

Tesis de Luis Felipe García Espinosa

Dir. Dr. Rubén Flores Espinosa

Una tesis de análisis del lenguaje

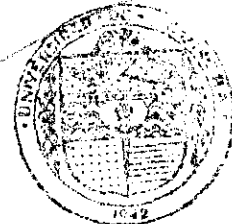


BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

A mi esposa Rosa María, y a nuestros
hijos Luis, Paola y Javier quienes
constituyen la razón para realizar
el esfuerzo.

A mis Padres y Hermanos por su apoyo
y cariño.



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

INDICE

CAPITULO I: EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

- 1.1 Importancia del Teorema del Punto Fijo de Brouwer
- 1.2 Teorema de la "Bola Peluda".
- 1.3 Prueba Analítica del Teorema del Punto Fijo de Brouwer

CAPITULO II: EL TEOREMA DE NO RETRACCION DIFERENCIABLE.

- 2.1 Prueba Analítica del Teorema de No Retracción Diferenciable.
- 2.2 Prueba del Teorema de Punto Fijo de Brouwer vía el Teorema de no Retracción.

CAPITULO III: TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN VIA EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.

- 3.1 Homeomorfismos.
- 3.2 Curva de Jordán.
- 3.3 Teorema de la Curva de Jordán.
 - 3.3.1. Dos Lemas Previos.
 - 3.3.2 Prueba del Teorema de la Curva de Jordán.

CAPITULO IV: UNA APLICACION DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER A LA TEORIA ECONOMICA DEL EQUILIBRIO GENERAL.

- 4.1 El Problema Fundamental de la Teoría del Equilibrio.
- 4.2 Existencia del Punto de Equilibrio.
- 4.3 Un Comentario acerca de la Unicidad del Equilibrio.

APENDICE

INTRODUCCION

El desarrollo del presente trabajo obedece a un interés por poner al alcance de un más amplio círculo de lectores, algunos resultados básicos del Análisis Matemático y eventualmente alguno de Topología, sin que para su apreciación y comprensión, se requieran profundos conocimientos del tema, puesto que consideramos que existe una amplia bibliografía donde se tocan estos temas y cuya lectura y comprensión está reservada para especialistas. El presente es un esfuerzo orientado más a la divulgación entre estudiantes y egresados del área de Ingeniería Industrial, Economía y Ciencias cuyos antecedentes corresponden al Cálculo.

El punto central de estas notas es el Teorema del Punto Fijo de Brouwer y fué motivado en cierta medida por una publicación interna del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, referente a una conferencia de Joel Franklin, dictada a un auditorio integrado mayormente por economistas y a quienes expresaba...

"Una investigación privada indica que 96% de todos los matemáticos pueden enunciar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, pero solamente el 5% pueden probarlo. Entre los matemáticos economistas 95% pueden exponerlo y sólo

2% probarlo (y éstos son todos ex-topólogos). Esta peligrosa situación será pronto remediada. En los dos últimos años, John Milnor y C.A. Rogers proporcionaron pruebas elementales usando nada más avanzado que el cálculo. Estas pruebas son tan fáciles que yo puedo entenderlas, y ciertamente ustedes pueden".*

El presente se apoya en las publicaciones de Milnor, Rogers y de otros investigadores cuyos trabajos de alguna manera se relacionan con la metodología, tema y nivel mencionados.

Agradezco al Dr. Rubén Flores Espinoza, sus sugerencias y apoyo en el desarrollo de este trabajo y especialmente por destacar la importancia del tema, sus colaterales y su generalización al Teorema de Kakutani, de amplias posibilidades de aplicación a la ciencia económica, y a los Profesores M. en C. Oscar Mario Rodríguez Sánchez y Arturo Fragozo Robles por la dedicación y paciencia mostradas a lo largo de las exposiciones donde valiosas observaciones sirvieron para afinar el tema y precisar algunos conceptos.

* El artículo original, publicado en The American Mathematical Monthly (Vol. 90, No. 4, pp. 229-244, Abril 1983) y su traducción y reproducción en el No. 1 de la serie "Las Matemáticas en la Ciencia Moderna" de las publicaciones internas del Depto. de Matemáticas de la Universidad de Sonora.

CAPITULO I

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

1.1 INTRODUCCION

Si f es una función con dominio en $D_f X$ y rango en el mismo espacio, decimos que $x \in D_f$ es un punto fijo de f siempre que $f(x)=x$.

Los teoremas de punto fijo son teoremas fundamentales de existencia, y en un gran número de problemas relacionados con la solución de Ecuaciones Diferenciales constituyen una herramienta irremplazable para demostrar la existencia de soluciones.

El teorema del punto fijo más importante para espacios de dimensión finita es debido a Brouwer (1910), que admite importantes generalizaciones como la conocida con el nombre de Teorema de Birkhoff-Kellog (1922), relativa a espacios de dimensión infinita, o la hecha por Schauder-Tychonov quienes extendieron a subconjuntos compactos convexos de espacios normados, cuya prueba se puede adaptar a espacios localmente convexos.

Por otra parte el Teorema del Minimax, un resultado fundamental en la Teoría de Juegos de Suma cero para dos personas, que a continuación se enuncia:

Teorema (Von Neuman). Sea A una matriz real $m \times n$. Sean X, Y vectores que se encuentran sobre los conjuntos:

$$\sum_{i=1}^m X_i = 1, \quad X_i > 0$$

$$\sum_{j=1}^n Y_j = 1, \quad Y_j > 0$$

entonces

$$\min_y \max_x X^T A Y = \max_x \min_y X^T A Y$$

fue probado por Von Neuman cuando el Teorema del Punto Fijo de Brouwer; posteriormente, el matemático Shizuo Kakutani descubrió una generalización del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, en un trabajo motivado por problemas en Teoría de Juegos económicos y su teorema habla de mapeos de puntos a conjuntos:

Teorema (Kakutani). Sea X un conjunto cerrado, acotado, convexo en R^n . Para todo punto $x \in X$, sea $F(x)$ igual a un subconjunto no vacío convexo de X. Supongamos que la gráfica

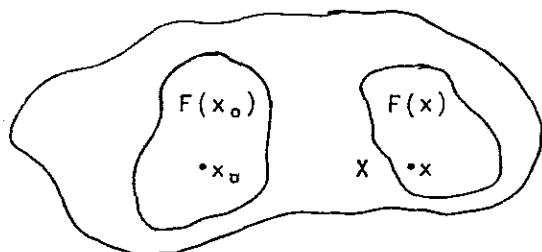
$$\{(x, y) : y \in F(x)\}$$

es cerrada, entonces algún punto en X satisface

$$x_0 \in F(x_0)$$

La imagen de cada punto x es un conjunto convexo $F(x) \subset X$.

El teorema dice que algún punto x_0 "cae" en su imagen $F(x_0)$. Este teorema es novedoso porque se refiere a funciones valuadas en conjuntos.



Si todo conjunto $F(x)$ consta de solamente un punto, la suposición de una gráfica cerrada es equivalente a la continuidad de la función $F(x)$ y entonces se reduce al ya citado teorema del punto fijo de Brauer. Kakutani probó su teorema usando el Teorema de Brouwer.

Por lo que se ha escrito anteriormente, queda de manifiesto que en nuestra opinión el Teorema del Punto Fijo de Brouwer es un resultado importante que ha sido pieza fundamental en la prueba de otros teoremas a su vez, de suma trascendencia en la construcción del conocimiento matemático.

La prueba del Teorema, y en general todo el resto del trabajo, se apoyará en instrumental de cálculo y el análisis, en lugar de los argumentos de Topología que generalmente se usan.

1.2 TEOREMA DE LA "BOLA PELUDA"

Este resultado está relacionado con la idea de que no se puede pegar en cada uno de los puntos de una bola de billar un pelo (tangencialmente a la bola) de modo que el campo de direcciones de los pelos resulte continuo.

TEOREMA 1.2.1. Una bola de dimensión par, no posee algún campo de vectores unitarios continuamente diferenciables.

PRUEBA: Por definición, la bola S^{n-1} es el conjunto de todos los vectores $u \in \mathbb{R}^n$ tal que la norma euclídeana $\|u\|=1$, es decir:

$$S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n, \|u\|=1\}$$

un vector $v(u) \in \mathbb{R}^n$ es tangente a S^{n-1} en u si el producto interno euclídeano $u \cdot v(u) = 0$.

La hipótesis de que la dimensión $(n-1)$ es par, es esencial. Si $(n-1)$ es non, entonces:

$$V(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_2 - u_1, \dots, u_n, -u_{n-1})$$

define un campo diferenciable de vectores tangentes unitarios en S^{n-1} .

Sea A una región compacta en \mathbb{R}^n y sea $x \mapsto V(x)$ un campo vectorial continuamente diferenciable, definiendo en una vecindad de A . Los valores $V(x)$ pueden ser vectores arbitrarios en \mathbb{R}^n .

Para cada número real t , consideremos la función

$$f_t(x) = x + tV(x)$$

la cual está definida para toda $x \in A$.

LEMA 1.2.1.1. Si el parámetro t es suficientemente pequeño, entonces el mapeo f es uno a uno y transforma la región próxima $f(A)$ cuyo volumen puede ser expresado como una función polinomial de t .

PRUEBA: Puesto que A es compacto, y la función $x \mapsto V(x)$ es continuamente diferenciable, existe una constante de Lipschitz C , tal que:

$$\|V(x) - V(y)\| \leq C \|x - y\| \quad (*)$$

para todo $x, y \in A$. Para probar la anterior afirmación, procedemos como sigue: primeramente consideramos el caso especial donde A es un cubo con aristas paralelas a los ejes coordenados.

Pasando de X a Y en n pasos seleccionando una coordenada a la vez, y aplicando el teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, se puede verificar que:

$$|v_i(x) - v_i(y)| \leq \sum_j c_{ij} |x_j - y_j|$$

donde $c_{ij} = \sup_A \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|$



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

CONSEJO DE MIS HIJOS
EN MI GRANDEZA

de ahí que:

$$\|V(x) - V(y)\| \leq \sum_i |v_i(x) - v_i(y)| \leq \sum_{i,j} c_{ij} |x_j - y_j| \leq \sum_{i,j} c_{ij} \|x - y\|$$

donde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

como se requería.

