes equivalentes, la M_{ϕ^-} medida de los 3 conjuntos de Riesz es cero. Esto es

$M\phi$ (E- E(ϕ))= 0, luego tenemos que

$$0 \leq \left.\frac{df}{d\phi}\right|_x = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{\phi(y)-\phi(x)}, \text{ para } x\varepsilon(a,b)-E.$$

Pero si xεE(ϕ), la derivada en x es

$$0 \leq \left.\frac{df}{d\phi}\right|_x = \frac{f(x+0)- f(x-0)}{\phi(x+0)- \phi(x-0)} < \infty$$

de aquí $\frac{df}{d\phi}$ es finita si $x\varepsilon(a,b)-(E-E(\phi))$.

Con lo cual tenemos la primera parte que, $\frac{df}{d\phi}$ es finita M_ϕ-casi-dondequiera en (a,b).

Antes de entrar en la demostración del teorema 2, discutiremos dos importantes teoremas que son esenciales en la demostración de dicho teorema; el primero se refiere a la afirmación de la aditividad numerable de la derivada en ciertas condiciones y el segundo es el teorema de la densidad de Lebesgue.

Proposición 11.- Si ϕ es una función creciente sobre $[a,b]$ y M_ϕ es una medida de Borel asociada, f_n es una sucesión de funciones crecientes sobre $[a,b]$ y

$$\sum_n f_n(x) = f(x) < \infty, \text{ para } x\varepsilon[a,b]$$

entonces

$$\sum_n \frac{df_n}{d\phi} = \frac{df}{d\phi}, \; M\phi\text{-c.d. sobre } (a,b)$$

Prueba: En caso de que f_n no sea positiva, la podemos reemplazar por $f_n(x) - f_n(a)$, y asumir asi que los f_n son fun ciones positivas. Ya que f asi como los f_n son crecientes sobre [a,b], se sigue por el teorema 1 que $\frac{df}{d\phi}$ y $\frac{df_n}{d\phi}$, existen para toda $n\varepsilon N$, son finitas y positivas sobre algún $A C (a,b)$, tal que $M\phi((a,b)-A)= 0$.

Las sumas parciales $Sn(x)$ de la serie en la hipótesis crecen con n para cada $x\varepsilon[a,b]$, y con $x\varepsilon[a,b]$ para cada n, mientras $\frac{dSn}{d\phi}$ crece con n para $x\varepsilon A$.

Ahora si $x_o \varepsilon \ (a,b)- C(\phi)$ y $a \leq x < x_o < y < b$,

entonces $\phi(x) < \phi(y)$ y asi $\phi(y) - \phi(x)>0$

$$f(y)- f(x)= S_n(y) - S_n(x) + \sum_{k>n} (f_k(y)- f_k(x)) \geq S_n(y)-S_n(x) \geq 0$$

de donde

$$0 \leq \frac{S_n(y)- S_n(x)}{\phi(y)- \phi(x)} \leq \frac{f(y)- f(x)}{\phi(y)- \phi(x)} < \infty$$

luego

$$\frac{dS_n}{d\phi} \leq \frac{df}{d\phi} \text{ para } x\varepsilon[A - c(\phi)]= A_1$$

así

(1) $\lim_n \frac{dS_n}{d\phi} = \Sigma \frac{df_n}{d\phi} \leq \frac{df}{d\phi} < \infty$, para $x \varepsilon A_1$

$M_\phi((a,b)-A_1) = M_\phi((a,b)-(A-c(\phi))) = M_\phi((a,b)-A) + M_\phi(c(\phi)) = 0$

Ya que $S_n(b) \uparrow f(b))$, existe una sucesión $n_k \uparrow \infty$ en N, tal que

$$0 \leq \Sigma_k \left[f(x) - S_{n_k}(x)\right] \leq \Sigma_k \left[f(b) - S_{n_k}(b)\right] < \infty, \text{ para}$$

$a \leq x \leq b$

Sea $g_k = f - S_{n_k}$, tenemos que $T(x) = \Sigma g_k(x) < \infty$

$T_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$, $\frac{dT_n}{d\phi} \leq \frac{dT}{d\phi}$, luego

$$\lim_n \frac{dT_n}{d\phi} = \Sigma_{n_k} \frac{d(f - S_{nk})}{d\phi} \leq \frac{dT}{d\phi} < \infty$$

luego

$$\Sigma \left[\frac{df}{d\phi} - \frac{dS_{nk}}{d\phi}\right] < \infty \text{ y como } \frac{df}{d\phi} \geq \frac{dS_n}{d\phi}$$

tenemos

$$\left[\frac{df}{d\phi} - \frac{dS_{nk}}{d\phi}\right] \to 0$$

entonces

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{dS_{nk}}{d\phi} = \frac{df}{d\phi}$$

para $x \varepsilon A_2$, para algún $A_2 c (a,b)$, tal que $M\phi((a,b)-A_2) = 0$.

Ya que $\frac{dS_n}{d\phi}$ crece con n, para $x \varepsilon A_1$, si sigue que

$$\sum_n \frac{df_n}{d\phi} = \lim_n \frac{dS_n}{d\phi} = \lim_k \frac{dS_{nk}}{d\phi} = \frac{df}{d\phi}$$

para $x \varepsilon A_1 \cap A_2$

Ahora

$$M_\phi((a,b)-[A_1 \cap A_2]) \leq M_\phi((a,b)-A_1) + M_\phi((a,b)-A_2) = 0$$

así, tenemos que la afirmación es cierta M_ϕ-c.d. sobre (a,b).

Proposición 12.- Si $\psi(x) = M_\phi((a,x])$ sobre [a,b] entonces M_ψ y M_ϕ son la misma medida sobre [a,b].

Prueba: Supongamos que ϕ es continua en x,y y $(x,y) \subset [a,b]$, entonces

$$0 \leq \phi(y) - \psi(x) = M_{\phi}((x,y]) = M_{\phi}((x,y)) = \phi(y) - \phi(x)$$

tenemos que

$$\psi(x) = \phi(x)$$

y ya que $E(\psi) = E(\phi)$ y $\psi(x) = \phi(x) - \phi(a+0)$

para $x \notin E(\psi)$, tenemos que ambas medidas son idénticas sobre $[a,b]$.

Proposición 13 A.- Teorema de densidad de Lebesgue.

