U N I V E R S I D A D D E S O N O R A

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

"MODELOS DE EXPLOTACION OPTIMA DE RECURSOS RENOVABLES"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

HORACIO LEYVA CATELLANOS

Hermosillo, Sonora.   *Julio de 1987.*

INTRODUCCION

Se admite, como una tarea primordial de la ciencia, el dotar al hombre del conocimiento necesario para tener un dominio racional sobre el entorno que conforma.

Acercándonos un poco a éste objetivo con el presente trabajo se persigue, en general, plantear en términos matemáticos diferentes políticas de explotación que el hombre puede llevar a cabo sobre algunos de los recursos naturales renovables que componen su medio. Estos modelos matemáticos nos permiten predecir resultados de la aplicación de tales políticas de cosecha. Las diversas políticas de cosecha nos llevan a considerar distintos tipos de modelos, con características matemáticas como: estáticos y deterministas o no. Nosotros analizaremos y plantearemos los modelos siempre sobre características deterministas y discutiremos el aspecto dinámico, así como la estructura por edades de una cierta población (recurso) a explotar. Pero ante todo, el presente trabajo consiste en observar e interpretar las distintas hipótesis y métodos que permiten encontrar soluciones, así como una dis cusión de tales soluciones y las correspondientes políticas de cosecha. En general, haremos uso, en diferente medida, del cálculo, ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias, y los resultados de la teoría de control óptimo.

Podemos describir la sucesión de los temas de una manera concreta. Primeramente cabe hacer la aclaración de que los modelos de dinámica se clasifican en dos tipos bien definidos: de Schaefer, y de Beverton-Holt.

En el primer tipo se contemplan, de una manera relevante, la maximización del valor presente obtenido de la cosecha. Las diferentes hipótesis sobre los parámetros implicados, tales como precios y costos dependientes del tiempo y los niveles de stock llevan a diferentes expresiones del valor presente a maximizar. Estos problemas, expuestos en el primer capítulo, se resuelven con la ayuda de la teoría de control óptimo. En el segundo grupo se obtienen también políticas de explotación, pero de poblaciones con estructura de edad, que novedosamente, se considera en un sistema de ecuaciones (de evolución) dinámico contínuo en el tiempo y la edad. De tal sistema de evolución, veremos en el segundo capítulo, bajo hipótesis apropiadas sobre los procesos de nacimiento y muerte, una reducción del sistema de evolución, compuesto este sistema por una ecuación diferencial parcial con condiciones iniciales y a la frontera, a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, en base a estos y otros resultados auxiliares se dan políticas óptimas para la cosecha. En el tercer capítulo se contempla la reducción del sistema de evolución a una ecuación diferencial ordinaria no lineal en la que definido un esfuerzo, se clasifican y obtienen políticas óptimas dependiendo de si el esfuerzo es acotado o no. Al final se dan las características de los modelos de explotación de tal forma que se observa la conveniencia y desventaja de cada uno de ellos en una determinada explotación.

CAPITULO I

SECCION 1.1

Sabemos de la necesidad que tiene la humanidad de modelar fenómenos y procesos que intervienen (y determinan) su devenir diario. El estudio de los modelos matemáticos es de lo más necesario para obtener (y medir) soluciones y conclusiones que nos puedan explicar y preveer problemas en situaciones determinadas.

Las dos principales características deseadas para un buen modelo matemático son:

a) Representar fielmente el proceso a modelar, y en la medida en que aumenta cualitativamente esta representación, mejora el modelo.
b) El modelo debe ser también manejable, es decir, deberá ser capaz de estudiarse en base a resultados ya conocidos o posibles de conocerse.

sin olvidar, en lo anterior, la coherencia matemática debida en el planteamiento del modelo. Conocemos la poca afinidad, que en general existe, entre a) y b), claro está que un modelo estará determinado, en última instancia, por el problema en particular a estudiar y los objetivos que se persiguen, lo que dará lugar al debido equilibrio entre las caracterís ticas a) y b).

Al modelar un problema, lo que buscamos realmente es una mejor solución para tal problema. Es decir, si modelamos podemos medir situaciones y soluciones del proceso o fenómeno que de otra manera (sin modelar) no podríamos hacer, de modo que buscamos la mejor solución entre " todas " las posibles (todas las que el modelo permita) y de alguna manera decir qué tan mejor lo es. En otras palabras, y establecido un modelo, lo que interesa ahora, es obtener la solución óptima que el modelo nos pueda brindar.

O P T I M I Z A C I O N

Un problema en el que se desea optimizar (maximizar o - minimizar) una función (funcional) real dada, cuyos argumentos pueden estar sujetos a ciertas restricciones, se conoce como un problema de optimización. Como disciplina matemática, el análisis de problemas de optimización surgió junto con el nacimiento del cálculo diferencial y el cálculo de variaciones.

A partir de la Segunda Guerra Mundial surgió el interés de una clase importante de problemas de optimización, algunos de los cuales no se pueden resolver mediante las técnicas usuales del cálculo. Una gran cantidad de este tipo de problemas nacen debido a la necesidad de hacer un uso eficiente de los recursos disponibles. Este trabajo está encaminado a estudiar modelos para la obtención eficiente de los (algunos) recursos renovables.

RECURSOS RENOVABLES

El estudio de la explotación de los recursos renovables se basa, esencialmente, en la característica que da lugar al adjetivo de renovable. Este tipo de recursos naturales tienen, por definición, cierta capacidad regenerativa, la cual, como es de esperarse, es peculiar de cada especie.

Siendo congruentes con lo dicho, podremos observar en los modelos que estudiaremos, que la capacidad regenerativa mencionada aparecerá, por medio de parámetros, como factor decisivo para determinar las soluciones óptimas buscadas. Tan es así, que la misma clasificación de los modelos de explotación, depende en gran medida, de la forma en que se asuma esta capacidad regenerativa.

OPTIMIZACION DE LA EXPLOTACION

Si pensamos en la optimización de una explotación, debemos precisar primero lo que entendemos por explotación óptima. Es decir, cuándo consideraremos, y bajo qué condiciones,- que se ha hecho la mejor explotación, lo anterior nos lleva de inmediato a esclarecer los medios con que contamos y los fines que buscamos al hacer tal explotación. Lo anterior es absolutamente necesario por que muchas veces sucede que la mejor explotación es irrealizable, otras veces lo que es "mejor" para una persona es "pésimo" para otra, por lo que existe la necesidad de aclarar objetivos y precisar criterios de optimización. Una vez establecido conceptualmente el problema a optimizar, el siguiente paso sería el de escoger la técnica (o método) de optimización, la cual podría ser desde una simple aplicación del cálculo diferencial hasta un proceso de simulación por computadora.

Nosotros empezaremos haciendo uso del cálculo diferencial, y después, planteando el problema de una forma distinta, requeriremos resultados de la teoría de control óptimo. Finalmente haremos un uso amplio del análisis matemático para resolver - el problema de la cosecha óptima planteado con estructura de edad, en un modelo novedoso (con resultados novedosos) por ser continuo en la edad y en el tiempo (y además no lineal).

¿QUÉ OPTIMIZAR?

Empezaremos por clasificar los objetivos que podrían - interesar a cualquier administrador que quisiera explotar, de una manera óptima, un recurso natural renovable; sin olvidar que cada uno de los siguientes objetivos responden a determinadas políticas de explotación.

Generalmente, al explotar un recurso biótico, se persiguen los siguientes fines:

i) Buscar la trayectoria (la población en función del tiempo) del máximo rendimiento sostenible.

ii) Encontrar el nivel de población que maximiza la - renta económica.

iii) Explotar el recurso de tal manera que maximize el valor presente de la renta obtenida de la cosecha.

iv) Obtener una cosecha óptima considerando en la población bajo explotación una estructura de edad.

Analizaremos de una manera más precisa, cada uno de los anteriores objetivos al momento de plantearlos y resolverlos. En el último caso, se define de diferentes formas la cosecha óptima, lo que nos obliga a hacer consideraciones especiales que en su momento describiremos.

LAS POBLACIONES A EXPLOTAR

Si bien es cierto que los recursos renovables tienen semejanzas que van más allá del nombre que las caracteriza, también podemos ver que algunas tienen diferencias que hacen necesario un estudio más profundo y particular. Esto último muchas veces se debe a la dinámica especial establecida entre población a explotar y medio ambiente. Aunado a lo anterior, también es recomendable considerar en una explotación eficiente, factores Socioeconómicos.

Tomando en cuenta lo mencionado arriba y debido a que algunos de los modelos que estudiaremos provienen, de hecho, de la investigación en la actividad pesquera, nos apegaremos, en general, a esta actividad; además nos servirá para ejemplificar e interpretar tanto las hipótesis hechas como los resultados obtenidos.

LA PESCA

Las pesca es la ejecución de aquellas actividades que - con la ayuda de implementos apropiados tienden a la captura de peces.

La pesca puede llamarse *pesquería* cuando sobre las bases de principios de capturas definidos se establecen determinadas actividades, ejecutadas con determinados medios y que se sabe que son aplicados con cierta regularidad en la pesca. Una pesquería se establece comunmente sobre bases comerciales y de subsistencia y tienen una continuidad por lo menos estacional.

La forma en que se combinan los principios de captura, medios, actividades y propósitos de captura constituyen una política de explotación (o de cosecha).

Como es de esperarse, por la naturaleza de esta actividad, en ella se contemplan procesos de tipo biológico, económicos y sociales, principalmente. En una pesquería se pretende, como en todo recurso en explotación, dar políticas óptimas de cosecha, siempre tomando en cuenta criterios ecológicos y socio-económicos.

La pesca óptima, un tema actual, ha sido estudiado con una atención creciente en los últimos años. Es conocida la diferencia entre actividad pesquera y otras actividades de explotación de recursos. Se sabe que esta diferencia se debe, en gran parte, a las fluctuaciones (muy aleatorias) del tamaño de las poblaciones a cosechar así como las características especiales de esta actividad, que mencionaremos posteriormente. Por consiguiente, analogías hechas con la explotación de bosques, agricultura y recursos renovables en general, deberán hacerse con gran cuidado. Dicho lo anterior no deberá extrañarnos que las políticas de cosecha óptima para pesquerías resulten diferentes a sus semejantes para con otros recursos renovables.

Consideraremos fundamentalmente dos tipos de explotación: la de ambiente controlado y de ambiente no controlado, entendiendo como "ambiente" al medio en que se desenvuelve la población (o Biomasa) explotable. Como de ambiente no controlado tenemos de ejemplo la llamada "pesquería de mar abierto" en quien es también, por razones obvias, la de mayor presencia, (o acceso abierto). En el primer tipo de explotación podemos considerar la pesca de ambiente controlado, que por conveniencia, la consideraremos como programas experimentales y de conservación con poca (o nula) presencia comercial y con fuerte dirección ecológica.

Contemplaremos nuestros modelos de cosecha óptima en los dos tipos de explotación anteriores; veremos en los modelos de explotación comercial (de acceso abierto) que hemos considerado, que el problema del manejo de recursos, en este caso, es seleccionar un *flujo de consumo óptimo* dependiente del tiempo, lo cual implica seleccionar un *nivel óptimo* de la Biomasa (o población) como función del tiempo.

El modelo de cosecha óptima que considera una estructura de edad la población se contempla de una manera aceptable, como de ambiente controlado. Así que, congruentemente, la explotación óptima consiste en el máximo rendimiento sostenible.

SECCION 1.2

MODELOS: SCHAEFER Y BEVERTON-HOLT

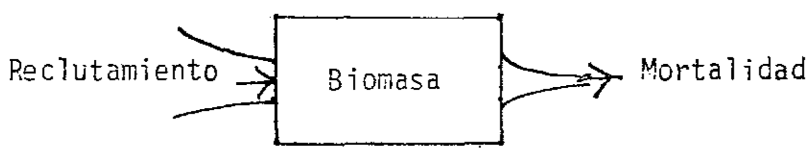
Los tipos de modelos más usados para describir la dinámica de una población en pesquerías son:

a) El modelo de Schaefer

b) Modelo de Beverton-Holt.

Sus características son:

a) Este tipo de modelo es el más sencillo de los dos y su consideración básica es que considera la regeneración de la biomasa (no solo de la población) como un solo proceso indivisible. Es también llamado de rendimiento sobrante. Para entender este tipo de modelos podemos asociarlos con una "caja negra" representando el Stock - de la biomasa e interpretando su tasa de crecimiento r como un parámetro que mide las entradas y salidas (naturales) de la biomasa.



b) Estos tipos de modelos, también como analíticos o modelos de dinámica mancomunada por diversos factores, tiene como característica principal considerar clases de edades (o camadas) en la dinámica poblacional.

A manera de observación diremos que Beverton y Holt reconocen lo inadecuado de su tipo de modelos para determinar factores dinámicos, tales como la recuperación óptima de un stock sobreexplotado. El análisis dinámico de los modelos Beverton-Holt es mucho más difícil que el análisis dinámico de los modelos de

Schaefer. "Los resultados obtenidos son incompletos y muchas cuestiones importantes se mantienen sin resolver".

Veamos como podemos diferenciar, de una manera sencilla, los dos primeros objetivos anteriores(1). Para ello consideremos a $f(x)$ la función logística representando el reclutamiento neto de la población $x(t)$ en la siguiente ecuación,

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{r}{k}\,x(k-x)$$

donde r es la tasa de crecimiento del reclutamiento y k la capacidad de reclutamiento del medio.

El componente económico de nuestro modelo consiste de un precio constante $P>0$ por unidad de stock cosechado y un costo por unidad de cosecha $c(x)$, que lo haremos dependiente del tamaño x de la población. Aquí, la suposición simple consiste en que el costo por unidad de cosecha es inversamente proporcional a la densidad de la población, de tal forma que el costo total del rendimiento sostenible $f(x)$ es $C = \frac{Af(x)}{x} = \frac{Ar}{k}(k-x)$ siendo $c(x) = \frac{A}{x}$ el costo por unidad de cosecha al nivel poblacional $x(t)$ de tal forma que el ingreso neto I (el precio total - el costo total) esta dada por:

$$I = P\left(\frac{r}{k}\right)x(k-x) - A\left(\frac{r}{k}\right)(k-x)$$

(1) La diferencia de todos los objetivos las veremos al final.

(2) La función logística es $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)$; ver (1) de la bibliografía

Encontrando el nivel $\hat{X}$ población que maximiza la renta I

$$\frac{dI}{dx} = Pr - 2P(\frac{r}{k})\hat{X} + A(\frac{r}{k}) = 0$$

$$\Longrightarrow \hat{X} = \frac{k}{2} + \frac{A}{2P}$$

Sabemos que el nivel $\frac{k}{2}$ corresponde al máximo (reclutamiento) sostenible.

Podemos ver que la política de maximizar la renta, considerando un costo nulo (A=0) corresponde a la política óptima del máximo reclutamiento sostenible.

Debido a que la población $\hat{X}$ que maximiza la renta es mayor que el nivel $\frac{k}{2}$ de máximo rendimiento sostenible, tiene sentido plantearnos la siguiente pregunta:

¿Qué diferencia establece el resultado anterior en las pesquerías de propiedad privada reservadas a cooperativas contra las pesquerías de explotación general, de propiedad común (de competencia entre pescadores)?

En las pescaderías del primer grupo los propietarios y concesionarios tenderán a conservar el stock debido al recurso, (al menos en principio); es decir, según el modelo senci llo anterior, tenderán a alejarse de la extinción económica, que consiste en el nivel de Stock X_o, para el cual se tiene que el ingreso I=0, por lo que $X_o = \frac{A}{P}$.

Con respecto a las pescaderías del segundo grupo, los pescadores son libres, en principio, de pescar donde les plazca. El resultado es un modelo de competición entre pescadores el cual termina en la disipación de la renta. Esto se presenta debido a que en un principio hay utilidades en la pesquería por un determinado número de pescadores; por esto, nuevos pescadores son atraídos por las utilidades aumentando la intensidad de la pesca, continuando esto hasta llegar al nivel de Stock X_o de renta nula.

Al ver el análisis anterior desde un punto ecológico podemos observar que para A grande y P pequeño se tiene un nivel de renta nula X_o grande por lo que se puede pensar que se está lejos de la extinción biológica. Pero, ¿que pasa, en los dos grupos de pesquerías, si A es pequeño y P grande?. La respuesta es obvia y obliga a medir los niveles de cosecha practicados en pesquerías"eficientes".

En la práctica, a los pescadores no les parece atractivo una pesquería cuando ellos pueden obtener mayores ingresos en algún empleo alternativo. Esta alternativa de ingresos deter-

o que los economistas llaman la oportunidad de costos
ajo en pesquerías, y estos costos son normalmente in
en la función costo total.

casos de alto desempleo (en pesquerías), la oportuni
ostos para los pescadores puede ser casi nulo, de tal
e el argumento de la disipación de la renta es parti
e fuerte para explicar la sobreexplotación en pes-

los fuertes defectos de lo que hasta aquí hemos
s la separación de la variable tiempo, tanto bio
económicamente.

lado biológico, la población toma tiempo para res
presiones de la cosecha y tarda, en algunos casos,
radas (definida para cada especie) para solamente
vos "equilibrios". Por otro lado, sabemos que la
ómica posee un importante componente tiempo debi

cio por unidad de cosecha puede cambiar.
to C, por unidad de cosecha, también puede cambiar,
nsiderando niveles constantes del Stock bajo explo

sas de interés le imprimen una componente tiempo -
inversión (entiéndase esfuerzo pesquero).

El factor *iii)* nos obliga a introducir el concepto de valor presente.

EL VALOR PRESENTE

Si tenemos un capital I invertido a interés compuesto, este valor se incrementará de acuerdo a la fórmula:

> Valor futuro= $I(1+i)^n$ donde i representa la tasa anual de interés (compuesto anualmente) y n denota el número de años desde el presente. Si consideramos ahora $\delta=\ln(1+i)$ en la fórmula general, se tendrá:
>
> Valor futuro= $Ie^{\delta t}$ para un tiempo arbitrario $t \geqslant 0$ y δ representando la tasa anual de interés compuesto contínuamente.

Descontar el valor de futuros capitales es simplemente el proceso inverso de componer el interés de capitales presentes. De acuerdo con lo anterior, el valor presente de un capital t pagadero a t años desde ahora, está dado por valor presente = $Ie^{-\delta t}$.

Usualmente se le conoce a δ como tasa de descuento instantánea anual[1].

(1) Tasa de descuento y tasa de interés son en la práctica, sinónimos.

Asímismo, el valor presente total VP de una sucesión de capitales I_o, I_1, ..., I_n pagaderos en 0,1,2,...,N años, respectivamente, está dado por:

$$VP = \sum_{k=0}^{N} \frac{I_k}{(1+i)^k}$$

similarmente, el valor presente de un flujo continuo de ingresos I(t) en $0 \leq t < T$, es dado por:

$$VP = \int_0^T I(t)\ e^{-\delta t} dt \qquad (*)$$

donde el tiempo T (o N) se conoce como el tiempo horizonte el cual puede ser finito o infinito.

Con respecto a nuestro problema, los ingresos I(t) planteado por (*) están dados como I(t)= (P-C)h(t) donde P y C - son los precios y costos por unidad de cosecha y $h(t) \geq 0$ denota el nivel de cosecha al tiempo t(1) con lo que el problema consiste en encontrar el nivel X* del Stock que maximiza (*), lo cual podremos lograr mediante el debido control del nivel de cosecha h(t).

Trataremos a continuación de explicar de una manera sencilla esta política de optimización.

(1) Obsérvese que los ingresos I(t) pueden ser negativos, si c>p, sin perder sentido nuestro problema.

Supóngase que en un principio se tiene el nivel de población $X(t)$ en equilibrio natural y modelado por Schaefer (sin explotación) de tal forma que dados los parámetros δ, P y C se puede encontrar el nivel $X^*(t)$ que maximiza el valor presente mediante el control $h(t)$; de modo que, siendo $X(t) \geq X^*(t)$, $X^*(t)$ es la parte del stock $X(t)$ que conviene, según esta política óptima, conservar como recurso, la otra parte $X(t)-X^*(t)$ es la parte de $X(t)$ que conviene cosechar (o consumir).

Podemos hablar de $X^*(t)$ como el flujo de Stock por conservar y de $X(t)-X^*(t)$ como el flujo de Stock por consumir.

El planteamiento anterior es solo para efectos de explicación; de hecho, la consideración $x(t) \geqslant x^*(t)$ no tiene porqué ser cierta para toda t.

Podemos ahora, adelantando resultados, hacer la siguiente correspondencia. A tasas altas de descuento δ corresponden grandes flujos por consumir y a tasas bajas de descuento δ corresponden flujos pequeños por consumir. Esto, sin considerar el precio P y el costo C por unidad de cosecha que también, como es de esperar, determinen los flujos de Stock por conservar (y consumir).

Con lo anterior podemos asegurar que, al tener en el valor presente un tiempo T igual a infinito, y maximizar el valor presente asi planteado, nos resulta que *la utilidad inmedia* *ta obtenida del "flujo por consumir" excede el valor presente de los ingresos que serían obtenidos en perpetuidad por conservar a éste.*

LOS PARAMETROS

Dentro de los modelos de Schaefer consideraremos la explotación óptima consistente en la maximización del valor presente. Dentro de este marco, introducimos los siguientes (principales) parámetros ecológicos:

i) r - tasa de crecimiento

ii) k - capacidad de carga del medio.

Se sabe que la función F(x) de crecimiento natural de una población es regida por combinaciones de factores ecológicos del medio en que se desenvuelve esta población X(t), así como características propias de ésta. Factores como el tamaño del espacio vital, competencia por alimentos, depredación, conducta social y epidemias, pueden ser importantes al determinar la función de crecimiento natural, de tal forma que la tasa de crecimiento natural neto r se obtiene de considerar r=b-m donde b es la tasa de nacimiento natural y m la tasa de mortalidad natural de la población. En los modelos de Schaefer, r representa el incremento neto natural del Stock poblacional (o biomasa) $x(t)$.

El factor k representa, en la función de crecimiento natural, una medida del espacio vital a considerar. Nosotros lo consideramos como un constante k tal que, $k = \lim_{t \to \infty} x(t)$ donde la biomasa $x(t)$ se desenvuelve sin presiones de cosecha. Obsérvese que la función logística de crecimiento natural es del tipo anterior, por lo que no dudaremos de recurrir a ella en análisis posteriores.

Al aplicar una cosecha y querer optimizar éste mediante el valor presente, se introducen los siguientes parámetros provenientes de la interación socio-económica, como son:

iii) c - costo por unidad de cosecha

iv) P - precio por unidad de cosecha

v) E - esfuerzo de cosecha (o de pesca)

vi) δ - tasa de descuento.

Un paso previo y necesario en la maximización del valor presente es el de conocer (los daremos por conocidos) y analizar los parámetros anteriores. Las diferentes suposiciones que se pueden hacer sobre ellos, como las diversas dependencias del precio, costo y esfuerzo con respecto al tiem po, y la misma interrelación entre estos parámetros, dan lugar a los diferentes modelos de valores presentes de ingresos derivados de la explotación.

Diremos que el esfuerzo pesquero $E(t)$ es "esfuerzo pesquero efectivo" cuando sea proporcional a la tasa instantánea de mortalidad por pesca a la que está sometido el Stock.[1] En nuestro modelos de valor presente no se considera, por conveniencia de cálculos, directamente al esfuerzo $E(t)$ sino por medio de una función (cosecha) $h(t)$ del nivel de cosecha, de tal forma que si se considera una cota (superior) para el esfuerzo $E(t)$, se obtiene, de inmediato, una cota para $h(t)$.

El costo por unidad de cosecha C la daremos por conocida y la haremos dependiente tanto del tiempo como del tamaño del Stock $x(t)$; el precio P por unidad de cosecha lo podremos hacer dependiente del tiempo, y también, lo daremos por conocida. independientemente de las hipótesis adicionales que se hagan sobre el esfuerzo $E(t)$, el precio P y el costo C, siempre supondremos que el nivel de cosecha $h(t)$ es igual el nivel de consumo para cada tiempo t.

En cuanto al factor descuento δ representará siempre la tasa real de interés, donde ésta es:

(1)El esfuerzo pesquero nominal se define como la magnitud de que dispone una pesquería para que, por medio de transformaciones adecuadas, se calcule el esfuerzo pesquero efectivo.

tasa real de interés	=	tasa nominal de interés	-	tasa de inflación

y consideraremos a δ siempre constante conocida y positiva.

Podemos observar la poca relevancia que tiene una explotación el maximizar los ingresos económicos. La misma dinámica del mercado impone el maximizar el valor presente del flujo de ingresos esperados de la explotación. Con tal enfoque podemos hacer diversas consideraciones sobre los parámetros económicos implicados en el valor presente, de tal forma que podemos plantear el problema de maximizar el valor presente de diferentes maneras, tales que requerirán de diferentes formas de resolver el problema, pero siempre con la ayuda de la teoría de control óptimo. En todo incremento consideraremos a la tasa de descuento constante y las principales hipótesis que haremos sobre los factores costo y precio por unidad de cosecha se contemplan en los siguientes casos:

Caso I) *i)* P es constante

ii) c(x) es
- lineal en la cosecha
- decreciente en la biomasa

como $C_E = aE$, $h(t) = bEX^B$ $\Longrightarrow c(x) = A\,\dfrac{h(t)}{X^B}$

Caso II) *i)* P(t) depende del tiempo (y puede ser arbitrariamente grande)

ii) Se permiten cambios a c(x) con respecto al tiempo i.e. $c(x,t) = \phi(t)c(x,t)$ en $0 \leqslant t < \infty$

Caso III) *i)* Cedemos en la hipótesis de que la función $P(t)$ pueda ser no acotada.

ii) Permitimos que el costo por esfuerzo sea no lineal en el esfuerzo lo que implica que el costo por cosecha es no lineal en cosecha. i-e se supone que

$$\frac{\partial^2 C_E}{\partial E^2} > 0 \quad \text{lo que implica} \quad \frac{\partial^2 C_h}{\partial h^2} > 0 \ (1)$$

donde C_E y C_h denotan el costo total de esfuerzo y cosecha respectivamente.

SECCION 1.3

LA MAXIMIZACION DEL VALOR PRESENTE; DIFERENTES CASOS.

CASO 1:

El caso 1 nos lleva a plantear el problema básico. Con la ecuación de estado $\frac{dx}{dt} = F(x)-h(t)$, $X(\circ)= X_\circ$ el objetivo es maximizar el valor presente de los ingresos: $I(t)= (P-C[x(t)])\, h(t)$ por medio de $vp= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\{P-C[x(t)]\}h(t)dt$. bajo el control $h(t)$; $0 \leq h(t) \leq hmax$, para determinar la población óptima $X^*(t)$. Este es un problema de control óptimo lineal por ser el integrando de vp lineal con respecto al control $h(t)$.

(1) La introducción de estas hipótesis se debe a la consideración de efectos depresivos en la dinámica costo-cosecha de la explotación. Obsérvese que lo anterior no se considera en los casos I y II.

CASO 2:

Modificando el modelo básico anterior, con el fin de tomar en cuenta las hipótesis básicas del caso, se considera la ecuación de estado $\frac{dx}{dt} = F(x)-h(t)$; $X(\circ)=X_\circ$ con el objetivo de maximizar el valor presente de los ingresos - $I(t)=[P(t)-\phi(t)c(X(t))]h(t)$ por medio de

$$vp= \int_0^\infty e^{-\delta t}[P(t)-\phi(t)c(x(t))]h(t)dt$$

bajo el control $h(t)$; $0\leq h(t)\leq hmax$. Tal problema se denomina de control óptimo no autónomo por ser el integrando, en vp, de tal tipo.

CASO 3:

De nuevo bajo la misma ecuación de estado $\frac{dx}{dt}=F(x)-h(t)$; $X(\circ)=X_\circ$ se busca el nivel poblacional óptimo $X^*(t)$ que maximiza el valor presente

$$vp = \int_0^\infty e^{-\delta t}[U(h)-C(x,h)h]d\tau$$

considerando $0\leq h(t)\leq hmax$ y tomando en cuenta que las hipótesis para tal caso nos permite expresar $U(h)=\int_0^h p(\alpha)d\alpha$. Que represente el beneficio social bruto, y que debido a las características de P (beneficio social marginal) se supone que $U'(h)>0$ y $U''(h)<0$.

Analizando los planteamientos anteriores más en detalle podemos decir que los modelos de Schaefer se caracterizan por no considerar parámetros propios de la estructura interna de la población; tales como tasas de nacimiento, mortalidad y distribución de la población con respecto a la edad; este tipo de modelos solo nos dan la dinámica "externa" o global de la población. Para ello solo necesitamos conocer una tasa de crecimiento constante r de la población o biomasa $X(t)$ y un capacidad de carga K del medio para con la población, de tal forma que la función natural de crecimiento $F(x)$ en $\frac{dx}{dt} = F(x)$ (1) tiene las siguientes características:

$F(x)>0$ para $0<X<K$, $f(o)= F(k)=0$ con $K= \lim_{t\to\infty} X(t)$ y $F''(x)<0$.

Observemos que la función de crecimiento logística $F(x)=rx\ (1- \frac{X}{K})$ satisface las hipótesis anteriores, incluyendo la solución $X(t)= \frac{K}{1+Ce^{-rt}}$ de (1) donde $\lim_{t\to\infty} X(t)=K$.

Si ahora queremos modelar la dinámica de la población anterior con explotación, podemos introducir una tasa de cosecha $h(r)\geqslant 0$ por lo que la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{dX}{dt} = F(x) - h(t) \qquad (2)$$

Para análisis posteriores supondremos también que h(t) es igual a la tasa de consumo (lo cual nos permite ver a $\frac{dx}{dt}$ como la tasa de inversión (positiva o negativa) para con el Stock) y el precio P por unidad de cosecha mide adecuadamente el beneficio social (neto) derivado del consumo de pescado.