Ahora, un conjunto compacto A , arbitrario en \mathbb{R}^n puede ser cubierto por un número finito de muchos cubos abiertos. I_α , escogidos de tal forma que la condición de Lipschitz (*) se cumpla siempre que x y y en A pertenezcan al mismo cubo.

Pero si x y y en A no pertenecen a algún cubo común I_α , entonces la distancia $\|x - y\|$ puede ser una función continua distinta de cero en el conjunto compacto $A \times A - \cup (I_\alpha \times I_\alpha)$.

Seleccionamos una constante c tal que la condición de Lipschitz (*) se cumple uniformemente para todo x, y

en A. Escogemos algún t con $|t| < c^{-1}$. Entonces f_t es uno a uno, ya que si:

Por otra parte, $f_t(x) = f_t(y)$ entonces:

$$x - y = t(V(y) - V(x))$$

de ahí que la desigualdad:

$$||x - y|| \leq |t| c ||x - y||$$

implica que:

$$x = y.$$

Por otro lado, la matriz de primeras derivadas de:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= x + t V(x) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + t[v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)] \\ &= (x_1 + tv_1(x), x_2 + tv_2(x), \dots, x_n + tv_n(x)) \end{aligned}$$

puede ser escrita como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 + t \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) & t \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) & \dots & t \frac{\partial v_1}{\partial x_n}(x) \\ t \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) & 1 + t \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) & \dots & t \frac{\partial v_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t \frac{\partial v_n}{\partial x_1}(x) & t \frac{\partial v_n}{\partial x_2}(x) & \dots & 1 + t \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + t^n \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \dots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) \dots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial v_n}{\partial x_2}(x) \dots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

$$= I_{n \times n} + t^n \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] (x)$$

donde $I_{n \times n}$ es la matriz identidad, y su determinante es una función polinomial de t de la forma:

$$1 + t \sigma_1(x) \dots + t^n \sigma_n(x)$$

siendo los coeficientes funciones continuas de X . Este determinante es estrictamente positivo para valores $|t|$ suficientemente pequeños.

Integrando sobre A , vemos que el volumen de la región imagen puede ser expresado como:

$$\text{Volumen } f_t(A) \equiv \int_A [1 + t\sigma(x) + \dots + t^n \sigma_n(x)] dx$$

una función polinomial de t , con coeficientes :

$$a_k = \int \dots \int_A \sigma_k(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

quedando concluido la prueba del Lema.

Ahora, supongamos que la esfera S^{n-1} tiene un campo continuamente diferenciable $V(U)$ de vectores tangentes unitarios, como se ilustra en la figura 1. Para cualquier número real t , el vector:

$$z = u + t V(U)$$

tiene la norma $\|z\| = \sqrt{1+t^2}$.

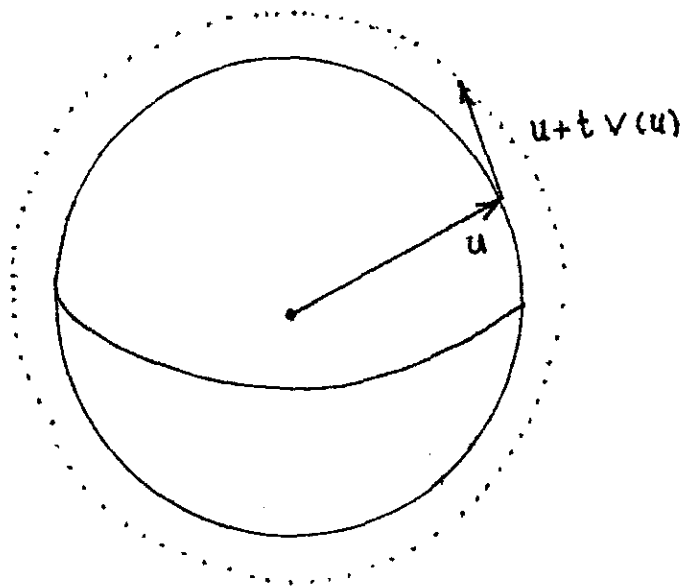


Figura 1

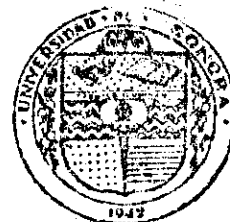
LEMA 1.2.2. Si el parámetro t es suficientemente pequeño, entonces la transformación $V(u)$ mapea la esfera en R^n sobre la esfera de radio $\sqrt{1+t^2}$

PRUEBA: Podríamos asumir que $n > 2$. Si t es suficientemente pequeño, entonces la matriz de primeras derivadas de la función f_t definida como en el lema anterior, es no singular en toda la región compacta A .

Usando el teorema de la Función Inversa, se sigue que f_t mapea conjuntos abiertos en el interior de A a conjuntos abiertos, de $f(A)$ de ahí que la imagen $f_t(S^{n-1})$ es un subconjunto abierto relativo a $f_t(A)^{n-1}$:

Pero $f(S^{n-1})$ esta imagen es así mismo compacta, y por lo tanto cerrada.

Y como S^{n-1} es conexa, y un subconjunto abierto y cerrado, debe ser la esfera completa S^{n-1} de radio $\sqrt{1+t^2}$ y la conclusión se sigue.



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

Contando con estos dos lemas podemos probar el Teorema 1.2 que expresa que una esfera de dimensión par no posee algún campo de vectores tangentes unitarios continuamente diferenciables, distinto de cero.

PRUEBA: Sea A la región entre las dos esferas concéntricas, definida por las desigualdades:

$$a \leq \|x\| \leq b.$$

Extendemos el campo continuamente diferenciable $V(u)$ de vectores tangentes unitarios, a través de la región A , de tal suerte que:

$$V(ru) = rV(u), \quad \text{para } a \leq r \leq b.$$

Se sigue que el mapeo:

$$f_t(x) = x + tV(x)$$

está definido en la región A , y mapea la esfera de radio r sobre la esfera de radio $r\sqrt{1+t^2}$ para t suficientemente pequeño.

Puesto que mapea A sobre las esferas de radio $a\sqrt{1+t^2}$ y $b\sqrt{1+t^2}$, entonces el volumen

$$\text{Vol } f_t(A) = (\sqrt{1+t^2})^n \text{ Volumen } (A)$$



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

BASES DE MIS HIJOS
POR MI GRANDEZA

y si n es par, su volumen no es una función polinomial de t . Comparando con el lema 1.2.1. obtenemos una contradicción, la cual prueba el teorema.

De este resultado podemos desprender una versión un poco diferente y que no hace mención de la diferenciabilidad de vectores unitarios.

COROLARIO 1.2.3: Una esfera de dimensión par no admite algún campo continuo de vectores tangentes distintos de cero.

PRUEBA: Supongamos que la esfera S^{n-1} posee un campo continuo de vectores distintos de cero $V(u)$. Sea $m > 0$ el mínimo $\|V(u)\|$. Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, existe un mapeo polinomial p de S^{n-1} en \mathbb{R}^n que satisface:

$$\|p(u) - V(u)\| < m/2, \text{ para toda } u.$$

Definiendo un campo vectorial diferenciable $\omega(u)$ por la expresión:

$$\omega(u) = \rho - (\rho \cdot u)u$$

para toda u , el cálculo

$$\begin{aligned} \omega(u) \cdot u &= (\rho - (\rho \cdot u)u) \cdot u \\ &= \rho \cdot u - (\rho \cdot u)u \cdot u \\ &= \rho \cdot u - \rho \cdot u = 0 \end{aligned}$$

Ⓢ Muestra que $\omega(u)$ es tangente a S^{n-1} en u , mientras que:

$$\begin{aligned} \|\omega - \rho\| &= \|\rho - (\rho \cdot u)u - \rho\| = \|-(\rho \cdot u)u\| \\ &= |\rho \cdot u| < \epsilon/2 \end{aligned}$$

junto con la desigualdad del triángulo, prueba que $\omega \neq 0$. Por consiguiente, el cociente

$$\frac{\omega(u)}{\|\omega(u)\|}$$

es un campo diferenciable de vectores tangentes unitarios en la esfera S^{n-1} .

Si $(n-1)$ es par, esto es imposible, por el teorema 1.2.1. ya que según ese teorema no existen campos sin ceros sobre S^{n-1} si n es impar.

A partir de lo anterior, se puede probar el teorema del Punto Fijo de Brouwer en la siguiente sección.

1.3 EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

TEOREMA 1.3.1. (L.E.J. Brouwer) .Todo mapeo continuo f del disco D^n en sí mismo, posee al menos un punto fijo.

PRUEBA: Dado que D^n es definido como el conjunto de todos los vectores $X \in R^n$ con $\|X\| \leq 1$ y, si $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$, entonces:

$$V(X) = X - f(X)$$

podría definir un campo vectorial distinto de cero V en D^n cuyos puntos salen a cualquier lugar en la frontera, en el sentido de que

$$u \cdot V(u) > 0 \text{ para todo } u \in S^{n-1}.$$

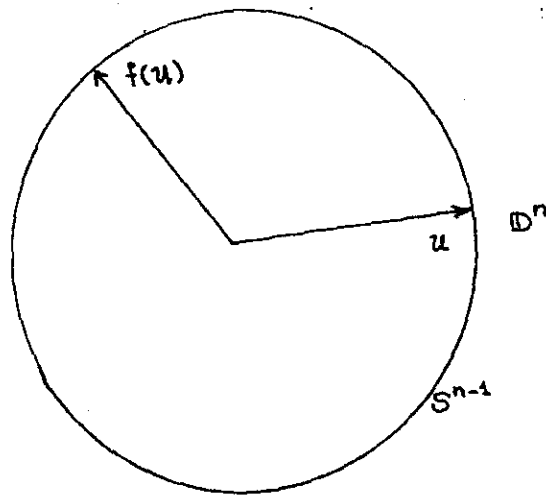


Figura 2.