Sea E un conjunto medible, para casi todo $x \in E$ si verifica para toda sucesión $\{Q_k(x)\}$ de cubos que contiene a x, tales que $\delta(Q_k(x)) \to 0$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m(E \cap Q_k(x))}{M(Q_k(x))} = 1,$$

y para casi todo $x \notin E$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(E\cap Q_k(x))}{m(Q_k(x))} = 0$$

Demostración: Para cualquier medible E, notas que

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q I_E = \frac{m(E\cap Q)}{m(Q)}$$

$$\lim_{Q_k(x)\to x} \frac{1}{m(Q_k(x))} \int_{Q_k(x)} I_E = \lim_{Q_k(x)\to x} \frac{m(Q\cap Q_k(x))}{m(Q_k(x))} = I_E \quad (x)$$

casi-dondequiera sobre E y asi tenemos la afirmación.

Si el límite es 1, el punto x es llamado punto de densidad de E, si es cero es llamado punto de dispersión de E. Ya que

$$\frac{m(Q\cap E)}{M(Q)} + \frac{m(Q\cap E^c)}{m(Q)} = 1$$

cada punto de densidad de E, es un punto de dispersión del complemento y viceversa. Ahora se demostrará el teorema de densidad de Lebesgue generalizado.

Proposición 13 B.- Teorema de densidad de Lebesgue generalizado.

Si A es un subconjunto de Borel de (a,b), entonces

$$\lim_{x_0} \frac{M_\phi(A\cap(x,y])}{M_\phi((x,y])} = 1, \quad M_\phi\text{-c.d. sobre } A.$$

Prueba: Sea $\psi(x)= M_\phi((a,x])$ y $f(x)= M_\phi(A\cap(a,x])$ sobre [a,b]. Entonces ψ y f crecen sobre [a,b] y

$$(1) \quad 0 \leq \left.\frac{df}{d\phi}\right|_{x_0} = \lim_{x_0} \frac{M_\phi(A\cap(x,y])}{M_\phi((x,y])} < \infty, \quad M_\phi\text{-c.d. sobre } (a,b).$$

Para $n\varepsilon N$, existe un conjunto abierto G_n, tal que $A\subset G_n \subset (a,b)$ y

$$M_\psi(G_n) < M_\psi(A) + \frac{1}{2^n}.$$

Sea $f_n(x)= M_\phi(G_n\cap(a,x])$ para $x\varepsilon[a,b]$. Ahora $A\subset[\bigcap_n G_n]$ y para $x_0\varepsilon A$ y $n\varepsilon N$ existe algún (u,v) que contiene a x_0, tal que $[u,v]\subset G_n$. Si $x_0\varepsilon A$ y $n\varepsilon N$

$$(2) \quad \left.\frac{df_n}{d\phi}\right|_{x_0} = \lim_{x_0} \frac{f_n(y)-f_n(x)}{\psi(y)-\psi(x)} = \lim_{x_0} \frac{M_\phi(G_n\cap(x,y])}{M_\phi((x,y])} = 1.$$

Para $x\varepsilon[a,b]$ y $n\varepsilon N$

$$0 \leq M_\psi((G_n-A)\cap(a,x]) = f_n(x) - f(x) \leq M_\phi(G_n-A) < \frac{1}{2^n}$$

Para $x\varepsilon y$, sobre $[a,b]$

$$0 \leq M\psi((G_n - A)\cap(x,y]) = f_n(y) - f(y) - (f_n(x) - f(x))$$

de aquí $f_n - f$ es función creciente positiva sobre $[a,b]$ y

$$0 \leq \sum_n (f_n(x) - f(x)) < 1, \text{ sobre } [a,b]$$

por el teorema 1, la proposición de Fubini y (2), tenemos

$$0 \leq \sum_n \left(\frac{df_n}{d\psi} - \frac{df}{d\psi}\right) = \sum_n \left(1 - \frac{df}{d\psi}\right) < \infty, \ M_\psi\text{-c.d. sobre A.}$$

De aquí $\frac{df}{d\psi} = 1$, M_ψc.d. sobre A, ya que M_ϕ y M_ψ

son la misma medida, se sigue de (1) que

$$\lim_{x_0} \frac{M\phi(A \cap (x,y])}{M_\phi((x,y])} = 1, \ M_\phi\text{-c.d. sobre A.}$$

Teorema 2.- Si f es M_ϕ- integrable y $F(x) = \int_a^x f \, dM_\phi$ sobre $[a,b]$, entonces $\frac{dF}{d\phi} = f$, M_ϕ-c.d. sobre (a.b).

Prueba.- Es suficiente considerar $f \geq 0$. Existe una sucesión creciente de subconjuntos compactos C_n de $[a,b]$ tales que f es continua sobre C_n, $\lim_n M_\phi([a,b] - C_n) = 0$ y

$$0 \leq \lim_n \int_{C_n} f \, dM_\phi = \int_a^b f \, dM_\phi < \infty$$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{ para } x \varepsilon C_n \\ 0, \text{ para } x \varepsilon [a,b] - C_n \end{cases}$$

Entonces $f_n \uparrow f$ sobre $\bigcup_n C_n$ y $M\phi([a,b] - \bigcup_n C_n) = 0$.
Para $B_n = [a,b] - C_n$, existe una sucesión creciente de subconjuntos compactos $C_{n,k}$ de B_n tales que $\lim_k M_\phi(B_n - C_{n,k}) = 0$.

Ya que C_n $C_{n,k} = \phi$ para toda n.k, $f_n = 0$ sobre cada $C_{n,k}$, y f_n es continua sobre el conjunto compacto $C_n \cup C_{n,k}$, para toda n,k.

Ya que $[a,b] - (C_n \cup C_{n,k}) = B_n - C_{n,k}$

$\lim_k M_\phi([a,b] - (C_n \cup C_{n,k})) = 0$ para toda n

De aquí f_n es integrable sobre [a,b] para toda n.

Sea

$$F_n(x) = \int_a^x f_n \, dM_\phi, \text{ para } x \varepsilon [a,b], \; n \varepsilon N$$

Así F y toda F_n crecen sobre [a,b]. Por el teorema 1.

