

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

"Control Optimo de Presas"

TESIS

que para obtener el Titulo de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

JESUS ADOLFO MINJAREZ SOSA

A mis padres
Adolfo y Bethina

A mis hermanos, a mis compañeros y a la raza
que no tuvo la oportunidad de estudiar.

INDICE

INTRODUCCION

I. - Control Estocástico

1. - Introducción	1
2. - El Problema de Control de Inventario	2
3. - Formulación del Problema de Control Optimo	4
4. - Modelo de Control Markoviano	10

II. - Programación Dinámica

1. - Introducción	12
2. - Algoritmo de Programación Dinámica	13
3. - Problema del Regulador Lineal	16

III. - Control de Reservorios

1. - Introducción	21
2. - Problema de la Capacidad Minimax	22
2.1. - Caso determinista	22
2.2. - Caso estocástico	26
3. - Control Optimo de Reservorios	29

CONCLUSIONES	38
--------------	----

BIBLIOGRAFIA	42
--------------	----

Agradezco al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora y a Third World Academy of Sciences (T.W.A.S.), proyecto: RG MP 898-152, así como a Oscar Vega Amaya, Director de Tesis, al Dr. Onésimo Hernández-Lerma y a los compañeros Teresa Robles, Fernando Luque y Lupita Avila Godoy por todo el apoyo y todas las sugerencias hechas para la realización de este trabajo.

INTRODUCCION

La Teoría de Control Optimo es una de las áreas de las matemáticas modernas que ha alcanzado un gran desarrollo en los últimos años. Sus aplicaciones están en problemas donde se requiere controlar sistemas que transcurren en el tiempo, los cuales se presentan en campos tan diversos como: economía, biología, medicina, y en todas las ramas de la ingeniería. Su objetivo es buscar la manera de operación óptima de dichos sistemas.

El sistema a controlar en todos estos campos de aplicación, lleva inmerso algo de incertidumbre dentro de su funcionamiento y de aquí surge la necesidad de considerar elementos estocásticos que modelen dicha incertidumbre. En este trabajo nos ocuparemos de la Teoría de Control Estocástico.

La Teoría de Control tuvo sus orígenes en el cálculo de variaciones, y fué hasta los años 50 cuando se le dió gran impulso. Uno de los problemas originales fué el de obtener una solución numérica al problema de control y esto originó nuevos planteamientos del problema bajo las técnicas de Programación Matemática y de Programación Dinámica. Esta última fué propuesta por Richard Bellman en el año de 1951 y toma gran importancia dentro de la Teoría de Control, ya que se puede extender directamente al caso estocástico.

Una de las aplicaciones específicas de la técnica de Programación Dinámica es en la solución de problemas de manejo de recursos acuíferos, desde el diseño de operación óptima de una presa, hasta el diseño de plantas hidroeléctricas.

La Programación Dinámica, la teoría de inventarios en el campo de la economía, y el manejo de presas están intimamente relacionados. Alrededor de los años 40, P.B.D. Massé hizo estudios de operación de presas utilizando una ecuación funcional que fué la base de desarrollos posteriores. El mismo Massé fué el primero en dar una solución satisfactoria al problema de inventario con variables no negativas. Esto marcó el inicio de amplias y variadas investigaciones en el control y manejo de recursos acuíferos.

Uno de los países en donde se le dió mayor impulso fué

Estados Unidos. En 1955 la Universidad de Harvard inició un programa de recursos acuíferos con el propósito de desarrollar una metodología para planear y diseñar sistemas modernos en el manejo de estos.

Por esas mismas fechas, varios investigadores de Universidad de California comienzan a estudiar el problema de optimización del manejo del agua. Dichos estudios se consolidaron con el establecimiento del University of California Water Resources Center, el 1 de diciembre de 1957. Uno de los primeros frutos de estos estudios fué la aparición del artículo "The Dynamic Programming Approach to Water Resources" en 1961, cuyos autores fueron W.A. Hall y N. Buras. Este trabajo muestra un análisis de procesos de decisión secuencial multietapas en ingeniería de recursos acuíferos como aplicación de la Programación Dinámica.

A partir de ese momento se siguió usando la Programación Dinámica como una técnica de optimización en este campo, y se analizaron procesos más complejos, incluyendo sistemas de almacenaje de agua con bombeo.

Se dice que el primer estudio que apareció relacionado con operación de presas, en el idioma inglés fué, "The Use of Storage Water in a Hydroelectric System" en 1955, de J.D.C. Little, quien más tarde compara la operación de presas y el problema de inventario.

Al igual que en Estados Unidos, en otros países también se empezaron a preocupar por el manejo de estos recursos, como en Inglaterra, Israel, y Francia. En este último, con la fundación del Centre de Recherches et d'Essais de Chatou d'Electricité de France, la investigación estuvo dirigida hacia problemas de almacenaje y modelos de operación óptima de presas e hidroeléctricas, en donde aplicaron la teoría de probabilidades para el análisis del flujo de entradas de agua a la estación. El uso de procesos de Markov en el análisis, hizo posible el establecimiento de reglas racionales de operación para varias presas.

El presente trabajo, ilustra algunas de las aplicaciones de la Teoría de Control Estocástico al campo de la ingeniería de recursos acuíferos. Empezaremos presentando en el Capítulo I los conceptos básicos de esta teoría, así como las ecuaciones que

describirán la dinámica y una función que medirá su funcionamiento. Dicha función puede medir el costo o la ganancia por operar el sistema, y en tal caso el objetivo es encontrar una política que minimice o maximice la función, respectivamente.

La técnica que usaremos para encontrar esta política será la Programación Dinámica Estocástica. En el Capítulo II, expondremos en forma breve esta técnica, la cual nos provee de un algoritmo que nos permitirá resolver el problema de control óptimo.

Todos estos elementos nos servirán para plantear los problemas de recursos acuíferos en el Capítulo III. Primeramente, abordaremos el problema de encontrar la capacidad óptima de una presa, de tal forma que de cabida a todo el caudal de agua que entra durante N períodos, los cuales pueden ser días, semanas, meses, etc., y a su vez, satisfaga cierta demanda. A este problema le llamaremos Problema de la Capacidad Minimax.

Seguidamente, plantearemos el problema de operación óptima de la presa de tal forma que se satisfagan ciertos requerimientos (e.g., en agricultura o para uso doméstico) con un costo mínimo. Se verá la relación que existe entre este problema y el problema de inventario. Finalmente resolveremos el problema aplicando la técnica de Programación Dinámica.

Todos los resultados que se presenten en el Capítulo III, son válidos tanto para presas como para cualquier tipo de depósito donde existan flujos de entrada y salida de agua que se pueda controlar. A estos depósitos les llamaremos reservorios.

De esta manera utilizaremos los términos presa y reservorios indistintamente aunque el segundo sea mas amplio.

C A P I T U L O I

CONTROL ESTOCÁSTICO

1. - Introducción.
2. - El problema de control de inventario
3. - Formulación del problema de control óptimo.
4. - Modelo de control Markoviano

1.- Introducción.

El objetivo de la teoría de control óptimo, consiste en determinar las acciones o decisiones de control que deben tomarse para optimizar (maximizar o minimizar) el comportamiento de un sistema que evoluciona en el tiempo. El hecho de tratar con sistemas dinámicos es la característica que diferencia a los problemas de control óptimo de los problemas de optimización comunes. En este capítulo, se darán los elementos requeridos para plantear el problema de control óptimo.

Dependiendo del fenómeno a modelar, la dinámica del sistema se puede expresar por medio de:

a) Ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, si el sistema se estudia en tiempo continuo.

b) Ecuaciones en diferencias, si el sistema se estudia en tiempo discreto.

Estas ecuaciones a su vez, pueden ser estocásticas o deterministas, dependiendo si el sistema incorpora componentes aleatorios o no.

En este trabajo solo estudiaremos sistemas estocásticos que se observan en tiempo discreto, esto es, sistemas cuya dinámica puede expresarse en la forma:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, w_t) \quad t=0,1,2,\dots,N-1$$

donde:

t , es el subíndice que indica el tiempo;

N , es el horizonte o tiempo terminal del problema, el cual es un número natural dado;

x_t , variable que describe el estado del sistema al tiempo t ;

u_t , es la variable de control o decisión al tiempo t ;

w_t , es el parámetro aleatorio o perturbación estocástica en el tiempo t .

Además de la dinámica del sistema, para plantear el problema de control óptimo necesitamos especificar la forma en que mediremos el funcionamiento del sistema y la familia de políticas admisibles.

Para facilitar la comprensión de estos elementos, revisemos el siguiente ejemplo:

2.- Problema de Control de Inventario.

Consideremos un sistema de producción-inventario para el cual:

- x_t , es la cantidad disponible al principio del período t ;
- u_t , es la cantidad que se produce o se ordena al principio del período t ;
- w_t , es la demanda del artículo durante el período t con distribución de probabilidad dada.

Supongamos que se quiere analizar la venta del artículo durante N días, así que el período t corresponde al t -ésimo día.

Al inicio de cada día, en un comercio se cuenta con una existencia de cierto artículo, de tal manera que podemos ordenar o no una cierta cantidad para poder satisfacer la demanda de este día, la cual no podemos predecir con certeza.

En este ejemplo vamos a suponer que $x_0, w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$, son variables aleatorias independientes. Por todo lo anterior, la dinámica del sistema queda expresada como:

$$x_{t+1} = x_t + u_t - w_t \quad t=0,1,2,\dots,N-1 \quad (2.1)$$

Podemos considerar que el establecimiento pierde cierta cantidad de dinero si al final de cada período t no vende toda su

existencia, es decir, si $x_{t+1} > 0$, y de igual manera, si la demanda es mayor que la existencia del producto, es decir, $x_{t+1} < 0$. Este costo es una función del estado, digamos $H(x_{t+1})$, y toma valores en $\mathbb{R}$. Si además decimos que cada artículo tiene un precio c por unidad, entonces podemos expresar el costo para el período t como:

$$cu_t + H(x_t + u_t - w_t)$$

El problema es minimizar el costo de operación durante los N días, y tomando en cuenta que las x_t son variables aleatorias, el costo total también sería aleatorio, de tal manera que lo que tenemos que minimizar es el valor esperado:

$$E \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} cu_t + H(x_t + u_t - w_t) \right\} \quad (2.2)$$

Es claro que la minimización de (2.2) depende de las cantidades ordenadas durante los $N-1$ días.

Supongamos que la capacidad del establecimiento está limitada. Sea B una cota superior del nivel de existencia del producto. Entonces, al tiempo t , la cantidad ordenada no deberá exceder de $B - x_t$, es decir $0 \leq u_t \leq B - x_t$. Así, nuestro objetivo es seleccionar adecuadamente la sucesión de controles $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ tales que $u_t \in [0, B - x_t]$ para $t=0, 1, 2, \dots, N-1$. Estas serán las acciones admisibles para el estado x_t . A la sucesión $\{u_t\}_{t=0}^N$ le llamaremos política de control admisible, y la sucesión de estados $\{x_t\}_{t=0}^{N-1}$ generada por esta política es un proceso estocástico controlado.