Si modificamos la definición para obtener un campo vectorial distinto de cero ω en D^n cuyos puntos salgan directamente a la frontera, en el sentido de que $\omega(u)=u$ para todo $u \in S^{n-1}$, por ejemplo:

$$\omega(X) = \frac{X - Y(1 - X \cdot X)}{1 - X \cdot Y}$$

donde

$$Y = f(X) \neq X$$

se logra el propósito que $\omega(X)=X$ siempre que $X \cdot X=1$.

Esta expresión depende continuamente de X , puesto que el denominador nunca se anula.

Es distinta de cero siempre que X e Y sean linealmente independientes. Por otra parte, si X e Y son linealmente dependientes, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $r = \alpha X$,

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \frac{X(1-X \cdot Y) - Y(1-X \cdot X)}{1-X \cdot Y} \\ &= \frac{X - X(X \cdot Y) - Y + Y(X \cdot X)}{1-X \cdot Y} \\ &= \frac{X - X(X \cdot \alpha X) - Y + \alpha X(X \cdot X)}{1-X \cdot Y} \\ &= \frac{X - Y}{1-X \cdot Y} \neq 0 \end{aligned}$$

y si transplantamos este hipotético campo vectorial $\omega(X)$ al hemisferio sur de la esfera unitaria S^n en \mathbb{R}^{n+1} identificando \mathbb{R}^n con el hiperplano $x_{n+1} = 0$ el cual pasa por el "ecuador" de S^n , podríamos usar proyección estereográfica de polo norte $(0, 0, \dots, 1)$ para mapear cada punto $X \in \mathbb{D}^n$ al punto $S(X) = u$ del hemisferio sur $U_{n+1} \leq 0$, según se indica en el diagrama de la figura tres.

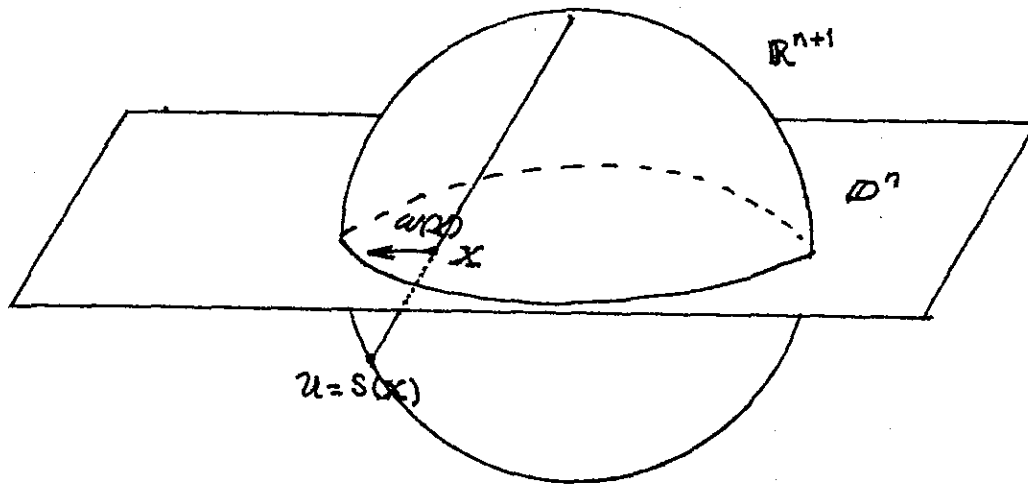


FIGURA 3.

$S(X)$ está dado por:

$$S(X) = (2x_1, \dots, 2x_n, x_{n+1}^2 - |x|^2) / (x_{n+1}^2 + |x|^2)$$

$S(X)$ lleva cada punto $X \in D^n$ sobre un punto u en el hemisferio sur de la esfera. Si X está en el borde, digamos

$$\begin{aligned} X_0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0), \\ S(X_0) &= (2x_1, \dots, 2x_n, 0) / (1+1) \\ S(X_0) &= (x_1, \dots, x_n, 0) = X_0 \end{aligned}$$

queda fijo.

Aplicando la derivada del mapeo S en X , sobre el vector $\omega(X)$, obtenemos un vector tangente correspondiente $W(u)$ de S^n en el punto imagen $S(X)=u$.

El vector $W(u)$ puede ser descrito como el vector velocidad

$$\left. \frac{d}{dt} S(X+t\omega(X)) \right|_{t=0} = W(u)$$

de la curva esférica $t \rightarrow S(X+t\omega(X))$, valuada en $t=0$, según se ilustra en la figura 4:

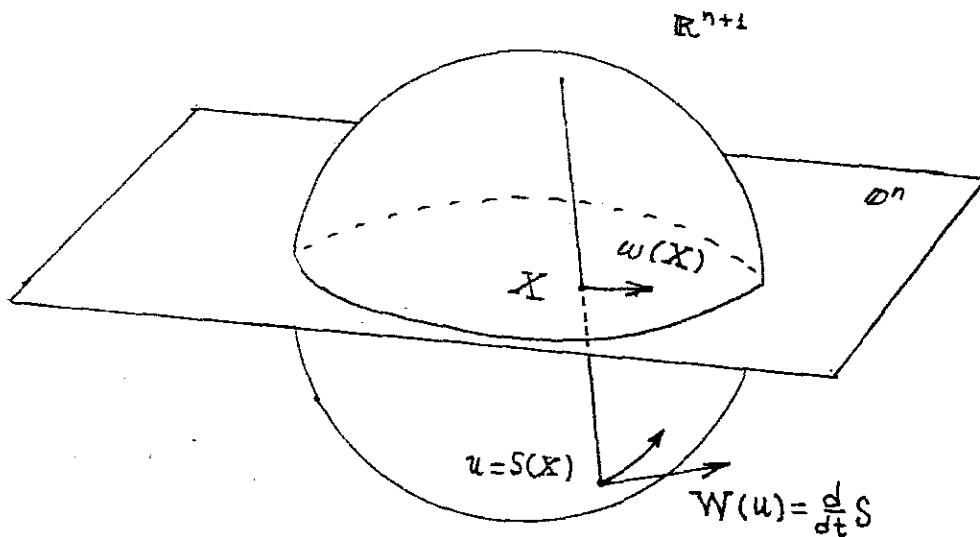


FIGURA 4.

El campo vectorial W , es tangente, y distinto de cero en el hemisferio sur de R^{n+1} .

Para todo punto $U=S(U)$ del ecuador, puesto que $\omega(U)=U$ apunta hacia afuera, el vector correspondiente

$$W(u) = (0, 0, \dots, 1)$$

es perpendicular y apunta en dirección al norte.

Similarmente, usando proyección estereográfica desde el polo sur, el campo vectorial $-W(X)$ corresponde al campo vectorial en el hemisferio norte el cual tiene puntos al norte del ecuador.

Juntando estos dos campos vectoriales mediante:

$$W(u) = \begin{cases} W(X) & x_{n+1} \leq 0 \\ -W(X), & x_{n+1} > 0 \end{cases}$$

obtenemos un campo vectorial tangente distinto de cero $W(u)$ que está definido y es continuo para todo S^n . Si n es par, es imposible por el corolario 1.2.3.



EL SABER DE MIS HIJOS
VIVAN A MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

Esta contradicción prueba el teorema del Punto Fijo de Brouwer para valores pares de n .

Sin embargo, esto es suficiente para probar el teorema para un valor non $n=2k-1$.

Para cualquier mapeo f de D^{2k-1} en sí mismo podría surgimiento al mapeo.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = (f(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}), 0)$$

de D^{2k} en sí mismo sin punto fijo.



CAPITULO II

EL TEOREMA DE NO RE TRACCION DIFERENCIABLE.

1. ENUNCIADO DEL TEOREMA

La evidencia de este teorema es mucho más intuitiva que el teorema del Punto Fijo de Brouwer, y expresa que es imposible transformar con continuidad un disco circular en su circunferencia exclusivamente, de tal modo que todo punto de esta permanezca fijo.

La prueba que se ofrece, preserva la metodología general de este trabajo en el sentido de que se apoya más en conceptos de cálculo y el análisis que en los métodos topológicos que usualmente se emplean.

TEOREMA 1. (De no Retracción) Es imposible para una función continua f mapear la bola unitaria $B^n = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ del espacio euclídeano n -dimensional sobre la esfera unitaria

$$S^{n-1} = \{x \mid \|x\| = 1\}$$

y satisface $f(X)=X$, para todo $X \in S^{n-1}$

El resultado del teorema queda establecido como una consecuencia de los siguientes dos lemas.

LEMA 1.1. Si existe un mapeo continuo de B^n sobre S^{n-1} que deje cada punto de S^{n-1} fijo, entonces debe existir un mapeo continuamente diferenciable con estas mismas propiedades.

PRUEBA:

Sea f un mapeo continuo de B^n sobre S^{n-1} y supongamos que $f(X)=X$ para todo $X \in S^{n-1}$, entonces:

$$f(X)-X$$

es continua en B^n y se anula en S^{n-1} al tiempo que satisface:

$$||f(X)-X|| \leq 2 \quad (1)$$

en B^n .

Podemos escoger $\theta \in \mathbb{R}$ con $\frac{3}{4} < \theta < 1$ tal que:

$$||f(X) - X|| < 1/4$$

para $\theta \leq ||X|| \leq 1$, por ser $(f(X) - X)$ uniformemente continua sobre S^{n-1} ya que éste es compacto.

Por otra parte, sean e_1, e_2, \dots, e_n vectores unitarios coordenados; por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, podemos tomar polinomios $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, tales que:

$$|| \sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) e_i - (f(X) - X) || < 1/4$$

para todo X con $||X|| \leq 1$.

Por conveniencia denotaremos $P(X) = \sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) e_i$.