$\frac{dF}{d\phi}$ y toda $\frac{dF_n}{d\phi}$ son finitas M_ϕ-c.d. sobre (a,b). Para $a \leq x \leq y \leq b$

$$0 < F_{n+1}(x) - F_n(x) = \int_a^x (f_{n+1} - f_n)\, dM_\phi \leq \int_a^y (f_{n+1} - f_n)\, dM_\phi = F_{n+1}(y) - F_n(y),$$

asi es creciente y,

$$\frac{d(F_{n+1} - F_n)}{d\phi} = \frac{dF_{n+1}}{d\phi} - \frac{dF_n}{d\phi} \text{ es finita y positiva}$$

M_ϕ-c.d. sobre (a,b) para todo n.

Aplicando el teorema de la convergencia monótona sobre f_n, tenemos

$$\int_a^x \lim_n f_n = \lim_n \int_a^x f_n = \lim F_n$$

pero

$$\int_a^x \lim_n f_n = \int_a^x f = F(x) < \infty$$

así como $F_1(x) + \sum_n [F_{n+1}(x) - F_n(x)] = \lim_n F_n(x) = F(x) < \infty$

por la proposición 12 (Fubini) existe algún A C(a,b) tal que $M_\phi((a,b) - A) = 0$ y

$$(1)\quad \left.\frac{dF_1}{d\phi}\right|_x + \sum_n \left(\left.\frac{dF_{n+1}}{d\phi}\right|_x + \left.\frac{dF_n}{d\phi}\right|_x \right) = \lim_n \left.\frac{dF_n}{d\phi}\right|_x = \left.\frac{dF}{d\phi}\right|_x$$

para $x \varepsilon A$.

Consideremos $x_\circ \varepsilon\ A \cap (\bigcup_n Cn - C(\phi))$. Ya que C_n crece con n, existe algûn n∘ tal que, para $n \geqslant n_\circ$, $x_\circ \quad C_n$. Existen $x_k \uparrow X_\circ$ y $y_k \downarrow x_\circ$ tal que, ϕ es continua en cada x_k, y_k. Entonces

$$M_\phi \ ([x_k, y_k]) = M_\phi \ ((x_k, y_k)) = \phi(y_k) - \phi(x_k)$$

asi por la proposiciốn (1), tenemos

$$\phi(x_k) < \phi(x) \leqslant \phi(y_k) \text{ para toda k, luego}$$

$$\phi(y_k) - \phi(x_k) > 0.$$

Ahora

$$F_n(y_k) - F_n(x_k) = \int_{x_k}^{y_k} f_n \ dM_\phi = \int_{C_n \cap [x_k, y_k]} f \ dM_\phi$$

ya que f es continua sobre el conjunto compacto

$C_n \cap [x_k, y_k]$, existen x'_k y $y'_k \ \varepsilon \ C_n \cap [x_k, y_k]$ tales que

$$f(x_k')\frac{M\phi(C_n\cap(x_k,y_k))}{M\phi((x_k,y_k))} \leq \frac{F_n(y_k)-F_n(x_k)}{\phi(y_k)-\phi(x_k)} \leq f(y_k')\frac{M\phi(C_n\cap(x_k,y_k))}{M\phi((x_k,y_k))}$$

luego

$$(2)\quad \left.\frac{dF_n}{d\phi}\right|_{x_0} = \lim_k \frac{F_n(y_k)-F_n(x_k)}{\phi(y_k)-\phi(x_k)} = f(x_0),\ M_\phi\text{-c.d. sobre}$$

(a,b) ya que $\lim_n \ M_\phi(\bigcup_n C_n)$ si sigue de (1) y (2) que

$$\lim_n \left.\frac{dF_n}{d\phi}\right|_{x_0} = \left.\frac{dF}{d\phi}\right|_{x_0} = f(x_0),\ M_\phi\text{-c.d. sobre } A\cap(\bigcup_n C_n - c(\phi))$$

por la proposición 1, $M_\phi(c(\phi))= 0$, ya que

$$M\phi\ ((a,b))= M\phi(A)= M_\phi\ (\bigcup_n Cn)$$

tenemos que

$$\left.\frac{dF}{d\phi}\right|_{x_0} = f(x_0),\quad M\phi\text{-c.d. sobre } (a,b)$$

asi, si $F(x)= \int_\infty^x f dM_\phi$, $\frac{d}{d\phi}\int_\infty^x f dM_\phi = f(x)$

M_ϕ-c.d. sobre (a,b).

Nota: (Hahn, Saks). Si f y ϕ son crecientes sobre $[a,b]$ existe $H \subset [a,b]$ tal que $M_\phi(H)=0$ y una función S, M_ϕ integrable sobre $[a,b]$, tal que

$$M_f((a,x])=\int_{(a,x]} S dM\phi + M_f(H\cap(a,x]),\ M_\phi\text{-c.d. sobre } [a,b].$$

Teorema 3.- Si una función creciente f es absolutamente continua respecto a una función creciente ϕ sobre $[a,b]$ entonces

$$f(x+0)-f(a+0)=\int_{(a,x]} \frac{df}{d\phi}\, dM_\phi\text{-c.d. sobre } (a,b).$$

Prueba: Sea $g(x)=M_f((a,x])$, para $x\varepsilon[a,b]$. Por la proposición 12, M_g y M_f son la misma medida sobre $[a,b]$.

Como

$$g(x)=\int_{(a,x]} S\, dM_\phi + M_f(H\cap(a,x))=\int_{(a,x]} S\, dM\phi$$

M_ϕ-c.d. sobre $[a,b]$.

Por el teorema 1 y 2, existen subconjuntos A y B de (a,b), tales que

$$\left.\frac{df}{d\phi}\right|_x \quad \text{es finita para } x\varepsilon A \text{ y } M_\phi((a,b)-A)=0$$

$$\left.\frac{dg}{d\phi}\right|_x = S(x), \text{ para } x\varepsilon B \quad \text{y} \quad M_\phi((a,b)-B)=0$$

para $x\varepsilon\left[A\cap B- C(\phi)\right]$, existe $x_k\uparrow x$ y $y_k\downarrow x$ en los cuales f y g son continuas y $\phi(x_k)<\phi(x)\leq\phi(y_k)$, asi $\phi(y_k)-\phi(x_k)>0$. Ya que f y g son equivalentes

$$0\leq \frac{f(y_k)- f(x_k)}{\phi(y_k)-\phi(x_k)} = \frac{g(y_k)- g(x_k)}{\phi(y_k)-\phi(x_k)}<\infty \text{ para todo } k.$$

ya que $M_\phi(c(\phi))=0$ tenemos que

$$M_\phi((a,b)- (A\cap B-c(\phi))\leq M_\phi((a,b)-A)+M_\phi((a,b)-B)+ M_\phi(c(\phi))= 0$$

y

$$\frac{df}{d\phi} = \frac{dg}{d\phi} = S,\ M_\phi\text{-c.d. sobre } (a,b)$$

asi

$$f(x+0)- f(a+0)= M_f((a,x])= \int_{(a,x]} \frac{df}{d\phi}\, dM_\phi,\ M_\phi\text{-c.d. sobre } (a,b).$$

y asi tenemos el resultado deseado.