Se puede escoger al principio de la operación (primer día) todas las cantidades por ordenar, sin tomar en cuenta la demanda que se vaya presentando en cada período. Con esta manera de actuar, existen mas posibilidades de que el establecimiento salga perdiendo. Sin embargo, hay otra manera más conveniente de proceder; esta es cuando las decisiones se hacen conforme transcurre el tiempo (por etapas), tomando en cuenta el estado actual. Es decir, se va a ordenar al almacén cierta cantidad del producto dependiendo de la existencia de éste o del desarrollo que se haya tenido del sistema. De esta manera, nuestro interés es

encontrar una "regla" que nos especifique el control a aplicar u_t en cada etapa $t=0,1,2,\dots,N-1$.

Existen varias formas de elegir las acciones u_t . Una de ellas es que al tiempo t elijamos el control u_t tomando en cuenta el estado actual x_t y los estados y acciones anteriores x_k, u_k $k=0,1,\dots,t-1$. Otra forma de decidir, es cuando u_t solo depende del estado actual x_t , es decir, la cantidad ordenada del artículo u_t , solo depende del nivel de existencia x_t . Así, la "regla" que necesitamos es una función μ_t que para cada $t=0,1,2,\dots,N-1$, $u_t = \mu_t(x_t)$. A este tipo de controles algunos autores le llaman "controles retroalimentados". Una política $\Pi = \{\mu_t\}_{t=0}^{N-1}$ donde los controles son de esta forma le llamaremos política admisible de Markov [ver Definición 3.4].

Entonces, el costo total esperado correspondiente a la política Π , con un nivel de existencia inicial fijo x_0 , queda expresado como:

$$J_{\Pi}(x_0) = E \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} c\mu_t(x_t) + H(x_t + \mu_t(x_t) - w_t) \right\} \quad (2.3)$$

donde $\mu_t(x_t)$ es la cantidad que puede ser ordenada al tiempo t si el nivel de existencia es x_t .

La función $J_{\Pi}(x_0)$ nos proporciona una medida del funcionamiento del sistema cuando se aplica la política Π . De esta manera, nuestro problema es minimizar (2.3) bajo todas las políticas admisibles Π .

3.- Formulación del Problema de Control Optimo.

Los elementos que intervinieron en el problema de control anterior son:

- Restricciones de estado.
- Restricciones de control.
- Perturbaciones estocásticas.
- Dinámica del sistema.
- Función de costo en un período.

Estos elementos nos servirán para plantear un problema general de control a tiempo discreto con horizonte finito.

En lo que resta del desarrollo del trabajo, vamos a considerar que todos los conjuntos y funciones son medibles.

a) Restricciones de estado:

En el ejemplo anterior los estados son números reales. En general, las restricciones en los estados dependerán del problema que se esté analizando, los estados no podrán tomar valores arbitrarios. Estas restricciones se pueden expresar como:

$$x_t \in X_t \quad t=0,1,2,\dots,N-1$$

donde X_t son conjuntos dados y les llamaremos espacios de estados.

En algunos casos se tendrá que los x_t son vectores en $\mathbb{R}^n$ para cada posible valor de t . De manera que, en general, supondremos que X_t es un espacio métrico separable y completo para cada t .

b) Restricciones de control:

En forma análoga, el espacio de control al tiempo t lo denotaremos por U_t y pedimos que:

$$u_t \in U_t \quad t=0,1,\dots,N-1$$

donde U_t son conjuntos dados, y también supondremos que son espacios métricos separables y completos para cada t .

El valor que tome la variable de control, al tiempo t , dependerá generalmente del estado del sistema x_t . Así, la restricción para los controles la podemos expresar como $u_t \in U_t(x_t)$, donde $U_t(x_t)$ es un subconjunto medible de U_t . Al conjunto $U_t(x_t)$ le llamaremos espacio de acciones admisibles para el estado x_t . En el ejemplo de inventario, $U_t(x_t) = [0, B-x_t]$.

c) Perturbaciones estocásticas:

Supondremos que las variables aleatorias w_t , $t=0,1,\dots,N$,

toman valores en un espacio métrico W_t y además, suponemos que tienen distribución de probabilidad conocida, $P_t(\cdot / x_t, u_t)$, la cual puede depender de x_t y u_t , pero no de $w_0, w_2, \dots, w_{t-1}$.

d) Dinámica del sistema:

En nuestro caso, la dinámica del sistema la representaremos por medio de ecuaciones en diferencia de la forma:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, w_t), \quad t=0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

donde f_t es una función medible del espacio $X_t \cup U_t \cup W_t$ al espacio X_{t+1} .

En el ejemplo de inventario, la función f_t está dada por (2.1):

$$f_t(x_t, u_t, w_t) = x_t + u_t - w_t.$$

e) Función de costo en un período:

El costo que obtenemos en un determinado período, será una función real g_t sobre el espacio $X_t \cup U_t \cup W_t$. La función de costo en el período t en el ejemplo de inventario, estaba dada como:

$$g_t(x_t, u_t, w_t) = cu_t + H(x_t + u_t - w_t).$$

Todos estos elementos nos llevan a la siguiente:

DEFINICION 3.1: Un modelo de control estocástico con horizonte finito N es un arreglo $(X_t, U_t, W_t(x_t), f_t, P_t, g_t, N)$.

Como se dijo en la Sección 2, las acciones que se escogen de acuerdo a una política determinada pueden depender de la historia del proceso (es decir, de todos los estados y acciones que se hayan aplicado hasta el tiempo correspondiente), o solamente del estado actual.

Sea K_t el conjunto formado por las parejas estado y control admisibles al tiempo t , esto es:

$$K_t = \{ (x_t, u_t) : x_t \in X_t, u_t \in U_t(x_t) \}$$

Supondremos que K_t es un subconjunto medible del espacio $X_t U_t$ para cada t .

DEFINICION 3.2: Para cada tiempo t , el espacio H_t de historias admisibles del proceso hasta el tiempo t es:

$$H_0 = X_0$$

$$H_t = K_0 \times W_0 \times \dots \times K_{t-1} \times W_{t-1} \times X_t$$

Por ejemplo, el espacio de historias del proceso hasta el tiempo $t=1$ es:

$$H_1 = K_0 \times W_0 \times X_1$$

y los elementos de H_1 , digamos h_1 , serían de la forma:

$$h_1 = (x_0, u_0, w_0, x_1) \text{ donde } (x_0, u_0) \in K_0, w_0 \in W_0 \text{ y } x_1 \in X_1$$

En general, un elemento $h_t \in H_t$ es un vector

$$h_t = (x_0, u_0, w_0, \dots, x_{t-1}, u_{t-1}, w_{t-1}, x_t)$$

donde $(x_i, u_i) \in K_i$, $w_i \in W_i$ para $i=0,1,\dots,t-1$ y $x_t \in X_t$.

La historia del proceso hasta el tiempo t le llamaremos t -historia.

DEFINICION 3.3: Una política (o estrategia) de control es una sucesión $\{f_t\}$ de funciones medibles f_t del espacio de las t -historias H_t al espacio de control U_t , tal que:

$$f_t(h_t) \in U_t(x_t) \quad \forall h_t \in H_t \text{ y } t \geq 0.$$

Como podemos observar, este tipo de políticas dependen de toda la historia del proceso. Estas toman mayor importancia en problemas de control adaptable. En nuestro caso nos restringiremos

a problemas en donde las políticas empleadas no dependen de toda la historia, sino que únicamente dependen del estado actual. Como ya se dijo en la Sección 2 a estas políticas se les llama de Markov, o políticas con controles retroalimentados. Para definir las, denotemos por F_t al conjunto de todas las funciones de decisión medibles en el tiempo t , es decir, funciones $f_t: X_t \rightarrow U_t$ tal que $f_t(x_t) \in U_t(x_t)$ para toda $x_t \in X_t$ y $t \geq 0$.

DEFINICION 3.4: Una política de Markov es una sucesión de funciones $\{f_t\}$ tal que $f_t \in F_t$ para toda t .

Una importante subclase de las políticas de Markov son en las que la acción que se aplica en cada tiempo t solo depende del estado actual del proceso, y no del tiempo mismo. A las políticas con estas características les llamaremos políticas estacionarias y a continuación se definen.

DEFINICION 3.5: Una política de Markov $\{f_t\}$ se dice que es estacionaria si $f_t = f$ para todo t .

Para poder optimizar el comportamiento de un proceso es necesario tener una expresión que nos dé información sobre su funcionamiento. En muchos ejemplos, dicha expresión es una función de costo como en el caso del problema de inventario. Es claro que la función de costo es una variable aleatoria, y por lo tanto el problema es minimizar su valor esperado.

De manera general, si la función de costo en el periodo t es $g_t(x_t, u_t, w_t)$, el costo total esperado bajo la política Π y estado inicial x_0 es:

$$J_{\Pi}(x_0) = E \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} g_t(x_t, u_t, w_t) + g_N(x_N) \right\} \quad (3.2)$$

A la expresión (3.2) se le llama índice de funcionamiento del sistema.

Con los elementos anteriores podemos definir el problema de control óptimo:

DEFINICION 3.6: Dado el modelo de control definido en (3.1), una familia de políticas admisibles y el índice de funcionamiento J_Π , el problema de control óptimo consiste en encontrar una política admisible Π^* tal que:

$$J_{\Pi^*}(x_0) \leq J_\Pi(x_0)$$

para toda política admisible Π .

En tal caso decimos que Π^* es una política óptima y el costo que obtenemos al aplicar Π^* se dice que es el costo óptimo y lo denotaremos por $J^*(x_0)$; es decir,

$$J^*(x_0) = \min_{\Pi} J_\Pi(x_0) = J_{\Pi^*}(x_0) \quad (3.3)$$

En el siguiente capítulo describiremos la técnica de Programación Dinámica que nos servirá para encontrar una política óptima, y la ejemplificaremos en el caso en el que las ecuaciones del sistema sean lineales y el índice de funcionamiento es cuadrático. A este problema particular se le llama "Problema del regulador lineal".

Hasta este momento, no hemos hecho consideraciones probabilísticas en los elementos del problema de control óptimo. Primeramente, se debe tener un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para cada política Π y cada estado inicial $x_0 = x$, en donde las variables de estado y el costo estén definidas. Si estas suposiciones no se hacen, el problema de control óptimo podría quedar vagamente formulado. La manera más sencilla de obtener el espacio de probabilidad, es considerar que cada espacio W_t , $t=0,1,\dots,N$, sea un conjunto numerable y suponer que todos los valores esperados en (3.2) existen y son finitos para toda política admisible Π y estado inicial x_0 .