Bajo esta perspectiva el problema es determinar $h^*(t)$ y $X^*(t)$ que maximizan la utilidad social, de esta última forma podemos interpretar también la maximización del valor presente.

Con tales ideas podemos decir que los modelos de explotación comercial pueden ser planteados en base a los modelos de Schaefer, y con ayuda del factor descuento se pueden plantear los tres casos anteriores de valor presente.

Denotando por C_E el costo del esfuerzo total E y C_h el costo de la cosecha total h(t), supondremos (para los dos primeros casos) que $C_E=aE$; $a>0$ y en general que; $h(t)=b\ E\ X^{\beta}$; $b>0$ y $\beta>0$. Lo que nos lleva a $C_h=\frac{ah(t)}{bx^{\beta}}$ es decir, C_h depende linealmente de h(t) y es decreciente con respecto a X.

En todo momento, la ecuación diferencial fundamental o ecuación de estado es $\frac{dx}{dt} = F(x)-h(t)$.

Con $X=x(t)\geqslant 0$ como la variable de estado y $h=h(t)\geqslant 0$ es la variable de control con $0\leqslant h(t)\leqslant hmax$; de tal forma que $x(0)=X_0$ y $hmax$ son supuestas conocidas.

El objetivo para los tres casos será el de maximizar el valor presente de la renta derivada de la cosecha (pesca) sujeto a las restricciones

$$\frac{dx}{dt} = F(x)-h(t); \quad X(0)=X_0 \quad y \quad 0\leqslant h(t)\leqslant hmax. \qquad (3)$$

que para el primer caso; precio constante y costos lineales en cosecha con $vp=\int_0^\infty e^{-\overset{\delta}{\alpha} t}\{P-C\boxed{x(t)}\}h(t)dt$ el problema está planteado y puede resolverse vía el principio del máximo, resultando que la solución singular X^* debe satisfacer

$$\frac{d\{(P-C(X^*))F(X^*)\}}{dX^*} = (P-C(X^*))\delta \qquad (4)$$

En la ecuación anterior, la solución de equilibrio $X^*(t)$ puede no ser única, si existe. En el caso de ser $F(x)$ la función logística y $c(x)= \frac{c}{x}$, como principales condiciones, tenemos que existe una solución única $X^*>0$; tal resultado puede -

deducirse de la ecuación (4). De aquí en adelante supondremos para cada caso, la unicidad de X^*; es decir, que las hipótesis en el planteamiento del problema son tales que permiten a las ecuaciones resultantes (como ecuación (4) para este caso) tener solución X^* única.

La ecuación (4) no incluye a t explícitamente, ya que la solución X^* es constante como solución de estado estable. Derivando la ecuación (4), obtenemos:

$$-C'(X')F(X^*) + (P-C'(X^*))\ F''(X^*) = \delta(P-C''(X^*))$$

$$\Longrightarrow F'(X^*) - \frac{C'(X^*)\ F(X^*)}{P-C'(X^*)} = \delta \qquad (6)$$

El término $-\dfrac{C'(X^*)\ F(X^*)}{P-C(X^*)}$ se conoce como "efecto Stock marginal".

Dos observaciones importantes podemos hacer en base a la ecuación (6).

(1) *En este modelo, los costos de cosecha influyen en la optimización del nivel de Stock por medio del efecto Stock marginal. Todavía más, si los costos de cosecha son insensibles al tamaño de la biomasa entonces el proceso de optimización se vuelve irrelevante, esto último se ve en (6) si ponemos* $C'(X^*)=0 \Longrightarrow F'(X^*)=\delta$ *; es decir, en tal caso, el nivel po*

blacional óptimo X^* es para el cual se tiene una velocidad de crecimiento de la población igual a δ.

(2) Podemos acercarnos[1] a un manejo social racional de la explotación a partir de la ecuación (6). Comparando el efecto stock marginal en X_{msy} (X_{msy} nivel poblacional del máximo rendimiento sostenible) con el valor de la tasa de descuento δ.

$$\text{Sea} \quad R = -\frac{C'(X_{msy})\ F(X_{msy})}{P - C(X_{msy})}$$

Veamos que nos dice la ecuación (6) en X_{msy}

Si $\delta > R$ entonces X^* es tal que $F(X^*)$ crece.

Si $\delta = R$ se tiene que $F(X^*) = \underset{X}{\text{Max}}\ F$ tal que $X^* = X_{msy}$

Si $\delta < R$ se llega a que $F(X^*)$ es decreciente.

de tal forma que podemos establecer

$$X^* \quad \begin{matrix} < X_{msy} & \text{si } \delta > R \\ = X_{msy} & \text{si } \delta = R \\ > X_{msy} & \text{si } \delta < R \end{matrix}$$

Observemos como condición para una sobrepesca biológica que $P > C(X_{msy})$. Además si $P > C(X_{msy})$, se tendría una sobrepesca biológica si $\delta = \infty$.

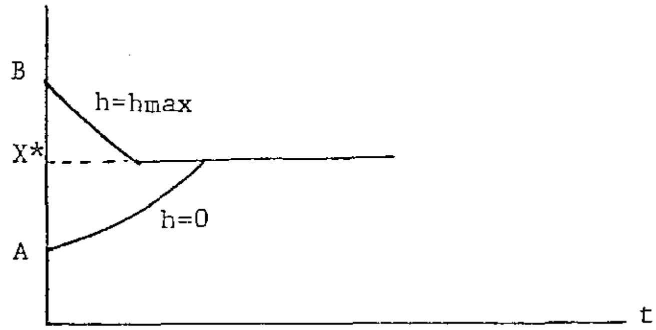
(1) Digo "acercarnos", ya que una sobrepesca biológica dependerá de los tamaños relativos de R y δ.

Comparando este modelo dinámico con el modelo estático, el de maximización sostenible de la renta que ya vimos, observamos que son iguales si $\delta=0$, ya que en la ecuación -(5) se reduce a $\frac{d\{(P-C(X^*))F(X^*)\}}{dX^*}= 0$, que es la ecuación cuyo nivel de biomasa óptimo es la del rendimiento sostenible que maximiza la renta.

Siguiendo el estudio de la ecuación de estado original, para cuando $\delta>0$ y con el objetivo de encontrar la trayectoria óptima X^*, considerando la linealidad del modelo presente y previniendo la unicidad de X^* se llega (ver apéndice) a que la estrategia óptima es la llamada estrategia bang- -bang que consiste en;

$$h^*(t)= \begin{cases} h_{max} & \text{si} \quad x(t)<X^* \\ 0 & \text{si} \quad x(t)<X^* \end{cases}$$

es decir, la máxima cosecha (inversión) es óptima si $X(t)>X^*$ y la mínima cosecha (o máxima desinversión) es óptima si -$X(t)<X^*$. Consecuentemente, la estrategia óptima para los niveles poblacionales son tales que:



Es decir, si los costos por unicidad de cosecha no cambian con la tasa de cosecha, y si para $t=0$ estamos en A, la estrategia óptima será no cosechar al máximo hasta alcanzar X^* para, seguidamente cesar de no cosechar. Por otro lado, si comenzamos en B, la estrategia será cosechar el máximo hasta alcanzar X^*, y una vez alcanzado se deberá cesar de cosechar al máximo.

Para el caso 2 se considera que los precios no se mantienen constantes y que los costos demandan cambios con respecto al tiempo desde $t=0$ a ∞, asumiendo además que las funciones precio y costo son conocidos, denotados por $P(t)$ y $C(x,t)$ respectivamente, con $C(x,t)= \phi(t)\ C(x(t))$ donde $\phi(t)\geqslant 0$ es el coeficiente variable que permite cambios en los costos con respecto a t. Aquí también pretendemos maximizar vp con

$$vp = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left[P(t)-\phi(t)C(X(t))\right]\ h(t)dt \qquad (7)$$

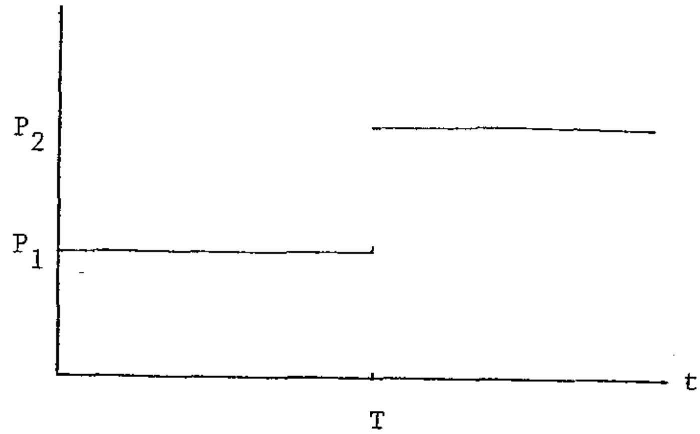
de nuevo bajo las condiciones naturales que establece (3).

Problema que nos lleva a la ecuación para la solución singular $X=X^*(t)$:

$$F'(X^*) - \frac{\phi(t)\ C'(X^*)F(X^*)}{P(t)-\phi(t)\ C(X^*)} = \delta - \frac{P(t)-\phi(t)\ C(X^*)}{P(t)-\phi(t)\ C(X^*)} \quad (8)$$

de nuevo se supone que los parámetros, y principalmente $F(x)$ y $C(x,t)$, fueron tomadas de tal forma que se puede suponer que (8) tiene solución única X^* para cada punto entonces - $X^*(t)$ será la trayectoria óptima para el nivel de biomasa.

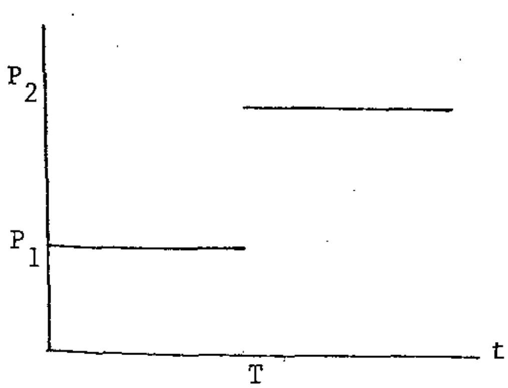
La nueva regla (8) que se establece para X^* difiere de la anterior, [de (6)] en cuanto a que la regla (8), *para cada tiempo t*, toma en cuenta el crecimiento del precio y el costo por unidad de cosecha, de tal forma que para precios altos o costos bajos o ambos casos provocarán niveles bajos de stock al incrementarse la cosecha; pero la regla (8) no contempla, comparativamente, el futuro y el pasado, sino que los ajustes ya descritos los lleva a cabo para cada instante t; para ejemplificar esto último, supongamos lo siguiente: se espera un incremento (instantáneo y substancial) en el precio, en un tiempo futuro T.

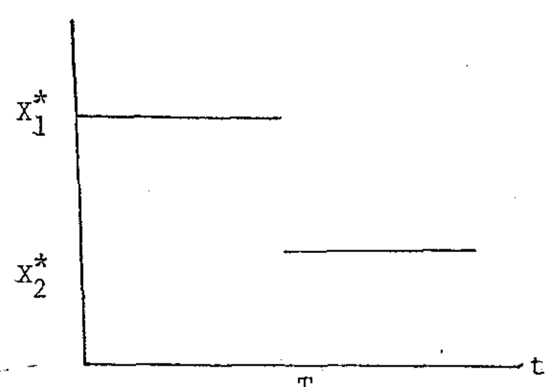


Como buscamos la trayectoria óptima $X^*(t)$ que maximiza a vp de (7), ésta deberá ser tal que (8) se mantiene para cada t. Pero. ¿Qué tal si permitimos un efecto de anticipación para contemplar el aumento del precio $p(t)$ a partir de T?

La trayectoria anterior se hace a partir de que $h(t)$ está restringida por $0 \leq h(t) \leq hmax$ y por lo tanto es imposible obtener la $X^*(t)$ idealmente existente, pues no se pueden alcanzar estos niveles óptimos en un instante t.

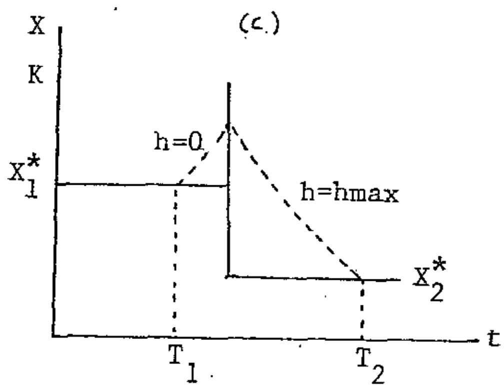
La solución idealmente existente, debe ser tal que para precios altos (constantes) se tienen niveles de stock óptimos bajos, y viceversa, tal que, gráficamente;





la relación está en que si se tiene la gráfica (A) para los precios, entonces se deberá tener la gráfica (B) para el stock óptimo. (B) es la solución $X^*(t)$ que se encuentra al maximizar vp de (7) con la ecuación (8).

Siendo más generales (para responder la pregunta anterior) que los casos solución considerados por (8), tomemos en cuenta lo siguiente: si suponemos la existencia de un tiempo $t_1 \leq T$, a partir del cual es conveniente dejar de cosechar, para aumentar el nivel de stock a partir de X_1^* y cosechar al máximo (con h(t)= hmax) una vez presente T, hasta un tiempo $t_2 \geq T$ que es el tiempo para el cual se llega a X_2^*.



es decir, en (c) - - - - - - es la solución propuesta al maximizar (7) y considerando la conveniencia descrita antes. Para este caso (c), tenemos que el valor presente (7) se convierte en;

$$vp= \int_0^{t_1} e^{-\delta t}(P_1-\phi_1 c(X_1^*))\ F(X_1^*)dt$$

$$+\int_{t}^{t_2} e^{-\delta t}(P_2-\phi_2\, C(x,t)\text{hmax}\, dt \;+\; \int_{t_2}^{\infty} e^{-\delta t}(P_2-\phi_2\, C(X_2^*))F(X_2^*)dt$$

donde X_1^* y X_2^* son los niveles constantes dados por (8) al aceptar P_1 y P_2. Una vez encontrado el t_1 óptimo, es posible encontrar $X(t)$ (T se supone conocida) mediante la solución de la ecuación de libre crecimiento $\frac{dx}{dt} = F(x)$ y es posible encontrar tambien t_2 con la solución $X_{max}^{(t)}$ de la ecuación $\frac{dx}{dt} = F(x)-\text{hmax}$ con $X(T)=X_T$ como condición inicial e igualando $X_{max}^{(t)} = X_2^*$ para encontrar t_2, podemos ver incluso a t_2 como función de t_1.

Para encontrar t_1 óptimo podemos diferenciar a vp de (9) con respecto a t_1 e igualando a cero. Es decir, $\frac{\partial Pv}{\partial t_1} = 0$ de donde se obtiene:

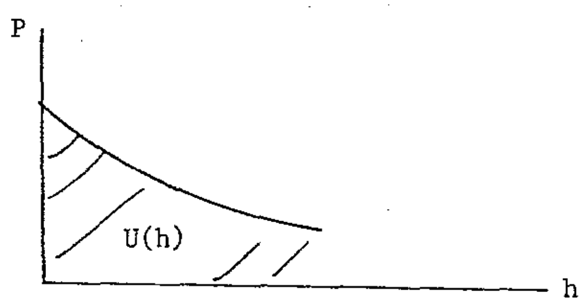
$$e^{-\delta t_1}[P_1-\phi_1\, C(X_1^*)]F(X_1^*) = \{e^{-\delta t_2}[P_2-\phi_2\, C(X_2^*)]\; F(X_2^*)-\text{hmax})\}\,\frac{dt_2}{dt_1}$$

$$+\int_{T}^{T_2} e^{-\delta t}\,\frac{\partial\phi_2\, C[X(t,t_1)\quad \text{hmax}}{\partial t_1}\,dt$$

para el caso $t_1=T$ nos queda (7) con (8). Es decir, no hay aumento en T y se tendría $X_1^* = X_2^*$.

A los intervalos (t_1,T) y (T,t_2) se les conoce como intervalos bloqueados. La conveniencia de introducir este último es tudio marginal de intervalos bloqueados se introducen como (9), es decir, sobre los X^* que satisfacen (7) y (8) en los intervalos no bloqueados.

Una de las hipótesis para el caso 3 consiste en no permitir el precio para tomar valores infinitos, lo que nos permite definir la función $U(h)= \int_0^h P(\partial)d\partial$. Como se supone que el precio del pescado representa, adecuadamente, el beneficio social marginal derivado del consumo de pescado, se puede entonces representar el beneficio social total de la tasa de cosecha h por medio de U(h), que gráficamente, con $U'(h)>0$ y $U''(h)<0$



Nuevamente, como en los casos anteriores, se quiere maximizar vp con

$$vp = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[U(h)-C(x,h)h \right] dt$$

donde C(x,h) denota el costo por unidad de cosecha como función de x y h y sin olvidar las restricciones (3) para todos los casos, del principio del máximo, en el caso no lineal, obtenemos la ecuación para soluciones óptimas en equilibrio (es decir, con $f(X^*)=h$)

$$F'(x^*) - \frac{\dfrac{\partial C(X^*,F(X^*))}{\partial X^*}\quad F(X^*)}{P(F(X^*))-\left[C(X^*,F(X^*))\right]+\dfrac{\partial C(X^*,F(X^*))}{\partial h}\;F(X^*)} = \delta$$

Suponiendo unicidad en el punto de equilibrio X*, se puede observar en este modelo no lineal, que se tiene una aproximación óptima al punto de equilibrio de tipo asintótica[1] que contrasta con la aproximación "bang-bang" en el caso lineal. La regla de decisión a ser aplicada a lo largo de la trayectoria de aproximación puede ser expresada como:

$$F'(x) - \frac{\dfrac{\partial C(x,h))}{\partial x}\cdot h}{P(h)-\left[C(x,h)+\dfrac{\partial C(x,h))}{\partial h}\cdot h\right]} + \frac{\dot{\psi}}{\psi} = \delta$$

donde ψ representa el precio, en la demanda del recurso, al aproximarse al punto de equilibrio, es de esperar cambios en ψ , por lo que $\dot{\psi}$ tiene sentido, pero una vez alcanzado X* se tiene $\dot{\psi}=0$ y con ello la solución inicial.

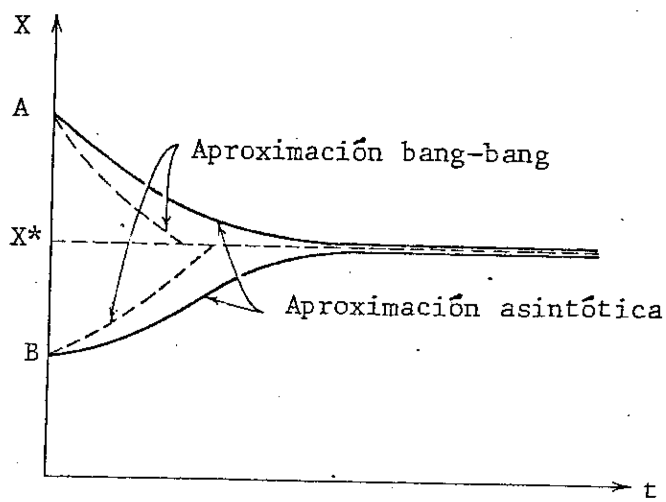
Considerando los ingresos R(h) en vp= $\int_0^\infty e^{-\delta t}R(h)dt$ tal que R(h) se logra por medio de $[U(h)-(x,h)h]$ con la relación $h=bEX^{\beta}$ y las hipótesis $U'(h)=p(h)>0$ y $U''(h)=P'(h)<0$ donde

(1) La trayectoria óptima se obtiene observando el diagrama del plano fase (x,h). Tal diagrama se puede obtener por medio de las isoclinas $\begin{cases}\dot{h}=0\\ \dot{x}=0\end{cases}$ en base a $\dot{h}=\dfrac{R'(h)}{R''(h)}(\delta-F'(x))$ y $\dot{x}=F(x)-h.$

la consideración $P'(h)<0$ (no constante) es debida a efectos de "depresión" en el stock. Además se pueden analizar estas isoclinas para pasar de un tiempo-horizonte T finito a un infinito mediante la aproximación de las trayectorias óptimas (una para cada T) a las separatrices al tender T a ∞.

A diferencia del caso lineal, se encuentra que la política óptima consiste en aproximarse asintóticamente al nivel óptimo X*.

Gráficamente:



Con A si $X_0>X^*$
y B si $X_0<X^*$

CAPITULO II

SECCION 2.1.

Lo que haremos ahora es, en 1er. lugar, hacer algunas consideraciones sobre los procesos de nacimiento y muerte - para reducir la dinámica poblacional con cosechas planteada por el sistema de ecuaciones de evolución a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias para el tamaño de la población $P(t)$ y la tasa de nacimiento per-cápita $Q(t)$. En 2do. - lugar encontraremos políticas óptimas de explotación para 3 casos, que serán definidos en base a los niveles iniciales - P_o y Q_o con que se cuentan y con la ayuda de la trayectoria $P_c(t)$ poblacional que maximiza la función de crecimiento natural.

Empezaremos por establecer el sistema de las ecuaciones de evolución[1]:

$$\frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial t} + \mu(a,p(t))\rho(a,t) + E(t)\ \rho(a,t) = 0$$

con $\quad P(t) = \int_0^\infty \rho(a,t)da \qquad (1)$

y $\quad B(t) = \rho(o,t) = \int_0^\infty \beta(a,p(t))\ \rho(a,t)da$

con la condición inicial $\quad \rho(a,o) = \phi(a) \qquad (2)$

(1) Conocida como ecuaciones de equilibrio de Mac Kendrick.

donde $\rho(a,t)$ es la distribución de edad y representa el número de individuos de edad al tiempo t.

$P(t)$ es la población total al tiempo t.

$B(t)$ es el número de recién nacidos (edad cero) al tiempo t.

$\mu(a,p)$ representa el número de individuos que mueren a la edad a cuando el nivel de la población es P.

$\beta(a,p)$ es el número esperado de nacimientos para un individuo de edad a cuando la población total es P

$E(t)$[2] es el esfuerzo cosecha y representa el nivel al cual los individuos son cosechados al tiempo t.

Como una hipótesis importante, diremos que el esfuerzo $E(t)$ se aplicará por igual a todas las edades, lo que nos lleva a interpretar a $E(t)\,\rho(a,t)$ como el nivel de la cosecha de individuos de edad al tiempo t, por lo que

$\int_0^\infty E(t)\rho(a,t)da = E(t)\int_0^\infty \rho(a,t)da = E(t)P(t)$ es el nivel de cosecha al tiempo t, lo que nos lleva a que

$\int_0^T E(t)p(t)dt$ es el rendimiento total en el intervalo $[0,T]$, debido a la política de cosecha $E(t)$; esto último nos permite decir que nuestro problema consiste en elegir $E(t)\geq 0$ que maximiza a $\int_0^T E(t)p(t)dt$ para T suficientemente grande y dado.

(*) En lo que sigue buscaremos políticas óptimas de explotación para con poblaciones con estructura de edad. El sistema dinámico por usar es continuo en la edad y el tiempo.

(2) Ver apéndice.

Habiendo aclarado la situación, nos avocaremos ahora a reducir el sistema de las ecuaciones de evolución a un par de ecuaciones ordinarias. Para lograrlo haremos las siguientes hipótesis:

1) $\mu(a,p)=\mu(p)$; es decir, la función mortalidad es independientemente de la edad, además $\mu \varepsilon C'$ en $[0,\infty)$ esta hipótesis, necesaria para nuestros cálculos, biológicamente nos dice que la mortalidad se debe más que nada, a factores circunstanciales en un medio peligroso, donde la mortalidad natural es despreciable.

2) $\beta(a,p)=\beta(a)$; la función nacimiento es independiente del tamaño de la población.
Además, consideraremos a $\beta(a)$ como sigue:

(I) $\beta(a)=\beta_o e^{-\alpha a}$ con β_o y α constantes tal que $\beta_o>\alpha>0$ (3)

(II) $\beta(a)=\beta_o(1-e^{-\alpha a})\beta_o\alpha>0$

(III) $\beta(a)=\beta_o a \qquad \beta_o>0$

Las condiciones sobre las constantes α y β_o son para representar diversos casos realistas.

Podemos ver que $\beta(a)$ en (I) modela con buena aproximación a aquellas poblaciones cuyos miembros son fértiles a edades tempranas. Las hipótesis (II) y (III), que son más realistas (por genéricas), consideran crecientes a $\beta(a)$, y modelan bien a muchas especies de peces.

Definiremos ahora la tasa de nacimiento per-cápita:

Sea $Q(t)=\dfrac{B(t)}{P(t)}$ donde $B(t)$ representa el número de recién nacidos al tiempo t y $P(t)$ la población total al tiempo t que son las dadas por el sistema de evolución.

Con las hipótesis anteriores llegaremos a que el par de ecuaciones diferenciales

$$\dot{P}=\left[Q-\mu(p)\right]P-EP \qquad (4)$$
$$\dot{Q}=g(Q)$$

con las condiciones iniciales

$$P(o)=P_\circ=\int_0^\infty \phi(a)da \quad y \quad Q(o)=Q_\circ=\frac{1}{P_\circ}\int_0^\infty \beta(a)\phi(a)da$$

modelan la dinámica poblacional propuesta por el sistema de las ecuaciones de evolución.

El método para obtener el sistema (4) consiste en integrar $\dfrac{\partial\rho(a,t)}{\partial a}+\dfrac{\partial\rho(a,t)}{\partial t}+\mu(p)\rho(a,t)+E(t)\rho(a,t)=0$ desde $a=0$ hasta $a=\infty$; al pedir la hipótesis (realista) adicional consistente en que $\rho(a,t)=0$ para edades a suficientemente grandes, se obtiene

$$\dot{P}=-\mu(P)P+B-EP$$

Además si multiplicamos la misma ecuación por $\beta(a)$ e integrando de nuevo respecto a la edad a en (o,∞), sin olvidar las ecuaciones del sistema de evolución que definen a $B(t)$ y $P(t)$, usando la ecuación obtenida antes junto con $Q=\frac{B}{P}$, se obtiene $\dot{Q}=g(Q)$, donde la expresión de g dependerá de la $\beta(a)$ considerada.

Haciendo los cálculos:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a}da + \int_0^\infty \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial t}da + \int_0^\infty \mu(p)\rho(a,t)da + \int_0^\infty E(t)\rho(a,t)da = 0$$

$$\rho(a,t)\Big|_0^\infty + \frac{\partial \int_0^\infty \rho(a,t)da}{\partial t} + \mu(p)p(t) + E(t)p(t)= 0$$

donde hemos tomado en cuenta que $p(t)= \int_0^\infty \rho(a,t)da$ y haciendo uso de que $B(t)= \rho(a,t)$ y $\rho(a,t)= 0$ para a grande se tiene

$$-B(t) + \dot{P}(t) + \mu(p)\ P(t) + E(t)\ P(t)= 0$$

es decir $\boxed{\dot{P}(t) = -\mu\ (p)P + B - EP.}$

Integrando ahora la ecuación

$$\beta_o\ e^{-\alpha a}\ \frac{\partial\rho(a,t)}{a} + \beta_o e^{-\ a}\ \frac{\partial\rho(a,t)}{t} + \beta_o e^{-\alpha a}\ \mu(p)\ E(a,t) + \beta_o e^{-\alpha a}E(t)\rho(a,t)=0$$

respecto a la edad a en (o,∞)

$$\int_0^\infty \beta_o e^{-\alpha a} \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a}da + \int_0^\infty \beta_o e^{-\alpha a} \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial t}da + \int_0^\infty \beta_o e^{-\alpha a}\mu(p)\rho(a,t)da + \int_0^\infty \beta_o e^{-\alpha a} E(t)\rho(a,t)da=$$

donde $\int_0^\infty \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a} \beta_o e^{-\alpha a}da = \beta_o e^{-\alpha a}\rho(a,t)\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty \rho(a,t)\beta_o e^{-\alpha a}da = \beta_o + \alpha\beta(t)$

y $\int_0^\infty \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial t} \beta_o e^{-\alpha a}da = \frac{\partial(\int_0^\infty \rho(a,t)\beta_o e^{-\alpha a}da)}{\partial t} = \dot{B}(t)$

$$\int_0^\infty \mu(p)\ \rho(a,t)\beta_o e^{-\alpha a}da = \mu(p) \int_0^\infty \rho(a,t)\beta_o e^{-\alpha a}da = \mu(p)\ B(t)$$

$$\int_0^\infty E(t)\ \rho(a,t)\beta_o e^{-\alpha a}da = E(t)\ B(t)$$

por lo que la igualdad (*) se convierte en

$$\boxed{\dot{B} = [\beta_o - \alpha - \mu(p)]B - EB}$$

Escribiendo la ecuación obtenida

$$\dot{P} = -\mu(p)\ P + B - EP$$

como $\dot{P} = \left[\frac{B}{P} - \mu(p)\right] P - EP$ y usando el hecho de que $Q = \frac{B}{P}$.

Se obtiene $\dot{P} = [Q - \mu(p)]\ P - EP$ que es la 1er. ecuación diferencial que se quería obtener.

Además como $\dot{Q} = (\dot{\frac{B}{P}}) = \frac{\dot{B}P - B\dot{P}}{P^2}$

$$= \frac{[(\beta_o - \alpha - \mu(p))B - EB]P - B(-\mu(p)P + B - EP)}{P^2}$$

$$= [\beta_o - \alpha - \mu(p)]\frac{B}{P} - E\frac{B}{P} - \frac{B}{P}(-\mu(p) + \frac{B}{P} - E)$$

$\Longrightarrow \quad \dot{Q} = \left[\beta_o-\alpha-\mu(p)\right] Q-EQ + \mu(p)\ Q-Q^2 + EQ$

$\Longrightarrow \quad \dot{Q} = g(Q)= \left[\beta_o-\alpha\right] Q-Q^2$ ecuación obtenida al considerar $\beta(a)= \beta_o e^{-\alpha a}$ y junto con la 1er. ecuación se obtiene el par de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la dinámica poblacional propuesta por el sistema de evolución. No olvidemos las condiciones iniciales $P(o)= P_o$ y $Q(o)= Q_o$ ya obtenidas.