Ahora como una función de variación acotada se puede escribir como la diferencia de dos funciones crecientes, podemos extender esta fórmula a las funciones de variación acotada.

Sea H de variación acotada, entonces

H(x)= f(x)- g(x), donde f y g son crecientes

$$\frac{dH}{d\phi} = \frac{df}{d\phi} - \frac{dg}{d\phi} \text{, así}$$

$$\int_{(a,x]} \frac{dH}{d\phi}\, dM_\phi = \int_{(a,x]} \left[\frac{df}{d\phi} - \frac{dg}{d\phi}\right] dM_\phi = \int_{(a,x]} \frac{df}{d\phi}\, dM_\phi - \int_{(a,x]} \frac{dg}{d\phi}\, dM_\phi$$

como f y g son crecientes, aplicamos lo anterior

$$\left[f(x+0)- f(a+0)\right] - \left[g(x+0)- g(a+0)\right] = \int_{(a,x]} \frac{dH}{d\phi}\, dM_\phi$$

Es necesario enfatizar que H es de variación acotada pero absolutamente continua respecto de ϕ.

CAPITULO VII

EL TEOREMA DE BESICOVITCH Y OTRA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LEBESGUE-RADON-NIKODIM.

TEOREMA DE BESICOVITCH

Para cada punto de un conjunto acotado A de R^n se da un intervalo cúbico cerrado $Q(x,r(x))$ centrado en x y de semilado $r(x)>0$. La familia de cubos dados $(Q(x,r(x)))_{x\in A}$ constituye un recubrimiento de A, si,

$$A \subset \bigcup_{x\in A} Q(x,r(x))$$

Claramente muchos de estos cubos pueden resultar superfluos para cubrir A. La pregunta es: ¿se puede extraer de esta familia un recubrimiento más económico, en el sentido de que cada punto quede recubierto a lo más por un número fijo de intervalos cúbicos de la familia?. El teorema de Besicovitch proporciona una respuesta afirmativa.

Recordemos que en la versión del lema de Vitali presentada en el capítulo III, se usó el hecho de que expandiendo el intervalo por un factor (por ejemplo 5) agrandamos su me dida de Lebesgue proporcionalmente, pero la relación de proporcionalidad no se tiene en general para cualquier medida. Si esta no es invariante bajo traslaciones el teorema de Besicovitch evita esta dificultad, y es de carácter puramente geométrico y no hace mención de medidas.

Teorema 1.- Sea A un conjunto acotado de R^n. Para cada $x \varepsilon A$ se da un intervalo cúbico cerrado $Q(x)$ centrado en x. Entonces se puede escoger, de la familia de cubos dada $(Q(x))_{x \varepsilon A}$ una sucesión $\{Q_k\}$ (posiblemente finita) de cubos tales que:

a) El conjunto A esta recubierto por la sucesión, es decir, $A \subset \cup Q_k$

b) Ningún punto de R^n esta en más de C cubos de la sucesión $\{Q_k\}$, siendo C un número que depende únicamente de la dimensión n, es decir:

$$\Sigma\, I_{Q_k}(z) \leq C, \text{ para todo } z \varepsilon R^n$$

c) La sucesión $\{Q_k\}$ se puede distribuir ξn familias de cubos disjuntos, siendo ξn un número que solo depende de la dimensión.

A fin de que la demostración resulte más transparente presentamos primero una versión más sencilla del teorema, cuya prueba contiene ya las ideas fundamentales para el caso general.

Lema.- Sea $\{Q_k\}$ una sucesión decreciente de intervalos cúbicos cerrados centrados en el origen de R^n. Supongamos $\overset{\infty}{\underset{k=1}{}} Q_k = \{0\}$. Sea A un conjunto acotado en R^n. Para cada $x \varepsilon A$ y damos para cada $x \varepsilon A$ un entero positivo $i(x)$ y escribimos $Q(x) = x + Q_{i(x)}$, es decir, $Q(x)$ es la traslación de $Q_{i(x)}$ por el vector x. Entonces existe una sucesión $\{X_k\} \subset A$ (posiblemente finita) tal que:

a) El conjunto A está recubierto por $\{Q(x_k)\}$, es decir

$$A \subset \bigcup Q(x_k)$$

b) Cada punto $z \varepsilon R^n$ esta a lo sumo en 2^n de los conjuntos $Q(x_k)$, es decir, para cada $z \varepsilon R^n$, $\Sigma\, I_{Qk}(z) \leq 2^n$ donde I_{Q_k} es la función característica de $Q(x_k)$.

c) La sucesión $\{Q(x_k)\}$ se puede distribuir en 4^n+1 sucesiones disjuntas.

Demostración.- Tomemos un $x_1 \varepsilon A$ tal que $Q(x_1)$ sea de tamaño máximo. Si $Q(x_1) \supset A$ terminamos, si no nos fijamos en $A-Q(x_1)$ y en el escogemos x_2 con $Q(x_2)$ de tamaño máximo. Supongamos que hemos elegido $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$. De esa forma si

$$A - \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k) = \phi$$

entonces, hemos acabado nuestro proceso de selección. Si no es así, tomamos

$$X_{m+1} \varepsilon A - \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k)$$

tal que $Q(x_{m+1})$ es de tamaño máximo. La sucesión $\{Q(x_k)\}$ que hemos obtenido satisface obviamente las propiedades siguientes:

1) Si $i \neq j$, entonces $X_i \notin Q(x_j)$

2) La sucesión $\{\delta(Q(x_k))\}$ de diámetros de los conjuntos $Q(x_k)$ es o bien finita o bien tal que $\delta(Q(x_k))\} \to 0$ cuando $k \to \infty$, ya que los conjuntos $x_k + \frac{1}{2} Q(x_k)$ son disjuntos y A es acotado