Dado el estado inicial $x \in X_0$ y una política admisible $\Pi = \{\mu_t\}_{t=0}^{N-1}$, definimos el proceso estado-control $\{(x_t, u_t)\}$ de la siguiente manera:

$$x_0 = x \text{ y } u_0 = \mu_0(x)$$

y para $t \geq 1$

$$x_t = f_t(x_{t-1}, u_{t-1}, w_{t-1}) \text{ y } u_t = \mu_t(h_t)$$

donde $h_t = (x_0, u_0, w_0, \dots, u_{t-1}, w_{t-1}, x_t)$ es la t -historia.

De aquí, $\{x_t, u_t, w_t\}$ es un proceso definido en algún espacio de probabilidad. Entonces para cada política Π y estado inicial x el proceso está definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P_x^\Pi)$.

4.- Modelo de Control Markoviano.

Un modelo alternativo para el problema de control óptimo es el llamado Modelo de Control Markoviano. En esta sección lo describiremos en el caso estacionario, es decir, los espacios de estado y control, la ley de transición entre los estados, la distribución de probabilidad de las variables aleatorias w_t y la función de costo por período, no varían con el tiempo, ya que un modelo de control Markoviano no estacionario lo podemos ver en forma estacionaria, Hernández-Lerma [1989].

6

DEFINICION 4.1: Un modelo de Control Markoviano, estacionario con tiempo discreto, consta de cuatro componentes $(\mathcal{X}, \mathcal{U}, q, \tilde{g})$, donde:

- $\mathcal{X}$ es el espacio de estados;
- $\mathcal{U}$ es el espacio de control;

Diremos que los espacios $\mathcal{X}$ y $\mathcal{U}$ son espacios métricos separables y completos.

- q es la ley de transición entre los estados, esto es, si $x_t = x, u_t = u$,

$$q(B/x, u) = \text{Prob}[x_{t+1} \in B/x, u] \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ y } (x, u) \in K.$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es la mínima σ -álgebra que contiene a todos los subconjuntos de $\mathcal{X}$. En algunos casos a q se le llama probabilidad de transición sobre $\mathcal{X}$ dado K .

- $\tilde{g}$ es una función real definida en K y representa el costo esperado por período.

El desenvolvimiento del sistema sería el siguiente: Cuando el sistema se encuentra en el estado x_t y se escoge la acción

$u_t = \mu_t(x_t)$ por medio de una política Π nos ocasiona un costo $\tilde{g}(x_t, u_t)$ y el sistema pasa al estado x_{t+1} de acuerdo con la ley de transición q , y así, se escoge una acción u_{t+1} generando un costo $\tilde{g}(x_{t+1}, u_{t+1})$, y de acuerdo con q el sistema pasa al estado x_{t+2} , etc..

El modelo de control definido en 3.1, lo podemos ver como un modelo de control Markoviano $(X, U, q, \tilde{g})$. Primeramente, por medio de la dinámica del sistema (3.1) y conociendo la distribución de probabilidad en W_t , obtenemos la probabilidad de transición q entre los estados como:

$$q(B/x, u) = \text{Prob}[x_{t+1} \in B \mid x_t, \mu_t(x_t)] = P[\omega : f(x_t, \mu_t(x_t), \omega) \in B]$$

Por otra parte, la función de costo $\tilde{g}$ la podemos expresar en términos de la función de costo g del modelo definido en 3.1 como:

$$\tilde{g}_t[x_t, \mu_t(x_t)] = E \left\{ g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) \mid x_t, \mu_t(x_t) \right\}$$

donde la esperanza es calculada con respecto a la distribución de probabilidad de w_t .

Una de las ventajas que nos trae plantear el problema de control óptimo bajo un modelo de control de Markoviano, es que en algunos problemas la dinámica del sistema no la podemos expresar por medio de ecuaciones en diferencia, pero podemos conocer las probabilidades de transición del sistema.

C A P I T U L O I I

PROGRAMACION DINAMICA

1. - Introducción.
2. - Algoritmo de Programación Dinámica.
3. - Problema del regulador lineal.

1. - Introducción.

En este capítulo revisaremos la técnica de Programación Dinámica, la cual nos permitirá encontrar una política que optimice el índice de funcionamiento $J_{\Pi}(x_0)$.

Esta es la técnica mas apropiada para dar solución a los problemas en donde se requiere que las decisiones se tomen en forma secuencial y estas a su vez influyan en las decisiones posteriores de la secuencia. La idea principal de la Programación Dinámica es descomponer el problema en varias etapas, en donde cada una de ellas origina un subproblema que consiste en encontrar el control óptimo correspondiente a cada una de las etapas. Lo anterior tiene su fundamento en el "Principio de Optimalidad" planteado por Richard Bellman a principios de los años 50, el cual dice:

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primer decisión".

La Programación Dinámica es el método que más se aplica para resolver problemas de decisiones secuenciales, no importando la característica de estos: determinístico o estocástico, con tiempo continuo o discreto, etc. Además, esta técnica tiene la ventaja de que la solución se obtiene recursivamente, lo cual facilita el manejo computacional del problema.

2. - Algoritmo de Programación Dinámica.

Dada una política cualquiera $\Pi = \{\mu_k\}_{k=0}^{N-1}$ definimos:

$$J_{\Pi t}(x_t) = E \left\{ \sum_{k=t}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k) + g_N(x_N) \right\} \text{ para } t=0, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

en donde $J_{\Pi t}$ es el costo de operar el sistema bajo la política $\Pi_t = \{\mu_k\}_{k=t}^{N-1}$ cuando el estado del sistema al tiempo t es x_t .

Para $t=0$ la ecuación (2.1) nos da el costo esperado total $J_{\Pi}(x_0) = J_{\Pi 0}(x_0)$. Además,

$$J_{\Pi 0}(x_0) = E \left\{ \sum_{k=0}^{t-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k) + J_{\Pi t}(x_t) \right\}.$$

Esto quiere decir que el costo total esperado, $J_{\Pi}(x_0)$, lo podemos descomponer como el costo esperado hasta la etapa $t-1$ más el costo restante $J_{\Pi t}(x_t)$.

Analogamente, se tiene que

$$J_{\Pi t}(x_t) = E \left\{ g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) + J_{\Pi t+1}(x_{t+1}) \right\}, \quad 0 \leq t \leq N-1.$$

Supongase que tenemos una política óptima $\Pi^* = \{\mu_t^*\}$ para el problema de control óptimo en N etapas. Consideremos el subproblema que consiste en minimizar el costo $J_{\Pi t}(x_t)$ que va del tiempo t al tiempo N . Si suponemos que el estado x_t ocurre con probabilidad positiva cuando usamos la política Π^* , entonces el principio de optimalidad nos dice que $\Pi_t^* = \{\mu_k^*\}_{k=t}^{N-1}$ es óptima para el subproblema, es decir Π_t^* minimiza el costo $J_{\Pi t}(x_t)$.

Introduciremos el algoritmo de Programación Dinámica por medio del siguiente teorema:

TEOREMA 2.1: Sea $J^*(x_0)$ el costo óptimo (3.3,I), es decir,

$$J^*(x_0) = \inf_{\Pi} J_{\Pi}(x_0) \quad (2.2)$$

Entonces $J^*(x_0) = J_0(x_0)$, donde la función J_0 es dada por el siguiente algoritmo, el cual procede hacia atrás en el tiempo, desde el período $N-1$ al período 0.

$$J_N(x_N) = g_N(x_N) \quad (2.3)$$

$$J_t(x_t) = \min_{u_t} E \left\{ g_t(x_t, u_t, w_t) + J_{t+1}[f_t(x_t, u_t, w_t)] \right\} \quad (2.4)$$

para $t=0,1,\dots,N-1$. Además, si $u_t = \mu_t^*(x_t)$ minimiza el lado derecho de (2.4) para cada t y $x_t \in X_t$, entonces la política $\Pi^* = \{\mu_t^*\}_{t=0}^{N-1}$ es óptima.

Demostraremos este teorema, suponiendo que el espacio W_t , $t=0,1,\dots,N-1$ es un conjunto numerable, además, supondremos que el valor esperado en (2.4) existe y es finito para todo $u_t \in U_t(x_t)$ y todo $x_t \in X_t$. De igual manera, el valor esperado de todos los términos en el costo funcional en (3.2,I) es finito y está bien definido para toda política admisible Π .

DEMOSTRACION:

Del hecho de que la medida de probabilidad para w_t solo depende de x_t y u_t y no de $w_0, w_1, \dots, w_{t-1}$, el costo óptimo $J^*(x_0)$ lo podemos expresar:

$$J^*(x_0) = \min_{\{\mu_t\}} E \left\{ g_0[x_0, \mu_0(x_0), w_0] + E \left\{ g_1[x_1, \mu_1(x_1), w_1] + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + E \left\{ g_{N-1}[x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}), w_{N-1}] + g_N(x_N) \right\} \dots \right\} \right\},$$

donde $\mu_t(x_t) \in U_t(x_t)$ para todo t y x_t , y las esperanzas para cada w_t están condicionadas a x_t y $\mu_t(x_t)$.

Iterando los mínimos, (vea Hinderer 1970, Lema 3.2, Cap 1), esta expresión la podemos escribir como:

$$J^*(x_0) = \min_{\mu_0} \left[E \left\{ g_0[x_0, \mu_0(x_0), w_0] + \min_{\mu_1} \left[E \left\{ g_1[x_1, \mu_1(x_1), w_1] + \dots \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \dots + \min_{\mu_{N-1}} \left[E \left\{ g_{N-1}[x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}), w_{N-1}] + g_N(x_N) \right\} \right] \dots \right] \right] \right] \quad (2.5)$$

Por otro lado, sea M el conjunto de todas las funciones $\mu(x)$ tal que $\mu(x) \in U(x)$ para toda x . Entonces para una función F de x , u se tiene que:

$$\min_{\mu \in M} F(x, \mu(x)) = \min_{u \in U(x)} F(x, u)$$

Esta igualdad es fácil de verificar si no se le imponen condiciones de medibilidad a las funciones μ . En caso contrario, se necesitan resultados más fuertes que no se incluyen (ver Bertsekas y Shreve [1978], Pag. 198, Proposición 8.2).

Usando este resultado y sustituyendo (2.3) y (2.4) sucesivamente, la ecuación (2.5) queda expresada como:

$$\begin{aligned} J^*(x) &= \min_{u_0} \left[E \left\{ g_0[x_0, u_0, w_0] + \min_{u_1} \left[E \left\{ g_1[x_1, u_1, w_1] + \dots \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \dots + \min_{u_{N-1}} \left[E \left\{ g_{N-1}[x_{N-1}, u_{N-1}, w_{N-1}] + J_N(x_N) \right\} \right] \dots \right] \right] \right] \\ &= \min_{u_0} \left[E \left\{ g_0[x_0, u_0, w_0] + \min_{u_1} \left[E \left\{ g_1[x_1, u_1, w_1] + \dots \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \min_{u_{N-2}} \left[E \left\{ g_{N-2}[x_{N-2}, u_{N-2}, w_{N-2}] + J_{N-1}[f_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}, w_{N-2})] \right\} \right] \dots \right] \right] \right] \\ &\quad \vdots \\ &= \min_{u_0} \left[E \left\{ g_0(x_0, u_0, w_0) + \min_{u_1} \left[E \left\{ g_1(x_1, u_1, w_1) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + J_2[f_1(x_1, u_1, w_1)] \right\} \right] \right] \right], \\ J^*(x) &= \min_{u_0} \left[E \left\{ g_0(x_0, u_0, w_0) + J_1[f_0(x_0, u_0, w_0)] \right\} \right] = J_0(x_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $J^*(x_0) = J_0(x_0)$. Además, si $\mu_t^*(x_t)$ minimiza el lado derecho de (2.4) para cada x_t y t , por la

igualdad anterior la política $\Pi^* = \{\mu_t^*\}_{t=0}^{N-1}$ nos da el costo mínimo, y así Π^* es óptima. ■

A la ecuación (2.4) se le conoce como Ecuación de Bellman o Ecuación de Programación Dinámica y similarmente el algoritmo en (2.3) y (2.4) es el Algoritmo de Programación Dinámica.

