

BIBLIOTECA CIENCIAS  
EXACTAS Y NATURALES

TC176  
.F56



15/T 1099



*Universidad de Sonora*

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

**DISCRETIZACION EN DIFERENCIAS  
FINITAS DE MODELOS DE ACUIFEROS**

TESIS

que para obtener el Título de  
Licenciado en Matematicas

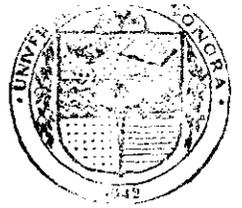
presenta

*Blanca Evelia Flores Soto*

*Hermosillo, Sonora*

*Noviembre de 1990*

A mis padres, hermanos y amigos,  
que gracias a su apoyo, confianza y cariño,  
he podido realizar este trabajo.



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA LA PROSPERIDAD  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMATICAS



EL SABER DE MI HIJO  
PARA TU FORTALEZA  
BIRLA  
DEPARTAMENTO DE  
p. 1004

# INDICE

INTRODUCCION.....	
CAPITULO I: ECUACIONES DE FLUJO EN HIDROLOGIA SUBTERRANEA.....	3
CAPITULO II: DISCRETIZACION DE MODELOS.....	40
CAPITULO III: EJEMPLO.....	71
CAPITULO IV: PAQUETE MODFLOW.....	97
CAPITULO V: CALIBRACION DE MODELOS.....	115
APENDICE A: DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LAX.....	127
APENDICE B: METODO DE ELEMENTO FINITO.....	134
CONCLUSIONES.....	136
REFERENCIAS.....	138



## INTRODUCCION

Un modelo matemático para el flujo de aguas subterráneas consiste de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales junto con condiciones iniciales y a la frontera.

Para resolver la(s) ecuación(es), deben conocerse la geometría del acuífero, los parámetros hidráulicos y las condiciones iniciales y a la frontera. Sólomente en el caso en que las ecuaciones, los parámetros y las condiciones sean simples puede obtenerse una solución exacta.

Desafortunadamente hay muchos problemas de flujo de agua subterránea para los cuales es difícil, si no imposible, obtener una solución analítica. La razón es que estos problemas son complejos ya que involucran no linealidad ya sea de los parámetros o de las condiciones a la frontera.

Para poder encontrar la solución a este tipo de problemas existen otros métodos, no analíticos, por medio de los cuales se puede encontrar una solución aproximada. Estos son los métodos numéricos.

Para encontrar la solución por medio de un método numérico se reemplaza la ecuación diferencial básica que describe el sistema de flujo por un conjunto de ecuaciones que pueden resolverse con una computadora.

Los métodos numéricos mas comunes son dos:

- Método de Diferencias Finitas.
- Método de Elemento Finito.

En este trabajo se presenta una introducción al método de diferencias finitas, presentando varios esquemas que resultan de la discretización de la ecuación diferencial parcial básica de flujo.

Estos esquemas con sus respectivos programas son aplicados a un ejemplo sintético. Los programas pueden correrse en cualquier computadora que cuente con compilador FORTRAN.

En el capítulo I se revisan algunos principios fundamentales de flujo de agua subterránea. En el capítulo II, se presenta una introducción al método de diferencias Finitas aplicándolo a la ecuación de flujo de aguas subterráneas. En el capítulo III, se realiza la corrida de unos programas para presentar los resultados de los esquemas en diferencias finitas (Explicito hacia atrás, Implícito hacia adelante, Implícito de Crank-Nicolson e Implícito de direcciones alternantes), para un ejemplo sintético.

Otra forma de resolver este problema por medio de computadoras sería el de utilizar un paquete comercial, como el que se presenta en el capítulo IV. Aquí se emplea el paquete computacional MODFLOW, el cual mediante una serie de archivos de entrada en los que se le proporciona la información necesaria nos resuelve el problema de encontrar los niveles del agua y los abatimientos de un acuífero por medio del método de diferencias finitas.

En el último capítulo, el V, se plantea el problema inverso de flujo de aguas subterráneas, el cual es un problema mal planteado, y representa uno de los principales problemas en la actualidad y al que se le ha tratado de dar solución por diferentes métodos.

Además se presentan dos apéndices, uno para demostrar uno de los teoremas fundamentales de estabilidad, el teorema de LAX. El segundo es para dar una pequeña introducción al método de Elemento Finito.

Agradezco a la persona que depositó su confianza en mí para llevar acabo este trabajo, así como al comité de tesis y a todas aquellas personas que directa e indirectamente me apoyaron durante el tiempo que me llevo realizarlo. Gracias, Fernando.

# CAPITULO I

## ECUACIONES DE FLUJO EN HIDROLOGIA SUBTERRANEA

Primeramente introduciremos varias definiciones básicas relacionadas con Hidrología Subterránea.

### DEFINICIONES.

Agua subterránea es un término utilizado para denotar todas las formas de agua que hay por debajo de la superficie de la tierra. Prácticamente todos los tipos de agua subterránea son parte del ciclo hidrológico (figura 1.1).

El estudio del ciclo hidrológico del agua usualmente se divide en tres disciplinas:

- Meteorología
- Hidrología Superficial
- Hidrogeología

En esta última se puede estudiar el agua subterránea desde un punto de vista físico, considerando todos los parámetros del medio. Sin embargo hay formas por las cuales el subsuelo se recarga con agua; por ejemplo, lluvia, nieve, condensación del vapor de agua, etc. Estos se filtran y pasan a formar parte del agua subterránea.

La formación del subsuelo que contiene agua se puede dividir, verticalmente, en zonas horizontales con respecto a la proporción de espacios vacíos, ocupados por agua.

En general los espacios vacíos pueden contener en parte un líquido (agua) y gas (aire). Los espacios sólidos podrían tomarse como granos de cierto material, como arenas, rocas fracturadas, etc.

Escencialmente tenemos una zona de *SATURACION*; aquí los espacios vacíos o poros están ocupados en su totalidad por agua.

una zona de **NO SATURACION** es donde los poros contienen agua y gases, es decir no están completamente llenos de agua.

Un **ACUIFERO** es una formación geológica, saturada, y que puede transmitir cantidades significativas de agua.

La palabra acuífero se origina del latín, acui-agua y fero-llevar; otro término que a menudo es utilizado para designar un acuífero es "Manto Acuífero".

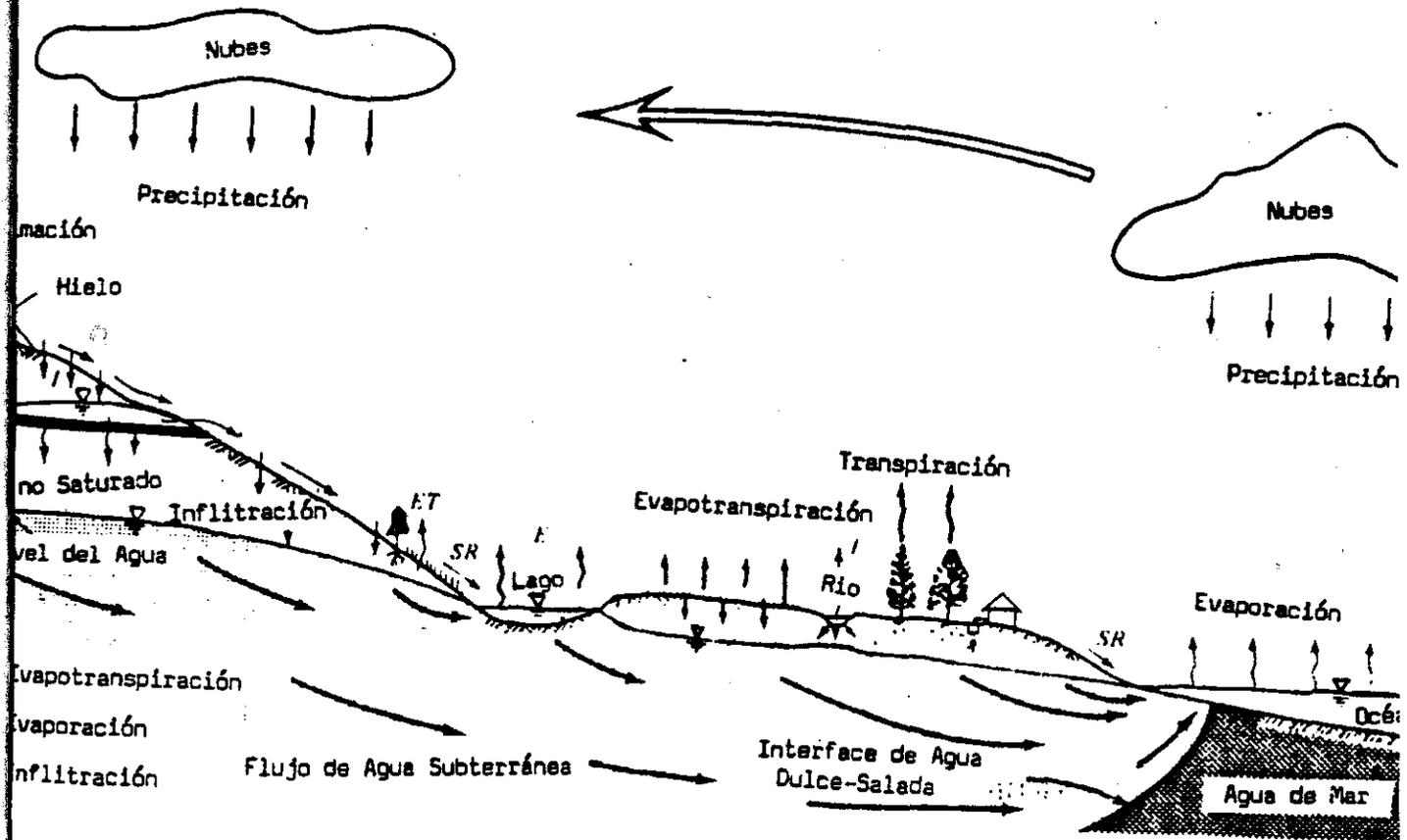


FIGURA 1.1. Ciclo Hidrológico.

#### CLASIFICACION DE ACUIFEROS.

De una forma general, los acuíferos pueden ser clasificados como confinados y no confinados.

Un acuífero *CONFINADO* ó acuífero de presión, es aquel que tiene por frontera superior e inferior una capa impermeable; es decir, material que no permite el paso del agua. Si se perforaran varios pozos que penetren el acuífero confinado, el nivel que alcanza el agua en estos pozos definen una superficie imaginaria llamada *SUPERFICIE PIEZOMETRICA* ó *NIVEL PIEZOMETRICO*.

Un acuífero *NO CONFINADO*, es un acuífero en el cual el nivel del agua es la frontera superior, que es el *NIVEL FREÁTICO*, y la frontera inferior es una capa impermeable. También es llamado acuífero *FREÁTICO*. (ver figura 1.2).

Un acuífero *ARTESIANO* es un acuífero confinado (o parte de éste), en donde la superficie piezométrica esta sobre la superficie de la tierra. En un pozo en este acuífero el agua sube libremente, y sale del pozo sin necesidad de bombeo (pozo artesiano). En algunas ocasiones el término artesiano es usado para denotar un acuífero confinado.

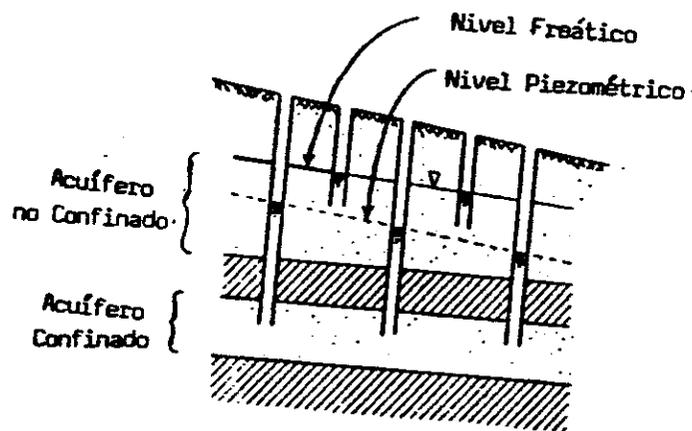


FIGURA 1.2. Acuífero no confinado y su nivel freático; acuífero confinado y su nivel piezométrico.

Aunque estas fronteras (semipermeables) tienen relativamente alta resistencia al flujo de agua, cantidades significativas pueden filtrarse a través de ellas hacia dentro o fuera del acuífero. Los acuíferos, confinados o no, que pueden perder o ganar agua a través de una o de ambas fronteras son llamados acuíferos *FILTRANTES*.

La cantidad y la dirección de filtración está dada por la diferencia del nivel piezométrico-é frático.

Un acuífero freático (o parte de éste) que se encuentre sobre una capa semipermeable se llama acuífero freático filtrante, de igual forma un acuífero confinado que tenga por lo menos una frontera semipermeable se llama acuífero confinado filtrante.

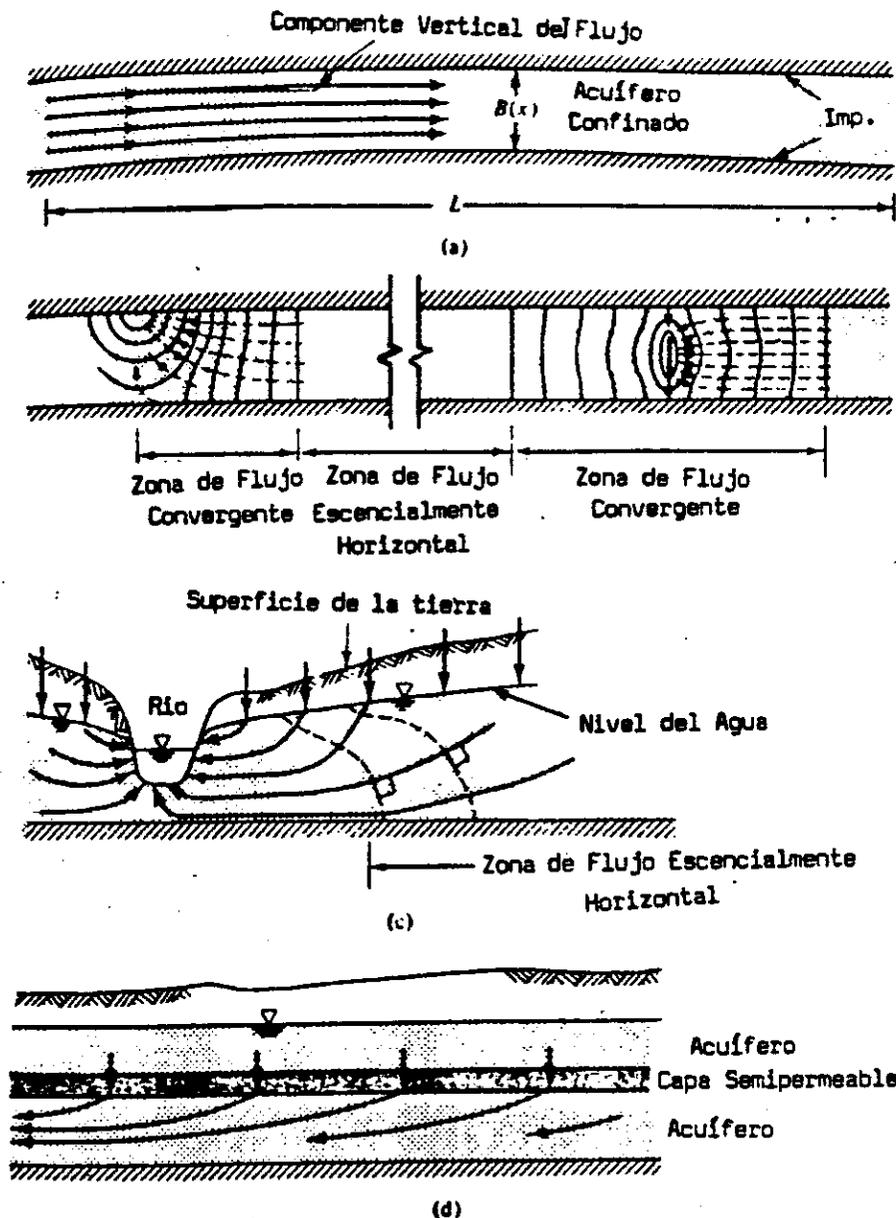


FIGURA 1.3.- Ejemplos de aproximación de flujo en acuíferos, a) confinados con espesor variable  $B \ll L$ . b) confinado con un pozo penetrando parcialmente. ( corte horizontal ). c) freáticos. d) confinado filtrante.

El flujo a través de un medio poroso es en tres dimensiones. Sin embargo, cuando la geometría de los acuíferos nos muestra que las dimensiones horizontales son mucho más grandes con respecto a las verticales, por ejemplo, de diez a cientos de metros comparados con miles de metros, podemos asumir que el acuífero es esencialmente horizontal, o que puede ser aproximado como tal, despreciando la componente vertical del flujo. Esto es cierto para un acuífero confinado de espesor constante y con pozos penetrando totalmente. Y también es válido cuando el espesor varía, pero siempre y cuando esta variación sea mucho más pequeña que el espesor promedio.

La consideración de flujo horizontal se desprecia en aquellas regiones donde el flujo tiene una componente vertical grande, por ejemplo en las vecindades de un pozo penetrando parcialmente o cerca de ríos, etc. Sin embargo en cualquier caso, después de esa condición, puede hacerse dicha consideración. (ver figura 1.3)

#### POROSIDAD

Si el volumen total  $V_T$ , de un suelo o roca es dividido en el volumen de la porción sólida  $V_s$ , y el volumen de espacios vacíos  $V_v$ , la POROSIDAD,  $\eta$ , es definida como

$$\eta = \frac{V_v}{V_T} \quad 1.1$$

presentada en fracción decimal o porcentaje.

La tabla 1.1, enlista los rangos de porosidad representativa para varios materiales geológicos. En general, las rocas tienen menor porosidad que los suelos. Las gravas, arenas y graviones que están formados por partículas angulares y redondas tienen menor porosidad que los suelos ricos en minerales.

Por último, los depósitos pobremente acomodados tienen menor porosidad que los que están bien acomodados.

La porosidad  $\eta$ , se refiere a la razón de vacíos  $e$ , que es muy usado en mecánica de suelos. La RAZON DE VACIOS está definido como:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad 1.2$$

entonces

$$e = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

ó

$$\eta = \frac{e}{1 + e}$$

los valores de " e " usualmente están en el rango de 0-3.

TABLA 1.1 .- Rangos de Porosidad.

MEDIO	POROSIDAD TOTAL %
Granito no alterado y Gneis	0.002 - 1.8
Cuarzos	0.08
Arcillas, Pizarra, mica-esquistos	0.5 - 7.5
Calizas, Dolomitas primarias	0.5 - 12.5
Dolomitas secundarias	10 - 30
Yeso	8 - 37
Arenizas	3.5 - 38
Piedra Vólcanica	30 - 40
Arenas	15 - 48
Arcillas	44 - 53
Arcillas Húmedas, Aluvión	> 90
Suelos comunes	45 - 65

#### LEY DE DARCY.

- En una dimensión.

El nacimiento de la Hidrología como una ciencia cuantitativa puede decirse que fué en el año de 1856. Este fué el año en que el Ingeniero Hidráulico Henry Darcy publicó su reporte. Darcy describe un experimento de laboratorio que lo llevó a analizar el flujo de aguas a través de arenas. El resultado de sus experimentos puede generalizarse como una ley empírica que se conoce como la ley de Darcy.

Este experimento consiste en hacer pasar agua o algún fluido a través de una columna de arena, donde  $h_1$  es la altura del fluido en un tiempo inicial y  $h_2$  es la altura en un tiempo después.

De sus experimentos Darcy concluye que la tasa de flujo (es decir, el volumen de agua por unidad de tiempo),  $Q$ , es proporcional a:

- el área de sección transversal  $A$
- $h_1 - h_2$

inversamente proporcional a la longitud  $L$ , (ver Figura 1.4), entonces

$$Q = K A \frac{(h_1 - h_2)}{L} \quad 1.3$$

onde  $K$  es un coeficiente de proporcionalidad. Las longitudes  $h_1$  y  $h_2$  se miden con respecto al mismo nivel (horizontal), un nivel arbitrario ya establecido.

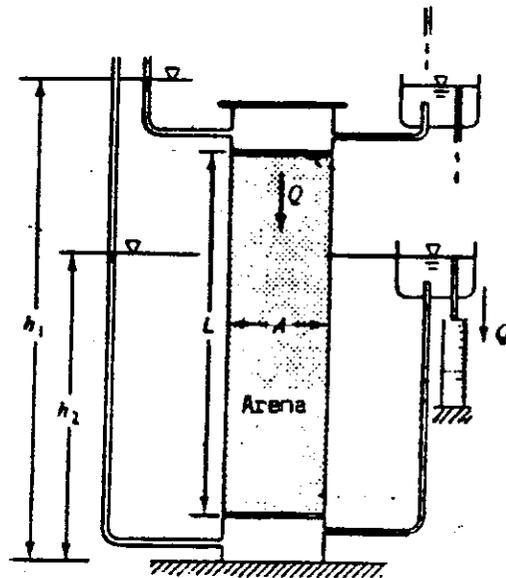


FIGURA 1.4 .- Experimento de Darcy.

Podemos reconocer que aquí  $h$ , es la carga piezométrica y  $h_1 - h_2$  es la diferencia en la carga piezométrica a través del filtro de longitud  $L$ .

Como la carga piezométrica describe (en términos de carga de agua) la suma de presión y energía potencial del fluido por unidad de peso,  $(h_1 - h_2)/L$  es la interpretación del *GRADIENTE HIDRAULICO*. Si definimos la *DESCARGA ESPECIFICA*  $q$ , como el volumen de agua que fluye por unidad de tiempo a través de una unidad de área de sección transversal, normal a la dirección de flujo, obtenemos

$$q = K \frac{(h_1 - h_2)}{L} \quad 1.4$$

donde  $q = Q / A$ , como otra forma de la ley de Darcy.

Las dimensiones de  $Q$  son  $[L^3/T]$  y las del área son  $[L^2]$ ,  $q$  tiene dimensiones de velocidad  $[L/T]$ .

El coeficiente de proporcionalidad  $K$  que aparece en la ley de Darcy (1.4) se le llama *CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA* del medio poroso, en ocasiones se le llama *COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD* y depende de propiedades del medio poroso y del fluido.

- Extensión de la Ley de Darcy.



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

EL SABER DE MIS DIOS  
PARA MI GRANDEZA

La ecuación de movimiento derivada experimentalmente en la forma de la ley de Darcy (1.4) se limita a flujo en una dimensión. Cuando el flujo es en tres dimensiones, la generalización de (1.4) es

$$q = -K \nabla h \quad 1.5$$

donde  $q$  es el vector de descarga específica con componentes  $q_x$ ,  $q_y$  y  $q_z$ , y  $\nabla h$  es el gradiente hidráulico con componentes  $\partial h / \partial X$ ,  $\partial h / \partial Y$ ,  $\partial h / \partial Z$  en las direcciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  respectivamente. La ecuación (1.5) se puede escribir como tres ecuaciones

$$q_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial X}$$

$$q_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial Y} \quad 1.6$$

$$q_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial Z}$$

donde  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_z$  son los valores de la conductividad hidráulica en las direcciones  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$ . Como ahora  $h$  es función de  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$  las derivadas deben ser parciales.

Otra generalización de la ley de Darcy es el conjunto de ecuaciones

$$q_x = -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial X} - K_{xy} \frac{\partial h}{\partial Y} - K_{xz} \frac{\partial h}{\partial Z}$$

$$q_y = -K_{yx} \frac{\partial h}{\partial X} - K_{yy} \frac{\partial h}{\partial Y} - K_{yz} \frac{\partial h}{\partial Z} \quad 1.7$$

$$q_z = -K_{zx} \frac{\partial h}{\partial X} - K_{zy} \frac{\partial h}{\partial Y} - K_{zz} \frac{\partial h}{\partial Z}$$

Este conjunto de ecuaciones tiene nueve componentes de la conductividad hidráulica, es el caso más general. Si se colocan en forma de matriz, se conoce como un tensor simétrico de segundo rango, llamado *TENSOR DE CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA*. Para el caso especial  $K_{xy} = K_{xz} = K_{yx} = K_{yz} = K_{zx} = K_{zy} = 0$ , las nueve componentes se reducen a tres y por consiguiente a la ecuación (1.6)

#### Rango de Validez.

A medida que la descarga  $q$  se incrementa, la ecuación que relaciona la descarga específica,  $q$ , y el gradiente hidráulico  $\nabla h$  se desvía gradualmente de la forma lineal expresada por la ley de Darcy. Por lo que es conveniente definir el rango de validez para la ley de Darcy lineal.

En flujo a través de conductos, el *NUMERO DE REYNOLDS*,  $R_e$ , es un número sin dimensiones, expresa la razón entre fuerzas inerciales y fuerzas viscosas actuando en el fluido.

Se usa como un criterio para distinguir flujo laminar que ocurre a bajas velocidades y flujo turbulento que ocurre a altas velocidades. El valor crítico de  $Re$  entre flujo laminar y flujo turbulento en conductos es de alrededor de 2000.

Análogamente el número de Reynolds se define también para flujo a través de un medio poroso, como

$$Re = \frac{q d}{\nu} \quad 1.8$$

donde  $d$  es la longitud del medio poroso y  $\nu$  es la viscosidad dinámica del fluido. Aunque por analogía con el número de Reynolds para conductos,  $d$  es una longitud que representa la sección transversal de un canal de medio poroso, se acostumbra usar para  $d$  la longitud representativa del grano. Frecuentemente el diámetro del grano se toma como la longitud  $d$ . Algunas veces, se menciona que el diámetro representativo es  $d_{10}$ , que significa que el 10 % de una muestra de granos son mas pequeños que el diámetro del cedazo (utilizado en pruebas para determinar el tipo de suelo).

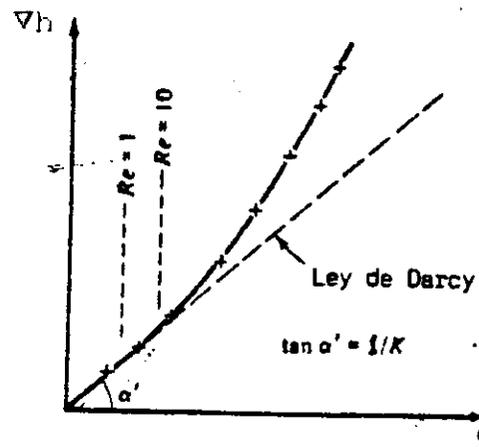


FIGURA 1.5. -Curva esquemática que relaciona a  $J$  y  $q$ .

A pesar de las variadas definiciones de  $d$ , en la ecuación (1.8), prácticamente todo parece indicar que la ley de Darcy es válida mientras el número de Reynolds este entre los valores de 1 a 10. (Ver figura 1.5).

## CARGA HIDRAULICA.

El análisis de un proceso físico que involucra flujo requiere del reconocimiento de un gradiente de potencial. Ejemplos conocidos son el flujo de calor a través de sólidos, de altas temperaturas hacia temperaturas más bajas, y el flujo de corriente eléctrica a través de circuitos eléctricos de altos voltajes hacia más bajos.

Para estos procesos la temperatura y el voltaje son cantidades pueden ser un potencial, y las tasas de flujo de calor y electricidad son proporcionales a esos gradientes de potencial. Determinaremos el gradiente de potencial que controla el flujo de agua a través de un medio poroso.

### Análisis de Hubbert.

Hubbert(1940) define el *POTENCIAL* como "una cantidad física, capaz de medirse para todo punto en un sistema de flujo, cuyas propiedades son que el flujo ocurra siempre en regiones las cuales vaya de altos valores a valores bajos, depreciando la dirección del espacio". En el experimento de Darcy (figura 1.4) la carga hidráulica  $h$ , indicada por los niveles del agua, parecería que satisface la definición, pero para Hubbert eso no es suficiente.

Dos posibilidades para el potencial son la elevación y la presión del fluido. Si el aparato de Darcy (figura 1.6), con el cilindro vertical ( $\theta = 0$ ), el flujo ocurrirá hacia abajo a través del cilindro (de la elevación de arriba hacia abajo), en respuesta a la gravedad. En otra forma, si el cilindro se coloca en forma horizontal ( $\theta = 90^\circ$ ), la gravedad no toma importancia, el flujo puede ser inducido por incrementos en la presión. Individualmente, ni la elevación, ni tampoco la presión son potenciales adecuados, pero podemos esperar que sean componentes del potencial total. La definición clásica de potencial, es en términos del trabajo realizado durante el proceso de flujo;

y el trabajo realizado para mover una cantidad de masa de fluido entre dos únicos puntos en un sistema de flujo, es una medida de la energía perdida por unidad de masa.

El *POTENCIAL DEL FLUIDO* a través de un medio poroso es la energía mecánica por unidad de masa de fluido.

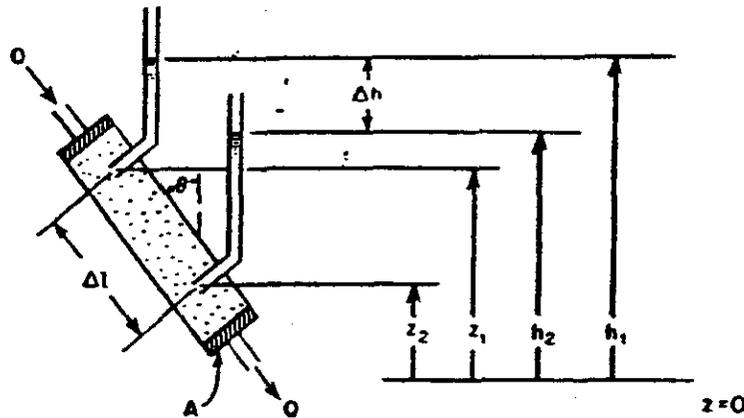


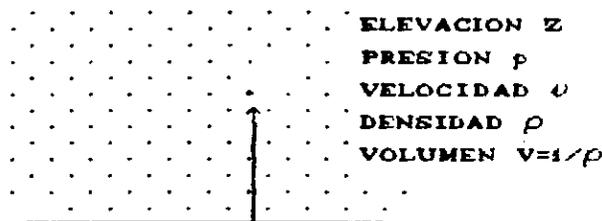
FIGURA 1.6 .- Experimento de Darcy (con el cilindro inclinado un ángulo  $\theta$ ).

Para relacionar el potencial con la elevación y la presión, consideremos un estándar (figura 1.7) a una elevación  $Z = 0$  y una presión  $p = p_0$ , (la presión atmosférica). Una cantidad de masa de fluido de densidad  $\rho_0$  ocupando un volumen  $V_0$ , donde  $V_0 = 1/\rho_0$ . Deseamos calcular el trabajo requerido para llevar la unidad de masa de fluido del estado estándar a un punto P en el sistema de flujo el cual está a una elevación  $Z$  y donde la presión del fluido es  $p$ . Además consideremos que el fluido tiene una velocidad  $v = 0$  en el estado estándar y una velocidad  $v$  en el punto P. Entonces son tres componentes para calcular el trabajo. Primero, el trabajo requerido para llevar la masa de una elevación  $Z = 0$  a  $Z$ :

$$W_1 = m g Z$$

Segundo, el trabajo requerido para acelerar el fluido de una velocidad  $v = 0$  a una velocidad  $v$  :

$$W_2 = \frac{m v^2}{2} \quad 1.10$$



ESTADO ESTANDAR ARBITRARIO  
 ELEVACION  $z=0$   
 PRESION  $p=0$  (ATMOSFERICA)  
 VELOCIDAD  $v=0$   
 DENSIDAD  $\rho_0$   
 VOLUMEN  $v_0=1/\rho_0$

FIGURA 1.7 .- Datos para el cálculo de la energía mecánica por unidad de masa de fluido.

Tercero, el trabajo realizado en el fluido para elevar la presión de  $p = p_0$  a  $p$  :

$$W_3 = m \int_{p_0}^P \frac{v}{m} dp = m \int_{p_0}^P \frac{dp}{\rho} \quad 1.11$$

Si el fluido va de un punto P a un punto en el estado estándar, la ecuación (1.9) es la pérdida de energía potencial, la ecuación (1.10) es la pérdida de energía cinética y la ecuación (1.11) es la pérdida de energía elástica o trabajo p-V.

El potencial del fluido  $\phi$  (energía mecánica por unidad de masa) es la suma de  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$ . Para una unidad de masa de fluido,  $m = 1$  en las ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11) tenemos :

$$\phi = g Z + \frac{v^2}{2g} + \int_{p_0}^P \frac{dp}{\rho} \quad 1.12$$

Para flujo en un medio poroso, las velocidades son extremadamente bajas, así que el segundo término puede ser despreciado.

Para fluidos con densidad constante, es decir, si  $\rho$  no es función de  $p$ , la ecuación (1.12) se simplifica a:

$$\phi = g Z + \frac{P - P_0}{\rho} \quad 1.13$$

El primer término de la ecuación (1.13) involucra la elevación  $Z$  y el segundo término involucra la presión del fluido  $p$ .

Para relacionar estos términos con la carga hidráulica, recurramos al manómetro de Darcy (figura 1.6). En  $P$  la presión del fluido  $p$  está dada por

$$p = \rho g \psi + p_0 \quad 1.14$$

donde  $\psi$  es la elevación de la columna de líquido sobre  $P$  y  $p_0$  es la presión atmosférica o presión en el estado estándar.

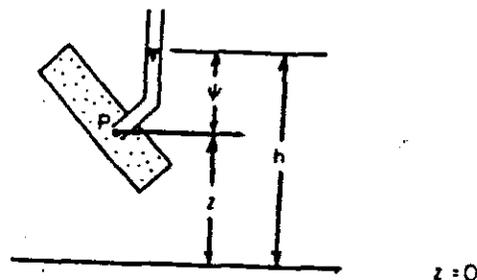


FIGURA 1.6 .- Carga hidráulica  $h$ , carga de presión  $\psi$  y carga de elevación  $Z$  para un manómetro de laboratorio

Esto se puede ver mas fácilmente en la figura (1.8) y la ecuación (1.14) queda

$$p = \rho g (h - Z) + p_0 \quad 1.15$$

Sustituyendo la ecuación (1.15) en la ecuación (1.13) y cancelando términos obtenemos:

$$\phi = g h \quad 1.16$$

Llegamos a la conclusión de que, el potencial del fluido  $\phi$  en un punto P en un medio poroso es simplemente la carga hidráulica en el punto multiplicada por la aceleración de la gravedad. Como  $g$  es constante en una vecindad de la superficie de la tierra,  $\phi$  y  $h$  están perfectamente correlacionados. Para conocer uno es necesario conocer el otro.

Es común en Hidrología de aguas subterráneas tomar la presión atmosférica  $p_0$  o cercanas a ésta, igual a cero. En este caso las ecuaciones (1.13) y (1.16) quedan

$$\phi = g Z + \frac{P}{\rho} = g h \quad 1.17$$

Dividiendo entre  $g$  obtenemos

$$h = Z + \frac{P}{\rho g} \quad 1.18$$

Escribiendo la ecuación (1.14) en términos de la presión medida obtenemos

$$p = \rho g \psi \quad 1.19$$

y sustituyendo en la ecuación (1.18) nos queda

$$h = Z + \psi \quad 1.20$$

La carga hidráulica,  $h$ , ahora es la suma de dos componentes: la elevación del punto de medida, o la carga de elevación,  $Z$ , y la carga de presión,  $\psi$ .

#### CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA

El coeficiente de proporcionalidad  $K$  que aparece en la ley de Darcy es llamada conductividad hidráulica y es una función no sólo del medio poroso sino también del fluido.

Consideremos de nuevo el aparato experimental de la figura (1.4). Si  $\Delta h$  y  $\Delta l$  las consideramos constantes para dos experimentos usando la misma arena, y hacemos pasar agua en el primer experimento y melaza en el segundo, la descarga específica,  $q$ , es mucho mas baja en el segundo experimento que en el primero.

En esta observación conviene encontrar un parámetro que describa las propiedades conductivas de un medio poroso, independientemente del líquido que fluya a través de él.

La porosidad  $\eta$  puede ser una importante influencia controlando la conductividad hidráulica  $K$ . En depósitos de arena o en formaciones de roca fracturada con alta  $\eta$  generalmente tienen alta  $K$ . Pero, desafortunadamente no siempre sucede esto; por ejemplo, suelos ricos en arcillas usualmente tienen mas alta porosidad que suelos arenosos o gravas pero baja conductividad hidráulica.

Para estos experimentos se tiene que tomar en un medio poroso ideal, que consiste de granos de diámetro uniforme,  $d$ . Cuando varios fluidos de densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$  son pasados a través del aparato bajo un gradiente hidráulico constante  $dh/dl$ , se observan las siguientes proporcionalidades

$$q \propto d^2$$

$$q \propto \rho g$$

$$q \propto 1/\mu$$

junto con la ley de Darcy,  $q \propto -dh/dl$ , generan una nueva versión de esta ley

$$q = -C \frac{d^2 \rho g}{\mu} \frac{dh}{dl} \quad 1.21$$

El parámetro  $C$  es otra constante de proporcionalidad. Para un suelo real se incluye además la influencia de otras propiedades del medio, que afectan al flujo, aparte de la medida del diámetro de grano, y la naturaleza de su acomodo.

Comparando la ecuación (1.21) con la original de la ley de Darcy (ecuación 1.5) se muestra que

$$K = \frac{C d^2 \rho g}{-\mu} \quad 1.22$$

$\rho$  y  $\mu$  son funciones sólo del fluido y  $Cd^2$  del medio. Si  
 entonces:

$$k = C d^2 \quad 1.23$$

entonces

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad 1.24$$

$k$  es conocida como permeabilidad intrínseca o específica, y tiene unidades  $[L^2]$  y  $K$  de  $[L/T]$ .

La constante  $C$  de la ecuación (1.21) está en el rango de 45 para arenas arcillosas y 140 para arenas puras (frecuentemente el valor de  $C = 100$  se usa como promedio), y  $d$  es el diámetro efectivo,  $d_{10}$ . Kumbrein y Mark (1942) sugieren a  $C = 6.17 \times 10^{-4}$  para  $d$  en centímetros y un factor de acomodación,  $\beta$ , establecido experimentalmente cerca de  $5 \text{ cm}^2$ .

Otro ejemplo es la fórmula desarrollada por Fair y Hatch (1939) verificada experimentalmente

$$k = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{(1-\eta)}{\eta s} \left( \frac{\alpha}{100} \sum \frac{P_m}{d_m} \right) \right]^{-1} \quad 1.25$$

donde  $\alpha$  es un factor que mide la forma de las arenas, variando desde 6.0 para granos esféricos a 7.7 para angulares,  $P_m$  es el porcentaje de arena retenida entre tamices (cedazos) vecinos y  $d_m$  es la medida geométrica del diámetro representativo de los granos.

Fórmulas teóricas se obtienen de la ley de Darcy, frecuentemente tales fórmulas incluyen coeficientes numéricos los cuales se determinan empíricamente.

Bajo ciertas condiciones la permeabilidad  $k$ , puede variar con el tiempo. Esto es causado por fuerzas externas que cambian la estructura y textura del medio poroso, por hundimiento y consolidación (los cuales por tiempo prolongado pueden producir canales y cavidades), y por arcilla húmedas. La permeabilidad para suelo seco es más alta que para suelo húmedo.

Las unidades usadas en la práctica por los hidrólogos para la conductividad hidráulica  $K$  (dimensiones  $L/T$ ) son  $m/día$  (metro por día). Otros a menudo usan  $cm/seg$ . Otras unidades comunes son, por ejemplo galones/día  $pie^2$ .

La conversión de estas unidades es

$$1 \text{ US gal/día ft}^2 = 4.72 \times 10^{-5} \text{ cm/seg} = 4.08 \times 10^{-2} \text{ m/día}$$

La permeabilidad  $k$  (unidades  $L^2$ ) es medida en el sistema métrico en  $\text{cm}^2$  o en  $\text{m}^2$ . En el sistema inglés, las unidades son  $\text{ft}^2$ .

También se usa la unidad DARCY definida por

$$1 \text{ darcy} = \frac{1 \text{ cm}^2/\text{seg}/\text{cm} \times 1 \text{ centipoise}}{1 \text{ atmosfera}/\text{cm}}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ darcy} &= 9.8697 \times 10^{-9} \text{ cm}^2 = 1.062 \times 10^{-11} \text{ ft}^2 \\ &= 9.813 \times 10^{-4} \text{ cm/seg} \text{ (para agua a } 20^\circ\text{C)} \\ &= 1.4156 \times 10^{-2} \text{ US gal/min ft}^2 \text{ (agua a } 20^\circ\text{C)} \end{aligned}$$

TABLA 1.2 .- Rangos de valores de conductividad y permeabilidad hidráulica.

	Rocas	Depósitos No Consolidados	$k$ (darcy)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$K$ (cm/s)	$K$ (m/s)	$K$ (gal/día/ft <sup>2</sup> )
			$10^5$	$10^{-3}$	$10^2$	1	
			$10^4$	$10^{-4}$	10	$10^{-1}$	$10^6$
			$10^3$	$10^{-5}$	1	$10^{-2}$	$10^5$
			$10^2$	$10^{-6}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^4$
			10	$10^{-7}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^3$
			1	$10^{-8}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^2$
			$10^{-1}$	$10^{-9}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	10
			$10^{-2}$	$10^{-10}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	1
			$10^{-3}$	$10^{-11}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-1}$
			$10^{-4}$	$10^{-12}$	$10^{-7}$	$10^{-9}$	$10^{-2}$
			$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-8}$	$10^{-10}$	$10^{-3}$
			$10^{-6}$	$10^{-14}$	$10^{-9}$	$10^{-11}$	$10^{-4}$
			$10^{-7}$	$10^{-15}$	$10^{-10}$	$10^{-12}$	$10^{-5}$
			$10^{-8}$	$10^{-16}$	$10^{-11}$	$10^{-13}$	$10^{-6}$
							$10^{-7}$

<ul style="list-style-type: none"> <li>--- Piedra Caliza</li> <li>--- Basalto Permeable</li> <li>--- Igneas Fracturadas</li> <li>--- y Rocas Metamórficas</li> <li>--- Piedra Caliza y Dolomita</li> <li>--- Piedra Arenizca</li> <li>--- Metamórficas no fracturadas y Rocas Igneas</li> <li>--- Arcilla</li> <li>--- Arcilla Marina</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>--- Aluvión</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>--- Grava</li> <li>--- Arena Limpia</li> </ul>
--	---	---

La tabla (1.2) muestra valores de la conductividad hidráulica y permeabilidad en cinco diferentes sistemas de unidades para diferentes medios geológicos. La tabla está basada en parte de los datos recopilados por Davis (1969). La primera conclusión que podemos obtener de los datos es que la conductividad hidráulica varía sobre un rango muy amplio; en cm/seg varían de  $10^{-4}$  a  $10^2$ , en m/seg de  $10^{-19}$  a 1 y en gal/día  $ft^2$  de  $10^{-7}$  a  $10^6$ , donde los valores mínimos son para rocas metamórficas e ígneas y el valor máximo es para gravas.

#### HOMOGENEIDAD Y ANISOTROPIA

Los valores de la conductividad K o permeabilidad  $k$  normalmente presentan variaciones a través del espacio en medios geológicos.

La homogeneidad y la anisotropía de un medio poroso se refieren a sus propiedades de permeabilidad  $k$  y/o conductividad K.

Si la conductividad hidráulica K es *independiente* de la posición dentro del medio poroso, el medio es *HOMOGENEO*, es decir, es la misma en todos los puntos. De otra manera se dice *HETEROGENEO* (o no homogéneo). Tomando el sistema de coordenadas X,Y,Z en un medio poroso, una formación homogénea es aquella en la que  $K(X,Y,Z) = \text{cte.}$ ; mientras que una formación heterogénea  $K(X,Y,Z) \neq \text{cte.}$

Si la conductividad hidráulica K es *independiente* de la dirección de medida en un punto, en un medio geológico, este se dice *ISOTROPICO* en ese punto. Y si varía con la dirección en un punto, el medio es *ANISOTROPICO* en ese punto.

Para un punto (X,Y,Z), en un medio isotrópico se tendrá que  $K_x = K_y = K_z$ , mientras que en un medio anisotrópico  $K_x \neq K_y \neq K_z$ . Si  $K_x = K_y \neq K_z$  se tienen capas horizontales de depósitos sedimentarios y el medio se dice que es *transversalmente isotrópico*.

Para describir totalmente la naturaleza de la conductividad hidráulica en un medio, es necesario tener en cuenta la heterogeneidad y la anisotropía.

Por ejemplo para un sistema homogéneo isotrópico en dos dimensiones:  $K_x(X,Z) = K_z(X,Z) = C$  para todo  $(X,Z)$ , donde  $C$  es una constante. Para un medio homogéneo, anisotrópico  $K_x(X,Z) = C_1$  y  $K_z(X,Z) = C_2$  para todo  $(X,Z)$  pero  $C_1 \neq C_2$ . La figura (1.9) muestra solamente las cuatro posibles combinaciones, donde la longitud de los vectores representa los valores de  $K_x$  y  $K_z$  para dos puntos  $(X_1, Z_1)$  y  $(X_2, Z_2)$  en un mismo medio.

Puede verse (Maasland, 1957; Marcus y Evenson, 1961) que existe una relación entre capas de heterogeneidad y anisotropía. Consideremos una formación en capas como se muestra en la figura (1.10), en donde cada capa es homogénea e isotrópica, con valores de conductividad  $K_1$  en la primera capa,  $K_2$  en la segunda y así sucesivamente.

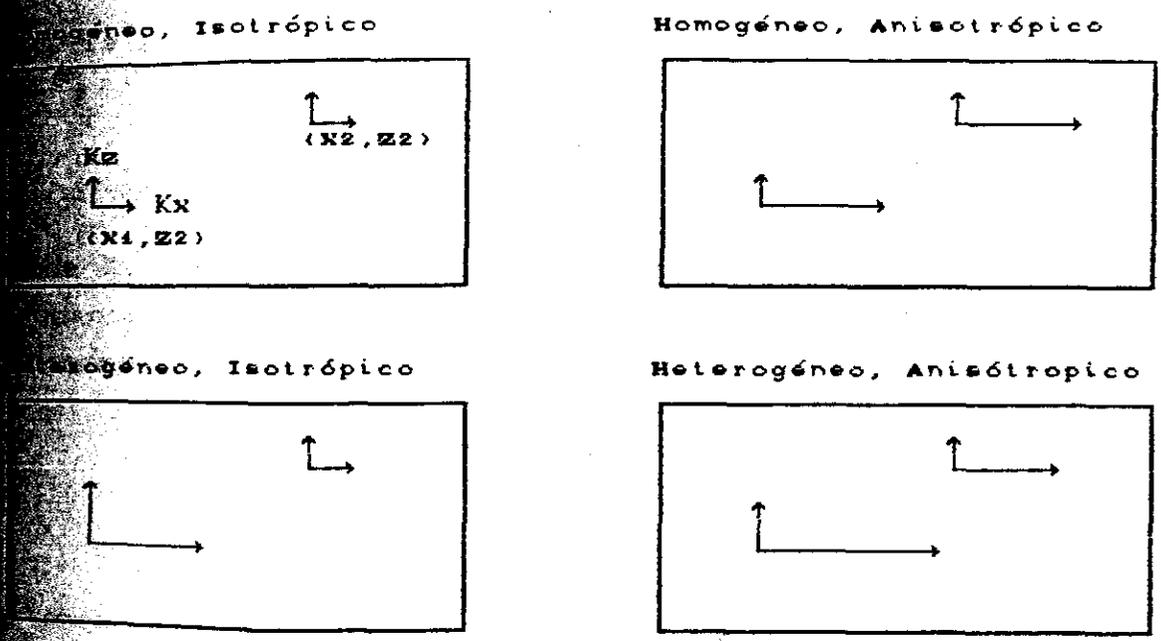


FIGURA 1.9.- Cuatro posibles combinaciones de heterogeneidad y anisotropía.

Primero, para encontrar esta relación de heterogeneidad y anisotropía, tomemos la dirección del flujo perpendicular a las capas. En este caso la descarga específica,  $q$ , que entra es la misma en cada capa o estrato, y sea  $\Delta h_1$  la diferencia de carga del primer estrato,  $\Delta h_2$  del segundo y así sucesivamente.

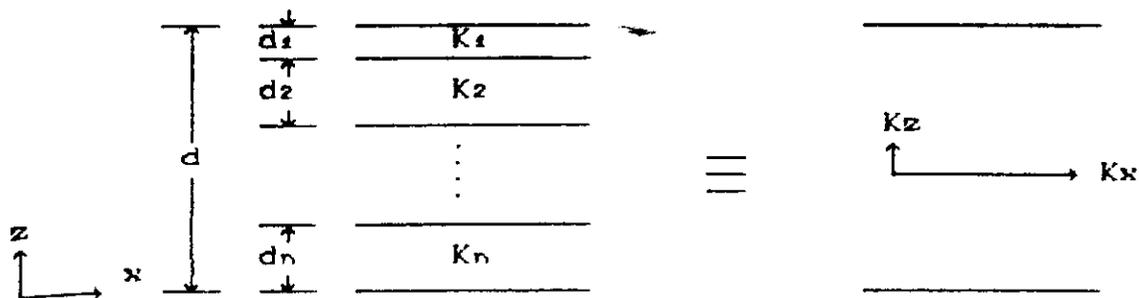


FIGURA 1.10 .- Relación entre capas heterogéneas y anisotrópicas.

Entonces la diferencia de carga total es

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \dots + \Delta h_n$$

y de la ley de Darcy

$$q = \frac{K_1 \Delta h_1}{d_1} = \frac{K_2 \Delta h_2}{d_2} = \dots = \frac{K_n \Delta h_n}{d_n} = \frac{K_z \Delta h}{d} \quad 1.27$$

donde  $K_z$  es la conductividad hidráulica vertical para el sistema de capas. Despejando  $K_z$  y usando la relación para  $\Delta h_1, \Delta h_2, \dots$  obtenemos

$$\begin{aligned} K_z &= \frac{q d}{\Delta h} = \frac{q d}{\Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_n} \\ &= \frac{q d}{q d_1 / K_1 + q d_2 / K_2 + \dots + q d_n / K_n} \end{aligned}$$

entonces

$$K_z = \frac{d}{\sum_{i=1}^n d_i / K_i} \quad 1.28$$

Ahora consideremos el flujo paralelo a las capas. Sea  $\Delta h$  la diferencia de carga a una distancia horizontal  $l$ . La descarga  $Q$ , a través de un espesor unitario del sistema, es la suma de las descargas a través de las capas. La descarga específica  $q = Q / d$  está dada por

$$q = \frac{Q}{d} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i d_i}{d} \frac{\Delta h}{l} = K_x \frac{\Delta h}{l}$$

donde  $Q_i = K_i d_i \Delta h / l$ , es la carga en la  $i$ -ésima capa y además  $K_x$  es la conductividad hidráulica horizontal.

Simplificando

$$K_x = \sum_{i=1}^n \frac{K_i d_i}{d} \quad 1.29$$

Las ecuaciones (1.28) y (1.29) proveen valores para  $K_x$  y  $K_z$  para una formación simple homogénea pero anisotrópica, que hidráulicamente es equivalente al sistema de capas homogéneas e isotrópicas.

#### COMPRESIBILIDAD

El análisis de flujo de aguas subterráneas requiere introducir el concepto de *COMPRESIBILIDAD*, una propiedad del material que describe el cambio de volumen, producido en un material bajo una fuerza aplicada.

Si consideramos que una fuerza aplicada a una unidad de masa de arena saturada, tenemos tres mecanismos por los cuales puede registrarse un cambio (reducción) del volumen.

- 1).- Por compresión del agua en los poros.
- 2).- Por compresión de los granos individuales de arena.
- 3).- Por reacomodo de los granos de arena dentro de una configuración cerrada.

El primero de los mecanismos es controlado por la compresibilidad del fluido,  $\beta$ . El segundo mecanismo podemos tomarlo como insignificante lo cual significa que los granos de arena son incompresibles; y el tercero define la compresibilidad del medio poroso.

Empezaremos por introducir el concepto de *FUERZA EFECTIVA (FUERZA INTERGRANULAR)*, que fué definido por Terzaghi en 1955.

La figura 1.11 muestra una sección transversal de un acuífero. Para simplificar, consideraremos un medio granular con un tamaño de grano tal que las fuerzas moleculares e interpartículas son omitidas. La figura 1.11 (b), muestra en detalle para un elemento horizontal en el plano AB en un acuífero.

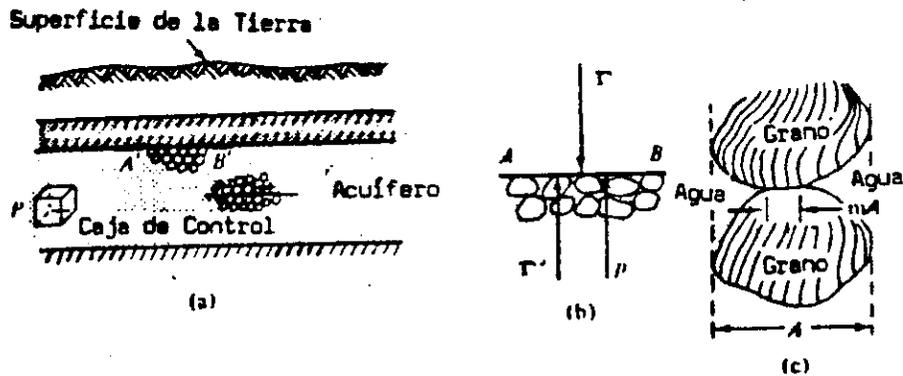


FIGURA 1.11 .- Presión y fuerza intergranular en un acuífero.

La carga total de suelo y agua (y también cualquier carga adicional a la superficie de la tierra, incluyendo la presión atmosférica), por encima del plano considerado se balancea por una fuerza (por unidad de área),  $\Gamma'$  en el medio sólido y por una presión  $p$  en el agua (figura 1.11 (b)).

$$\Gamma = \Gamma' + p \quad 1.30$$

donde  $\Gamma$  es la FUERZA TOTAL, que resulta de la carga opresora. Cada uno de los tres términos que aparecen en la ecuación (1.30) es una fuerza dividida por el área total,  $A$ , del plano considerado.

La parte de la fuerza total  $\Gamma$  que no es sostenida por el fluido es llamada FUERZA EFECTIVA,  $\Gamma'$ . Entonces esta fuerza es aplicada a los granos del medio poroso. Un reacomodo de los granos sólidos y la compresión resultante, son causados por cambios en la fuerza efectiva, no por cambios en la fuerza total.

La ecuación (1.30) se deriva considerando fuerzas verticales solamente. Sin embargo, se puede extender al caso general de tres dimensiones (Bear, 1972; Verruijt, 1969).

Además cambios en la carga opresora también producirán cambios en  $\Gamma'$  y  $p$ .

$$d\Gamma = d\Gamma' + dp \quad 1.31$$

Si tenemos que  $\Gamma = \text{constante}$ , pero la presión si cambia; por ejemplo por bombeo del acuífero, o recarga artificial, tenemos

$$\begin{aligned} d\Gamma = 0 &= d\Gamma' + dp \\ d\Gamma' &= - dp \end{aligned} \quad 1.32$$

Tales medidas corresponden al cambio producido en la fuerza intergranular. De esta forma, una reducción en la presión del agua, por bombeo de un pozo, da como resultado un incremento en la carga sostenida por el armazón del suelo del acuífero.

Para casos en los que la fuerza total no cambia con el tiempo, y dan como resultado deformaciones volumétricas, la fuerza efectiva en un punto es controlada por la presión en ese punto. Como  $p = \rho g \psi$  y  $\psi = h - Z$  ( $Z$  es el punto en cuestión), entonces cambios en la fuerza efectiva en un punto dependen de cambios en la carga hidráulica en ese punto.

$$d\Gamma' = - \rho g d\psi = - \rho g dh \quad 1.33$$

Para flujo de agua a través de un medio poroso es necesario definir dos términos de compresibilidad, uno para el agua y otro para el medio.

#### COMPRESIBILIDAD DEL AGUA.

El agua es compresible, sin embargo su compresibilidad es pequeña.

El coeficiente de compresibilidad del agua  $\beta$  está dado por

$$\beta = - \frac{1}{V_w} \frac{dV_w}{dp} \quad 1.34$$

donde  $V_w$  es el volumen de agua sujeta a cambios de presión.

El signo menos indica una disminución en el volumen cuando la presión se incrementa, además es necesario si deseamos que  $\beta$  sea un número positivo.

La temperatura a la que normalmente se encuentra el agua subterránea tiene poca influencia en  $\beta$  y para propósitos prácticos podemos considerar a  $\beta$  como constante. Las dimensiones de  $\beta$  son inversas a la de la presión o fuerza. Su valor puede ser tomado como  $4.4 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$  (ó  $\text{Pa}^{-1}$ ).

Para una masa de agua dada es posible reescribir la ecuación (1.34) en la forma

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad 1.35$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

Integrando la ecuación (1.35) obtenemos la ECUACION DE ESTADO para el agua

$$\rho = \rho_0 \exp [\beta(p - p_0)] \quad 1.36$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del fluido para una presión de referencia  $p_0$ . Para  $p_0$  la presión atmosférica (convenientemente se toma  $p_0 = 0$ ), la ecuación 1.36 se puede reescribir

$$\rho = \rho_0 \exp [\beta p] \quad 1.37$$

Un fluido incompresible es uno para el cual  $\beta = 0$  y  $\rho = \rho_0 = \text{constante}$ .

#### COMPRESIBILIDAD DEL MEDIO.

El medio sólido del acuífero es elástico y no rígido. Debido a que está sujeto a cambios en la fuerza intergranular, experimenta una deformación.

Esta deformación involucra un movimiento del sólido o de las partículas sólidas en su reacomodo, de tal forma que la porosidad del medio cambia. Asumiendo que la elasticidad de las partículas sólidas es muy pequeña, entonces su volumen no cambia.

La propiedad de elasticidad del medio sólido se expresa

por el coeficiente de compresibilidad  $\alpha$ , definido por

$$\alpha = -\frac{1}{V_T} \frac{dV_T}{d\Gamma'} \quad 1.38$$

donde  $V_T$  es la cantidad de volumen total y  $d\Gamma'$  es el cambio en la fuerza efectiva.

Un incremento en la fuerza efectiva  $d\Gamma'$  produce una reducción en el volumen total de la masa sólida  $dV_T$ . En materiales granulares esta reducción ocurre casi completamente como resultado de un reacomodo de los granos. En general como  $V_T = V_s + V_v$

$$dV_T = dV_s + dV_v$$

pero para nuestro propósito consideraremos que  $dV_s = 0$  entonces

$$dV_T = dV_v$$

Solamente se ha considerado compresibilidad vertical, las deformaciones laterales en el acuífero se toman como insignificantes.

Como el volumen de sólidos  $V_s$  en  $V_T$  permanece constante tenemos

$$V_s = (1 - \eta) V_T = \text{Constante},$$

entonces  $\frac{dV_s}{d\Gamma'} = 0$ , por lo tanto

$$\frac{1}{V_T} \frac{dV_T}{d\Gamma'} = \frac{1}{1 - \eta} \frac{d\eta}{d\Gamma'} \quad y$$

$$\alpha = \frac{-1}{1 - \eta} \frac{d\eta}{d\Gamma'} = \frac{1}{1 - \eta} \frac{d\eta}{dp} \quad 1.39$$

donde se expresa  $\alpha$  para cambios en la porosidad,  $\eta$ , resultando de cambios en la presión del agua.

#### FLUJO EN ESTADO ESTACIONARIO Y ESTADO TRANSIENTE.

El flujo en estado *ESTACIONARIO* ocurre cuando para un punto en el campo de flujo, la magnitud y dirección del flujo son constantes con respecto al tiempo.

El flujo *TRANSIENTE* ( o flujo no estacionario) ocurre cuando la magnitud o la dirección del flujo cambia con el tiempo.

En un sistema de flujo estacionario la velocidad puede variar de punto a punto, pero no variará con el tiempo en un punto dado.

Una diferencia importante entre estado estacionario y transiente está en la relación entre sus líneas de flujo y líneas de corriente.

Las *líneas de flujo* indican la dirección instantánea del flujo en todo el sistema, para todo tiempo en un sistema estacionario, o para un instante dado de tiempo en un sistema transiente. Estas deben ser ortogonales a las líneas equipotenciales en toda la región de flujo y para todo tiempo.

Las *líneas equipotenciales* se forman uniendo todos los puntos que tienen la misma carga hidráulica,  $h$ .

Las *líneas de corriente* son un mapa de rutas que sigue una partícula de agua a través de una región de flujo, ya sea en estado estacionario o transiente.

En estado estacionario una partícula que entra al sistema por una frontera influyente fluirá hacia la frontera efluente a lo largo de una línea de corriente que en este caso coincide con una línea de flujo. En flujo en estado transiente, es de otra forma, las líneas de corriente y de flujo no coinciden. Aunque para un instante dado de tiempo (en estado transiente), las líneas de flujo muestran solo la dirección de movimiento. Aquí la configuración de las líneas cambia con el tiempo, las líneas de flujo no pueden describir la trayectoria completa de una partícula de agua que recorra el sistema.

La delineación de líneas de corriente en estado transiente son importantes en el estudio de contaminación de aguas subterráneas.

#### TRANSMISIBILIDAD Y ALMACENAJE.

Hay seis propiedades básicas de los fluidos y medios porosos que deben conocerse para describir los aspectos hidráulicos de los acuíferos. Estas propiedades son:

para el agua

$\rho$  : densidad

$\mu$  : viscosidad

$\beta$  : compresibilidad

para el medio

$\eta$  : porosidad ( e razón de vacíos)

$k$  : permeabilidad

$\alpha$  : compresibilidad

Todos los parámetros que se usan en las propiedades hidrológicas pueden derivarse de estos seis.

Consideremos ahora los conceptos de almacenamiento específico  $S_s$ , coeficiente de almacenamiento  $S$ , y Transmisividad

$T$ .

Almacenamiento Específico.

El ALMACENAMIENTO ESPECIFICO  $S_s$  de un acuífero se define como el volumen de agua liberada por unidad de acuífero del almacenamiento bajo una unidad de disminución en la carga hidráulica.

Sabemos que una disminución en la carga hiraúlica  $h$ , infiere una disminución de la presión,  $p$ , del fluido y un incremento en la fuerza efectiva  $\Gamma'$ . El agua que es liberada del almacenamiento bajo condiciones en las cuales  $h$  decrece es producido por dos mecanismos:

1).- La compactación del acuífero causada por incrementos de  $\Gamma'$ .

2).- La expansión del agua causada por la disminución de la presión  $p$ .

El primero de estos mecanismos se controla por la compresibilidad del acuífero  $\alpha$ , y el segundo por la compresibilidad del fluido  $\beta$ .

Consideremos primero el agua producida por la compactación del acuífero. El volumen de agua expedido de la unidad de volumen del acuífero durante la compactación es igual a la reducción en el volumen de la unidad de volumen de acuífero.

La reducción volumétrica  $dV_T$  será negativa, pero la cantidad de agua producida  $dV_w$  será positiva, así que, de la ecuación (1.38)

$$dV_w = - dV_T = \alpha V_T d\Gamma'$$

Para una unidad de volumen  $V_T = 1$ , y de la ecuación (1.33),  $d\Gamma' = - \rho g dh$ . Para una unidad de disminución en la carga hidráulica obtenemos

$$dV_w = \alpha \rho g \quad (1.40)$$

y de la ecuación (1.34) tenemos

$$dV_w = - \beta V_w dp \quad 1.41$$

El volumen de agua  $V_w$  en la unidad de volumen total  $V_T$  es  $\eta V_T$  donde  $\eta$  es la porosidad. Con  $V_T = 1$  y  $dp = \rho g d\psi = \rho g d(h-Z) = \rho g dh$ , y la ecuación (1.41) para  $dh = -1$  se convierte en

$$dV_w = \beta \eta \rho g \quad 1.42$$

El almacenamiento específico es la suma de los dos términos dados por las ecuaciones (1.40) y (1.42)

$$S_s = \rho g (\alpha - \eta \beta) \quad 1.43$$

De esta expresión se puede ver que  $S_s$  tiene unidades de  $[L^{-1}]$ . Esto también se sigue de la definición de  $S_s$  como un volumen por unidad de disminución de la carga.

En acuíferos confinados.

Para un acuífero confinado de espesor  $b$ , la transmisibilidad  $T$  está definida como

$$T = K b \quad 1.44$$

El ALMACENAJE (o coeficiente de almacenamiento),  $S$ , se define como

$$S = S_s b \quad 1.45$$

sustituyendo la ecuación (1.43) en la ecuación (1.45) tenemos

$$S = \rho g b (\alpha + \eta \beta) \quad 1.46$$

El almacenaje de un acuífero saturado confinado de espesor  $b$ , puede definirse como el volumen de agua que un acuífero libera del almacenado por unidad de área superficial de acuífero por unidad de disminución en la componente de la carga hidráulica, normal a la superficie. La carga hidráulica de un acuífero confinado usualmente se expresa como una superficie potenciométrica, la figura 1.11(a) ilustra el concepto.

Si la conductividad hidráulica  $K$  tiene dimensiones  $[L/T]$ , entonces de la ecuación (1.44) se ve que la Transmisividad  $T$  tiene dimensiones  $[L^2/T]$ . Si  $K$  se expresa en gal/día  $ft^2$ , entonces  $T$  tiene unidades de gal/día  $ft$ . Transmisibilidades mas grandes que  $0.015 \text{ m}^2/\text{s}$  (o  $0.16 \text{ ft}^2/\text{s}$  o  $100,000 \text{ gal/día } ft$ ) son buenos acuíferos para explotación de pozos. El almacenaje no tiene dimensiones. En un acuífero confinado, el rango de valores de  $S$  es de  $0.005$  a  $0.00005$ .

Es posible definir un parámetro simple que reuna las propiedades de  $T$  ó  $K$  y las propiedades de almacenaje  $S$  ó  $S_s$ . La DIFUSIBILIDAD HIDRAULICA,  $D$ , se define como

$$D = \frac{T}{S} = \frac{K}{S_s} \quad (1.47)$$

Este término, en la práctica tiene poco uso.

En Acuíferos No Confinados.

En un acuífero no confinado, la Transmisibilidad no está tan bién definida como en el caso de un acuífero confinado, pero se puede usar.

Definiendolo con la misma ecuación (ecuación (1.44)), pero en este caso b, es el espesor saturado del acuífero o la altura del nivel del agua desde la capa impermeable que limita el acuífero.

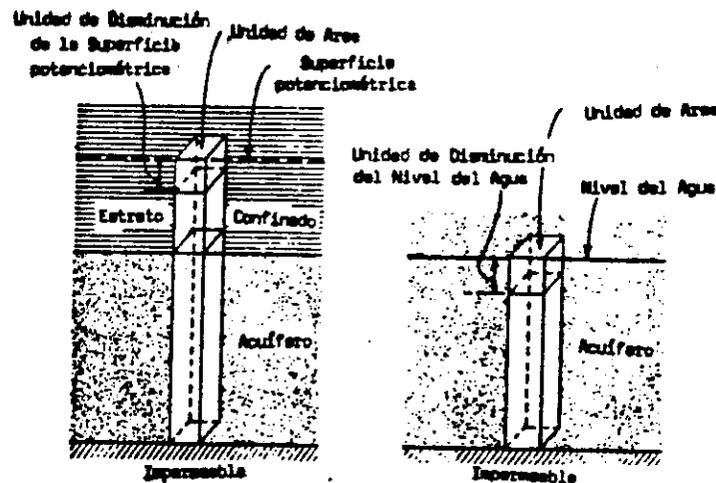


FIGURA 1.12 .- Representación esquemática del almacenaje en un acuífero a) confinado, b) no confinado.

El término almacenaje para acuíferos no confinados se conoce como PRODUCCION ESPECIFICA  $S_y$ . Se define como el volumen de agua por unidad de disminución en el nivel del agua. En ocasiones se le llama almacenamiento no confinado. La figura 1.12 (b), ilustra este principio.

La producción específica de un acuífero no confinado es mucho mas alta que el almacenaje de acuíferos confinados. El rango usual de  $S_y$  es de 0.01 a 0.3.

#### ECUACION BASICA DE CONDUCTIVIDAD.

Desarrollaremos la ecuación básica describiendo flujo tridimensional en un medio poroso. Derivaremos la ecuación básica de balance

$$\frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = -\text{div}(\rho \mathbf{q}) \quad 1.48$$

usando consideraciones elementales.

Consideremos un volumen de control (o caja de control), que tenga la forma de un paralelogramo rectangular de dimensiones  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , centrado en el punto  $P(X,Y,Z)$ , en el interior del dominio del flujo, en un acuífero. (Figura 1.13). Una caja de control puede tener forma arbitraria, pero una vez fijada la forma y posición, deben permanecer inalteradas durante el flujo, la cantidad de material y el material mismo, que pasan a través de la caja de control puede variar con el tiempo. En este análisis, agua y sólidos entran y salen de la caja por sus superficies.

En hidrodinámica a esto se le llama una aproximación Euleriana, contraria a la aproximación Lagrangiana, en el cual se fija la masa de agua y se sigue en su movimiento a través del medio poroso.

Sea  $J$  un vector que denota el flujo (es decir, masa por unidad de área por unidad de tiempo) de agua de densidad  $\rho$  en un punto  $P(X,Y,Z)$ .

$$J = \rho q$$

1.49

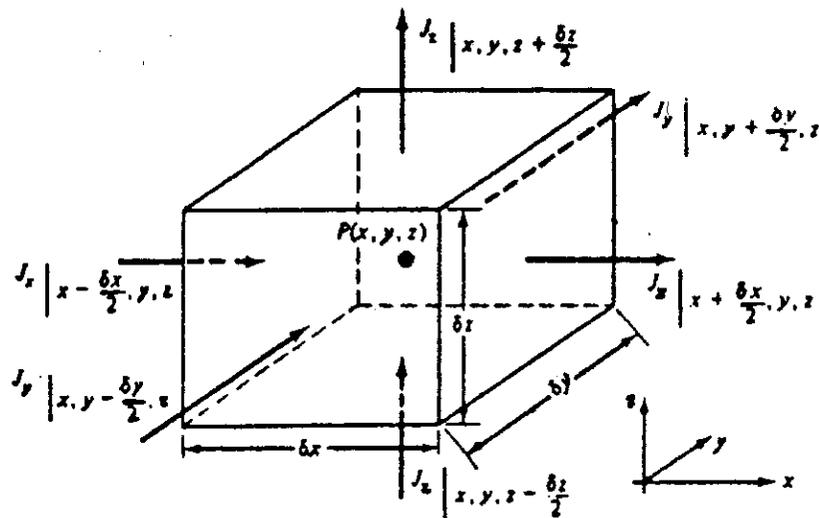


FIGURA 1.13. - Conservación de masa para un volumen de control.

Refiriéndose a la figura 1.13 el exceso de flujo de masa que entra sobre el que sale durante un corto intervalo de tiempo  $\delta t$ , a través de la superficie perpendicular a la dirección X, se expresa por las diferencias

$$\left[ J_x|_{x-\delta x/2, y, z} - J_x|_{x+\delta x/2, y, z} \right] \delta y \delta z \delta t$$

y en las direcciones Y y Z tenemos

$$\left[ J_y|_{x, y-\delta y/2, z} - J_y|_{x, y+\delta y/2, z} \right] \delta x \delta z \delta t$$

$$\left[ J_z|_{x, y, z-\delta z/2} - J_z|_{x, y, z+\delta z/2} \right] \delta x \delta y \delta t$$

respectivamente.

Sumando las tres expresiones obtenemos una para el exceso total de masa que entra sobre la que sale durante  $\delta t$ .

$$\left[ \frac{J_x|_{x-\delta x/2, y, z} - J_x|_{x+\delta x/2, y, z}}{\delta x} + \frac{J_y|_{x, y-\delta y/2, z} - J_y|_{x, y+\delta y/2, z}}{\delta y} + \frac{J_z|_{x, y, z-\delta z/2} - J_z|_{x, y, z+\delta z/2}}{\delta z} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t \quad 1.50$$

donde  $\delta x \delta y \delta z = \delta U$  es el volumen de la caja. Dividiendo la expresión (1.50) por  $\delta U$  y  $\delta t$ , obtenemos la cantidad de masa que entra sobre la que sale por unidad de volumen de medio poroso y por unidad de tiempo. Si tomamos  $\delta x \delta y \delta z$  tendiendo a cero, entonces la caja converge al punto P por lo que el exceso de flujo que entra sobre el que sale por unidad de volumen de medio (alrededor de P) y por unidad de tiempo queda

$$-\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad \delta \quad - \nabla \cdot J \quad \text{donde } J = \rho q \quad 1.51$$

Por el principio de conservación de masa, en la ausencia de fuentes y sumideros, el exceso de masa que lo tenemos expresado en la ecuación (1.51) debe ser igual al cambio de masa  $m$ , durante  $\delta t$ , contenida en la caja.

Como  $m = \eta \rho \delta U$ , esta acumulación de masa en la caja durante  $\delta t$ , puede expresarse como

$$m|_{t+\Delta t} - m|_t = [(\rho\eta)|_{t+\Delta t} - (\rho\eta)|_t] \delta U \quad 1.52$$

aún mas dividiendo la expresión (1.52) por  $\delta U$  y  $\delta t$  y tomando el límite cuando  $\delta t \rightarrow 0$  obtenemos  $\partial(\eta\rho)/\partial t$  como la masa de agua acumulada por unidad de volumen y unidad de tiempo en un punto. Entonces el balance de masa en P(X,Y,Z) esta dado por

$$- \left[ \frac{\partial J_x}{\partial X} + \frac{\partial J_y}{\partial Y} + \frac{\partial J_z}{\partial Z} \right] = \frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t} \quad 1.53$$

$$-\nabla \cdot \rho q = \frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t}$$

expandiendo el lado derecho

$$-\nabla \cdot \rho q = \eta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad 1.54$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación (1.54) es la tasa de masa de agua producida por una expansión del agua bajo un cambio de densidad  $\rho$ .

El segundo término es la tasa de masa de agua producida por la compactación del medio poroso, como reflejo del cambio en su porosidad  $\eta$ .

El primer término es controlado por la compresibilidad del fluido  $\beta$  y el segundo por la compresibilidad del acuífero  $\alpha$ .

Para simplificar los dos términos del lado derecho de la ecuación (1.54) conocemos que el cambio en  $\rho$  y  $\eta$  son producidos por un cambio en la carga hidráulica  $h$  y en el volumen de agua para una disminución en la carga que es  $S_s$ , donde  $S_s$  es el almacenamiento específico dado por  $S_s = \rho g (\alpha + \eta \beta)$ . Entonces la tasa de masa de agua producida (la tasa de tiempo del cambio de la masa de fluido almacenado) es  $\rho S_s \partial h / \partial t$  y la ecuación (1.54) queda

$$- \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial X} - \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial Y} - \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial Z} = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad 1.55$$

Quando el flujo es estacionario (es decir,  $\partial h/\partial t = 0$ ) y/o cuando fluido y sólido son incompresibles (es decir,  $S_s = 0$  y  $\rho = \text{cte.}$ ) consideraremos que (en un acuífero no confinado) la ecuación (1.55) se reduce a:

$$\nabla \cdot q = 0 \quad \text{ó} \quad \text{div } q = 0 \quad 1.56$$

la cual establece continuidad de volumen. Recordando que  $\text{div } A = \partial A_x/\partial X + \partial A_y/\partial Y + \partial A_z/\partial Z$  para un vector  $A$ , donde  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  son las componentes de  $A$ .

Ahora introduciremos una ecuación de movimiento (es decir, una expresión para  $q$ ) en la ecuación de continuidad (1.55)

Tomaremos en cuenta el factor de que es un medio deformable o consolidado, también que el movimiento del medio sólido con respecto al sistema de coordenadas fijas.

Consideraremos, para propósitos prácticos, que:

a).- La velocidad de los sólidos es pequeña (con respecto a  $q/\eta$ ) con  $q$  expresado por la ley de Darcy, ecuación (1.5)

b).-  $K$  es constante, no obstante  $\rho = \rho(p)$ , o, si el medio es heterogéneo,  $K$  varía en el espacio independientemente de la variabilidad de  $\rho$ .

c).-  $S_s$  y  $K$  no son afectados por variaciones en  $\eta$  debido a deformaciones. Consideraremos que estas variaciones son pequeñas relativas a la  $\eta$  inicial, lo mismo para  $\rho$ .

d).-  $q \cdot \text{grad } \rho \ll \eta \partial \rho/\partial t$  (entonces (1.53) se reduce a  $\nabla \cdot q + \partial(\eta \rho)/\partial t = 0$ ), o sea, consideramos que las variaciones espaciales en  $\rho$  son mucho más pequeñas que las locales o temporales.

Bajo estas suposiciones (1.55) puede escribirse en términos de la variable  $h$ , para un fluido compresible.

$$-\text{div } q \equiv \text{div } (K \text{ grad } h) = S_s \partial h/\partial t \quad 1.57$$

Para un medio homogéneo isotrópico (1.57) se reduce a

$$K \nabla^2 h = K \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) \equiv K \left( \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad 1.58$$

Para un medio isotrópico pero heterogéneo (1.57) queda

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( K \frac{\partial h}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( K \frac{\partial h}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( K \frac{\partial h}{\partial Z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad 1.59$$

Para un medio no homogéneo, anisotrópico, donde las direcciones principales son las direcciones X, Y, Z, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( K_X \frac{\partial h}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( K_Y \frac{\partial h}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( K_Z \frac{\partial h}{\partial Z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad 1.60$$

Obviamente en (1.59) y (1.60)  $K = K(X, Y, Z)$  debe ser continua y tener una primera derivada continua en el dominio del flujo. Finalmente si el flujo es estacionario y/o cuando el medio sólido y el agua se consideran incompresibles, el lado derecho de la ecuación (1.57) y (1.60), desaparece. La ecuación (1.57) se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} = 0$$

también usualmente consideraremos que  $K = k \rho g / \mu \cong k \rho_0 g / \mu_0$ , independientemente de los efectos de presión en  $\rho$  y  $\mu$ . Recordemos que (1.53) y (1.55) se desarrollaron para un dominio sin fuentes y/o sumideros. Si fuentes y/o sumideros se presentan, entonces se representarían por un término adicional en el lado izquierdo de (1.53), expresando la tasa a la cual la masa de agua es agregada por unidad de tiempo y de volumen de medio poroso alrededor de P. La ecuación (1.55) se modifica en un sentido similar, por ejemplo la ecuación (1.55) queda

$$-\operatorname{div}(\rho q) + q' = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

donde  $q'$  es el término que denota la fuente y/o sumidero.

En general la ecuación general de flujo para aguas subterráneas la podemos escribir como

$$\nabla \cdot (K \nabla h) = Ss \frac{\partial h}{\partial t}$$

y dependiendo de K (conductividad) puede tomar diferentes formas. Además podemos tomar a h con dos componentes, es decir, flujo bidimensional, con las consideraciones que se mencionaron anteriormente.

## CAPITULO II

### DISCRETIZACION DE MODELOS

Un modelo es una versión simplificada de la realidad. Usando un modelo de aguas subterráneas se pueden hacer pruebas del manejo del agua. Por supuesto la validez de estas pruebas dependen de que tan bien se aproxime el modelo a las condiciones de campo. Cuando se usa un modelo es esencial tener buenos datos de campo.

Los modelos de aguas subterráneas se basan en la ecuación diferencial parcial de flujo

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ K_x \frac{\partial h}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ K_y \frac{\partial h}{\partial Y} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[ K_z \frac{\partial h}{\partial Z} \right] + q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad 2.1$$

aquí  $h$  representa la carga hidráulica en el acuífero,  $K$  es la conductividad hidráulica,  $S_s$  es el almacenaje específico,  $q$  representa una fuente y/o sumidero.

Para resolver esta ecuación es necesario conocer ciertas características del flujo, llamadas condiciones iniciales y condiciones a la frontera, que mencionaremos posteriormente.

El problema de resolver estos modelos es el de encontrar el valor de la carga hidráulica,  $h$ , en cada punto del sistema o región de flujo. Estos métodos se clasifican en Analíticos y Numéricos. Varios de los métodos mas conocidos son:

#### 1) Métodos Analíticos

- a. - Separación de Variables
- b. - Técnicas de Variable Compleja
- c. - Transformada de Fourier o Laplace
- d. - Funciones de Green
- e. - Series de Potencias

## 2) Métodos Numéricos

- a. - Diferencias Finitas
- b. - Elemento Finito

Para problemas que involucran ecuaciones lineales o casi lineales y en regiones de geometría simple (o regular), es posible obtener una solución exacta por medio de un método analítico. En ocasiones es complicado encontrar la solución por separación de variables o utilizando un cambio de variable que la haga de variables separables y llegar a una solución. En ocasiones, las técnicas de variable compleja, la aproximación por identidades de Green, o por transformadas de Fourier o de Laplace (o ambas), llevan a una solución exacta.

Para problemas no lineales con regiones de geometría regular, son pocas las soluciones analíticas que existen y usualmente son soluciones aproximadas, obtenidas a partir de modificaciones del método de series de potencias. Las modificaciones son aplicables primeramente cuando los términos no lineales de la ecuación son mas pequeños en comparación con los términos lineales, además son poco utilizados. Los métodos de series de potencias son muy buenos, pero requieren evaluar un coeficiente para cada término de la serie y esto es tedioso. Además es difícil, si no imposible, demostrar que la serie de potencias converge a la solución exacta.

Normalmente las consideraciones necesarias para resolver un modelo matemático analíticamente son muy restrictivas. Por ejemplo, muchas soluciones analíticas requieren que el medio sea homogéneo e isotrópico.

Problemas que involucran regiones de geometría irregular, que son situaciones mas reales, generalmente no se tratan resolver analíticamente. Para estos problemas es muy ventajoso el uso de métodos numéricos, para obtener una solución aproximada.

Los métodos numéricos proveen la herramienta mas general para el análisis cuantitativo de las aplicaciones de agua subterránea.

Estos no están sujetos a muchas de las consideraciones restrictivas que se requieren para la solución analítica. A pesar de la flexibilidad de los modelos numéricos, sus bases matemáticas son menos sofisticadas que para los métodos analíticos.

Para desarrollar un modelo numérico de un sistema físico (en este caso un acuífero), es necesario entender como se comporta el sistema. Esto comprende tomar la forma de las leyes y conceptos (por ejemplo, la ley de Darcy y el concepto de almacenaje), las cuales se transforman a expresiones matemáticas.

Los métodos de diferencias finitas y elemento finito (ver apéndice B) son la mejor técnica numérica usada en aplicaciones de aguas subterráneas.

#### METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

En una variable.

Aunque la aproximación de derivadas puede realizarse en varias formas, nos fijaremos en la aproximación más popular, la cual se basa en la expansión de la serie de Taylor. Considerando la expansión de la serie de Taylor para  $h(X)$  con respecto al punto  $i\Delta X$  en una variable independiente, ver figura 2.1.

$$\begin{aligned}
 h [ (i+1) \Delta X ] = h_{i+1} = h_i + \Delta X \left. \frac{dh}{dX} \right|_{i\Delta X} + \frac{(\Delta X)^2}{2!} \left. \frac{d^2h}{dX^2} \right|_{i\Delta X} \\
 + \frac{(\Delta X)^3}{3!} \left. \frac{d^3h}{dX^3} \right|_{i\Delta X} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.2 a}$$

y además

$$\begin{aligned}
 h [ (i-1) \Delta X ] = h_{i-1} = h_i - \Delta X \left. \frac{dh}{dX} \right|_{i\Delta X} + \frac{(\Delta X)^2}{2!} \left. \frac{d^2h}{dX^2} \right|_{i\Delta X} \\
 - \frac{(\Delta X)^3}{3!} \left. \frac{d^3h}{dX^3} \right|_{i\Delta X} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.2 b}$$

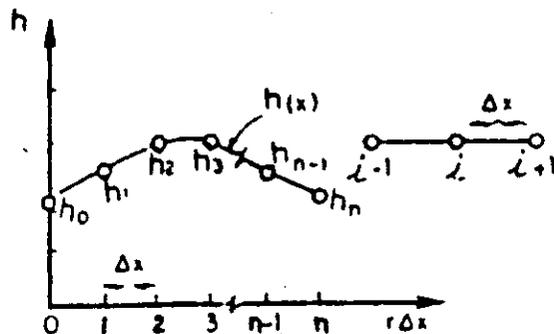


FIGURA 2.1.- Discretización por diferencias finitas de  $h(x)$  para  $n$  incrementos de longitud  $\Delta x$ .

Para aproximar la primera derivada, la despejamos de la ecuación (2.2 a) y obtenemos:

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{i\Delta x} = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{d^2 h}{dx^2} \right|_{i\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 h}{dx^3} \right|_{i\Delta x} - \dots \quad 2.3 a$$

y despejando de la ecuación (2.2 b) obtenemos:

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{i\Delta x} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{d^2 h}{dx^2} \right|_{i\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 h}{dx^3} \right|_{i\Delta x} + \dots \quad 2.3 b$$

Como se puede ver, las series son truncadas después de los primeros términos y se comete un error del orden de  $\Delta x$ . Entonces podemos escribir las ecuaciones (2.3 (a)) y (2.3 (b)) como:

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{i\Delta x} = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 2.4 a$$

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{i\Delta x} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 2.4 b$$

Hasta aquí hemos obtenido una expresión para la derivada (en una variable) en términos de  $\Delta X$ , es decir, discretizamos la primera derivada. Ahora lo que haremos es obtener una discretización para la misma derivada, pero con un error de truncamiento más pequeño.

Esto lo podemos hacer sumando las ecuaciones (2.3 (a)) y (2.3 (b)) y dividiendo entre dos:

$$\frac{dh}{dX} \Big|_{i\Delta X} = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta X} - \frac{(\Delta X)^2}{6} \frac{d^3 h}{dX^3} \Big|_{i\Delta X} + \dots \quad 2.5 a$$

ó bien

$$\frac{dh}{dX} \Big|_{i\Delta X} = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta X} + O[(\Delta X)^2] \quad 2.5 b$$

Cuando  $\Delta X$  se toma suficientemente pequeño la ecuación (2.5) se considera más exacta que la ecuación (2.4).

Por lo pronto sólo hemos discretizado las primeras derivadas; para aproximar derivadas de orden superior, se puede proceder en forma análoga.

Una aproximación para la derivada de segundo orden  $d^2 h/dX^2$ , se puede obtener restando las ecuaciones (2.3 (a)) y (2.3 (b)):

$$0 = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta X} - \Delta X \frac{d^2 h}{dX^2} \Big|_{i\Delta X} - \frac{(\Delta X)^3}{12} \frac{d^4 h}{dX^4} \Big|_{i\Delta X} + \dots$$

reacomodando términos obtenemos:

$$\frac{d^2 h}{dX^2} \Big|_{i\Delta X} = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{(\Delta X)^2} - \frac{(\Delta X)^3}{12} \frac{d^4 h}{dX^4} \Big|_{i\Delta X} + \dots \quad 2.6 a$$

ó bien, la llamada aproximación por diferencias centrales:

$$\frac{d^2 h}{dX^2} \Big|_{i\Delta X} = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{(\Delta X)^2} + O[(\Delta X)^2] \quad 2.6 b$$

En dos variables.

La aproximación de derivadas parciales generalmente es una extensión de la aproximación de derivadas ordinarias. Tomando en cuenta esta discretización y la figura 2.2, podemos escribir la ecuación (2.5 (b)), pero para dos variables de la forma siguiente:

$$\left. \frac{\partial h(X, Y)}{\partial X} \right|_{(\Delta X, j \Delta Y)} = \frac{h_{i+1, j} - h_{i-1, j}}{2\Delta X} + O[(\Delta X)^2] \quad 2.7$$

y para la segunda derivada, de la ecuación (2.6 (b))

$$\left. \frac{\partial^2 h(X, Y)}{\partial X^2} \right|_{(\Delta X, j \Delta Y)} = \frac{h_{i+1, j} - 2h_{i, j} + h_{i-1, j}}{(\Delta X)^2} + O[(\Delta X)^2] \quad 2.8$$

Estas dos ecuaciones (2.7) y (2.8) son aproximaciones para la primera y segunda derivada parcial con respecto a la variable independiente X.

Para la variable independiente Y se hace en forma similar sólo que el subíndice que varía es j. La primera derivada queda:

$$\left. \frac{\partial h(X, Y)}{\partial Y} \right|_{(\Delta X, j \Delta Y)} = \frac{h_{i, j+1} - h_{i, j-1}}{2\Delta Y} + O[(\Delta Y)^2] \quad 2.9$$

y para la segunda derivada

$$\left. \frac{\partial^2 h(X, Y)}{\partial Y^2} \right|_{(\Delta X, j \Delta Y)} = \frac{h_{i, j+1} - 2h_{i, j} + h_{i, j-1}}{(\Delta Y)^2} + O[(\Delta Y)^2] \quad 2.10$$

En flujo de agua subterránea tenemos como modelo la ecuación diferencial parcial en tres dimensiones, pero como se mencionó en el capítulo I podemos considerarlo en dos dimensiones, es decir, considerar flujo horizontal, y entonces la ecuación nos queda (cuando no hay fuentes ni sumideros):

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ K_x \frac{\partial h}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ K_y \frac{\partial h}{\partial Y} \right] + = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad 2.11$$

Multiplicando la ecuación (2.11) por el espesor saturado  $b$  (suponiéndolo constante) obtenemos: -

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ K_x b \frac{\partial h}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ K_y b \frac{\partial h}{\partial Y} \right] = S_s b \frac{\partial h}{\partial t} \quad 2.12$$

como  $T = K b$  y  $S = S_s b$ , donde  $T$  es la transmisibilidad y  $S$  el coeficiente de almacenamiento, la ecuación (2.12) nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ T_x \frac{\partial h}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ T_y \frac{\partial h}{\partial Y} \right] = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad 2.13$$

o en forma simplificada

$$\nabla \cdot (T \nabla h) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad 2.14$$

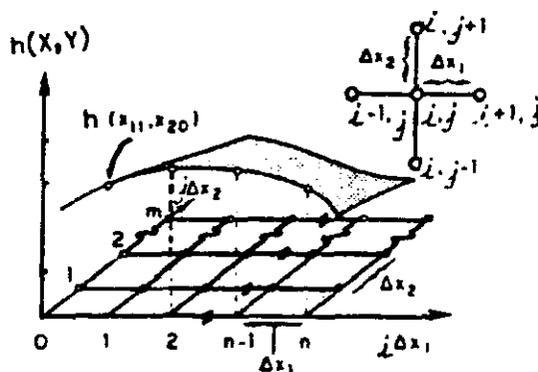


FIGURA 2.2 .- Discretización por diferencias finitas para  $h(X,Y)$  para  $n$  incrementos de  $\Delta X$  y  $m$  incrementos de  $\Delta Y$ .

Aplicar diferencias finitas a la ecuación de flujo (2.13) equivale a escribir la expresión de balance de masa para el rectángulo  $\Delta X \Delta Y$  que se muestra en la figura 2.3. A esto también se le conoce como la discretización de la ecuación, y el objetivo es escribir las derivadas en términos de  $\Delta X$  y  $\Delta Y$ .

Entonces, retomando las ecuaciones (2.8) y (2.10) y sustituyendolas en el lado derecho de la ecuación (2.13), pero considerando a  $T_x$  y  $T_y$  constantes en cada rectángulo  $\Delta X \Delta Y$  tenemos que:

$$\frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j} \right] + \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left[ h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1} \right]$$

representa la tasa neta de influjo, que es igual a la tasa neta de acumulación, la cual toma en cuenta la discretización en el tiempo para la primera derivada de la forma de la ecuación (2.4), tomando en cuenta que en este caso también se involucra al tiempo como variable, entonces se aumenta un superíndice  $k$ , para indicar los incrementos en el tiempo y sustituyendolo en el lado izquierdo

$$S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t}$$

entonces obtenemos

$$\frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j} \right] + \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left[ h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1} \right] = S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} \quad 2.15$$

Aquí  $\Delta t$  es el intervalo del tiempo, definido como:

$$\Delta t = t^{k+1} - t^k$$

Si el lado izquierdo de la ecuación (2.15) se toma a un nivel de tiempo  $k$ , obtenemos el esquema de *Diferencias Explícitas hacia adelante*.

$$\frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k \right] + -$$

$$\frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left[ h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k \right] = S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} \quad 2.16$$

de este esquema podemos obtener  $h_{i,j}^{k+1}$ , despejandola de (2.16),  
(ver figura 2.4)

$$h_{i,j}^{k+1} = h_{i,j}^k + \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k \right] +$$

$$\frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} \left[ h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k \right] \quad 2.17$$

donde

$$\frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k \right] +$$

$$\frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} \left[ h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k \right]$$

es el cambio de  $h_{i,j}$  durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

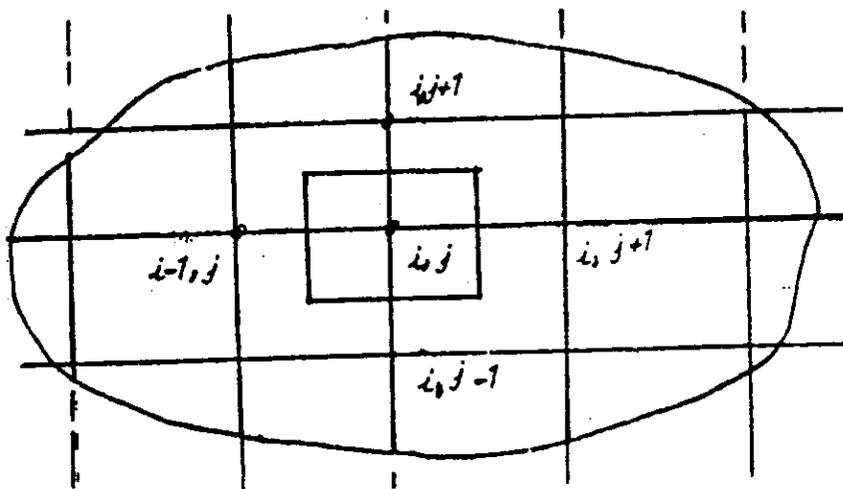


FIGURA 2.3 .- Localización de los nodos  $(i,j)$ ,  
 $(i+1,j)$ ,  $(i-1,j)$ ,  $(i,j+1)$ ,  $(i,j-1)$   
en una malla de dimensiones  $\Delta X \cdot \Delta Y$ .

Ahora bien, si el lado izquierdo de la ecuación (2.15) se toma a un nivel de tiempo  $k + 1$ , obtenemos el esquema de *Diferencias Implícito hacia atrás*. (Ver figura 2.4)

$$\frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left( h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1} \right) + \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left( h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1} \right) = S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} \quad 2.18$$

entonces  $h_{i,j}^k$  nos queda:

$$h_{i,j}^k = h_{i,j}^{k+1} - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \left( h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1} \right) - \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} \left( h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1} \right) \quad 2.19$$

Otra posibilidad es el esquema de *Tiempo Centrado de Crank-Nicolson*. (Ver figura 2.4)

$$\frac{1}{2} \frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left( h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1} \right) + \frac{1}{2} \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left( h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1} \right) + \frac{1}{2} \frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left( h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k \right) + \frac{1}{2} \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left( h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k \right) = S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} \quad 2.20$$

Otro esquema relacionado a este último de Crank-Nicolson, es el esquema *Implícito de Dirección Alternante*. Este esquema se escribe en dos ecuaciones, una para renglones:

$$\frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left( h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1} \right) + \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left( h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k \right) = S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} \quad 2.21$$

y otra para el conjunto de columnas:

$$\frac{Tx}{(\Delta X)^2} \left( h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k \right) +$$

$$\frac{Ty}{(\Delta Y)^2} \left( h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1} \right) = S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t}$$

la ecuación (2.21) es implícita por renglones y la (2.22) es implícita por columnas.

El esquema explícito hacia adelante es el más sencillo de resolver y su nombre se debe a que  $h_{i,j}^{k+1}$  es evaluado en términos de valores conocidos de  $h$ . Podemos proceder de una manera recursiva para calcular el valor de la carga para tiempos futuros, después de que se hayan dado los valores de la carga en un tiempo inicial. En cambio, en los métodos implícitos se necesita conocer valores de  $h$  en el nivel de tiempo  $k+1$ , que son desconocidos.

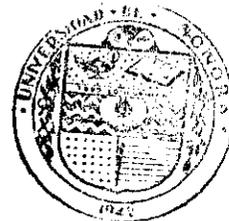
#### CONDICIONES INICIALES Y A LA FRONTERA

Las ecuaciones diferenciales parciales que describen ciertos fenómenos, en especial flujo de agua a través de un medio poroso, tienen un número infinito de posibles soluciones.

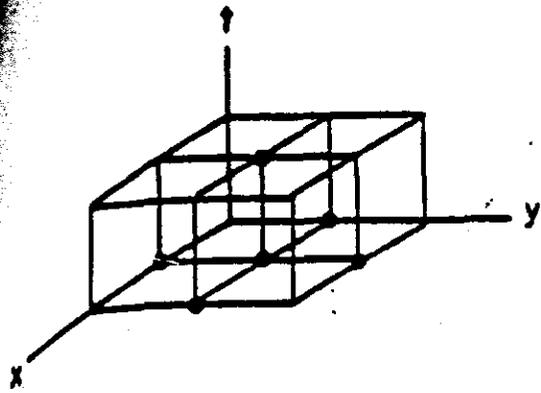
Para obtener de esta multitud de posibles soluciones una solución particular, es necesario tener información adicional que no está contenida en las ecuaciones. Esta información debe incluir especificaciones de:

- El estado inicial del flujo en el dominio, es decir, condiciones iniciales.
- Relación de como interactúa el flujo con sus alrededores, condiciones a la frontera.

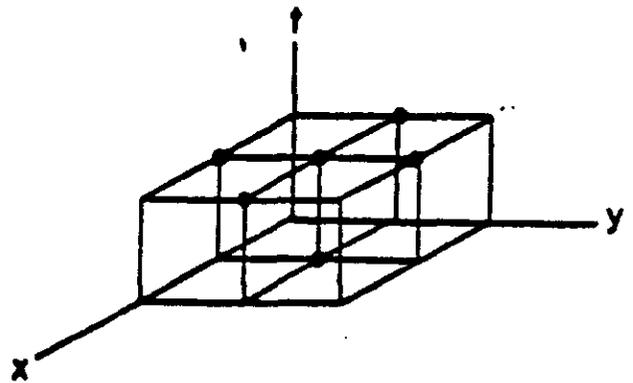
Obviamente las condiciones iniciales y a la frontera son motivadas por la realidad física del flujo. Estas condiciones son determinadas primero en el campo o tomadas en base a la información que se tiene y después expresadas en forma matemática. Diferentes condiciones dan como resultado soluciones distintas, y de aquí la importancia de determinarlas correctamente.



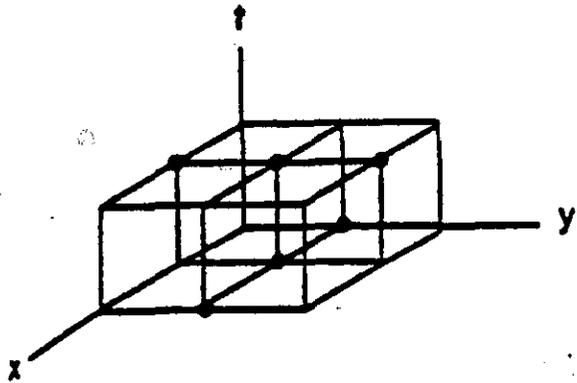
EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI INTELIGENCIA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMATICAS  
2.22



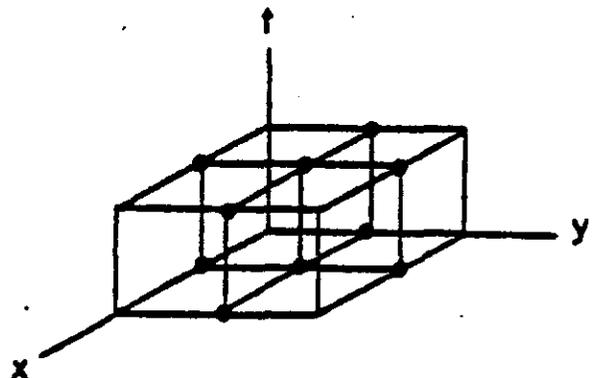
*Diferencias Explícitas hacia adelante*



*Diferencias Implícitas hacia atrás*



*Implícito de Dirección Alternante*



*Implícito de Crank-Nicolson*

FIGURA 2.4. - Esquemas de Diferencias Finitas.

Las condiciones iniciales incluyen las especificaciones de la carga hidráulica  $h$ , para todos los puntos en el dominio a un mismo tiempo inicial, usualmente denotado como  $t = 0$ .

En términos generales las condiciones a la frontera tienen la forma:

$$a h(X, Y) + b \frac{\partial h(X, Y)}{\partial n} = C \quad (X, Y) \in \partial \Omega \quad 2.23$$

donde  $\partial \Omega$  representa la frontera del dominio y  $\partial h / \partial n$  es la derivada respecto a la dirección normal a la frontera. Frecuentemente  $\partial h / \partial n = \partial h / \partial X$  ó  $\partial h / \partial Y$ . Además podemos categorizar a las condiciones como homogéneas si  $C = 0$  y no homogéneas si  $C \neq 0$ .

Si en la ecuación (2.23),  $b = 0$ , tenemos que las condiciones nos quedan

$$a h(X, Y) = C \quad (X, Y) \in \partial \Omega$$

y se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet ó de primer tipo, estas indican un valor específico de  $h$ .

Si en (2.23),  $a = 0$  tenemos

$$b \frac{\partial h}{\partial n} = C$$

en este caso tenemos flujo prescrito y se dicen condiciones de segundo tipo ó de Neumann.

Y por último se tiene el caso más general,  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , que son condiciones mixtas o de tercer tipo.

En la ecuación (2.23),  $a$ ,  $b$  y  $C$  pueden ser funciones de  $X$  y  $Y$ ; estos coeficientes deben tener ciertas propiedades para definir correctamente el sistema. Estas propiedades se obtienen de consideraciones físicas.

Ahora el problema consiste en discretizar las condiciones a la frontera para obtener el problema completo, la ecuación y las condiciones en un esquema de Diferencias Finitas.

Las condiciones de primer tipo o bien de Dirichlet, son como ya se mencionó, con carga  $h$  prescrita. En este caso, se establece para todos o algunos de los puntos en la frontera y simplemente se transfieren términos con  $h$  conocida al lado derecho de la ecuación. Por ejemplo, consideremos el esquema de diferencias implícito, en donde el nodo  $i, j-1$  es uno de la frontera (Figura 2.5), entonces se tiene de la ecuación (2.18) que:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i,j+1}^{k+1} - \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i,j-1}^{k+1} + \left[ 1 + 2 \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} + 2 \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \right] h_{i,j}^{k+1} \\
 & - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} h_{i-1,j}^{k+1} - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} h_{i+1,j}^{k+1} = h_{i,j}^k \quad 2.25
 \end{aligned}$$

como  $h_{i,j-1}^{k+1}$  es conocida, reescribimos la ecuación pasando este término conocido al lado derecho y obtenemos

$$\begin{aligned}
 & - \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i,j+1}^{k+1} + \left[ 1 + 2 \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} + 2 \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \right] h_{i,j}^{k+1} - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} h_{i-1,j}^{k+1} \\
 & - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} h_{i+1,j}^{k+1} = h_{i,j}^k + \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i,j-1}^{k+1} \quad 2.26
 \end{aligned}$$

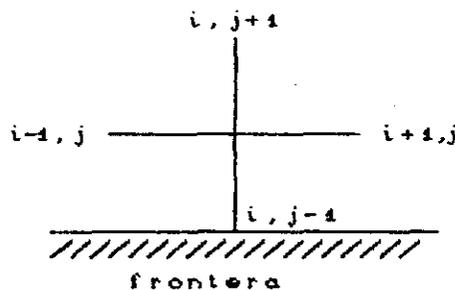


FIGURA 2.5.- Discretización de la frontera de Dirichlet.

Para las condiciones de Neumann o de segundo tipo, lo que tenemos es flujo preescrito, es decir,  $\partial h / \partial n$  es una función conocida, donde  $n$  es  $X$  ó  $Y$  dependiendo de cual sea la frontera. Si se considera la misma frontera que en el caso anterior tenemos entonces que la condición a la frontera estaría dada por

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial y} = g \quad 2.27$$

discretizando esta derivada parcial tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial Y} = \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta Y} = g \quad 2.28$$

De acuerdo a la figura (2.6) tenemos que el nodo  $i, j$  es el que está en la frontera, por lo tanto el nodo  $i, j-1$  es aquel en el que no conocemos  $h$ , es un nodo ficticio.

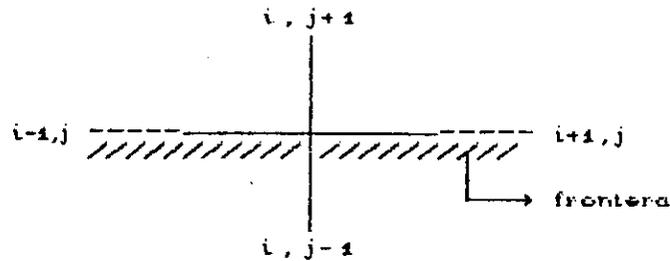


FIGURA 2.6 .- Discretización de una frontera de Neuman.

Pero como en el nodo  $i, j+1$  la carga  $h$  sí es conocida, la carga en el nodo  $i, j-1$  se despeja de la ecuación (2.28) y obtenemos que

$$h_{i, j-1} = h_{i, j+1} - 2g \Delta y \quad 2.29$$

El nivel de tiempo se establece de acuerdo al esquema que se emplee al hacer la discretización de ese nodo de la frontera. Por ejemplo, en el caso del esquema implícito, la discretización de acuerdo con la ecuación (2.25), el nodo  $i, j-1$  lo tomamos en el nivel  $k+1$  y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i, j+1}^{k+1} - \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i, j+1}^{k+1} \left[ h_{i, j+1}^{k+1} - 2g \Delta Y \right] \\
 & + \left[ 1 + 2 \frac{T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} + 2 \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \right] h_{i, j}^{k+1} \\
 & - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} h_{i-1, j}^{k+1} - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} h_{i+1, j}^{k+1} = h_{i, j}^k \quad 2.30
 \end{aligned}$$

acomodando términos

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2 T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} h_{i,j+1}^{k+1} + \frac{2 T_y \Delta t g}{S (\Delta Y)^2} + \left[ 1 + \frac{2 T_y \Delta t}{S (\Delta Y)^2} + \frac{2 T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \right] h_{i,j}^{k+1} \\
 & - \frac{T_x \Delta t}{S (\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1} \right] = h_{i,j}^k \quad 2.31
 \end{aligned}$$

Y por último para las condiciones de tercer tipo solo se combinan las dos formas anteriores.

Cuando el término fuente y/o sumidero aparece en la ecuación de flujo, entonces la ecuación en diferencias en el nodo  $(i,j)$  podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
 S \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} - q_{i,j}^{k+1} &= \frac{T_x}{(\Delta X)^2} \left[ h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1} \right] + \\
 & \frac{T_y}{(\Delta Y)^2} \left[ h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1} \right] \quad 2.32
 \end{aligned}$$

donde  $q_{i,j}^{k+1}$  es la tasa de agua agregada o disminuida por unidad de área [ $L^3/t$ ].

#### CONSISTENCIA Y CONVERGENCIA.

En esta parte analizaremos los conceptos de consistencia y convergencia de la aproximación por diferencias finitas y en la siguiente sección la estabilidad.

Para esto es necesario que los modelos de ecuaciones diferenciales parciales estén "bien planteados", como también tener soluciones únicas. El término "bien planteado" significa que la solución de la ecuación diferencial parcial tenga pequeñas variaciones con respecto a la solución original cuando se perturban levemente las condiciones iniciales. Esto equivale a decir que la ecuación diferencial parcial represente, verdaderamente, el prototipo del sistema.

En términos generales se puede decir que la estabilidad refiere a las limitaciones de las perturbaciones en las soluciones calculadas. En otras palabras, cuando la magnitud de las perturbaciones en las condiciones iniciales se hacen arbitrariamente pequeñas cuando  $\Delta X$  y  $\Delta Y$  tienden a cero, la perturbación resultante en la solución debe desaparecer en lugar de crecer; en este caso las soluciones basadas en una aproximación en diferencias finitas consistente convergen a la solución de la ecuación diferencial parcial. Dicho de otra forma, el obtener convergencia de una solución numérica basada en una aproximación en diferencias finitas depende de la consistencia de la aproximación.

La importancia del concepto de consistencia se establece en el teorema de Lax, el cual dice que si una ecuación en diferencias finitas lineal es consistente con el problema lineal con condiciones iniciales, entonces el que haya estabilidad garantiza la convergencia, cuando  $\Delta X$  y  $\Delta Y$ , las longitudes de la malla, tienden a cero.

Para definir en forma general la consistencia, representaremos a la ecuación diferencial parcial con solución exacta  $U$  como  $L(U)=0$  y a la aproximación en diferencias finitas con solución exacta  $u$  como  $F(u)=0$ .

Sea  $v$  una función continua con suficientes derivadas continuas para facilitar que  $L(v)$  se evaluado en el punto  $(k\Delta t, i\Delta X)$ , en una dimensión. Entonces el error de truncamiento  $T_i^k(v)$  en el punto  $(k\Delta t, i\Delta X)$  esta definido por

$$T_i^k(v) = F_i^k(v) - L(v_i^k)$$

Si  $T_i^k(v)$  tiende a cero cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta X \rightarrow 0$ , se dice que la ecuación en diferencias es consistente o compatible con la ecuación diferencial parcial. Con esta definición  $T_i^k$ , indica el error resultante al reemplazar  $L(v_i^k)$  por  $F_i^k(v)$ .

Primeramente haremos el análisis para la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

Y NATURALES

Muy parecida al modelo de flujo de agua subterránea, sólo en una dimensión. Para la discretización de  $\partial U / \partial t$  y  $\partial^2 U / \partial X^2$  se desarrolla la serie de Taylor alrededor de  $U_{i,j}$ . Esta discretización se puede escribir de la forma

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{(\Delta X)^2} + \left[ \frac{\Delta t}{2} - \frac{(\Delta X)^2}{12} \right] \frac{\partial^4 U}{\partial X^4}$$

tenemos que el error de truncamiento es

$$\left[ \frac{\Delta t}{2} - \frac{(\Delta X)^2}{12} \right] \frac{\partial^4 U}{\partial X^4}$$

y tomando  $\Delta X \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  tenemos que el error de truncamiento tiende a cero por lo que podemos decir que es consistente con la ecuación diferencial parcial. Esta aproximación es la explícita clásica.

También es necesario decir lo mismo para las condiciones a la frontera, el análisis es el mismo donde las condiciones a la frontera son reemplazadas (si es necesario) por diferencias finitas.

Las aproximaciones por diferencias finitas presentadas aquí son consistentes con la ecuación diferencial parcial del tipo parabólica, pero debemos diferenciar aquellas que son incondicionalmente consistentes y las que son condicionalmente consistentes. La aproximación explícita clásica es incondicionalmente consistente ya que no hay que mantener una relación especial entre  $\Delta X$  y  $\Delta t$  para poder eliminar el error cuando  $\Delta X$  y  $\Delta t$  tienden a cero. Aunque ésta es la situación en muchos casos, hay excepciones. Por ejemplo, la aproximación de Dufort-Frankel, en la cual el error de truncamiento local tiene la forma

$$-\frac{(\Delta X)^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta X)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad 2.34$$

La consistencia en este caso, depende de la forma en que  $\Delta t$  y  $\Delta X$  tienden a cero.

Si  $\Delta t$  tiende a cero más rápido que  $\Delta X$ , el último término de la ecuación (2.34) también se va a cero junto con los otros dos términos. En este caso es consistente. Si  $\Delta t/\Delta X = C = \text{constante}$  y  $\Delta t$  y  $\Delta X$  tendiendo a cero en la misma razón entonces el error de truncamiento en (3.34) no tiende a cero y la aproximación no es consistente con la ecuación diferencial parcial (2.33). Entonces esta aproximación es condicionalmente estable.

Una aproximación por diferencias finitas se dice convergente si

$$\| \bar{U}_i^k - U_i^k \| \longrightarrow 0$$

cuando  $\Delta t$  y  $\Delta X \rightarrow 0$ . Aquí  $\| \cdot \|$  es la norma de la diferencia entre el valor exacto  $\bar{U}$  y el valor calculado  $U$ , para un punto fijo. Esto nos asegura que la aproximación por diferencias se acerca a la solución exacta por refinamiento de la malla. En ocasiones se pueden derivar estimaciones de la forma

$$\| \bar{U}_i^k - U_i^k \| \leq M (\| T.E \|) \quad 2.35$$

donde T.E es el error de truncamiento para la aproximación en diferencias finitas. Si  $M$  es independiente de  $\Delta t$  y  $\Delta X$  entonces (2.35) especificaría una convergencia condicional y se necesitarían los valores de  $\Delta t$  y  $\Delta X$ . También en este análisis se pueden incluir las condiciones a la frontera. En tal caso el lado derecho de (2.35) queda  $M(\| T.E \| + \| \phi \|)$ , donde  $\phi$  representa el error de truncamiento de la aproximación de las condiciones a la frontera. En nuestro análisis no se incluirán.

Llamemos

$$E_i^k = \bar{U}_i^k - U_i^k$$

Como un ejemplo tomaremos la aproximación explícita de la forma

$$U_i^{k+1} = (1-2\rho)U_i^k + \rho(U_{i+1}^k + U_{i-1}^k) + O((\Delta t)^2 + (\Delta X)^2) \quad 2.36$$

en términos de errores

$$E_i^{k+1} = (1-2\rho)E_i^k + \rho(E_{i+1}^k + E_{i-1}^k) + O((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta X)^2) \quad 2.37$$

Esta es una ecuación en diferencias lineal para  $E_i^k$ . Notese que los tres coeficientes  $(1-2\rho)$ ,  $\rho$  y  $\rho$  suman 1 para cualquier valor de  $\rho$ , además, son positivos si  $0 < \rho < 1/2$ , entonces  $E_{i+1}^k$  es un promedio con coeficientes positivos de los otros términos y no puede estar debajo del mínimo o arriba del máximo de los otros términos del error.

Tomando valores absolutos en (2.37) obtenemos

$$\left| E_i^{k+1} \right| \leq (1-2\rho) \left| E_i^k \right| + \rho \left| E_{i+1}^k \right| + \rho \left| E_{i-1}^k \right| + A((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta X)^2) \quad 2.38$$

Aquí  $A$  es el límite superior de las derivadas en la forma explícita de los errores de truncamiento local, y  $\rho$  está entre los valores de 0 y  $1/2$ . Además se tiene que cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta X \rightarrow 0$ , y tomando a  $(\Delta X)^2/\rho = \Delta t$ , tenemos que el error tiende a cero, entonces la aproximación explícita es convergente si  $0 \leq \rho \leq 1/2$ .

Cuando  $\rho > 1/2$ , esta aproximación no se puede usar y entonces se debe resolver (2.37). El resultado es que  $E_i^k$  no se puede acotar cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , por lo que se dice que esta aproximación es condicionalmente convergente.

Ejemplos de aproximaciones incondicionalmente convergentes, es decir, convergen para cualesquier valor de  $\rho$ , son la implícita hacia atrás y la de Crank-Nicolson.

#### ESTABILIDAD.

Esta forma de análisis no tiene nada que ver con la ecuación diferencial parcial, pero sí concierne al crecimiento inestable o decrecimiento estable de los errores en las operaciones aritméticas, necesarias para resolver las ecuaciones en diferencias finitas. Que estos errores se amplifiquen o disminuyan es lo que caracteriza la propiedad de estabilidad del esquema numérico.

Si una aproximación es estable aseguramos que los errores computacionales son pequeños. De nuevo, encontraremos el término "condicional" e "incondicional", pero referido a la estabilidad de una aproximación en diferencias finitas. De la misma forma, un esquema condicionalmente estable implica que los valores de  $\Delta t$  y  $\Delta X$  seguirán restringidos.

Muchas de las aproximaciones por diferencias finitas explícitas son condicionalmente estables, pero las aproximaciones implícitas son incondicionalmente estables. Por ejemplo la aproximación explícita (2.36) es condicionalmente estable ya que para  $\rho \leq 1/2$  es estable y esto implica una restricción para  $\Delta t$  y  $\Delta X$ .

La estabilidad o inestabilidad es un factor que debe analizarse cuidadosamente.

La estabilidad en cualquier algoritmo es una condición necesaria y suficiente para que un esquema pueda considerarse exacto. Lo que significa es que un esquema inestable es no convergente; por ejemplo, el esquema explícito en el caso en que  $\rho > 1/2$ . La relación formal entre estabilidad y convergencia es conocido como el "Teorema de Lax", que dice:

" Dada una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico con condiciones iniciales y a la frontera y una aproximación en diferencias finitas que satisfaga la condición de consistencia, entonces la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia. "

La demostración de este teorema requiere de Análisis Funcional, y se presenta en el apéndice A.

#### ESTABILIDAD DE VON NEUMAN.

En una dimensión.

El procedimiento mas ampliamente usado para determinar la estabilidad (o inestabilidad) de una aproximación en diferencias finitas es el de Von Neumann.

Consiste en introducir un nivel inicial de errores que se representa por una serie de Fourier finita y considerar el crecimiento (o disminución) de estos errores para incrementos de  $X$ . El método es aplicable solo a problemas con condiciones iniciales, además solo es aplicable a problemas lineales, con coeficientes constantes y aproximación por diferencias finitas. Si la condición de linealidad no se cumple, es necesario tener linealidad local. Gracias a la linealidad, cada componente de Fourier puede ser tratada por separado y usar la superposición para agregar las demás componentes. La condición de Von Neumann siempre produce una condición para estabilidad y en muchos casos es una condición suficiente.

Primeramente consideraremos una aproximación en diferencias finitas en la cual  $u_l^k$  sea una cantidad escalar, y además, tomaremos una descomposición armónica del error para los puntos de la malla en un nivel  $X$

$$E(X) = \sum_{s=1}^S \Delta_s e^{i\beta_s x} \quad 2.39$$

donde  $S$  es el número de puntos en la malla en el nivel  $t$ ,  $|\beta_s|$  es la frecuencia de error,  $i$  es el número complejo  $\sqrt{-1}$ . Gracias a la linealidad solo consideraremos uno de estos  $S$  términos,  $u^{i\beta t}$ , (donde  $\beta$  es real), que significa que cada crecimiento (o disminución) se trata por separado.

Ahora escribiremos la solución de la aproximación por diferencias finitas en forma separada como

$$E(t, X) \approx e^{\Gamma t} \cdot e^{i\beta x} \quad 2.40$$

Donde  $\Gamma = \Gamma(\beta)$  que en general es complejo. Notese que la solución para  $k = 0$  es igual al error introducido en  $t = 0$ , además el orden del error original no aumenta cuando  $t$  incrementa,

$$|e^{\Gamma t}| \leq 1$$

Para todo  $\Gamma$ . Otra forma en la que podemos escribir esta condición de estabilidad es

DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$|e^{\Gamma \Delta t}| \leq 1 \quad \text{Condición de Von Neumann} \quad 2.41 \text{ a}$$

En general definimos  $\xi \equiv e^{\Gamma \Delta t} \equiv$  factor de amplificación y entonces (2.41 a) queda

$$|\xi| \leq 1 \quad 2.41 \text{ b}$$

Para ilustrar el uso de (2.41 b) consideremos las aproximaciones por diferencias finitas para el modelo de la ecuación diferencial parcial (2.33), desarrollada anteriormente.

Primeramente trataremos con la aproximación EXPLÍCITA clásica (2.36), la cual escribiremos pero con respecto a los errores

$$E_i^{k+1} = (1-2\rho)E_i^k + \rho(E_{i+1}^k + E_{i-1}^k) \quad 2.42 \text{ a}$$

sustituyendo (2.40) en la forma

$$E_i^k = e^{\Gamma k \Delta t} e^{-i\beta \Delta x} = \xi^k e^{-i\beta \Delta x} \quad 2.42 \text{ b}$$

obtenemos

$$\xi^{k+1} e^{-i\beta \Delta x} = (1-2\rho)\xi^k e^{-i\beta \Delta x} + \rho \left[ \xi^k e^{-i\beta(i+1)\Delta x} + \xi^k e^{-i\beta(i-1)\Delta x} \right]$$

cancelando términos comunes obtenemos

$$\xi = (1-2\rho) + \rho \left[ e^{-i\beta \Delta x} + e^{-i\beta \Delta x} \right]$$

usando la identidad trigonométrica

$$1 - \cos \beta \Delta x = 2 \operatorname{Sen} \frac{\beta \Delta x}{2}$$

y la definición de que  $e^{-i\beta \Delta x} + e^{-i\beta \Delta x} = 2 \cos \beta \Delta x$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - 2\rho + 2\rho \cos \beta \Delta x \\ &= 1 - 2\rho(1 - \cos \beta \Delta x) \end{aligned}$$

$$\xi = 1 - 4\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} \quad 2.43$$

Entonces tenemos una expresión desarrollada para el factor de amplificación  $\xi$ , para la aproximación explícita. Ahora solo necesitamos saber cuando  $|\xi| \leq 1$ .

Entonces necesitamos considerar las condiciones para las cuales

$$-1 \leq 1 - 4\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2} \leq 1$$

vemos que

a).- la cota superior es 1 y que se satisface automáticamente cuando  $\rho > 0$

b).- Cuando  $\xi \geq 0$  la solución (2.42 b) decrece constantemente

c).- para  $-1 < \xi < 0$ , la solución decrece, pero oscilando

d).- para  $\xi < -1$  la solución (2.42 b) oscila incrementando la magnitud. Esta es una condición de inestabilidad.

Entonces para tener estabilidad

$$1 - 4\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2} \geq -1$$

$$\rho \leq \frac{1}{2 \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2}}$$

aquí el máximo valor de  $\operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2}$  para cambios de  $\Delta X$  es 1 así que

$$\rho \leq 1/2$$

entonces la aproximación es condicionalmente estable con un límite de estabilidad de

$$0 < \rho \leq 1/2 \quad (\text{Explícita}) \quad 2.44$$

Si además no queremos oscilación en la estabilidad

$$\xi = 1 - 4\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2} \geq 0$$

$$0 < \rho \leq \frac{1}{2(1 - \operatorname{Cos} \beta\Delta X)} \quad 2.45$$

En la aproximación IMPLÍCITA hacia atrás para la misma ecuación (2.33), tenemos que en diferencias finitas toma la forma

$$U_i^k = (1+2\rho)U_{i+1}^k - \rho(U_{i+1}^{k+1} + U_{i+1}^{k-1}) \quad 2.46$$

sustituyendo (2.42 b) obtenemos

$$u_i^k = (1+2\rho)\xi^{i+1}\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{i\Delta X} - \rho\left[\xi^{i+1}\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{(i+1)\Delta X} + \xi^{i+1}\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{(i-1)\Delta X}\right]$$

eliminando términos comunes:

$$1 = (1+2\rho)\xi + \rho\xi\left[\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{\Delta X} + \bar{\xi}^i\bar{\rho}^{-\Delta X}\right]$$

Esta expresión puede ser reescrita

$$1 = \xi [1 + 2\rho - \rho(2 \cos \beta\Delta X)]$$

$$1 = \xi [1 + 2\rho(1 - \cos \beta\Delta X)]$$

$$1 = \xi \left[1 + 4\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2}\right]$$

entonces el factor de amplificación es:

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta\Delta X}{2}} \quad \text{implícito} \quad 2.47$$

y este factor cumple con  $|\xi| \leq 1$  para todos los valores de  $\rho$ , razón por la cual este esquema, implícito, es incondicionalmente estable.

La aproximación de Crank-Nicolson para la ecuación (2.33) se puede escribir de la forma

$$2(1+\rho)U_{i+1}^k - \rho(U_{i+1}^{k+1} + U_{i+1}^{k-1}) = 2(1-\rho)U_i^k + \rho(U_i^{k+1} + U_i^{k-1})$$

podemos analizar su estabilidad de la misma forma, sustituyendo (2.42 b) obtenemos

$$\begin{aligned} & 2(1+\rho)\xi^{i+1}\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{i\Delta X} - \rho\left[\xi^{i+1}\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{(i+1)\Delta X} + \xi^{i+1}\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{(i-1)\Delta X}\right] \\ & = 2(1-\rho)\xi^i\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{i\Delta X} + \rho\left[\xi^i\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{(i+1)\Delta X} + \xi^i\bar{\xi}^i\bar{\rho}^{(i-1)\Delta X}\right] \end{aligned}$$

cancelando términos y utilizando identidades trigonométricas obtenemos

$$\xi \left( 1 + 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2} \right) = 1 - 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2}$$

entonces

$$\xi = \frac{1 - 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2}}{1 + 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2}} \quad \text{Crank-Nicolson} \quad 2.48$$

se puede ver que para cualquier  $\rho$  y  $\beta \Delta X$ , tenemos que  $|\xi| \leq 1$  y por lo tanto la aproximación es incondicionalmente estable.

En dos dimensiones.

Para analizar la estabilidad de los esquemas en diferencias finitas, pero en dos dimensiones, tomaremos la discretización en diferencias finitas de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} \quad 2.49$$

Para denotar a  $U(t, X_1, X_2)$  usaremos  $U_{i,j}^k$  con incrementos en los valores de la malla para  $t, X_1, X_2$  como  $\Delta t, \Delta X_1$  y  $\Delta X_2$ , además, supondremos que los incrementos de  $X_1$  y  $X_2$ ,  $\Delta X_1$  y  $\Delta X_2$  respectivamente son iguales ( $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \Delta X$ ).

Primeramente tomaremos la aproximación en diferencias finitas EXPLICITA para (2.49)

$$\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta X)^2} \left( U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k + U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k \right)$$

o bien, escrita de la forma

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \rho \left( U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^k - 4U_{i,j}^k \right) \quad 2.50$$

Este método involucra una evaluación punto por punto en el plano  $k+1$  usando los puntos del plano  $k$ . Dadas las condiciones iniciales para  $i=0$ , se sigue fácilmente el evaluar plano por plano.

La estabilidad de la aproximación explícita se puede obtener con el método de von Neumann. La extensión de (2.40) para el caso de dos dimensiones queda

$$E(t, X_1, X_2) \approx e^{\Gamma t} e^{i\bar{\beta}_1 X_1} e^{i\bar{\beta}_2 X_2} = e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 i \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 j \Delta X}$$

donde  $\bar{i} = \sqrt{-1}$ , y sustituyendo en (2.50) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{\Gamma(k+1)\Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 i \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 j \Delta X} &= e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 i \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 j \Delta X} \\ + \rho \left[ e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 (i+1) \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 j \Delta X} + e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 (i-1) \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 j \Delta X} \right. \\ &\quad \left. + e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 i \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 (j+1) \Delta X} + e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 i \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 (j-1) \Delta X} \right. \\ &\quad \left. - 4 e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\bar{\beta}_1 i \Delta X} e^{i\bar{\beta}_2 j \Delta X} \right] \end{aligned}$$

eliminando términos

$$e^{\Gamma k \Delta t} = 1 + \rho \left[ e^{i\bar{\beta}_1 \Delta X} + e^{-i\bar{\beta}_1 \Delta X} + e^{i\bar{\beta}_2 \Delta X} + e^{-i\bar{\beta}_2 \Delta X} \right]$$

usando las identidades  $1 - \cos \beta \Delta X = 2 \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2}$  y

$$e^{i\bar{\beta} \Delta X} + e^{-i\bar{\beta} \Delta X} = 2 \operatorname{Cos} \beta \Delta X, \text{ obtenemos}$$

$$e^{\Gamma \Delta t} = 1 - 4\rho \left[ \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right]$$

y como lo hicimos en una dimensión llamamos a  $e^{\Gamma \Delta t} = \xi$  el factor de amplificación y como requerimos que  $|\xi| \leq 1$  para que el esquema sea estable entonces

$$-1 \leq 1 - 4\rho \left[ \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right] \leq 1$$

como  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son arbitrarios tenemos que

$$-1 \leq -2\rho \left[ \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right]$$

Entonces tenemos que

$$-1 \leq -4\rho$$

o

$$\rho \leq \frac{1}{4}$$

Además,

$$\rho \leq \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right]^{-1}$$

Si no suponemos que  $k_1 = k_2 = k$ , es decir, si tomamos  $K_1$  y  $K_2$ , el límite de la estabilidad quedaría

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta X_1)^2} + \frac{1}{(\Delta X_2)^2} \right]^{-1}$$

Entonces el método explícito es condicionalmente estable.

Para los métodos implícitos en una dimensión se demostró que tienen estabilidad incondicional. Analizaremos ahora la estabilidad de los esquemas implícitos hacia atrás y de Crank-Nicolson.

La aproximación IMPLÍCITA hacia atrás la podemos escribir de la forma

$$(1+4\rho)U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \rho \left[ U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} \right] \quad 2.52$$

Sustituyendo (2.51) en (2.52) obtenemos:

$$\begin{aligned} (1+4\rho) e^{\Gamma(k+1)\Delta t} e^{\bar{i}\beta_1 i \Delta X} e^{\bar{j}\beta_2 j \Delta X} &= e^{\Gamma k \Delta t} e^{\bar{i}\beta_1 i \Delta X} e^{\bar{j}\beta_2 j \Delta X} \\ + \rho \left[ e^{\Gamma(k+1)\Delta t} e^{\bar{i}\beta_1 (i+1) \Delta X} e^{\bar{j}\beta_2 j \Delta X} + e^{\Gamma(k+1)\Delta t} e^{\bar{i}\beta_1 (i-1) \Delta X} e^{\bar{j}\beta_2 j \Delta X} \right. \\ &\left. + e^{\Gamma(k+1)\Delta t} e^{\bar{i}\beta_1 i \Delta X} e^{\bar{j}\beta_2 (j+1) \Delta X} + e^{\Gamma(k+1)\Delta t} e^{\bar{i}\beta_1 i \Delta X} e^{\bar{j}\beta_2 (j-1) \Delta X} \right] \end{aligned}$$



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI PROVEENDEZA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO  
BIBLIOTECA  
MATEMATICAS

cancelando términos obtenemos

$$e^{\Gamma \Delta t} = 1 + e^{\Gamma \Delta t} \rho \left[ e^{i\beta_1 \Delta X} + e^{-i\beta_1 \Delta X} + e^{i\beta_2 \Delta X} + e^{-i\beta_2 \Delta X} - 4 \right]$$

utilizando las identidades

$$1 - \cos \beta \Delta X = 2 \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2} \quad 2.53$$

$$y \quad e^{i\beta \Delta X} + e^{-i\beta \Delta X} = 2 \operatorname{Cos} \beta \Delta X \quad 2.54$$

llegamos a

$$e^{\Gamma \Delta t} = \left[ 1 + 4\rho \left( \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right) \right]^{-1}$$

y como antes la condición de estabilidad se debe dar para  $|e^{\Gamma \Delta t}| \leq 1$ . En este caso la condición siempre se cumple ya

que  $\left[ 1 + 4\rho \left( \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right) \right]^{-1}$  siempre es mayor o igual a uno.

Para la aproximación de CRANK-NICOLSON usamos la representación

$$\begin{aligned} (1+2\rho)U_{i,j}^{k+1} - (1-2\rho)U_{i,j}^k &= \frac{\rho}{2} \left[ U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} \right] \\ &+ \frac{\rho}{2} \left[ U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^k \right] \quad 2.55 \end{aligned}$$

y análogamente, como en el caso implícito hacia atrás, sustituimos (2.51) en (2.55), eliminamos términos semejantes y utilizamos las ecuaciones (2.53) y (2.54) hasta obtener

$$e^{\Gamma \Delta t} = \left[ 1 - 2\rho \left( \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right) \right] \left[ 1 + 2\rho \left( \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} + \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right) \right]^{-1}$$

que cumple con la condición  $|e^{\Gamma \Delta t}| \leq 1$  para cualesquier  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

Otro esquema implícito es el de DIRECCIONES ALTERNANTES, el cual tiene una representación para los renglones y otra para las columnas. Primeramente, analizaremos la estabilidad por separado para renglones y para columnas.

a). - Por renglones. Tenemos que el esquema se puede escribir de la forma

$$U_{i,j}^{k+1/2} - \frac{\rho}{2} \left[ U_{i+1,j}^{k+1/2} - 2U_{i,j}^{k+1/2} - U_{i-1,j}^{k+1/2} \right] = U_{i,j}^k + \frac{\rho}{2} \left[ U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k \right] \quad 2.56$$

sustituyendo (2.51) en (2.56) obtenemos

$$\begin{aligned} & e^{\Gamma k \Delta t + 1/2} e^{i\beta_1 i \Delta X} e^{i\beta_2 j \Delta X} - \frac{\rho}{2} \left[ e^{\Gamma(k+1/2)\Delta t} e^{i\beta_1 (i+1) \Delta X} e^{i\beta_2 j \Delta X} \right. \\ & \left. - 2e^{\Gamma(k+1/2)\Delta t} e^{i\beta_1 i \Delta X} e^{i\beta_2 j \Delta X} + e^{\Gamma(k+1/2)\Delta t} e^{i\beta_1 (i-1) \Delta X} e^{i\beta_2 j \Delta X} \right] \\ & = e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\beta_1 i \Delta X} e^{i\beta_2 j \Delta X} + \frac{\rho}{2} \left[ e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\beta_1 i \Delta X} e^{i\beta_2 (j+1) \Delta X} \right. \\ & \left. - 2e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\beta_1 i \Delta X} e^{i\beta_2 j \Delta X} + e^{\Gamma k \Delta t} e^{i\beta_1 i \Delta X} e^{i\beta_2 (j-1) \Delta X} \right] \end{aligned}$$

cancelando términos comunes y agrupando tenemos que

$$e^{1/2 \Gamma \Delta t} \left[ 1 - \frac{\rho}{2} \left( e^{i\beta_1 \Delta X} + e^{-i\beta_1 \Delta X} - 2 \right) \right] = 1 + \frac{\rho}{2} \left( e^{i\beta_2 \Delta X} + e^{-i\beta_2 \Delta X} - 2 \right)$$

usando las ecuaciones (2.53) y (2.54) obtenemos

$$e^{1/2 \Gamma \Delta t} = \left[ 1 - 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} \right] \left[ 1 + 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right]^{-1} \quad 2.57 a$$

b).- Por columnas, el esquema que se tiene es

$$U_{i,j}^{k+1} - \frac{\rho}{2\tau} \left[ U_{i+1,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1} \right] = U_{i,j}^{k+1/2} + \frac{\rho}{2\tau} \left[ U_{i,j+1}^{k+1/2} - 2U_{i,j}^{k+1/2} + U_{i,j-1}^{k+1/2} \right]$$

utilizando el mismo procedimiento que para renglones llegamos a que

$$e^{1/2\tau\Delta t} = \left[ 1 - 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right] \left[ 1 + 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} \right]^{-1} \quad 2.57 \text{ b}$$

Cada uno de los factores (2.57 a) y (2.57 b) tienen estabilidad condicional, esto se puede ver rápidamente, por ejemplo, si tomamos a  $\beta_2 = 0$  en (2.57 a) se convierte en la condición de estabilidad del método explícito, y que como se mencionó anteriormente es condicionalmente estable. Lo mismo sucede para (2.57 b), cuando  $\beta_1 = 0$ .

Sin embargo al acoplar los esquemas obtenemos el factor para el método explícito completo:

$$\xi = \xi_a \xi_b \quad 2.58$$

donde  $\xi$  es el factor de amplificación del método de dirección alternante (completo) y  $\xi_a$  es para columnas y  $\xi_b$  para renglones.

Tenemos

$$\xi = \frac{\left[ 1 - 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} \right] \left[ 1 - 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right]}{\left[ 1 + 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_1 \Delta X}{2} \right] \left[ 1 + 2\rho \operatorname{Sen}^2 \frac{\beta_2 \Delta X}{2} \right]}$$

el cual cumple con  $|\xi| \leq 1$  para cualesquier valor de  $\rho$ . Es decir, el método de direcciones alternantes es incondicionalmente estable.

UNIVERSIDAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍA

# CAPITULO III

## EJEMPLO

### EJEMPLO SINTETICO.

Consideremos la región de flujo de la figura, suponiendo que se trata de un medio homogéneo, isotrópico y en estado transiente, donde la transmisibilidad  $T = 1$  y el coeficiente de almacenamiento  $S = 1$ , además no hay fuentes ni sumideros. Entonces la ecuación que rige el flujo esta dada por

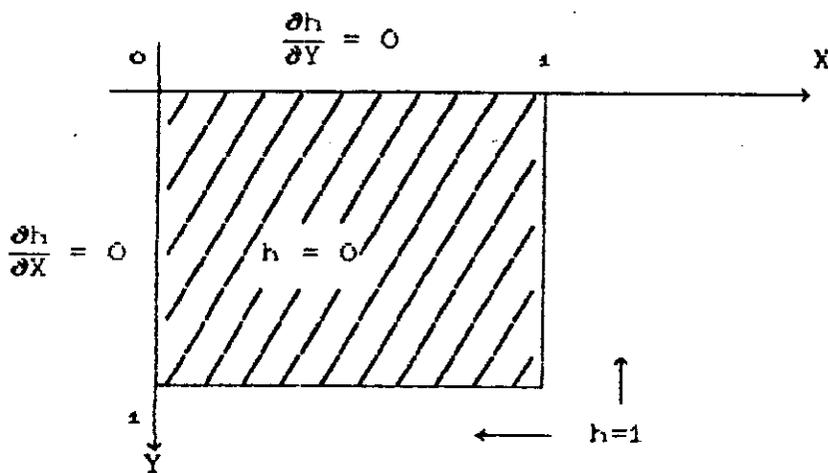
$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad ; \quad 0 \leq X, Y \leq 1; t \geq 0 \quad 3.1$$

sujeta a las condiciones iniciales y a la frontera

$$h(X, Y, 0) = 0$$

$$h(1, Y, t) = h(X, 1, t) = 1 \quad 3.2$$

$$\frac{\partial h}{\partial X}(0, Y, t) = \frac{\partial h}{\partial Y}(X, 0, t) = 0$$



DE CIENCIAS EXACTAS

a). - Solución por el esquema de Diferencias Finitas EXPLICITO, para el ejemplo sintético.

Para esta ecuación diferencial, junto con las condiciones iniciales y a la frontera, consideremos primeramente el esquema EXPLICITO hacia adelante con una malla determinada por  $\Delta X = \Delta Y = 0.1$ . (Figura 3.1).

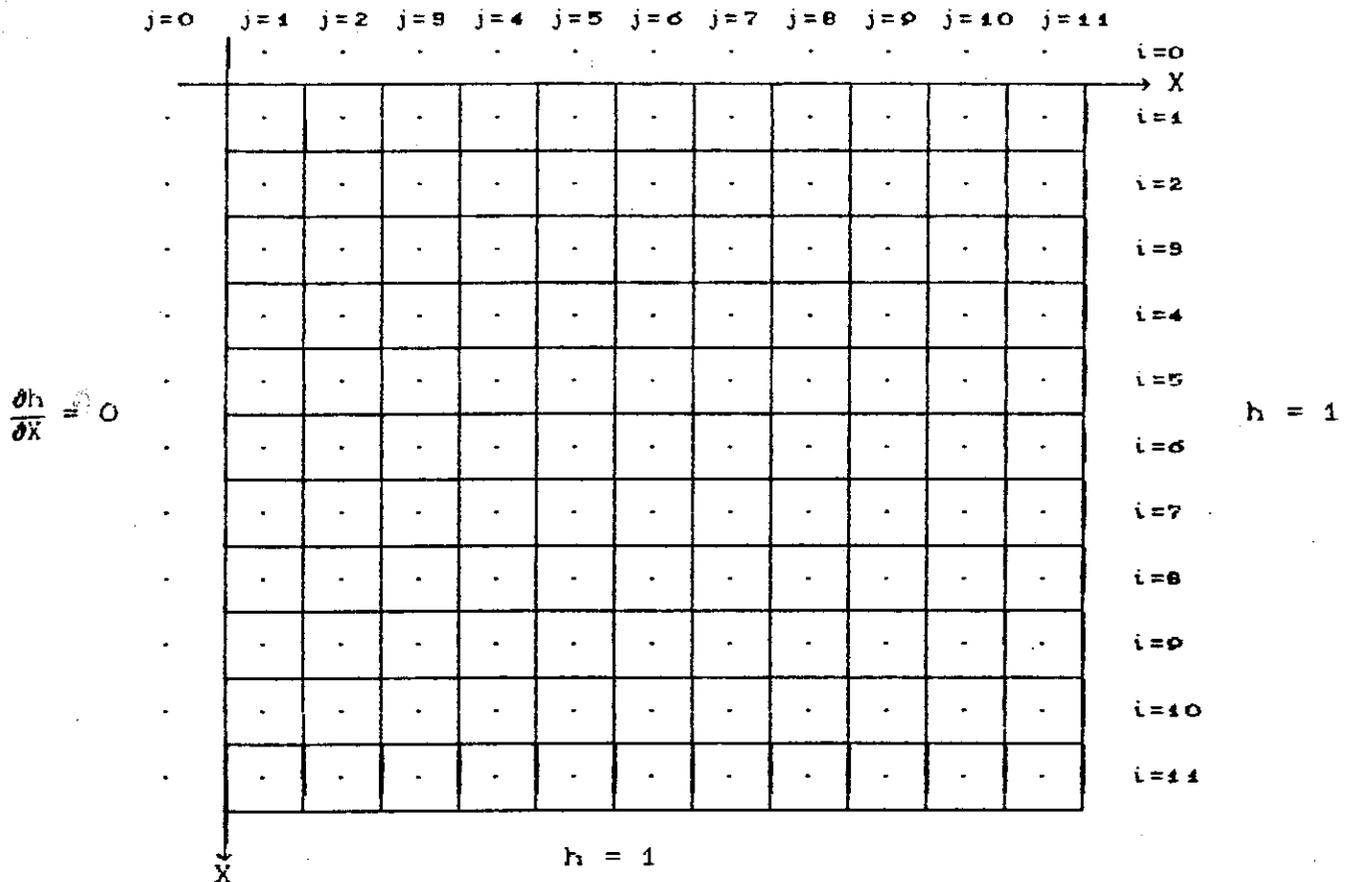


FIGURA 3.1.- Numeración de la malla para el método explícito.

Usaremos la aproximación que (2.16) que obtuvimos que es:

$$h_{i,j}^{k+1} = h_{i,j}^k + \rho \left[ h_{i,j+1}^k + h_{i,j-1}^k + h_{i+1,j}^k + h_{i-1,j}^k - 4h_{i,j}^k \right]$$

con  $\rho = \Delta t / (\Delta X)^2$

Como el esquema explícito hacia adelante, como se vio anteriormente, es condicionalmente estable, pondremos atención en este particular.

En este esquema la estabilidad está determinada por la condición de que  $\rho \leq 1/4$ , por lo tanto, ésta se cumple para  $\Delta t = 0.0025$  como valor máximo.

Debido a las condiciones a la frontera, en la parte superior y el lado izquierdo del acuífero, se introducen nodos ficticios, de tal forma que discretizando esas primeras derivadas parciales tenemos que

$$h_{i,0}^k = h_{i,2}^k \quad \text{y} \quad h_{0,j}^k = h_{2,j}^k \quad i,j = 1,2,\dots,11 \quad \text{y} \quad \forall k$$

donde 0 denota al nodo ficticio.

Para la frontera inferior y el lado izquierdo tenemos carga constante

$$h_{11,j}^k = h_{i,11}^k = 1 \quad i,j = 1,2,\dots,11 \quad \text{y} \quad \forall k$$

y por último, de las condiciones iniciales obtenemos

$$h_{i,j}^c = 0 \quad i,j = 1,2,\dots,10$$

Para resolver este problema utilizamos el programa EXPLI.FOR que se enlista en la página 35.

Se muestra una corrida del programa para  $\Delta t = 0.0025$  y otra para  $\Delta t = 0.0027$ , obteniendo un sistema estable para el primero y uno inestable para el segundo; en este se distingue rápidamente esta inestabilidad ya que los valores que se obtienen oscilan sin cotas.

PROGRAMA POR EL METODO EXPLICITO  
PARA EL EJEMPLO SINTETICO

C234567

\$DEBUG

```
DIMENSION HC(11,11),HPC(11,11)
open(3,file='archivo.dat',status='new')
DX=0.1
DY=0.1
WRITE(*,1)
1 FORMAT(5X,'VALOR DEL INCREMENTO DEL TIEMPO')
READ(*,*)DT
DO 10 I=1,11
DO 10 J=1,11
HC(I,J)=1.0
IF(I.EQ.11)HC(I,J)=0.0
IF(J.EQ.11)HC(I,J)=0.0
HPC(I,J)=HC(I,J)
10 CONTINUE
WRITE(2,11)
11 FORMAT(5X,'DISTRIBUCION INICIAL')
WRITE(2,12)((HC(I,J),J=1,11),I=1,11)
RO=DT/(DX*DX)
KMAX=4
K=1
20 K=K+1
HC(11,11)=0.0
HC(1,1)=HPC(1,1)+2.*RO*(HPC(1,2)+HPC(2,1))-2.*HPC(1,1)
DO 30 L=2,10
LL=L-1
HC(L,1)=HPC(L,1)+RO*(2.*HPC(L,2)+HPC(L+1,1)+HPC(LL,1))-4.*HPC(L,1)
HC(1,L)=HPC(1,L)+RO*(2.*HPC(2,L)+HPC(1,L+1)+HPC(1,LL))-4.*HPC(1,L)
HC(L,11)=0.0
HC(11,L)=0.0
30 CONTINUE
DO 40 I=2,10
DO 40 J=2,10
```

```

II=I-1
JJ=J-1
HCI,JD)=HPCI,JD)+RO*(HPCI+1,JD)+HPCII,JD)+HPCI,JJD)+HPCI,J+1)
*-4.*HCI,JD)
40 CONTINUE
T=DT*(K-1)
DO 45 K3=1,81
IF(K.EQ.5*K3)GO TO 46
45 CONTINUE
GO TO 47
46 WRITE(2,41)T
41 FORMAT(5X,'DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO=',F8.5)
WRITE(2,12)((HCI,JD),J=1,11),I=1,11)
12 FORMAT('0',11F12.5)
WRITE(3,60)(HCS,JD),J=1,11)
60 FORMAT(11F12.5)
47 DO 50 I=1,11
DO 50 J=1,11
HPCI,JD)=HCI,JD)
50 CONTINUE
IF(K-KMAX.LE.0)GO TO 20
STOP
END

```

DISTRIBUCION PARA LA CARGA POR EL METODO EXPLICITO  
PARA  $\Delta t=0.0025$

DISTRIBUCION INICIAL

.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= .99750

.91640	.91747	.92050	.92353	.92656	.92959	.93262	.93565	.93868	.94171	1.00000
.91743	.91845	.92147	.92449	.92752	.93055	.93358	.93661	.93964	.94267	1.00000
.92050	.92147	.92439	.92916	.93368	.93788	.94162	.94486	.94810	.95134	1.00000
.92551	.92643	.92916	.93363	.93974	.94373	.94733	.95062	.95391	.95720	1.00000
.93237	.93320	.93568	.93974	.94529	.95017	.95425	.95833	.96241	.96649	1.00000
.94086	.94162	.94378	.94733	.95217	.95620	.96025	.96430	.96835	.97240	1.00000
.95066	.95146	.95327	.95622	.96025	.96525	.97025	.97525	.98025	.98525	1.00000
.96205	.96252	.96390	.96615	.96929	.97316	.97769	.98227	.98687	.99146	1.00000
.97417	.97448	.97543	.97698	.97910	.98173	.98482	.98827	.99202	.99596	1.00000
.98692	.98706	.98756	.98833	.98942	.99075	.99221	.99380	.99541	.99703	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= .99750

.98848	.98862	.98904	.98974	.99068	.99185	.99323	.99477	.99644	.99820	1.00000
.98862	.98876	.98918	.98986	.99080	.99196	.99331	.99483	.99646	.99822	1.00000
.98904	.98918	.98958	.99024	.99114	.99225	.99356	.99503	.99661	.99829	1.00000
.98974	.98986	.99024	.99086	.99170	.99274	.99397	.99534	.99683	.99839	1.00000
.99068	.99080	.99114	.99170	.99246	.99341	.99452	.99577	.99712	.99854	1.00000
.99185	.99196	.99225	.99274	.99341	.99424	.99521	.99630	.99748	.99873	1.00000
.99225	.99231	.99256	.99297	.99352	.99421	.99502	.99593	.99691	.99794	1.00000
.99277	.99287	.99303	.99344	.99397	.99460	.99531	.99602	.99683	.99764	1.00000
.99344	.99354	.99368	.99404	.99457	.99517	.99583	.99653	.99723	.99793	1.00000
.99424	.99434	.99448	.99484	.99537	.99597	.99663	.99733	.99803	.99873	1.00000
.99521	.99531	.99545	.99581	.99634	.99694	.99754	.99814	.99874	.99934	1.00000
.99630	.99640	.99654	.99690	.99743	.99803	.99863	.99923	.99983	1.00000	
.99748	.99758	.99772	.99808	.99861	.99921	.99981	1.00000			
.99854	.99864	.99878	.99914	.99967	.99994					
.99934	.99944	.99958	.99994							

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS

DISTRIBUCION PARA LA CARGA POR EL METODO EXPLICITO

PARA  $\Delta t = 0.0027$

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= .05130

.00647	.00847	.01585	.03267	.06604	.12503	.22000	.35763	.54016	.75932	1.00000
.00847	.01049	.01783	.03469	.06787	.12705	.22138	.35934	.54064	.76004	1.00000
.01585	.01787	.02520	.04184	.07513	.13336	.22753	.36375	.54504	.76161	1.00000
.03267	.03465	.04194	.05860	.09072	.14930	.24050	.37632	.55210	.76657	1.00000
.06604	.06787	.07513	.09072	.12326	.17763	.26922	.39621	.57003	.77375	1.00000
.12503	.12705	.13336	.14930	.17763	.23256	.31304	.43864	.59480	.79024	1.00000
.22000	.22138	.22753	.24050	.26922	.31304	.39242	.49550	.64342	.81091	1.00000
.35763	.35934	.36375	.37632	.39621	.43864	.49550	.59054	.70231	.84731	1.00000
.54016	.54064	.54504	.55210	.57003	.59480	.64342	.70231	.79123	.88839	1.00000
.75932	.76004	.76161	.76657	.77375	.79024	.81091	.84731	.88839	.94314	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= .21330

3.06687	-2.16084	3.04508	-1.99618	2.91664	-1.56399	2.55182	-1.76600	1.88374	.36592	1.00000
-2.16084	3.05815	-2.08686	2.99740	-1.80563	2.76617	-1.20055	2.25044	-.22594	1.45573	1.00000
3.04508	-2.08686	3.02247	-1.92592	2.89320	-1.50369	2.53099	-.72437	1.87117	.38088	1.00000
-1.99618	2.99740	-1.92592	2.93517	-1.65926	2.70722	-1.08534	2.20644	-.16166	1.43925	1.00000
2.91664	-1.80563	2.89320	-1.65926	2.76735	-1.27515	2.42526	-.56675	1.80949	.43752	1.00000
-1.56399	2.76617	-1.50369	2.70722	-1.27515	2.50143	-.78383	2.05828	.00643	1.38478	1.00000
2.55182	-1.20055	2.53099	-1.08534	2.42526	-.78383	2.14613	-.22821	1.64970	.55910	1.00000
-1.76600	2.25044	-.72437	2.20644	-.56675	2.05828	-.22821	1.74435	.31597	1.27033	1.00000
1.88374	-.22594	1.87117	-.16166	1.80949	.00643	1.64970	.31597	1.36781	.75446	1.00000
.36592	1.45573	.38088	1.43925	.43752	1.38478	.55910	1.27033	.75446	1.09811	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= .37530

11262.20000	-11127.19000	10730.35000	-10672.30000	9170.93900	-8037.40800	6701.97400	-5188.34800	3540.33800	-1793.16900	1.00000
-11127.19000	10998.78000	-10601.62000	9954.43400	-9060.62100	7943.75000	-6620.81400	5128.59100	-3496.52400	1773.81700	1.00000
10730.35000	-10601.62000	10223.61000	-9596.57500	8737.62900	-7657.72900	6385.45800	-4943.22600	3373.15300	-1706.41800	1.00000
-10672.30000	9954.43400	-9596.57500	9010.87200	-8201.58000	7190.76000	-5993.03400	4642.46100	-3164.92900	1605.73700	1.00000
9170.93900	-9060.62100	8737.62900	-8201.58000	7467.94900	-6544.52400	5457.45100	-4224.54700	2882.97900	-1459.93600	1.00000
-8037.40800	7943.75000	-7657.72900	7190.76000	-6544.52400	5738.28700	-4782.10000	3704.76400	-2525.32000	1281.53200	1.00000
6701.97400	-6620.81400	6385.45800	-5993.03400	5457.45100	-4782.10000	3986.25000	-3086.76600	2106.96400	-1066.55500	1.00000
-5188.34800	5128.59100	-4943.22600	4642.46100	-4224.54700	3704.76400	-3086.76600	2391.98400	-1629.87400	827.65000	1.00000
3540.33800	-3496.52400	3373.15300	-3164.92900	2882.97900	-2525.32000	2106.96400	-1629.87400	1113.31000	-562.85110	1.00000
-1793.16900	1773.81700	-1706.41800	1605.73700	-1459.93600	1281.53200	-1066.55500	827.65000	-562.85110	286.80200	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

DE CIENCIAS EXACTAS

2). - Solución por el Esquema de Diferencias Finitas IMPLICITO, para el modelo sintético.

Encontraremos la solución numérica para la ecuación (3.1) del ejemplo sintético, tomando las mismas condiciones iniciales y a la frontera.

Para este tipo de esquemas, implícitos, se tienen tres tipos:

- i) Implícito hacia atrás
- ii) Implícito de Crank-Nicolson
- iii) Implícito de Dirección Alternante

Primeramente para el inciso i) el esquema se ilustra en la ecuación (2.19), para el ii) la ecuación (2.20) y por último para iii) la ecuación (2.21) y (2.22).

#### IMPLICITO HACIA ATRAS Y DE CRANK-NICOLSON.

El esquema implícito hacia atrás y el de Crank-Nicolson pueden obtenerse del esquema de diferencias finitas:

$$\theta \left[ \frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \right]$$

$$+(1-\theta) \left[ \frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} \right]$$

$$= \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{(\Delta t)} \quad 3.3$$

para diferentes valores de  $\theta \in [ \frac{1}{2}, 1 ]$ . En particular con  $\theta = \frac{1}{2}$  se trata del esquema de tiempo centrado o de Crank-Nicolson y para  $\theta = 1$  es el esquema hacia atrás. ▸

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS

Desarrollando y reacomodando la ecuación (3.3)

escribimos la forma general de esta ecuación como:

$$\begin{aligned}
 & -\theta\rho h_{i-1,j}^{k+1} - \theta\rho h_{i+1,j}^{k+1} - \theta\rho h_{i,j-1}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_{i,j}^{k+1} \\
 & = (1-\theta)\rho h_{i+1,j}^k + (1-\theta)\rho h_{i-1,j}^k + (1-\theta)\rho h_{i,j+1}^k + \\
 & \quad (1-\theta)\rho h_{i,j-1}^k + (1-4(1-\theta)\rho) h_{i,j}^k
 \end{aligned}$$

Y considerando la numeración de la malla que se presenta en la figura 3.2, obtenemos:

$$-\theta\rho h_{i-1}^{k+1} - \theta\rho h_{i+1}^{k+1} - \theta\rho h_{i-10}^{k+1} - \theta\rho h_{i+10}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_i^{k+1} =$$

o

$$(1-\theta)\rho \left[ h_{i-1}^k + h_{i+1}^k + h_{i-10}^k + h_{i+10}^k \right] + (1-4(1-\theta)\rho) h_i^k$$

Pero para los nodos de la forma  $i = 10j + 1$ ,  $1 \leq j \leq 8$ , no tenemos ningún nodo del lado izquierdo. Para esto utilizaremos la condición a la frontera  $\partial h / \partial X = 0$  y se obtiene que  $h_{i-1} = h_{i+1}$  y la ecuación queda

$$-\theta\rho h_{i-10}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_i^{k+1} - 2\theta\rho h_{i+1}^{k+1} - \theta\rho h_{i+10}^{k+1} =$$

$$2(1-\theta)\rho h_{i+1}^k + (1-\theta)\rho [h_{i-10}^k + h_{i+10}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_i^k$$

Para los nodos de la forma  $i = 90 + j$  con  $2 \leq j \leq 9$  tenemos en forma análoga a la anterior, que  $h_{i+10} = h_{i-10}$  y entonces

$$-2\theta\rho h_{i-10}^{k+1} - \theta\rho h_{i-1}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_i^{k+1} - \theta\rho h_{i+1}^{k+1} =$$

$$2(1-\theta)\rho h_{i-10}^k + (1-\theta)\rho [h_{i-1}^k + h_{i+1}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_i^k$$

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS



EL SABER DE MIS HEREDEROS  
HARA EL PAIS UNO  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICA

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS

en el nodo  $i = 01$  tenemos la ecuación siguiente

$$-2\theta\rho h_{01}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_{01}^{k+1} - 2\theta\rho h_{02}^{k+1} =$$

$$2(1-\theta)\rho [h_{01}^k + h_{02}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_{01}^k$$

$$\frac{\partial h}{\partial Y} = 0$$

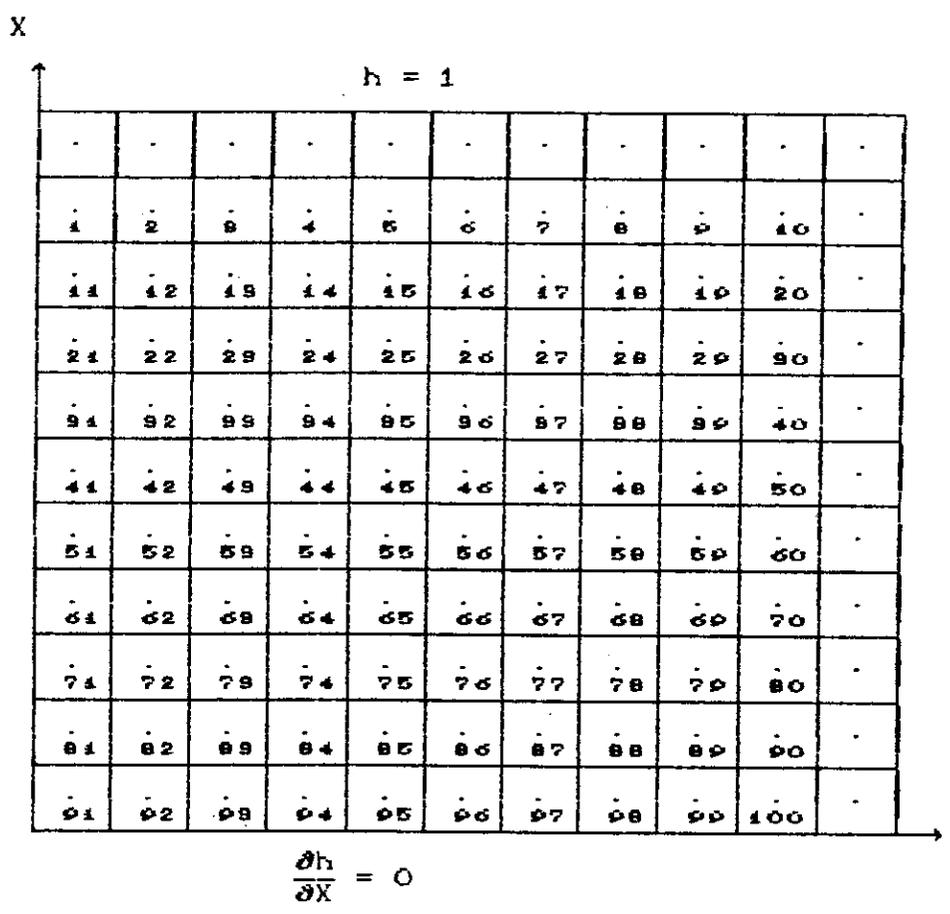


FIGURA 3.2. - Numeración de la malla para el esquema implícito hacia atrás y de Crank-Nicolson

para los nodos  $i = 2, 3, \dots, 9$  tenemos que  $h_{i-10} = 1$  y la ecuación queda

$$-\theta\rho h_{i-1}^{k+1} - \theta\rho h_{i+1}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_i^{k+1} - \theta\rho h_{i+10}^{k+1} =$$

$$(1-\theta)\rho [h_{i-1}^k + h_{i+1}^k + h_{i+10}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_i^k + \rho$$

para los nodos  $i = 10j$  con  $2 \leq j \leq \theta$ , tenemos que la carga del nodo del lado derecho es 1 y modificando la ecuación tenemos

$$-\theta\rho h_{i-10}^{k+1} - \theta\rho h_{i-1}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_i^{k+1} - \theta\rho h_{i+10}^{k+1} =$$

$$(1-\theta)\rho[h_{i-10}^k + h_{i-1}^k + h_{i+10}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_i^k + \rho$$

y, por último para  $i = 10$

$$-\theta\rho h_0^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_{10}^{k+1} - \theta\rho h_{20}^{k+1} =$$

$$(1-\theta)\rho[h_0^k + h_{20}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_{10}^k + 2\rho$$

para  $i = 1$ , tenemos

$$(1+4\theta\rho) h_1^{k+1} - 2\theta\rho h_2^{k+1} - \theta\rho h_1^{k+1} =$$

$$(1-\theta)\rho[2h_2^k + h_{11}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_1^k + \rho$$

para  $i = 100$

$$-2\theta\rho h_{90}^{k+1} - \theta\rho h_{99}^{k+1} + (1+4\theta\rho) h_{100}^{k+1} =$$

$$(1-\theta)\rho[2h_{90}^k + h_{99}^k] + (1-4(1-\theta)\rho) h_{100}^k + \rho$$

Con esto tenemos que para cada paso del tiempo necesitamos resolver un sistema de ecuaciones lineales de  $100 \times 100$ .

Este método se resuelve con un programa llamado IMPLI.FOR con dos valores distintos de  $\theta$ ,  $\theta = 1/2$  (Crank-Nicolson), y  $\theta = 1$  (Implícito hacia atrás).

En el programa se utilizan unas subrutinas para resolver el sistema de ecuaciones lineales, por medio de sobrerelajación sucesiva.

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS

Las subrutinas que se usaron se implementaron tomando en cuenta que el método de sobrerelajación es bueno para resolver sistemas de ecuaciones lineales del tipo que tenemos (grande y muchos ceros). Aquí se presenta un listado del programa aplicado al ejemplo sintético, así como las corridas para los dos valores de  $\theta$ .

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA  
CIENCIAS EXACTAS

PROGRAMA POR EL METODO IMPLICITO  
HACIA ATRAS Y DE CRANK-NICOLSON  
PARA EL EJEMPLO SINTETICO

0234567

DEBUG

```
DIMENSION AC(11,100),HOC(100),BO(10),ASOR(2,10)
COMMON/BASTA/HLOC(10,10),UC(10),NITC(10),ALC(10,2,10),NREPC(10),
*OMEGA,RO,IT
COMMON/GATO/DM(50,10),DNC(50,10),WC(10),KNIT,ITR
COMMON/FLOJO/ALT,HL(10,10),CORC(10),WAC(2,10),BC(100)
WRITE(*,1)
1 FORMAT(5X,'EL VALOR DE TETA ES =')
  READ(*,*)TETA
  WRITE(*,8)
8 FORMAT(5X,'EL VALOR DE DX ES =')
  READ(*,*)DX
  WRITE(*,3)
3 FORMAT(5X,'EL VALOR DE DT ES =')
  READ(*,*)DT
  WRITE(*,4)
4 FORMAT(5X,'EL VALOR DE DTG ES =')
  READ(*,*)DTG
  WRITE(*,5)
5 FORMAT(5X,'EL VALOR DEL TIEMPO MAXIMO ES =')
  READ(*,*)TMAX
  WRITE(*,6)
6 FORMAT(5X,'EL VALOR DE OMEGA ES =')
  READ(*,*)OMEGA
  WRITE(2,7)TETA,DT
7 FORMAT('1',10X,'EL VALOR DE TETA ES=',F6.2,6X,'EL PASO DEL
*TIEMPO ES=',F7.4)
  RO=DT/(DX*DX)
  ALT=RO*TETA
  DO 10 I=1,100
  HOC(I)=0.
```

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS

```

B(I)=0.
DO 10 J=1,11
  A(J,I)=0.
10 CONTINUE
  DO 2 I=1,10
    DO 2 J=1,10
      2 HLOC(I,J)=0.
      IT=0
      T=0.
      CALL MATRIZACA,TETA,RO)
      NTT=0
      DO 34 I=1,10
        DO 36 J=1,9
          I1=(I-1)*10+J
          ASOR(1,J)=A(1,I1)
36 ASOR(2,J)=A(2,I1)
          ASOR(1,10)=A(1,10*I)
          ASOR(2,10)=0.
          NUMNP=0
          CALL DECOMCASOR,NUMNP)
          DO 37 N=1,10
            AL(I,1,N)=ASOR(1,N)
37 AL(I,2,N)=ASOR(2,N)
34 CONTINUE
      DO 65 I=1,10
65 W(I)=OMEGA
      DO 70 J=1,10
        WAC(1,J)=9.5+20.*RO
70 WAC(2,J)=-9.5*RO
        WAC(2,10)=0.
        WAC(1,10)=WAC(1,10)/2.
        CALL DECOMCWA,NUMNP)
        NT=0
        TG=DTG
        IK=1
12 NT=NT+1
        T=DT*FLOATCNT)

```

BIBLIOTECA  
 BIBLIOTECA  
 RECENTES EXACTAS

```

CALL VECTB(B,HO,TETA,RO)
CALL LSOR
DO 46 I=1,10
DO 46 J=1,10
M=(I-1)*10+J
HLOC(I,J)=HL1(I,J)
HOCMD=HL1(I,J)
46 BCMD=HL1(I,J)
DO 17 INT=1,10
17 NTT=NTT+NITC(INT)
IFC(ABS(DT-DTG).LT.0.0001)GO TO 22
IFC(ABS(T+DTG).LT.1.E-4)GO TO 2000
WRITE(2,60)T,NTT,(NITC(I),I=1,10),(WC(I),I=1,10)
60 FORMAT('0',/,22X,'TIEMPO=',F10.4,10X,'NUMERO TOTAL DE ITERACIONES',I9,/,1X,'ITER',10I7,/,1X,'OMEGA',4X,10(F7.4),/,1X,79C'.')
*,)
GO TO 22
2000 WRITE(2,500)T,NTT,(NITC(I),I=1,10),(WC(I),I=1,10)
500 FORMAT('1',/,22X,'TIEMPO=',F10.4,10X,'NUMERO TOTAL DE ITERACIONES',I10,/,1X,'ITER',10I7,/,1X,'OMEGA',4X,10(F7.4),/,1X,79C'.')
*,)
22 IFC(ABS(TG-TD).GT.ABS(TG-T-DT))GO TO 40
IK=IK+1
WRITE(2,500)T,NTT,(NITC(I),I=1,10),(WC(I),I=1,10)
WRITE(2,505)T
505 FORMAT(5X,'DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO='F8.5)
WRITE(2,502)(BC(I),I=1,100)
502 FORMAT('0',12X,10F12.5)
TG=TG+DTG
40 IFCT.LT.TMAX)GO TO 12
STOP
END

SUBROUTINE LSOR
COMMON/BASTA/HLOC(10,10),UC(10),NITC(10),ALC(10,2,10),NREPC(10),
*OMEGA,RO,IT
COMMON/GATO/DM(50,10),DNC(50,10),WC(10),KNIT,ITR

```

```

COMMON/FLOJO/ALT,HL1(10,10),COR(10),WAC(2,10),BC(100)
DIMENSION ARC(2,10)
CT=1.E-4
IFC=0
DO 108 MN=1,10
NREPC(MN)=1
NITC(MN)=0
DO 108 NIT1=1,50
DNCKNIT1,MN)=-1.
108 DMCKNIT1,MN)=-1.
45 DO 100 I=1,10
KNIT=NITCID)
IFC(NREPCID).NE.1)GO TO 100
DO 20 N=1,10
I1=(I-1)*10+N
Q3=0.
Q2=0.
IFC(I.NE.10)Q3=ALT*HLOC I+1,N)
IFC(I.NE.1)Q2=ALT*HL1(CI-1,N)
IFC(N.NE.1)GO TO 200
Q3=Q3/2.
Q2=Q2/2.
200 Q1=BC(I1)
ARC(1,N)=ALCI,1,N)
ARC(2,N)=ALCI,2,N)
20 UC(N)=WCI)*C(Q1+Q2+Q3)
NUMNP=10
CALL SIMETRICAR,U,NUMNP)
DO 31 J1=1,10
31 HL1(CI,J1)=UC(J1)+(1-WCI))*HLOC I,J1)
DO 30 J1=1,10
E=HL1(CI,J1)-HLOC I,J1)
D=ABS(E)
IFC(DMCKNIT,I).GT.D)GO TO 22
DMCKNIT,I)=D
22 IFC(DMCKNIT,I).GT.E)GO TO 30
DNCKNIT,I)=E

```

```

30 CONTINUE
   IFCDMCKNIT, I). GT. CT) GO TO 25
   NREPCI) = 0
   GO TO 100
25 NREPCI) = 1
   NITCID) = KNIT + 1
100 CONTINUE
   DO 44 NU = 1, 10
   DO 44 NV = 1, 10
44 HLOC NU, NV) = HLI( NU, NV)
   DO 35 IU = 1, 10
   IFCNREPCIU). EQ. 1) GO TO 45
35 CONTINUE
   IFC = IFC + 1
   IFC IFC. LT. 2) GO TO 45
   RETURN
   END

```

```

SUBROUTINE VECTB( B, HO, TETA, RO)
DIMENSION BC(100), HOC(100)
ROT = (1 - TETA) * RO
DO 210 I = 1, 100
B1 = RO
B5 = (1. - 4. * ROT) * HOC(I)
IFC I. GT. 10) B1 = ROT * HOC(I - 10)
B2 = RO
IFC MOD(I, 10). NE. 0) B2 = ROT * HOC(I + 1)
IFC MOD(I, 10). EQ. 1) GO TO 120
B3 = ROT * HOC(I - 1)
GO TO 150
120 B5 = B5 / 2.
   B1 = B1 / 2.
   B3 = 0.
150 IFC I. GT. 90) GO TO 180
   B4 = ROT * HOC(I + 10)
   GO TO 190

```



BIBLIOTECA  
DE CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

BIBLIOTECA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

```

B4=0.
B3=B3/2.
B2=B2/2.
100 IF(MOD(I,10).EQ.1)B4=B4/2.
210 BCID=B1+B2+B3+B4+B5
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SIMETRI(A,UF,NUMNP)
DIMENSION AC(2,10),UFC(10)
UFC(1)=UFC(1)/AC(2,1)
DO 101 N=2,10
101 UFC(N)=(UFC(N)-AC(2,N-1)*AC(1,N-1)*UFC(N-1))/AC(2,N)
N=10
202 N=N-1
IF(N.LT.1)RETURN
UFC(N)=UFC(N)-AC(1,N)*UFC(N+1)
GO TO 202
END

```

C234567

```

SUBROUTINE DECOM(A,NUMNP)
DIMENSION AC(2,10)
AC(1,1)=AC(2,1)/AC(1,1)
DO 111 J=2,9
WN=AC(1,J)-AC(2,J-1)*AC(1,J-1)
111 AC(1,J)=AC(2,J)/WN
AC(2,10)=AC(1,10)-AC(2,9)*AC(1,9)
DO 222 M=1,9
222 AC(2,M)=AC(2,M)/AC(1,M)
AC(1,10)=0.
RETURN
END

```

C234567

```

SUBROUTINE MATRIZAC(A,TETA,R0)
DIMENSION AC(11,100)

```

```
RAT=RO*TETA
DO 300 I=1,100
AC1,I)=1.+4.*RAT
IF(I.GT.90)AC1,I)=AC1,I)/2.
IF(MOD(I,10).EQ.1)AC1,I)=AC1,I)/2.
AC2,I)=-RAT
IF(I.GT.90)AC2,I)=-RAT/2.
IF(MOD(I,10).EQ.0)AC2,I)=0.
AC11,I)=-RAT
IF(I.GT.90)AC11,I)=0.
IF(MOD(I,10).EQ.1)AC11,I)=-RAT/2.
300 CONTINUE
RETURN
END
```

DISTRIBUCION PARA LA CARGA POR EL METODO IMPLICITO HACIA ATRAS

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= 5.00000

.99983	.99983	.99984	.99985	.99986	.99988	.99990	.99992	.99995	.99997
.99982	.99983	.99984	.99987	.99970	.99971	.99978	.99980	.99986	.99994
.99950	.99951	.99953	.99956	.99960	.99965	.99971	.99977	.99985	.99992
.99941	.99941	.99943	.99947	.99952	.99958	.99965	.99973	.99982	.99991
.99934	.99935	.99938	.99941	.99947	.99954	.99961	.99970	.99980	.99990
.99930	.99931	.99934	.99935	.99944	.99951	.99958	.99966	.99979	.99989
.99927	.99928	.99930	.99935	.99941	.99948	.99957	.99967	.99977	.99989
.99920	.99921	.99924	.99929	.99935	.99943	.99953	.99964	.99975	.99987
.99918	.99919	.99922	.99927	.99934	.99942	.99952	.99963	.99975	.99987
.99917	.99918	.99921	.99926	.99933	.99942	.99951	.99963	.99975	.99987

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO=10.00000

.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99996	.99997	.99997	.99998	.99999
.99987	.99987	.99988	.99989	.99990	.99991	.99993	.99994	.99996	.99998
.99982	.99983	.99983	.99984	.99986	.99988	.99990	.99992	.99995	.99997
.99978	.99979	.99979	.99981	.99983	.99985	.99987	.99990	.99993	.99997
.99976	.99976	.99977	.99978	.99980	.99983	.99986	.99989	.99992	.99996
.99974	.99974	.99975	.99977	.99979	.99981	.99985	.99988	.99992	.99996
.99973	.99973	.99974	.99976	.99978	.99981	.99984	.99988	.99992	.99996
.99972	.99973	.99974	.99976	.99978	.99981	.99984	.99988	.99992	.99996
.99973	.99973	.99974	.99976	.99978	.99981	.99984	.99988	.99992	.99996
.99974	.99975	.99976	.99977	.99979	.99982	.99985	.99988	.99992	.99996

DISTRIBUCION PARA LA CARGA POR EL METODO

IMPLICITO DE CRANK-NICOLSON

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO= 5.00000

.67197	.67240	.67375	.67617	.67936	.68293	.68767	.69331	.69987	.45082
.94569	.94567	.94537	.95285	.95803	.96610	.97707	.99134	.80943	.61404
1.03185	1.03295	1.03640	1.04289	1.05190	1.06216	1.06995	1.04318	.94566	.68894
1.04113	1.04243	1.04661	1.05403	1.06564	1.07925	1.08666	1.06641	.96779	.68340
1.02474	1.02620	1.03090	1.03966	1.05296	1.06995	1.07971	1.06302	.96727	.68492
1.00534	1.00659	1.01163	1.02107	1.03553	1.05342	1.06679	1.05326	.96097	.69102
.98974	.99134	.99655	1.00637	1.02157	1.04065	1.05576	1.04455	.95496	.67797
.96024	.96185	.96713	.97712	1.01269	1.03242	1.04855	1.03873	.95087	.67567
.97546	.97709	.98237	.99242	1.00813	1.02816	1.04477	1.03565	.94869	.67474
.97427	.97587	.98115	.99119	1.00692	1.02700	1.04372	1.03478	.94807	.67441

DISTRIBUCION PARA EL TIEMPO=10.00000

.80781	.80773	.80761	.80784	.80919	.81263	.81815	.81997	.79046	.62931
1.01897	1.01877	1.01838	1.01857	1.02076	1.02693	1.03763	1.04469	1.00756	.79373
1.04018	1.03984	1.03913	1.03907	1.04165	1.04967	1.06457	1.07774	1.04508	.82067
1.01957	1.01911	1.01806	1.01763	1.02019	1.02819	1.04678	1.06484	1.03647	.81913
1.00137	1.00079	.99942	.99858	1.00067	1.01013	1.02903	1.04990	1.02790	.81389
.99306	.99237	.99071	.98945	.99134	1.00041	1.01965	1.04166	1.02175	.81063
.99209	.99131	.98936	.98768	.98911	.99781	1.01688	1.03906	1.01972	.80951
.99474	.99389	.99156	.98944	.99041	.99872	1.01752	1.03951	1.02002	.80967
.99799	.99708	.99477	.99254	.99325	1.00114	1.01936	1.04078	1.02076	.81000
.99926	.99836	.99606	.99380	.99443	1.00215	1.02016	1.04131	1.02107	.81012

A R I R I I N T E J A

## IMPLICITO DE DIRECCION ALTERNANTE.

Ahora utilizaremos el esquema (ii) Implícito de Dirección Alternante, en el cual tenemos una ecuación para los renglones (Ecuación (2.21)) y otra para las columnas (Ecuación (2.22)), y sustituyendo el valor de T (Transmisibilidad), S (Coeficiente de almacenamiento) y además que  $\Delta X = \Delta Y$ , entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho \left( h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k \right) + \rho \left( h_{i+1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i-1,j}^{k+1} \right) \\ = h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k \quad \text{por renglones} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( h_{i,j+1}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i,j-1}^{k+1} \right) + \rho \left( h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k \right) \\ = h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k \quad \text{por columnas} \end{aligned}$$

estas dos ecuaciones se usan alternadamente en cada paso del tiempo, resolviendo primero para renglones y después para columnas (o viceversa).

Para resolver cada una de las ecuaciones tenemos que encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales de  $10 \times 10$ , en este modelo sintético.

Con ayuda del programa ADI.FOR se resolvió el problema, además de utilizar algunas subrutinas para resolver sistemas de ecuaciones lineales (ya implementadas). El listado y la corrida de este método se presentan en las siguientes páginas.

Para el caso de los esquemas implícitos, no se analizó el problema de estabilidad, ya que como se vió anteriormente, son siempre estables.

PROGRAMA POR EL METODO DE DIRECCIONES ALTERNANTES  
PARA EL EJEMPLO SINTETICO

c234567

\$DEBUG

```
COMMON LAST,L,M,JPLUS1,H(11,11,50),A(50),B(50),C(50)
COMMON DX(50)
INTEGER EVEN
LMAX=11
MMAX=11
JMAX=41
DX=0.1
DY=DX
WRITE(*,1)
1 FORMAT('VALOR DEL INCREMENTO DEL TIEMPO')
READ(*,*)DT
R1=(DT/2.)/(DX*DX)
R2=R1
DO 100 L=1,LMAX
DO 99 M=1,MMAX
H(L,M,1)=0.0
BC=1.0
IF(L.EQ.LMAX)H(L,M,1)=BC
IF(M.EQ.MMAX)H(L,M,1)=BC
99 CONTINUE
100 CONTINUE
WRITE(2,10)
10 FORMAT('1',5X,'DISTRIBUCION INICIAL')
WRITE(2,20)((H(L,M,1),M=1,MMAX),L=1,LMAX)
DO 98 JPLUS1=2,JMAX
J=JPLUS1-1
EVEN=J/2
EVEN=EVEN*2
IF(J.EQ.EVEN)GO TO 95
PASO=1.0
DO 97 M=1,MMAX
```

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMATICAS

```
HCLMAX, M, JPLUS1) = BC
LAST = LMAX - 1
DO 96 L = 1, LAST
IFCM. EQ. MMAX) HCL, M, JPLUS1) = BC
IFCM. EQ. MMAX) GO TO 96
IFCM. EQ. 1) MMEN = M + 1
IFCM. GT. 1) MMEN = M - 1
MPLUS1 = M + 1
ACL) = -R1
BCL) = 2. *R1 + 1.
IFCL. EQ. 1) CCL) = -2. *R1
IFCL. GT. 1) CCL) = -R1
DXL) = (HCL, MMEN, J) - 2. *HCL, M, J) + HCL, MPLUS1, J) *R2 + HCL, M, J)
IFCL. EQ. LAST) DXL) = DXL) + R1 * HCLMAX, M, JPLUS1)
96 CONTINUE
IFCM. LT. MMAX) CALL TDAC(PASO)
97 CONTINUE
GO TO 98
95 PASO = 2.
DO 94 L = 1, LMAX
HCL, MMAX, JPLUS1) = BC
LAST = MMAX - 1
DO 93 M = 1, LAST
IFCL. EQ. LMAX) HCL, M, JPLUS1) = BC
IFCL. EQ. LMAX) GO TO 93
IFCL. EQ. 1) LMEN = L + 1
IFCL. GT. 1) LMEN = L - 1
LPLUS1 = L + 1
ACMD) = -R2
BCMD) = 2. *R2 + 1
IFCM. EQ. 1) CCMD) = -2. *R2
IFCM. GT. 1) CCMD) = -R2
DCMD) = (HCL, LMEN, M, J) - 2. *HCL, M, J) + HCL, LPLUS1, M, J) *R1 + HCL, M, J)
IFCM. EQ. LAST) DCMD) = DCMD) + R2 * HCL, MMAX, JPLUS1)
93 CONTINUE
IFCL. LT. LMAX) CALL TDAC(PASO)
94 CONTINUE
```

BIBLIOTECA

```

IFC J. NE. 2. AND. J. NE. 4. AND. J. NE. 6. AND. J. NE. 16. AND. J. NE. 30)
*GO TO 98
TIEMPO=DT*(JPLUS1-1)/2
WRITE(2,15)TIEMPO
15 FORMAT('1'/'-' ,5X,'CARGA PARA EL TIEMPO=',F8.5,'---')
WRITE(2,20)((HCL,M,JPLUS1),M=1,MMAX),L=1,LMAX)
20 FORMAT('0',11F12.5)
98 CONTINUE
STOP
END

```

C234567

```

SUBROUTINE TDAC(PASO)
COMMON LAST,L,M,JPLUS1,HC(11,11,50),AC(50),BC(50),CC(50)
COMMON DX(50)
DIMENSION BETA(100),GAMMA(100)
BETA(1)=B(1)
GAMMA(1)=DX(1)/B(1)
DO 30 I=2, LAST
IMEN=I-1
BETA(I)=B(I)-AC(I)*CC(IMEN)/BETA(IMEN)
GAMMA(I)=(DX(I)-AC(I)*GAMMA(IMEN))/BETA(I)
30 CONTINUE
IF(PASO.LE.1.5)HCLAST,M,JPLUS1=GAMMA(LAST)
IF(PASO.GT.1.5)HCL, LAST, JPLUS1=GAMMA(LAST)
DO 40 K=2, LAST
I=LAST-K+1
IPLUS1=I+1
IF(PASO.LE.1.5)GO TO 1
IF(PASO.GT.1.5)GO TO 2
1 HCI,M,JPLUS1=GAMMA(I)-CC(I)*HCIPLUS1,M,JPLUS1/BETA(I)
GO TO 40
2 HCL,I,JPLUS1=GAMMA(I)-CC(I)*HCL,IPLUS1,JPLUS1/BETA(I)
40 CONTINUE
RETURN
END

```

DISTRIBUCION PARA LA CARGA POR EL METODO  
 IMPLICITO DE DIRECCION ALTERNANTE

CARGA PARA EL TIEMPO= 1.00000--

.99948	.99950	.99958	.99972	1.00022	1.00100	1.00252	1.00493	1.00873	1.01448	1.00000
.99950	.99951	.99955	.99979	1.00021	1.00101	1.00240	1.00474	1.00839	1.01391	1.00000
.99958	.99959	.99966	.99982	1.00017	1.00095	1.00207	1.00399	1.00705	1.01169	1.00000
.99976	.99979	.99982	.99991	1.00009	1.00044	1.00104	1.00207	1.00367	1.00608	1.00000
1.00021	1.00021	1.00017	1.00009	.99991	.99987	.99898	.99797	.99641	.99408	1.00000
1.00105	1.00101	1.00085	1.00044	.99957	.99790	.99494	.99012	.98202	.97102	1.00000
1.00252	1.00242	1.00203	1.00106	.99896	.99496	.98793	.97633	.95812	.93057	1.00000
1.00493	1.00474	1.00399	1.00207	.99797	.99012	.97633	.95359	.91789	.86389	1.00000
1.00873	1.00839	1.00705	1.00367	.99641	.98252	.95212	.91739	.85472	.79917	1.00000
1.01447	1.01391	1.01169	1.00608	.99405	.97102	.93057	.86389	.75917	.60078	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

CARGA PARA EL TIEMPO= 7.50000--

.99998	.99998	.99997	.99998	1.00001	1.00007	1.00017	1.00023	1.00000	.99883	1.00000
.99997	.99997	.99997	.99998	1.00001	1.00008	1.00018	1.00024	1.00000	.99874	1.00000
.99997	.99997	.99997	.99998	1.00001	1.00009	1.00020	1.00026	1.00000	.99864	1.00000
.99996	.99996	.99996	.99998	1.00001	1.00007	1.00015	1.00020	1.00000	.99857	1.00000
1.00001	1.00001	1.00001	1.00001	1.00000	.99997	.99993	.99991	1.00000	1.00045	1.00000
1.00007	1.00005	1.00009	1.00006	.99997	.99976	.99945	.99927	1.00001	1.00377	1.00000
1.00017	1.00018	1.00020	1.00015	.99993	.99945	.99874	.99832	1.00002	1.00867	1.00000
1.00023	1.00024	1.00027	1.00020	.99991	.99927	.99832	.99776	1.00002	1.01153	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00001	1.00002	1.00002	1.00000	.99989	1.00000
.99883	.99874	.99864	.99857	1.00045	1.00377	1.00866	1.01153	.99999	.94083	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

BIBLIOTECA

# CAPITULO IV

## EL PAQUETE MODFLOW

El paquete MODFLOW presenta un programa para resolver un modelo de flujo de agua subterránea por medio de diferencias finitas. El programa está escrito en FORTRAN '66 y puede correr, con pequeñas modificaciones, en computadoras que tengan compilador FORTRAN '77. El modelo simula flujo en tres o dos dimensiones. La estructura modular con la que cuenta este programa consiste de un programa principal y una serie de subrutinas independientes llamados módulos, los que a su vez se agrupan en paquetes. Cada paquete trata con una parte específica del sistema hidrológico que se quiere modelar. Para designar cual es la parte que se utilizará se hace por medio del arreglo IUNIT que es una tabla de 24 elementos para las unidades de entrada. Sólomente 10 elementos (1-5, 7-9, 11 y 12) están implementadas. El elemento 6 se reserva para el paquete Transiente Filtrante. El 10 es para respuestas adicionales. Los elementos del 13 al 24 se reservan para opciones futuras. A continuación se enlistan las opciones con las que se cuenta hasta la fecha:

Unidades de Entrada	Opción
1	Paquete de Flujo por Bloque Centrado
2	Paquete de Pozos
3	Paquete de Drenaje
4	Paquete de Ríos
5	Paquete de Evapotranspiración
6	Reservado para paquete Transiente Filtrante
7	Paquete de Fronteras de Carga General
8	Paquete de Recarga
9	Paquete SIP
10	Reservado para soluciones adicionales

Gracias a que el programa se divide en módulos, se permite al usuario examinar características hidrológicas independientes. Además se pueden desarrollar capacidades adicionales y así gregar nuevos módulos o paquetes. Para mayor flexibilidad la entrada se designa por medio de un archivo y la salida puede o no designarse.

Uno de los paquetes que no está en la lista, es el Paquete Básico (BAS), que se utiliza para cualquier simulación, ya que por medio de un archivo se leen los datos de entrada. Estos incluyen: el número de renglones (NROW) y columnas (NCOL) que forman la malla del modelo, el número de capas (NLAY), el número de periodos de tiempo (NSTP), etc. Además puede indicarse la unidad de tiempo (ITMUNT) en la cual se va a trabajar, ó simplemente no se define ninguna unidad. Si se definen unidades, estas deben ser consistentes para todos los valores de los datos que involucran tiempo. Por ejemplo, si se escoge años como la unidad de tiempo, la longitud del paso del tiempo, transmisibilidad, etc., deben expresarse usando años para sus unidades de tiempo. Además, las unidades de longitud también deben ser consistentes.

La entrada al paquete BASICO (BAS) se lee de la unidad número 1. El flujo de aguas subterránea junto con el acuífero se simulan usando una aproximación en diferencias finitas por bloque centrado. Las capas del acuífero se pueden simular como confinadas, no confinadas o una combinación de las dos.

La estructura de entrada del programa se basa en un elemento del lenguaje FORTRAN, llamado número de unidad, que identifica simbólicamente la localización del archivo que será leído o impreso. En general el usuario debe proveer una conexión entre el número de unidad y el nombre del archivo.

Uno de los primeros pasos en la organización de los datos de entrada es especificar cuales serán las opciones a utilizar.

Las opciones a utilizar se especifican en el arreglo IUNIT, y se debe asignar un número para la opción correspondiente, si una opción o paquete no se usará se le asigna el número cero.

Si  $IUNIT(n) \leq 0$ , esto significa que la opción correspondiente no será usada.

Si  $IUNIT(n) > 0$ , la opción correspondiente se usará y los datos se leerán del número de unidad contenido en  $IUNIT(n)$ . Los números de unidad deben ser enteros del 2 al 99, el número 1 no, porque está reservado para el paquete básico, se recomienda usar diferentes números para cada opción.

Además de indicarse las opciones que se utilizarán en el modelo, otras indicaciones con los que debe contar el modulo BAS son, por ejemplo:

ISTRT que indica si se salva la carga inicial. Esta debe salvarse si se calculará el abatimiento. Dándole el valor de cero si no se salvaran y diferente de cero cuando se desea salvar las cargas iniciales.

IBOUND es el arreglo en el que se indican las condiciones de la carga en cada celda de la malla, es necesario proporcionar un arreglo para cada capa. Aquí se cuentan con tres tipos de celdas,  $IBOUND < 0$ , la celda tiene carga constante.  $IBOUND = 0$ , la celda es inactiva y por último si  $IBOUND > 0$ , la celda es activa.

SHEAD es la distribución de carga al principio de la simulación (un arreglo para cada capa). Independientemente de que se salve o no, estos valores deben ser proporcionados para inicializar la solución.

## PAQUETE DE FLUJO POR BLOQUE CENTRADO.

En el paquete de FLUJO POR BLOQUE CENTRADO (BCF), se calculan las componentes de la conductividad de la ecuación en diferencias finitas la cual determina el flujo entre celdas adyacentes. También calcula los términos que representan la tasa de movimiento del agua hacia el almacenaje.

Para hacer los cálculos se considera que cada nodo está localizado en el centro de cada celda del malla, de aquí el nombre de flujo por bloque centrado.

La ecuación de flujo para cada celda en el modelo es de la forma

$$\begin{aligned} & CV_{i,j,k-1/2} h_{i,j,k-1} + CC_{i-1/2,j,k} h_{i-1,j,k} + \\ & CR_{i,j-1/2,k} h_{i,j-1,k} + (-CV_{i,j,k-1/2} - CC_{i-1/2,j,k} - \\ & CR_{i,j-1/2,k} - CC_{i+1/2,j,k} - CV_{i,j,k+1/2} + HCOF_{i,j,k}) h_{i,j,k} + \\ & CR_{i,j+1/2,k} h_{i,j+1,k} + CC_{i+1/2,j,k} h_{i+1,j,k} + \\ & CV_{i,j,k+1/2} h_{i,j,k+1} = RHS_{i,j,k} \end{aligned}$$

donde los coeficientes CV, CR, CC son las conductividades entre los nodos. Los coeficientes HCOF y RHS estan compuestos de términos de fuentes externas y términos de almacenaje.

La entrada al paquete BCF se lee de la unidad especificada en IUNIT (1).

Para cada simulación, algunos de los datos que deben proporcionarse son:

El tipo de flujo del acuífero (ISS), si ISS es cero indica que esta en estado transiente y diferente de cero en estado estacionario.

El tipo de capa (LAYCON), se debe proporcionar un valor para cada capa. Hay un limite de 80 capas, si no se utilizan todas se deja en blanco las que no se vallan ha utilizar. Si hay 40 capas o menos ,se usa sólo un archivo, si son mas de 40 capas se utilizan dos archivos. Los tipos de capas que se manejan son el -CONFINADO (LAYCON = 0), que indica transmisibilidades y coeficiente de almacenaje constante para toda la simulación;

BIBLIOTECA

-NO CONFINADO (LAYCON = 1), varía la transmisibilidad de las capas y para la capa uno el coeficiente de almacenaje es constante; y

-Una combinación de los dos con LAYCON igual a dos o tres.

Además se debe proporcionar el valor de las condiciones de anisotropía (TRPY), el ancho (DELR) y largo (DELC) de cada celda.

Hay otros datos que se deben incluir de acuerdo al tipo de simulación y al tipo de capa que se tenga, estos datos incluyen especificaciones de transmisibilidad y almacenamiento, conductividad hidráulica, la elevación del acuífero, etc.

#### PAQUETE DE POZOS.

En un acuífero, se puede tomar a un pozo recargando como una fuente de agua la cual no se afecta por la carga en el acuífero. Un pozo descargando se toma con una tasa negativa. Para utilizar este paquete (de Pozos (WEL)), cada pozo que haya en el acuífero debe estar contenido en una celda y debe agregarse una tasa de recarga al lado derecho de la ecuación en diferencias finitas.

En esta opción se debe incluir una lista que contenga la localización y tasa de recarga para cada pozo. La lista debe contener cuatro valores: renglon, columna, y capa de la celda que contiene a cada pozo y la tasa a la cual el pozo recarga el acuífero.

#### PAQUETE DE DRENAJE.

En la opción de DRENAJE (DRN) la tasa a la cual el agua pasa por un dren en una zona saturada de un acuífero se aproxima usando la ecuación

$$Q_{D,j,k} = C_{D,j,k}(h_{i,j,k} - d_{i,j,k}) = C_{D,j,k}h_{i,j,k} - C_{D,j,k}d_{i,j,k}$$

donde

BIBLIOTECA

$Q_{d,j,k}$  es la tasa de flujo de agua en el dren [ $l^3 t^{-1}$ ]

$d_{i,j,k}$  es la carga en el dren [L]

$CD_{i,j,k}$  es la conductividad en el acuífero cerca del dren [ $L^2 t^{-1}$ ]

El coeficiente  $CD_{i,j,k}$  es la conductividad de la interface entre el dren y el material poroso. El flujo en el dren se considera proporcional a la carga por encima del dren. Esta ecuación isólamamente es válida cuando la carga en el acuífero es mayor que la carga en el dren. Cuando la elevación del dren es mayor que la carga en el acuífero el flujo en el dren  $Q_{d,j,k}$ , es igual a cero.

En este paquete hay que introducir datos como el número de celdas que estan involucradas con un dren (MXDRN), y así como también el número de capa, el número de renglón, y la columna de cada celda involucrada con el dren.

#### PAQUETE DE RIOS.

Los ríos pueden contribuir o drenar agua del acuífero dependiendo del gradiente de la carga entre el río y el acuífero.

El propósito de este paquete es simular los efectos de filtración a través de las orillas del río sobre el nivel del agua.

Para simular los efectos de filtración del río en el modelo, se agregan términos a la ecuación de flujo para cada celda.

El río se divide en arroyos, cada uno de los cuales debe estar contenido en una celda, ver figura 4.1. La filtración del río sobre el acuífero se define entre cada arroyo del río y la celda del modelo que contiene al arroyo.

La entrada al paquete de ríos (RIV) se lee de la unidad especificada en IUNIT(4) y para cada simulación se deben proporcionar datos como: número de arroyos; el número de capa, renglón y columna de cada celda que contiene un arroyo, así como la carga del río y la conductividad de la orilla del río.

BIBLIOTECA

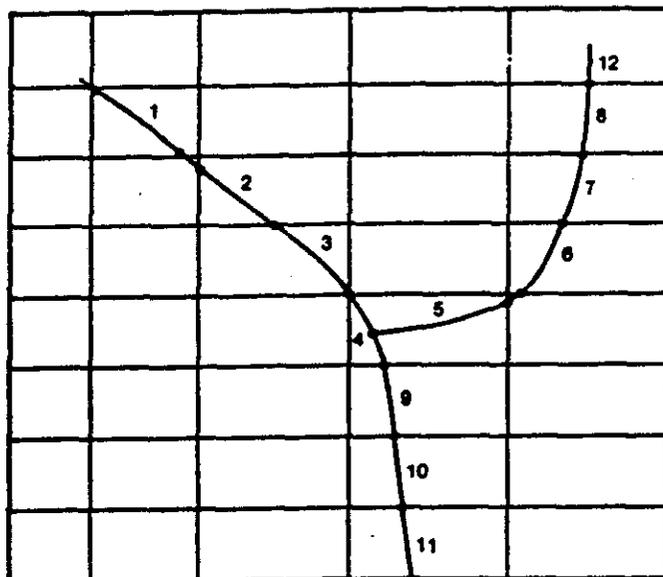


FIGURA 4.1. - Discretización de un río en arroyos.

#### PAQUETE DE EVAPOTRANSPIRACION.

La evapotranspiración (ET) es el mecanismo por medio del cual el agua se convierte de fase líquida a vapor. El paquete de EVAPOTRANSPIRACION (EVT), simula los efectos de ET, donde la fuente de agua es un medio poroso saturado; por consiguiente, primero trata con agua removida por las raíces de las plantas.

La tasa de ET determinada por el paquete depende de la posición de la carga del acuífero, relativa a dos elevaciones de referencia de ET dadas (ET superficial y ET de extinción). Para un nodo dado del modelo, la tasa de ET se considera que es proporcional al espesor saturado sobre la ET de extinción dada. La tasa de ET se expresa en términos de flujo.

Para simular los efectos de ET en el acuífero, se agrega una expresión a la ecuación en diferencias finitas para cada celda.

Para calcular los términos para la evapotranspiración es necesario indicar si ET se calculará sólo para la primera capa o para todas, así como la ET superficial y la de extinción, y algunos otros datos.

#### PAQUETE DE FRONTERAS DE CARGA GENERAL.

Una frontera de carga general (GHB) consiste de una fuente de agua fuera del área de modelado la cual suministra agua a una celda que se encuentra en el área de modelado con una tasa proporcional a la diferencia de carga entre la fuente y la celda. La tasa a la que el agua se suministra a la celda  $i, j, k$  está dada por la expresión

$$Q_{i,j,k,m} = C_m(CHB_m - h_{i,j,k})$$

donde

$Q_{i,j,k,m}$  es la tasa a la que el agua se suministra a la celda de la frontera  $m$  [ $L^3 t^{-1}$ ];

$C_m$  es la constante de proporcionalidad para la frontera  $m$  [ $L^2 t^{-1}$ ];

$HB_m$  es la carga en la frontera de la fuente  $m$  [L]; y

$h_{i,j,k}$  es la carga en la celda [L].

La fuente de agua puede ser un río y en este caso la constante de proporcionalidad es la conductividad de la orilla del río. Si la fuente es un dren (es decir, una fuente negativa) entonces la constante es una función del material que rodea el dren y el tamaño y espacio de los poros del material del dren. También puede ser una carga en el acuífero fuera del área de simulación y en este caso la constante es la conductividad hidráulica del material entre la carga conocida y la frontera del área simulada. El paquete GHB puede usarse para simular estos tres casos. En los dos primeros casos, el paquete GHB tratará con una relación lineal simple, que es más restrictivo que en el paquete de ríos o el de drenaje que tratan con dos relaciones lineales. En el tercer caso, el paquete GHB no trata de tomar cambios en el almacenaje del acuífero entre la carga de la frontera y el área simulada.

LIBRERIA

Los datos para GHB, los cuales se deben almacenar en un archivo y se deben especificarse por el usuario para cada periodo de fuerza. La entrada para cada frontera consiste de la localización de la celda fronteriza (capa, renglón y columna), carga fronteriza, y la constante de proporcionalidad.

#### PAQUETE DE RECARGA.

La infiltración por precipitación generalmente ocurre uniformemente sobre una gran superficie, por lo que es llamada "recarga distribuida superficialmente". Esta se expresa en términos de tasa de flujo por unidad de área y se puede reducir a unidades de longitud por unidad de tiempo, como por ejemplo:  $\text{cm}/\text{seg}$ ,  $\text{pulgadas}/\text{hora}$ , etc.

La tasa volumétrica de flujo en una celda es la tasa de infiltración por el área de la celda. En forma de ecuación tenemos:

$$\text{ORCH}_{i,j,k} = I_{i,j,k} * \text{DELR}_j * \text{DELC}_j$$

donde  $I_{i,j,k}$  es la tasa de infiltración [ $\text{Lt}^{-1}$ ]. Notese que la tasa de recarga es independiente de la carga en la celda.

La tasa de recarga se almacena en un arreglo bidimensional (RECH) con un elemento para la localización de cada celda.

La capa a la cual se aplica la carga puede especificarse usando una de las tres opciones:

- NRCHOP = 1, la recarga solamente afecta la primera capa;
- = 2, la recarga afecta la capa especificada en el arreglo indicador (IRCH) que se indica por el usuario; y
- = 3, la recarga afecta la primer celda activa en cada columna vertical.

La tasa de recarga se lee como flujo volumétrico por unidad de área. Esta tasa se multiplica por el área de la celda y se obtiene la tasa de flujo volumétrico.

BIBLIOTECA

Si se especifica la opción 2, el arreglo indicador IRCH también se lee. El arreglo indicador debe contener para cada celda: el número de capa a la que se aplicará la recarga.

Si se especifica la opción 1, la celda apropiada está en el límite de la malla (capa 1).

Si se toma la opción 3, la celda apropiada es la primer celda activa, la cual no debe estar debajo de una celda de carga constante. Si la primer celda activa está debajo de una celda de carga constante la recarga no se aplica a ninguna celda porque se considera que la recarga es interceptada por la frontera.

#### PAQUETE DEL PROCEDIMIENTO FUERTEMENTE IMPLICITO.

El procedimiento fuertemente implícito (SIP) es un método para resolver iterativamente un sistema de ecuaciones lineales simultaneas grande.

Como ya se sabe, al tener un esquema en diferencias finitas implícito para cada celda, tenemos que resolver un sistema de ecuaciones lineales simultaneas, por lo que es necesario tener un método para resolver este tipo de problemas.

El sistema por resolver puede escribirse de la forma:

$$\bar{A} \bar{h} = \bar{q}$$

donde las dos barras sobre A indican que es una matriz cuadrada. La barra simple sobre h y q indican que son vectores. Además estos sistemas de ecuaciones que se obtienen de la discretización en diferencias finitas tiene pocos elementos diferentes de cero y ellos estan en siete diagonales.

El procedimiento SIP es un procedimiento iterativo que calcula una sucesión de distribuciones de carga  $\bar{h}^1, \bar{h}^2, \dots, \bar{h}^m$  que convergen a  $\bar{h}$ , la solución de  $\bar{A} \bar{h} = \bar{q}$ . Cada distribución de carga consiste de un valor de carga para cada celda activa.

La experiencia muestra que si la ecuación en diferencias finitas se resuelve en dos ordenes diferentes sobre iteraciones alternantes, el número de iteraciones necesarias para converger a la solución es mucho menor que si sólo se utiliza un orden.

LIBRERIA

Una alternativa de orden para empezar es la primera columna, el último renglón y la última capa y proceder en forma ascendente en las columnas y descendiendo en los renglones y las capas.

Basados en la experiencia se deben tener datos como el número de parámetros de iteración (generalmente cinco son suficientes), tomando en cuenta que la selección no altera el valor de la solución, solamente la eficiencia del método; el parámetro de aceleración (ACCL) que debe ser mayor que cero y generalmente igual a uno, y algunos otros que indican la forma de archivar e imprimir los resultados. Estos son necesarios para la entrada a este paquete.

#### PAQUETE DEL PROCEDIMIENTO DE SOBRRERELAJACION SUCESIVA.

La sobrerrelajación sucesiva (SSOR) es una técnica para resolver iterativamente un sistema de ecuaciones lineales.

El paquete SSOR, en particular, resuelve las ecuaciones en diferencias finitas asociadas a las celdas de la malla. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$\begin{aligned}
 & CV_{i,j,k-1/2} h_{i,j,k-1}^{m,l+1} + CC_{i-1/2,j,k} h_{i-1,j,k}^{m,l+1} + CR_{i,j-1/2,k} h_{i,j-1,k}^{m,l+1} \\
 & + (-CV_{i,j,k-1/2} - CC_{i-1/2,j,k} - CR_{i,j-1/2,k} - CR_{i,j+1/2,k} \\
 & - CC_{i+1/2,j,k} - CV_{i,j,k+1/2} - HCOF_{i,j,k}) h_{i,j,k}^{m,l+1} \\
 & + CR_{i,j+1/2,k} h_{i,j+1,k}^{m,l+1} + CC_{i+1/2,j,k} h_{i+1,j,k}^{m,l+1} + CV_{i,j,k+1/2} h_{i,j,k+1}^{m,l+1} \\
 & = RHS_{i,j,k}
 \end{aligned}$$

donde

m es el contador del paso del tiempo; y

l es el contador de la iteración.

Aquí tenemos una ecuación para cada celda de la malla. Lo primero que hace el paquete SSOR es reducir el número de ecuaciones y resuelve simultáneamente sólo esas ecuaciones que representan todas las celdas de un mismo renglon en un bloque, donde el bloque se identifica por sus número de renglon.

La implementación del método de sobrerrelajación sucesiva involucra procesamiento de los renglones a un sólo tiempo, primero se reformulan las ecuaciones para cada renglon y entonces se resuelven las ecuaciones resultantes y así se obtienen los cambios aproximados de carga en cada celda del renglon. Finalmente el cambio de carga debe multiplicarse por el factor de relajación  $\omega$  (que se encuentra entre cero y uno) y agregarse a la carga de la iteración previa para obtener el nuevo valor de la carga.

Al final de cada iteración, el cambio de carga máximo para la iteración se compara con un criterio de clausura. Si el cambio de carga máximo es mas pequeño entonces se dan por concluidas las iteraciones.

El número máximo de iteraciones en cada paso del tiempo (MXITER), el parámetro de relajación (ACCL), el valor del criterio de clausura (HCLOSE) para la convergencia; se necesitan como datos de entrada al paquete SSOR.

#### CONTROL DE SALIDA.

El control de salida es una opción separada del paquete básico (BAS). La entrada para el control de salida se lee de la unidad especificada en IUNIT (12). Si IUNIT (12) es cero, los datos del control de salida no se leen y se usa el control de salida por default. Bajo la impresión por default la carga se imprime al final de todo el periodo de fuerza. Además si las cargas iniciales se salvan (ISTRT  $\neq$  0) el abatimiento se imprime al final de cada periodo de fuerza. El formato de impresión por default para la carga y el abatimiento es 10G11.4.

En el caso de que se utilice la opción de control de salida, se tienen que indicar el formato en el cual las cargas y el abatimiento se imprimiran (IHEDFM, IDDNFMD, así como también se debe indicar si se imprimiran los gastos volúmetricos, el abatimiento, etc.

#### PROBLEMA EJEMPLO.

Este problema ejemplo es para ilustrar la entrada y salida del programa.

El acuífero que se simulará consta de tres capas de simulación, como se muestra en la figura 4.2, la separación entre cada capa es una capa confinada.

Cada capa es un cuadrado de 75,000 pies por lado y está dividida en una malla de 15 renglones y 15 columnas, que forman cuadrados de 5,000 pies por lado. El flujo en las capas confinadas que separan a las capas activas no se simula, pero los efectos de estas en el flujo entre las capas activas se incorpora en el término de la conductividad vertical (VCOUN).

El flujo en el sistema es infiltración por precipitación; el flujo hacia afuera del sistema es llevado por tubos de drenaje, pozos de descarga y un lago que se representa por una frontera de carga constante.

Al empezar las cargas son iguales a cero, el programa se corrio para obtener una solución en estado estacionario.

El procedimiento que se utilizó para resolver el sistema de ecuaciones en diferencias fué el fuertemente implícito (SIP), con un criterio de error de 0.001, y el parámetro de aceleración de 1.0 y el número máximo de iteraciones fue de 50, aunque sólomente 31 iteraciones fueren necesarias para terminar.

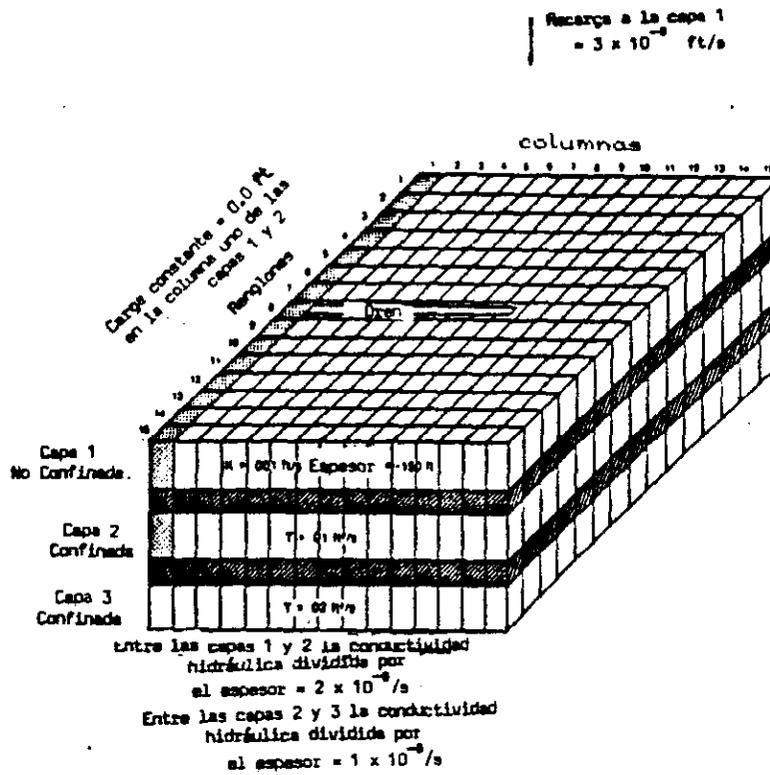


FIGURA 4.2. - Problema ejemplo.

Lista de Pozos.

Capa	Renglon	Columna
3	5	11
2	4	6
2	6	12
1	9	8
1	9	10
1	9	12
1	9	14
1	11	8
1	11	10
1	11	12
1	11	14
1	13	8
1	13	10
1	13	12
1	13	14

Lista de Drenes.

Capa	Renglon	Columna	Elevación.
1	8	2	0.0
1	8	3	0.0
1	8	4	10.0
1	8	5	20.0
1	8	6	30.0
1	8	7	50.0
1	8	8	70.0
1	8	9	90.0
1	8	10	100.0

ARCHIVO DE ENTRADA AL PAQUETE BASICO  
PARA EL PROBLEMA EJEMPLO

```

      2      18      18      1      0      1
7 8 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 11
      0      1      IAPART,ISTR1
      1      1(2013)
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
      0      1
444.44      HNOFLO
      0      100.
      0      100.
86400.      1      1

```

ARCHIVO DE ENTRADA AL PAQUETE DE  
FLUJO POR BLOQUE CENTRADO  
PARA EL PROBLEMA EJEMPLO

1 0 ISS IBCFBD  
0  
0 1.  
0 1000.  
0 1000.  
0 .001  
0 0.  
0 .00000001  
0 .1

ARCHIVO DE ENTRADA AL PAQUETE DE POZOS  
PARA EL PROBLEMA EJEMPLO

2 0 MXWELL IWELBD  
2  
2 9 4 -1.  
1 9 14 -1.

ARCHIVO DE ENTRADA AL PAQUETE  
DE RECARGA  
PARA EL PROBLEMA EJEMPLO

1 0 NRCHOP IRCHBD  
0 0  
0 1.E-9

ARCHIVO DE ENTRADA AL PAQUETE  
 DEL PROCEDIMIENTO FUERTEMENTE IMPLICITO  
 PARA EL PROBLEMA EJEMPLO



EL SABER DE MIS HIJOS  
 PARA LA INDEPENDENCIA  
 BIBLIOTECA  
 DEPARTAMENTO DE  
 MATEMATICAS

50	5	MXITER	NPARM		
1.	.001		1	0	1

ARCHIVO DE ENTRADA AL PAQUETE  
 DE CONTROL DE SALIDA  
 PARA EL PROBLEMA EJEMPLO

-4	5	0	0	IHEDFM	IDDNFM	IHEDUN	IDDNUN
0	1	1	0	INCODE	IHDDFL	IBPRFL	IBSVFL
1	1	0	0	HDPR	DDPR	HDSV	DDSV

CARGA EN LAS CAPAS 1, 2, Y 3 RESPECTIVAMENTE.

	1 11	2 12	3 13	4 14	5 15	6	7	8	9	10
1	.0	24.94	44.01	59.76	71.82	82.52	91.91	100.0	106.9	112.6
	117.4	121.3	124.3	126.4	127.4					
2	.0	24.45	43.10	57.98	70.17	80.57	90.12	98.40	105.3	111.0
	115.7	119.6	127.7	124.9	126.1					
3	.0	23.45	41.30	55.43	66.78	76.21	86.51	95.70	102.7	107.6
	112.0	116.1	119.6	122.1	123.4					
4	.0	21.92	38.61	51.75	61.79	68.03	81.34	90.75	97.64	102.5
	106.1	110.7	114.9	117.9	119.4					
5	.0	19.73	34.92	47.32	57.69	66.74	77.05	85.76	92.22	96.15
	97.29	103.1	108.8	112.6	114.3					
6	.0	16.51	29.60	40.90	51.30	61.21	71.19	79.85	86.47	90.82
	93.03	94.23	102.1	106.4	108.4					
7	.0	11.55	21.10	31.21	41.40	51.84	63.08	72.68	79.95	84.92
	86.60	91.66	96.43	99.82	101.8					
8	.0	3.483	6.832	16.25	26.30	36.97	52.59	64.31	72.52	77.25
	81.99	85.00	89.27	91.72	94.33					
9	.0	10.54	19.11	28.12	36.92	45.27	52.95	55.38	65.15	66.07
	73.93	73.79	80.84	80.17	86.49					
10	.0	14.62	25.86	35.38	43.49	50.11	54.93	57.55	62.95	65.55
	70.39	72.44	76.72	78.26	81.79					
11	.0	17.11	29.96	40.01	47.78	53.24	65.81	63.33	60.27	59.29
	66.43	65.45	72.22	71.04	77.62					
12	.0	18.68	32.56	43.07	50.81	55.92	68.33	68.47	61.93	63.18
	67.12	68.50	72.29	73.46	76.85					
13	.0	19.67	34.24	45.14	53.01	58.04	69.91	66.75	62.59	60.91
	67.22	65.75	71.90	70.35	76.48					
14	.0	20.27	35.27	46.48	54.61	60.08	63.17	64.52	67.25	68.79
	71.64	73.18	75.84	77.03	79.09					
15	.0	20.56	35.78	47.16	55.48	61.26	65.02	67.52	69.94	72.01
	74.29	76.22	78.22	79.66	80.82					

	1 11	2 12	3 13	4 14	5 15	6	7	8	9	10
1	.0	24.66	43.73	59.02	71.61	82.32	91.72	99.86	106.7	112.5
	117.2	121.1	124.1	126.2	127.3					
2	.0	24.17	42.83	57.74	69.95	80.36	89.93	98.22	105.1	110.8
	115.5	119.4	122.6	124.8	125.9					
3	.0	23.17	41.03	55.19	66.53	75.77	86.29	95.02	102.0	107.4
	111.8	116.0	119.5	121.9	123.2					
4	.0	21.65	38.34	51.50	61.35	60.17	80.90	90.55	97.45	102.3
	105.4	110.4	114.8	117.7	119.2					
5	.0	19.48	34.65	47.07	57.44	66.30	76.85	85.57	92.00	95.41
	91.09	102.1	108.6	112.4	114.2					
6	.0	16.27	29.24	40.65	51.07	60.98	70.98	79.65	86.28	90.54
	92.06	86.23	101.7	106.2	108.3					
7	.0	11.38	20.95	31.05	41.25	51.70	62.90	72.48	79.76	84.73
	88.35	91.24	96.22	99.65	101.6					
8	.0	4.209	8.330	17.58	27.58	38.25	52.94	64.19	72.34	77.12
	81.81	84.86	89.10	91.59	94.17					
9	.0	10.38	18.96	27.98	36.79	45.16	52.86	56.13	65.08	66.79
	73.87	74.48	80.77	80.84	86.38					
10	.0	14.40	25.61	35.15	43.27	49.91	64.76	67.48	62.79	65.49
	70.24	72.37	76.57	78.20	81.64					
11	.0	16.87	29.70	39.78	47.56	53.05	55.68	54.09	60.20	60.04
	66.37	66.18	72.16	71.75	77.51					
12	.0	18.43	32.31	42.85	50.60	55.73	58.16	58.41	61.78	63.12
	66.98	68.44	72.15	73.40	76.69					
13	.0	19.42	33.98	44.91	52.80	57.85	69.78	67.50	62.53	61.65
	67.16	66.48	71.84	71.06	76.37					
14	.0	20.02	35.02	46.26	54.41	59.88	62.99	64.39	67.08	68.66
	71.48	73.06	75.68	76.91	78.93					
15	.0	20.30	35.52	46.94	55.28	61.07	64.84	67.34	69.76	71.84
	74.11	76.04	78.04	79.49	80.65					

	1 11	2 12	3 13	4 14	5 15	6	7	8	9	10
1	1.800	24.34	43.36	58.70	71.33	82.06	91.48	99.63	106.5	112.3
	117.0	120.9	123.9	126.0	127.1					
2	1.764	23.85	42.46	57.42	69.66	80.07	89.68	97.99	104.9	110.6
	115.3	119.2	122.4	124.6	125.7					
3	1.691	22.86	40.67	54.87	66.20	75.28	85.98	94.77	101.7	107.2
	111.5	115.7	119.3	121.7	123.0					
4	1.578	21.35	37.98	51.17	60.85	62.69	80.41	90.28	97.19	101.9
	104.1	110.0	114.5	117.5	119.0					
5	1.415	19.18	34.30	46.75	57.10	65.80	76.54	85.30	91.67	94.17
	77.46	100.7	108.2	112.1	114.0					
6	1.176	15.99	28.91	40.33	50.76	60.67	70.70	79.38	86.01	90.12
	90.60	88.55	101.2	106.0	108.0					
7	.873	11.21	20.79	30.88	41.09	51.55	62.67	72.22	79.50	84.46
	87.98	90.77	95.94	99.41	101.4					
8	.4331	5.131	10.19	19.27	29.19	39.84	53.40	64.07	72.11	76.95
	81.58	84.68	88.88	91.44	93.95					
9	.7543	10.22	18.82	27.84	36.66	45.06	52.78	57.03	65.02	67.64
	73.81	75.31	80.72	81.64	86.24					
10	1.039	14.13	25.29	34.85	42.99	49.65	54.54	57.44	62.61	65.44
	70.05	72.33	76.39	78.15	81.43					
11	1.224	16.59	29.37	39.47	47.28	52.79	55.53	55.01	60.16	60.94
	66.33	67.06	72.13	72.60	77.38					
12	1.341	18.15	31.97	42.54	50.22	55.47	57.94	58.37	61.60	63.08
	66.80	68.41	71.97	73.36	76.49					
13	1.415	19.14	33.65	44.61	52.53	57.80	59.63	58.39	62.48	62.54
	67.12	67.35	71.80	71.90	76.24					
14	1.460	19.73	34.68	45.96	54.13	59.63	62.76	64.24	66.87	68.52
	71.27	72.91	75.47	76.77	78.71					
15	1.481	20.01	35.52	46.94	55.28					

# CAPITULO V

## CALIBRACION DE MODELOS

La ecuación diferencial que rige el flujo de agua en dos dimensiones, basada en la ley de Darcy y en las leyes de conservación de masa es:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ T \frac{\partial h}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ T \frac{\partial h}{\partial Y} \right] = S \frac{\partial h}{\partial t} + q \quad 5.1$$

donde:

$h$  = Elevación del nivel del agua, desde un nivel arbitrario. [L]

$q$  = Tasa de bombeo o recarga por unidad de área. [L/t]

$S$  = Almacenamiento del medio poroso (sin dimensiones).

$T$  = Transmisividad del medio poroso [L<sup>2</sup>/t]

también:

$$T = K h' \quad \text{acuífero no confinado}$$

$$T = K D \quad \text{acuífero confinado}$$

donde:

$K$  = conductividad hidráulica [L/t]

$h'$  = espesor del acuífero no confinado a tiempo  $t$ . [L]

$D$  = espesor del acuífero confinado. [L]

además de la ecuación diferencial se tienen las condiciones iniciales y a la frontera

$$h(X, Y, 0) = \xi(X, Y); \text{ con } X, Y \in \partial\Omega \quad 5.2$$

$$h(X, Y, t) = \eta(X, Y, t); \text{ con } X, Y \in \partial\Omega; t > 0 \quad 5.3$$

Si se supone que los parámetros hidráulicos, es decir,  $K$  y  $S$  son conocidos, entonces la ecuación (5.1) junto con (5.2) y (5.3) determinan a  $h(X, Y, t)$  de manera única para  $t > 0$ . Esto es a lo que se le llama el problema directo en aguas subterráneas, que comúnmente se resuelve por un método de simulación numérica.

Cuando se recurre a un modelo de simulación se considera que datos como la transmisividad y almacenaje, son conocidos en cada punto de la malla. Una vez resuelto el modelo de simulación ya sea por diferencias finitas o por elemento finito, se deben hacer verificaciones para ver si dicha solución concuerda con la realidad del acuífero, este proceso de verificación es a lo que se le llama CALIBRACION del modelo.

La calibración consiste en ajustar los datos de entrada hasta que las cargas hidráulicas calculadas por el modelo de simulación sean iguales a los valores de campo. La calibración muchas veces se obtiene por simulaciones de prueba y error y se puede considerar como una forma de resolver el problema inverso.

Estimar los valores de los parámetros hidráulicos de un acuífero es una de las aplicaciones más importantes del modelado de aguas subterráneas. Esta aplicación describe como resolver un problema de identificación de parámetros o problema inverso. El problema de identificación de parámetros puede definirse como la solución de la ecuación de flujo de agua subterráneas para los valores de los parámetros, usando observaciones de la variable dependiente (carga hidráulica), geometría del acuífero y condiciones a la frontera, es decir, en el problema inverso dados valores medidos de  $h$ , digamos  $h^*(X_i, Y_i, t_j)$ , en un número finito de puntos  $(X_i, Y_i)$  y un número finito de tiempos  $t_j$ , encontrar un conjunto particular de parámetros, los cuales, al mismo tiempo que no difieren mucho de (posibles) estimaciones previas, llevan a una concordancia óptima entre valores medidos  $h^*$  y valores calculados de  $h$ .

En este capítulo, no se resuelve ningún problema de identificación de parámetros, ya que son muchos los métodos que hasta la fecha se han desarrollado y el analizar exhaustivamente el problema inverso, podría ser un tema para un estudio adicional. Sin embargo, se presenta una reseña de procedimientos que utilizó Khan (1985).

Si  $h^*(X, Y, t)$  es el valor observado de la carga hidráulica y  $\bar{h}(X, Y, t)$  el calculado, y son funciones continuas conocidas de  $X, Y, t$ , entonces el problema inverso es continuo.

con la condición de flujo preescrito

$$T(X) \frac{dh}{dx} = Q_L \quad X = L \quad 5.5$$

Por la definición de Neuman (1973), (5.4) y (5.5) forman un problema de valores iniciales del tipo de Cauchy. Integrando (5.4) entre  $X$  y  $L$  sujeta a la condición de Cauchy (5.5) obtenemos

$$T(X) = \frac{1}{dh/dX} \left[ Q_L - \int_x^L q(X) dx \right] \quad 5.6$$

esta solución es válida solamente si  $dh/dX \neq 0$  para todo  $X \in [0, L]$ , de cualquier otra forma el problema se dice que es mal planteado. Otras causas que provocan que un problema sea mal planteado son: la escasez de información acerca de los datos de Cauchy, es decir  $Q_L$ , sin embargo, en el caso particular cuando  $q(X) = 0$  para todo  $X \in (0, L)$ ,  $T(X)$  puede determinarse como una constante, en el caso en que  $Q_L$  sea desconocida. Es decir, aunque el valor permanezca desconocido,  $T(X)$  estará dado por (5.6).

En (5.4)-(5.6) los datos de entrada al problema inverso se considera sin error o completamente desconocido. Ahora vamos a considerar que el problema inverso sin error esta bien planteado y además  $T(X)$  (como en (5.6)) se comporta "bien" en todo  $[0, L]$ . Sin embargo, en lugar de tener información completa acerca de  $h(X)$ ,  $q(X)$  y  $Q_L$ , tenemos información acerca de las cantidades  $h^*(X)$ ,  $q^*(X)$  y  $Q_L^*$ , respectivamente y se relacionan con los anteriores de la siguiente forma

$$h^*(X) = h(X) + \varepsilon(X) \quad 5.7$$

$$q^*(X) = q(X) + \eta(X) \quad 5.8$$

$$Q_L = Q_L + \mu_L \quad 5.9$$

donde  $\varepsilon(X)$ ,  $\eta(X)$  y  $\mu_L$ , representan "ruido". Introduciendo estos términos de ruido en (5.6) obtenemos una expresión exacta para la transmisividad,

$$T^*(X) = \frac{1}{dh^*/dX} \left[ Q_L^* - \int_x^L q^*(X) dx \right] \quad 5.10$$

Se considera que el error en las estimaciones de la transmisividad  $T(X)$  esta dado por

$$e(X) = T^*(X) - T(X) \quad 5.11$$

Si consideramos la norma de cualquier función  $g(X)$ ,  $\|g(X)\|$ , definida como:

$$\|g(X)\| = \max_{X \in [0, L]} |g(X)| \quad 5.12$$

Entonces en el caso hipotético cuando  $e(X)$  es cero en todo  $[0, L]$  la norma de  $e(X)$  satisface la relación

$$\begin{aligned} \|e(X)\| &= \left\| \left[ \frac{dh}{dX} \right]^{-1} \left[ \mu L - \int_x^L \eta(X) dx \right] \right\| \\ &\leq \left\| \left[ \frac{dh}{dX} \right]^{-1} \right\| (|\mu L| - L \| \eta(X) \|) \end{aligned} \quad 5.13$$

donde  $\| (dh/dX)^{-1} \|$  es finito, ya que (5.4)-(5.5) esta bien planteado, implicando que en ausencia de errores en los datos del nivel del agua, el error de estimación tiene una cota superior y puede hacerse arbitrariamente pequeño controlando las magnitudes de  $\mu$  y  $\eta(X)$ .

Como las magnitudes de  $e(X)$  dependen continuamente de las magnitudes de  $\mu$  y  $\eta(X)$ , el problema inverso permanece bien planteado aun cuando los datos de flujo de la frontera y fuentes y/o sumideros esten perturbados por ruido. Lo mismo sucede cuando el modelo (5.4) es perturbado por ruido ya que el efecto de tal ruido es igual al de  $\eta(X)$ .

Otra implicación de (5.10) y (5.11) es que si  $E[\mu L] = E[\eta(X)] = 0$  para todo  $X \in [0, L]$ , entonces  $E[e(X)] \equiv 0$ , lo que significa que  $T^*(X)$  es un estimador insesgado de  $T(X)$ .

En el caso mas realista cuando  $e(X)$  no es idénticamente cero, la situación queda mucho mas difícil. Aquí la norma del error de estimación satisface la relación

$$\left\| \mu L - \int_x^L \eta(X) dx - \frac{d\epsilon}{dX} T(X) \right\| = \left\| e(X) \frac{dh^*}{dX} \right\| \leq \left\| e(X) \right\| \left\| \frac{dh^*}{dX} \right\|$$

y también

$$\left\| e(X) \right\| \geq \left( \left\| \frac{dh}{dX} \right\| + \left\| \frac{d\epsilon}{dX} \right\| \right)^{-1} \left( \left\| \frac{d\epsilon}{dX} \right\| T_{\min} - \left\| \mu L - \int_x^L \eta(X) dx \right\| \right) \quad 5.14$$

donde  $T_{\min} = \min_{X \in (0, L)} T(X)$

El problema inverso queda mal planteado cuando los datos del nivel del agua están perturbados por ruido. Para ver esto es suficiente mostrar que si cambiamos cualquiera de los dos números  $\alpha$  y  $\beta$  siempre podemos encontrar una función  $h^*(X)$  tal que

$$\left\| h^*(X) - h(X) \right\| = \left\| e(X) \right\| \leq \alpha \quad 5.15$$

y aun mas  $\left\| \frac{d\epsilon}{dX} \right\| > \beta$

En efecto, si uno toma  $h^*(X) = h(X) + \alpha \sin(\omega X)$  y establecemos  $\omega > \beta/\alpha$ , la relación de arriba se cumple. Esto implica que (5.14) puede escribirse en la forma

$$\left\| e(X) \right\| > \left( \left\| \frac{dh}{dX} \right\| + \beta \right)^{-1} \left( \beta T_{\min} - \left\| \mu L - \int_x^L \eta(X) dx \right\| \right) \quad 5.17$$

Como  $\beta$  puede hacerse arbitrariamente grande para cualquier  $\alpha$ , entonces de (5.17) la cota inferior en  $\left\| e(X) \right\|$  puede hacerse tan grande como  $T_{\min}$ . Esto significa que el problema inverso es mal planteado en el sentido en que para cualquier  $h(X)$ ,  $q(X)$ ,  $Q_L$ ,  $\alpha$  y  $T_{\min}$  existe una función  $h^*(X)$  tal que cuando  $T(X)$  satisface (5.4)-(5.5) para  $h(X)$  y  $T^*(X)$  satisface (5.4)-(5.5) para  $h^*(X)$ , uno tienen

$$\left\| h^*(X) - h(X) \right\| < \alpha \quad 5.18$$

y además

$$\| T^*(X) - T(X) \| > T_{\min}$$

5.19

En otras palabras, un cambio mínimo en los datos del nivel del agua pueden causar un cambio arbitrariamente grande en la transmisividad calculada, implicando que no depende continuamente de los datos. Es equivalente a decir que el problema inverso es mal planteado y su solución puede ser inestable.

Debido a esto el método directo es poco utilizado para resolver el problema inverso.

El enfoque indirecto esencialmente es un procedimiento de prueba y error. Los valores de  $S$  y  $K$  son supuestos y el modelo se resuelve conociendo la geometría del acuífero y la carga hidráulica.

La carga Hidráulica obtenida por el modelo es comparada con la carga piezométrica observada, usando una función criterio conveniente. Si el criterio se satisface, el procedimiento se da por terminado; en cualquier otro caso, se propone un nuevo conjunto de parámetros y se repite el procedimiento hasta que converja. Los trabajos de Vermuri y Karplus (1969), Haines y otros (1968), Labidie (1975), Neuman (1973), Kanh (1985), son ejemplos de aproximaciones indirectas.

Los métodos indirectos difieren principalmente en la selección del algoritmo y la función criterio. Varias funciones criterio que han sido usadas son:

1. - La minimización de unas funciones de  $(K - \bar{K})$  y  $(S - \bar{S})$ , donde  $K$  y  $S$  son la conductividad hidráulica y el almacenaje, respectivamente, y  $\bar{K}$  y  $\bar{S}$  son los correspondientes parámetros estimados. Como  $K$  y  $S$  son desconocidos, sólo la esperanza de la diferencia puede minimizarse si se dispone de suficientes conocimientos.
2. - La minimización de una función o funcional de  $Z = [h(\bar{K}, \bar{S}) - \bar{h}(K, S)]$ , donde  $h(\bar{K}, \bar{S})$  y  $\bar{h}(K, S)$  son las cargas piezométricas calculadas y observadas, respectivamente.

Cuando el segundo criterio se usa. La función que utiliza es la función de mínimos cuadrados, usando el criterio de mínimos cuadrados, el objetivo es encontrar  $\bar{K}$  y  $\bar{S}$  y también minimizar  $Z$ , donde la ecuación puede escribirse

$$Z = \int \int_{t, \Omega} [h(\bar{K}, \bar{S}) - \bar{h}(K, S)]^2 d\Omega dt \quad 5.20$$

Como el problema inverso en aguas subterráneas es discreto (la mayoría de las veces), es decir, las cargas piezométricas son disponibles para puntos discretos, la ecuación (5.20), para un número  $N$  de observaciones sobre un periodo de tiempo  $T$ , puede escribirse como:

$$Z = \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N [h(\bar{K}, \bar{S}) - \bar{h}(K, S)]^2 \quad 5.21$$

#### ALGORITMO DE AJUSTE.

En una aproximación indirecta, en una corrida del modelo de simulación se requiere que en cada paso del tiempo se ajusten los parámetros. Como los modelos de simulación son costosos, se requiere de un algoritmo de ajuste, para que se minimice el número de evaluaciones de la función.

Se pueden considerar dos tipos de algoritmos de ajuste, uno que requiere derivadas y el otro no.

Algunos algoritmos usan derivadas de primer orden de la función objetivo y otros usan derivadas de segundo orden.

Los métodos sin derivadas se les llama métodos de registro de optimización, no requieren derivadas de la función objetivo para determinar la dirección de movimiento. La dirección de minimización se determina por evaluaciones sucesivas de la función objetivo.

En general, los métodos de registro son mas lentos que los que requieren derivadas. Pero, para funciones donde las expresiones analíticas para la derivada son difíciles o imposibles de evaluar, el método de registro puede preferirse.

La función objetivo es muy compleja, y su derivación puede ser imposible. Sin embargo, para un punto dado, se puede obtener numericamente. Esto incrementa significativamente el número de evaluaciones, en el caso de que se usen métodos que requieran derivadas.

La eficiencia de tres algoritmos fue presentada por I. Khan (1985), para un acuífero hipotético rectangular, con fronteras impermeables como se muestra en la figura 5.1 (a,b, y c). El acuífero se divide en tres regiones de diferente conductividad, es no confinado y de espesor uniforme. Además cuenta con cinco pozos de bombeo.

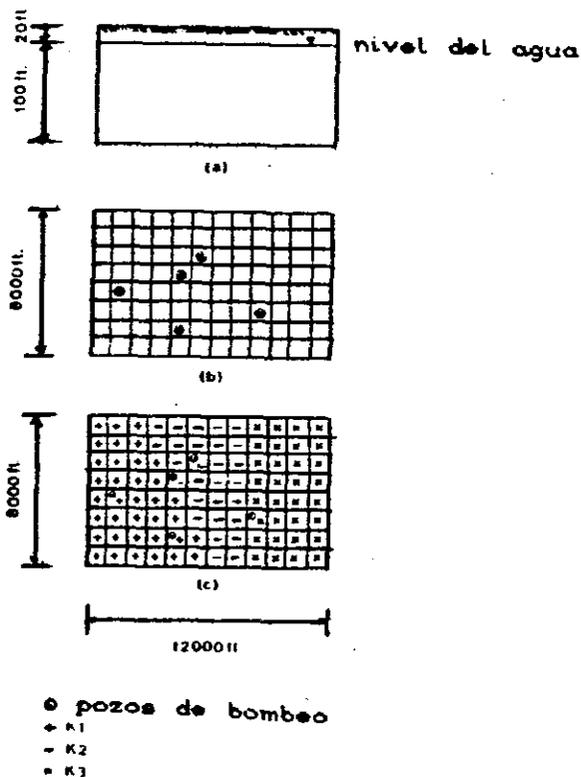


FIGURA 5.1.- Acuífero ejemplo.

El acuífero se modeló con diferencias finitas. Se determinó la elevación del nivel del agua de 30 días, y estos resultados se usaron como datos históricos para el problema inverso y se consideró

- Para los tres algoritmos se empezó con un valor de conductividad igual en las tres regiones.

Y se obtuvo:

- El algoritmo sin derivadas convergió en tres iteraciones y se obtuvieron mínimas variaciones en los valores de la conductividad de las tres regiones, en dos regiones se obtuvo el valor verdadero y el otro difirió en 0.02 ft/día y el valor de la función objetivo fué de  $9.7 \times 10^{-6}$  (ver figura 5.2)

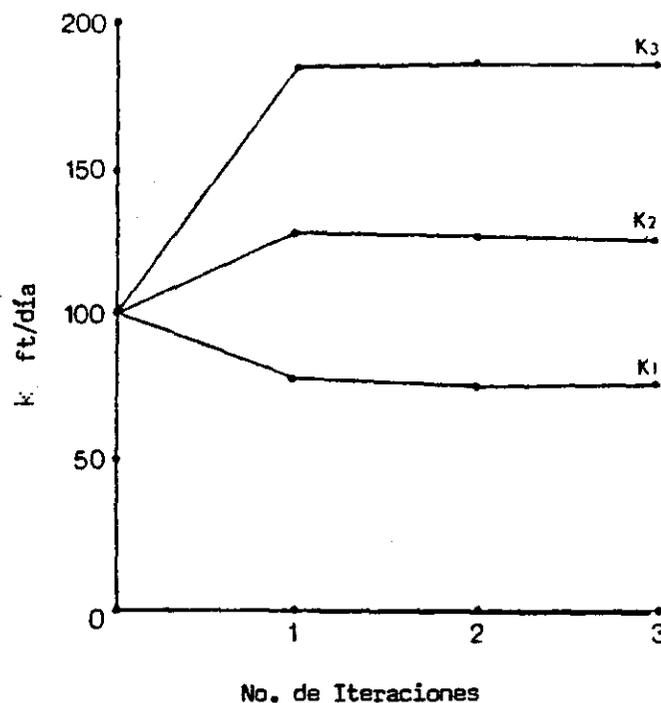


FIGURA 5.2.- Resultados del algoritmo que no utiliza derivadas.

- Con el algoritmo de derivadas de primer orden no convergió para nueve iteraciones y el valor de la función objetivo fue de 3.37 (ver figura 5.3)

- Y por último, con el método de derivadas de segundo orden, converge para cinco iteraciones y se obtuvo una diferencia de 0.1, 0.3, 0.01, para cada una de las conductividades de las tres regiones y la función objetivo tomó el valor de  $8.9 \times 10^{-4}$  (ver figura 5.4)

De los tres algoritmos, el que no utiliza derivadas y con el que utiliza derivadas de segundo orden, se obtuvieron resultados muy buenos, en cambio con el algoritmo con derivadas de primer orden no converge. En un problema para un acuífero grande el número de evaluaciones de la función objetivo es muy importante.

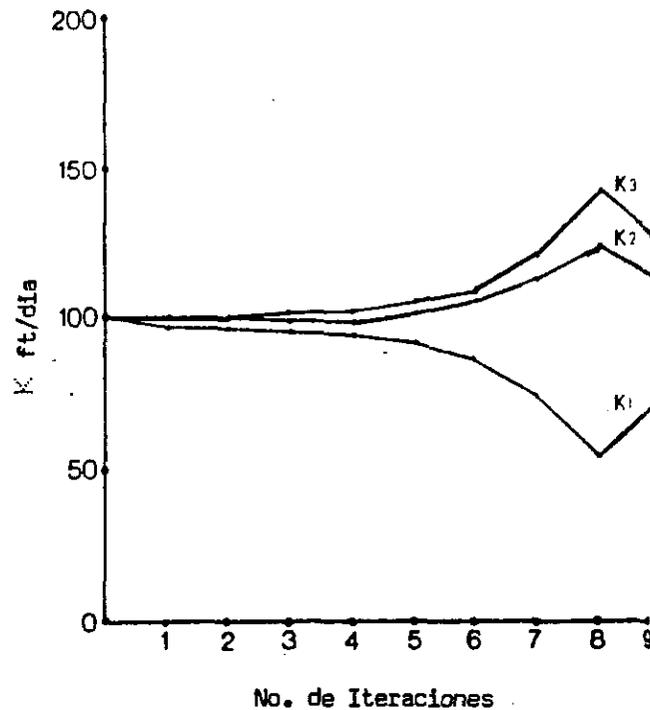


FIGURA 5.3.- Resultados del algoritmo con derivadas de primer orden.

El modelo inverso consiste de un algoritmo de ajuste y una simulación de aguas subterráneas por diferencias finitas o bien elemento finito, donde la función criterio que puede usarse es la ecuación (5.5).

El énfasis es determinar los valores de los parámetros del acuífero, los cuales pueden considerarse como simples constantes en la ecuación de flujo.

Determinar los parámetros de un acuíferos con precisión, requiere del conocimiento exacto de las condiciones iniciales y a la frontera, tipo de acuífero, carga piezométrica y propiedades físicas del medio a través del medio poroso.

En situaciones prácticas encontrar y determinar los parámetros reales es difícil (quizá imposible).

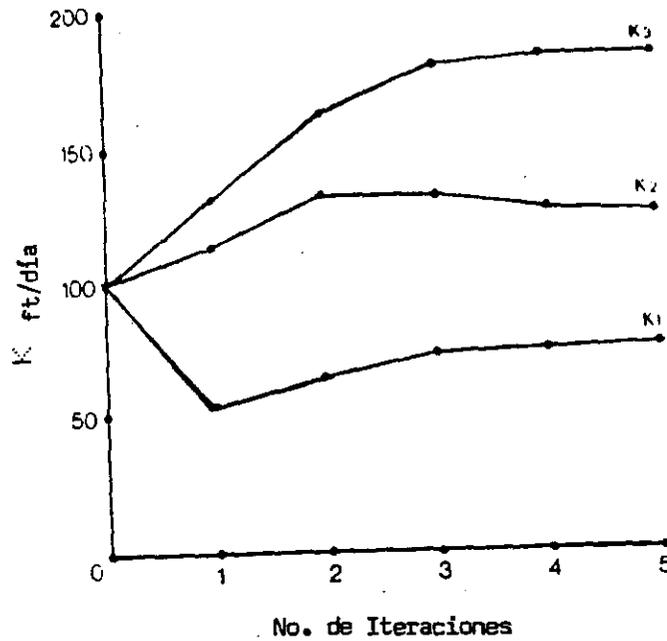


FIGURA 5.4. - Resultados del algoritmo con derivadas de segundo orden.

Como referencia para este problema que ha tenido un buen lugar en el modelado de acuíferos y debido a su inestabilidad también se han presentado muchas técnicas de solución, puede verse el artículo de I. Khan (1985) donde se aplica un modelo inverso a una acuífero real.



EL SACRIFICIO DE NUESTROS HIJOS  
HA HECHO LA GRANDEZA  
DE NUESTRA BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICAS

## APENDICE A

### DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LAX

TEOREMA DE LAX:

"Un esquema consistente para un problema de valores iniciales bien planteado para una ecuación diferencial parcial es convergente si y solo si es estable"

DEMOSTRACION.

Primeramente probaremos que la estabilidad del esquema implica la convergencia del esquema. Después mostraremos que un esquema inestable es no convergente.

Probaremos que la estabilidad implica convergencia donde consideraremos que hay una constante  $C_T$  tal que

$$|e^{q(z)t}| \leq C_T \quad \text{y} \quad |g(ch\xi)^n| \leq C_T \quad \text{A1}$$

para  $0 \leq t \leq T$  y  $0 \leq nk \leq T$ .

Para la primera parte de la demostración asumiremos que la función inicial para el esquema es  $u_0$ . Entonces tenemos

$$\|u_0 - S_0^0\| = \int_{|z| > \pi/h} |\hat{u}_0(z)|^2 dz$$

que converge a cero cuando  $h$  tiende a cero. Usando consistencia obtenemos

$$\frac{e^{kq(z)t} - g(ch\xi)}{k} = O(1) \quad \text{en } h \text{ y } k \quad \text{A2}$$

La notación  $O(1)$  significa que para cada  $\xi$  el lado izquierdo de (A.a2) tiende a cero cuando  $h$  y  $k$  tienden a cero.

Ahora consideremos la norma en  $L^2$  de  $u(t_n, \cdot) - Su^n$ . Y obtenemos la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t_n, X) - Su^n|^2 dx = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |e^{q(z)t_n} - g(ch\xi)^n|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 dz + \int_{|z| > \pi/h} |e^{q(z)t_n} - \hat{u}_0(\xi)|^2 dz \quad A3$$

Consideremos el lado derecho de (A3) como una integral sobre  $\mathbb{R}$ , tomando el integrando por separado, es decir, el integrando es la función

$$\varphi_n = \begin{cases} |e^{q(z)t_n} - g(ch\xi)^n|^2 & \text{si } |\xi| \leq \pi/h \\ |e^{q(z)t_n} - \hat{u}_0(\xi)|^2 & \text{si } |\xi| > \pi/h \end{cases}$$

Además para cada  $\xi$ , cuando  $h$  es suficientemente pequeño de tal forma que  $|\xi| < \pi/h$ , el integrando queda como en la primera parte y se satisface que

$$|e^{q(z)t_n} - g(ch\xi)^n| \leq \eta |e^{q(z)k} - g(ch\xi)| C_T$$

De (A2) tenemos la aproximación

$$|e^{q(z)t_n} - g(ch\xi)^n| \leq n k C_T O(1) \leq O(1)$$

Concluyendo que el miembro del lado derecho de (A3) converge a cero para cada valor de  $\xi$  cuando  $h$  y  $k$  tienden a cero. De este modo tenemos el conjunto de funciones  $\varphi_n$  que están en  $L^1(\mathbb{R})$  y también tienden a cero en cada punto cuando  $h$  y  $k$  tienden a cero.

Para poder continuar lo que tenemos que concluir es que la norma de estas funciones también tienden a cero, esto lo obtenemos observando que

$$|e^{g(x)h^n} - g(x\xi)^n|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 \leq (2C_T)^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2$$

Esto muestra que las funciones  $\phi_n$  están acotadas uniformemente para una función en  $L^1(\mathbb{R})$ , esta cota es  $4C_T |\hat{u}_0(\xi)|^2$ . Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(t_n, \xi) - S v^n(\xi)| d\xi$$

converge a cero cuando  $h$  y  $k$  tienden a cero, y de este modo es convergente.

Ahora consideremos el caso donde  $v^0$  no es igual a  $Tu^0$ . Primeramente definimos la función malla  $w^n$ , que es la solución del esquema en diferencias con función inicial  $Tu^0$ . Entonces tenemos

$$\|\hat{u}(t_n, \cdot) - S v^n\| \leq \|\hat{u}(t_n, \cdot) - S w^n\| + \|S w^n - S v^n\|$$

donde la norma de  $\hat{u}(t_n, \cdot)$  converge a cero. Por estabilidad tenemos

$$\begin{aligned} \|S w^n - S v^n\| &= \|S(w^n - v^n)\| = \|w^n - v^n\|_h \\ &\leq C_T \|w^0 - v^0\|_h = C_T \|Tu^0 - v^0\|_h \\ &\leq C_T \|u^0 - S v^0\| \end{aligned}$$

la cual converge a cero. Esto concluye la primera parte, mostrando que un esquema estable es convergente.

Ahora probaremos que un esquema consistente es no convergente si es inestable.

La demostración consiste en la construcción de una función  $u_0(X)$  tal que el esquema con función inicial  $Tu_0$  no converge a la solución de la ecuación diferencial parcial. La función  $u_0(X)$  se construye como una suma de funciones  $w_M(X)$  determinadas como sigue.

Si el esquema es inestable entonces la aproximación

$$|gCh\xi, k, h| \leq 1 + Ck \quad A4$$

no es válida para cualquier constante  $C$  y para  $h$  y  $k$  suficientemente pequeñas. Entonces para cualesquier entero positivo  $M$ , existen valores de  $\xi_M$ ,  $h_M$  y  $k_M$  tal que

$$|gCh_M \xi_M, h_M, k_M| \geq 1 + M k_M \quad A5$$

y  $|h_M \xi_M| \leq \Pi$ . Como  $gCh\xi, k, h$  es una función continua, existe un número  $\eta_M$  tal que

$$|gCh_M \xi, h_M, k_M| \geq 1 + \frac{1}{2} M k_M \quad A6$$

para  $|\xi - \xi_M| \leq \eta_M$ , y además podemos escoger  $\eta_M$  para que se satisfaga

$$\eta_M \leq M^{-2}$$

y escoger  $h_M$  y  $k_M$  menor que  $h_{M-1}$  y  $k_{M-1}$  respectivamente. Ahora necesitamos un resultado crucial que repercute en la consistencia del sistema.

LEMA: Si el esquema en diferencias finitas es consistente, entonces los intervalos  $I_M = [\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M]$  pueden tomarse de tal forma que sean disjuntos.

Demostración:

Probaremos este lema por inducción en  $M$ . Para  $M=1$  solamente hay un intervalo y por lo tanto se cumple.

Supongamos que para algún  $M$  el intervalo  $I_M$  no puede tomarse disjunto de  $I_N$  con  $N$  mayor que  $M$ . Sea

$$J = \bigcup_{N < M} I_N$$

nuestrea suposición para cualquier  $h$  y  $k$  menor que  $h_{M-1}$  y  $k_{M-1}$ , respectivamente, la aproximación

$$|gCh\xi, k, h| \leq 1 + Mk \quad A7$$

para  $\xi \in J$ . De la consistencia del esquema para la ecuación, de (A2) se sigue que

$$\left| \frac{gCh\xi, k, h}{k} - e^{g(\xi)k} \right| \leq C(\xi) \quad A8$$

para cada  $\xi$  cuando  $h$  y  $k$  tienden a cero. Como  $J$  es un conjunto compacto, existe la unión de un número finito de intervalos cerrados, de tal forma que

$$\sup_{\xi \in J} C(\xi) = C^*$$

existe y es finito. De (A1) también tenemos que

$$|e^{q(\xi)k}| = |e^{q(\xi)hn}|^{1/n} \leq C_T^{1/n} \leq 1 + Kk$$

para algún valor de  $K$ . Esto implica, por (A7) para  $\xi \in J$  y por (A8) para  $\xi \in J$ , que

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + \max(M, C^* + K)k$$

para  $h^3 < hm^{-1}$  y  $k < km^{-1}$ , lo cual contradice nuestra suposición de que el esquema es inestable. Por consiguiente, nuestra suposición es falsa y si existe un  $\xi_M \in J$  tal que (A5) se cumple para algún  $hm$  y  $km$  suficientemente pequeños. Como  $J$  es un conjunto cerrado y  $g$  es una función continua, existe un intervalo  $[\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M]$  disjunto de  $J$  tal que (A6) se cumple. Esto prueba el lema.

Ahora continuemos nuestra construcción de las funciones  $w_M(X)$ . Definamos los números positivos  $\alpha_M$  por  $\alpha_M^2 \eta_M = M^{-2}$  y entonces definimos la función  $w_M$  por

$$\hat{w}_M(\xi) = \begin{cases} \alpha_M & \text{si } |\xi - \xi_M| \leq \eta_M, \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definimos nuestra función inicial como la suma de las funciones  $w_M$ . Sea  $u_0(X) = \sum_{M=1}^{\infty} w_M(X)$ ; mostraremos que  $u_0$  esta es  $L^2$ . Debido a que los intervalos  $I_M$  son disjuntos, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(X)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \sum_{M=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{w}_M(\xi)|^2 d\xi$$

$$= 2 \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M^2 \eta_M = 2 \sum_{M=1}^{\infty} M^{-2} = \frac{\pi^2}{3}$$

lo cual muestra que  $u_0$  está en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ahora mostraremos que la solución del esquema aplicado a  $Tu_0$  no converge. Sea  $v_m^n$  la solución del esquema con esa función inicial. Dado un tiempo  $T$ , escogemos un nivel de tiempo  $n$  y un valor de  $M$  tal que

$$\frac{T}{2} \leq n k M \leq T \quad \text{y} \quad \frac{C_T - 1}{M} \leq \frac{T}{8} \quad \text{A9}$$

donde  $C_T$  es una constante que acota a  $e^{q(z)k^n}$  en (A1). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|Sv^n - u(t_n, \cdot)\|^2 &\geq \|v^n - Tu(t_n, \cdot)\|_h^2 \\ &= \int_{-n/h}^{n/h} |g(h\xi)^n - e^{q(z)kn}|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

para  $h = hM$  y  $\xi$  en  $I_M$ , tenemos que

$$|g(h\xi)^n - e^{q(z)kn}| \geq |g(h\xi)|^n - C_T \geq (1 + \frac{1}{2} M k M)^n - C_T$$

entonces

$$\begin{aligned} \|Sv^n - u(t_n, \cdot)\|^2 &\geq \int_{|\xi - \xi_M| \leq \eta M} |g(h\xi)^n - e^{q(z)kn}|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \left[ (1 + \frac{1}{2} M k M)^n - C_T \right]^2 \alpha_M^2 2\eta M \\ &= 2 \left[ \frac{(1 + \frac{1}{2} M k M)^n - C_T}{M} \right]^2 \end{aligned}$$

esta última expresión la estimamos usando la desigualdad  $(1 + X)^n \geq 1 + nX$  para  $X$  positiva. Entonces por (A9) tenemos

$$\|Sv^n - u(t_n, \cdot)\|^2 \geq 2 \left( \frac{1}{2} nkM - \frac{C_T^{-1}}{M} \right)^2 \geq \frac{T^2}{32} \not\rightarrow 0$$

Entonces  $Sv^n$  no converge a  $u(t_n, \cdot)$  y por tal motivo el esquema no es convergente. Esto completa la demostración.

## APENDICE B

### METODO DE ELEMENTO FINITO

En el método de elemento finito, una región es dividida en subregiones, llamadas elementos, en donde la forma se determina por los nodos (ver figura B1).

La forma de la subregión en la figura B1, es un triángulo, sin embargo, pueden usarse otras formas. Para problemas en una dimensión, los elementos son líneas; para dos dimensiones los elementos pueden ser triángulos o cuadriláteros, y para tres dimensiones pueden ser tetrahedros o prismas.

El primer paso al aplicar el método de elemento finito es derivar una representación integral de la ecuación diferencial parcial.

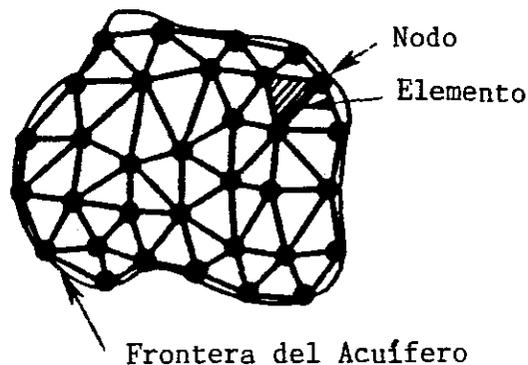


Figura B1.- Configuración por Elemento Finito, mostrando un nodo y un elemento típico.

Esto puede realizarse por varios métodos; dos de los más utilizados son

1. - el método de cargas residuales
2. - el método variacional

En el método de cargas residuales se trabaja directamente con la ecuación diferencial y las condiciones a la frontera, mientras que el método variacional se utiliza una funcional (una función de una función) relativa a la ecuación diferencial parcial y condiciones a la frontera.

El siguiente paso es aproximar la variable independiente (carga hidráulica) en términos de funciones de interpolación. Las funciones de interpolación se les llama funciones "base" y se escogen para satisfacer ciertos requerimientos matemáticos y para facilitar el cálculo. Como los elementos usualmente son pequeños, la función de interpolación puede aproximarse por un polinomio de orden menor, por ejemplo, lineal, cuadrático o cúbico.

Una vez que las funciones base y la malla se han especificado, la relación de la integral debe expresarse para cada elemento como función de las coordenadas de todos los nodos de los elementos. Lo siguiente es calcular el valor de la integral para cada elemento, y se combinan con las condiciones a la frontera, produciendo un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en el tiempo.

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver usando técnicas de diferencias finitas, y así obtener un conjunto de ecuaciones algebraicas. En este punto se requieren métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. matrices.

En general, una ecuación matricial puede resolverse numéricamente por métodos

Directo

Iterativo

e incluso por una combinación de los dos.

En los métodos directos se realiza una secuencia de operaciones, solamente una vez, que dan como resultado una solución exacta, excepto por errores de redondeo.

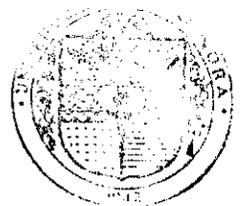
Los métodos iterativos procuran una solución por un proceso de aproximaciones sucesivas, hasta que un criterio de error se satisface, además se debe tener en cuenta la convergencia.

Algunos de los métodos directos son

- a).- Solución por determinantes.
- b).- Solución por eliminación sucesiva de los términos desconocidos
- c).- Solución por inversión de matrices.

De acuerdo con Narasimhan y Witherspoon ( ) el método directo más utilizada es el de eliminación sucesiva y sustitución hacia atrás, la cual incluye el método de eliminación Gaussiana, y el método de descomposición de Cholesky.

Los esquemas iterativos se utilizan para resolver sistemas con matrices grandes. Varios esquemas se han desarrollado, de los más comunes los métodos de Sobrerelajación Sucesiva, Jacobi y Gauss-Seidel, etc.



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA LA GRANDEZA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMATICAS

## CONCLUSIONES

El modelado de flujo de aguas subterráneas es una de las muchas aplicaciones de la Matemática. En este trabajo aplicamos las técnicas del Análisis Numérico para resolver la ecuación diferencial parcial de flujo que rige el movimiento de aguas subterráneas y así encontrar una solución aproximada.

La técnica numérica no es la única forma de tratar este problema; se pueden utilizar métodos analíticos, o usar enfoques estadísticos y probabilísticos.

En este trabajo se desarrollaron cuatro esquemas en diferencias finitas para la ecuación de flujo. Los esquemas son:

Explícito hacia adelante.

Implícito hacia atrás.

Implícito de Crank-Nicolson.

Implícito de Dirección Alternante.

No son los únicos esquemas que se pueden obtener, pero son los más utilizados para este tipo de problemas.

Los cuatro algoritmos se aplicaron a un ejemplo sintético de un acuífero. Para resolverlos se utilizaron programas codificados en FORTRAN. En el caso de los métodos implícito hacia atrás, de Crank-Nicolson y de direcciones alternantes se utilizó una subrutina adicional, ya implementada, para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resulta de aplicar estos algoritmos. Esta subrutina fue la de Sobrerrelajación Sucesiva.

Además de obtener los esquemas en diferencias se analizaron los aspectos de Convergencia, Consistencia y Estabilidad. Se relacionaron los tres aspectos por medio del Teorema de Lax, el cual menciona que un esquema consistente es convergente si y sólo si es estable.

Como los cuatro esquemas son consistentes con la ecuación diferencial de flujo, se analizó la estabilidad por el método de von Neuman.

Los resultados de aplicar el método de von Neuman fueron:

- El esquema EXPLICITO es estable si  $\Delta t / (\Delta X)^2 \leq \frac{1}{4}$  en una malla cuadrada, y  $\Delta t \leq 2(1/(\Delta X_1)^2 + 1/(\Delta X_2)^2)^{-1}$  para una malla rectangular.

- Para los esquemas IMPLICITO hacia atrás, CRANK-NICOLSON y DIRECCIONES ALTERNANTES se cumple la condición de estabilidad para cualesquier valor del incremento del tiempo y longitud de la malla.

Otra opción que se presenta para resolver el problema es por medio del paquete MODFLOW, el cual presenta una serie de opciones para mayor flexibilidad en el manejo.

El tema central del presente trabajo es resolver el problema directo, el cual consiste en encontrar el valor de la carga hidráulica del acuífero para diferentes tiempos conociendo los parámetros de Transmisibilidad T, y Almacenaje S.

En el caso de que se desconozcan los valores de T y S y se tenga el valor de la carga hidráulica, se dice que se ha planteado el problema inverso. El problema inverso es "mal planteado", es decir que para pequeñas variaciones en las condiciones la solución varía demasiado de la original, además tiene solución no única e inestable. Este es un problema difícil al que se le ha tratado de resolver de muy variadas formas y aún sigue siendo un problema abierto.

Este tipo de análisis puede ser aplicado a un acuífero real. Uno de los propósitos de este trabajo era presentar resultados de una aplicación al acuífero de la Costa de Hermosillo, pero debido a la dificultad de obtener datos suficientes y confiables, no se realizó.

## REFERENCIAS

1. - Bear. Hydraulics of Groundwater. (1979).
2. - Davis and Wiest. Hydrogeology. (1966).
3. - Freeze and Cherry. Groundwater. (1979)
4. - Huyakorn and Pinder. Computational Methods in Subsurface Flow. (1983).
5. - Kruseman and Ridder. Analysis and Evaluation of Pumping Test Data. (1983).
6. - Wang and Anderson. Introduction to Groundwater Modeling. (1982).
7. - Montgomery. UMAP: Controlled Source Seismology. No. 292.
8. - Jan. Water Resources Bolletin. No. 2. (1965)
9. - Adrews. Groundwater: Salt-Water Intrusion in the Costa de Hermosillo, Mexico. A Numerical Analysis of Water Management Proposals. (1981).
10. - Bush, Matlock and Fogel. Journal of Soil and Water Conservation: Utilization of Water Resources in a Coastal Groundwater Basin. Sep- oct. (1966).
11. - Cruickshank y Chavez. Ingeniería Hidráulica en México: Modelo DAS para el estudio del comportamiento de Acuíferos. Vol. XXIII. (1969).
12. - Moreno, J. Recursos Hidráulicos: Los Distritos de Riego por Bombeo del Norte y Centro de Sonora. Vol. V. (1976).
13. - Mercer and Faust. Water. Vol. Mar-Ap, Ap-May, May-Jan, Jan-Jul. (1980).