Los pasos a seguir para la obtención del sistema

$$\dot{P} = \left[Q-\mu(p)\right]P-EP$$
$$\dot{Q} = g(Q)$$

al considerar las $\beta(a)$ restantes, son similares, al considerar $\beta(a)= \beta_o(1-e^{-\alpha a})$ se obtiene:

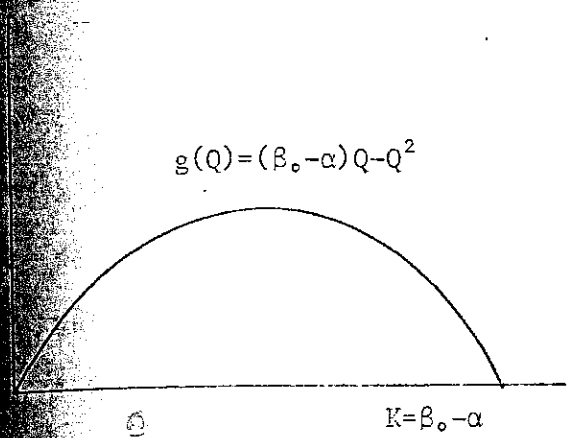
$$\dot{P} = \left[Q-\mu(p)\right] P-EP$$
$$\dot{Q} = g(Q)=\alpha\beta_o-\alpha Q-Q^2$$

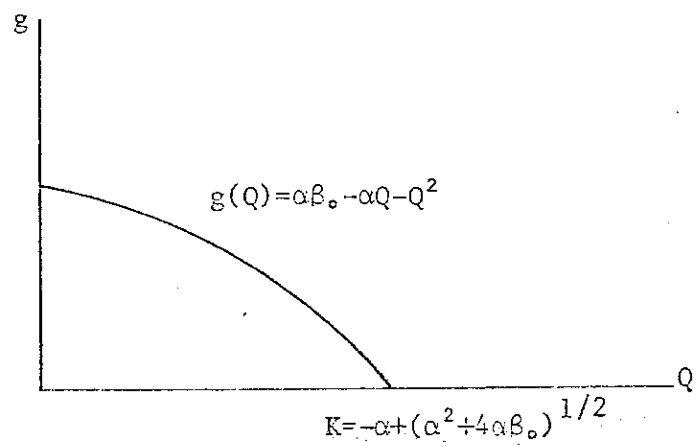
y con $\beta(a)= \beta_o a$ se obtiene:

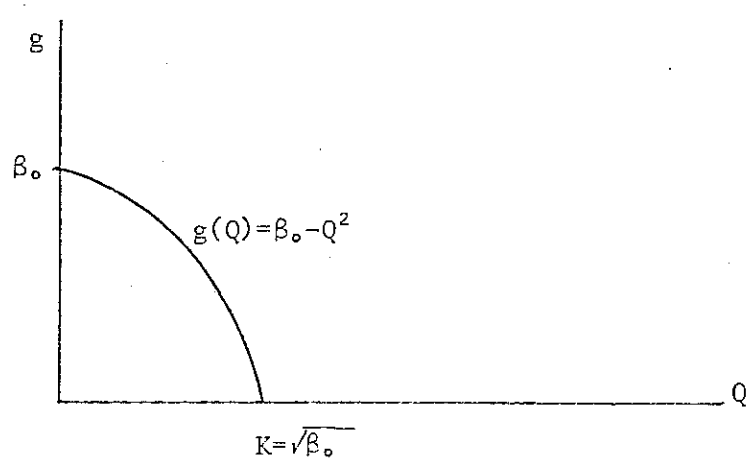
$$\dot{P} = \left[Q-\mu(p)\right]P-EP$$
$$\dot{Q} = g(Q)= \beta_o-Q^2$$

g depende de la ley de nacimiento de la población

$$\dot{P} = \left[Q - \mu(p) \right] P - EP$$
$$\dot{Q} = g(Q)$$







claramente vemos que en los 3 casos anteriores tenemos

$$g(k) = 0, \quad g>0 \text{ en } (0,k), \quad g<0 \text{ en } (k,\infty)$$

y de la concavidad hacia abajo que $g'' \leqslant 0$.

Observemos cómo el sistema obtenido

$$\dot{P} = [Q-\mu(p)]P-EP$$
$$\dot{Q} = g(Q) \qquad (5)$$
con $\quad P(o)=P_o$ y $Q(o)= Q_o$

Puede modelar la evolución de una población P(t) debido a la presencia de un recurso Q(t) (olvidándonos un poco de la definición dada para Q(t)), donde el recurso se comporta según g. Este par de ecuaciones diferenciales puede describir aceptablemente la dinámica de una población de la que se desconoce la tasa de nacimiento per-cápita y se conoce una fuerte dependencia de un recurso. Más todavía, podemos decir que la tasa de nacimiento per-cápita se comporta como un recurso para la población; observemos también que para las tres expresiones consideradas para $\beta(a)$ obtuvimos, cualitativamente, el mismo par de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, la dinámica cualitativa de la población no cambia al variar sobre las expresiones de $\beta(a)$ consideradas.

Aclaremos que Q(t), como hipótesis, es conocida y está dada por la solución de $\dot{Q}(t)= g(Q)$ con $Q(o)= Q_o$ es decir, en los cálculos por hacer, consideraremos a Q(t) conocida e independiente tanto del esfuerzo E como del tamaño de la población P a considerar.

Notemos, por las características de g con respecto a K, que Q es monótona y $\lim_{t\to\infty} Q(t) = K$.

Una vez establecida Q, observemos que P(t) es la solución de la ecuación diferencial no-autónoma

$$\dot{P}(t) = Y(t, P(t)) - E(t)\, P(t) \qquad (6)$$

con $\quad Y(t,P(t)) = (Q(t) - \mu(p))\, P \quad$ y $\quad P(o) = P_o$

Es decir, conocida la función de crecimiento natural Y dada una política de cosecha representada por $E(t) \geq 0$, obtendremos una solución P(t) de (6), función poblacional con la que se puede (definir) obtener un rendimiento dado por - $Y_T(p) = \int_0^T Y(t,p(t))dt - P(T^-) + P_o$ (7), con el tiempo dado T suficientemente grande y que se puede obtener por medio de - $\int_0^T E(t)P(t)dt$ en la ecuación (6).

El término $P(T^-)$ está dado como $P(T^-) = \lim_{t\to T^-} P(t)$.

A continuación precisaremos las trayectorias P(t) con las cuales daremos las políticas óptimas; esto, una vez definido lo que es una política óptima.

Definimos una *trayectoria* P como una función en $[0,\infty)$, la cual es continua por pedazos de C' por pedazos y continua por la derecha $(P(t)= P(t^+))$ para toda $t\geqslant 0$.

Dentro del conjunto de trayectorias P, definimos a G como la clase de trayectorias admisibles,

$$G= \{P(t) \text{ trayectoria } /P>0,\ P(o)\leqslant P_o,\ \ P(t)\leqslant P(t^-),\ \ \dot{P}(t)\leqslant Y(t,P(t)) \text{ donde } \dot{P}(t) \text{ exista}\} \quad (8)$$

Dada cualquier trayectoria P y Q la solución de $\dot{Q}=g(Q)$ con $Q(o)=Q_o$ se obtiene el par (P,Q), al cual llamaremos *órbita* correspondiente a P.

Nuestro criterio de optimalidad la definimos, a continuación, sobre G.

Definición: Una trayectoria $P^*\varepsilon G$, es óptima(1), si dada cualquier $P\varepsilon G$, con $P\neq P^*$, existe un tiempo T_p tal que $Y_T(P^*)>Y_T(P)$ para toda $T>T_p$.

Sobre los parámetros y funciones del par de ecuaciones diferenciales

$$\dot{P} = [Q-\mu(p)]P-EP$$
$$\dot{Q} = g(Q)$$

Obsérvese la unicidad de P.*

(1) Obsérvese la unicidad de P^*.

hemos hecho consideraciones sobre P, Q, g y E. Nos falta hacer suposiciones convenientes sobre $\mu(P)$ para obtener nuestras trayectorias óptimas (lo plural se debe a los distintos casos a considerar). Convenientemente podemos considerar a $\mu(P)$ como linealmente creciente, es decir:

Sea $\mu(P)= \gamma_\circ + \gamma P$ con $\gamma_\circ \geq 0$ y $\gamma > 0$ constantes por lo que la función de crecimiento natural nos resulta:

$$Y(t,p)=\left[Q(t)-\gamma_\circ-\gamma p\right]P \qquad (9)$$

por lo que ahora estamos en posición de observar que para t fijo, existe una única $P=P_c(t)$ que maximiza $Y(t,p)$. Es decir,

$$Y(t,P_c(t))= \max_{0\leq p<\infty} Y(t,p) \qquad (10)$$

llamaremos a la función $P_c(t)$ la trayectoria crítica, cuya expresión:

$$\text{por ser } 2\gamma\, P_c(t) \text{ positiva, es } 2\gamma\, P_c(t)= \begin{cases} Q(t)-\gamma_\circ & \text{si } Q(t)\geq\gamma_\circ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (11)$$

por lo que la función de crecimiento natural $Y(t,p)$ es tal que:

i) es de crecimiento estricto en $\left[0,P_c(t)\right]$

ii) y estrictamente decreciente en $\left[P_c(t), \infty\right)$

Supondremos además, en forma más realista que $\gamma_\circ<k$ por lo que adquiere sentido la expresión

$$\lim_{t\to\infty} P_c(t)= \frac{K-\gamma_\circ}{2\gamma}$$

la consideración $\gamma_\circ\geq k$ no es, desde el punto de vista biológico relevante ya que si $\gamma_\circ\geq k$.

Se tendría que $Q-\gamma_\circ\leq Q-k$ y como $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t)=K$ se puede interpretar como una población en proceso de extinción.

Para alcanzar nuestro objetivo enunciaremos algunas propiedades deseables de la trayectoria crítica P_c. Nos preocuparemos por construir trayectorias admisibles P_c, aún usando porciones de P_c si es necesario. Para ello llamaremos a P_c *admisible*, a un tiempo t, si

$$P_c(t)>0 \quad y \quad P_c(t)\leq Y(t,P_c(t)) \qquad (12)$$

y por el momento agregamos la condición, para un $t_\circ$ dado, consistente en $Q(t_\circ)>\gamma_\circ$ que por la monotonía de Q y $\gamma_\circ<k$ se tiene que $Q>\gamma_\circ$ en $[t_\circ,\infty)$; y por (11) se llega a que $2\gamma P_c=Q-\gamma_\circ$ en - $[t_\circ,\infty)$ lo que implica que P_c es C' en $[t_\circ,\infty)$.

Tratando de extender el resultado anterior, observemos lo siguiente:

la igualdad $\frac{(Q-\gamma_\circ)^2}{4\gamma} = [Q(t)-\gamma_\circ-\gamma P_c]P_c$ se mantiene debido a que $2\gamma P_c = Q-\gamma_\circ$,

lo que implica que $\frac{\dot{Q}}{2\gamma} = [Q(t)-\gamma_\circ-\gamma P_c]P_c + \frac{\dot{Q}}{2\gamma} - \frac{(Q-\gamma_\circ)^2}{4\gamma}$,

o equivalentemente $\dot{P}_c = [Q(t)-\gamma_\circ-\gamma P_c]P_c + \frac{1}{2\gamma}\left[\dot{Q} - \frac{(Q-\gamma_\circ)^2}{2\gamma}\right]$

de donde se obtiene $\dot{P}_c = Y(t,P_c(t)) + \psi(Q(t))$ (13)

con $\psi(Q) = \frac{1}{2\gamma}\left[g(Q) - \frac{(Q-\gamma_\circ)^2}{2}\right]$

Con tal expresión podemos observar que P_c es admisible para t si y solo si $Q(t)>\gamma_\circ$ y $\psi(Q(t))\leq 0$. Resultado que se deduce al tratar de mantener una congruencia entre (12) y (13).

Además, debido a las propiedades de g observadas antes, y a que $\gamma_\circ<k$ no es difícil verificar que

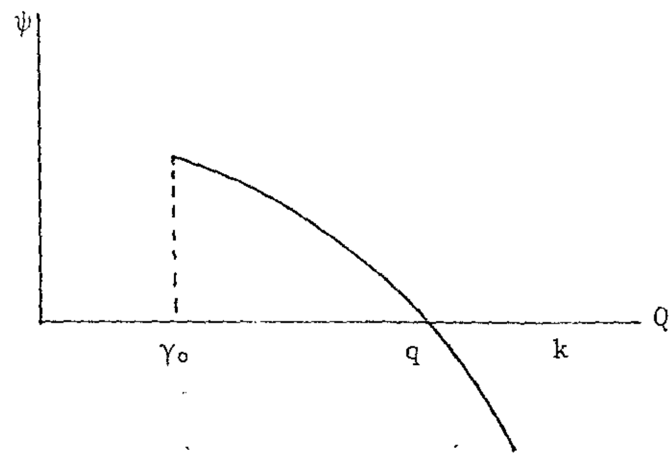
$$\psi''<0, \quad \psi(\gamma_\circ)>0 \quad y \quad \psi(k)<0$$

por lo que existe $q \in (\gamma_\circ k)$ tal que, para $Q\geq\gamma_\circ$, podemos establecer

$$\psi(Q)=0 \iff Q=q$$

$$\psi(Q)<0 \iff Q>q$$

Gráficamente



Debido a estos últimos resultados se puede mostrar la equivalencia de las siguientes condiciones, para $t_\circ \geq 0$.

i) $Q(t_\circ) \geq q$

ii) P_c es admisible en $t_\circ$

iii) P_c es admisible en $[t_\circ, \infty)$

La equivalencia se puede mostrar por medio de la verificación de las implicaciones: i)$\Longrightarrow$ii)$\Longrightarrow$iii)$\Longrightarrow$i), debida que $Q(t_\circ) \geq q \geq \gamma_\circ$ y como $\psi(Q(t)) \leq 0$ se tiene que P_c es admisible en $t_\circ$ ((i)$\Rightarrow$ii)).

Si P_c es admisible en $t_\circ$ se tiene entonces que $Q(t_\circ) \geq \gamma_\circ$ y $\psi(Q(t)) \leq 0$ siempre que $t \varepsilon [t_\circ, \infty)$, por lo que se tiene ii)$\Rightarrow$ iii). Si suponemos que P_c es admisible en $[t_\circ, \infty)$ entonces se tiene que $\psi(Q(t_o))\leqslant 0 \Longrightarrow$ i). Por lo que queda establecida la equivalencia de las tres condiciones.

SECCION 2.2

Para dar nuestras políticas óptimas necesitaremos de la dinámica poblacional en ausencia de cosecha, y tal comportamiento está dado por:

$$\dot{P} = -\gamma_o P - \gamma P^2 + QP$$
$$\dot{Q} = g(Q)$$

a quien llamaremos, ecuaciones de crecimiento libre.

Podemos observar que las ecuaciones anteriores constan de un punto de equilibrio que es globalmente estable y que se obtiene al hacer $\dot{P}=0$ y $\dot{Q}=0$, por lo que tal punto de equilibrio es $(\frac{k-\gamma_o}{\gamma}, K)$ y se encuentra en el primer cuadrante $(k>\gamma_o)$ del plano (P,Q).

En base a estas ecuaciones de crecimiento libre, y sin olvidar las propiedades de g con respecto a k, se puede construir el correspondiente retrato fase, que consiste de las órbitas $(P(t), Q(t))$ de crecimiento libre que provienen de resolver las ecuaciones de crecimiento libre.

En tal retrato fase denotamos por $\mathcal{P}_c$ la trayectoria crítica dada como $\mathcal{P}_c \doteq \{(P,Q)/2\gamma P = Q-\gamma_o\}$, y por medio de $\dot{Q}=g(Q)$ podemos encontrar las direcciones del movimiento (a variar t) de las parejas (P,Q) sobre $\mathcal{P}_c$ tales parejas ordenadas se aproximan a $(\frac{k-\gamma_o}{2\gamma}, K)$ debido a que $\lim_{t\to\infty} Q(t)=K$. Allí mismo, con la ayuda de las propiedades de $(Q(\gamma))$ podemos resaltar las porciones inadmisibles de $\mathcal{P}_c$.

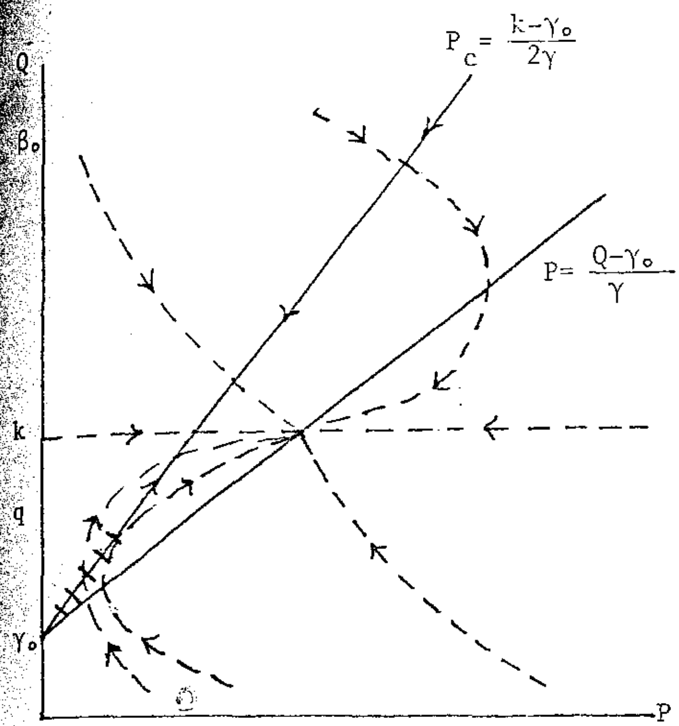
Debido a $\dot{P} = -\gamma_o P - \gamma P^2 + QP$ resulta que

i) $\dot{P}=0$ si $P=\frac{Q-\gamma_o}{\gamma}$

ii) $\dot{P}<0$ si $P>\frac{Q-\gamma_o}{\gamma}$

iii) $\dot{P}>0$ si $P<\frac{Q-\gamma_o}{\gamma}$

tratando de interpretar los incisos anteriores considerando $Q>K$, podemos decir que sobre la recta $P=\frac{Q-\gamma_o}{\gamma}$ los niveles de población, de las órbitas (P,Q), alcanzan su máximo. Si se considera $Q<K$, los niveles de población anteriores alcanzan su mínimo sobre $P= \frac{Q-\gamma_o}{\gamma}$. Si adicionalmente se consideran los signos de $\dot{P}$ dados por ii) y iii) con los signos asumidos por $\dot{Q}$ con respecto a K se puede obtener el siguiente retrato fase



No olvidemos que estas órbitas (P,Q), soluciones de las ecuaciones de libre crecimiento, tienden al punto globalmente estable $(\frac{K-\gamma_o}{\gamma}, K)$.

Adicionalmente hemos dibujado la trayectoria crítica P_c, con su porción inadmisible, dada para $q>Q>\gamma_o$.

con ┼┼┼┼┼┼┼ como porción inadmisible de P_c y ——— las órbitas de crecimiento libre.

Las direcciones sobre la trayectoria crítica P_c se obtienen al considerar $\lim_{t\to\infty} Q(t)=K$ y $\lim_{t\to\infty} P_c(t)= \frac{k-\gamma_o}{2\gamma}$.

A la solución, de estas ecuaciones de libre crecimiento, que toca a P_c en $Q=q$, le llamaremos ω. Se puede observar que ω es tangente a P_c. ω, trayectoria de libre crecimiento, que es tangente a P_c en $Q=q$ debido a que

$$\mathring{P}_c = \gamma(t,P_c)+\psi(Q) \quad \text{y} \quad \psi(Q)=0 \Longleftrightarrow Q=q$$

llamaremos trayectoria de libre crecimiento a una solución estrictamente positiva $Z(t)$ en $0\leqslant t<\infty$ de la ecuación

$$\dot{Z}(t) = Y(t,Z(t))$$

las propiedades que necesitamos de estas trayectorias son - las dadas por la siguiente proposición.

PROPOSICION 1: Sea Z la trayectoria de libre crecimiento, y seleccionando un tiempo $t_\circ\geqslant 0$.

i) Sea $Z(t_\circ)\leqslant P_c(t_\circ)$. Entonces existe un (único) tiempo $t_1>t_\circ$ tal que $Z(t_1)= P_c(t_1)$. Además, P_c es admisible en $[t_1,\infty)$.

ii) Sea $P\varepsilon G$. Entonces: $P(t_\circ)\leqslant Z(t_\circ)\Rightarrow P\leqslant Z$ en $[t_\circ,\infty)$

$P(t_\circ^-)\geqslant Z(t_\circ)\Rightarrow P\geqslant Z$ en $[0,t_\circ)$

iii) Para $Q_\circ<q$ existe una única $T_q>0$ tal que $Q(t_q)=q$. Sea W la trayectoria de libre crecimiento con $W(T_q)= P_c(T_q)$.

a) Entonces la órbita de W cae en ω y $W(t)>P_c(t)$ para toda $t\neq T_q$.

b) Si $Z(o)<W(o)$ o $Z(t_\circ)= P_c(t_\circ)$ con $t_\circ\neq t_q$, entonces $Z<W$ en $[0,\infty)$ y existe una única $t_1>Z_q$ tal que $Z(t_1)=P_c(t_1)$. Además, en caso de ocurrir - la segunda hipótesis con $t_\circ<t_q$ se tendría $Z<P_c$ en $(t_\circ,t_1)$ y $Z>P_c$ en $[0,t_\circ)U(t_1,\infty)$.

Demostración:

Por la forma en que se construye el retrato fase para el caso en que $Q<K$ y $P<\frac{Q-\gamma_o}{\gamma}$ y bajo la consideración $Z(t_o)<P_c(t_o)$, es claro que existe t_1, único, tal que $Z(t_1)=P_c(t_1)$ y $P_c(t_1)>\frac{q-\gamma_o}{2\gamma}$ tal que $P_c(t)$ no tiene porciones inadmisibles en $[t_1,\infty)$. Si $Q\geq K$ se tiene el mismo resultado ya que $P_c(t)>\frac{K-\gamma_o}{2\gamma}$ y tales niveles de $P_c(t)$ son admisibles. Se tiene i).

Debido a las desigualdades; $\dot{P}\leq Y(t,p)$, $\dot{Z}=Y(t,p)$ y considerando los saltos descendentes de P, $P(o)\leq P_o$ y $P(t)\leq P(t^-)$ podemos aplicar el Teorema de Comparación y obtener ii).

Veamos como se puede mostrar iii).

Si $Q_o<q<K$ entonces, debido a la monotonía de $Q(t)$, existe una única t_q tal que $Q(t_q)=q$, y por construcción, si W es la trayectoria de libre crecimiento con $W(t_q)=P_c(t_q)$ (¡existe!) entonces sucede que:

a) La órbita W cae sobre ω y, por construcción, $W(t)>P_c(t)$ $t\neq t_q$.

b) Si tenemos que $Z(o)<W(o)$ o $Z(t_o)=P_c(t_o)$ con $t_o\neq t_q$ entonces, también por construcción de ω, se tiene que $Z<W$ en $[0,\infty)$ y existe una única $t_1>t_q$ tal que $Z(t_1)=P_c(t_1)$. Además, es obvio por el retrato fase, que si $Z(t_o)=P_c(t_o)$ con $t_o<t_q$ se tiene que: $Z<P_c$ en (t_o,t_1) y
$Z>P_c$ en $[0,t_o)\cup(t_1,\infty)$.

A continuación veremos un proposición que nos permitirá manejar mejor, en los cálculos, la definición de trayectoria óptima dada, ya que elimina la presencia del término $P(T^-)$ que aparece en Y_T.

Tal resultado deja ver que para establecer la optimalidad es suficiente maximizar la funcional

$$F_T(P)= \int_0^T Y(t, P(t))dt,$$

PROPOSICION 2: Cualquiera de las dos siguientes condiciones es suficiente para que una trayectoria $P^*\varepsilon G$ sea óptima.

(A) Dada cualquier $P\varepsilon G$, $P\neq P^*$,

$Y(t,P^*(t))\geqslant Y(t,P(t)) \quad t>0$

con desigualdad estricta en algún intervalo(1).

(B) Dada cualquier $P\varepsilon G$, $P\neq P^*$, existe un $T_P\geqslant 0$ tal que $F_T(P^*)>F_T(P) \quad t>T_P$.

(1) Establece la unicidad de P^*.

En vista de que la condición (A) implica (B) es suficiente entonces mostrar que P^* satisface la definición de optimalidad dada si (B) se mantiene.

Para empezar supondremos que (B) es verdadera. Con tal idea mostraremos primero que

$$P^*(t) = P_c(t) \text{ para toda } t \text{ suficientemente grande} \qquad (14)$$

Supongamos que la propuesta (14) es falsa. Entonces, ya que (B) es verdadera, existe un intervalo (t_o, t_1) con t_o arbitrariamente grande tal que, para cada $t \varepsilon (t_o, t_1)$ se mantiene $P^*(t) \neq P_c(t)$, supongamos adicionalmente que $Q(t) > q \quad t \geq t_o$. No se pierde generalidad al hacer esta hipótesis pues se requiere hacer consideraciones sobre las porciones admisibles de P_c. Con tales hipótesis llegamos a los siguientes casos:

Caso a) Supóngase primero que $P^* > P_c$ en (t_o, t_1) y consideremos la trayectoria admisible

$$P(t) = \begin{cases} P^*(t), & 0 \leq t < t_o \\ P_c(t), & t_o \leq t. \end{cases}$$

y ya que $Y(t,p)$ es de estricto decrecimiento en $[P_c, \infty)$ se tiene $Y(t_1, P^*(t)) \leq Y(t_1, P(t))$ para todo t, y con la desigualdad estricta en (t_o, t_1). Lo que contradice la hipótesis inicial ((B) se mantiene) con $T_1 = T_p$ en (B).

caso b) Por otro lado, supóngase $P^*(t_2)<P_c(t_2)$ para algún $t_2\varepsilon(t_o,t_1)$ y consideremos la trayectoria admisible

$$P(t)=\begin{cases} P^*(t) & 0\leqslant t<t_2 \\ Z(t) & t_2\leqslant t<t_3 \\ P_c(t) & t_3\leqslant t \end{cases}$$

donde t_3 existe debido a i) de la proposición 1 y con Z como la trayectoria de libre crecimiento que parte de $P^*(t_2)$ (al tiempo t_2) hasta $P_c(t_3)$ (al tiempo t_3). Esto nos permite decir que $P=Z\leqslant P_c$ en $[t_2,t_3]$ y debido al inciso ii) de - proposición 1 (donde ponemos P* en lugar de P) se - tiene que $P^*\leqslant Z=P$ en $[t_2,t_3]$, por lo que $P^*\leqslant P\leqslant P_c$ en $[t_2,t_3]$ y debido a que Y(t,p) es de estricto crecimiento en $[0,P_c)$ se tiene $Y(t,P^*(t))\leqslant Y(t,P(t))$ para toda t, con desigualdad estricta para el conjunto de tiempos (no vacío por suponer a (B) cierto) en donde $P^*(t)\neq P_c(t)$. Y si T es suficientemente grande se tiene que de nuevo se contradice la hipótesis (B). Por lo que queda demostrado (14).

El resultado anterior nos ayudará a ver que si (B) se - mantiene entonces P* es óptima.

Tomemos $P\varepsilon G$, $P\neq P^*$, tal que por las definiciones de Y_T y F_T se tiene

$$Y_T(P^*)-Y_T(p)= F_T(P^*)-F_T(p)+P(T^-)-P^*(T^-) \qquad (15)$$

así en el caso de que $\liminf_{t\to\infty}[P(t)-P^*(t)]\geqslant 0$ se tenga una desigualdad estricta (>0)[1] implica entonces que $P(t)>P^*(t)=P_c(t)$

para t's suficientemente grandes. Por lo que eligiendo un T, de las t's suficientemente grandes se tiene $F_T(P^*)>F_T(P)$ y $P(T^-)>P^*(T^-)$ que con (15) implica que $Y_T(P^*)>Y_T(P)$ para t suficientemente grande, que es precisamente la definición de - optimalidad dada.

Por otro lado consideremos $\liminf_{t\to\infty}[P(t)-P^*(t)]<0$, en tal caso, para cada $\varepsilon>o$, existe una sucesión $\{t_n\}$, de tiempos crecientes, tal que:

$$P^*(t_n)-P(t_n)>\varepsilon \qquad (16)$$

Además debido al resultado (14), podemos escoger a $\{t_n\}$ tal que:

$$|P_c(t)-P_c(\infty)|< \varepsilon/4 \quad y \quad P^*(t)= P_c(t) \qquad (17)$$

para todo $t\geq t_1$, donde t_1 es el primer miembro de la sucesión $\{t_n\}$.

Observemos la siguiente definición.

Para cada n, sea Z_n la trayectoria de crecimiento libre que parte del nivel poblacional $P_c(t_n)-\varepsilon$ al tiempo t_n, y τ_n el tiempo menor, después de t_n, tal que $Z(\tau_n)= P_c(t_n)- \frac{3}{4}\varepsilon$.

Sabemos que τ_n, existe debido a; i) de la proposición 1, (17), y la continuidad de Z_n (para cada n).