Una formulación alternativa de la ecuación y el algoritmo de Programación Dinámica es la siguiente:

Sea $AC(X_t)$ el espacio de las funciones acotadas definidas de X_t a $\mathbb{R}$. Definimos el operador $T_t: AC(X_t) \rightarrow AC(X_t)$ como:

$$T_t V(x) = \min_{u_t} \left[E \left\{ g_t(x, u_t, w_t) + V(f_t(x, u_t, w_t)) \right\} \right]$$

para cada $x \in X_t$ y $V \in AC(X_t)$, donde $t=0,1,2,\dots,N-1$.

A T_t se le llama operador de optimalidad o de Programación Dinámica. Si aplicamos el operador al costo funcional $J_1^*(x_1)$, por la ecuación (2.4), obtenemos el costo funcional $J_0^*(x_0)$. En general

$$J_t = T_t J_{t+1} \quad \text{para } t=0,1,\dots,N-1 \quad (2.6)$$

y además

$$J_0 = T_0 T_1 T_2 \dots T_{N-1} J_N$$

A la relación (2.6) se le conoce también como ecuación de Programación Dinámica.

Para terminar este capítulo, ilustraremos el algoritmo de Programación Dinámica con un ejemplo.

3. - Problema del Regulador lineal Estocástico.

Existen casos donde se conoce de antemano la trayectoria ideal del proceso, y el problema es encontrar una política tal que la trayectoria generada por ésta, se aproxime o esté lo menos distante a la trayectoria deseada. Al caso en que la trayectoria ideal es el origen se le llama Problema del Regulador Lineal. En

caso contrario se le llama Problema de Rastreo (del ingles Tracking).

El modelo dinámico que aquí consideraremos es un sistema lineal de la forma:

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad t=0,1,2,\dots,N-1 \quad (3.1)$$

donde x_t y u_t son vectores de dimensión n y m respectivamente, y las perturbaciones w_t son vectores aleatorios independientes que no dependen de x_t y u_t . Además, A_t y B_t son matrices dadas con dimensiones apropiadas.

En estos dos tipos de problemas se pide que el índice de funcionamiento mida de cierto modo la "distancia" entre la trayectoria deseada y la que obtendríamos al aplicar una política determinada. Una característica deseable para este índice es que "castigue mucho" a las desviaciones grandes y que "castigue poco" a las desviaciones relativamente pequeñas. Un índice que cumple con estas características es un funcional de costo cuadrático, cuya expresión la podemos dar de la siguiente manera:

Sea $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ una trayectoria dada. Definimos un funcional de costo cuadrático como:

$$J(x_0) = E \left\{ (x_N - \bar{x}_N)^T Q_N (x_N - \bar{x}_N) + \sum_{t=0}^{N-1} [(x_t - \bar{x}_t)^T Q_t (x_t - \bar{x}_t) + u_t^T R_t u_t] \right\}$$

donde para cada t , Q_t es una matriz simétrica semidefinida positiva y R_t simétrica definida positiva. El objetivo es minimizar este costo cuadrático, es decir, minimizar las desviaciones entre la trayectoria "nominal" dada $\bar{x}$ y la trayectoria generada por el controlador.

En nuestro caso resolveremos el problema de regulación, es decir, minimizaremos las desviaciones de los estados respecto al origen $\bar{x} = (0, 0, \dots, 0)$. Además, supondremos que las perturbaciones w_t tienen media cero y segundo momento finito. De esta manera el índice de funcionamiento es:

$$J(x_0) = E \left\{ x_N^T Q_N x_N + \sum_{t=0}^{N-1} (x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t) \right\} \quad (3.2)$$

con la restricción (3.1).

La ecuación de programación dinámica para este caso es:

$$J_N(x_N) = x_N^T Q_N x_N$$

$$J_t(x_t) = \min_{u_t} \left[E \left\{ x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t + J_{t+1}(x_{t+1}) \right\} \right]$$

para $t=0,1,\dots,N-1$.

Aplicando el algoritmo de Programación Dinámica tenemos:

Para $t=N-1$

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \left[E \left\{ x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} + J_N(A_{N-1} x_{N-1} + B_{N-1} u_{N-1} + w_{N-1}) \right\} \right]$$

Usando el hecho de que los w_t tienen media cero, el costo para esta etapa nos queda:

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + \min_{u_{N-1}} \left[u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} + u_{N-1}^T B_{N-1}^T Q_N B_{N-1} u_{N-1} + x_{N-1}^T A_{N-1}^T Q_N A_{N-1} x_{N-1} + 2x_{N-1}^T A_{N-1}^T Q_N B_{N-1} u_{N-1} \right] + E \left[w_{N-1}^T Q_N w_{N-1} \right]$$

Para encontrar el control óptimo correspondiente, diferenciamos esta expresión con respecto a u_{N-1} e igualamos a cero; esto da,

$$R_{N-1} u_{N-1} + B_{N-1}^T Q_N B_{N-1} u_{N-1} + B_{N-1}^T Q_N^T A_{N-1} x_{N-1} = 0$$

De aquí,

$$[R_{N-1} + B_{N-1}^T Q_N B_{N-1}] u_{N-1} = -B_{N-1}^T Q_N^T A_{N-1} x_{N-1}$$

Como R_{N-1} es una matriz definida positiva y $B_{N-1}^T Q_N B_{N-1}$ es semidefinida positiva, la matriz multiplicando a u_{N-1} es definida

positiva, y por lo tanto la podemos invertir. De esta manera,

$$u_{N-1}^* = -[R_{N-1} + B_{N-1}^T Q_{N-1} B_{N-1}]^{-1} B_{N-1}^T Q_{N-1}^T A_{N-1} x_{N-1}$$

Como podemos observar, u_{N-1}^* está en función de x_{N-1} . Sustituyendo u_{N-1}^* en la expresión de J_{N-1} tenemos:

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = x_{N-1}^T K_{N-1} x_{N-1} + E \left\{ w_{N-1}^T Q_N w_{N-1} \right\}$$

donde,

$$K_{N-1} = A_{N-1}^T [Q_{N-1} - Q_{N-1} B_{N-1} (B_{N-1}^T Q_{N-1} B_{N-1} + R_{N-1})^{-1} B_{N-1}^T Q_{N-1}] A_{N-1} + Q_{N-1}$$

Es fácil comprobar que $K_{N-1} = K_{N-1}^T$ y por lo tanto simétrica. Además, para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene,

$$x^T K_{N-1} x = \min_u \left\{ x^T Q_{N-1} x + u^T R_{N-1} u + (A_{N-1} x + B_{N-1} u)^T Q_N (A_{N-1} x + B_{N-1} u) \right\}$$

Como Q_{N-1} , R_{N-1} , y Q_N son definidas positivas, la expresión dentro de las llaves es no negativa. De aquí se sigue que $x^T K_{N-1} x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces K_{N-1} es una matriz semidefinida positiva y J_{N-1} es una función cuadrática semidefinida positiva.

Similarmente podemos obtener el control óptimo para la etapa $t=N-2$ y en este caso el costo toma la forma:

$$J_{N-2}(x_{N-2}) = x_{N-2}^T Q_{N-2} x_{N-2} + \min_{u_{N-2}} \left[u_{N-2}^T R_{N-2} u_{N-2} + u_{N-2}^T B_{N-2}^T K_{N-1} B_{N-2} u_{N-2} + \right. \\ \left. x_{N-2}^T A_{N-2}^T K_{N-1} A_{N-2} x_{N-2} + 2x_{N-2}^T A_{N-2}^T K_{N-1} B_{N-2} u_{N-2} \right] + E \left[w_{N-2}^T K_{N-1} w_{N-2} \right] \\ + E \left[w_{N-1}^T Q_N w_{N-1} \right]$$

Como podemos observar la matriz K_{N-1} hace el papel, en este caso, de la matriz Q_N . Diferenciando J_{N-2} con respecto a u_{N-2} e igualando a cero,

$$R_{N-2} u_{N-2} + B_{N-2}^T K_{N-1} B_{N-2} u_{N-2} + B_{N-2}^T K_{N-1}^T A_{N-2} x_{N-2} = 0$$
 y por los mismos argumentos que en el caso anterior, obtenemos:

$$u_{N-2}^* = -[R_{N-2} + B_{N-2}^T K_{N-1} B_{N-2}]^{-1} B_{N-2}^T K_{N-1}^T A_{N-2} x_{N-2}.$$

Sustituyendo esta expresión en J_{N-2} tenemos,

$$J_{N-2}(x_{N-2}) = x_{N-2}^T K_{N-2} x_{N-2} + E \left\{ w_{N-2}^T K_{N-1} w_{N-2} \right\} + E \left\{ w_{N-1}^T Q_N w_{N-1} \right\}$$

donde,

$$K_{N-2} = A_{N-2}^T [K_{N-1} - K_{N-1} B_{N-2} (B_{N-2}^T K_{N-1} B_{N-2} + R_{N-2})^{-1} B_{N-2}^T K_{N-1}] A_{N-2} + Q_{N-2}$$

En este caso también se tiene que J_{N-2} es cuadrática semidefinida positiva.

Siguiendo de la misma manera, llegamos a que la ley de control óptimo es:

$$\mu_t^*(x_t) = L_t x_t = u_t \quad \text{para todo } t=0,1,\dots,N-1,$$

donde $L_t = -(B_{t,t+1}^T K_{t+1} B_t + R_t)^{-1} B_{t,t+1}^T K_{t+1} A_t$, y las matrices K_t son generadas por el siguiente algoritmo:

$$K_N = Q_N$$

$$K_t = A_t^T [K_{t+1} - K_{t+1} B_{t,t+1} (B_{t,t+1}^T K_{t+1} B_t + R_t)^{-1} B_{t,t+1}^T K_{t+1}] A_t + Q_t$$

De esta manera el costo óptimo total es

$$J^*(x_0) = J_0(x_0) = x_0^T K_0 x_0 + \sum_{t=0}^{N-1} E \left\{ w_t^T K_{t+1} w_t \right\}$$

CAPITULO III

CONTROL DE RESERVORIOS

1. - Introducción.
2. - Problema de la Capacidad Minimax.
 - 2.1. - Caso determinista.
 - 2.2. - Caso estocástico
3. - Control Optimo de Reservorios.