Si el proceso de selección termina en un número finito de pasos, la propiedad a) del enunciado es evidente; si la $\{Q(X_k)\}$ es una sucesión infinita y existiera

$$x \varepsilon A - \bigcup_{k=1}^{\infty} Q(X_k)$$

entonces, para algún j_o, el diámetro de $Q(x)$ será mayor que el de $Q(X_{j_o})$. Pero esto significa que hemos hecho mal nuestra selección, pasanto por alto $Q(x)$. Por tanto, en todo caso,

$$A \subset \bigcup Q(X_k)$$

Demostraremos ahora que cada $z \varepsilon R^n$ esta a lo sumo en 2^n de los conjuntos $Q(X_k)$. Para ello trazamos por z, n hiperplanos paralelos a los n hiperplanos coordenados y consideramos los 2^n << hipercuadrantes >> cerrados determinados por ellos. En cada hipercuadrante hay a lo sumo un punto X_j tal que $z \varepsilon\ Q(X_j)$. En efecto si hubiera dos, x_i, x_j, el mayor de los dos conjuntos $Q(x_i)$, $Q(x_j)$ contendría el centro del menor y esto está excluído por construcción.

Para probar c) fijamos un elemento $Q(x_j)$ de la sucesión $\{Q(X_k)\}$. Según b) hay a lo sumo 2^n miembros de la sucesión que contienen a cada vértice fijo de $Q(X_j)$. Cada cubo

$Q(X_k)$ con $k<j$ es de tamaño no inferior al de $Q(X_j)$ y así, si es que $Q(X_k) \cap Q(X_j) \neq \phi$, con $k<j$, entonces $Q(X_k)$ contiene al menos uno de los 2^n vértices de $Q(X_j)$. Por tanto, para cada $Q(X_j)$ hay a lo sumo $2^n\ 2^n$ conjuntos de la colección

$$\{Q(X_1),\ Q(X_2), \ldots\ldots, Q(X_{j-1})\}$$

que tengan intersección no vacía con $Q(X_j)$. Este hecho nos permite distribuir los conjuntos $Q(X_k)$ en 4^n+1 sucesiones disjuntas de la forma siguiente: ponemos $Q(X_1) \varepsilon I_1$, $Q(X_2) \varepsilon I_2, \ldots Q(X_{4n+1}) \varepsilon I_{4n+1}$. Puesto que $Q(X_{4n+2})$ es disjunto con $Q(X_{k_0})$ para algún $k_0 \leqslant 4n+1$ pongamos $Q(X_{4n+2}) \varepsilon I_{k_0}$. Del mismo modo $Q(4n+3)$ es disjunto con todos los conjuntos de algún $I_k{}^*$ $k^* \leqslant 4n+1$ y así podemos poner $Q(4n+3) \leqslant I_k{}^*$. Etcétera. Esto demuestra c).

Demostración del teorema 1.- El proceso natural de selección consistiría, al igual que en la demostración que precede, en elegir primero los cubos grandes y excluir aquellos cuyos centros estén en la parte de A que ya ha sido cubierta. El hecho de que el supremo de los diámetros puede no ser alcanzable nos obliga a elegir los cubos de entro los más grandes. Esto constituye una complicación meramente técnica. Sea

$$a_1 = \sup \ \{\delta(Q(x)) : x \varepsilon A\}$$

si $a_1 = \infty$, basta un cubo bien elegido para cubrir A, pues A es acotado.

si $a_1 < \infty$, sea $A_1 = A$ y elegimos un $x_1 \varepsilon A_1$ tal que

$$\delta(Qx_1) > \frac{a_1}{2}$$

Sea $A_2 = A_1 - Qx_1$

$a_2 = \sup \{\delta(Q_x) : x \varepsilon A_2\}$

si $a_2 \neq 0$, elegimos un x_2 en A_2 tal que

$$\delta(Qx_2) > \frac{a_2}{2}$$

procediendo de esta manera obtenemos en el k-esimo paso

$$A_k = A_{k-1} - Q_{k-1} = A - \bigcup_{j=1}^{k-1} Qx_j$$

$$a_k = \sup \{\delta(Q_x) : x \varepsilon A_k\}$$

elegimos $X_k \varepsilon A_k$ tal que $\delta(Qx_k) > \dfrac{a_k}{2}$

El proceso continuaría siempre que $a_k > 0$. Ya que $X_k \varepsilon A_k$ tenemos que $X_k \varepsilon A_j$ para toda $j \leq k$

$$\delta\ (Qx_k) \leq a_k \leq a_j \leq 2\delta\ (Qx_j)$$

entonces

1) Si $j<k$, entonces $X_k \notin Qx_j$

   (el anterior no contiene el centro del que sigue)

2) $\delta\ (Qx_k) < 2\ \delta\ (Qx_j)$, $j < k$

   la medida del que sigue es menor que 2 veces la medida de cualquier anterior (la medida se refiere al diámetro).

Demostraremos que

$$A \subset \cup\ Qx_k$$

Si algún $a_{k_0} = 0$, entonces $A_{k_0} = \phi$ y A esta contenido en los Qx_k, $k \leq k_0 - 1$.

Si $a_k \neq 0$ (para todo k) existen infinitos Qx_k.
Ya que $a_k \downarrow$ y $\frac{a_k}{2} < \delta\ (Qx_k) < a_k$ se sigue que

1) $\delta\ (Qx_k) \to 0$

2) Existe $\eta>0$, tal que $\delta(Qx_k)\geq\eta$ para toda k.

La segunda posibilidad no se puede dar porque entonces A no estaría acotado, ya que $X_k \in A$, pero $X_k \notin Qx_j$, para j<k. De aqui $\delta(Qx_k) \to 0$, o equivalentemente $a_k \to 0$.

Si $x \in A - \cup Qx_k$, entonces $x \in A_k$ para todo k, en consecuencia $\delta(Q_x) \leq a_k$ para toda k, lo cual significa que $\delta(Q_x)=0$. Esto demuestra que $A - \cup Qx_k = \phi$
y esto completa la prueba. Las demostraciones de b) y c) son esencialmente las mismas.

Observación: Si A no es acotado, pero

$$\operatorname{Sup} \{\delta(Q(x)) : x\in A\} = M<\infty$$

el teorema es todavía válido cambiando las constantes c y ξ_n. La idea es partir R^n en intervalos I_i. Las sucesiones $\{Q_k^i\}$ k≥I correspondientes a los diferentes conjuntos $A\ I_i$ no pueden solparse mucho.