Usando nuevamente el Teorema de Aproximación de Weierstrass, seleccionamos un polinomio Q que satisfaga:

$$\frac{3}{4} \leq Q(r^2) \leq 1, \quad 0 \leq r \leq \theta$$

$$||Q(r^2)|| \leq 1 \quad \theta \leq r \leq 1$$

$$Q(1) = 0,$$

donde $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = X \cdot X = \|X\|^2$ y si hacemos $g(X)$,
 una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n definida por:

$$g(X) = X + Q(\|X\|^2)P(X),$$

para $0 < \|X\| < \theta$ tendremos $\frac{3}{4} \leq Q(\|X\|^2) \leq 1$ y

$$\|g(X)\| = \|X + Q(\|X\|^2)P(X)\|$$

y sumando y restando

$$f(X) + Q(\|X\|^2)X + Q(\|X\|^2)f(X)$$

$$\|g(X)\| = \|f(X) + Q(\|X\|^2)\{P(X) - f(X) + X\} + \{Q(\|X\|^2) - 1\}\{f(X) - X\}\|$$

$$\geq \|f(X)\| - |Q(\|X\|^2)| \cdot \|P(X) - f(X) + X\| -$$

$$|1 - Q(\|X\|^2)| \cdot \|f(X) - X\|$$

$$> 1 - 1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$> 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}$$

$$> \frac{1}{4}$$

Similarmente, para $\theta < \|X\| < 1$ $|Q(\|X\|^2)| < 1$

$$\begin{aligned}
\|g(x)\| &= \|x + Q(\|x\|^2)\{P(x) - f(x) + x\} + Q(\|x\|^2)\{f(x) - x\}\| \\
&> \|x\| - |Q(\|x\|^2)|[\|P(x) - f(x)\| + \|f(x) - x\|] \\
&> \theta - \epsilon \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] \\
&> \frac{1}{4} \neq 0
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|g(x)\| > \frac{1}{4} \text{ para } \|x\| < 1.$$

Para $\|x\| = 1$, tenemos $g(x) = x$ y

$$\|g(x)\| = \|x\| = 1$$

y como cada componente de $g(x)$ es un polinomio en x_1, x_2, \dots, x_n , g es continuamente diferenciable; y si se define:

$$h(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$$

para $\|x\| < 1$, claramente $h(x)$ es un mapeo continuamente diferenciable de B^n sobre S^{n-1} , dejando cada punto de S^{n-1} fijo.

LEMA 1.2. No es posible para una función continuamente diferenciable mapear B^n sobre S^{n-1} y dejar cada punto de S^{n-1} fijo.

PRUEBA: Supongamos que f es un mapeo continuamente diferenciable de B^n sobre S^{n-1} dejando cada punto de S^{n-1} fijo.

Escribimos

$$g(X) = f(X) - X$$
$$f_t(X) = X + tg(X)$$
$$= (1-t)X + tf(X)$$

para $\|X\| \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1$.

Como f es continuamente diferenciable, lo es g , y existe una constante C tal que:

$$\|g(Y) - g(X)\| \leq C \|Y - X\|$$

para todo X, Y en B^n .

Si $0 \leq t \leq 1/c$, y $f_t(Y) = f_t(X)$, entonces:

$$\|X - Y\| = \|tg(Y) - tg(X)\|$$
$$\leq tC \|Y - X\|$$

y $X=Y$ conforme $t < 1$. Entonces el mapeo f_t de $B^n \rightarrow B^n$ es inyectivo cuando $0 < t < 1/c$.

Como los coeficientes de las diferenciables parciales de g con respecto a x_1, x_2, \dots, x_n son uniformemente acotados, la matriz jacobiana.

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial x_t}{\partial x_1} & \frac{\partial x_t}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \end{array} \right) = I_n + t \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{array} \right)$$

es denominada por su diagonal y es no singular para valores de t suficientemente pequeños, $0 < t < t_0$ con $t_0 > 0$. Ahora, para $0 < t < t_0$, el Teorema de la Función Inversa establece que el mapeo f_t del interior de B^n sobre un conjunto abierto, G_t digamos, está contenido en B^n .

Considerando cualquier punto $e \in B^n$ tal que no esté en G_t para algún t con $0 < t < t_0$. Uniendo e en cualquier punto g de G_t y escogiendo un punto b en el segmento de línea \overline{eg} en la frontera de G_t . Como la imagen de B^n bajo f_t es compacta, $b = f_t(X)$ para algún $X \in B^n$.

Como $b \notin G_t$, esto implica que X no está en el interior de B^n y entonces $\|X\| = 1$.

Puesto que $b=X$, tanto e como b están en la frontera de B^n .

Como f_t mapea S^{n-1} en sí mismo, cuando tomamos valores de $0 \leq t \leq t_0$, f_t mapea B^n biyectivamente en sí mismo.

Ahora, considerando la integral:

$$I(t) = \int_{B^n} \frac{\partial f_t}{\partial x} dx$$

$$= \int \dots \int_{B^n} \det \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \frac{\partial f_t}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

para $0 \leq t \leq 1$. Cuando $0 \leq t \leq t_0$, tenemos una fórmula para el volumen V_n de la bola unitaria B^n . Entonces $I(t)$ tiene un valor constante V_n para $0 \leq t \leq t_0$. Pero, $I(t)$ es una polinomial en t , debido a que:

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \frac{\partial f_t}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \right) = I + t \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$$

De lo anterior, $I(t)$ es constante y tiene un valor positivo V_n para todo t .

Por otra parte tenemos:

$$f_1 \cdot f_2 = 1$$

idénticamente, y en consecuencia:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot f_1 = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

y

$$\det\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) = 0$$

para todo $x \in B^n$. Entonces $I(1) = 0$, y tenemos la contradicción requerida.

2.2. TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER VIA EL TEOREMA DE NO RETRACCION DIFERENCIABLE.

El Teorema del Punto Fijo de Brouwer se sigue del Teorema de no Retracción Diferenciable. Supongamos que $g: B^n \rightarrow B^n$ es un mapeo libre continuo de punto fijo. La compactación de B^n implica que:

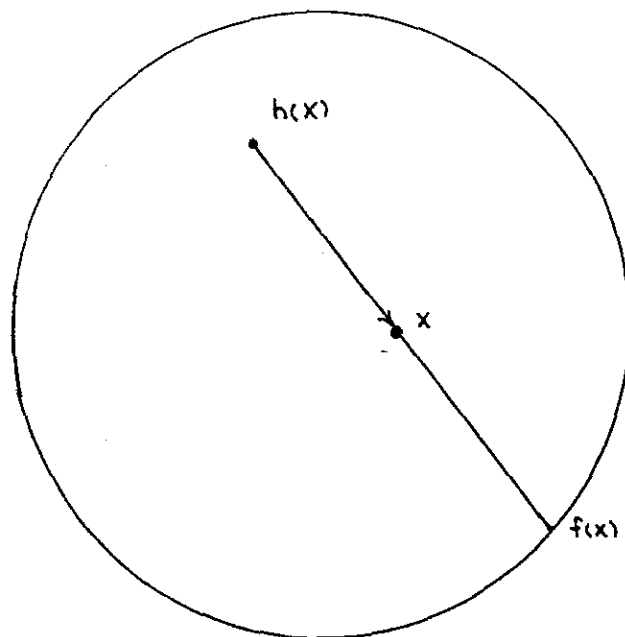
$$|g(x) - x| > \epsilon > 0$$

para $x \in B^n$.

Sea $h(x)$ una C^2 función tal que:

$$|h(x) - g(x)| < 1/2$$

en B^n y tal que $h: B^n \rightarrow B^n$, que podría ser una polinomial. Entonces $h(x) \neq x$ para $x \in B^n$, y sea $f(x); B^n \rightarrow S^{n-1}$ quien denote el único punto en S^{n-1} tal que $h(x)$, x y $f(x)$ están en la misma línea y x está entre $h(x)$ y $f(x)$, para $x \in B^n$, $x \notin S^{n-1}$. $f(x) = x$ para $x \in S^{n-1}$. Entonces $f(x)$ es una C^2 retracción, contradiciendo el Teorema de No Retracción.



CAPITULO III

LA CURVA DE JORDAN VIA EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

3.1 HOMEOMORFISMO

Un homeomorfismo entre dos figuras (ó dos conjuntos de puntos) es una correspondencia tal que a cada punto de una de las figuras corresponde un punto y solo uno de la otra y que a dos puntos próximos a una corresponden dos puntos próximos a la otra.

En otras palabras, como afirman Fréchet y Fan, "se llama homeomorfismo, a toda transformación biunívoca y bicontinua".

De una manera intuitiva, puede ilustrarse el concepto de homeomorfismo como sigue:

Si deformamos una figura de caucho sin desgarramiento ni superposición, podremos comprobar que existen relaciones notables entre la figura inicial F y la final F' .

- 1.- A todo punto F corresponde uno y sólo uno de F'
- 2.- A todo punto F' corresponde un punto y sólo uno de F
- 3.- A dos puntos próximos de F corresponden dos puntos próximos de F'

4.- A dos puntos próximos de F' corresponden dos puntos próximos de F

5.- Si F es una curva, F' es una curva y a tres puntos A, B, C de F corresponden tres puntos A', B', C' de F' situados en el mismo orden.

6.- Si F' es una curva, F también lo es, y a tres puntos A', B' y C' de F' corresponden tres puntos A, B, C de F situados en el mismo orden.

Las dos primeras propiedades expresan el hecho de que la transformación T que asocia F y F' es una transformación puntual biunívoca. Por consiguiente, admite una transformación inversa T^{-1} también puntual y biunívoca.

La tercera propiedad expresa la continuidad de T , y la cuarta, la de T^{-1} .

Así mismo, las dos últimas expresan el hecho de que la correspondencia considerada se halle ordenada.

3.2 CURVA DE JORDAN

Un ejemplo notable de una propiedad topológica intuitivamente evidente y muy difícil de demostrar es el establecido por Jordan en 1893. Trataremos a continuación de

expresar la idea que tenemos de una curva simple. Si esta curva es limitada, es preciso que sea homeomórfica a un segmento de recta, es decir, que sea posible aplicarla sobre un segmento de recta respetando el orden de los puntos y la continuidad. Podemos representar los puntos del segmento de recta mediante un número T , midiendo por ejemplo la distancia de ese punto a un extremo del segmento. Dicho número será un parámetro que varía de manera continua entre cero y la longitud del segmento, ó de manera más general, entre las abscisas t_0 y t_1 de los extremos de este segmento que suponemos marcadas sobre un eje.