Debido a $(17)_1$ se llega a que $Z_n(t) \leq P_c(t) - \varepsilon/2$ en $[t_n, \tau_n)$ y debido a que $Y(t,p)$ es creciente en $[0, P_c)$ se tiene que -

$$Y(t, Z_n(t)) < Y(t, P_c(t) - \varepsilon/2) \text{ para } t \varepsilon [t_n, \tau_n] \quad (18)$$

Además como Q esta acotada en $[0, \infty)$ y es monótona implica que el supremo de Y, llamémoslo S, es finito. Por lo que las definiciones y resultados Z_n, t_n, τ_n vistos implican en $\dot{Z}_n(t) = Y(t, Z_n) \leq S$ que

$$\frac{\varepsilon}{4} = \int_{t_n}^{\tau_n} \dot{Z}_n(t)dt = \int_{t_n}^{\tau_n} Y(t, Z_n(t))dt \leq (\tau_n - t_n)S \quad (19)$$

con $(\tau_n - t_n)$ uniformemente acotada y tendiendo a cero conforme n tiende a ∞.

Además, debido a (16), $(17)_2$ y ii) de proposición 1, se tiene

$$P \leq Z_n \text{ en } [t_n, \infty).$$

Haciendo una hipótesis adicional sobre $\{t_n\}$, elegiéndola tal que $t_n + 1 > \tau_n$ para cada n, lo que no hace perder generalidad en los resultados ya obtenidos, pues si $\{t_n\}$ no tiene esta propiedad, podemos elegir una subsucesión que la tenga y con ella definamos la trayectoria (inadmisible) como:

$$\Phi(t)=\begin{cases} P(t), & 0\leqslant t<t_1 \\ Z_n(t), & t_n\leqslant t<\tau_n,\ n=1,2,\ldots \\ P_c(t) & \text{en otro caso}\end{cases}$$

que con $(17)_2$ se consigue $\Phi= P^*$ en $[t,\infty)- \bigcup_n [t_n,\tau_n)$.

Por lo que en base a (17), escribimos:

$$\begin{aligned} Y(t,P^*(t))- Y(t,\Phi(t)) &= Y(t,P_c(t))- Y(t,Z_n(t)) \\ &\geqslant Y(t,P_c(t))- Y(t,P_c(t)- {}^{\varepsilon}/2) \\ &= [Q(t)-\gamma_o-\gamma P_c]P_c \\ &\quad -\{[Q(t)-\gamma_o-\gamma(P_c(t)- \tfrac{\varepsilon}{2})](P_c(t)- \tfrac{\varepsilon}{2})\} \end{aligned}$$

$$= Q(t)P_c-\gamma_o P_c-\gamma P_c^2- [(Q(t)-\gamma_o-\gamma P_c+\gamma \tfrac{\varepsilon}{2})(P_c- {}^{\varepsilon}/2)]$$

$$= Q(t)P_c-\gamma_o P_c -\gamma P_c^2 -QP_c + Q\, {}^{\varepsilon}/2 +\gamma_o P_c - \gamma_o\, {}^{\varepsilon}/2 + \gamma P_c^2-\gamma P_c \tfrac{\varepsilon}{2}$$

y por (10) nos queda $\quad Y(t,P^*(t)) - Y(t,\phi(t))\geqslant\gamma \dfrac{\varepsilon^2}{4}$.

Como en esta desigualdad se tiene, que la cota inferior es independiente de n y con la importante observación (19) llegamos (integrando)

$$\text{a que}\quad F_T(P^*)- F_T(\phi)= \frac{\gamma\varepsilon^2}{4}\, T \qquad (20)$$

es decir $\quad \lim_{T\to\infty} [F_T(P^*)- F_T(\phi)]=\infty$

Por último, debido a los resultados ya obtenidos;

$$Z_n \leq P_c - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en } [t_n, \tau_n)$$

$$P \leq Z_n \quad \text{en } [t_n, \infty)$$

y con la definición de Φ y la monotonía (decreciente) de $Y(t,p)$ en $[P_c, \infty)$ se consigue

$$Y(t,\phi(t)) \geq Y(t,P(t)) \quad \text{para toda } t \geq 0$$

que con la definición de F_T se tiene $F_T(\phi) \geq F_T(P)$ para toda T, y como en (15) se tiene $P(T^-) \geq P^*(T^-)$ se obtiene:

$$Y_T(P^*) - Y_T(P) \geq F_T(P^*) - F_T(\phi) - P(T^-) + P^*(T^-) \quad (*)$$

que considerando (14), $P_c(\infty) - P^*(T^-) > -P(T^-)$ para T suficientemente grande, lo que implica que

$P(T^-) - P^*(T^-)$ esta acotada, por lo que tomando límite en (*) cuando $t \to \infty$ y usando (20) se concluye $\lim\limits_{T \to \infty} [Y_T(P^*) - Y_T(P)] = \infty$, que por definición de límite, existe T_p suficientemente grande tal que:

$Y_T(P^*) > Y_T(P)$ para toda $T > T_p$, que es precisamente la definición de optimalidad dada.

Observemos como hasta aquí se ha seguido un proceso totalmente natural:

Primero) Se reduce el sistema de evolución al par de ecuaciones diferenciales ordinarias

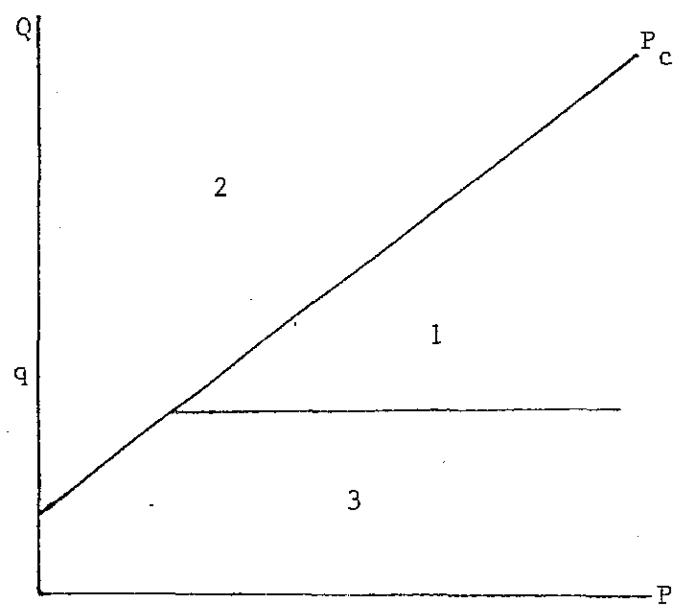
$$\dot{P} = \left[Q-\mu(p) \right] P-EP$$
$$\dot{Q} = g(Q)$$

Segundo) Después de definir el tipo de explotación (el de rendimiento) se precisan las trayectorias admisibles que satisfacen tal tipo de explotación y sobre éstas se define la optimalidad por buscar.

Tercero) Se dan criterios equivalentes y más manejable, de la definición de optimalidad, lo que implica maximizar la integral $F_T(P)$, y por esto mismo, maximizar la función de crecimiento natural sobre las trayectorias admisibles. Este último paso nos lleva a definir una trayectoria admisible P_c.

Como cuarto y último paso, se mostraran los tres tipos de trayectorias óptimas que se obtienen según tres posiciones distintas de las condiciones iniciales P_o y Q_o. Tal muestra de optimalidad se hará en base de que las condiciones (A) y (B), de proposición 2 implican la optimicidad de P^*. Mas precisamente, dadas las condiciones iniciales (Q_o, P_o), daremos la solución óptima $P^*(t)$, que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, y que maximiza el rendimiento ya definido, tal trayectoria será óptima al satisfacer (A) o (B).

En base al gráfico siguiente consideremos los tres casos siguientes.



Caso 1: Supóngase que la condición inicial (P_o, Q_o) es tal que $Q_o \geq q$ y $P_o \geq \frac{Q_o - \gamma_o}{2\gamma}$ entonces la trayectoria óptima es

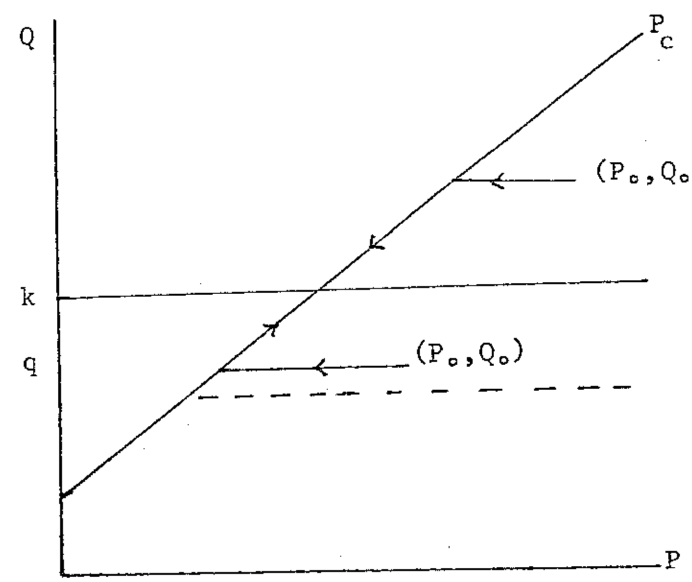
$$P^*(t) = P_c(t); \quad 0 \leq t < \infty \text{ (1)}$$

Debido a que $Y(t,p)$ es decreciente en $[P_c, \infty)$ y creciente en

(1) Obsérvese que, prácticamente, estamos considerando un esfuerzo $E(t)$ no acotado y suceptible de aplicarse instantáneamente.

$[0, P_c]$ se puede observar que $P^*(t)$ satisface (A) de proposición 2.

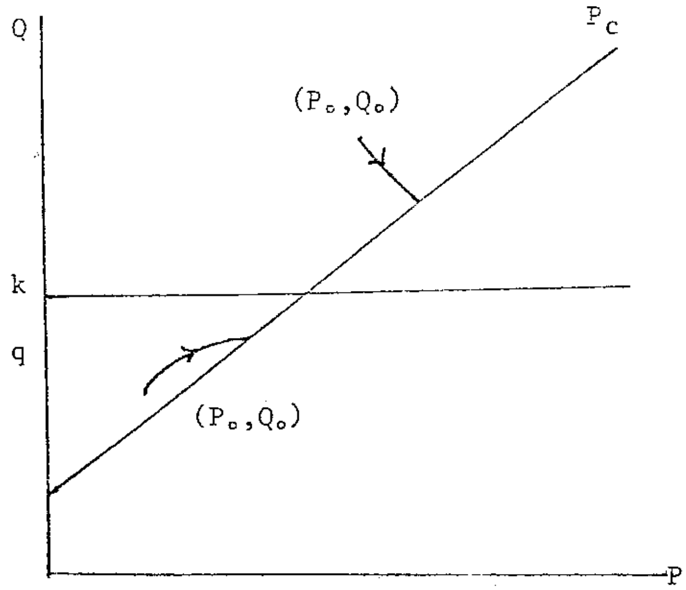
El comportamiento gráfico sería como sigue:



Caso 2: Veamos ahora la trayectoria óptima para cuando la condición inicial es tal que: $P_o < \dfrac{Q_o - \gamma_o}{2\gamma}$ con $Q_o > \gamma_o$

que resulta ser $P^*(t) = \begin{cases} Z(t), & 0 \leq t < t_o \\ P_c(t), & t_o \leq t < \infty \end{cases}$

Con $Z(t)$ la trayectoria de crecimiento libre que parte de P_o al tiempo $t=0$ hasta alcanzar, en un tiempo t_o, a $P_c(t_o)$.



Debido a que $P_o \leq P_c(o)$ y usando el inciso i) de proposición 1, existe entonces t_o tal que:

$$P^*(t)=Z(t) \leq P_c(t) \text{ en } [0,\ t_o] \qquad (21)$$

Ahora si $P \neq P^*$ es cualquier otra trayectoria admisible, entonces, de la definición de G, se tiene que $P(o) \leq P_o = Z(o)$ y en base a ii) de proposición 1 podemos plantear que $P \leq Z = P^*$ en $[0,\ t_o]$ y por (21) que $P \leq P^* \leq P_c$ en $[0,\ t_o]$, y ya que $P_c = P^*$ en $[t_o, \infty)$, y con las propiedades de $Y(t,p)$ con respecto a P_c se tiene que $Y(t,P^*) \geq Y(t,P)$ para toda $t \geq \theta$ y con desigualdad estricta en algún intervalo (ya que $P \neq P^*$ en algún intervalo) por lo que se tiene (A) de proposición 2, y se tiene que P^* es óptima.

Caso 3: Por último supongamos que (P_o,Q_o) se encuentra a la derecha de P_c y con $Q_o<q$, es decir; $Q_o<q$, $P_o \geq \frac{Q_o-\gamma_o}{2\gamma}$.
La trayectoria óptima correspondiente a esta condi-

ción inicial, no es obvia debido a lo inadmisible de P_c para $Q<q$.

Antes que nada veamos la notación por usar.

Sea $t_q>0$ tal que $Q(t_q)=q$ y sea W la trayectoria de crecimiento libre con $W(t_q)= P_c(t_q)$ (conforme iii) de proposición 1) con $W_o= W(o)$.

Además para cada nivel de población $\underline{P}\ (0,W_o]$, sea $Z_{\underline{P}}$ la trayectoria de crecimiento libre que empieza en $\underline{P}$ para $t=0$ y $\tau(\underline{P})\ >t_q$ [1] tal que $Z_{\underline{P}}(\tau(\underline{P}))= P_c(\tau(\underline{P})$. Con tal notación podemos ahora escribir la trayectoria óptima P^* como:

$$P^*(t)= \begin{cases} Z_{\underline{P}}(t), & 0\leqslant t<\tau(\underline{P}) \\ P_c(t). & \tau(\underline{P})\leqslant t<\infty, \end{cases} \qquad (22)$$

Con $\underline{P}$ tal que, $0<\underline{P}\leqslant \min(W_o,P_o)$ y no especificado [2] satisface (B) de proposición 2, con lo que P^* resultaría óptima.

Empezaremos por probar que cualquier trayectoria que satisface (B) pertenece a G_c donde;

$$G_c= \{ \text{familia de trayectorias } \underline{P} \text{ - paramétricas de la forma (22).} \}$$

(1) Según iiib) de proposición 1, para cada $\underline{P}$ existe un único tiempo $\tau(\underline{P})$.

(2) Con esta condición para $\underline{P}$ no se pierde generalidad debido a que el esfuerzo $E(t)$ es no acotado y suceptible de aplicarse en forma instantánea.

más precisamente, mostraremos que dada cualquier $P\varepsilon G$, $P\notin G_c$ existe una trayectoria $R\varepsilon G_c$ tal que $Y(t,R(t))\geq Y(t,P(t))$ con desigualdad estricta en un conjunto no vacío de tiempos t, lo que produce la desigualdad $F_T(R)>F_T(P)$ para T suficientemente grande. Después se probará que existe una (única) trayectoria en G_c que maximiza F_T para T grande.

Con lo anterior en mente tomemos $P\varepsilon G$, $P\notin G_c$. Supóngase primero que $P\geq P_c$ en $[0,t_q)$, entonces ya que $W(t_q)=P_c(t_q)$ y debido a ii) de proposición 1, se tiene que $W(o)\leq P(o)$ $(\leq P_o)$. Por lo que la trayectoria

$$R(t)=\begin{cases} W(t), & 0\leq t<t_q \\ P_c(t), & t_q\leq t<\infty \end{cases}$$ es admisible.(1)

y de nuevo en base a ii) de proposición 2, podemos ver que $P\geq W=R$ en $[0,t_q)$. Y con iiia) de proposición 1 tenemos que $P\geq R>P_c$ en $[0,t_q)$, $R=P_c$ en $[t_q,\infty)$ y por la monotonía de $Y(t,p)$ con respecto a P_c se tiene $Y(t,R(t))\geq Y(t,P(t))$, y debido a que $P\notin G_c$ existe un conjunto no vacío de tiempos t para los cuales $P(t)\neq P_c(t)$ por lo que la desigualdad anterior es estricta para tales tiempos, lo que implica tener $F_T(R)>F_T(P)$ para toda T suficientemente grande.

Viendo el otro caso, supóngase que para alguna $t\varepsilon[0,t_q)$

(1) Por no tener porciones inadmisibles de P_c.

se tenga $P(t)<P_c(t)$. Sea t_* el ínfimo de tales tiempos tal que:

$$P(t_*^-)\geq P_c(t^*)\gtrsim P(t^*). \qquad (23)$$

Sea Z la trayectoria de crecimiento libre que alcanza a $P_c(t^*)$ al tiempo t^*, entonces por (23) y ii) de proposición 1,

$$P\geq Z \text{ en } [0,t_*), \quad P\leq Z \text{ en } [t_*,\infty). \quad (24)$$

Además ya que $t_*<t_q$, concluimos de iiib) (proposición 1) que existe $t_1>t_*$ tal que $Z(t_1)= P_c(t_1)$ y por 24

$$P\geq Z>P_c \text{ en } [0,t_*) \text{ y } P\leq Z\leq P_c \text{ en } [t_*,t_1). \quad (25)$$

Sea $R(t)= \begin{cases} Z(t), & 0\leq t<t_1 \\ P_c(t), & t_1\leq t<\infty \end{cases}$ entonces $R\varepsilon G_c$

por la monotonía de $Y(t,p)$ con respecto a P_c y (25) se tiene $Y(t,P_c)\geq Y(t,P)$ con desigualdad estricta en un conjunto no - vacío.

Falta solo mostrar que existe una (única) trayectoria en G_c que maximiza F_T para T grande.

Centrémonos sobre los elementos de G_c y observemos como $F_T(P^*)$ depende del parámetro caracterizado por 22.

Así, para $T \geq \tau(P)$

$$\bar{F}_T(P) = G_T(\underline{P}) = \int_0^{\tau(\underline{P})} Y(t, Z_{\underline{P}}(t))dt + \int_{\tau(\underline{P})}^{T} Y(t, P_c(t))dt$$

y debido a la igualdad $\mathring{P}_c = Y(t, P_c(t)) + \psi(Q(t))$

se tiene $\int_{t(\underline{P})}^{T} \left[P_c - \psi(Q(t)) \right] dt = P_c(T) - P_c(\tau(P)) - \int_{\tau(P)}^{\bar{T}} \psi(Q(t))dt$

y usando $\dot{Z}_{\underline{P}} = Y(t, Z_{\underline{P}}), \quad Z_{\underline{P}}(o) = \underline{P}$

se tiene $\int_0^{\tau(P)} Y(t, Z_{\underline{P}}(t)) = Z_{\underline{P}}(\tau(P)) - Z_{\underline{P}}(o)$

de donde obtenemos:

$$F_T(P^*) = G_T(\underline{P}) = P_c(T) - P - \int_{\tau(\underline{P})}^{T} \psi(Q(t))dt,$$

y debido a la definición de W ya dada se tiene

$$G_T(\underline{P}) - G_T(W_\circ) = W_\circ - \underline{P} + \int_{t_q}^{\tau(\underline{P})} \psi(Q(t))dt = g(\underline{P}) \qquad (26)$$

donde g es función C^2 en $(0, W_\circ]$ con las siguientes propiedades:

$$g(0^+) = -\infty \quad , \quad g'(W_\circ) < 0$$
$$g''(\underline{P}) < 0 \quad \text{para } 0 < \underline{P} < W_\circ, \qquad (27)$$

tales propiedades serán justificadas después.

Debido a estas propiedades g tiene un máximo estricto es algún $\underline{P}_\circ \varepsilon(0,W_\circ)$ y es estrictamente creciente en $(0,\underline{P}_\circ)$ y decreciente en $(\underline{P}_\circ,W_\circ)$.

Sea $\underline{P}^* = \min(\underline{P}_\circ,P_\circ)$ y sea P^* dada por (22) con $\underline{P}=\underline{P}^*$ y sea $P_{\underline{P}}$, con parámetro $\underline{P}\neq\underline{P}^*$, quien denota cualquier otra trayectoria en G_c. Entonces, por medio de (26)

$$g(\underline{P}^*)-g(\underline{P})= W_\circ-\underline{P}^* + \int_{t_q}^{\tau(\underline{P}^*)} \psi(Q(t))dt - (W_\circ-\underline{P} + \int_{t_q}^{\tau(\underline{P})} \psi(Q(t))dt)$$

$$= \underline{P}-\underline{P}^* + \int_{t_q}^{\tau(\underline{P}^*)} \psi(Q(t))dt - \int_{t_q}^{t(\underline{P})} \psi(Q(t))dt$$

y en vista de la forma en que se tomó $\underline{P}^*$ se llega a

$$g(\underline{P}^*)- g(\underline{P})>0$$

y por medio de la igualdad

$$F_T(P^*)- F_T(P_{\underline{P}})= g(\underline{P}^*) \circ g(\underline{P})>0 \quad \text{para}$$

$$\text{toda } T> \max\,(\tau(\underline{P}),\tau(\underline{P}^*))$$

se puede ver que se tiene (B) de proposición 2, y con ello que $\underline{P}=P^*$ es la trayectoria óptima.

No se verificarán plenamente las propiedades de g dadas en (27), sólo veremos el método para establecer(tales propiedades.)

Para empezar se puede verificar que la relación $\tau:(0,W_\circ] \to [t_q,\infty)$ es una biyección. De hecho, la inversa Π de τ se puede obtener de resolver $\dot{Z}= Y(t,Z(t))$ para $Z_{\underline{P}}(t)$, como función de t, con $\underline{P}= Z_{\underline{P}}(\circ)$, encontrando para cualquier $t\varepsilon[t_q,\infty)$, el valor de $\underline{P}=\Pi(t)$ para el cual $Z_{\underline{P}}(t)= P_c(t)$. Como resutado se tiene:

$$\Pi(t)= \{\frac{2\gamma\ f(t)}{Q(t)-\gamma_\circ} - \gamma\int_0^t f(s)ds\}^{-1} \text{ con } f(t)= \exp\ \{\int_0^t (Q(s)-\gamma_\circ)ds\} \quad (28)$$

de donde se puede obtener $\Pi'(t)<0$ en $[t_q,\infty)$ y por ser τ inversa de Π se tiene que τ es monótona decreciente con rango $[t_q,\infty)$ de donde se tiene $\tau(0^-)=\infty$.

Usando $\quad \mathring{Q}=g(Q), \quad \psi(Q) = \dfrac{1}{2\gamma}\left[g(Q)- \dfrac{(Q-\gamma_\circ)^2}{2}\right]$

y $\quad g(\underline{P})=W_\circ-\underline{P} + \displaystyle\int_{t_q}^{\tau(\underline{P})}\psi(Q(t))dt$ y (28)

se puede llegar a $g'(\underline{P})= \dfrac{(Q-\gamma_\circ)^2}{4\gamma^2\underline{P}^2 f}-1, \quad g''(\underline{P})= \dfrac{(Q-\gamma_\circ)^2(Q-\gamma_\circ-2\gamma\underline{P}f)}{4\gamma^3\underline{P}^4 f^2}$

donde $\quad Q= Q(\tau(\underline{P})); \quad f=f(\tau(\underline{P}))$.

Por lo tanto el resultado $(27)_1$, $g(0^+)=-\infty$ resulta de la definición de $g(\underline{P})$, $\tau(0^+)=\infty$, $Q(\infty)=k$ y también $\psi(Q)=0 \Longleftrightarrow Q=q$.

La propiedad $(27)_2$ proviene de considerar $g'(\underline{P})=\frac{(Q-\gamma_0)^2}{4\gamma^2\underline{P}^2 f}-1$, $t_q=\tau(W_0)$ y $W(t_q)=P_c(t_q)$, siendo suficiente mostrar que $\frac{W(t_q)}{W_0}<f(t_q)^{1/2}$, tal desigualdad se puede obtener teniendo en cuenta que W satisface la ecuación de libre crecimiento - $\dot{Z}(t)=Y(t,Z(t))$, con $Y(t,p)=[Q(t)-\gamma_0-\gamma P]P$, lo que implica

$$(\ln W)^{\cdot}, \quad \frac{\dot{W}}{W}=Q-\gamma_0-\gamma W<\frac{Q-\gamma_0}{2} \quad \text{en } [0,t_q) \tag{29}$$

ya que $Q-\gamma_0-\gamma W<\frac{Q-\gamma_0}{2\gamma}$ en $[0,t_q)$.

Si integramos (29) de 0 a t_q y con ayuda de $f(t)$ ya definida se puede obtener la desigualdad de arriba.

Para justificar $(27)_3$, usemos $\Pi(t)$, ya obtenida como la inversa de τ y escribimos $\frac{1}{\underline{P}}=\frac{2\gamma f(\tau(p))}{Q(\tau(\underline{P}))-\gamma_0}-\gamma\int_0^{\tau(\underline{P})} f(s)ds$ que con la ayuda de $g''(\underline{P})$ se obtiene $(27)_3$.

CAPITULO 3

SECCION 3.1

A continuación estudiamos el sistema de evolución visto en el capítulo 2, pero sin cosecha. Tal sistema de ecuaciones de evolución lo reduciremos, mediante hipótesis y resultados ya establecidos a una ecuación diferencial no lineal y no autónoma, donde las características no lineal y no autónoma son provistas por la función de crecimiento natural de la población por medio de los factores mortalidad y nacimiento considerados. Aplicaremos este método obtenido para reducir el sistema de evolución, pero esta vez considerando un factor cosecha; la reducción que se obtiene en este caso es la misma ecuación diferencial no lineal y no autónoma pero con el factor cosecha $E(t)P(t)$. En esta última reducción se hace una última (y vital) consideración con respecto al factor nacimiento, de tal forma que la tasa de crecimiento instantánea ($\gamma(t)$) de la población se considera constante ($\gamma(t)=r$) por lo que se obtiene que una ecuación diferencial no lineal y autónoma modela la dinámica de una población con cosecha. En base a esta última ecuación se darán posteriormente (en otras secciones) políticas de cosecha óptima.

Analizaremos el siguiente sistema de evolución sin cosecha, cuyos resultados nos serán básicos.

Las siguientes ecuaciones forman nuestro sistema de evolución.

$$\frac{\partial \rho(t,t)}{\partial a} + \frac{\partial \rho(a,t)}{\partial t} + \mu(a,P(t))\ \rho(a,t) = 0$$

$$P(t) = \int_0^\infty \rho(a,t)da \tag{1}$$

$$B(t) = \rho(a,t) = \int_0^\infty \beta(a,P(t))\ \rho(a,t)da$$

donde $\rho(a,t)$ es la distribución de edad (el número de individuos de edad $a \geq 0$ a un tiempo $t \geq 0$)

$P(t)$ es la población total.

$B(t)$ es la tasa de nacimiento.

μ es la función mortalidad ($\mu(a,p)da$ es la probabilidad de morir en el intervalo de edad - $(a,a+da)$ cuando el tamaño de la población es P).

β es la función de natalidad ($\beta(a,p)$) es el número esperado de nacimientos para una persona de edad a cuando el tamaño de la población es P).

Sin embargo, supondremos que la población total P influye solo en la función mortalidad μ; más especificamente supondremos que:

$$\begin{aligned} \beta(a,p) &= \beta(a) \\ \mu(a,p) &= \mu_n(a) + \mu_e(p) \end{aligned} \qquad (2)$$

donde $\mu_n(a)da$ representa la probabilidad de morir debido a *causas naturales* durante $(a,a+da)$, mientras que $\mu_e(p)da$ es la probabilidad de morir por *factores circunstanciales*(1) durante el mismo intervalo.

En base a estas interpretaciones podemos decir lo siguiente.

Sea $\mu_e(p)=0$ en la ecuación $\frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial t} + \mu(a,p)\rho(a,t)=0$ que modela una dinámica poblacional con distribución de edad persistente y sin cosecha, de tal forma que si fijamos la dinámica con respecto al tiempo nos resulta que:

$$\frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a} + \mu_n(a)\ \rho(a,t) = 0 \qquad (3)$$

Esta última ecuación nos establece la dinámica solo con respecto a la edad, y tomando en cuenta el factor $\mu_n(a)$, tenemos que la solución de (3) tiene la expresión

$$\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu_n(\alpha)d\alpha}$$

(1) Factores circunstanciales: Saturación del medio, escasez de alimentos, etc.

que es la probabilidad de llegar a vivir hasta una edad a en un medio perfecto ($\mu_e=0$)[1].

La suposición $(2)_2$ es especial, como los efectos del medio son independientes de la edad; esta puede ser apropiada, por ejemplo, para una población con la presencia de depredadores los cuales comen indiscriminadamente individuos de todas las edades.

Supongamos que μ_n, μ_e y β son funciones de clase C' sobre $[0,\infty)$ con $\beta\varepsilon L'$ en $[0,\infty)$ y

$$\int_0^\infty \Pi(a)\ \beta(a)da > 1 \tag{4}$$

y como $\Pi(a)\beta(a)$ es la tasa de reproducción para individuos de edad a, el lado izquierdo de (4) representa la tasa de reproducción neta en un medio perfecto. Como consecuencia de 4 se tiene que tales poblaciones, a la larga, crecen. Por consiguiente esta suposición rinde una población que es posible cosechar.

A causa de (4) la ecuación

$$\int_0^\infty \Pi(a)\beta(a)\ e^{-ra}da = 1$$

tiene exactamente (por continuidad) una solución real $r>0$ -

(1) Ver [ ]

(1) Ver [ ]

llamaremos a r la tasa de crecimiento natural.

Para un medio perfecto podemos observar que la función:

$$\rho(a,t)= c\Pi(a)\ e^{-ra}p(t) \qquad (5)$$

con $\quad P(t)= P(0)\ e^{rt}$

y $\quad$ C se escoge tal que $C\int_0^\infty \Pi(a)\ e^{-ra}da= 1$

es una solución de (1) (de (2) y (3)).

Verificación: si $\rho(a,t)= c\Pi(a)\ e^{-rt}P(t)$ con $P(t)=P(0)e^{r2}$

se tiene $\dfrac{\partial\rho(a,t)}{\partial a} = C\ P(t)\left[-\mu_n(a)\Pi(a)e^{-ra}-\gamma\Pi(a)e^{-ra}\right]$

$$=-\mu_n(a)\rho(a,t)-re(a,t)$$

y $\dfrac{\partial\rho(a,t)}{\partial t} = C\Pi(a)e^{-ra}P(a)re^{rt}= C\Pi(a)e^{-ra}rP(t)=r\rho(a,t)$

y $\mu(a,P(t))\rho(a,t)=-\mu_n\rho(a,t)$ $\quad$ ya que $\mu_e(P)= 0$

que substituyendo en la ecuación $\dfrac{\partial\rho(a,t)}{\partial a}+\dfrac{\partial\rho(a,t)}{\partial t}+\mu(a,p)\rho(a,t)=0$

nos queda $-\mu_n\rho(a,t)-r\rho(a,t)+r\rho(a,t)+\mu_n\rho(a,t)=0$

por lo que efectivamente $\rho(a,t)=C\Pi(a)\rho^{-ra}\rho(t)$ es solución de (1) bajo (2) y $\mu_e=0$,

llamaremos a tales soluciones distribuciones de edad persistente, su importancia radica en que ellas representan la conducta asintótica de soluciones generales para tiempos grandes, esto es: dada una solución $\rho(a,t)$ existe una constante $C_\circ$ tal que, para cada edad a,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\rho(a,t)}{C_\circ \Pi(o)e^{-ra}\ e^{rt}} = 1 \quad \text{(observación: } C_\circ=(P(C_\circ))\text{)} \quad (6)$$

Llegaremos a una solución general si consideramos los valores iniciales consistentes con el sistema (1) mediante la condición inicial.

$$\rho(a,o)= \phi(a) \qquad (7)$$

con ϕ continua. Consideremos ahora la función

$$\xi(a,t)=\rho(a,t)\exp\{\textstyle\int_o^t \mu_e(P(a))da\}. \qquad (8)$$

Para efectos de interpretación veamos lo siguiente.

Sea $L(a,t)$ la población de edad a un tiempo t con $\mu_e=0$ y $\mu_n=0$, entonces $\xi(a,t)= L(a,t)\exp\{-\int_o^a \mu_n(\alpha)d\alpha\}$ es la población de edad a un tiempo t con $\mu_e=0$ y $\mu_n\neq 0$

$$\begin{aligned} y\ \rho(a,t)&=\xi(a,t)\exp\{-\textstyle\int_o^t \mu_e(P(\lambda)d\lambda\} \\ &=L(a,t)\exp\{-\textstyle\int_o^t \mu_e(P(\lambda)d\lambda-\int_o^{t=a}\mu_n(\alpha)d\alpha\} \text{ es el} \end{aligned}$$

tamaño de la población de edad a a un tiempo t con $\mu_n\neq 0$ y $\mu_e\neq 0$.

Si en (8) consideramos $\mu_e(P)=0$ entonces $\rho(a,t)=\xi(a,t)$ y por medio de (2), las ecuaciones (1) y (7) nos queda:

$$\frac{\partial\xi(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial\xi(a,t)}{\partial t}+\mu_n(a)\xi(a,t)=0$$
$$\xi(o,t)=\int_o^\infty \beta(a)\xi(a,t)da \qquad (9)$$
$$\xi(a,o)=\bar{\phi}(a)$$

Las ecuaciones (9) constituyen un sistema lineal para ξ, un sistema que es, de hecho, la formulación del problema para un medio perfecto.

La correspondiente función de nacimiento $\mathrm{B}(t)=\xi(o,t)$ es por consiguiente una solución de la ecuación Sharpe-Lotka(1)

$$\mathrm{B}(t)=\int_0^t \beta(a)\Pi(a)\mathrm{B}(t-a)da+\phi_1(t) \qquad (10)$$

donde ϕ depende solamente de datos iniciales:

$$\phi_1(t)=\int_t^\infty \beta(a)\Pi(a-t,a)\bar{\phi}(a-t)da,$$

con $\Pi(\alpha,a)=\dfrac{\Pi(a)}{\Pi(\alpha)}$ una vez que β es conocida, la población total

$$P(t)=\int_0^\infty \xi(a,t)da \qquad (11)$$

correspondiente a ξ es calculada usando las relaciones

(1) La consideración de esta ecuación se debe a la necesidad de que $\beta(t)$ tome en cuenta los tamaños poblacionales anteriores al tiempo t. Esto debido a la hipótesis de distribución de edad persistente.

$$P(t)= \int_0^t \Pi(a)\mathbb{B}(t-a)da +\psi(t)$$
$$\psi(t)= \int_t^\infty \Pi(a-t,a)\phi(a-t) \tag{12}$$

la hipótesis asumida $\mu_e(P)=0$ nos permite interpretar a ξ,β y P como las distribuciones de edad, función nacimiento y población total que prevalece en un medio ambiente perfecto.

Para encontrar (10) y (12) de (9) integramos (9) a lo largo de la característica (t=a+constante). El resultado

$$\xi(a,t)= \begin{cases} \Pi(a)\mathbb{B}(t-a) & 0\leq a<t \\ \Pi(a-t,a)\phi(a-t) & t\leq a \end{cases} \tag{13}$$

Veamos como con $(9)_2$ y (11) se obtiene (10) y (12).

Considerando de $(9)_2$ que $\xi(o,t)= \int_t^\infty \beta(a)\xi(a,t)da$

$$= \int_0^t \beta(a)\xi(a,t)da+ \int_t^\infty \beta(a)\xi(a,t)da$$

y substituyendo, adecuadamente, la ecuación (13) tenemos:

$$\xi(o,t)= \int_0^t \beta(a)\Pi(a)\mathbb{B}(t-a)da + \int_t^\infty \beta(a)\Pi(a-t,a)\phi(a-t)da$$

Además si a=0 se tiene $\xi(o,t)=\Pi(o)\mathbb{B}(t-o) \Rightarrow \xi(o,t)=\mathbb{B}(t)$ por lo que se tiene

$$\mathbb{B}(t)= \int_0^t \beta(a)\Pi(a)\mathbb{B}(t-a)da + \int_0^\infty \beta(a)\Pi(a-t,a)\phi(a-t)da$$

que es la ecuación (10).

Ahora integrando (13) $\int_0^{\infty}\xi(a,t)da= \int_0^{t}\xi(a,t)da + \int_t^{\infty}\xi(a,t)dt$

$$= \int_0^{t}\Pi(a)\beta(t-a)da+\int_t^{\infty}\Pi(a-t,a)\phi(a-t)da$$

pero de (11) tenemos $P(t)= \int_0^{\infty}\xi(a,t)da$. Se tiene (12).

Considerando $P(t)= \int_0^{\infty}\xi(a,t)da$ y por (8)

$$= \int_0^{\infty}\rho(o,t)\exp\{\int_0^{t}\mu_c(P(d))da\}$$

$$= \exp\{\int_0^{t}\mu_c(P(d))dd\}\int_0^{\infty}\rho(a,t)da$$

$$P(t) = \exp\{\int_0^{t}\mu_c(P(\lambda))d\lambda\}P(t) \text{ debido a } (1)_2 \quad (14)$$

Si diferenciamos esta última relación con respecto a t y dividimos el resultado por P(t), encontramos que P satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{P}= [\gamma - \mu_e(P)]P \quad (15)$$

$$\text{con} \quad \gamma(t)= \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} \quad (16)$$

Haciendo los cálculos si diferenciamos (14) con respecto a t obtenemos:

$$\dot{P}(t)= P(t)\text{Exp}\{\int_0^{t}\mu_e(P(\lambda)d\lambda\} + P(t)\mu_e(P)\text{Exp}\{\int_0^{t}\mu_e(P(\lambda))d\lambda$$

$$\dot{P}(t)= \dot{P}(t)(\frac{P(t)}{P(t)})+ P(t)\mu_e(P)(\frac{P(t)}{P(t)}) \text{ y dividiendo por } P(t)$$

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t)} = \frac{\dot{\bar{P}}(t)}{P(t)} + \mu_e(P) \text{ y haciendo } \frac{\dot{\bar{P}}(t)}{P(t)} = \gamma(t)$$ $\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$

y obtenemos $\dot{P}(t)=[\gamma(t)-\mu_e(P)]P(t)$

$\gamma(t)=\frac{\dot{\bar{P}}(t)}{P(t)}$ representa la tasa de crecimiento instantánea en un medio ambiente perfecto. Aquí P satisface

$$P(o)= P_o= \int_0^\infty \phi(a)da \qquad (17)$$

Los análisis anteriores rinden el siguiente procedimiento para resolvér el problema con valores iniciales; (1), (2) y (7):

a) Resolver la ecuación integral lineal (10) para $\beta(t)$

b) Calcular $P(t)$ de (12) y $\gamma(t)$ de (16)

c) Resolver la ecuación diferencial (15)-con condiciones iniciales (17)- para P(t).

d) Calcular $\xi(a,t)$ de (13) y $\rho(a,t)$ de (8).

Los resultados anteriores nos permiten ahora introducir el efecto cosecha por medio del esfuerzo E(t) independiente de la edad. Los individuos de edad a de esta población son cosechados a un nivel $E(t)\rho(a,t)$ al tiempo t, y en lugar de (1), se tiene la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial\rho(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial\rho(a,t)}{\partial t} + [\mu(a,P(t))+E(t)]\rho(a,t)=0 \qquad (18)$$

Las ecuaciones subyacentes que componen ahora a nuestro sistema de evolución son: (18) y $(1)_{2,3}$ con la condición inicial (7). Además continuaremos suponiendo que μ y β satisfacen (2).

Usando el procedimiento discutido en la sección anterior para reformular el problema, definimos:

$$\xi(a,t)=\rho(a,t)\ \exp\{\int_0^t [\mu_e(P(\lambda)d)+E(\lambda)]d\lambda\} \qquad (19)$$

Entonces ξ satisface el sistema lineal (9), $\beta(t)=\xi(o,t)$ es de nuevo la solución de la ecuación integral lineal (10), y $P(t)$ definida por (11) es de nuevo dada por (12).

Es importante notar que ξ, β y P representan la distribución de edad, tasa de nacimiento y población total que prevalecería en ausencia de cosecha y efectos ambientales.

Como antes, la conducta de la población actual $P(t)$ es gobernada por una ecuación diferencial ordinaria. En realidad, exactamente los mismos pasos usados para derivar (15) llevan ahora a:

$$\dot{P}= Y(t,p)-EP \qquad (20)$$

con $Y(t,p)$ la función de crecimiento natural con la expresión:

$$Y(t,p)=\left[\gamma(t)-\mu_e(P)\right] P \qquad (21)$$

En vista de (20), el rendimiento

$$\int_0^T\int_0^\infty E(t)\rho(a,t)dadt= \int_0^T E(t)P(t)dt \qquad (22)$$

sobre un intervalo $[o,T]$ es dada por la función al

$$Y_T(P)= P_o-P(T^-)+ \int_0^T Y(t,P(t))dt \qquad (23)$$

En base a estos resultados podemos decir que nuestro problema de cosecha óptima consiste en maximizar (23) sujeto a ciertas restricciones.

Este problema puede ser atacado usando el procedimiento siguiente:

(a) Resolver la ecuación integral lineal (10) para $\beta(t)$

(b) Calcular $P(t)$ de (12) y $\gamma(t)$ de (16)

(c) Resolver el problema de optimización definida por la ecuación diferencial (20) y la funcional (23).

Desafortunadamente, debido a la dependencia de $Y(t,p)$ sobre t, el problema de optimización de (c) se dificulta. Hay sin embargo una clase importante de problemas para el cual esta dependencia desaparece, en la que sí podemos dar solución al problema de optimización. Esta clase corresponde a poblaciones con distribuciones de edad inicialmente persistente. Veamos esto último más en detalle.

COSECHA OPTIMA PARA DISTRIBUCIONES DE EDAD INICIALMENTE PERSISTENTE.

Como notamos anteriormente, donde el medio ambiente es perfecto y en ausencia de cosecha, la distribución de edad es finalmente persistente. Así, teniendo en cuenta la interpretación de la función ξ definida en (19), para un medio ambiente arbitrario y en la presencia de cosecha, ξ será asintótica a una distribución de edad persistente como $t\to\infty$. Por consiguiente, si la población ha sido desarrollada en un largo período de tiempo, y si toda cosecha pasada ha sido con esfuerzo independiente de la edad, entonces parece razonable suponer que ξ, de aquí ρ, tendrá la estructura de edad indicada en (5). Por consiguiente asumimos que:

$$\phi(a)= CP_o\Pi(a)\ e^{-ra}$$

donde C y P_o son constantes con C escogida tal que (6) se mantiene, y donde r es la tasa natural de crecimiento. El problema de valor inicial (9) tiene entonces la solución única

$$\xi(a,t)= C\Pi(a)\, e^{-ra} P(t) \qquad (24)$$

$$P(t) = P_o e^{rt}$$

y tal que $\gamma(t)= \dfrac{\dot{P}(t)}{P(t)} = \dfrac{r_i}{P_o} \dfrac{e^{rt}}{e^{rt}} = r$, es decir, con $\gamma(t)=r$ (25)

Además la contraparte de (14) en las presentes circunstancias es la misma (14) con $E(\lambda)$ agregada a $\mu_e(P(\lambda))$; Esto es, (24) y (19) implican que

$$\rho(a,t)= C\Pi(a)\, e^{-ra}\, P(t) \qquad (26)$$

En vista de (21) y (25) se tiene que $Y(t,p)$ es independiente de t:

$$Y(P)=\left[r-\mu_e(P)\right]P$$

es decir que la ecuación diferencial (20) se reduce a:

$$\dot{P}= Y(P)-EP, \qquad (27)$$

donde la funcional (23) adquiere la forma

$$Y_T(P)= P_o-P(T)+ \int_0^T Y(P(t))dt \qquad (28)$$

En las secciones siguientes nos dedicaremos a estudiar la optimización planteada al maximizar (28) sujeta a la condición (27).

Observación:

Los resultados vistos se extienden trivialmente a situaciones en las cuales los individuos de edad a tienen un valor económico g(a), donde g es no negativa, función L^{∞} en $[0,\infty)$. En este caso el rendimiento (22) es reemplazado por:

$$\int_0^T \int_0^{\infty} g(a)E(t)\ \rho(a,t)da\ dt = \int_0^T E(t)G(t)dt \qquad (29)$$

donde $G(t) = \int_0^{\infty} g(a)\ \rho(a,t)da$ y con ayuda de $\rho(a,t) = C\Pi(a)e^{-ra}P(t)$ se implica que $G(t) = (C \int_0^{\infty} g(a)\Pi(a)e^{-ra}da)P(t) = C_1P(t)$ con constante $C_1>0$.

SECCION 3.2.

Veremos ahora qué políticas de cosecha óptima corresponden a la dinámica de una población que es modelada por una ecuación diferencial de cosecha, como $\dot{P}= Y(P)$ donde $P(t)$ es el nivel de la población a un tiempo t y $Y(P)$ es la función de crecimiento natural de la población(1); pero a nosotros nos interesa una dinámica poblacional que contemple una cosecha, lo que logramos introduciendo la función esfuerzo $E(t)$, que representa la política de cosecha con respecto al tiempo, que multiplicando al nivel de la población $P(t)$ se consigue el nivel de cosecha $E(t)P(t)$ al tiempo t, es decir, ahora la dinámica poblacional está dada por $\dot{P}(t)= Y(P)-E(t)P(t)$, de tal forma que podemos definir un rendimiento hasta un tiempo T con $\int_0^T E(t)P(t)dt$ donde conviene tomar a T suficientemente grande. Por esto último podemos decir que el rendimiento ha sido planteado como un problema de horizonte infinito no estándar. Este rendimiento, que no contempla una tasa de descuento, puede verse como si la contemplara, pero siendo ésta igual a cero(2).

(1) Es interesante observar como el conocer sólo la dinámica "natural" de la población nos capacita, por medio de nuestra definición de optimicidad, para encontrar políticas óptimas de explotación.

(2) Lo que implica, como veremos después, que si $E(t)$ no es acotado (o tiene cota suficientemente grande) la $P(t)$ que maximiza el rendimiento (de una manera sostenible) es la misma que maximiza la función de crecimiento.

El problema, que consiste en maximizar el rendimiento para una T dada conforme lo permita la ecuación con cosecha, lo dividiremos (en general) en dos casos, dependiendo si $E(t)$ es considerado acotado o no.

Pero vayamos un poco más despacio para ver que hipótesis, tan realistas como el manejo matemático lo permita, son asignados a las funciones comentadas al inicio.

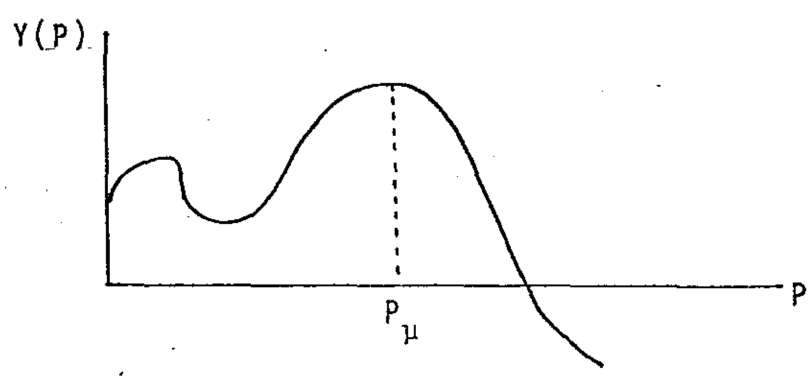
-A la función de crecimiento natural $Y(P)$ la suponemos como sigue:

i) $Y \varepsilon C'$ en $[0,\infty)$

ii) Con un estricto global máximo en $P_\mu > 0$

iii) $Y(P) > 0$ si $P \varepsilon (0, P\ )$, con un número finito (a lo más) de puntos críticos (extremos).

con el fin de visualizarla, graficamos:



A la función población $P(t)$ la consideraremos, inicialmente, como sigue:

i) De valor inicial (a un tiempo $t=0$)
$P(0)=P_o>0$

ii) Consideraremos que $P \varepsilon G$, donde G

$$G \equiv \{P(t)/P(t)>0 \quad t, \text{ continuas por la derecha } (P(t)=P(t^+))^{(1)}, \text{ función } P(t), \text{ que por pedazos es de clase } C'\}$$

Con respecto a $E(t)$[2] diremos, por lo pronto, que es una función no negativa.

El término $\int_0^T E(t)P(t)dz$ se puede obtener, integrando de o a T la ecuación $\dot{P}=Y(P)-EP$, lo que resulta en $Y_T(P)= P_o-P(T^-)+ \int_0^T Y(P(t))dt$. Con esto último estamos en condición de definir una trayectoria óptima.

Diremos que una trayectoria, relativa a G, es una trayectoria óptima (denotada por P^*) si $P^*\varepsilon G$ y tiene la siguiente propiedad:

para cualquier $P\varepsilon G$, $P\neq P^*$, $Y_T(P^*)>Y_T(P)$ para toda T suficientemente grande (es decir, para T más grande que un tiempo $T_1=T_1(P)$ que está por darse).

(1) Esta condición implica considerar intervalos, de continuidad para P, de la forma $[a,b)$ en t.

(2) Ver apéndice.

Obsérvese que hemos definido nuestro criterio de optimicidad, ya que maximizar el rendimiento total (de o a T) - será nuestro objetivo.

Empezaremos por considerar el caso en que el esfuerzo E(t) es no acotado, lo primero que habrá que hacer es adecuar la familia de G a este caso. Es decir redefinir G, para incluir (o excluir) propiedades de P adicionales que surgen al considerar a E(t) no acotado. En vista de considerar - $\dot{P}= Y(P)-EP$, con E no negativo nos obliga a pedir la siguiente condición:

(C1) Para cualquier $t>0$ para el cual P es diferenciable se deberá tener $\dot{P}(t)\leq Y(P(t))$.

Ahora bien, si los individuos son cosechados, a un tiempo T, más que lo reclutado, entonces el nivel de la población sufre de un salto en ese tiempo t, pero obviamente este salto deberá ser descendente, lo que origina la 2da. condición a considerar:

(C2) $P(0)\leq P_o$ y para cualquier $t>0$ para el cual P tenga saltos, será tal que $P(t)\leq P(t^-)$.

Esta última condición es congruente con la continuidad de P(t) por la derecha (inclusive si t=0).

Adelantándonos un poco, y teniendo en cuenta que $Y_T(P)$ depende de $Y(P)$ y por tener ésta un máximo estricto (global), en P_μ, podríamos esperar que la política óptima consistiría en alcanzar a P_μ tan rápido como sea posible, y mantenernos en ese nivel (constante), para todo tiempo posterior. Analizando más esta posible solución, supongamos primero que $P_\circ \geq P_\mu$. En este caso podríamos aplicar el esfuerzo en el instante $t=0$ para alcanzar a P_μ (se tendría $P_\circ \gtrless P(o)= P_\mu$) con un salto descendente. Como segunda posibilidad podríamos tener $P_\circ < P_\mu$, sabemos que un salto de $P_\circ$ a P_μ no es posible, veremos que la estrategia óptima en este caso consiste en abstenerse de cosechar (hacer $E(t)=0$) hasta alcanzar P_μ y mantenernos en ese nivel para todo tiempo posterior.

Al frenar la cosecha la población crece libremente de una forma natural, de tal manera que podemos definir una *curva de crecimiento libre* $Z(t)$ que empieza en $Z_\circ \varepsilon (o,P_\mu)$ al tiempo $t_\circ \geq 0$, y que es solución de la ecuación $\dot{Z}=Y(Z)$ con valor inicial $Z(t_\circ)= Z_\circ$. Observemos que debido a la hipótesis $Y>0$ en $(0, P_\mu]$ implica que Z es estrictamente creciente y alcanza P_μ en un tiempo finito.

Con tal información podemos establecer la "solución", como un teorema por demostrar, para este caso (E no acotado).

Teorema relativo a $G_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trayectorias } P(t)/P\varepsilon G \text{ y} \\ \text{consistentes con } (C_1) \text{ y } (C_2) \end{array} \right.$

la trayectoria óptima esta dada por

$$P^*(t) = P_\mu \; ; \; t \geqslant 0 \quad \text{para el caso } P_\circ \geqslant P \qquad (1)$$

y

$$P^*(t) = \begin{cases} Z(t), & 0 \leqslant t < t \\ p_\mu, & t_\mu \leqslant t < \infty \quad \text{si } P_\circ < P_\mu \end{cases} \qquad (2)$$

donde Z es la curva de crecimiento libre que empieza en $P_\circ$ al tiempo t=0 y alcanza a P_μ al tiempo t_μ, donde haciendo $\dot{P} = Y(P) - EP = 0$ se obtiene $E = \frac{Y(P_\mu)}{P_\mu}$ que es el esfuerzo necesario para mantener P(t) al nivel óptimo P_μ lo que implica que para (1) se tiene $E(t) = \frac{Y(P_\mu)}{P_\mu} + \delta(t) \ln \frac{P_\circ}{P_\mu}$ y para (2)

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < t \\ \dfrac{Y(P_\mu)}{P_\mu}, & t_\mu \leqslant t < \infty \end{cases} .$$

Para la demostración del teorema anterior empezaremos por mostrar los siguientes resultados auxiliares:

Proposición 1: Sea $P\varepsilon G$ óptima entonces

i) $P(t) \leqslant P_\mu \quad t \geqslant 0$

ii) $P(t) = P_\mu$ para toda t suficientemente grande.

Para demostrar i) supóngase primero que es falso. Es decir, $P>P_\mu$ en algún intervalo $\tau C[0,\infty)$. Sea $g\varepsilon G$ dada por $g(t)=\min\{P_\mu, P(t)\}$ entonces, ya que $g\leq P$ y como P_μ es máximo para Y tenemos que:

$$Y_T(g)-Y_T(P)=\int_{[0,t]\cap\tau}(Y(P_\mu)-Y(P(t)))dt+P(T^-)-g(T^-)>0 \text{ siempre que } T>\inf\tau$$

lo que contradice la hipótesis de que P es óptima, lo que prueba i).

Para demostrar ii) notemos que la condición Y tiene un máximo en P_μ, y escogiendo $L\varepsilon(0,P_\mu)$ implican que:

$$\forall\ P_1\ \varepsilon(0,P_\mu)\ \exists\ P_2\varepsilon[L,P_\mu]\ \text{tal que } P_1<P_2 \qquad (3)$$

$$\text{implica que } Y(P_1)<Y(P_2).$$

Nos acercaremos a la demostración de ii), mostrando antes que:

$\lim_{t\to\infty} P(t)=P_\mu$. Supóngase que esto último es falso. Entonces por i); $\liminf_{t\to\infty} P(t)<P_\mu$ y de aquí que existe $k\varepsilon(L,P_\mu)$ y una sucesión $\{t_n\}$ creciente ($t_n\to\infty$ si $n\to\infty$) y $P(t_n)<k$ para toda n.

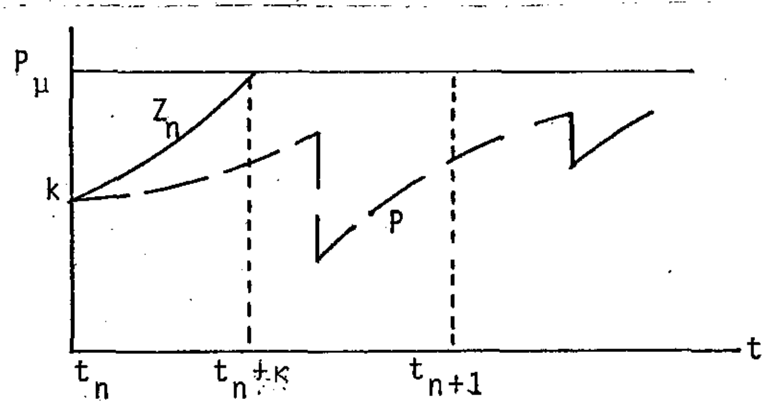
Sea entonces Z quien denota la curva de crecimiento libre que empieza en K al tiempo t=0 y alcanza a P_μ en un tiempo κ y sea $Z_n(t)= Z(t-t_n)$ tal que Z_n es la curva de crecimiento libre que empieza en K al tiempo t_n. Adicionalmente, supóngase que la sucesión $\{t_n\}$ es tal que $t_{n+1}>t_n+\kappa$ (si la sucesión $\{t_n\}$ no tiene esta propiedad alguna subsucesión la tiene)

Se ha obtenido; $P(t_n) \leq Z_n(t_n) \quad (Z_n(t_n)= K)$

$$\dot{Z}= Y(Z_n) \quad y \quad \dot{P}\leq Y(P)$$

por lo que debido al teorema de comparación para desigualdades con diferenciales se obtiene $P\leq Z_n$ en $[t_n,t_n+\kappa]$ (4)

tal cota para P se puede observar en la gráfica siguiente:



Para P* definida por (1) o (2) y t_n suficientemente grande se llega a:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [Y(P(\overset{*}{t}))-Y(P(t))]dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [Y(P_\mu)-Y(P(t))]dt \geq$$

$$\geq \int_{t_n}^{t_{n+1}} [Y(P_\mu)-Y(Z_n(t)]dt =$$ debido a que $t_{n+1}>t_n+K$ y también a que $P\leq Z_n$ en $[t_n, t_n+K]$ lo que implica $Y(Z_n(t))\geq Y(P(t))$ en $[t_n, t_n+K]$

$$= \int_0^k [Y(P_\mu)-Y(Z(t))]dt = D>0$$ debido a que $Y(P_\mu)$ es constante y $Z_n(t)= Z(t-t_n)$ y la 2da desigualdad por que $Y(P_\mu)\geq Y(Z(t))$ gracias a (3).

El resultado anterior nos permite concluir que:

$$F(T)= \int_0^T [Y(P^*(t))-Y(P(t))] \; dt\to\infty \quad \text{si} \quad T\to\infty$$

para esta propiedad de F(T) escribimos:

$$Y_T(P^*)-Y_T(P)= F(T)+P(T^-)-P_\mu\to\infty \quad \text{si} \quad T\to\infty.$$

Sin olvidar que $P\geq 0$ y P_μ una constante, observamos que el resultado anterior contradice la hipótesis de que P es óptima, por lo que P satisface $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)=P_\mu$.

Con el objetivo de demostrar ii); vemos, gracias a (3) y al resultado i), que existe un tiempo a para el cual

$$P(t)\varepsilon\left[L,P_\mu\right]\forall t\geqslant a \quad \text{y definimos } g\varepsilon G \text{ como:}$$

$$g(t)=\begin{matrix} P(t), & 0\leqslant t<a \\ Z(t), & a\leqslant t<\kappa \\ P_\mu \;, & \kappa\leqslant t<\infty \end{matrix}$$

donde Z es la curva de crecimiento libre que empieza en P(a) al tiempo t=a y alcanza P_μ al tiempo $\kappa(a<\kappa)$ teniendo en cuenta que g=P para $t\varepsilon[0,a)$ se llega a

$$Y_T(g)-Y_T(P)=\int_0^T\left[Y(g(t))-Y(P(t)\right]dt + P(T^-)-P_\mu\forall T>\kappa^{(1)}$$

Además, con el mismo argumento con que obtuvimos (4), establecemos que $P\leqslant Z$ en $[a,\kappa]$.

Supóngase ahora que ii) es falso. Entonces por (3), (5) y las propiedades de g, se tiene que:

$$Y(g(t))\geqslant Y(P(t)) \text{ para toda } t\varepsilon[a,\infty)$$

que debido a la no veracidad de ii) se tiene la desigualdad estricta en un conjunto abierto, y debido al resultado ya obtenido; $\lim_{t\to\infty} P(t)=P_\mu$, se deberá tener $P(T^-)\longrightarrow P_\mu$ si $T\to\infty$.

(1) Si T<K no hay rendimiento $Y_T(g)$.

Por lo que en (5) se tiene una desigualdad estricta para T suficientemente grande, lo que contradice la optimalidad de P(t) y se concluye la validez de ii).

Valiéndonos de esta proposición 1, ya obtenida, es suficiente establecer la optimalidad de una trayectoria en base a la clase

$$G_\mu = \{P\varepsilon G / P \leqslant P_\mu \text{ en } [0,\infty) \text{ y } P(t) = P_\mu \text{ para } t \text{ suficientemente grande}\}$$

donde G es la ya definida.

Para empezar a demostrar el teorema solución, supongamos primero $P_o \geqslant P_\mu$. Sea P* dada por (1) y escogamos $P\varepsilon G_\mu$ con $P \neq P^*$. Entonces $P(T) = P^*(T) = P_\mu$ para T suficientemente grande, y para tales T;

$$Y_T(P^*) - Y_T(P) = \int_0^T [Y(P_\mu) - Y(P(t))] dt > 0$$

de donde se concluye que P* es óptima.

Veamos el caso en que $P_o < P_\mu$.

Para demostrar la optimalidad, en este caso, necesitamos un resultado auxiliar que lo plantearemos en base a la siguiente notación:

Sea $[A,C] \subset (0,P_\mu]$, sea Z la curva de crecimiento libre que empieza en A al tiempo t=0 y alcanza C al tiempo $t=\kappa$. Sea $[a,c] \subset [0,\infty)$ con $C \geq a+\kappa$.

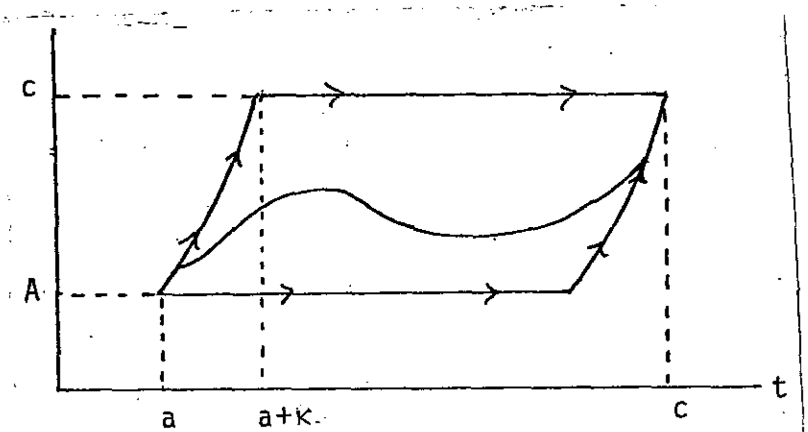
Además sea H definida en $[a,c]$ por

$$H(t)= \begin{cases} Z(t-a), & a\leq t<a+\kappa \\ C \quad , & a+\kappa\leq t\leq c \end{cases} \quad \text{si } Y(C)\geq Y(A)$$

y

$$H(t)= \begin{cases} A \quad , & a\leq t<C-\kappa \\ Z(t-C+\kappa), & C-\kappa\leq t\leq C \end{cases} \quad \text{si } Y(C)<Y(A)$$

que gráficamente



llamaremos a H la transición óptima de A a C durante $[a,c]$; κ es el tiempo de transición de H y $C-a-\kappa$ el tiempo restante de H. Finalmente diremos que una trayectoria $P\varepsilon G_\mu$ es un *levante* durante $[a,c]$ si $P(a)<P(t)<P(c)$ para toda $t\varepsilon(a,c)$, que grá

ficamente la incluimos en el dibujo anterior con ______.

Estamos ahora en posición de establecer el resultado auxiliar con la siguiente proposición.

Proposición 2: Sea $P \varepsilon G_{\mu}$ un levante durante $[\bar{a},\bar{c}]$ $C[0,\infty)$.

Entonces:

i) Existe una transición óptima H entre P(a) y P(t) durante $[\bar{a},\bar{c}]$.

ii) Si el tiempo restante de H se anula $(C-a-\kappa=0)$ entonces P=H en $[\bar{a},\bar{c}]$.

iii) Si Y es monótona en $[P(a),P(c)]$, entonces $Y(H(t)) \geqslant Y(P(t))$ $t \varepsilon [\bar{a},\bar{c}]$ con desigualdad estricta en un conjunto abierto si el tiempo restante de H es no nulo.

Veremos la demostración para el caso $Y(P(c))>Y(P(a))$.

Debido a (4) tenemos $P(t) \leqslant Z(t-a)$; $a \leqslant t \leqslant a+\kappa$ (6)

y teniendo en cuenta que P es un levante observamos que $c \geqslant a+\kappa$ y dando

$$H(t)= \begin{matrix} Z(t-a) & a \leqslant t<a+\kappa \\ P(t) & a+\kappa \leqslant t \leqslant c \end{matrix}$$ por lo que se tiene i)

Supóngase (para el tiempo restante de esta gráfica dirigida) que el tiempo de transición κ de H es igual a c-a.

Entonces $H(t)=Z(t-a)\ \forall t\in[a,c]$ y puesto que:

$$H(c)=P(c),\quad \dot{H}=Y(H),\quad \mathring{P}\leq Y(P)$$

que por el teorema de comparación tenemos $P\geq H$ en $[a,c]$ y por (6) se tiene $H\leq P$ en $a\leq t\leq a+\kappa$ lo que implica (ya que $c=a+\kappa$) que $H=P$ en $[a,c]$, de modo que se obtiene ii).

Para demostrar iii) suponemos a Y monótona, (Y tiene, a lo más, una cantidad finita de puntos críticos en $(0, P_\mu)$). Lo que implica que Y es estrictamente creciente en $[P(a),P(c)]$. Por ser P(t) un levante, y también debido a (6), es decir, por tener:

$$P(a)<P(t)<P(c) \quad \text{en} \quad (a,c)$$
$$P(t)\leq Z(t-a) \quad \text{en} \quad a\leq t\leq a+\kappa$$

se implica que $P\leq H$ en $[a,c]$ y si el tiempo restante de H es no nulo se tiene que $P(a+K)<H(a+\kappa)=P(t)$, que aunado a la monotonía de Y (creciente) en $[P(a),P(c)]$ se consigue la validez de iii).

Utilizaremos estos resultados, con G_μ , para demostrar la parte (2) del teorema solución.

Escogiendo $P\varepsilon G_{\mu}$, $P\neq P^{*}$, sea T_{μ} el tiempo mínimo para el cual $P(t)=P_{\mu}\ \forall\ t\geq t_{\mu}$. Debido a los saltos descendentes de P, este deberá tomar todos sus valores en $[P_{o},P_{\mu}]$ (no olvidemos que $P_{o}<P_{\mu}$).

Sea $C_1,C_2,\ldots,C_n$ con $P_{o}=C_1<C_2<\ldots<C_n=P_{\mu}$, quienes denotan los puntos extremos (cantidad finita) de Y en $[P_{o},P_{\mu}]$ y sea l_k $(k=1,2,\ldots,n)$, el *tiempo final* en $[0,t_{\mu}]$, tiempo para los cuales P toma el valor C_k (podemos observar que $l_n=T_{\mu}$). Análogamente sean $T_k(k=2,3,\ldots,n)$ quienes denotan el *primer tiempo* después de l_{k-1} para el cual P toma el valor C_k, definiendo $T_1=0$.

Lo anterior implica que P es un levante en

$$[l_k,T_{k+1}]\quad(k=1,2,\ldots,n)\tag{7}$$

consideremos la trayectoria $R\varepsilon G_{\mu}$ que se obtiene al reemplazar cada levante, en (7), por la correspondiente transición óptima, cuya existencia esta garantizada por i) de proposición 2, y debido a la monotonía de Y en cada $[P(l_k),P(T_{k+1})]$ podemos concluir, en base iii) de proposición 2, que $Y(R(t))\geq Y(P(t)\ \forall\ t\geq 0$.

Así que: $Y_T(R) = R_o - R(T^-) + \int_0^T Y(R(t))dt$

$$Y_T(P) = P_o - P(T^-) + \int_0^T Y(P(t))dt$$

$$\Longrightarrow \quad Y_T(R) \geq Y_T(P(t)) \quad t \geq t_\mu$$

Nuestro objetivo consiste ahora en mostrar que $Y_T(P^*) > Y_T(P) \; \forall \; T, T_\mu$ para lo cual podemos considerar los casos: $R=P^*$ y $R \neq P^*$.

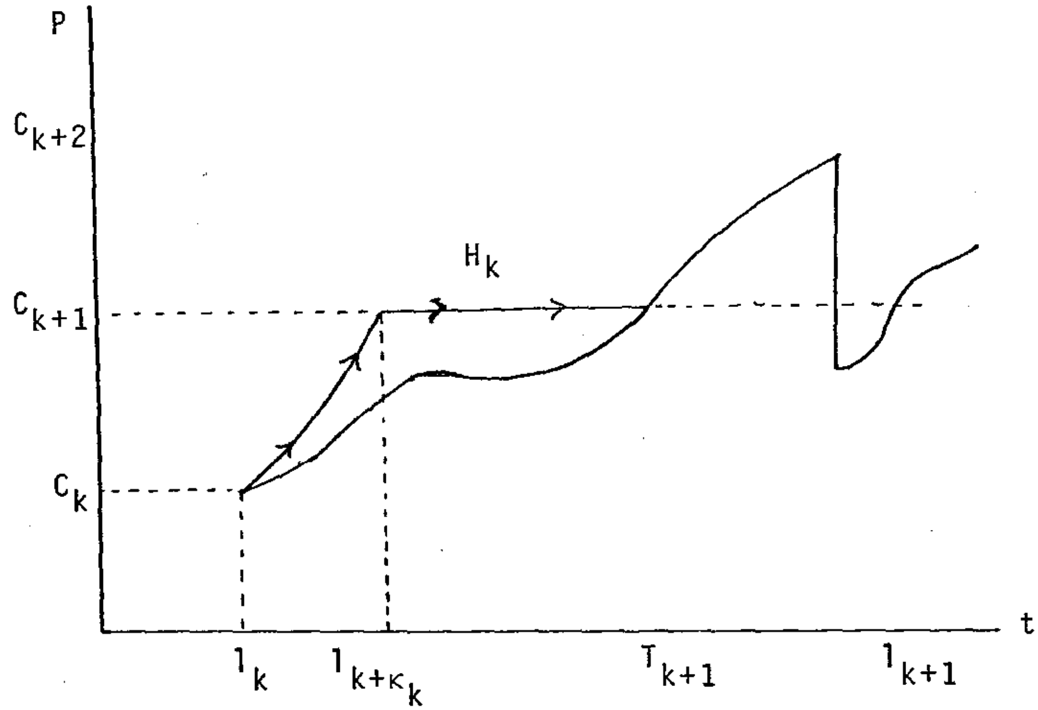
Caso 1: $R=P^*$. Con P^* dado por (2).

Observemos que $t_k = l_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ con el tiempo restante para cada levante, excepto el último, se anula. Así que, por ii) de proposición (2), R y P coinciden fuera del último intervalo lenvante $[l_{n-1}, t_n]$. El tiempo restante asociado con este último levante no puede anularse, porque si asi fuera, entonces R y P coincidirían en todas partes, lo que no puede ser, - ya que $R=P^* \neq P$, por lo que podemos concluir de iii) de proposición (2) y (3) que

$$Y_T(P) < Y_T(R) \; (=Y_T(P^*)) \; \forall \; T \geq T_\mu \, .$$

Para estudiar este caso veremos más detenidamente la construcción de R(1) . Gráficamente observemos el comportamiento de R y P en los intervalos de tiempo: $[l_k, l_k + \kappa_k]$, $[l_k + \kappa_k, T_{\kappa+1}]$ y $[T_{\kappa+1}, l_{\kappa+1}]$:

(1) Esta construcción se conoce como cuasi-óptimo.



donde P es un levante en $[l_k, T_{k+1}]$ y H_k es la transición óptima correspondiente (suponiendo $Y(P(T_{k+1})) \geq Y(P(l_k))$) con κ_k el tiempo de transición y $T-l_k-\kappa_k$ el tiempo restante de H_k, de tal forma que se ha obtenido

$$R(t)= \begin{cases} H_k & \text{en } [l_k, l_k+\kappa_k] \\ R_k & \text{en } [l_k+\kappa_k, T_{k+1}] \\ P(t) & \text{en } [T_k, l_k] \\ P(t)=P_\mu & \text{si } \ t \geq t_\mu \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que $P^*(t)= \begin{cases} Z(t) & \text{en } [0,t_\mu] \\ P_\mu & \text{en } [t_\mu, T] \end{cases}$

y como $\int_{[0,T]} Y(R(t))dt = \int_{\bigcup_k (l_k+\kappa_k, T_{k+1})} Y(R(t))dt + \int_{\bigcup_k (T_k, l_k)} Y(R(t))dt + \int_{(T_n, T)} Y(R(t))dt + \left(\int_{\bigcup_k (l_k, l_k+K_k)} Y(R(t))dt \right)$

y $\int_{[0,T]} Y(P(t))dt = \int_{[0,T_\mu]} Y(P^*(t))dt + \int_{(t_\mu, T_\mu)} Y(P^*(t))dt + \int_{[T_\mu, T]}$

y por ser $R(t)$ de crecimiento libre en $U(l_k,l_k+\kappa_k)$;

$$\int_{U(l_k,l_k+K_k)} Y(R(t))dt = \int_{[0,T_\mu]} Y(P^*(t))dt \ .$$

Por lo que se consigue $Y_T(P^*)-Y_T(R)=(T-T\ )Y(P\ )-l_t(R)$ (8) donde $l_t(R)$ es la integral de $Y(R)$ en Ω y $\Omega=(\bigcup_k^{n-1}(l_k+\kappa_k,T_{k+1}))\cup(\bigcup_k(t_k,l_k))\cup(T_n,T$ y como se tiene $Y(R)\leq Y(P_\mu)$ en Ω se obtiene $l_t(R)\leq(T-T_\mu)Y(P_\mu)$. Queda pendiente mostrar que existe un conjunto abierto $\theta\subset\Omega$ de tal forma que

$Y(R(t))<Y(P_\mu)\ \forall\ t\varepsilon\theta$ y tomando en cuenta (8)

se obtiene $Y_T(P^*)>Y_T(R)$.

Considerando estos dos casos vistos se obtiene la desigualdad buscada $Y_T(P^*)>Y_T(P)\ \forall\ T\geq T_\mu$.

Para verificar la existencia de θ, observamos que para este caso $(R\neq P^*)$ se deberá tener que los intervalos de tiempo restante $[l_k+\kappa_k,T_{k+1}]$ son no vacios $(T_{k+1}-(l_k+\kappa_\kappa)>0)$. Claramente, θ puede estar formado de tales intervalos.

SECCION 3.3

Veamos ahora el caso en que se quiere optimizar (maximizar) el rendimiento total considerando un esfuerzo $E(t)$ acotado superiormente por $\bar{E}$. Es decir, $0 \leq E(t) \leq \bar{E}\ \forall t$, que podemos expresar como una condición que deberán satisfacer las trayectorias G, como:

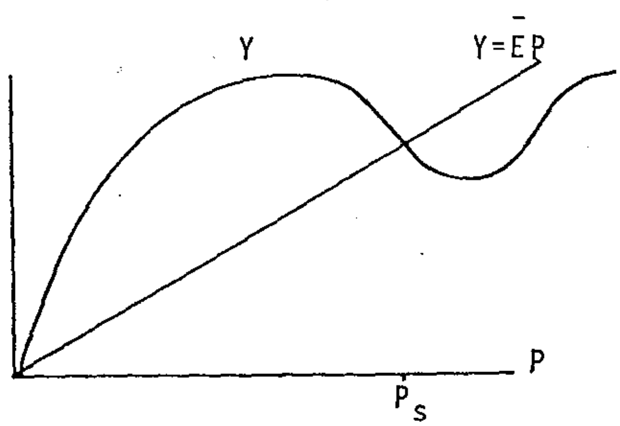
$$(C3) \quad \dot{P}(t) \geq Y(P(t)) - \bar{E}P(t)$$

y recordando (C1) que consiste en $\dot{P} \leq Y(P(t))$ para t donde P es diferenciable y debido a que $\bar{E}$ es una cota, en principio, arbitraria. Se tiene que una trayectoria que satisface (C1) y (C3) es necesariamente continua (por ser las derivadas laterales iguales). Por lo que no tomaremos en cuenta a (C2) y con la misma razón restringimos nuestra atención a las trayectorias G consistentes con (C1), (C3) y la condición inicial $P(o)=P_o$. Como una hipótesis adicional sobre Y, asumiremos;

$$\limsup_{P\to\infty} Y(P) \leq 0 \ ^{(1)} \qquad (10)$$

entonces existe un valor más grande, de $P(t)$, que llamaremos $P_s(<\infty)$ para el cual $Y(P_s) = \bar{E}P_s$ (11)

(1) Hipótesis realista desde el punto de vista biológico.



Además, debido a (10) Y restringido a $[P_s,\infty)$, tiene un máximo, supondremos que este máximo ocurre en $P_\mu \in [P_s,\infty)$, es decir;

$$Y(P_\mu) > Y(P) \ \forall \ P \geq P_s, \ P \neq P_\mu \qquad (12)$$

finalmente supondremos $Y>0$ en $(0,P_s)$,(2) como notación sean $S=Y(P_s)$ y $\mu=Y(P_\mu)$, por lo que $\mu \geq s$.

Además de considerar las curvas de crecimiento libre necesitamos, para este caso, considerar también lo que es una curva de máximo esfuerzo, diremos que $X(t)$ es una curva de máximo esfuerzo, si es solución en $0 \leq t < \infty$ de la ecuación

$$\dot{X} = Y(x) - \bar{E}X$$

observemos que si $P(t)$ satisface (C3); $\dot{P}(t) \geq Y(P(t) - \bar{E}P(t)$ y $P(T_o) = X(T_o)$ por el teorema de comparación se consigue:

(2) Hipótesis ya hecha.

$$P \leqslant X \text{ en } [0,T_\circ] \text{ y } P \geqslant X \text{ en } [t_\circ,\infty) \qquad (13)$$

Considerando que $P_\circ < P_\mu$, usaremos la siguiente notación:

$$U_1 = \inf \{P > P_\circ / Y(P) > \mu\}$$

y por cada valor de $n(n=1,2,\ldots)$, para el cual el conjunto anterior es no vacío, podemos definir

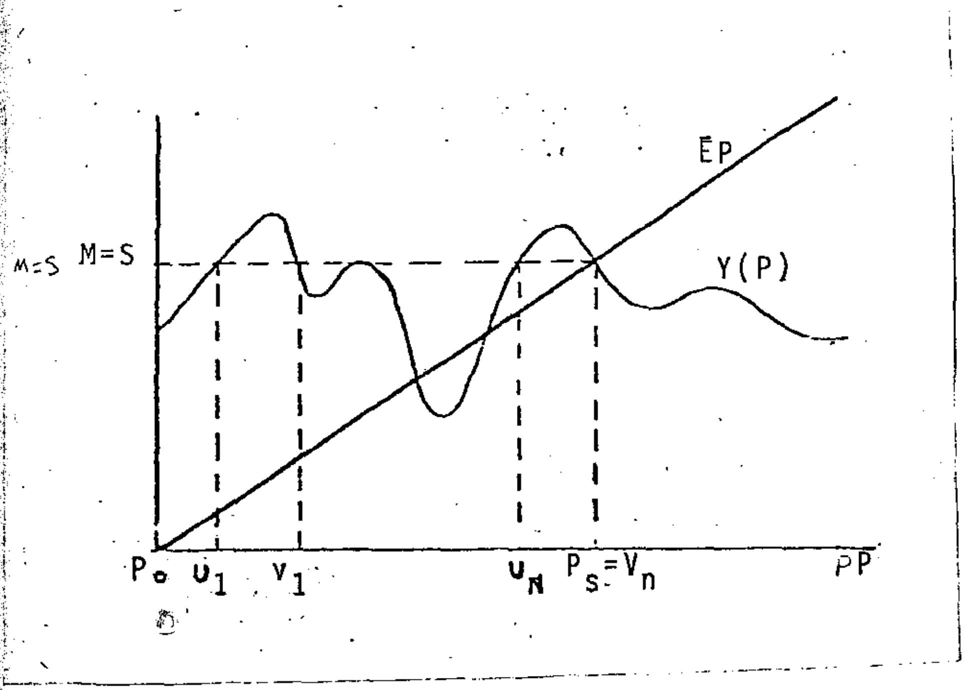
$$V_n = \inf \{P > U_n / Y(P) < \mu\}$$
$$U_{n+1} = \inf \{P > V_n / Y(P) > \mu\}$$

por lo que se tiene $U_n < V_n < U_{n+1}$ y además $Y \geqslant \mu$ en (U_n, V_n) que para ser congruentes con la hipótesis (12) deberemos tener $V_n \leqslant P_S$, para toda n. Ya que Y tiene un número finito de extremos debe entonces haber un número finito (1) N de $U_n'S$ y el mismo número de $V_n'S$.

Con todo el aparato de definiciones y observaciones anteriores podemos dividir el problema de optimización (para E acotado) en dos casos.

Caso 1: P_μ no es máximo local de Y, lo que implica, debido a (12) que $P_\mu = P_S$ y además $Y < S$ en (P_S, ∞) con $V_n = P_S$. Gráficamente para este caso:

(1) Realmente $N \leqslant$ # de extremos de Y.



A continuación daremos, como teorema solución para este caso, la trayectoria poblacional que optimiza (maximiza) la cosecha (rendimiento) ya definida.

TEOREMA A: Con respecto a la familia G={trayectorias consistentes con(C1), (C3) y $P(o)=P_\circ$}, aseguremos que la trayectoria óptima P^* es la que sigue:

(a) Si $P_\circ<P_S$, entonces

$$P^*(t)=\begin{cases} Z_1(t), & 0\leqslant t<\mu_1 \\ X_1(t), & \mu_1\leqslant t<v_1 \\ \vdots & \\ Z_N(t), & v_{N-1}\leqslant t<\mu_N \\ X_N(t), & \mu_N\leqslant t<\infty \end{cases}$$

con

Z_1 la curva de crecimiento libre que parte de $P_\circ$ al tiempo $t=0$ $(Z(o)=P_\circ)$

Z_n la curva de crecimiento libre que parte de v_{n-1} al tiempo $t=v_{n-1}$ $(Z(v_{n-1})=V_{n-1})$

μ_n el tiempo para el cual $Z_n(\mu_n)=U_n$

X_n la curva del máximo esfuerzo que parte de U_n al tiempo $Z=\mu_n$ (solución de $\dot{X}=Y(X)-\bar{E}X$ con $X(\mu_n)=U_n$)

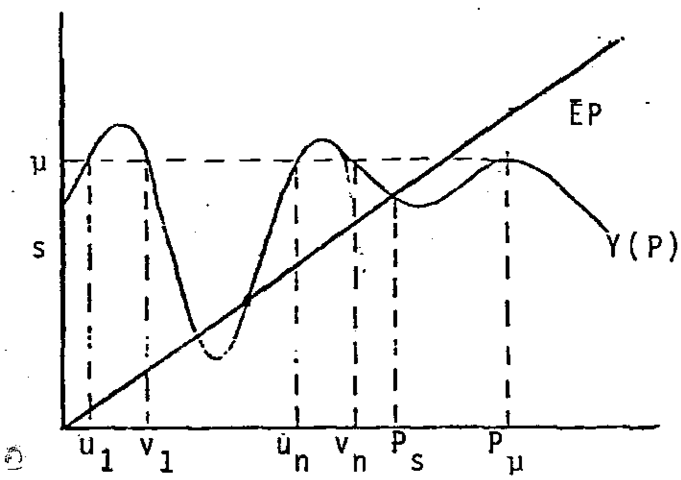
v_n el tiempo para el cual $X_n(v_n)= V_n$.

(b) Si $P_\circ \geqslant P_s$, entonces P^* es la curva del máximo esfuerzo que empieza en $P_\circ$ al tiempo $t=0$.

En pocas palabras la estrategia óptima consiste (si $P_\circ<P_\mu$) en dejar crecer (de una forma óptima) la población hasta que el nivel $\bar{E}P$ sea lo suficientemente grande $(\bar{E}P_s=Y(P_s))$ como para mantener el nivel de la población en P_s para $t\geqslant t_\mu$. Si $P_\circ>P_\mu$, la mejor estrategia es cosechar al máximo para alcanzar el nivel de equilibrio P_s $(0=Y(P_s)-\bar{E}P_s)$

Obsérvese, para $n<N$, que $Y(P)-\bar{E}P>0$ en $[\mu_n,v_n]$ lo que implica que X_n crece en tal intervalo y alcanza V_n en el tiempo finito (bien definido) v_n. Para los tiempos μ_n la analogía es trivial.

Caso B: Bajo la condición (12) y P_μ un máximo local para Y se tiene gráficamente para este caso:



El teorema solución respectivo es el siguiente:

TEOREMA B: Con respecto a la familia G={trayectorias consistentes con (C1), (C3) y $P(o)=P_o$} , la trayectoria óptima P* es:

(a) Si $P_o<P_\mu$,

$$P^*(t)=\begin{cases} Z_1(t), & 0\leq t<\mu_1 \\ X_1(t), & \mu_1\leq t<v_1 \\ \vdots & \\ Z_{n+1}(t), & v_n\leq t<t_\mu \\ P_\mu & t_\mu\leq t<\infty \end{cases}$$

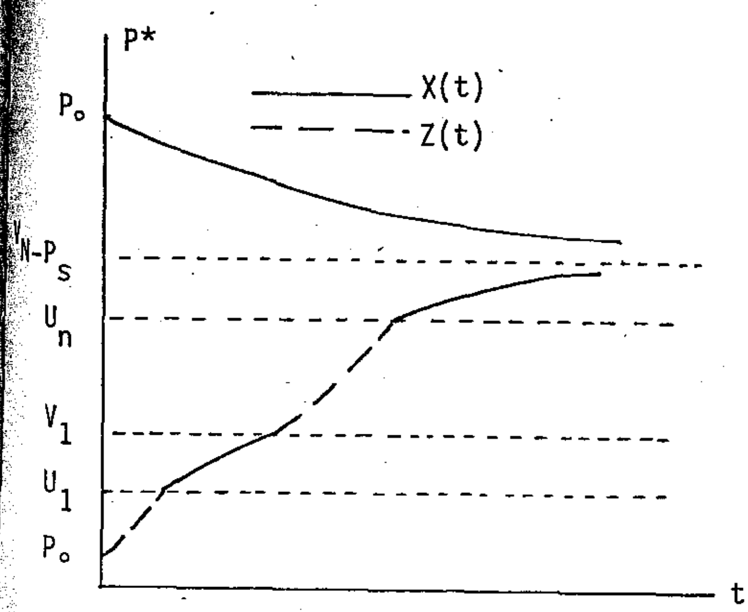
donde Z_n, X_n, μ_n y $\bar{v}_n$ son interpretados como en el teorema v_n
A. Z_{n+1} es la curva de crecimiento libre que parte de V_n al tiempo $t=v_n$ y t es el tiempo para el cual $Z_{n+1}(t_\mu)=P_\mu$.

(b) si $P_\circ \geq P_\mu$

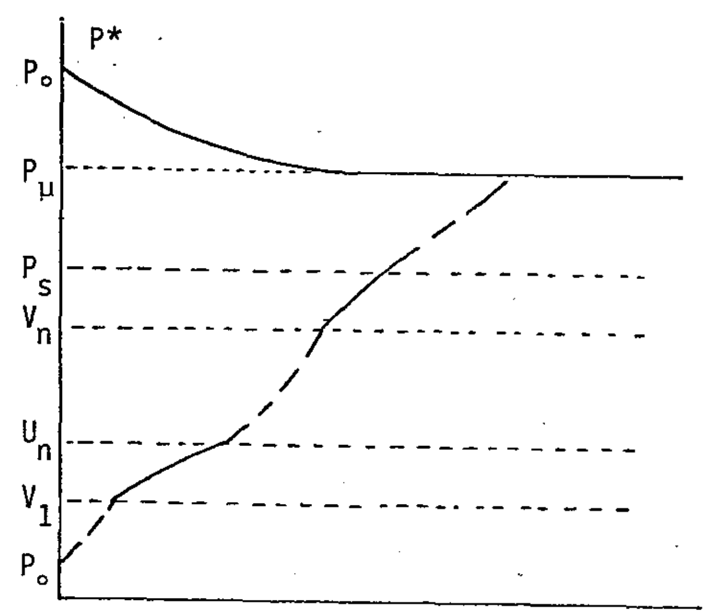
$$P^*(t) = \begin{cases} X(t), & o \leq t < t_\mu \\ P_\mu, & t_\mu \leq t < \infty \end{cases}$$

donde X es la curva de máximo esfuerzo que parte de $P_\circ$ al tiempo $t=0$ y t_μ es el tiempo para el cual $X(t_\mu)=P_\mu$ (como $\lim_{t\to\infty} X(t) = P_s$ y $P_s<P_\mu$ entonces $t_\mu<\infty$).

Los niveles óptimos para la población dados por los teoremas solución son, gráficamente;



CASO A



CASO B

A continuación se da la demostración del teorema solución A parte a), es decir, consideramos $P_\circ < P_s = P_\mu$. Para acercarnos a esta demostración requerimos del siguiente resultado auxiliar;

Proposición 3: Sea $P \varepsilon G$ óptima, entonces:

i) $\lim_{t \to \infty} P(t) = P_s$

ii) P es no decreciente.

Demostración: Observemos primero que $P(t) \leqslant P_s$; $0 \leqslant t < \infty$, ya que si no fuera asi $Q \varepsilon G$ definida por

$$Q(t) = \min \ \{P(t), P_s\}$$

sería mejor que $P(t)$, en el sentido de que se tendría $Y_T(Q) > Y_T(P)$ para T suficientemente grande ya que:

si el máximo de Y está en $P_\mu = P_s$ tenemos que:

$$Y_T(Q) - Y_T(P) = \int_0^T [Y(Q) - Y(P)] dt + P(T^-) - Q(T^-) - Q_\circ + P_\circ$$

si T es grande

$\Longrightarrow$ $Y_T(Q) > Y_T(P)$ si T es grande. Lo que contradice la supuesta optimicidad de $P(t)$.

Supóngase primero que $P(t_\circ) \varepsilon [U_n, V_n]$ para algún tiempo $t_\circ$. Sea X la curva del máximo esfuerzo que empieza en $P(t_\circ)$

al tiempo t_o. $X(t)$ es la solución de $\dot{X}(t)=Y(X)-\bar{E}X$(con $X(t_o)=P(t_o)$), ecuación donde si $t\to\infty \Longrightarrow \dot{X}(t)\to 0$, o bien, $(Y(X)-EX)\to 0$, y como el único valor para el cual $Y(P)=\bar{E}P$ es P_s, por lo que tenemos $X(t)\to P_s$ si $t\to\infty$, y por (13), y el resultado inicial $X\leqslant P\leqslant P_s$ en - $[t_o,\infty)$ se tiene que $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)= P_s$ para i).

Supóngase ahora la otra posibilidad, $P(t)<U_n \; \forall t$. Y sea $\delta\varepsilon=\{P\varepsilon[0,U_n]/Y(P)\geqslant S-\varepsilon\}$ y recordando, para este caso, - $S=Y(P_s)=\bar{E}P_s$. Por lo que existe un $\varepsilon>o$ tal que

$$Y(P)>\bar{E}P \; \forall P\varepsilon\delta\varepsilon \qquad (14)$$

además, debido a que Y tiene (a lo mas) un número finito de puntos críticos se deduce que $\delta\varepsilon$ es la unión de un número finito de intervalos compactos y debido a la ecuación del máximo esfuerzo $\dot{X}=Y(X)-\bar{E}X$ con (13) y (14) se tiene que si P ingresa en cualquier de tales intervalos, este se mantendrá - solo un tiempo finito, y sin retornar. Por lo que $P(t)$ cae fuera de $\delta\varepsilon$ para toda t suficientemente grande, y en base a (14) $-Y(P)\leqslant -S+\varepsilon$ para t suficientemente grande se tiene:

$$Y(P_s)-Y(P)>\varepsilon \qquad (15)$$

Ahora sea $$Q(t)=\begin{cases} Z(t), & 0\leqslant t\leqslant t_s \\ P_s, & t_s\leqslant t<\infty \end{cases}$$

con Z la curva de crecimiento libre que empieza en P_o al tiempo t=0 y alcanza P_s al tiempo t_s. Por lo que si hacemos un cálculo en base a (15) se muestra que:

$$\lim_{T\to\infty} \left[Y_T(Q)-Y_T(P) \right] = +\infty$$

por lo que Q es mejor que P, lo que contradice la supuesta optimalidad de P. Con lo que se obtiene la validez de i).

A continuación demostramos ii).

Considerando a P(t) óptimo, mostraremos primero que $\dot{P}(t^+)\geqslant 0\ \forall t$. Supongamos lo contrario, existe un tiempo t_1 tal que $P(t_1^+)<0$ y sea $P_1= P(t_1)$. Entonces, debido a la ecuación (C3), $Y(P_1)<\bar{E}P_1$ y como $Y(P_s)= \bar{E}P_s$ se tiene que $P_1<P_s$. Además sean τ y q como sigue:

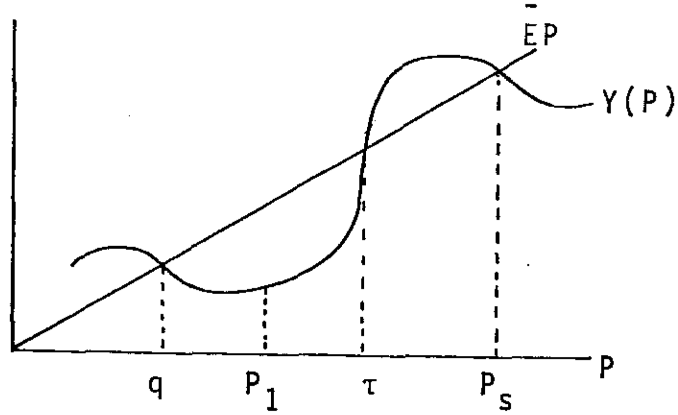
$$q=\sup \{P\varepsilon\left[0,P_1\right)/Y(P)= \bar{E}P\}$$

$$\tau=\inf \{P\varepsilon(P_1,P_s)/Y(P)= \bar{E}P\}$$ quienes existen ya que $Y(P_1)<\bar{E}P$.

y por esta misma desigualdad (y definición de P_s) aseguramos que son tales que $Y(P)<\bar{E}P \quad P\varepsilon(q,\tau)$

$$y \quad 0\leqslant q<P_1<\tau<P_s \tag{16}$$

Gráficamente



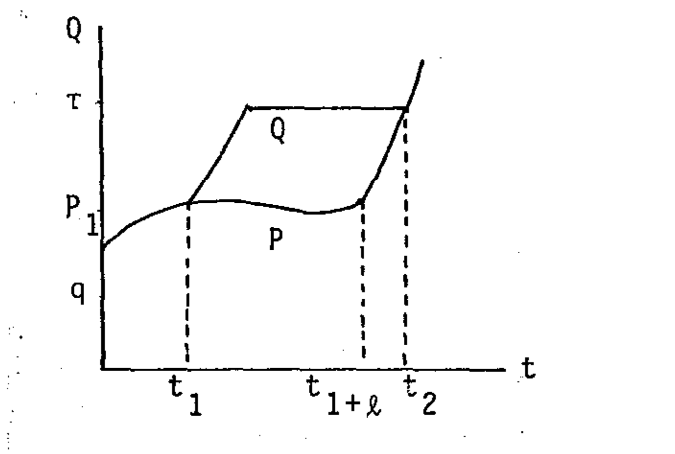
Sea X la curva de máximo esfuerzo que empieza en P_1 al tiempo t_1 debido a que la curva de máximo esfuerzo, al pasar por q, se mantiene constante en q (por definición de q), se tiene X>q en $[t_1,\infty)$ y con (13), concluimos que P>q en $[t_1,\infty)$ sea ahora $t_1+\ell$ el primer tiempo, después de t_1, para el cual $P(t_1+\ell)= P_1$ (la existencia de $t_1+\ell$ es asegurada por i) y $P_1<P_s$) por lo que se tiene $P<P_1$ en $(t_1,t_1+\ell)$ y junto con las desigualdades ya obtenidas; $(16)_2$ y P>q en $[t_1,\infty)$ se tiene

$$Y(P(t))<\bar{E}P(t)<\bar{E}\tau=Y(\tau)\ \forall\, t\varepsilon(t_1,t_1+\ell) \qquad (17)$$

así que la nueva QεG que nos será útil para mostrar la no optimalidad de P, es la dada como:

$$Q(t)=\begin{cases} P(t), & 0\leq t<t_1 \\ P(t+1), & t_1\leq t\leq t_2-\ell \\ \tau & ,t_2-\ell\leq t<t_2 \\ P(t), & t_2\leq t<\infty \end{cases}$$

con t_2 (mayor que $t_1+\ell$) es el primer tiempo, después de t_1, - para el cual se tiene $P(t_2)=\tau$. Gráficamente,

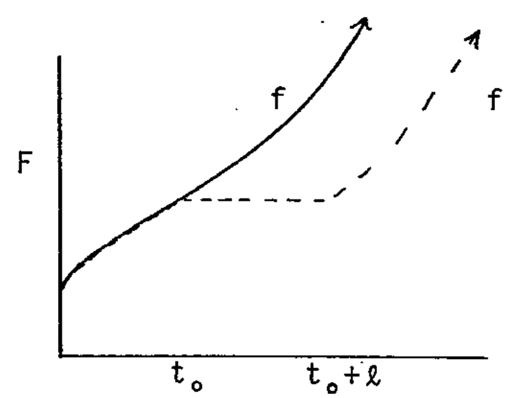


que en base a (17) se muestra que Q(t) es mejor que P(t), lo que contradice la optimalidad de P, por lo que se tiene ii) y la proposición 3 completa.

A continuación definiremos una función $\overrightarrow{f(t)}$ que nos será de utilidad. Sea f una función contínua no decreciente en - $[0,\infty)$ y sea $\mathfrak{f}$ un valor perteneciente al rango de f. Rntonces llamaremos a $\vec{f}$ una extensión de f por una cantidad $\ell\geq 0$, si esta dada por:

$$
\vec{f}(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ F & t_0 \leqslant t < t_0 + \ell \\ f(t-\ell), & t_0 + \ell < t < \infty \end{cases} \quad (1)
$$

donde t_0 es el primer tiempo para el cual se tiene $f(t_0)=F$ gráficamente sería



por medio de aplicaciones sucesivas de esta definición podemos extender una función para con un número finito de puntos en su rango.

Veremos ahora la demostración de optimalidad de P^* dada por el teorema A parte a). Haremos la demostración viendo solo que P^* es mejor que cualquier trayectoria $P \varepsilon G$, $P \neq P^*$ consistente con i) y ii) de proposición 3. Comenzaremos considerando a $P(t)$ una de tales trayectorias y sea $\hat{\mu}_n (n=1,2,\ldots,N)$

(1) Trivialmente, podemos decir que f es una extensión de f (en cualquier valor de su rango) con longitud cero.

los tiempos para los cuales P cruza U_n y sea $\hat{v}_n(n=1,\ldots,N-1)$ los tiempos para los cuales P cruza V_n. No olvidemos que estos tiempos son únicos, debido a que P(t) es creciente (para tales tiempos se tiene que $\dot{P}(t)\geqslant Y(P(t))-\bar{E}P(t)>0$).

Sea $\vec{P}$ la extensión de P en $V_1,V_2,\ldots,V_{n-1}$ con $\lambda_n-(\hat{v}_n-\hat{\mu}_n)$ el tamaño de la extensión en $V_1,V_2,\ldots,V_{n-1}$ donde estamos considerando que λ_n es el tiempo que toma la curva del máximo esfuerzo de pasar del nivel U_n al nivel V_n. Finalmente, sea $\tilde{\mu}_n(n=1,2,\ldots,N)$ es el último tiempo en el cual $\vec{P}$ toma el valor V_n. Entonces, ya que $P\neq P^*$ se tiene que $\vec{P}\neq P^*$, todavía más, se puede mostrar que:

$$\lim_{T\to\infty}\left[Y_T(\vec{P})-Y_T(P)\right]=0$$

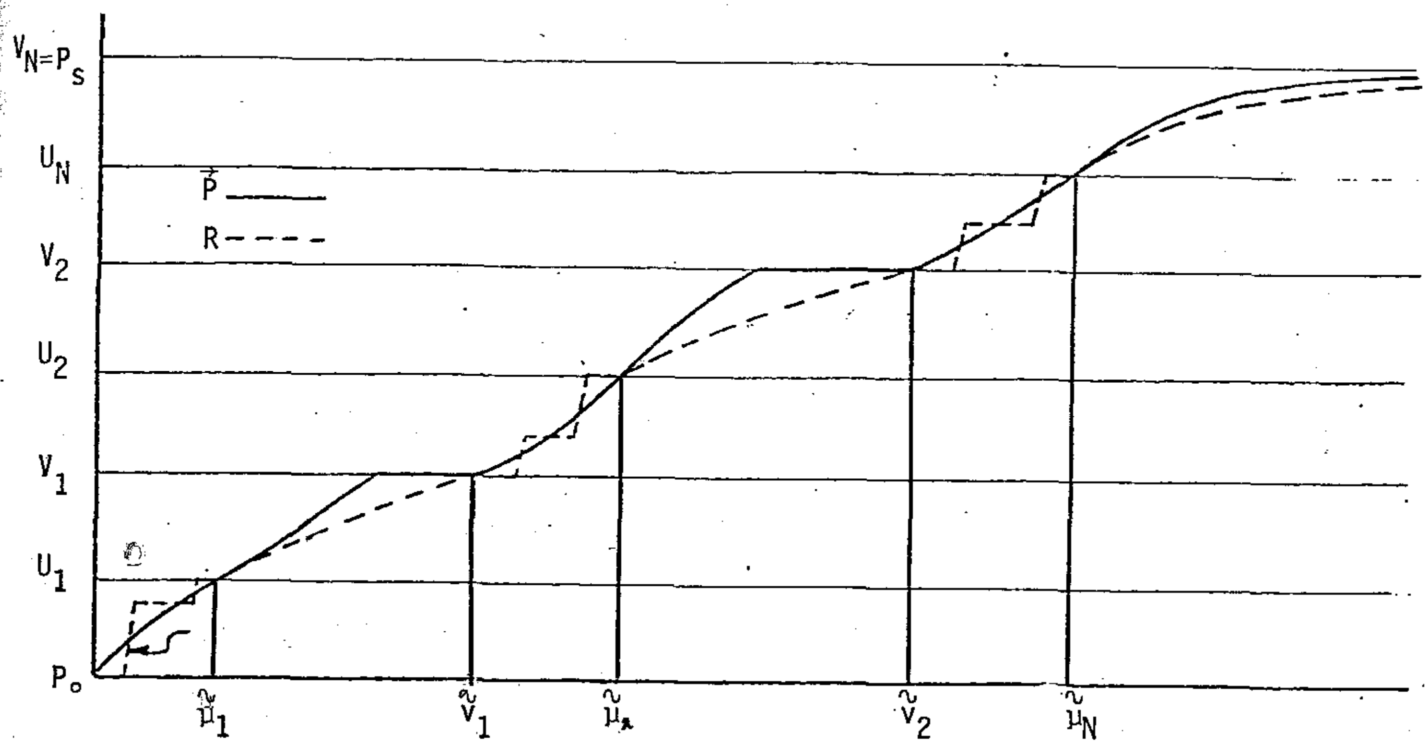
por lo que es suficiente mostrar que P^* es mejor que $\vec{P}$.

Consideremos ahora la trayectoria R obtenida de $\vec{P}$ como sigue:

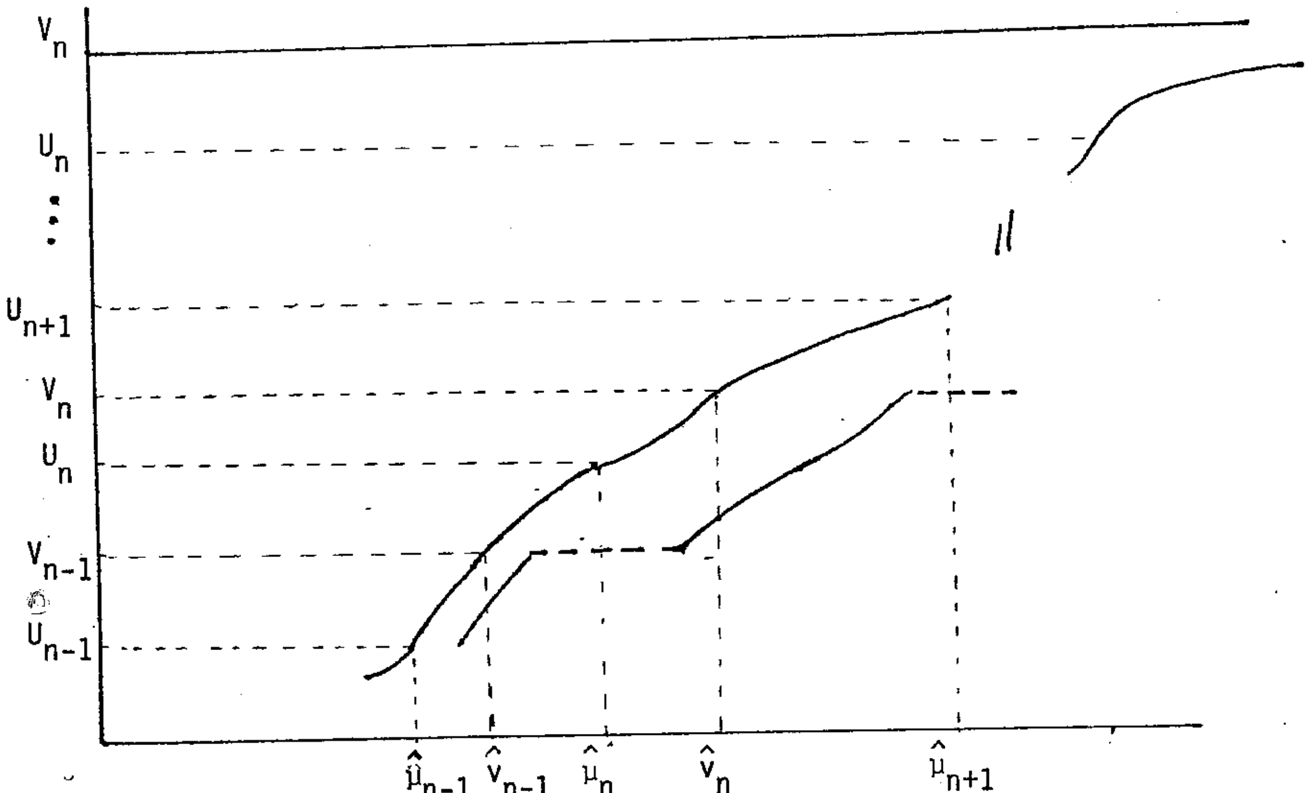
(I) Reemplazamos a $\vec{P}$, en $[\tilde{\mu}_{n-1},\tilde{v}_n]$, por la curva del máximo esfuerzo que empieza en U_n al tiempo $t=\hat{\mu}_n$ (sin olvidar que $\vec{P}$ fue definida tal que la curva de máximo esfuerzo alcanza V_n en $\hat{v}_n$)

(II) Reemplazar a $\vec{P}$, en $[\hat{v}_{n-1},\hat{\mu}_n]$, por su cuasi-óptimo (la cuasi-óptimo ya fue definida anterioremente).

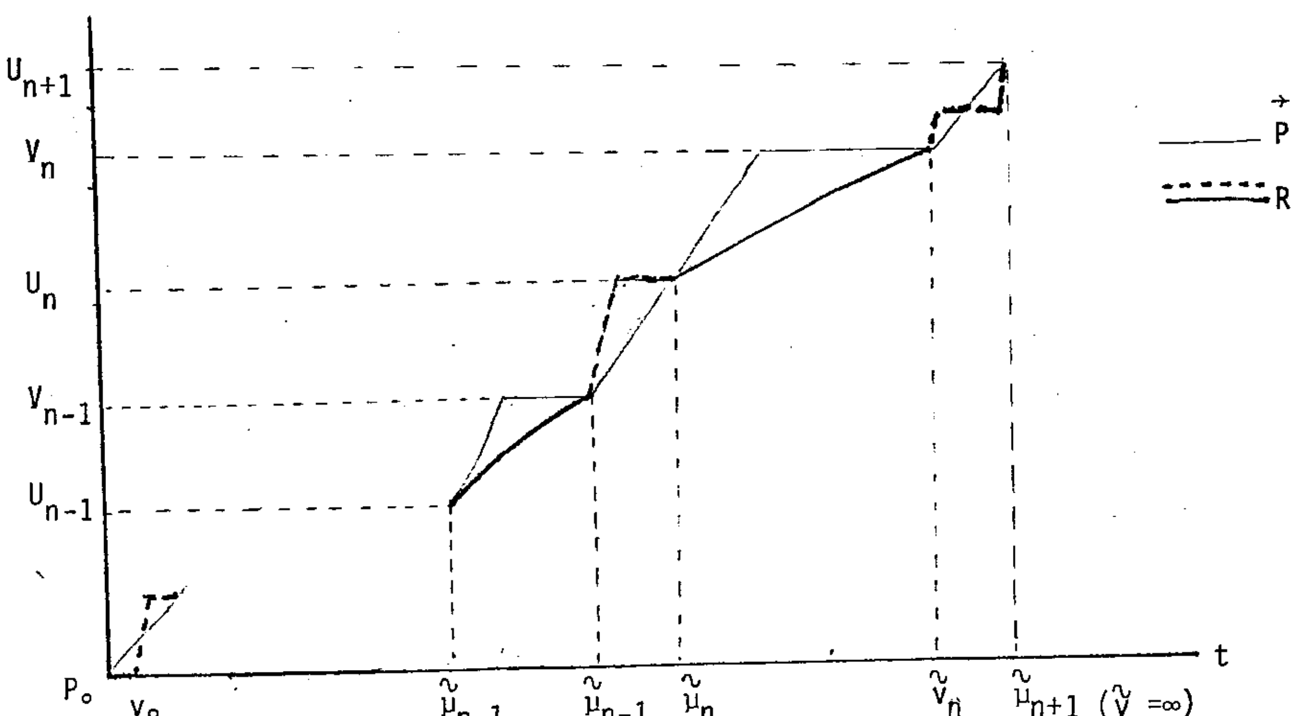
Estas definiciones ((I) y (II)) se mantienen para - $n=1,2,\ldots,N$ son $v_o=0$ y $\tilde{v}_n=\infty$, gráficamente R y $\vec{P}$ como sigue:



La gráfica P y $\vec{P}$ en los n-ésimos intervalos



La gráfica de $\vec{P}$ y R en los n-ésimos intervalos



Necesitamos mostrar la siguiente proposición

Proposición 4:

$$\lim_{T\to\infty} \inf \left[Y_T(R) - Y_T(\vec{P}) \right] \geq 0$$

con desigualdad estricta si $R \neq \vec{P}$.

Demostración: Sea $T > \tilde{\mu}_n$ y definiendo a la vez;

$$I = \bigcup_{n=1}^{N} \left[\tilde{\nu}_{n-1}, \tilde{\mu}_n \right], \qquad J = \bigcup_{n=1}^{N} \left[\tilde{\mu}_n, \tilde{\nu}_n \right],$$

$$J_t = J \cap \left[0, T \right] \text{y} \quad \theta(\Lambda) = \int_{\Lambda} \left[Y(R(t)) - Y(\vec{P}(t)) \right] dt$$

de modo que $I \cup J_t = \left[0, T \right]$ y por la continuidad de R y $\vec{P}$, se tiene

$$Y_T(R) - Y_T(\vec{P}) = \vec{P}(T) - R(T) + \theta(I) + \theta(J_T).$$

Por definición $\vec{P}(\tilde{\mu}_n) = R(\tilde{\mu}_n)$ y por $(13)_2$ se tiene que - $\vec{P}(T) \geq R(T)$. Por lo que probar esta proposición 4 se reduce a probar las dos siguientes sub-proposiciones:

(SP1) $\theta(I) \geq 0$ con desigualdad estricta si $R \neq \vec{P}$ en I

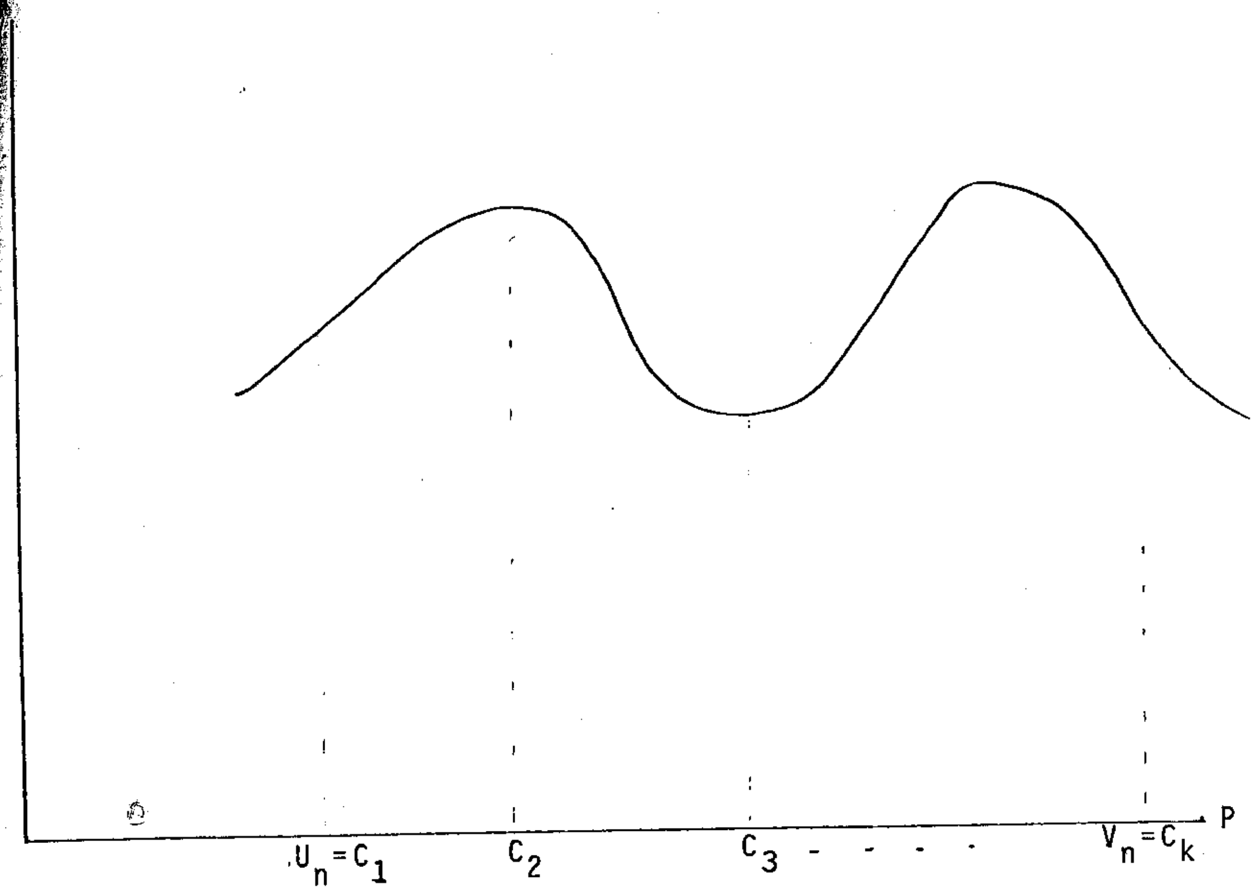
(SP2) $\lim_{T\to\infty} \inf \theta(J_T) \geq 0$ con desigualdad estricto si $R \neq \vec{P}$ en J.

(SP1) Se obtiene directamente de ii) y iii) de proposición 2 observando que $R \neq \vec{P}$ en I si al menos una de las transiciones óptimas asociadas con R(en $[\tilde{v}_{n-1},\tilde{\mu}_n]$; - $n=1,2,\ldots,N$) tiene tiempo restante no nulo. Falta probar (SP2).

Por construcción se tiene que; sobre los intervalos - $[\tilde{\mu}_n,\tilde{v}_n]$, R es una curva de máximo esfuerzo, y además - $\dot{\vec{P}}>Y(\vec{P})-E\vec{P}$ si $U_n\leq\vec{P}<V_n$ por lo que $\vec{P}$ es estrictamente creciente en $[\tilde{\mu}_n,\tilde{v}_n]$ hasta alcanzar el nivel V_n. Esto último es válido para $n=1,2,\ldots,N-1$ ya que por tener $\vec{P}$ un acercamiento asintótico con V_N, se tiene que $\vec{P}$ es estrictamente creciente en $[\tilde{\mu}_N,\infty)$.

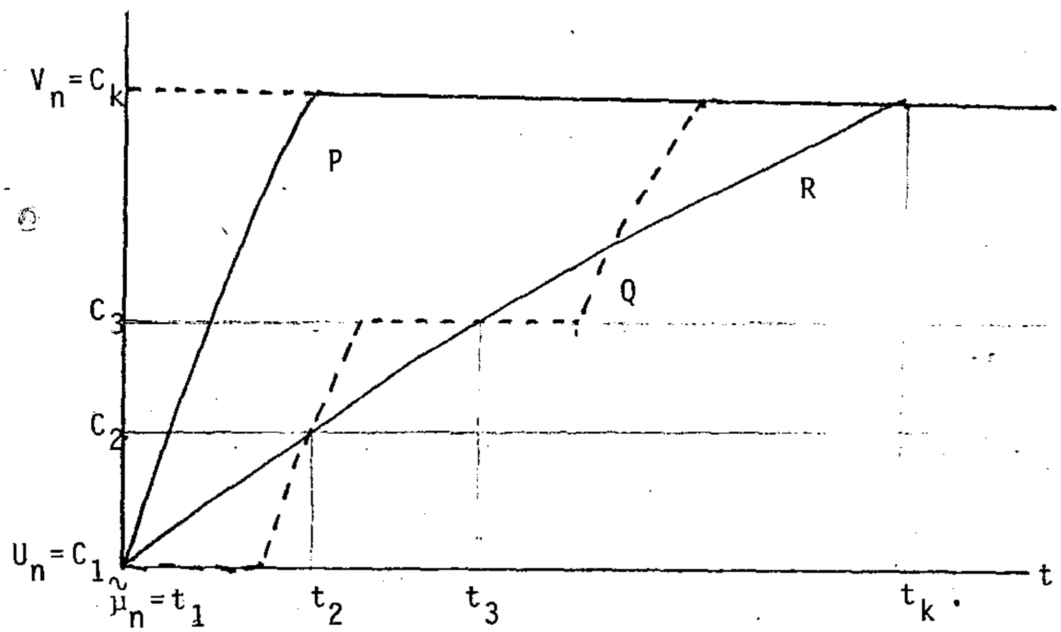
Sea C_k, $U_n=C_1<C_2<\ldots C_k=V_n$ los extremos de Y en el n-ésimo intervalo $[U_n,V_n]$, donde se tiene (por definición de U_n y V_n) que $\underline{k}$ es impar, y para k impares se observa que:

$$\begin{array}{l}Y \text{ es estrictamente creciente en } [C_{k-1},C_k] \text{ y} \\ \text{es estrictamente decreciente en } [C_k,C_{k+1}]\end{array} \qquad (18)$$



$U_n = C_1$
C_2
C_3 - - - -
$V_n = C_k$
P

Sea t_k es tiempo para el cual $R(t_k)=C_k$, con lo que se puede definir a Q como la función obtenida al extender $\vec{P}$ - para cada C_k, donde K es impar (k<K), restringiendo esta definición al intervalo $[\tilde{\mu}_n, \tilde{v}_n]$, el tamaño de la extensión esta determinada, únicamente, por el requerimiento $Q(t_k)= R(t_k)= C_k$ en k pares. Gráficamente:



observando la construcción de Q y R, con (13), que para K pares $C_{k-1} \leq Q \leq R \leq C_k$ en $[T_{k-1}, T_{k-1}]$ y $C_k \leq R \leq Q \leq C_{k+1}$ en $[T_k, T_{k+1}]$.

Estas desigualdades y (18) implican que:

$$Y(R(t)) \geq Y(Q(t)) \text{ en } [\tilde{\mu}_n, \tilde{v}_n] \tag{19}$$

La integral de $Y(\vec{P})$ sobre los tiempos en los cuales $\vec{P}$ es estrictamente creciente es igual (por construcción de $\vec{P}$ y Q) a la integral de $Y(Q)$ sobre los tiempos en los cuales Q es estrictamente creciente.

Teniendo en cuenta que $Y(C_k) \geq Y(C_{\underline{k}})$ (por ser Y decreciente en $[t_{k-2}, \tilde{v}=t_k]$) se tiene:

$$\int_{\tilde{\mu}_n}^{\tilde{v}_n} [Y(Q(t))-Y(\vec{P}(t))]dt \geq 0$$

y con (19) se concluye que

$$\int_{\tilde{\mu}_n}^{\tilde{v}_n} [Y(R(t))-Y(\vec{P}(t))]dt \geq 0 \quad \text{para } n<N$$

por lo que para mostrar que $\liminf \theta(J_t) \geq 0$ tenemos solamente que mostrar que:

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tilde{\mu}_n}^{T} [Y(Q(t))-Y(\vec{P}(t))]dt \geq 0 \qquad (20)$$

para verificar esta última desigualdad, sea l_k (K impar) la longitud de la extensión en Q para C_k y sea $L=\Sigma l_k$, entonces la integral en (20) es igual a:

$$\int_{T-L}^{T} [S-Y(\vec{P}(t))]dt + \sum_k l_k [Y(C_k)-S].$$

La integral en la suma anterior tiende a cero si $T\to\infty$, ya que $\vec{P}(t)\to P_s$ el tener que $t\to\infty$, además se tiene $\sum_k \geqslant 0$, ya que por construcción $Y(C_k)\geqslant S$.

La demostración (SP2) consistente en la desigualdad estricta $\lim\inf \theta(S_t)>0$ donde $R\neq\vec{P}$ en J, puede ser omitida ya que la desigualdad estricta se obtuvo con $\theta(I)$, con lo que se obtiene la proposición 4.

Con este resultado nos ayudaremos para mostrar que $\vec{P}^*$ es mejor que $\vec{P}$. Consideremos dos casos; $R=P^*$ y $R\neq\vec{P}^*$.

Caso 1: $(R=P^*)$. Como se tiene $\vec{P}\neq P^*$ se obtiene $R\neq\vec{P}^*$ y haciendo $R=P^*$ en proposición 4 se obtiene que P^* es mejor que $\vec{P}$.

Caso 2: $(R\neq P^*)$. Escogiendo $T>\tilde{\mu}_n(>\mu_n)$ y con la integral

$$\theta_o=\int_0^T \left[Y(P^*(t))-Y(R(t))\right]dt.$$

La integral de $Y(R)$ sobre las porciones de libre crecimiento de R es igual a la integral análoga para P^*. Así mismo, la integral de $Y(R)$ sobre los segmentos de máximo esfuerzo de R en $[0,\tilde{\mu}_N]$ es igual a su semejante para P en $[0,\mu_n]$. De tal forma que se obtiene; $\theta_o=\theta_2-\theta_1-\theta_3$

donde $\theta_1 = \int_{\tilde{\mu}_n}^{T} Y(R(t))dt$, $\theta_2 = \int_{\tilde{\mu}_n}^{T} Y(P^*(t))dt$

y θ_3 es la integral de $Y(R)$ sobre los subintervalos de I en las cuales R es constante. La longitud (suma) τ de estos subintervalos es $\tau=\tilde{\mu}_n-\mu_n$ (lo que se retrasa R en alcanzar U_N, - con respecto a P) como por construcción, se tiene $Y(R(t))\leq S$ en I, se tiene la cota

$$\theta_3 \leq \tau S-\Delta$$

donde $\Delta=0$ cuando $Y(R(t))=S$ en valores para t donde R es constante en I, y $\Delta>0$ cuando $Y(R(t))<S$ que tiene en al menos uno de los subintervalos mencionados.

Además, ya que $R(t+\tau)= P^*(t)$ para $t\geq\mu_N$, se tiene;

$$\theta_2-\theta_1= \int_{T-\tau}^{T} Y(P^*(t))dt$$

y contando con las observaciones de arriba, se consigue:

$$Y_T(P^*)-Y_T(R)\geq P^*(T-\tau)-P^*(T)+ \int_{T-\tau}^{T} \left[Y(P^*(t))-S\right] dt+\Delta$$

y como $P^*(t)\to P_S$, si $t\to\infty$.

$$\lim_{T\to\infty} \inf\left[Y_T(P^*)- Y_T(R)\right]\geq\Delta\geq 0. \qquad (21)$$

Si consideramos $\Delta>0$, con ayuda de proposición 4, se tiene que P^* es mayor que $\vec{P}$. Pero si suponemos $\Delta=0$, debemos tener en cuenta que $R\neq P^*$, la existencia de, al menos un intervalo Ω en I donde R es constante e igual a S, tal que $Y(R)-\bar{E}R=S-\bar{E}R>0$ en Ω.

Como $\vec{P}=P\varepsilon G$ en I y R no satisface (por ser constante) a (3) en $\Omega C I$, se tiene que $P\neq R$ en Ω. De modo que por (21) y proposición 4 se tiene que P^* es mejor que $\vec{P}$. Con lo que finaliza la demostración.

SECCION 3.4

CON DESCUENTO

Daremos ahora un tratamiento distinto al problema de la cosecha óptima, Introduciremos, en el rendimiento $\underline{Y}(P)$, el factor descuento pero de una manera especial, el cual (aunado a otras hipótesis por supuesto) nos permitirá mostrar que la trayectoria $P^*(t)$ definida por el teorema solución (con $E(t)$ no acotado) no es, bajo ciertas condiciones, la trayectoria que maximiza el nuevo rendimiento $\underline{Y}(P)$.

El método de introducir el factor descuento e^{-kt} en el rendimiento $\int_0^\infty e^{-kt}E(t)P(t)dt$ se conoce como un problema de horizonte infinito.

Este rendimiento total esta definido para todas las trayectorias acotadas P, y debido a que:

$$\int_0^\infty e^{-kt}E(t)P(t)dt = \int_0^\infty e^{-kt}(Y(P)-\dot{P})dt \quad (P(t) \text{ obedece } \dot{P}=Y(P)-EP)$$

$$= \int_0^\infty e^{-kt}Y(P)dt - \int_0^\infty e^{-kt}\dot{p}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-kt}Y(P)dt - \left[Pe^{-kt}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty kpe^{-kt}dt \right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-kt}(Y(P)-kp)dt - \left(Pe^{-kt}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-kt}\omega(P)dt + P_\circ$$

el rendimiento total puede expresarse como:

$$\underline{Y}(P)= \int_0^{\infty} e^{-kt}\omega(P(t))dt + P_o \qquad (1)$$

con $\quad \omega(P)= Y(P)- KP$

aquí consideramos un esfuerzo espontáneo E(t), el mismo que se consideró en el teorema solución ya indicado.

Teniendo en cuenta esta observación, podemos decir que nuestro problema consiste en maximizar $\underline{Y}$ sobre la familia de trayectorias acotadas y consistentes con (C1) y (C2). Es decir las mismas P(t) de la sección anterior pero acotadas.

Podemos ver que si ω es una función C' en $[0,\infty)$ con - estricto global máximo en $P_\mu>0$ y si

$$\omega \text{ no tiene otro extremo en } (0,\infty) \qquad (2)$$

entonces la solución de este problema es análogo a la solu ción del problema del no descuento planteado en la sección 3.3, es decir, vemos que maximizar $\int_0^{\infty} e^{-kt}\omega(P(t))dt + P_o$ bajo (2) consiste en encontrar la trayectoria P(t) (óptima) que se acerca lo más rápido posible al nivel P_μ (único) que -

maximiza a $\omega(P(t))$.

A lo que nos abocaremos a continuación es mostrar que si la hipótesis (2) es deshechada, la trayectoria óptima no es, necesariamente, la que se aproxima más rápido a P_μ tal y como lo establece en el teorema solución de la sección anterior. Plantearemos una dinámica poblacional conveniente - para mostrar lo anterior. lo "no necesariamente" se debe a que el resultado por demostrar es válido solo para cuando ω tiene otro (al menos uno) máximo (relativo) $P_\circ$ tal que $P_\circ<P_\mu$. Esto debido a que los rendimientos, que incluyen el factor descuento, se caracterizan por depender fuertemente del tiempo (tanto como grande sea K), es más, esta característica - es lo que le da su razón de ser.

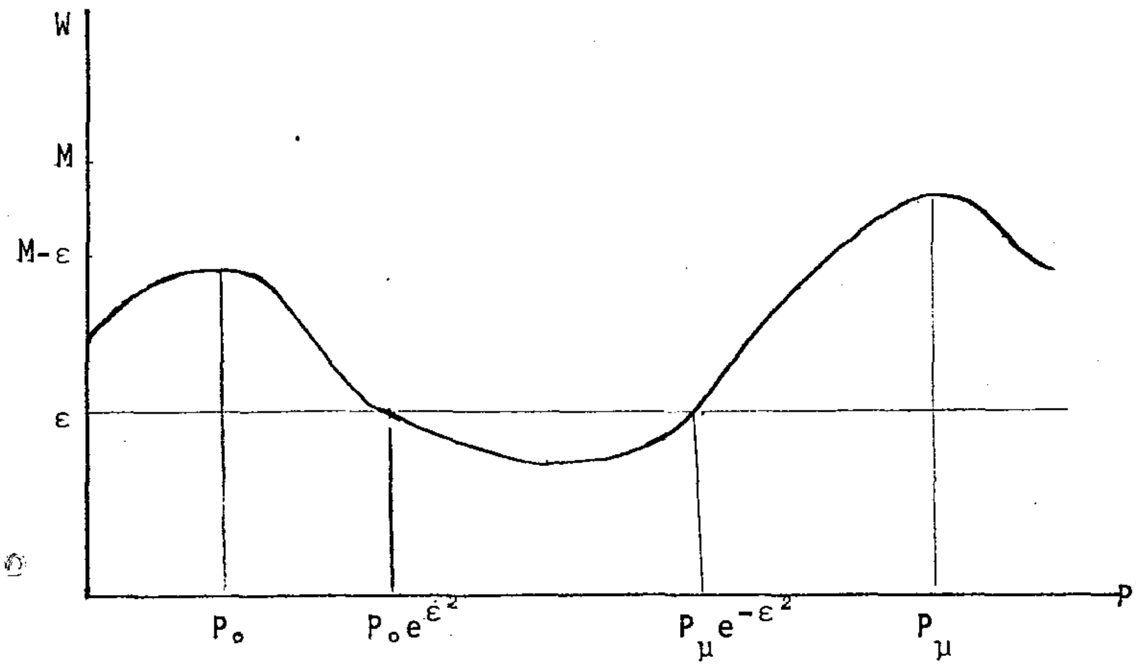
Sea $P_\circ>0$, $K>0$, y $\mu>0$ fijos. Además, sea $\varepsilon>o$ arbitrariamente pequeño y $P_\mu=P_\mu(\varepsilon)=\frac{P_\circ}{\varepsilon}$, y sea $\omega\varepsilon$ (la dependencia de ε se debe a que P_μ es máximo global de ω) una función C' en $[0,\infty)$ con la característica $\omega>o$ en $[P_\circ,P_\mu)$ y sea

$$\omega(P_\mu)=\mu \quad y \quad \omega(P_\circ)=\mu-\varepsilon \qquad (3)$$

y

$$\omega\leqslant \begin{matrix} \mu-\varepsilon & \text{en} & [P_\circ,P_\circ e^{\varepsilon^2}] \\ \varepsilon & \text{en} & [P_\circ e^{\varepsilon^2},P_\mu e^{-\varepsilon^2}] \end{matrix}$$

Viendo las condiciones gráficamente



Observación: Debemos tener que $P_o e^{\varepsilon^2} \leq P_\mu e^{-\varepsilon^2} = \frac{P_o}{\varepsilon} e^{-\varepsilon^2}$, por lo que es suficiente mantener la desigualdad $\varepsilon \leq e^{-\varepsilon^2}$ que se consigue para "ε suficientemente pequeño" condición que para el caso es equivalente a "P_o y P_μ suficientemente alejados" (ya que $P_o \varepsilon = P_\mu$) hipótesis necesaria para conseguir lo que - buscamos debido a la introducción del factor descuento en - el rendimiento.

Mostraremos que bajo estas condiciones (ε suficientemente pequeño, principalmente) la trayectoria $\hat{P} = P_o$ es mejor que la trayectoria P* definida en el teorema solución de la sección.

Para ello, sea $Z=Z_{\varepsilon}$ la curva de crecimiento libre que empieza en P_o al tiempo $t=0$ $(Z(o)=P_o)$, tal que

$$\dot{Z}=Y(Z)=\omega(Z)+KZ$$

sea $t_{\mu}= t_{\mu}(\varepsilon)$ el tiempo en el cual Z alcanza P_{μ}. Además, sea $t_o=t_o(\varepsilon)$ y $t_1=t_1(\varepsilon)$ los tiempos para los cuales Z alcanzan $P_o e^{\varepsilon^2}$ y $P_{\mu}^{\varepsilon^2}$ respectivamente tal que $t_o<t_1<t_{\mu}$. Asumimos que $\varepsilon<K$, entonces de $\dot{Z}=\omega(Z)+KZ$ podemos concluir que

$$\varepsilon Z\leqslant\dot{Z}\leqslant\mu+KZ \text{ para } t\varepsilon[0,t_{\mu}] \tag{4}$$

debido a que $\varepsilon Z\leqslant\dot{Z}=\omega(Z)+KZ$ ya que $\omega>o$ en $[t_o,t_{\mu}]$ y $\varepsilon<K$

y de $\dot{Z}=\omega(Z)+KZ\leqslant\mu +KZ$ por ser μ máximo global para ω

ya que μy K son, en principio, independientes de ε y como $P_{\mu}\ e^{-\varepsilon^2}=\frac{P_o}{\varepsilon}\ e^{-\varepsilon^2}\to\infty$ si $\varepsilon\to o$, obtenemos, por la 2da desigualdad en (4) $(\dot{Z}\leqslant\mu+KZ)$ que $t\to\infty$ si $\varepsilon\to o$. Es decir, el tiempo que necesita Z para alcanzar el nivel $P_{\mu}e^{-\varepsilon^2}$ se vuelve arbitrariamente grande si ε es arbitrariamente pequeño, debido a que $\dot{Z}$ (la rapidez de crecimiento) esta acotado por el término $\mu+KZ$. Similarmente de la 1er desigualdad en (4) $(\varepsilon Z\leqslant\dot{Z})$ obtenemos $Z(t_o)\geqslant P_o e^{\varepsilon t_o}$ y ya que $Z(t_o)= P_o e^{\varepsilon^2}$ se tiene $t_o\leqslant\varepsilon$; es decir $t_o\to 0$ si $\varepsilon\to o$.

Ahora bien, observando la diferencia:

$$\underline{Y}(P^*)-\underline{Y}(\hat{P})=\int_0^\infty e^{-kt}\omega(P^*)dt-\int_0^\infty e^{-kt}\omega(\hat{P})dt$$

y debido a $(3)_2$

$$=\int_0^\infty e^{-kt}\omega(P^*)dt-\int_0^\infty e^{-kt}(\mu-\varepsilon)dt\leqslant\int_0^{t_\circ} e^{-kt}(\mu-\varepsilon)dt+\int_{t_\circ}^{t_1} e^{-kt}\varepsilon dt+\int_{t_1}^\infty e^{-kt}\mu dt$$

$$-\left(\int_0^{t_\circ} e^{-kt}(\mu-\varepsilon)dt+\int_{t_\circ}^{t_1} e^{-kt}(\mu-\varepsilon)dt+\int_{t_1}^\infty e^{-kt}(\mu-\varepsilon)d\right.$$

$$\Longrightarrow\underline{Y}(P^*)-\underline{Y}(\hat{P})\leqslant\int_{t_\circ}^{t_1} e^{-kt}(2\varepsilon-\mu)dt+\int_{t_1}^\infty e^{-kt}dt=\frac{(\mu-2\varepsilon)}{k}(e^{-kt_1}-e^{-kt_\circ})+\frac{\varepsilon}{k}e^{-kt_1}$$

$$\Longrightarrow\underline{Y}(P^*)-\underline{Y}(\hat{P})\leqslant\frac{(2\varepsilon-\mu)e^{-kt_\circ}+(\mu-\varepsilon)e^{-kt_1}}{k}$$ y como $t_1\to\infty$ y $t_\circ\to 0$ si $\varepsilon\to 0$

$$\Longrightarrow\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(2\varepsilon-\mu)e^{-kt_\circ}+(\mu-\varepsilon)e^{-kt_1}}{k}\right)=-\frac{\mu}{k}$$

lo que implica que para ε suficientemente pequeño se asegura que $\underline{Y}(\hat{P})>\underline{Y}(P^*)$.

Observación: Debido a la dependencia de P_μ, ω, t_μ, Z, $t_\circ$ y t_1 de ε, la dinámica poblacional buscada queda bien planteada.

CARACTERISTICAS

De alguna manera ya se han mencionado características de los modelos considerados. Daremos ahora ventajas y desventajas de los modelos en base a tales características, y otras por mencionar. Concretamente nos referiremos a los modelos vistos como; de maximización del valor presente (o de Schaefer, como un 1er grupo) y los modelos de cosecha con estructura de edad (o de Beverton-Holt, como un 2do grupo).

La generalidad de los modelos, al menos en lo que respecta a las dinámicas de crecimiento y políticas de explotación tomadas en cuenta, no está en duda. Cabría entonces la pregunta siguiente:

¿Qué tipo de población o de Stock estamos considerando?

En principio, sabemos que podemos aplicar los modelos de explotación estudiados a poblaciones, o stocks que satisfacen su dinámica de crecimiento, y en general, las hipótesis establecidas por dichos modelos.

Nos valdremos, por el momento, de la pregunta de arriba para caracterizar los grupos de explotación considerados.

Al tomar en cuenta factores económicos, y resultados prácticos nos encontramos con la necesidad de considerar, entre otras cosas, el estudiar varias poblaciones capaces - de ser explotadas conjuntamente.

Supongamos que una pesquería se compone de 50 especies, difícilmente le resultaría económico a esta pesquería implementar modelos de explotación a cada una de las especies. - Además de la dificultad de definir, por razones prácticas, alguna medida de esfuerzo dirigida a cada una de las especies. Principalmente por estos problemas es conveniente, tal y como se hace actualmente, diseñar modelos de cosecha de - los llamados "stocks multiespecíficos" que no es más que el conjunto de stocks mono-específicos que contribuyen a la captura de una pesquería determinada. Pues bien, los modelos de Schaefer son usados, por la característica que presentan, - para resolver desde el punto de vista económico, este tipo - de explotación. Veamos de que manera.

Para poder considerar un stock multiespecífico tendríamos que hablar en términos de biomasa de dicho multi-stock la cual puede crecer según una determinada función de crecimiento natural al considerar una posible explotación. Obsérvese que tal función de crecimiento deberá ser de las contempladas por los modelos de Schaefer. Como una condición más, tendríamos que hablar también de la afinidad de dichos stocks mono-específicos, es decir, tendría que existir una alta correlación entre las tendencias de la abundancia de los diferentes stocks mono-específicos que componen el multi-stock. Para entender esto último considérese que en determinado caso se tiene relación entre las capturabilidades de dos stocks de una forma sostenida (considérese una relación entre el crecimiento y la captura) entonces se puede aplicar una política de cosecha a la captura (global) de los dos stocks. Es decir, este modelo de producción global es equivalente a la "suma" de los modelos de producción individuales; lo cual no se mantiene si la relación (proporción) de ambas capturabilidades cambia en el tiempo. Notemos que en estos casos difícilmente se podrá aplicar un modelo de cosecha con estructura de edad tipo Beverton-Holt. Otras de las ventajas, debido al diseño de explotación con dinámica tipo Schaefer para explotar el recurso, es porque no se requiere de una investigación amplia y previa de las poblaciones, cosa que generalmente no sucede en diseños tipo Beverton-Holt. Dentro de esto último, el modelo aquí considerado contempla la dinámica para una sola población y se hace de una manera contínua con respecto al tiempo

Además, en el tipo de dinámica vista aquí, se observa que el nivel poblacional P(t) puede representar solo las hembras presentes en el recurso.

Con el fin de diferenciar y precisar las características de los modelos dinámicos de cosecha óptima aquí contemplados, haremos un resumen de las principales características.

DINAMICA TIPO SCHAEFER (1er. grupo)	DINAMICA TIPO BEVERTON-HOLT (2do. grupo)
- En los modelos considerados la política óptima consiste en maximizar el valor presente de los ingresos derivados de la explotación.	- Aquí se considera como explotación óptima la maximización del rendimiento sostenible lo que implica considerar una dinámica puramente biológica.
- Se necesita relativamente poca información para determinar la dinámica natural de la población.	- Se requiere de bastante información sobre los parámetros que intervienen en la dinámica natural de la población.
- La dinámica puede ser de una biomasa, es decir, de una o más poblaciones.	- Dinámica de una sola población P(t), con la observación de que P(t) puede representar solo las hembras (o machos) presentes.
- Este tipo de dinámica es, generalmente, más adecuada para una explotación comercial del recurso a explotar.	- La dinámica Beverton-Holt, y en particular la aquí considerada, es más conveniente desde el punto de vista ecológico.

- Dentro de los modelos estudiados aquí se consideran diversas posibilidades para con los factores económicos.

- Las características anteriores hacen sensible a este tipo de explotación en caer en:

    i) Una sobreexplotación económica.
    ii) Una sobreexplotación biológica con peligro en la extinción.

  Aquí debemos hacer la observación de que no necesariamente se mantiene ese orden de sobreexplotación. Aclarando que una sobreexplotación biológica puede ser evitada, (según modelos) en base a una constante revisión de los parámetros bio-económicos que intervienen en la dinámica.

- Se pueden obtener políticas óptimas de cosecha dependiendo de los niveles de la población y el tamaño de un recurso vital para aquella.

- En este tipo de explotaciones se está lejos de una sobre-explotación biológica, sin embargo, como una hipótesis vital desde el punto de vista matemático, en estos modelos se obtienen políticas óptimas de cosecha en base a un esfuerzo que es indistinto para con las edades, cosa que no es adecuada.

Aunado a las limitaciones anteriores podemos agregar, en general, lo siguiente:

- Nos hemos concretado a estudiar modelos deterministas, olvidando las características aleatorias que en realidad presentan algunos parámetros dados como conocidos.

- Tomamos en cuenta solo la dinámica de una especie, con las idealizaciones que esto implica.

- Prácticamente, desde el punto de vista económico, se hizo la hipótesis de que el esfuerzo representa una firma (pesquería) olvidando el aspecto competitivo (o de cuotas) que representa una explotación comercial.

APENDICE

Sobre la Teoría de Control:

Nuestro problema es maximizar la función al -
$VP(h)= \int_0^T g[x(t),t,h(t)]dt$ sobre el conjunto de controles - admisibles $U=[U,hmax]$ ($h\varepsilon U$) y sujeto a la ecuación de estado $\frac{dx}{dt}= f(x,t,h(t)$ (=$F(x)-h(t)$ en nuestro caso) con $0\leqslant t\leqslant T$ (T finito) y la condición inicial $X(o)=X_o$.

Se observó desde antes que la dinámica poblacional con cosecha es dada por $\frac{dx}{dt}=F(x)-h(t)$ con $X(o)=X_o$. Se trata de encontrar el nivel de cosecha $h^*(t)$ que maximiza la funcional $VP(h)$ y con tal h^* obtener la respuesta buscada X^*. Para encontrar tales niveles óptimos se define, en base al problema planteado antes, el Hamiltoniano.

$$H[x(t),t,h(t);\lambda(t)]= g[x(t),t,h(t)]+ \lambda(t)\ f[x(t),t,h(t)]$$

con $\lambda(t)$ la variable adjunta. La teoría de control óptimo nos - brinda como condiciones necesarias las ecuaciones:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} - \lambda(t)\ \frac{\partial f}{\partial x}$$ que es la ecuación adjunta

y debido al principio del máximo; $\frac{\partial H}{\partial k}= 0$ que junto con la -

ecuación de estado $\frac{dx}{dt} = F(x)-h(o)$ nos brindan las funciones buscadas.

EL ESFUERZO

El esfuerzo en la ecuación $\dot{P}=Y(P)-E(P)$ (*) es de la forma $E(t)= E_\circ(t) +\delta(t) \ln \frac{P_\circ}{P(o)} + \sum_k \delta(t-t_k) \ln \frac{P(t_k^-)}{P(t_n)}$ en donde $t_k (k=i,2,\ldots,n)$ representa los tiempos de salto para $P(t)$ y $\delta(t)$ es la distribución δ de Dirac. Tal esfuerzo se contempla debido al problema de continuidad que establece la ecuación (*) para $P(t)$. La debido interpretación consiste en considerar al término n-ésimo que aparece en la sumatoria de la integral de abajo como el valor de la derivada de la ecuación (**) en el tiempo t_k.

La integral $\int_0^\infty E(t)dt= \int_0^\infty E_\circ(t)dt+ \ln\frac{P_\circ}{P(o)} + \sum_k \ln \frac{P(t_k^-)}{P(t_k)}$ se obtiene al hacer uso de $\int_0^\infty \delta(t)dt= 1$ y también de convertir la ecuación (*) en $(\ln p)=1/p\ Y(P)-E$ (**).

TEOREMA DE COMPARACION

Definición de solución máxima

Sea $U(t,\mu)$ una función continua en un conjunto E del - plano (t,μ) por una solución máxima $\mu=\mu^{\circ}(t)$ de

$$\dot{\mu}= U(t,\mu), \quad \mu(t_{\circ})= \mu_{\circ} \qquad (1)$$

Por medio de una solución de (1) sobre un intervalo - máximo de existencia, tal que si $\mu(t)$ es cualquier solución de (1) entonces $\mu(t)\leqslant \mu^{\circ}(t)$ se mantiene en el intervalo común de existencia de $\mu=\mu^{\circ}$.

Observación: La definición de solución mínima es similar.

Teorema: Sea $U(t,\mu)$ una función continua en un conjunto abierto E del plano (t,μ) y $\mu=\mu^{\circ}(t)$ la solución máxima de (1). Sea $v(t)$una función continua en $[t_{\circ},t_{\circ}+a]$ que satisface las condiciones $v(t_{\circ})\leqslant\mu_{\circ}$, $(t,v(t))\varepsilon E$, y - $v(t)$ tiene derivada por la derecha en $D_r v(t)$ en - $t_{\circ}\leqslant t\leqslant t_{\circ}+a$ tal que:

$$D_r v(t)\leqslant U(t,v(t)) \qquad (2)$$

Entonces, en un intervalo de existencia común de $\mu^{\circ}(t)$ y $v(t)$, se tiene: $$v(t)\leqslant \mu^{\circ}(t) \qquad (3)$$

Observación: Si la desigualdad (2) se cambia de sentido y $v(t_0) \geq \mu_0$ entonces la conclusión (3) se cambia por $v(t) \geq \mu_0(t)$ donde $\mu = \mu_0(t)$ es la solución mínima de (1).

BIBLIOGRAFIA

- *COLIN W. CLARK y GORDON R. MUNRO.*

  "The Economics of Fishing and Modern Capital theory: A Simplified Approach".

  "La Economic de la Pesca y Teoría Modernal del Capital: Una Aproximación Simplificada".

- *MORTON E. GURTIN y LEA F. MURPHY.*

  "On Optimal Harvesting with an Application to Age-Structured Populations".

  "Cosecha Optima con Aplicación a Poblaciones con Estructura de Edad".

- *MORTON E. GURTIN y LEA F. MURPHY.*

  "On the Optimal Harvesting of Age-Structured Populations: Some Simple Models".

  "Cosecha Optima de Población con Estructura de Edad: Algunos Modelos Simples".

- *JOSE A. PEREIRO, INSTITUTO ESPAÑOL DE OCEANOGRAFIA.*

  "Modelos al uso en Dinámica de Poblaciones Marinas Sometidas a Explotación"

- *COLIN W. CLARCK, WILEY, 1976.*

  "Mathematical Bioeconomics".

- SAN JOSE COSTA RICA, 18-19 DE ABRIL DE 1983, F.A.O. VOLUMEN 2 Y 3.

  "Actas de Consulta de Expertos para Examinar los Cambios en la Abundancia y Composición por Especies de Recursos de Peces Neriticos".

- PHILIP HARTMIN, WILEY.

  "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias".

- COLIN W. CLARCK, SCIENCE 181, 1973.

  "The Economics of Orerexploitacion".

- Qualitative theory in the Dynamics of Biological Population Growth.
  J.M. Cushing
  Laramie, Wyoming. July 1986.

- Notas del Curso de Biomatemáticas,
  Falconi (UNAM).