TEOREMA DE VITALI.

Sea M una medida no-negativa, σ-finita en R^n definida sobre los conjuntos de Lebesgue de R^n. Sea M^* la medida exterior asociada a M, es decir para cada $P \subset R^n$.

$$M^*(P) = \inf \{M(H) : P \subset H \text{ y } H \text{ es } M\text{-medible}\}$$

Para cada $x \in A$ se da una sucesión $\{Q_k(x)\}$ de intervalos cúbicos cerrados centrados en x, que se contraen hacia x. Entonces de $(Q_k(x))_{x\in A}$, $k=1,2,\dots$ se puede entresacar una sucesión $\{S_k\}$ tal que

$$M^*(A - \cup S_k) = 0$$

Demostración.- Para cada $x \in A$ elegimos de $\{Q_k(x)\}$ un intervalo $Q(x)$ con diámetro menor que 1. Aplicando el teorema de Besicovitch obtenemos una sucesión $\{Q_k\}$ tal que

a) $A \subset \cup Q_k$

b) $\Sigma I_{Q_k}(z) \leqslant C$, para todo $z \in R^n$

c) $\{Q_k\}$ se puede distribuir en ξ_n sucesiones $\{Q_k^1\}, \{Q_k^2\}, \dots\dots, \{Q_k^{\xi_n}\}$

tales que los cubos de cada una son disjuntos.

Supongamos que $M^*(A) < \infty$. Entonces por la propiedad c) al menos para una de estas sucesiones, tal vez $\{Q_k^1\}$, tenemos

$$M^*\left(A\cap\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^1\right]\right) \geq \frac{1}{\xi_n} M^*(A)$$

En efecto, de otra manera, tendríamos

$$\sum_{j=1}^{\xi_n} M^*\left(A\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^j\right]\right) < M^*(A)$$

y esto es contradictorio.

De $\{Q_k^1\}$ elegimos una sucesión finita que llamamos $\{S_k\}_{k=1}^{h_1}$ tal que

$$M^*\left(A\cap\left[\bigcup_1^{h_1} S_k\right]\right) > \frac{1}{2(\xi_n)} M^*(A)$$

Tomamos a continuación un conjunto B,M-medible tal que $A\subset B$ y $M(B)= M^*(A)$. Entonces tenemos

$$M\left(B\cap\left[\bigcup_{k=1}^{h_1} S_k\right]\right) \geq M^*\left(A\cap\left[\bigcup_{k=1}^{h_1} S_k\right]\right) > \frac{1}{2\xi_n} M^*(A)$$

por tanto

$$M^*\left(A-\left[\bigcup_{k=1}^{h_1} S_k\right]\right) \leq M\left(B-\left[\bigcup_{k=1}^{h_1} S_k\right]\right) \leq M^*(A)-\frac{1}{2\xi_n} M^*(A)$$

$$= \alpha\, M^*(A), \text{ donde } 0<\alpha<1$$

para cada

$$x\varepsilon A-\left[\bigcup_{k=1}^{h_1} S_k\right]= A_1$$

tomamos ahora un intervalo de la familia dada $Q(x)$ con diáme tro menor que 1 y tal que

$$Q(x) \cap (\bigcup_{k=1}^{h_1} S_k) = \phi$$

y procedemos con A_1 como lo hemos hecho con A obteniendo

$$\{S_k\}_{h_1+1}^{h_2}$$

tal que

$$M^*(A-\left[\bigcup_{k=1}^{h_2} S_k\right])= M^*(A_1-\left[\bigcup_{k=h_1+1}^{h_2} S_k\right])<\alpha\ M^*(A_1)<\alpha^2\ M^*(A)$$

repitiendo sucesivamente el proceso, como $0<\alpha<1$, tenemos

$$M^*(A-\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) = 0$$

TEOREMA DE DIFERENCIACION DE LEBESGUE

Sea $f\varepsilon L^1(R^n)$. Consideremos cualquier colección B de intervalos cerrados con interior no vacío, centrados en el ori gen 0 y que contienen sucesiones $\{R_k\}$ que se contraen al origen cuando $k\to\infty$. (Esto será denotado $R_k\to o$ cuando $k\to\infty$). Suponemos además que los intervalos en la B son comparables, en decir para cualquier par R_1, $R_2 \varepsilon B$, $R_1 c R_2$ o $R_2 c R_1$. (Ejemplo: la colección de todos los intervalos cúbicos centrados en el origen).

Para $x\varepsilon R^n$ y $\{R_k\} c$ B, escribimos $R_k(x)= x+R_k$. Entonces para casi toda $x\varepsilon R^n$ y para cada $\{R_k\} c$ B, tal que $R_k\to o$, cuando $k\to\infty$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m\ (R_k(x))} \int_{R_k(x)} f(y)\,dy = f(x)$$

Demostración.- Definimos

$$Mf(x)= \sup_{R\varepsilon B} \frac{1}{m(R)} \int_{R(x)} |f(y)|\,dy$$

La función Mf es medible, ya que $\{x\colon Mf(x)>\alpha\}$ es un conjunto abierto. El operador M es llamado operador maximal de Hardy-Littlewood asociado a B.

Para cualquier función $f\varepsilon L^{i}(R^n)$ y cualquier α, mostraremos que

$$m\{x:\ M\ f(x)>\ \alpha\} \leq \frac{2^n}{\alpha}\ ||f||.$$

De hecho, consideremos cualquier subconjunto compacto k de

$$\{x:\ M\ f(x)>\ \alpha\}$$

Si $x\varepsilon k$ existe un intervalo $R\varepsilon B$ tal que

$$\frac{1}{m(R(x))} \int_{R(x)} |f(y)|dy>\alpha$$

Por la continuidad de la integral existe una vecindad $v(x)$ de x tal que si $z\varepsilon v(x)$, entonces

$$\frac{1}{m(R(z))} \int_{R(z)} |f(y)|dy>\alpha,\text{ para algún R como antes}$$

ya que K es compacto, podemos elegir un número finito de tales vecindades $v(x)$ que cubren K. En consecuencia, existe un conjunto finito $\{R_i\}_1^k$ de intervalos de B tales que para cada $x\varepsilon k$ podemos elegir un índice $i(x)\ \varepsilon\{1,2,3,......,k\}$ de tal manera que si

$$S(x) = x + R_{i(x)}$$

$$\int_{S(x)} |f(y)|dy > \alpha\ m(S(x))$$

aplicamos el teorema de Besicovitch y elegimos $\{S(x_j)\}$

$$M(k) \leq \Sigma\ m(Sx_j) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{S} \int_{(x_j)} |f(y)|dy = \frac{1}{\alpha} \int |f(y)|\ \Sigma I_{S(x_j)}(y)dy$$

$$\leq \frac{2^n}{\alpha} \int |f(y)|dy = \frac{2^n}{\alpha}\ ||f||_1$$

independiente de k. Esto prueba que

$$m\{x:\ Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{2^n}{\alpha}\ ||f||_1$$