Si tratamos de definir esta curva simple en el espacio euclideo ordinario, podemos referir ese espacio a tres ejes de coordenadas y hacer corresponder a cada punto del segmento AB un punto único asignándole esas coordenadas en función del parámetro T ; sean;

$$X = f(t), \quad Y = g(t), \quad Z = h(t)$$

con las siguientes hipótesis:

- 1.- A un valor de t perteneciente al intervalo (t_0, t_1) corresponde un solo punto del espacio.
- 2.- Un punto de la curva corresponde a un solo valor del intervalo (t_0, t_1) .
- 3.- Las funciones $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ son continuas.

La segunda hipótesis que expresa junto con la primera correspondencia biunívoca entre la curva y un segmento de recta, muestra que esta curva no tendrá punto múltiple que no tendrá ramas que se crucen, pues de lo contrario de su punto de intersección correspondería tantos valores de t como curvas pasen por el punto.

La tercera hipótesis expresa la continuidad de la curva y en combinación con la segunda, la bicontinuidad de su correspondencia con el segmento (t_0, t_1) . En efecto a dos puntos próximos de este segmento y por consiguiente a dos valores próximos de t , corresponden dos puntos de la curva que son interiores a un paralelepípedo cuyas dimensiones son tanto más pequeñas cuanto más próximas se hallen los puntos elegidos sobre el segmento; por lo tanto, dichos puntos pueden elegirse tan próximos como se desea siempre que se elijan valores suficientemente próximos de t . La recíproca se puede establecer también. Esto nos permite establecer que existe un homeomorfismo entre la curva dada y el segmento AB .

Si además imponemos las condiciones siguientes:

$$f(t_0) = f(t_1), \quad g(t_0) = g(t_1), \quad h(t_0) = h(t_1)$$

a cada extremo del segmento corresponde el mismo punto, por consiguiente, la curva es cerrada.

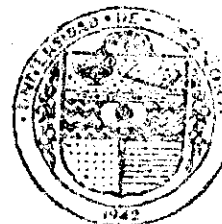
Si consideramos en particular una curva cerrada J , simple y continua, intuimos que ella divide al plano en dos zonas tales que:

- 1.- Dos puntos de una misma zona pueden unirse con una línea poligonal que no cruce la curva.
- 2.- Dos puntos no pertenecientes a la misma zona no pueden unirse en la forma anterior, ni tampoco mediante una curva continua cualquiera.

Se dice que J divide al plano en dos dominios: un dominio interior y otro exterior. Esta propiedad topológica intuitiva constituye el celebre teorema de Jordan, por ser Camille Jordan el primero que enunció, cerca de 1880 esta propiedad. La prueba de este resultado es complicada y en opinión de Solomon Lefschetz, "La demostración dada por Jordan era incorrecta, y lo mismo pasó con muchas posteriores. La primera correcta fue dada por Veblen en 1904".

3.3. TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Una imagen homeomórfica de un intervalo cerrado $[a, b]$, ($a < b$), es llamado un arco y la imagen homeomórfica de



EL SABER DE MIS HIJOS
HAZA EL GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

de un círculo es llamada una curva de Jordan. El llamado Teorema de la Curva de Jordan es un celebre resultado de topología que se puede probar empleando el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, como sigue:

TEOREMA (DE LA CURVA DE JORDAN)

El complemento del plano R^2 de una curva de Jordan J consiste en dos componentes, cada una de las cuales tiene a J como su frontera.

Por principio es necesario hacer notar dos hechos concernientes a las cuales componentes de $R^2 - J$ donde J es una curva de Jordan.

- a) $R^2 - J$ tiene exactamente una componente no-acotada.
- b) Cada componente de $R^2 - J$ es una región conexa y abierta.

La primera afirmación se sigue del acotamiento de J y la segunda de la conexión local de R^2 y la clausura de J .

3.3.1. DOS LEMAS PREVIOS

Para probar el teorema enunciado, se hará uso de los siguientes dos lemas:

LEMA 3.3.1. Si $R^2 - J$ no es conexo, entonces cada componente tiene a J como su frontera.

PRUEBA: Por afirmación inicial $R^2 - J$ tiene al menos dos componentes.

Sea U una componente arbitraria. Puesto que cualquiera otra componente W es disjunta de U y abierta, W no contiene puntos en la cáscara \bar{U} y por lo mismo, ni en la frontera $\bar{U} \cap U^c$ de U . Así, $\bar{U} \cap U^c \subset J$. Supongamos que $\bar{U} \cap U^c \neq J$. Entonces -- existe un arco $A \subset J$ tal que:

$$\bar{U} \cap U^c \subset A \quad (1)$$

Probamos que esto nos conduce a un contradicción.



EL SAZER DE NIS HILOS
PARA MI GRANDEZA

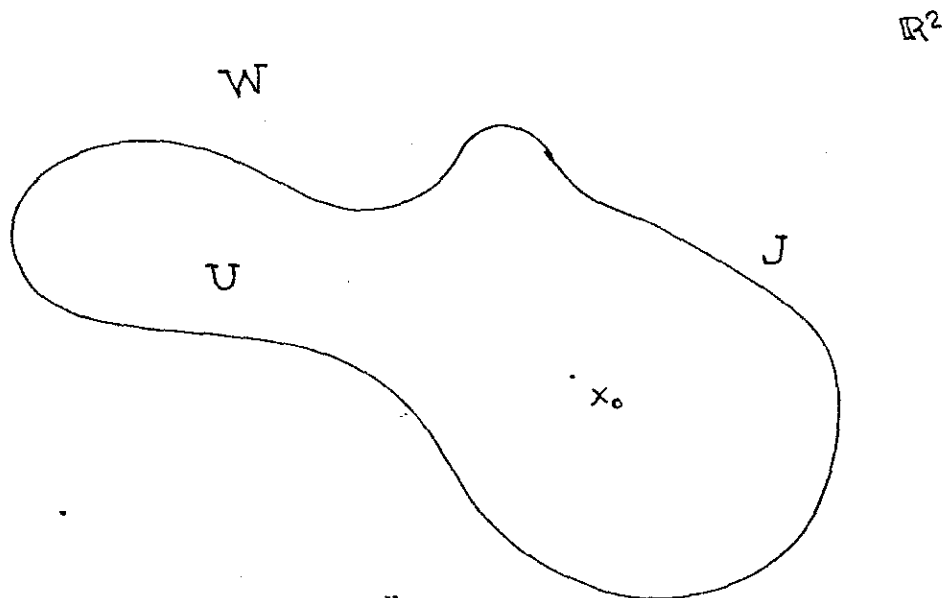
BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Por la indicación precedente (a) $\mathbb{R}^2 - J$ tiene a lo más una componente no-acotada. Sea x_0 en componente acotada digamos $x_0 \in \tilde{U}$. Sea D el mayor disco con centro en x_0 tal que contenga en su interior a J . Entonces, la frontera S de D está contenida en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - J$. Puesto que el arco A es homeomorfo al intervalo $[0,1]$, el mapeo identidad $A \rightarrow A$ tiene una extensión continua $r: D \rightarrow A$ por el Teorema de Extensión de Tietze. Definimos un mapeo $q: D \rightarrow D - \{x_0\}$ de tal forma que:

$$q(z) = \begin{cases} r(z) & \text{para } z \in \tilde{U} \\ z & \text{para } z \in \tilde{U}^c \end{cases} \quad \text{si } U \text{ es acotado}$$

$$q(z) = \begin{cases} z & \text{para } z \in \tilde{U} \\ r(z) & \text{para } z \in \tilde{U}^c \end{cases} \quad \text{si } U \text{ no es acotado}$$

Por (1), la intersección de dos conjuntos cerrados \tilde{U} y \tilde{U}^c está contenida en A para el cual r es el mapeo idéntico. Por tanto q está bien definido y es continuo. Obsérvese que $q(z) = z$ si $z \in S$, la frontera de D .



Sea $p: D - \{x_0\} \rightarrow S$ es una proyección natural y sea $t: S \rightarrow S$ la antípoda. Entonces la composición $t \circ p \circ q: D \rightarrow S \subset D$ no tiene un punto fijo, contradiciendo el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

La prueba precedente implícitamente contiene una prueba que un arco no separa \mathbb{R}^2 , lo que se puede considerar como un corolario del Teorema de la Curva de Jordan.

Necesitamos otro lema para ^{nuestro} propósito:

Sea $E(a,b;c,d)$ el conjunto rectangular

$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$ en el plano R^2 donde $a < b$,
 $c < d$.

LEMA 3.3.2. Sea $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ y $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ ($-1 \leq t \leq 1$) trayectorias continuas en $E(a,b;c,d)$ que satisfagan

$$h_1(-1) = a, \quad h_1(1) = b, \quad v_2(-1) = c, \quad v_2(1) = d \quad (2)$$

entonces las dos trayectorias se juntan, es decir, $h(s) = v(t)$ para algún s , en $[-1,1]$.

PRUEBA: Supongamos que $h(s) \neq v(t)$ para todo s, t . Sea $N(s,t)$ la norma máxima de $h(s) - v(t)$, es decir

$$N(s,t) = \text{Máx} \{ |h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)| \}$$

entonces $N(s,t) \neq 0$. Definimos un mapeo continuo F de $E(-1,1;-1,1)$ en sí mismo por:

$$F(s,t) = \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s,t)}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s,t)} \right)$$

La imagen de F está en la frontera de $E(-1,1;-1,1)$, y afirmamos que F no tiene punto fijo.