1. - Introduccion.

En este capítulo, trataremos el problema de la capacidad Minimax, el cual consiste en encontrar la capacidad óptima de un reservorio. Además abordaremos el problema de operación óptima y discutiremos su relación con el problema de inventario. Resolveremos el problema de operación utilizando la técnica de Programación Dinámica. El punto de partida para este problema será el siguiente:

Supóngase que se desea construir una presa con el objeto de aprovechar las aguas de un río para uso doméstico o para la agricultura. Además, supóngase que disponemos de estudios que nos permiten conocer completamente las características estocásticas del flujo del río que alimenta a la presa. Aparte, se registran entradas adicionales de agua durante la época de lluvias, además de perdidas por evaporación y escurrimiento a lo largo de cierto período de tiempo. Por otro lado, tenemos que determinar la cantidad de agua que debemos extraer de la presa cada determinado tiempo para satisfacer la demanda en función de la información disponible, pero no excederla para no causar inundaciones. También debemos evitar que el nivel de agua baje demasiado, ya que la presa no podría utilizarse para fines recreativos como la navegación y además sería perjudicial para la sobrevivencia de animales. De igual manera debemos evitar que el nivel suba demasiado para no correr el riesgo de un derrame.

2.- Problema de la Capacidad Minimax.

Resulta natural decir que la construcción del reservorio debe ocasionar el menor costo posible, pero satisfaciendo objetivos ya planteados. De esta manera, tenemos que calcular la capacidad del reservorio mas pequeña, tal que le dé cabida a todo el flujo de agua por entrar y que además se pueda satisfacer la demanda.

Por facilidad y para una mejor comprensión de este problema, lo mostraremos primeramente para el caso determinista, y luego daremos la versión para el caso estocástico.

2.1.- Caso determinista.

Definamos primeramente las siguientes variables:

- s_t : Cantidad de agua almacenada en el reservorio al final del período t .
- w_t : Flujo de entrada en el período t , el cual suponemos que se ha estimado con suficiente precisión, y por tanto es conocido.
- u_t : Cantidad de agua liberada del reservorio durante el período t .

Si despreciamos los efectos de evaporación y escurrimiento de agua, la dinámica del sistema sería:

$$s_t = s_{t-1} + w_t - u_t \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) no es válida si su lado derecho excede de la capacidad B del reservorio, entonces tenemos que:

$$s_t = \min \{B, s_{t-1} + w_t - u_t\} \quad (2.2)$$

De aquí tenemos que el agua se derrama si:

$$\max \{0, s_{t-1} + w_t - u_t - B\} = s_{t-1} + w_t - u_t - B$$

En todo lo que resta del capítulo, usaremos $(\alpha)^+ = \max \{0, \alpha\}$.

Como no podemos liberar más agua de la que existe almacenada en el reservorio, tenemos las siguientes restricciones:

$$0 \leq s_t \leq B \quad 0 \leq u_t \leq s_{t-1} + w_t \quad (2.3)$$

Si además se nos ha especificado el almacenaje mínimo de agua m , y la mínima y máxima cantidad de agua por liberar q y f respectivamente, tenemos las siguientes restricciones:

$$m \leq s_t, \quad q \leq u_t \leq f \quad (2.4)$$

Nuestro objetivo es determinar la capacidad mínima B del reservorio y una política Π de liberación de caudales para N períodos, de manera que nos permita operar sin derrames y sin violar las restricciones (2.1), (2.3) y (2.4).

Vamos a suponer que existe al menos una política admisible, esto es, que satisface las restricciones antes señaladas. Sea $\Pi = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ una política admisible y sea $s_0, s_1, \dots, s_N$ la trayectoria del sistema generada por Π . Para un s_0 dado, se define:

$$B(s_0, \Pi) = \max \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$$

y

$$B(s_0) = \min_{\Pi} B(s_0, \Pi)$$

Entonces el problema de la capacidad Minimax consiste en encontrar una política Π^* , que llamaremos Minimax, tal que:

$$B(s_0) = \max \{s_0^*, s_1^*, \dots, s_N^*\} \quad (2.5)$$

donde $s_0^* = s_0, s_1^*, \dots, s_N^*$ es la trayectoria generada por Π^* .

Resolveremos el problema considerando que siempre vamos a liberar la máxima cantidad de agua posible, pero sin violar las restricciones. Así, la política tomaría la siguiente forma:

$$u_t = \min \{f, s_{t-1} + w_t - m\} \quad t=1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

En el teorema siguiente demostramos que efectivamente la política definida por (2.6) es Minimax.

TEOREMA 2.1: Supongase que $w_t \geq q$ para todo $t=1,2,\dots,N$. Entonces la política (2.6) es Minimax bajo las restricciones (2.1), (2.3) y (2.4).

DEMOSTRACION:

Sea $s'_1, s'_2, \dots, s'_N$ los niveles de almacenaje generados por alguna otra política $\Pi = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_{N-1}\}$. Entoces tenemos que:

$$s'_t = s'_{t-1} + w_t - u'_t \quad t=1,2,\dots,N$$

y por otra parte, cuando se utiliza la política (2.6),

$$s_t = s_{t-1} + w_t - \min \{f, s_{t-1} + w_t - m\} \quad t=1,2,\dots,N \quad (2.7)$$

Para (2.7) existen dos posibilidades:

- i) $s_t = m$
- ii) $s_t = s_{t-1} + w_t - f$

El inciso i) implica que $s_t \leq s'_t$ para toda t . Probaremos recursivamente que esto mismo ocurre si se cumple ii).

Primeramente $f \geq u'_t$ para toda t . De esta manera, como $s_0 = s'_0$, entonces, $s_0 + w_1 - f \leq s'_0 + w_1 - u'_1$ y así $s_1 \leq s'_1$. De esta última desigualdad se tiene que $s_1 + w_2 - f \leq s'_1 + w_2 - u'_2$ y por lo tanto $s_2 \leq s'_2$. Siguiendo de la misma manera hasta el tiempo N , llegamos a que $s_t \leq s'_t$ para toda t , y de esta manera el teorema queda probado. ■

Supongamos ahora que las restricciones dependen del tiempo, es decir,

$$m_t \leq s_t \quad \text{y} \quad q_t \leq u_t \leq f_t \quad \text{para } t=1,2,\dots,N \quad (2.8)$$

y además

$$w_t < q_t \quad (2.9)$$

al menos en un período t .

Bajo esta última suposición, no podemos asegurar que la

política (2.6) sea admisible, ya que puede llegar el momento en que no tengamos agua que liberar.

A continuación, mostraremos que existe una política Minimax bajo las restricciones (2.8) y (2.9).

Debido a la restricción (2.9), podemos correr el riesgo de escasez de agua en periodos posteriores a t , lo cual nos obliga a detener agua en cada etapa, además del almacenaje mínimo.

En el periodo t , es claro que debemos liberar el mínimo entre f_t y $s_{t-1} + w_t - m_t$ menos un aprovisionamiento de agua A_t (agua detenida). De esta manera, $L_t = m_t + A_t$ es el almacenaje mínimo en el periodo t que nos permite satisfacer $u_\tau \geq q_\tau$ y $s_\tau \geq m_\tau$ para $\tau > t$. Encontraremos la expresión de A_t recursivamente.

Puesto que son N periodos, $A_N = 0$ (no hay tiempos futuros) y $L_N = m_N$. Para el periodo $N-1$, tenemos que considerar la cantidad $m_N - m_{N-1}$ la cual nos asegura el almacenaje mínimo al tiempo N , el flujo w_N y la liberación mínima q_N . De esta manera

$$A_{N-1} = (m_N + q_N - w_N - m_{N-1})^+ \text{ y } L_{N-1} = m_{N-1} + A_{N-1}$$

Siguiendo con el mismo razonamiento, para el tiempo $N-2$ necesitamos asegurar el almacenaje mínimo en los tiempos futuros $\tau = N-1, N$, esto es, $L_{N-1} - m_{N-2}$ y entonces:

$$A_{N-2} = (L_{N-1} + q_{N-1} - w_{N-1} - m_{N-2})^+ \text{ y } L_{N-2} = m_{N-2} + A_{N-2}$$

En general,

$$A_t = (L_{t+1} + q_{t+1} - w_{t+1} - m_t)^+$$

y

$$L_N = m_N, \quad L_t = m_t + (L_{t+1} + q_{t+1} - w_{t+1} - m_t)^+ \quad (2.10)$$

Ahora, bajo estas condiciones, la política de liberar la máxima cantidad de agua, toma la forma:

$$u_t = \min \{f_t, s_{t-1} + w_t - L_t\} \quad (2.11)$$

TEOREMA 2.2: Supóngase que $w_t < q_t$ en al menos un periodo t . Entonces (2.11) es Minimax bajo las restricciones (2.8).

La demostración de este resultado es similar a la del teorema (2.1).

2.2.- Caso estocástico.

Primeramente observemos que u_t en (2.6) no depende de ningún dato posterior a t . Caso contrario es el de la política (2.11) donde el término L_t hace que u_t sí dependa de eventos posteriores a t . Se puede verificar que si tenemos las restricciones (2.8), entonces $w_t \geq q_t$ y $m_t \geq m_{t+1}$ para toda t , implican que:

$$u_t = \min \{f_t, s_{t-1} + w_t - m_t\} \quad (2.12)$$

es Minimax. Esta política no depende de eventos posteriores a t , por la hipótesis $m_t \geq m_{t+1}$ y $w_t \geq q_t$ para todo t . Este hecho nos permitirá dar la versión estocástica del Problema de la Capacidad Minimax.

Consideremos el proceso estocástico $\{Q_t, F_t, M_t, : t=0,1,\dots,N\}$ el cual determina a (q_t, f_t, m_t) . Ahora vamos a tener que las w_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) y los volúmenes de almacenaje $S_1, S_2, \dots, S_N$ son variables aleatorias controladas. Ahora tendremos que el índice de funcionamiento es:

$$B(S_0, \Pi) = \max \{E S_0, E S_1, \dots, E S_N\}$$

y definimos

$$B(S_0) = \min_{\Pi} B(S_0, \Pi)$$

En este caso tenemos que encontrar una política Π^* que minimice la cantidad máxima esperada de agua, es decir,

$$B(S_0) = B(S_0, \Pi^*)$$

De igual manera vamos a tener que:

$$S_t = S_{t-1} + w_t - u_t \quad t=1,2,\dots,N \quad (2.13)$$

Los valores tomados por S_{t-1} , M_t , Q_t , F_t y el del flujo de entrada son conocidos, cuando el control u_t es seleccionado. Supongase que:

$$P\{w_t \geq Q_t, M_t \geq M_{t+1} \mid t=0,1,\dots,N-1\}=1 \quad (2.14)$$

Esta es la versión probabilística de $w_t \geq q_t$ y $m_t \geq m_{t+1}$ en el caso determinista.

Para que exista una regla de decisión admisible, es necesario suponer que la condición (2.14) se satisface y además que:

$$P\{M_t \leq S_t, Q_t \leq u_t \leq F_t, \mid t=0,1,\dots,N\}=1 \quad (2.15)$$

Denotemos por Δ al conjunto de políticas que satisfacen (2.15). Si suponemos que se cumple (2.14) y (2.15), entonces, la optimalidad de (2.12) implica que:

$$u_t^* = \min \{F_t, S_{t-1}^* + w_t - M_t\} \quad (2.16)$$

es Minimax con probabilidad 1, donde $S_0^* = S_0$ y $S_t^* = S_{t-1}^* + w_t - u_t^*$ para todo t . Esto es,

$$B(S_0, \Pi^*) \leq B(S_0, \Pi)$$

para toda política admisible Π y donde $\Pi^* = \{u_t^*\}_{t=1}^N$. Esto se da, por el hecho de que $\max S_t^* \leq \max S_t$ para toda t , con probabilidad 1; y de esta manera $\max\{E S_0^*, \dots, E S_N^*\} \leq \max\{E S_0, \dots, E S_N\}$.

La ecuación (2.16) es la versión probabilista de (2.6), y así, dentro del conjunto de reglas Δ que satisfacen (2.15) la que obtenemos por (2.16) minimiza la cantidad máxima esperada de agua almacenada.

A continuación daremos otro tipo de restricciones aparentemente más fuertes y mostraremos que con éstas, la política dada por (2.16) sigue siendo Minimax.

Sea H_t el espacio de historias del proceso hasta el tiempo t ; esto es:

$$H_t = (S_0, Q_1, F_1, M_1, U_1, w_1, S_1, Q_2, \dots, S_{t-1}, Q_t, F_t, M_t)$$

donde U_t , $t=0,1,\dots,N-1$, es el proceso de control. En general, tenemos que una política depende de un resultado $h_t \in H_t$.

Supondremos que en lugar de (2.15) tenemos:

$$P\{m_t \leq S_t = s_{t-1} + w_t - \mu_t(h_t), q_t \leq \mu_t(h_t) \leq f_t\} \geq \alpha_t \quad (2.17)$$

para todo t , h_t y $0 < \alpha_t < 1$, $t=0,1,\dots,N$ y donde $\mu_t(h_t) = u_t$.

El siguiente teorema nos da la optimalidad de u_t^* en (2.16) para el problema de la Capacidad Minimax con restricciones (2.17).

TEOREMA 2.3: Supongamos que (2.14) y (2.17) se cumplen. Sea $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ cualquier política y $S_1, S_2, \dots, S_N$ los niveles de almacenaje generados por dicha política. Entonces:

$$\max_t \{S_t^*\} \leq \max_t \{S_t\}$$

con probabilidad 1, donde $\{S_t^*\}$ es el proceso generado por (2.16).

DEMOSTRACION:

La demostración se hará considerando dos casos:

I. - Si $\mu_t(h_t) \leq \mu_t^*(h_t)$ para toda h_t y t .

Empezando con $s_0 = s_0^*$, se tiene que $s_0 + w_1 - \mu_1(h_1) \geq s_0^* + w_1 - \mu_1^*(h_1)$ y así, $s_1 \geq s_1^*$. De igual manera, por esta última desigualdad se obtiene $s_2 \geq s_2^*$. En general obtenemos que $s_t \geq s_t^*$ para todo t y por lo tanto:

$$P [\max_t \{S_t^*\} \leq \max_t \{S_t\}] = 1$$

II. - Existen un tiempo t y una historia h_t tal que $\mu_t(h_t) > \mu_t^*(h_t)$, y sea t el menor tiempo para el que se cumple tal desigualdad. Por (2.16), tenemos que $\mu_t(h_t) > \min\{f_t, s_{t-1} + w_t - m_t\}$. Si:

i) $\mu_t(h_t) > f_t$, μ_t^* no es admisible (no podemos descargar mas de lo permitido).

ii) $\mu_t(h_t) > s_{t-1} + w_t - m_t = s_{t-1} + w_t - m_t$ se tiene que:

$m_t > s_{t-1} + w_t - \mu_t(h_t) = s_t$ casi seguramente, es decir, el almacenaje mínimo m_t al tiempo t es mayor que el almacenaje al tiempo t . Por lo tanto:

$$P [M_t \leq S_t, Q_t \leq \mu_t \leq F_t / h_t] = P [m_t \leq S_t = s_{t-1} + w_t - \mu_t(h_t) \leq f_t] = 0$$

lo cual contradice a (2.17), y entonces μ_t no es admisible.

Por lo tanto, la única posibilidad donde μ_t es admisible es en el caso I, y por (2.14) μ_t^* es óptima para el problema de la Capacidad Minimax estocástico, aún con las restricciones (2.17). ■

3.- Control Optimo de Reservorios.

El problema que abordaremos en esta sección es encontrar la regla óptima de operación para el reservorio. Obtendremos la forma explícita de la política óptima que determina la cantidad de agua por liberar en cada etapa con un costo mínimo.

Consideremos el caso general de I reservorios, teniendo capacidades $B^1, B^2, \dots, B^I$ respectivamente y hagamos $B = (B^1, B^2, \dots, B^I)$.

Siendo congruentes con la notación, definamos las siguientes variables:

s_t^i : Cantidad de agua almacenada en el reservorio i al final del período t.

u_t^i : Cantidad de agua liberada en el reservorio i durante el período t.

w_t^i : Flujo de entrada (aleatorio) al reservorio i durante el período t.

Analogamente, sean $s_t = (s_t^1, s_t^2, \dots, s_t^I)$, $u_t = (u_t^1, u_t^2, \dots, u_t^I)$ y $w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^I)$. Entonces, la ecuación (2.2) para el i-ésimo reservorio la podemos expresar como:

$$s_t^i = \min \{B^i, s_{t-1}^i + w_t^i - u_t^i\}$$

Como s_t^i $i=1,2,\dots,I$, son las componentes del vector s_t , entonces s_t lo podemos denotar como:

$$s_t = \min \{B, s_{t-1} + w_t - u_t\} \quad (3.1)$$

donde el mínimo es tomado componente a componente.

Definamos la variable $a_t^i = s_{t-1}^i - u_t^i$. Esta variable nos da la cantidad de agua que queda en el reservorio i al tiempo t después

de descargar, pero antes que entre el flujo. De igual manera, sea $a_t = (a_t^1, a_t^2, \dots, a_t^I)$. Con esta nueva variable la ecuación (3.1) resulta:

$$s_t = \min \{B, a_t + w_t\} \quad (3.2)$$

Supondremos que el agua no puede ser bombeada de un reservorio a otro, de manera que las restricciones son:

$$0 \leq u_t \leq s_{t-1} \quad (3.3, a)$$

o equivalentemente,

$$0 \leq a_t \leq s_{t-1} \quad (3.3, b)$$

donde cada uno de los vectores se compara componente a componente. En las conclusiones finales del trabajo, enunciaremos otro tipo de restricciones posibles.

De aquí en adelante supondremos que los vectores aleatorios $w_1, w_2, \dots, w_N$ son i.i.d y además están acotados.

Llamaremos bordo libre del reservorio a su capacidad ociosa, es decir, el volumen del reservorio que no contiene agua.

A continuación, daremos una relación entre el nivel de agua del reservorio y su bordo libre. Esta relación es 1-1 y está dada por las siguientes ecuaciones:

a) $x_t^i = B^i - s_{t-1}^i$. La variable x_t^i representa el bordo libre en el reservorio i al principio del periodo t . Definamos $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^I)$, y con esto $x_t = B - s_{t-1}$.

b) $y_t^i = B^i - a_t^i$. Esta variable nos da el bordo libre después de la liberación u_t^i pero antes que entre el flujo, y de igual modo escribimos $y_t = (y_t^1, y_t^2, \dots, y_t^I)$, $y_t = B - a_t$.

De estas dos ecuaciones tenemos que:

$$y_t^i = B^i - s_{t-1}^i + u_t^i = x_t^i + u_t^i \quad (3.4)$$

El siguiente resultado nos da una expresión equivalente de la ecuación (3.2) junto con la restricción (3.3,b).

TEOREMA 3.1: Las expresiones $s_t = \min \{B, a_t + w_t\}$, $0 \leq a_t \leq s_{t-1}$ son equivalentes a:

$$x_{t+1} = (y_t - w_t)^+ \quad (3.5)$$

$$x_t \leq y_t \leq B \quad (3.6)$$

respectivamente, para $t=0,1,\dots,N-1$.

DEMOSTRACION:

De a) tenemos que $x_{t+1} = B - s_t$, y así $s_t = B$ es equivalente a $x_{t+1} = 0$ por el hecho de que $y_t - w_t < 0$. Dicho en palabras: que los reservorios al tiempo t estén a su plena capacidad, es equivalente a que el bordo libre sea cero, y esto pasa cuando $y_t < w_t$.

Por otra parte, tenemos que $s_t = a_t + w_t$ si y sólo si $x_{t+1} = B - a_t - w_t$ y esto es equivalente a que $x_{t+1} = y_t - w_t > 0$ por el hecho de que $B > a_t + w_t$.

Con esto tenemos que:

$$s_t = \min \{B, a_t + w_t\} \text{ si y solo si } x_{t+1} = \max \{0, y_t - w_t\}$$

De b) tenemos que $a_t = B - y_t$, y así $0 \leq B - y_t \leq s_{t-1}$ es equivalente a $B \geq y_t$. Por a) y b), $s_{t-1} = B - x_t$ y $a_t = B - y_t$, entonces $0 \leq B - y_t \leq B - x_t$ si y solo si $y_t \geq x_t$. Por lo tanto:

$$0 \leq a_t \leq s_{t-1} \text{ si y sólo si } x_t \leq y_t \leq B$$

y el teorema está demostrado ■

La transformación dada por a) y b) en la página anterior, nos lleva a un modelo de producción-inventario de I artículos, interpretando a las variables de la siguiente manera:

x_t^i : Cantidad disponible del artículo i al principio del período t .

u_t^i : Cantidad ordenada del artículo i al principio del período t .

w_t^i : Demanda del artículo i durante el período t .

B^i : Capacidad de inventario para el artículo i .

Los vectores x_t , u_t , w_t y B nos darán información del comportamiento de los I artículos y la dinámica del sistema estará dada por (3.5) con restricciones (3.6). Dicho de otra manera, el bordo libre de cada reservorio al principio del período t , x_t^i , representa la cantidad disponible del artículo i para satisfacer la demanda w_t^i . Por otro lado, cuando se libera agua, el bordo libre aumenta, así, cuando se ordena cierta cantidad del producto, la existencia aumenta. Por lo tanto, resolver un problema de inventario nos lleva a encontrar las políticas óptimas para un problema de control de reservorios, solo que ahora vamos a suponer que no hay pérdida por exceso del artículo al final del período t .

El significado en el modelo de inventario de la suposición de que el agua no puede ser bombeada de un reservorio a otro, es que estamos suponiendo que son I artículos diferentes, en el sentido de que si se acaba la existencia de un determinado artículo no puede ser reemplazado por otro. Resolveremos el problema considerando un reservorio o un solo artículo y por lo tanto suprimiremos el superíndice i .

Los costos que intervienen al tiempo t en el modelo de operación de reservorios serán, primeramente, el costo que ocasiona la cantidad de agua que liberamos, y lo denotaremos por cu_t donde c es el costo por unidad de volumen. Otro costo será una función H del bordo libre, esto es: si $x_{t+1} < 0$, existe un derrame de agua con un costo px_{t+1} , donde p es el costo por unidad de volumen. Pediremos que c y p sean números reales tales que $c > 0$ y $p > c$. La función H queda expresada como:

$$H(x_{t+1}) = p (x_{t+1})^- \quad (3.7)$$

donde $(\alpha)^- = \max\{0, -\alpha\}$ y la expresión del costo para el período t es:

$$cu_t + p (x_{t+1})^-$$

En el inventario, el costo por unidad ordenada sería c y por la demanda no satisfecha ($x_{t+1} < 0$) sería $p x_{t+1}$.

De esta manera la función que minimizaremos es:

$$J_{\Pi}(x_0) = E \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} cu_t + H(x_t + \mu_t \alpha_t - w_t) \right\}$$

bajo todas las políticas admisibles Π tal que $\mu_t \alpha_t = u_t \geq 0$ y donde x_0 es conocido. Aplicaremos la técnica de Programación Dinámica para dar solución a este problema. Primeramente tenemos que:

$$J_t(x_t) = \min_{u_t} E \left[cu_t + p (x_{t+1})^- + J_{t+1}(x_{t+1}) \right] = \min_{u_t} \left[cu_t + E \left\{ p (x_{t+1})^- \right\} + E \left\{ J_{t+1}(x_t + u_t - w_t) \right\} \right]$$

donde el mínimo se toma en $u_t \geq 0$.

Sea $L(y) = p (w_t - y)^+$. Esta función es convexa (ver demostración al final de la sección) y además, como las w_t son i.i.d., no depende de t . La ecuación de Programación Dinámica para este problema es:

$$J_N(x_N) = 0 \quad (3.8)$$

$$J_t(x_t) = \min_{u_t} \left[cu_t + L(x_t + u_t) + E \left\{ J_{t+1}(x_t + u_t - w_t) \right\} \right] \quad (3.9)$$

para $t=0, 1, \dots, N-1$.

Por (3.4), tenemos que $u_t = y_t - x_t$ y como $u_t \geq 0$, entonces $y_t \geq x_t$. Por lo tanto, la ecuación (3.9) queda:

$$J_t(x_t) = \min_{y_t \geq x_t} \left[cy_t + L(y_t) + E \left\{ J_{t+1}(y_t - w_t) \right\} \right] - cx_t \quad (3.10)$$

Definamos,

$$G_t(y_t) = cy_t + L(y_t) + E_{w_t} \left\{ J_{t+1}(y_t - w_t) \right\}$$

Como podemos observar, el mínimo en la ecuación (3.10) es tomado con respecto a las variables y_t , por lo tanto, basta encontrar el mínimo de la función $G_t(y)$ para obtener la solución.

Supongamos por el momento que $J_{t+1}(y-w_t)$ es convexa para todo t , y por lo tanto también lo es su valor esperado. Entonces, por la convexidad de $L(y)$, la función $G_t(y)$ es convexa para todo t .

Sea z_t el mínimo de G_t , es decir, el óptimo que tiene la forma de un $x_t + u_t$ que nos da la existencia en el período t antes de vender. A continuación veremos como es la forma de la política óptima. Primeramente, si la existencia x_t en el período t , es menor que la existencia óptima z_t , entonces hay que ordenar hasta llegar a z_t . Esto es, si $z_t > x_t$, tenemos que ordenar $z_t - x_t$. Por otro lado, si la existencia x_t es mayor que z_t no hay que ordenar. Entonces nuestra política óptima está dada como:

$$u_t^* = \mu_t^*(x_t) = \begin{cases} z_t - x_t & \text{si } z_t > x_t \\ 0 & \text{si } z_t \leq x_t \end{cases} \quad (3.11)$$

Ⓔ

Por lo tanto, basta encontrar la sucesión $\{z_t\}_{t=0}^{N-1}$ para obtener la política óptima.

Para poder afirmar que la política dada en (3.11) es óptima, tenemos que mostrar que las funciones J_t son convexas y en consecuencia también G_t para toda t . Además, mostraremos que se satisfacen las propiedades

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} G_t(y) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} J_{t+1}(y) = \infty$$

para todo t , las cuales son suficientes para garantizar la existencia de los mínimos para las funciones G_t . La demostración se efectúa en forma recursiva.

Para la etapa $N-1$, como $J_N(x_N) = 0$, entonces $G_{N-1}(y) = cy + L(y)$ es convexa. Por otra parte, si $y < 0$, entonces $L(y) = p[E(w) - y]$ y de aquí que $L'(y) = -p$. De la suposición de que las w_t están acotadas, existe una cota M . Si $y > M > 0$, donde $w < M$, entonces $L(y) = 0$ y así $L'(y) = 0$. De aquí tenemos que:

$$G'_{N-1}(y) = c + L'(y) = \begin{cases} c - p & \text{si } y < 0 \\ c & \text{si } y > M > 0 \end{cases}$$

Como $p > c > 0$, entonces $c-p < 0$ y por lo tanto:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} G_{N-1}(y) = \infty$$

De esta manera, puesto que G_{N-1} es convexa, existe z_{N-1} que la minimiza, y la regla de decisión para el tiempo $N-1$ estará dada por:

$$\mu_{N-1}^*(x_{N-1}) = \begin{cases} z_{N-1} - x_{N-1} & \text{si } x_{N-1} < z_{N-1} \\ 0 & \text{si } x_{N-1} \geq z_{N-1} \end{cases}$$

Por la ecuación de Programación Dinámica el costo para este período es:

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = \begin{cases} c(z_{N-1} - x_{N-1}) + L(z_{N-1}) & \text{si } x_{N-1} < z_{N-1} \\ L(x_{N-1}) & \text{si } x_{N-1} \geq z_{N-1} \end{cases}$$

Veamos que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} J_{N-1}(y) = \infty$. Primero tenemos que:

$$J'_{N-1}(x_{N-1}) = \begin{cases} -c & \text{si } x_{N-1} < z_{N-1} \\ L'_+(x_{N-1}) & \text{si } x_{N-1} \geq z_{N-1} \end{cases}$$

Entonces basta ver que $-c < L'_+(x_{N-1})$ donde L'_+ es la derivada de la función L por la derecha. De la convexidad de G_{N-1} y la existencia de su mínimo z_{N-1} , tenemos que:

$$G'_{N-1}(x_{N-1}) = c + L'_+(x_{N-1}) > 0$$

Entonces $L'_+(x_{N-1}) > -c$. Por lo tanto $\lim_{|y| \rightarrow \infty} J_{N-1} = \infty$ y además J_{N-1} es convexa.

Para el período $N-2$ tenemos que

$$G_{N-2}^*(y) = cy + L(y) + E[J_{N-1}(y - w_{N-2})]$$

Por la convexidad de las funciones L y J_{N-1} , G_{N-2} es convexa, y por los mismos argumentos del caso anterior se tiene que:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} G_{N-2}(y) = \infty$$

Por lo tanto, existe un z_{N-2} que minimiza a $G_{N-2}(y)$, y la decisión óptima está dada como:

$$\mu_{N-2}^*(x_{N-2}) = \begin{cases} z_{N-2} - x_{N-2} & \text{si } x_{N-2} < z_{N-2} \\ 0 & \text{si } x_{N-2} \geq z_{N-2} \end{cases}$$

Por la ecuación de Programación Dinámica tenemos que:

$$J_{N-2}(x_{N-2}) = \begin{cases} c(z_{N-2} - x_{N-2}) + L(z_{N-2}) + E[J_{N-1}(z_{N-2} - w_{N-2})] & \text{si } x_{N-2} < z_{N-2} \\ L(x_{N-2}) + E[J_{N-1}(x_{N-2} - w_{N-2})] & \text{si } x_{N-2} \geq z_{N-2} \end{cases}$$

Ahora probaremos que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} J_{N-2}(y) = \infty$. De la misma manera que el caso anterior tenemos que:

$$J'_{N-2}(x_{N-2}) = \begin{cases} -c & \text{si } x_{N-2} < z_{N-2} \\ L'_+(x_{N-2}) + (E[J_{N-1}(x_{N-2} - w_{N-2})])'_+ & \text{si } x_{N-2} \geq z_{N-2} \end{cases}$$

Por la convexidad de G_{N-2} y la existencia de su mínimo z_{N-2} tenemos que:

$$G_{N-2}^+(x_{N-2}) = c + L'_+(x_{N-2}) + (E[J_{N-1}(x_{N-2} - w_{N-2})])'_+ > 0$$

Entonces $-c < L'_+(x_{N-2}) + (E[J_{N-1}(x_{N-2} - w_{N-2})])'_+$ y por lo tanto $\lim_{|y| \rightarrow \infty} J_{N-2}(y) = \infty$ y J_{N-2} es convexa.

Siguiendo de la misma manera, llegamos a que:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} G_t(y) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} J_{t+1}(y) = \infty$$

para $t=0,1,\dots,N-1$, y la política óptima está dada por (3.11) y el costo por:

$$J_t(x_t) = \begin{cases} c(z_t - x_t) + L(z_t) + E[J_{t+1}(z_t - w_t)] & \text{si } x_t < z_t \\ L(x_t) + E[J_{t+1}(x_t - w_t)] & \text{si } x_t \geq z_t \end{cases}$$

donde z_t minimiza a $G_t(y) = cy + L(y) + E[J_{t+1}(y - w_t)]$.

Siguiendo este procedimiento encontramos la política óptima

de liberación de agua bajo las restricciones (3.6), las cuales son equivalentes a $0 \leq a_t \leq s_{t-1}$ por el Teorema 3.1.

Para concluir, demostraremos la convexidad de $L(y) = pE(w_t - y)^+$. Primeramente tenemos que:

$$\begin{aligned} tL(y_1) + (1-t)L(y_2) &= tp E (w_t - y_1)^+ + (1-t)p E (w_t - y_2)^+ = \\ &= p E \left\{ (tw_t - ty_1)^+ + (w_t - tw_t + ty_2 - y_2)^+ \right\} \end{aligned}$$

Por las propiedades del máximo se tiene la desigualdad:

$$\begin{aligned} tL(y_1) + (1-t)L(y_2) &\geq p E (w_t - ty_1 + ty_2 - y_2)^+ = p E (w_t - (ty_1 + (1-t)y_2))^+ = \\ &= L(ty_1 + (1-t)y_2). \end{aligned}$$

□

CONCLUSIONES

En este trabajo se revisaron algunos elementos de la teoría de control óptimo estocástico en el caso de tiempo discreto. Se formuló el problema de control óptimo y se propuso la técnica de Programación Dinámica para resolverlo. Se dieron algunas aplicaciones en control de reservorios. Primeramente se resolvió el Problema de la Capacidad Minimax, el cual nos da la capacidad óptima del reservorio. Seguidamente se abordó el problema de operación óptima apoyandonos en la analogía de este problema con el de inventarios y se resolvió aplicando la técnica de Programación Dinámica.

En el desarrollo de estos dos problemas, la dinámica del sistema está dada por la ecuación:

$$s_t = \min \{B, s_{t-1} + w_t - u_t\} \quad t=1,2,\dots,N$$

Esta ecuación nos da una buena aproximación a la dinámica real del sistema, en presas o reservorios donde el área de la superficie no varía significativamente con el volumen de agua almacenada. De esta manera, los efectos de evaporación y escurrimiento podrían considerarse como independientes del almacenaje s_t y así, la variable w_t representa el flujo de entrada neto. En caso contrario, se tienen que considerar variables que nos midan, de cierto modo, dichos fenómenos los cuales estarán en función de s_t , y este hecho obviamente dificultaría las cosas.

El problema de operación se resolvió para el caso particular de un reservorio (o un artículo en el caso de inventario). Para el caso general de I reservorios (I artículos), necesitamos incluir los siguientes vectores: $c=(c_1, c_2, \dots, c_I)$, $p=(p_1, p_2, \dots, p_I)$, donde cada componente $i=1,2,\dots,I$, de los vectores representa los costos ya especificados anteriormente del reservorio (artículo) correspondiente. Con esto, el costo para el período t quedaría expresado:

$$p \cdot (x_{t+1}) + c \cdot u_t$$

donde $x_{t+1} = (x_{t+1}^1, \dots, x_{t+1}^I)$, $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^I)$ y la multiplicación es el producto punto entre los vectores.

Además, se consideró que no se podía bombear agua de un reservorio a otro y la restricción para este caso es :

$$0 \leq u_t \leq s_{t-1} \quad \text{o} \quad 0 \leq a_t \leq s_{t-1}$$

donde $u_t = (u_t^1, u_t^2, \dots, u_t^I)$, $s_{t-1} = (s_{t-1}^1, s_{t-1}^2, \dots, s_{t-1}^I)$, $a_t = (a_t^1, \dots, a_t^I)$ y la comparación se hace componente a componente.

Si suponemos que se puede bombear agua durante el mismo período, la restricción sería:

$$\sum_t s_{t-1}^i \geq \sum_t a_t^i, \quad 0 \leq a_t \leq B$$

donde $B = (B^1, \dots, B^I)$. La Figura 1 nos muestra una configuración para el caso $I=10$.

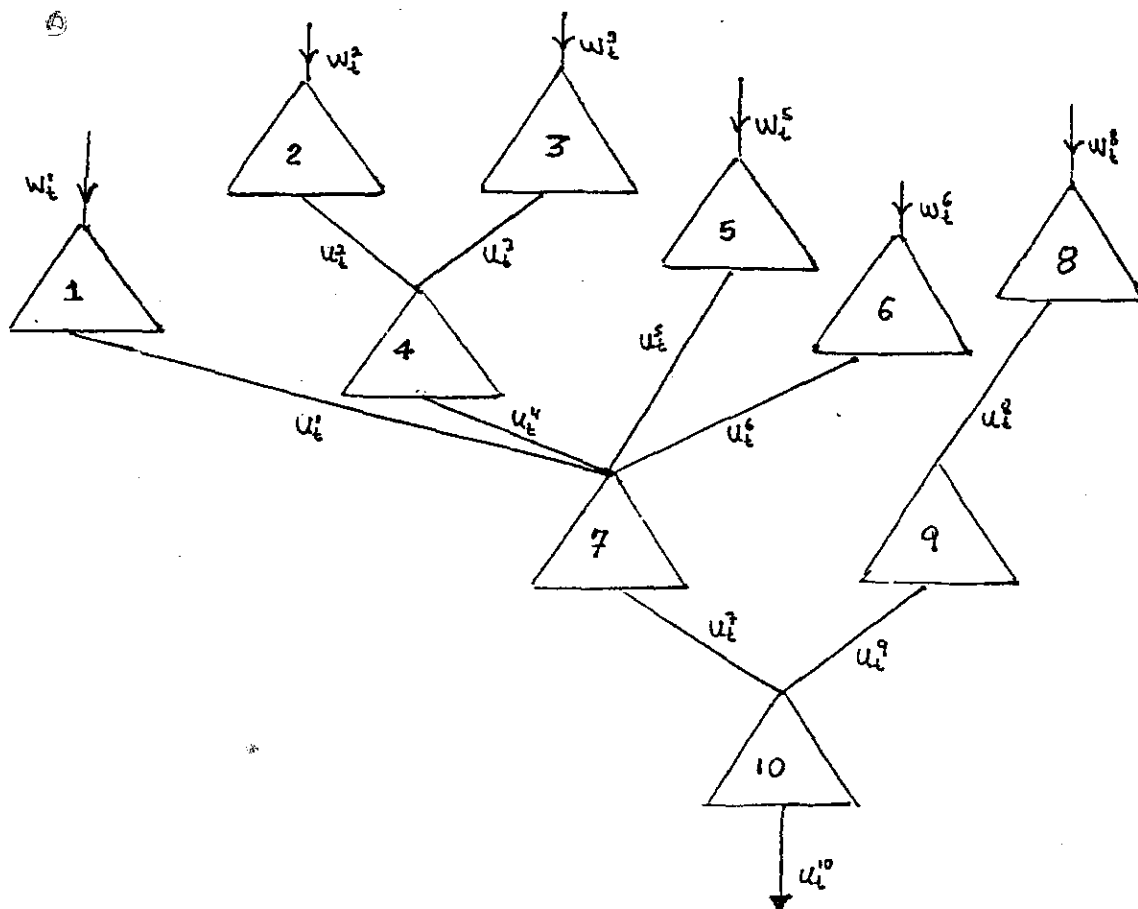


Figura 1: Configuración de 10 reservorios ($I=10$)

Si se diera esta última consideración, la dinámica del sistema en un reservorio es:

$$s_{t+1}^i = s_t^i + w_t^i - u_t^i + \sum_{k \in K(i)} u_t^k$$

donde w_t^i es el flujo natural de entrada al reservorio i durante el período t y $K(i)$ es el conjunto de índices para los reservorios los cuales liberan agua directamente (sin pasar por otro reservorio) al reservorio i . Por ejemplo, en la Figura 1, $K(7) = \{1, 4, 5, 6\}$.

Estos modelos son muy comunes en los sistemas hidroeléctricos y sistemas de irrigación en agricultura. Por ejemplo, en las hidroeléctricas existen períodos de tiempo en donde la demanda crece demasiado (horas pico), y el agua de un reservorio posiblemente no se da abasto para generar la energía requerida. En este caso, es necesario bombear agua de algún reservorio de tal manera que se pueda generar dicha energía.

Otra consideración fué tomar a los flujos de entrada w_t como variables aleatorias independientes. En Sobel [1975] se puede revisar el caso cuando las w_t están correlacionadas. Ahí se utilizan elementos de series de tiempo para resolver el problema.

Para resolver el Problema de Capacidad Minimax, se consideró la política de "liberar la máxima cantidad de agua" permisible en cualquier tiempo. Esto no implica que dicha política es óptima para el problema de operación. Cabe señalar que los dos problemas se resolvieron separadamente con técnicas y restricciones diferentes, inclusive, podría salir contraproducente el empleo de la política antes mencionada en el problema de operación. Un interesante trabajo, respecto a estos dos problemas, es el presentado por Sniedovich y Nielsen [1983] quienes los resuelve conjuntamente.

Por otra parte, existen casos donde la función de costo en un período depende solamente de la cantidad de agua liberada. Estos problemas toman mayor importancia en las hidroeléctricas, donde lo único que interesa es generar energía. En nuestro caso, esta función depende tanto del control como de la cantidad de agua almacenada y esta tiene la ventaja, además de involucrar el caso

anterior, de reflejar el deseo de un uso recreacional de la presa o reservorio y una protección contra inundaciones.

Diferentes trabajos referentes a las aplicaciones de la Teoría de Control Optimo Estocástico a control de reservorios, han sido publicados y utilizados para resolver problemas bien específicos. Por ejemplo, Metler, Bogardi y Duckstein [1975] desarrollaron un modelo para controlar los niveles de agua del Lake Balaton en Hungría. Ellos consideran a los niveles de agua como los estados y a las cantidades de agua por liberar como los controles. Las decisiones se toman cada mes y aplican la técnica de Programación Dinámica Estocástica. Otro trabajo importante es el de Alercon y Marks [1979], cuyo modelo fué utilizado para diseñar las reglas de operación para el High Aswan Dam en Egipto. Una lista mas extensa de este tipo de modelos se puede encontrar en White [1988].

Por último, haremos un comentario sobre la bibliografía empleada. El artículo que nos sirvió de base para este trabajo fué Sobel [1975]. Los diferentes elementos de la Teoría de Control Optimo fueron revisados en Bertsekas [1976], Hernández-Lerma [1989], y los de la Técnica de Programación Dinámica en Bertsekas [1976]. Los conceptos y tecnicismos en recursos acuíferos que aparecen en el trabajo fueron revisados basicamente en Buras [1972]. El resto de la bibliografía nos sirvió como complemento e información.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Bellman R., "Dynamic Programming". Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1957.
- [2] Bertsekas D. P., "Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models". Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [3] Bertsekas D. P. y Shreve S. E., "Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case". Academic Press, London, 1978.
- [4] Buras N., "Scientific Allocation of Water Resources". American Elsevier, New York, 1972.
- [5] España M., Hernández D. B. y Hernández-Lerma O., "Control Adaptable de Sistemas Inciertos a Tiempo Discreto". Ciencia No. 33(1), 69-80, 1987.
- [6] Hernández-Lerma O., "Adaptive Markov Control Processes". Springer-Verlag, New York, 1989.
- [7] Hernández-Lerma O. y S.I. Marcus, "Teoría de Control". Notas del III Coloquio del Dpto. de Matemáticas del CINVESTAV, México, 1983.
- [8] Hinderer K., "Foundations of Nonstationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.
- [9] Sniedovich M. y Nielsen P., "A Heuristic Procedure for a Joint Reservoir Control-Capacity Expansion Problem". Water Resources Research, Vol. 19, No. 1, 15-20, 1983.
- [10] Sobel M. J., "Reservoir Management Models". Water Resources Research, Vol. 11, No. 6, 767-776, 1975.
- [11] White D. J., "Further Real Applications of Markov Decision Processes". Interfaces, Vol. 5, No. 18, 55-61, 1988.
- [12] Yakowitz S., "Dynamic Programming Applications in Water Resources". Water Resources Research, Vol. 18, No. 4, 673-696, 1982.