El teorema ahora es una fácil consecuencia de este hecho. Definimos

$$\bar{D}(\int f,\ \beta\ x) = \bar{D}(\int f,\ x) = \sup \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{m(R_k)} \int_{R_k(x)} f(y)dy$$

donde el sup es tomado sobre todas las sucesiones $\{R_k\} \subset R$, tales que $R_k \to o$, cuando $k\to\infty$

$$\underline{D}(\int f,\ \beta,\ x) = \underline{D}(\int f,\ x) = \inf \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{m(R_k)} \int_{R_k(x)} f(y)dy$$

probaremos que para $\alpha>o$, fija

$$m(E_\alpha)= m\{x: \ |\bar{D}\ (\int f,\ x)- f(x)| \ >\alpha\} = 0$$

En efecto, tomemos cualquier $\varepsilon>o$ y escribimos $f= g+h$ donde g es una función continua y $h\varepsilon L^1(R^n)$, tal que $||h||_1\leqslant\varepsilon$

Entonces

$$E_\alpha=\{x: \ |\bar{D}\ (\int h,\ x)- h(x)|>\alpha\} \subset$$

$$\{x: \ |\bar{D}\ (\int h,\ x)|> \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x: \ |h(x)|> \frac{\alpha}{2}\}$$

Llamamos A_1 y A_2 a los conjuntos en la última relación. Ahora

$$A_1 \subseteq \{x: \ M\ h(x)> \frac{\alpha}{2}\}$$

y

$$m\{x: \ M\ h(x)> \frac{\alpha}{2}\} \leqslant \frac{2^{n+1}}{\alpha} \ ||h||_1 = \frac{2^{n+1}}{\alpha} \cdot \varepsilon$$

como para A_2 tenemos

$$m(A_2) \leq \frac{2}{\alpha} \int |h(y)|dy = \frac{2}{\alpha} \;||h||_1 \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}$$

ya que ε es arbitrariamente pequeño

$$m(E_\alpha) = m\{x: |\bar{D} (\int f, x) - f(x)| > \alpha\} = 0$$

de la misma manera

$$m\{x: |\underline{D} (\int f, x) - f(x)| > \alpha\} = 0$$

estas relaciones nos dan

$$m\{x: \bar{D} (\int f, x) \neq f(x) \text{ o, } \underline{D} (\int f, x) \neq f(x)\} = 0$$

y esto prueba el teorema.

TEOREMA DE LEBESGUE-RADON-NIKODYM

Consideremos subconjuntos del cubo unitario abierto

$$Q_\circ = \{x \in R^n: 0<x_i<1, \; i=1,2,\ldots\ldots\ldots,n\}$$

en R^n. En $Q_\circ$ definimos un sistema D de "cubos diadicos" abiertos. Un cubo diadico abierto de longitud 2^{-k}, $k=0,1,2,$

.... es un conjunto de la forma

$$Q_k = \{x \varepsilon Q_o : h_i \; 2^{-k} < x_i < (h_i + 1)2^{-k}, \; i=1,2,\ldots\ldots,n\}$$

donde $h_i \varepsilon N$, $0 \leqslant h_i \leqslant 2^k - 1$. Denotemos por Q_o' el conjunto de puntos de Q_o los cuales no pertenecen a la frontera de ningún cubo diadico. Claramente tenemos $m(Q_o') = m(Q_o)$. Obviamente, dados dos cubos diadicos cualesquiera, o son disjuntos o uno esta contenido en el otro.

Lema.- Sea A un subconjunto de Q_o'. Suponemos que para cada $x \varepsilon A$, se tiene un cubo diadico $Q(x)$ que contiene a x. Entonces podemos elegir una sucesión disjunta $\{T_k\}$ de tales cubos tal que $A \subset \cup T_k$.

Es suficiente hacer la selección por el orden de la longitud de los lados de los cubos dados, comenzando por los más grandes y excluyendo en cada paso, los cubos los cuales han sido ya cubiertos.

El anterior lema nos facilita una manera natural de probar el teoema.

Teorema.- Sea M una medida finita no-negativa definida sobre los subconjuntos de Lebesgue medibles del cubo unitario Q_o. Suponemos que M es absolutamente continua con respecto a λ, la medida de Lebesgue. Entonces existe una función

$$g \varepsilon L^1 (Q_o), \quad \text{tal que}$$

$$M(P) = \int_P g(y)dy$$

para cada conjunto de Lebesgue $P \subset Q_o$.

Demostración.- Primero usaremos el teorema de descomposición de Hahn para obtener una sucesión disjunta de medibles E_o, E_1, E_2,.... tales que

$$Q_o = \cup E_j$$

$$\lambda(E_o) = 0 \qquad y$$

$$(j-1)\ \lambda(B_j) \leqslant M(B_j) \leqslant j\lambda(B_j)$$

para cada conjunto medible $B_j \subset E_j$, con $j \geqslant 1$. Para este propósito consideremos primero la medida λ-M. Por el teorema de descomposición de Hahn existe un conjunto medible $\bar{E}_1$, tal que

$$M(B_1) \leq \lambda (B_1)$$

para cada conjunto medible $B_1 \subset E_1$ y además

$$M(B) \geq \lambda (B)$$

para cada $B \subset Q_\circ - E_1$. Tomemos ahora la medida $2\lambda - M$ en $Q_\circ - E_1$. Existe un conjunto medible $E_2 \subset Q_\circ - E_1$ tal que

$$\lambda (B_2) \leq M(B_2) \leq 2\lambda (B_2)$$

para cada conjunto medible $B_2 \subset E_2$ y $M(B) \geq 2\lambda (B)$ para $B \subset Q_\circ - (E_1 \cup E_2)$, etc.