Para ver que F no tiene punto fijo, asumimos que:

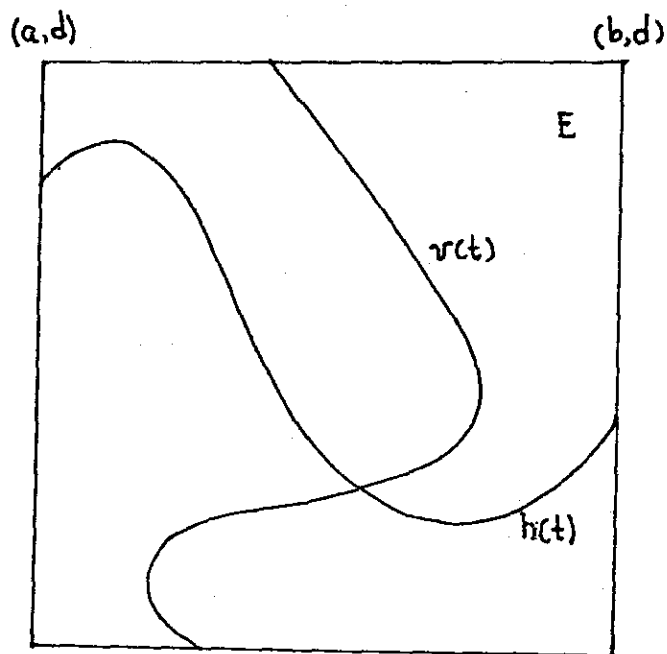
$$F(s_0, t_0) = (s_0, t_0).$$

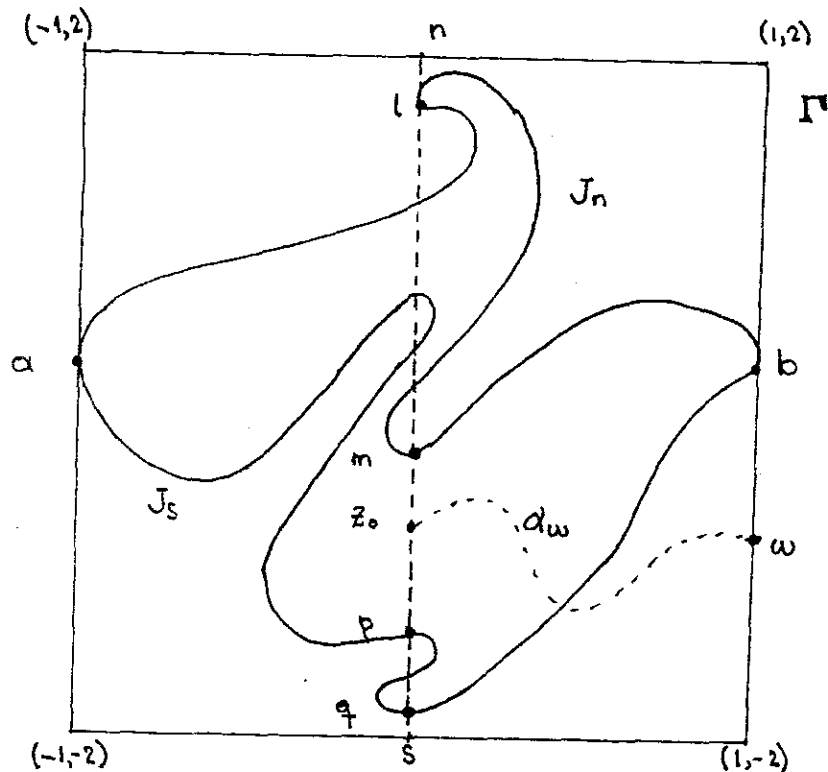
Por la indicación anterior, tenemos que:

$$|s_0| = 1 \quad \text{ó} \quad |t_0| = 1$$

supongamos, por ejemplo, que $s_0 = -1$ entonces por (2)

La primera coordenada de $F(-1, t_0) = \frac{(v_1(t_0) - h_1(-1))}{N(-1, t_0)}$, es no negativa y por supuesto distinta de $s_0 (= -1)$. Similarmente, las otras posibilidades de $|s_0| = 1$ ó $|t_0| = 1$ no pueden ocurrir. Esto contradice el Teorema de Punto Fijo de Brouwer puesto que $E(-1, 1; -1, 1)$ es homeomórfico a un disco. por lo cual las trayectorias se cruzan en algún punto de la región E .





3.3.2. PRUEBA DEL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN.

Con el resultado de los dos lemas previos podemos probar el Teorema de la Curva de Jordan. Por el lema 1, necesitamos solamente mostrar que $R^2 - J$ tiene una y solamente una componente acotada.

La prueba consistirá en los siguientes tres pasos:

- i) Establecimiento de la notación y definición de un punto z_0 en $R^2 - J$.
- ii) Prueba de que la componente U que contiene a z_0 es acotada
- iii) Prueba que no existe otra componente acotada que U .

PRUEBA: Puesto que J es compacto, existen puntos a, b en J tales que la distancia $\|a-b\|$ sea la mayor. Podemos asumir que $a=(-1,0)$ y $b=(1,0)$.

Entonces el conjunto rectangular $E(-1,1;-2,2)$ contiene a J y su frontera Γ se reune con J en exactamente dos puntos a y b . Construimos la siguiente gráfica:

Sea n el punto medio del lado final de $E[-1,1;-2,2]$ y s el punto medio del lado opuesto, es decir, $n=(0,2)$ y $s=(0,-2)$. El segmento \overline{ns} corta a J , de acuerdo al lema 3.3.2

Sea γ el y -máximo (que media el punto $(0,y)$ con máxima y) en $J \cap \overline{ns}$. Los puntos a y b dividen J en dos arcos; denotamos al que contiene a γ por J_n y el otro por J_s . Sea m el punto y -máximo en $J_n \cap \overline{ns}$ (posiblemente $\gamma=m$) entonces el segmento \overline{ms} corta J_s ; por otra parte, la trayectoria $\overline{n\gamma} + \widehat{\gamma m} + \overline{ms}$ (donde $\widehat{\gamma m}$ denota el subarco de J_n con extremos en γ y m) corta a J_s .

Sea p y q los puntos y -máximo y y -mínimo en $J_s \cap \overline{ms}$, respectivamente. Finalmente, sea z_0 el punto medio del

segmento \overline{mp} . Ahora mostraremos que U la componente de $R^2 - J$ que contiene a z_0 , es acotada.

Supóngase que U es no acotada. Puesto que U es una región conexa, existe una trayectoria α en U desde z_0 a un punto fuera de $E(-1,1;-2,2)$. Sea w el primer punto que α corta la frontera Γ de $E(-1,1;-2,2)$.

Denotamos por α_w la parte de α desde z_0 a w . Si w está en la mitad baja de Γ , podemos encontrar una trayectoria \overline{ws} en Γ la cual no contiene ni a ni b .

Ahora consideramos la trayectoria $\overline{nl} + \overline{lm} + \overline{mz_0} + \alpha_w + \overline{ws}$. Esta trayectoria no corta J_s , porque J_s sería tan flexible "que quedaría fuera del rectángulo si fuera no acotada. Contradiciendo el lema 2. Similarmente, si w está en la mitad superior de Γ , la trayectoria $\overline{sz_0} + \alpha_w + \overline{wn}$ no se encuentra con J_n , donde \overline{wn} es la más corta trayectoria de Γ desde w a n . La contradicción muestra que U es una componente acotada.

Prueba que U es única:

Finalmente supongamos que existen otras componentes acotadas $W (\neq U)$ de $R^2 - J$. Claramente $W \subset E(-1,1;-2,2)$. Denotamos por β la trayectoria $\overline{nl} + \overline{lm} + \overline{mp} + \overline{pq} + \overline{qs}$, donde

\widehat{pq} es el subarco de J_s desde p a q . Como puede verse fácilmente, β no tiene un punto de W . Puesto que a y b no están en β , existen vecindades circulares V_a, V_b de a, b , respectivamente, tal que cada una de ellas no contiene puntos de β . Por el lema 1, a y b están en la cerradura \overline{W} . Por lo cual, existe $a_1 \in W \cap V_a$ y $b_1 \in W \cap V_b$. Sea $\widehat{a_1 b_1}$ una trayectoria en W desde a_1 hasta b_1 . Entonces la ruta $\overline{aa_1} + \widehat{a_1 b_1} + b_1 b$ no corta a β . Esto contradice el lema 2 y completa la prueba.

CAPITULO IV

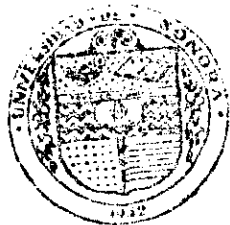
APLICACION DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER A LA TEORIA DEL EQUILIBRIO.

4.1. PROBLEMA FUNDAMENTAL:

El problema fundamental de la teoría del equilibrio consiste en analizar la interacción de las unidades micro-económicas básicas en la determinación de los precios y cantidades de bienes y de factores de la producción.

Las economías domésticas, que poseen un conjunto de factores incluyendo la mano de obra o trabajo, obtienen renta vendiendo estos factores en los mercados de factores para posteriormente emplear la renta adquirida para comprar bienes en el mercado de bienes. Las empresas utilizan los factores para producir bienes. Los datos del problema del equilibrio general son pues, los gustos y recursos de las economías domésticas y la tecnología productiva de que disponen las empresas.

Los tres problemas centrales de la teoría del equilibrio general son los de describir las condiciones que



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

deben cumplirse para que exista un equilibrio, identificar las circunstancias en que este equilibrio es único y analizar la estabilidad del mismo.

El Teorema del Punto Fijo de Brouwer puede ser empleado con éxito para probar la existencia del equilibrio general a partir de el enfoque neoclásico del exceso de la demanda.

Sea una economía compuesta de empresas y unidades familiares de consumo en la cual hay n artículos x_1, x_2, \dots, x_n donde los artículos pueden ser bienes, factores e incluso algunos artículos los que son a la vez bienes y factores como la electricidad.

Los precios de los artículos vienen dados por el vector fila

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Para cualquier conjunto no negativo de precios existe una función de demanda del artículo j :

$$x_j^d = x_j^d(\bar{p})$$

Obtenida agregando las funciones de demanda individuales de las unidades familiares de consumo y de las empre-

sas. Análogamente, para cualquier conjunto no negativo de precios, existe una función de oferta del artículo j :

$$x_j^s = x_j^s(\bar{p})$$

Obtenida agregando las funciones de oferta individuales de las unidades de consumo familiar y de las empresas.

El exceso de demanda del artículo j se obtiene de la diferencia entre la demanda y la oferta:

$$E_j(\bar{p}) = x_j^d(\bar{p}) - x_j^s(\bar{p}), \quad j=1,2,\dots,n$$

y los n excesos de demanda se agrupan en el vector columna:

$$E(\bar{p}) = (E_1(\bar{p}), E_2(\bar{p}), E_3(\bar{p}), \dots, E_n(\bar{p})).$$

4.2. EXISTENCIA DE UN EQUILIBRIO

Un equilibrio se define como un conjunto de precios no negativos p^* tales que todos los excesos de las demandas sean no positivos y el precio de cualquier artículo sea cero si el exceso de demanda de ese artículo es negativo:

$$\bar{p}^* \geq 0 \quad ; \quad E(\bar{p}^*) \leq 0 \quad , \text{ y si } E_j(\bar{p}^*) < 0 \text{ entonces } p_j^* = 0$$

En estos términos, se puede probar la existencia del equilibrio si las funciones del exceso de demanda satisfacen los siguientes supuestos:

- i) Las funciones de exceso de demanda son continuas.
- ii) Las funciones de exceso de la demanda están acotadas inferiormente:
 $E(p) > b$, para toda p , siendo b un vector columna de componentes finitos. Según esta hipótesis, la oferta de cualquier producto es siempre limitada.
- iii) Las funciones del exceso de la demanda son homogéneas de grado cero en todos los precios; $E(\alpha p) = E(p)$, para toda $\alpha > 0$, de modo que solamente cuentan los precios relativos.

En general, una función homogénea satisface la condición:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

El grado de homogeneidad está dado por k . Cuando $k=0$, $t^k=1$ y los cambios proporcionales en todas las variables independientes no producen ningún efecto.

Las funciones de demanda y de oferta son homogéneas de grado cero en todos los precios.

Una función de demanda o de oferta muestra la cantidad demandada u ofrecida como dependiente de todos los precios. Cada una de estas funciones es homogénea de grado cero, puesto que cambios equiproporcionales en todas las variables independientes, -es decir, los precios- tienen efecto nulo sobre la variable dependiente, o sea la cantidad demandada u ofrecida.

No es el mismo caso de una función de producción, que es homogénea de grado uno en la cambios proporcionales en todas las variables, que representan insumos, resultan en un cambio igualmente proporcional de una variable dependiente o en las que representa la producción.

Finalmente

iv) Las funciones de exceso de la demanda cumplen la ley de Walras, de que el valor de mercado del exceso de demanda es cero:

$$\bar{p} \cdot E(\bar{p}) = \sum_{j=1}^n p_j E_j(\bar{p}_j) \neq 0, \text{ para toda } \bar{p} > \bar{0}, \text{ de modo que}$$

el valor de mercado de la demanda es igual al valor de mercado de la oferta para todos los precios no negativos.

Con estos supuestos, la existencia de un equilibrio puede ser probada vía el teorema del punto fijo de Brouwer.

Utilizando el supuesto de homogeneidad, es posible normalizar los precios de modo que sumen uno, así el vector precios pertenece a la bola:

$$S = \{p \mid \sum_{j=1}^n p_j = 1, p > \bar{0}\}$$

Consideremos un conjunto determinado de precios $p \in S$.

Las funciones de exceso de demanda $E(\bar{p})$. Para estas funciones de exceso de demanda se definen nuevos precios \hat{p} tales que:

$$\begin{aligned} \hat{p}_j &= p_j & \text{si } E_j(\bar{p}) &= 0 \\ \hat{p}_j &= p_j + \Delta_j & \text{si } E_j(\bar{p}) > 0 \\ \hat{p}_j &= \max(0, p_j - \Delta_j) & \text{si } E_j(\bar{p}) < 0 \end{aligned} \quad j=1, 2, \dots, n$$

en donde Δ_j es una pequeña constante positiva. Los nuevos precios \hat{p} se ajustan de modo que sumen uno y pertenezcan, por tanto, a S . La transformación es, pues:

$$\bar{p} \rightarrow E(\bar{p}) \rightarrow \hat{p},$$

donde \hat{p} se obtiene de $E(p)$ dejando el precio inviolable si el exceso de demanda es cero; incrementando el precio si el exceso de demanda es positivo; y rebajando el precio, pero no por debajo de cero, si el exceso de demanda es negativo. A causa de los supuestos de continuidad y acotación esta transformación es continua al conjunto no vacío convexo y compacto S en sí mismo.

Así pues, según el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, existe un punto que permanece invariable en la transformación:

$$p^* \rightarrow E(p^*) \rightarrow \hat{p}^*.$$

y el proceso de ajuste no se altera sino solamente cuando todos los excesos de demanda son no positivos y cualquier artículo con exceso de demanda negativo impone un precio cero; es decir, solamente si p^* representa un equilibrio como se ha definido en (4.2.1.)

4.3. UNICIDAD.

Mientras que los supuestos hechos respecto a las funciones de exceso de demanda son suficientes para asegurar la existencia de un equilibrio, no lo son para garantizar la unicidad.

Una forma de atacar el problema de la unicidad del equilibrio es apoyarse en el llamado Axioma Débil de Preferencia Revelada que nos remite a la teoría de elección del consumidor, un poco lejana al propósito de este trabajo.

Otra forma de ver la unicidad, se basa en la matriz jacobiana de las funciones de exceso de demanda, suponiendo que estas funciones sean derivables. Eligiendo el artículo n y suponiendo que el exceso de demanda de este artículo sea infinito cuando su precio es nulo sin tener en cuenta los demás precios, la matriz jacobiana para el sistema normalizado es:



$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial p_1} & \frac{\partial E_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_1}{\partial p_{n-1}} \\ \frac{\partial E_2}{\partial p_1} & \frac{\partial E_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_2}{\partial p_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial E_{n-1}}{\partial p_1} & \frac{\partial E_{n-1}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_{n-1}}{\partial p_{n-1}} \end{bmatrix}$$

El equilibrio es único si los menores principales de J son de signo alternado, siendo positivo (negativo) el menor principal para un número par (impar) de renglones y columnas de J .

ESTABILIDAD: El problema de la estabilidad de un equilibrio no lo abordaremos en virtud de que para su análisis no se hace uso del Teorema del Punto Fijo que nos reúne en esta ocasión, sin embargo, es de amplio interés abordarlo para los matemáticos y los economistas interesados en estas cuestiones.

APENDICE

ESPACIOS METRICOS

Un conjunto X es un Espacio Métrico si, y sólo si, está definida una función de valores reales $d(X,Y)$ denominada métrica, sobre el producto cartesiano E^n de modo tal que, para todos los $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $Z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$ en X se cumple que:

- i) $d(X,Y) > 0$ y $d(X,Y) = 0$, si y sólo si $X=Y$
- ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$
- iii) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$

donde $d(X,Y)$ se denomina distancia euclidiana entre X,Y y está definida por:

$$d(X,Y) = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right]^{1/2}$$

Dados un espacio métrico X y una distancia $d(X,Y)$ definida sobre E^n , una ϵ -vecindad del punto $X \in X$ es:

$$N_\epsilon(x) = \{Y \in X \mid d(X,Y) < \epsilon\}$$

donde ϵ es un número positivo. Por ejemplo, una ϵ -vecindad de E^n con la métrica euclidiana, es el interior de la esfera con centro en X y radio ϵ .

Si A es un subconjunto de un espacio métrico, entonces el punto X es un Punto Interior de A , si y sólo si existe alguna ϵ -vecindad de X que contiene solamente puntos de A :

$$N_{\epsilon}(X) \subset A \text{ para cierto } \epsilon > 0$$

El conjunto de todos los puntos interiores de A le llamamos Interior de A , y está relacionado de tal manera que:

$$I(A) \subset A.$$

El conjunto A es abierto si es igual a su interior, esto es, si todo punto de A es un punto interior. El interior es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en el conjunto dado.

Si A es un subconjunto de un espacio métrico, entonces el punto X es un punto frontera de A si toda vecindad de X contiene al menos un punto de A y al menos un punto que no está en A :

$$N_{\epsilon}(x) \cap A \neq \emptyset, N_{\epsilon}(x) \cap A^c \neq \emptyset \text{ para cada } \epsilon > 0$$

El conjunto de todos los puntos frontera de A es llamado frontera de A y la unión de A y su frontera es la clausura de A , denotada por $C(A)$.

El conjunto A es cerrado si es igual a su clausura, o sea, si contiene todos sus puntos frontera. Por ejemplo, el intervalo cerrado sobre la recta real $\{X \in \mathbb{R} \mid a \leq X \leq b\}$ denotado por $[a,b]$ y su frontera denotada por $B(a,b) = \{a,b\}$ y el interior $I([a,b]) = (a,b)$.

En el plano, el disco unitario $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tiene por frontera $B(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y por interior $I(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

La clausura de cualquier conjunto es cerrada y es el conjunto cerrado "más pequeño" que contiene al conjunto dado, o sea, que la clausura es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contiene el conjunto dado.

Un conjunto A de un espacio métrico es acotado si existe un número real positivo M tal que $d(X,Y) \leq M$, para todo $X,Y \in A$.

Una función cuyo dominio son los números naturales \mathbb{N} y cuyo codominio es el espacio métrico X , se denomina sucesión en X y se denota por $\{X_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{X_n\}$ converge hacia x_0 si y solo si dado cualquier



$\epsilon > 0$ existe un natural N tal que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $d(x_n, x_0) < \epsilon$

En tal caso, x_0 es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, lo que se denota así:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Si A es un subconjunto de un espacio métrico, entonces x es un punto límite de A si y sólo si, existe una sucesión de puntos distintos de A que convergen hacia x .

Un subconjunto A de un espacio métrico es compacto cuando dada cualquier sucesión de puntos de A , existe una subsucesión que converge hacia un punto de A . A este criterio se le conoce como propiedad de Bolzano-Weierstrass. De otra manera, podemos decir que es compacto si dada cualquier familia de conjuntos abiertos cuya unión contenga a A , existe una subfamilia finita cuya unión contiene a A . A esta afirmación se le conoce como propiedad Heine-Borel.

Si A es subconjunto de E^n , entonces es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Ejemplos de lo cual son cualquier intervalo cerrado finito $[a, b]$ en E y cualquier esfera acotada que incluya la frontera en E^3 .

Si el dominio y el co dominio de la función $f(x)$ son subconjuntos de espacios métricos, entonces y_0 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 si y sólo si, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: si $0 < d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), y_0) < \epsilon$, lo que se escribe:

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Es decir, y_0 es el límite si y sólo si, $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo a y_0 tomando a x suficientemente próximo a x_0 .

La función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si y sólo si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

o sea, si $0 < d(x, x_0) < \delta$; entonces $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$. De modo equivalente, $f(x)$ es continua en el punto x_0 si y sólo si, dada cualquier sucesión $\{x_i\}$ convergente hacia la sucesión $\{f(x_i)\}$ converge hacia $f(x_0)$. Una función es continua si es continua en todos los puntos

La función de valores reales $f(x)$ es SEMICONTINUO SUPERIOR EN EL PUNTO x_0 si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < d(x, x_0) < \delta$, entonces $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, y $f(x)$ es semicontinua inferior en el punto x_0 si, y solo si, las condiciones implican que $f(x_0) - \epsilon < f(x)$. Es decir, la función de valores reales $f(x)$ es continua en el punto x_0 si es a la vez semicontinua superior y semicontinua inferior en x_0 y $f(x)$ es continua en un intervalo I si lo es en cada punto $x \in I$.

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.

Una función $F: R^n \rightarrow R^m$ asocia a cada vector $X \in R^n$ un vector $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, es decir, a un vector n -dimensional le asocia un vector m -dimensional donde $n, m \in \mathbb{N}$ y no necesariamente iguales. Estas funciones son llamadas campos vectoriales y se pueden expresar como:

$$F(X) = Y = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X))$$

donde cada $f_i(X)$ es una función $f_i: R^n \rightarrow R$, $i = 1, 2, \dots, m$. llamadas campos escalares.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

La función $f: S \subset R^n \rightarrow R^m$ tiene límite en x_0 si se cumple que $x_0 \in R^n$ y $L \in R^m$ y

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = L$$

No se exige que F esté definida en el mismo punto X_0 .

Una función F se llama continua en X_0 si está definida en X_0 y si

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0).$$

y decimos que F es continua en un conjunto S si es continua en cada punto de S .

Si el campo vectorial F tiene valores en R^n , cada uno de los valores $F(X)$ tiene n componentes y se prueba que $F(X)$ es continua en un punto si y sólo si cada componente $f_i(X)$ es continua en dicho punto.

Estas definiciones son extensiones directas del caso unidimensional y algunas de las propiedades de límites y continuidad pueden también extenderse. Para campos vectoriales,, los cocientes no están definidos pero puede enunciarse el siguiente teorema relativo a sumas, productos, multiplicación por escalares, productos interiores y normas

Teorema: Si $\lim_{X \rightarrow A} F(X) = B$ y $\lim_{X \rightarrow A} G(X) = C$,

entonces:

$$a) \lim_{X \rightarrow A} [F(X)+G(X)] = B+C$$

$$b) \lim_{X \rightarrow A} \lambda F(X) = \lambda B, \text{ para todo escalar } \lambda.$$

$$c) \lim_{X \rightarrow A} F(X) \cdot G(X) = B \cdot C$$

$$d) \lim_{X \rightarrow A} ||F(X)|| = ||B||$$

cuya demostración puede consultarse en la literatura usual (Ver Tom. M. Apostol, "Calculus" Vol. 2). Hay una gama de funciones cuya continuidad es interesante analizar. En particular podemos identificar como continuas a la función identidad, las transformaciones lineales, los polinomios y las composiciones que surgen de entre ellas. Sean F y G dos funciones tales que la función compuesta está definida en A \cap S, siendo (FoG)(X) = F[G(X)].

Si G es continua en A y F es continua en G(A), la función compuesta FoG es continua en A.

Un vector $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en R^n es unitario si $||Y|| = 1$, y en particular si tiene dirección de alguno de los ejes coordenados y está anclado en el origen, le llamamos vector unitario coordenado y es de la forma $\epsilon_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ si es la k-ésima coordenada distinta de cero y los demás ceros.

DERIVADA DIRECCIONAL Y DERIVADA PARCIAL: Si Y es un vector unitario, la derivada del campo escalar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama la Derivada Direccional de f en A , en la dirección de Y , se representa como: $f'(A;Y)$ y se define por:

$$f'(A;Y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+hY) - f(A)}{h}$$

siempre y cuando exista tal límite.

En particular si $Y = e_k$, el k -ésimo vector unitario coordenado, la derivada direccional $f'(A;e_k)$ se denominará derivada parcial respecto a e_k y se representa por el símbolo.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(A) = f'(A;e_k)$$

La derivación parcial origina nuevos conceptos escalares a partir de un campo escalar dado f . Las derivadas parciales de segundo orden de f se denotan por: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$.

La existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no implican la continuidad en ie. La diferencial total o simplemente la diferencial implica la continuidad y al mismo tiempo permite extender los principales resultados de la derivación unidimensional al caso de mayor número de dimensiones.

DIFERENCIABILIDAD: Decimos que f es diferenciable en $X_0 \in S$, un subconjunto abierto de R^n y X_0 un punto interior a S , $f: S \rightarrow R$, si existe un hiperplano $P_t(X)$ que satisface:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - P_t(X)}{\|X - X_0\|} = 0$$

A $P_t(X)$ le llamaremos el "hiperplano tangente" a f en el punto $(X_0, f(X_0))$. El hiperplano $P_t(X)$ aproxima a la función $f(X)$ en una vecindad de X_0 , y $P_t(X_0) = f(X_0)$ por lo que:

$$P_t(X) = f(X_0) + A \cdot (X - X_0)$$

donde $A \in R^n$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y es:

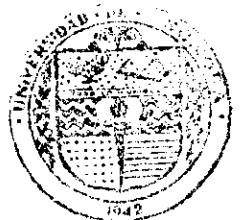
$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Al vector $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0))$ le llamaremos el Vector Gradiente de f en X_0 y lo denotaremos $\nabla f(X_0)$. Así, podemos decir que f es diferenciable en X_0 si

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0) - \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

y la expresión para el hiperplano tangente es:

$$P_t(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)$$



EL SABER DE MIS HIJOS
HACE SU GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

Condición suficiente de Diferenciabilidad. Si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ en una cierta n-bola $D(A)$ y son continuas en A , entonces f es diferenciable en A . Un campo escalar f que satisfaga esta condición se le llama diferenciable con continuidad en A .

DIFERENCIABILIDAD DE CAMPOS VECTORIALES: Decimos que

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en X_0 si:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0) - A(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

donde A es una matriz cuyos renglones son $\nabla f_1(X_0),$

$\nabla f_2(X_0), \dots, \nabla f_m(X_0)$, es decir, A es la matriz que llamamos

Jacobiana

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

La matriz A , si se conoce, entonces queda determinada una transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , y podemos afirmar que $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en X_0 , si existe una transformación lineal $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - L \cdot (X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

donde L está completamente determinada por la matriz A descrita anteriormente.

Es necesario anotar que la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto A implica la continuidad allí.

TEOREMA DE EXTENSION DE TIETZE-URYSOHN: Sea E un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de E, f una aplicación continua acotada de A en R. Entonces existe una aplicación continua g de E en R que coincide con f en A y tal que:

$$\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{y \in A} f(y)$$

$$\inf_{x \in E} g(x) = \inf_{y \in A} f(y)$$

TEOREMA (DE APROXIMACION DE WEIERSTRASS) Sea f una función real continua en un intervalo cerrado [a,b]. Dado cualquier $\epsilon > 0$, existen un polinomio p (que puede depender de ϵ) tal que:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad x \in [a, b]$$

lo que significa que toda función continua puede ser "aproximada uniformemente" por un polinomio.

Las demostraciones de estos teoremas anteriormente enunciados pueden encontrarse en la bibliografía señalada.

CONCLUSIONES

A partir del trabajo desarrollado en la selección y elaboración de estas notas, se desprenden las siguientes conclusiones:

- i) La obra de L.E.J. Brouwer (881-1966) aunque es mucho más amplia que la sola presentación del Teorema del Punto Fijo que lleva su nombre es importante que se destaque entre los jóvenes profesores de matemáticas especialmente por su ascendrada militancia en las filas del intuicionismo siempre que se ventilaba el viejo problema de encontrar la dosificación adecuada entre formalismo e intuición en la enseñanza de las Matemáticas.
- ii) Es posible poner al alcance de más lectores, algunos de los conceptos y resultados de la topología al construir pruebas analíticas que se apoyen en el cálculo y el análisis.
- iii) El Teorema del Punto Fijode Brouwer y su generalización al Teorema del Punto Fijo de Kakutani tienen importantes aplicaciones tanto a la matemática misma tal es el caso de la Curva de Jordan como a la Economía en la Teoría del Equilibrio General.

BIBLIOGRAFIA

- 1) ANALYTIC PROOFS OF THE "HAIRY BALL THEOREM" AND THE BROUWER FIXED POINT THEOREM.
John Milnor
AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY (AGOSTO -SEPTIEMBRE) 1981.
Institute for Advanced Study, Princeton University.
- 2) THE JORDAN CURVE THEOREM VIA THE BROUWER FIXED POINT THEOREM.
Ryuji Maehora
AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY (DICIEMBRE) 1983.
Departamento de Mathematics, Univ. of Ryukyn,
Okinawa, Japan.
- 3) A LESS STRANGE VERSION OF MILNOR'S PROOF OF BROUWER'S FIXED POINT THEOREM.
C.A. Rogers
A.M. Monthly (AGOSTO-SEPTIEMBRE) 1982.
- 4) OPTIMIZACION MATEMATICA Y TEORIA ECONOMICA
Michael D. Intriligator P.H.I. 1973.
- 5) EQUILIBRIO GENERAL COMPETITIVO
Arrow & Hahn
Fondo de Cultura Económica.
- 6) ANALISIS MATEMATICO
Tom M. Apostol
Edit. Reverté.