Sea

$$E_\circ = Q_\circ - \bigcup_{j\geq 1} E_j$$

entonces para cada $j \geq 1$, tenemos

$$\infty > M(Q_\circ) \geq M(E_\circ) \geq j\lambda (E_\circ)$$

de donde obtenemos que $\lambda (E_\circ) = 0$.

Fija j y k consideremos la siguiente función

$$f_{jk}(x) = \sum_i \frac{M(Q_k^i \cap E_j)}{\lambda(Q_k^i \cap E_j)} I_D(x), \quad D = Q_k^i \cap E_j$$

donde los conjuntos Q_k^i son los cubos diadicos con lado de longitud 2^{-k} y I_D denota la función característica del conjunto D. La fracción en la definición de f_{jk} es tomada como cero en caso de que el denominador (y consecuentemente también el numerado) sea cero. Observe que $f_{o,k}(x) = 0$ casi-dondequiera para toda k. Esto permite restringir nuestro argumento a $j \geqslant 1$.

Probaremos para cada $j \geqslant 1$ fija, que

$$\lim_{k \to \infty} f_{jk}(x) = g_j(x)$$

existe casi-dondequiera en Q_o. Es obvio de la definición de E_j y de f_{jk} que para cada $x \varepsilon Q_o$, tenemos

$$f_{jk} \leqslant j$$

para j fija y k arbitrario. Una vez que hemos establecido esto, tenemos para cada unión finita A de cubos diadicos disjuntos

$$\int_{A\cap E} f_{jk}(y)dy = M(A\cap E_j)$$

para k suficientemente grande. De aquí por el teorema de la convergencia acotada, para cada j

$$\int_{A\cap E_j} g_j(y)dy = M(A\cap E_j)$$

así, si $g = \Sigma\, g_j$, entonces $g \varepsilon L^1(Q_o)$ y

$$\int_A g(y)dy = M(A).$$

Pära un medible arbitrario $P \subset Q_o$, tomamos $\{A_k\}$, donde cada A_k es la unión finita disjunta de cubos diadicos, tal que

$\lambda(P - A_k) + \lambda(A_k - P) \to 0$ cuando $k\to\infty$. Entonces por la continuidad de M y de la integral

$$M(P) = \lim_{k\to\infty} M(A_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} g(y)\ dy = \int_p g(y)dy$$

y esto prueba el teorema.

Así solamente resta por probar, que para cada $j\geq 1$, fija, Tómese cualquier conjunto abierto G C_{rs}. Por definición de C_{rs} y por el lema, podemos seleccionar dos sucesiones $\{T_k\}$ y $\{T'_k\}$ de cubos diadicos disjuntos tales que

$$T_k \quad c \quad G$$

$$T'_k \quad c \quad G$$

$$\frac{M(T_k \cap B)}{\lambda(T_k \cap B)} < r$$

$$\frac{M(T'_k \cap B)}{\lambda(T'_k \cap B)} < s$$

$$C_{rs} \quad C \quad U(T_k \quad B)$$

$$C_{rs} \quad C \quad U(T'_k \quad B)$$

así tenemos

$$M(G) \geq M(U\ T_k) \geq \Sigma M(T_k \cap B) \geq \gamma\ \lambda(T_k \cap B) \geq \gamma\ \lambda(C_{rs})$$

$$M(C_{rs}) \leq M(U(T'_k \cap B)) \leq \Sigma M(T'_k \cap B) < \Sigma\, s\lambda\ (T'_k \cap B) \leq s\lambda\ (G)$$

ya que M es absolutamente continua respecto a λ, dado $\varepsilon > o$, podemos elegir G tal que

$$\lim_{k\to\infty} f_{jk}(x)$$

existe casi-dondequiera en $Q_\circ$. Observe que para cada $X\notin E_j$, tenemos $f_{jk}(x)= 0$ para toda k, y que

$$\lim_{k\to\infty} f_{jk}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{M(Qk(x)\cap Ej)}{\lambda(Qk(x)\cap E_j)}$$

para cada $x\varepsilon E_j\ Q_\circ'$, donde los conjuntos $Q_k(x)$ son cubos diadicos que contienen a x y que se contraen hacia x, cuando $k\to\infty$

Sea $E_j = B$ y deseamos probar

$$\bar{D}(M,x)= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{m(Qk(x)\cap B)}{\lambda(Q_k(x)\cap B)} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{M(Qk(x)\cap B)}{\lambda(Qk(x)\cap B)} = \underline{D}(M,x)$$

para casi-todo $X\varepsilon B\ Q_\circ'$. Es claro que $\bar{D}(M, .)$ es medible y menor o igual a j.

Sea el conjunto

$$C_{rs} = \{x\varepsilon Q_\circ'\ B: \bar{D}(M,x) > r > s > \underline{D}(M,s)$$

para números racionales r>s>0. Probaremos que $\lambda(C_{rs})= 0$. Y así tendremos que el límite existe casi-dondequiera

$$\lambda(G) - \lambda(C_{rs}) \leq \varepsilon$$

$$M(G) - M(C_{rs}) \leq \varepsilon$$

Así obtenemos

$$\lambda(C_{rs}) \leq \frac{1}{r} M(G) \leq \frac{1}{r} (\varepsilon + M(C_{rs})) \leq \frac{1}{r} (\varepsilon + s\lambda(G))$$

$$\leq (C_{rs}) \leq \frac{\varepsilon(1 + S)}{r - S}$$

como ε es arbitrario

$$\lambda(C_{rs}) = 0$$

con lo cual tenemos que el límite existe. Y así tenemos la demostración.

B I B L I O G R A F I A

1.- Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund — Measure and Integral an Introduction to Real Analisis.

2.- Miguel de Guzmán, Baldomero Rubio — Integración Teoría y Técnicas.

3.- H.L. Royden — Real Análisis.

4.- R. Courant, F. John — Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.

5.- A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros. — La Matemática, su contenido, Métodos y Significado.

6.- Leon W. Cohen — The Fundamental Theorem of the Calculus and Borel Measure (artículo, Marzo de 1974).

7.- Miguel de Guzmán y Baldemero Rubio — Remarks on the Lebesgue Differentation Theorem, the Vitali Lemma and the Lebesgue-Radon-Nikodym Theorem. (1972, Revista americana de Matemáticas) AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY.