UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

"EL METODO SIMPLEX REVISADO CON VARIABLES ACOTADAS
Y SU APLICACION EN EL DISEÑO DE DIETAS PARA CAMARON"

TESIS

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presentan

Héctor Alfredo Hernández Hernández

Ricardo Ruiz Moreno

Hermosillo, Sonora Febrero de 1991

" EL METODO SIMPLEX REVISADO CON VARIABLES ACOTADAS Y SU APLICACION EN EL DISEÑO DE DIETAS PARA CAMARON "

Por : Ricardo Ruiz Moreno

Héctor Alfredo Hernández Hernández

A nuestros padres y hermanos

a Dina

a la memoria de la mona.

Queremos extender nuestro mas sincero agradecimiento al Ing. Carlos Anaya Heredia, al Dr. Fernando Avila Murillo por la revision y por las aportaciones a este trabajo, al MC. Pedro Flores Perez por proporcionar el tema de tesis, direccion del mismo y el constante apoyo que nos brindo, a la MC. Dora Julia Borbon por sus indispensables aportaciones sobre el diseño de dietas para camaron, asi como el apoyo que, directa o indirectamente, se recibio por parte de los compañeros.

INDICE

INTRODUCCION

El trabajo que se desarrolla en esta tesis, tiene que ver con el análisis de un modelo matemático para formular dietas para animales, con el cual se da solución a un problema específico. Este problema forma parte de la actividad de un proyecto de formulación y evaluación de dietas para camarón, el cual se desarrolla en el Departamento de Matemáticas conjuntamente con el Centro de Investigación Científica y Tecnológica de la Universidad de Sonora (C.I.C.T.U.S.).

El problema de diseño de dietas consiste en determinar las cantidades de cada ingrediente, de tal manera que se cumplan los requerimientos nutricionales y el costo del alimento sea mínimo.

El contenido nutricional de los ingredientes varía con el tiempo, sin embargo, esta variación es despreciable; por lo cual estos datos se considerarán fijos. En los ingredientes es muy común que varíe su humedad, ya sea por el transcurso del tiempo, las condiciones climatológicas, etc. Lo que hace necesario tomar las cantidades de los contenidos nutricionales en base seca y en consecuencia los resultados del modelo estarán dados en esta misma base. Como regularmente no se dispone de ingredientes secos, será necesario hacer la conversión a base húmeda.

Por otra parte, dependiendo de como se requiera elaborar el alimento, se manejarán dos opciones para el problema; una contempla que el alimento estando deshidratado, cumpla con los requerimientos y por otra parte, que estando húmedo también los cumpla.

Este problema se le puede plantear como un Problema de Programación Lineal, más aun, como un Problema de Programación Lineal con Variables Acotadas, pues tiene las características idóneas para plantearse de esta manera.

Entre los objetivos de este trabajo, está poner a la disposición versiones revisadas del Método Simplex (Simplex Revisado Forma Producto de la Inversa Y Simplex Revisado con Descomposición LU). Métodos que normalmente no se abordan en los cursos de Ingeniería (incluso en la Licenciatura en Matemáticas) y que resultan indispensables al atacar Problemas de Programación Lineal (PPL) de tamaño considerable.

De utilizar el Método Simplex Normal en problemas "grandes", es muy probable que los resultados estén bastante alejados de la solución verdadera; esto es porque en cada iteración se van acumulando "pequeños" errores que nos llevan a una solución incorrecta. También se presenta la Técnica de Variables Acotadas derivada del Método Simplex, que como principal característica, para cierto tipo de problemas disminuye el número de restricciones y variables, manejando implícitamente las cotas de estas últimas.

Al combinar la técnica de variables acotadas con el Método Simplex Revisado, da lugar al algoritmo que nos lleva a la solución del problema de diseño de dietas de manera eficaz. Para esto se presentan las principales subrutinas, que forman parte del programa en computadora, que trabaja con este algoritmo. Las subrutinas están dadas en Fortran 77, ya que tradicionalmente este lenguaje es usado por ser uno de los más precisos en los cálculos. Además estas subrutinas se pueden utilizar, con sus respectivas modificaciones, para el diseño de otros algoritmos.

Otro de los objetivos es que quienes se interesen en el diseño de dietas para animales y estén familiarizados con la Programación Lineal, dispongan de este material. Pués se conoce muy poca bibliografía en donde se abordan este tipo de problemas.

Como el método con el cual se pretende dar solución al problema es "El Metodo Simplex Revisado pàra Variables Acotadas con Descomposición LU ", la teoría que se presenta en este trabajo contiene: El Método Simplex, El Método Simplex Revisado (Forma Producto de la Inversa y Descomposición LU), asi como El Método Simplex Revisado para Variables Acotadas. Esta teoría se presenta en el apéndice A, en los capítulos I, II y III.

El contenido de este trabajo es el siguiente: En el capítulo I se presenta el material necesario, para que, conociendo el Método Simplex, se pase a ver sus versiones revisadas. Este consiste de la teoría de cambios de base, de la utilización de matrices elementales, permutaciones y acciones para tener estabilidad numérica en el algoritmo. El capítulo II contiene el Simplex Revisado, así como dos de sus versiones (Simplex Revisado Forma Producto de la Inversa y Simplex Revisado con Descomposición LU). Además se hace la comparación entre el número de operaciones para resolver sistemas de ecuaciones lineales (SEL), utilizando la Forma Producto de la Inversa y utilizando Descomposición LU. En el capítulo III se desarrolla El Método Simplex Revisado Para Variables Acotadas, que utilizando Descomposición LU para resolver los SEL, nos da el método para dar solución al problema del diseño de dietas. En el capítulo IV se presenta el problema de forma general, con las mismas características que el problema de interés. Se plantea como un PPL con variables acotadas, se resuelve con el Método Simplex Normal (planteado de la forma anterior) con paquetería comercial y también se resuelve utilizando un programa que trabaja el Mètodo Simplex Revisado Forma Producto de la Inversa para Variables Acotadas. Se manejan las dos opciones que se tiene para el problema. Por último se da la interpretación de los resultados obtenidos. Se tiene un apartado para las concluciones, además se agregan dos apendices: en el primero se da la teoria de programación lineal y el segundo contiene las subrutinas ya mencionadas.

CAPITULO I

CAMBIOS DE BASE, MATRICES ELEMENTALES, SU APLICACION A LA FORMA PRODUCTO DE LA INVERSA Y A LA DESCOMPOSICION LU.

En este capítulo presentamos algunos aspectos de la teoría de cambios de base, ya que el algoritmo del Método Simplex, es un procedimiento en el que en cada iteración se genera una nueva base. Además, estos aspectos nos servirán para abordar el Método Simplex Revisado. Como en este método es fundamental resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, mostramos como construir matrices elementales que al multiplicar por ellas realizen pivotajes. Esto da pie para que apliquemos métodos más eficientes que resuelvan tales sistemas, como son los que utilizan la forma producto de la inversa y la descomposición LU.

Ahora, con el fin de darle estabilidad numérica al Método Simplex Revisado, se ve como trabajar con las matrices elementales. Esto es, se mostrará como construir y aplicar acciones, utilizando permutaciones en los renglones. El pivoteo parcial es un técnica que utiliza estas permutaciones buscando tener dividendos grandes (en valor absoluto). En general no es suficiente aplicar sólo esta técnica para obtener estabilidad [5]. Pero dadas la caracteristicas del problema a resolver, solo abordaremos el pivoteo parcial. Además damos una justificación un tanto informal de porque tener dividendos grandes (en valor absoluto), ayuda a reducir los errores en las divisiones y multiplicaciones que se realizan al aplicar acciones.

Se supondrá que se está familiarizado con los conceptos básicos de un curso de Algebra Lineal, a nivel licenciatura. Sin embargo, se darán algunos conceptos básicos que se considera importante que se aborden en este capítulo. Ademas conociendo la teoria del Método Simplex Normal y el material de este capítulo, estamos listos para abordar el Método Simplex Revisado con sus dos versiones.

1.1 BASES

Recordemos la siguiente definición, la cual es fundamental en la teoría de programación lineal.

Definición 1.1.1: Una base para $\mathbb{R}^n$ es cualquier subconjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ L.I. los cuales generan a $\mathbb{R}^n$.

Esto es, que cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar en forma única como combinación lineal de los elementos de la base. El número de vectores L.I. que forman una base para $\mathbb{R}^n$ es n.

Definición 1.1.2: Sea $V \in \mathbb{R}^n$ y las columnas de **B** una base para $\mathbb{R}^n$, entonces existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$V = \alpha_1 B^1 + \alpha_2 B^2 +, \ldots, + \alpha_n B^n$$

$$\text{donde } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \ldots B^n \end{bmatrix}$$

A las componentes del vector$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ se les llama las coordenadas del vector V respecto a la base **B** y se denota por:

$$[V]_B.$$

Como $V = \alpha B^1 + \alpha B^2 +, \ldots, + \alpha B^n$, entonces se puede expresar:

$$V = B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

es decir $V = \mathbf{B}\,[V]_B$, de aquí que $[V]_B$ es solución del sistema

$$\mathbf{B}\,[V]_B = V.$$

Y ésta es:

$$[V]_B = \mathbf{B}^{-1} V.$$

Observación : Para cambiar al vector V a la base **B**, basta multiplicarlo por $\mathbf{B}^{-1}$.

Ejemplo 1.1.3: Supongamos que tenemos la base formada por las columnas de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{para } \mathbb{R}^3$$

y deseamos cambiar de base al vector $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, i.e. calcular $[V]_B$.

Una forma de obtener B^{-1} es utilizando eliminación de Gauss-Jordan, de tal manera que la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

se le tranforma por medio de operaciones elementales en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \ \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Cálculemos B^{-1}de esta manera:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B^1 & B^2 & B^3 & e^1 & e^2 & e^3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B^1 & B^2 & B^3 & e^1 & e^2 & e^3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B^1 & B^2 & B^3 & e^1 & e^2 & e^3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B^1 & B^2 & B^3 & e^1 & e^2 & e^3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B^1 & B^2 & B^3 & e^1 & e^2 & e^3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - R_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B^1 & B^2 & B^3 & e^1 & e^2 & e^3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\text{Asi} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$[V]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2 MATRICES ELEMENTALES

En el método de Gauss, para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se aplican operaciones elementales en los renglones para realizar los respectivos pivotajes. En esta sección mostraremos como construir matrices que al multiplicar a otra matriz, le realizan un pivotaje. Estas matrices, definidas mas adelante como "Matrices Elementales", nos sirven para hacer el desarrollo del Método Simplex Revisado en la forma producto de la inversa, así como el método basado en la descomposición LU.

Como el producto de matrices no es conmutativo, necesitaremos de la siguiente definición:

Definición 1.2.1: Si la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, se dice que $\mathbf{C}$ resulta de premultiplicar a $\mathbf{B}$ por la matriz $\mathbf{A}$, o que resulta de postmultiplicar a $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$.

A continuación presentaremos resultados donde interviene la multiplicación de matrices, los cuales nos servirán para construir matrices que realicen pivotajes.

Sean $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n \times r}$, para obtener el renglón j de $\mathbf{AB}$, se premultiplica $\mathbf{B}$ por el renglón j de $\mathbf{A}$, es decir:

$$[AB]_j = A_j B.$$

Para obtener el renglón j de **B**, se premultiplica a **B** por a e_j^t, esto es:

$$B_j = e_j^t\ B.$$

Es claro de lo anterior tomando a $A = I$.

Por otra parte si se quiere multiplicar a un renglón i de una matriz de mxn por una constante c, basta premultiplicarle por la matriz identidad de mxm (I_m) modificada con c el lugar i-ésimo de la diagonal.

Ejemplo 1.2.1: Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$, multipliquemos por s al tercer renglón:

Asi obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ Si & Sj & Sk & Sl \end{bmatrix}$$

Ahora veremos como sumarle al renglón i, el renglón j de una matriz de mxn. Esto es equivalente a premultiplicar por la matriz identidad I_m agregándole un 1 en el i-ésimo renglón j-ésima columna. Esto es equivalente a sustituir en el renglón i de la matriz identidad los vectores $e_i + e_j$, los cuales extraen a los respectivos renglones y hacen la suma, i.e.

$$(e_i + e_j)A = e_iA + e_jA = A_i + A_j$$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & j & & i & & \end{array} \\
i & \left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & 1 & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
\end{array}$$

Ejemplo 1.2.2: En la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ sumarle al primer renglón el tercero.

Asi tenemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Construyamos una matriz que al multiplicar por ella realice un pivotaje, combinando multiplicación por un escalar y suma de renglones, en el lugar de a_{22} de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para hacer 1 en el lugar a_{22} multiplicamos por 1/4 al segundo renglón.

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

en ésta nueva matriz al primer renglón restemos dos veces el segundo y al tercer renglón restémosle el segundo.

$$C(BA) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/4 \\ -3/2 & 0 & 2 & -11/4 \end{bmatrix}$$

como C(BA) = (CB)A, entonces podemos construir CB que es la matriz que realiza el pivotaje, quedando de la siguiente manera:

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

Observación: Si en el i-ésimo renglón se encuentra el elemento pivote, en la matriz por la que hay que multiplicar se cambia la i-ésima columna.

<u>Definición</u> 1.2.3: Por una matriz elemental de mxm entenderemos a cualquier matriz idéntica a $\mathbf{I}_m$ excepto en una columna, las denotaremos por $\mathbf{E}_i$

En general la matriz elemental que realiza un pivotaje en el lugar a_{ij} de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ij} & \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

es la matriz $\mathbf{E} \in \mathbf{M}_{mxm}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -a_{1j}/a_{ij} & & & \\ & 1 & -a_{2j}/a_{ij} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 1/a_{ij} & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & & \\ & & \vdots & & & 1 & \\ & & -a_{mj}/a_{ij} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora presentaremos dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones, a saber se utiliza la forma producto de la inversa y la descomposición LU.

Enseguida veremos como se puede expresar a $\mathbf{B}^{-1}$ como el producto de m matrices elementales, a ésta se le conoce como forma producto de la inversa.

1.3 FORMA PRODUCTO DE LA INVERSA

Dada una matriz **B** de mxm invertible, existen a lo más m matrices elementales que relizan los respectivos pivotajes, de tal manera que:

$$\mathbf{E}_t\mathbf{E}_{t-1},\ldots,\mathbf{E}_1\mathbf{B} = [\mathbf{P}]$$

donde $[\mathbf{P}]$ es una permutación de la identidad y

$$\mathbf{E}_t\mathbf{E}_{t-1},\ldots,\mathbf{E}_1 = [\mathbf{B}^{-1}]$$

entonces si queremos conocer $\mathbf{B}^{-1}$ necesitamos conocer $\mathbf{E}_t\mathbf{E}_{t-1},\ldots,\mathbf{E}_1$ y si se desea tener a $\mathbf{B}^{-1}$ con sus columnas ordenadas se necesita la matriz de permutaciones, la cual al multiplicar por ella realiza el cambio en los renglones.

La matriz de permutaciones es una permutación de $\mathbf{I}_m$. Supongamos que en la matriz **A** tenemos que intercambiar a el renglón i por el renglón j entonces para construir la matriz de permutaciones, en $\mathbf{I}_m$ hacemos este mismo intercambio. Para ordenar a $[\mathbf{A}^{-1}]$ la obtenemos:

$$\mathbf{A}^{-1} = [P]\ [\mathbf{A}^{-1}]$$

En lo que sigue, salvo en los ejemplos, no consideraremos a las permutaciones para retomarlas posteriormente.

A continuación veremos como se resuelven los sistemas derechos e izquierdo utilizando la forma producto de la inversa (FPI)

1.- Consideremos el sistema derecho $\mathbf{B}X = b$ y supongamos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}_t\mathbf{E}_{t-1},\ldots,\mathbf{E}_1$$

entonces la solución es $X = \mathbf{E}_t\mathbf{E}_{t-1},\ldots,\mathbf{E}_1 b$, esto es premultiplicando a b por las matrices elementales en el orden en que aparecen.

2.- Si el sistema es izquierdo como $Y\mathbf{B} = C$

la solución es $Y = C\mathbf{E}_t\mathbf{E}_{t-1},\ldots,\mathbf{E}_1$, i.e. postmultiplicando a C por las matrices elementales en el orden contrario en que aparecen.

Veamos un ejemplo de cada caso

Ejemplo 1.3.1: Consideremos el siguiente sistema derecho $\mathbf{A}X = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

encontremos la inversa de $\mathbf{A}$ en su forma producto:

Multiplicando por una matriz que realice el pivotaje en la primera columna obtenemos:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -4/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora en la segunda columna

$$E_2(E_1A) = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

y en la tercer columna

$$E_3(E_2(E_1A)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

asi el producto $E_3E_2E_1A$ =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -4/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la inversa de **A** es:

$$A^{-1} = E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -4/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -5/2 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

y la solución del sistema está dada por $X = E_3E_2E_1 b$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -4/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.3.2: Ahora resolvamos un sistema izquierdo $Y\mathbf{A} = b$

$$[Y_1 \ , Y_2 \ , Y_3 \ ] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} = [2, \ 17/4 \ , -1]$$

encontremos la inversa de **A** en su forma producto:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A})) = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ahora necesitamos multiplicar por la matriz de permutaciones:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$, de tal manera que $\mathbf{P}\ \mathbf{E}_3(\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A})) = \mathbf{I}$

entonces la inversa de **A** es: $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{P}\ \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ y la solución de $Y\mathbf{A} = b$

está dada por $Y = b\ \mathbf{P}\ \mathbf{E}_3\ \mathbf{E}_2\ \mathbf{E}_1$, $Y = [2, \ 17/4 \ , -1]\ \mathbf{P}\mathbf{E}_3\ \mathbf{E}_2\ \mathbf{E}_1$

$$\mathrm{PE}_3\mathrm{E}_2\mathrm{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [0, \ 1 \ , \ 5 \ ]$$

La forma producto de la inversa es la más natural para trabajar el Simplex Revisado, pero en nuestro caso resulta más eficiente trabajar con la descomposición LU porque el número de operaciones es menor. En el método de descomposición LU se puede expresar a **B** como el producto de una matriz triangular inferior por una matriz triangular superior i.e. **B** = **LU**.

1.4 DESCOMPOSICION LU

En la descomposición LU se necesita hacer pivotajes a una matriz, aplicándole operaciones elementales hasta obtener una matriz triangular superior **U**. La matriz que realiza estos pivotajes en la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ij} & \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

es la matriz de mxm

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 & & & \\ & 1 & & 0 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1/a_{ij} & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & -a_{mj}/a_{ij} & & & 1 \end{bmatrix}$$

si multiplica a la matriz **A** obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .1/a_{ij} & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a_{mj}/a_{ij} & \ldots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1j} & \ldots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots a_{ij} & \ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mj} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1j} & \ldots a_{1n} \\ \vdots^{*} & \vdots^{*} & \vdots & \vdots^{*} \\ a_{i1}^{*} & a_{i2}^{*} & \ldots 1 & \ldots a_{in}^{*} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots^{*} & \vdots^{*} & \vdots & \vdots^{*} \\ a_{m1}^{*} & a_{m2}^{*} & \ldots 0 & \ldots a_{mn}^{*} \end{bmatrix}$$

esto es, convierte en 1 al elemento a_{ij} y pone ceros debajo de él.

El método de descomposición LU parte de los sistemas de ecuaciones lineales cuadrados.

<u>Definición</u> 1.4.1: Un sistema **AX** = b es triangular cuadrado si **A** es una matriz triangular. Este puede ser triangular superior o triangular inferior.

Ejemplo 1.4.2 :

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_4 &= 1 \\ X_2 - 2X_3 + X_4 &= 4 \\ 5X_3 - 3X_4 &= 2 \\ X_4 &= 1 \end{aligned}$$

lo expresamos como $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un sistema triangular superior cuadrado.

Un sistema triangular superior se resuelve con sustitución regresiva, es decir, se encuentra X_n luego X_{n-1}, hasta X_1.

Ejemplo 1.4.3: Consideremos el sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz es triangular inferior, el sistema se resuelve con sustitución progresiva. Es decir, si la matriz es triangular inferior de orden n se encuentra X_1, luego se encuentra X_2, asi hasta X_n.

En la descomposición LU la matriz **B** se puede escribir como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{LU}$$

donde **L** es una matriz triangular inferior y **U** una matriz triangular superior. Como veremos, para resover los sistemas, necesitamos obtener **U** y $\mathbf{L}^{-1}$.

Si **B** = **LU** y queremos resolver el sistema derecho **B**X = b, sustituyendo **B** y asociando

$$(LU)X = b$$

$$L(UX) = b$$

entonces primero se resuelve **L**Y = b y luego **U**X = Y. Si queremos resolver el sistema izquierdo Y**B** = c, i.e.

$$Y(LU) = c \qquad (YL)U = c$$

entonces se resuelve primero X**U** = c y luego Y**L** = X.

Observación : Resolver el sistema derecho **BX** = b, lleva a resolver los sistemas derechos **LY** = b y UX = Y, Los cuales son relativamente fáciles de resolver. De igual manera sucede para el sistema izquierdo YB = c, que equivale a resolver los sistemas izquierdos XU = c y YL = X.

A continuación veremos como se encuentran **U** y $\mathbf{L}^{-1}$ por medio de matrices elementales, para depués resolver un sistema derecho e izquierdo utilizando la descomposición LU. Para lo cual utilizaremos los siguientes resultados:

1.- Las matrices elementales para el método de Gauss son triangulares inferiores.
2.- Si **A** y **B** son matrices triangulares del mismo tipo **AB** también lo es.
3.- Si **A** es una matriz triangular invertible entonces su inversa es triangular del mismo tipo.

Para encontrar **U** premultiplicamos a **B** por matrices elementales que pongan unos en la diagonal principal y ceros abajo de ella salvo permutaciones en sus renglones. Por el momento supondremos que no hay permutaciones, el caso en que éstas aparescan, se tratarán al final de este capítulo. En este caso **U** queda expresada por:

$$\mathbf{E}_t \ldots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathrm{B} = \mathbf{U}$$

Para encontrar $\mathbf{L}^{-1}$ despejemos $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E}_t \ldots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1}\mathbf{U}$$

por los resultados anteriores $\mathbf{E}_t \ldots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ es una matriz triangular inferior y su inversa $(\mathbf{E}_t \ldots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1}$ también lo es. Entonces, denotando a $(\mathbf{E}_t \ldots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1}$ por L nos queda que

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{E}_t \ldots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

A continuación veremos un ejemplo en donde dada un matriz $\mathbf{B}$ encontramos $\mathbf{L}^{-1}$ y $\mathbf{U}$.

Ejemplo 1.4.4:

$$\text{Sea } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la primera martiz elemental

$$\mathbf{E}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

aplicando la segunda

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

y la tercera

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{B})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

de aqui tenemos que $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{B} = \mathbf{U}$ y $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ i.e.

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ -1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Aprovechando que tenemos $\mathbf{L}^{-1}$y **U** resolvamos el sistema derecho·

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Para esto resolvamos el sistema **LY** = b, cuya solución es Y = $\mathbf{L}^{-1}$b. Luego resolvamos con sustitución regresiva al sistema **UX** = Y. Así tenemos que

$$Y = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ -1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

la solución es:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4.5: Resolvamos ahora el sistema izquierdo **YA** = c

$$[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [8\ ,1\ ,2\ ,3\ ]$$

Encontremos **U** y $\mathbf{L}^{-1}$; aplicando la primera matriz elemental

$\mathbf{E_1 A} =$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando la segunda

$\mathbf{E_2(E_1 A)} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 11/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando ahora la tercera

$\mathbf{E_3(E_2(E_1 A))} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 2/11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 11/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

asi obtenemos **U** y $\mathbf{L}^{-1}$

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 2/11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ya tenemos **U** resolvamos con sustitución regresiva el sistema $X\mathbf{U} = c$, i.e.

$$[X_1, X_2, X_3, X_4] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [8, 1, 2, 3]$$

y la solución es $[X_1, X_2, X_3, X_4] = [8, -3, -2, 3]$

Ahora queda por resolver $YL = X$

$$[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]\ \mathbf{L} = [8, -3, -2, 3]$$

$$[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = [8, -3, -2, 3]\ \mathbf{L}^{-1}$$

esto es $$[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = [8, -3, -2, 3]\ \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

y la solución es:

$$[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = [2, 1, 0, 3]$$

1.5 ACCIONES Y PERMUTACIONES

Al multiplicar por matrices elementales para realizar un pivotaje sobre una matriz, la mayor parte de las operaciones consiste en multiplicar por unos y ceros. Ahora, con el fin de ahorrar estas operaciones, en un vector llamado acción se guardará la información mínima necesaria para realizar el pivotaje y se dará el procedimiento para realizarlo. Esto es, verá como construir acciones y como aplicarlas. Por otro lado, el uso de permutaciones en los renglones es indispensable ya sea porque el candidato a elemento pivote sea un cero o por la necesidad de ayudar en estabilidad numérica del algoritmo. Esto último lo tocaremos más adelante.

A continuación veremos como construir acciones y como aplicarlas, para lo cual haremos las siguientes consideraciones:

Si al vector b se premultiplica por la matriz elemental que realiza un pivotaje en el elemento a_{ij}, el resultado es:

$$\begin{bmatrix} 1 & & -a_{1j}/a_{ij} & & & \\ & 1 & -a_{2j}/a_{ij} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 1/a_{ij} & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & -a_{mj}/a_{ij} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - (a_1/a_i)b_i \\ b_2 - (a_2/a_i)b_i \\ \vdots \\ b_i/a_i \\ \vdots \\ b_m - (a_m/a_i)b_i \end{bmatrix}$$

el cual se puede descomponer como:

$$\begin{bmatrix} b_1 - (a_1/a_i)b_i \\ b_2 - (a_2/a_i)b_i \\ \vdots \\ b_i/a_i \\ \vdots \\ b_m - (a_m/a_i)b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} b_i/a_i$$

De esta igualdad se observa que para obtener el resultado sólo se necesita conocer, aparte del vector b, la matriz de mx1:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 1/a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$ y el índice i del renglón donde se realiza el pivotaje.

Definición 1.5.1: Sea **E** una matriz elemental que, realiza un pivotaje la matriz A, con elemento pivote a_{ij}. Al vector de m+1 componentes

$$\begin{bmatrix} \text{i} \\ \hline a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 1/a_i \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

donde se guarda información necesaria de **E** se le llama ACCION y se denota por AC

En vez de decir que se va a premultiplicar por una matriz elemental que realice un pivotaje, se dirá que se va a aplicar una acción por la izquierda que realice un pivotaje. Para esta aplicación se dan los siguientes pasos:

a) i = AC(1)

b) C = b(i)

c) D = AC(i+1) $= 1/a_i$

d) F = D*C $= b_i/a_i$

e) El resultado se obtiene:

R(i) = F

para $j \neq i$ calcular:

R(j) = b(j) - (F * AC(j+1))

Si postmultiplicamos a un vector C por una matriz elemental que realice un pivotaje en el elemento a_{ij}, el resultado es:

$$[c_1,\dots,c_i,\dots,c_m]\begin{bmatrix} 1 & & -a_{1j}/a_{ij} & & & \\ & 1 & -a_{2j}/a_{ij} & & & \\ & & \ddots\ \vdots & & & \\ & & 1/a_{ij} & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \vdots & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & -a_{mj}/a_{ij} & & & 1 \end{bmatrix} = [c_1,\dots,\overset{*}{c}_i,\dots,c_m]$$

donde $\overset{*}{c}_i = -c_1a_1/a_i - c_2a_2/a_i - \dots + c_i/a_i - \dots - c_ma_m/a_i$.

reduciendo la expresión:

$$\overset{*}{c}_i = c_i/a_i - 1/a_i\left(c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_{i-1}a_{i-1} + c_{i+1}a_{i+1} + c_ma_m\right)$$

De aquí que para obtener el resultado también se necesita conocer la información guardada en la acción:

$$\begin{bmatrix} i \\ \hline a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 1/a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Asi se tienen los siguientes pasos para aplicar una acción por la derecha.

a) $i = AC(i)$

b) $H = C(i)$

c) $D = AC(i+1) \quad = 1/a_i$

d) $F = H * D \quad = c_i/a_i$

e) Para obtener $R(i)$ se calcula

$$R(i) = F - D^* \sum_{k \neq i} a_k c_k$$

y para obtener $R(j)$ con $j \neq i$ se iguala

$R(j) = C(j)$

Observaciónes:

a) Para construir una acción se requiere una división.

b) Para aplicar una acción que realice pivotajes se requieren m productos, no importando que se apliquen por la izquierda o por la derecha. En cambio si se multiplica por matrices elementales se necesitan 2m-1 productos y m divisiones.

Cuando se desea implementar el uso de la computadora, en la solución de SEL, no siempre se obtienen resultados válidos. Esto se debe principalmente a los errores de redondeo, por lo que se tiene la necesidad de ahorrar operaciones, en medida de lo posible.

Ahora veamos como el uso de permutaciones en los renglones ayuda a proporcionar estabilidad numérica al algoritmo. Esta se obtiene de la siguiente manera:

Como las divisiones y las multiplicaciones son unas de las operaciones que acarrean más errores de redondeo, entonces con el fin de darle estabilidad numérica al algoritmo se tienen que disminuir estos errores. Para tener errores más pequeños en la división lo que se tiene que hacer es tratar de que los denominadores sean lo mas grande posible (en valor absoluto). Como consecuencia de tener el error más pequeño en la división automaticamente en las multiplicaciones que se tienen que realizar, también tienen error más pequeño. Veamos como se justifica lo anterior:

Recurramos al cálculo de errores. La estimación para el error de la división está dado por:

$$\Delta\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\Delta X}{X^2}$$

De ésta fórmula se observa que entre más grande sea el dividendo la estimación para el error de la división es más pequeña y algo que también nos servirá para disminuir los errores en la multiplicación es que la división también es más pequeña. Para concretar esto último veamos lo siguiente: supongamos que se multiplica $(Y)(1/X)$ donde $1/X$ se calculó con el X más grande, es decir tanto $1/X$ como $\Delta(1/X)$ son lo más pequeño posible. la estimación para el error del producto está dada por:

$$\Delta\left((Y)(1/X)\right) = Y\Delta\left(1/X\right) + (1/X)(\Delta Y)$$

Como $\Delta\left(1/X\right)$ y $(1/X)$ son lo más pequeño entonces la estimación del error de la multiplicación $\Delta\left((Y)(1/X)\right)$ también es más pequeño.

Veamos ahora como se utilizarán las permutaciones en los renglones para tener dividendos más grandes.

Supongamos que se realizará un pivotaje en la columna j y que se va a pivotear en el lugar que ocupa a_{ij}, entonces como el fin es tener el dividendo más grande, éste se busca entre los elementos de la columna j apartir del renglón i-ésimo hacia abajo, es decir el más grande (en valor absoluto) se calcula:

$$a_{kj} = \max\left\{ |a_{ij}|, |a_{i+1,j}|, \ldots, |a_{mj}| \right\}$$

Ahora si este es el caso entonces se intercambian el renglón i y el renglón k.

Observación: Las divisiones y multiplicaciones que aparecen en ambos grupos de pasos tienen el error más pequeño siempre y cuando se realice pivotaje parcial; esto es, que se realice la correspondiente permutación en los renglones.

Como en cada paso lo más probable es que se tengan que permutar renglones, entonces es necesario introducir en cada paso la matriz de permutaciones, la cual estará representada por la acción:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hline i \\ k \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observación: La caracteristica principal de esta acción es que sólo la segunda y la tercera componente son distintos de cero.

El procedimiento para aplicar este tipo de acciones será una rutina que para cada j realice:

$$temp = a_{ij}, \quad a_{ij} = a_{kj}, \quad a_{kj} = temp$$

Donde temp es una variable temporal que guarda el valor a_{ij} para poderlo asignar a a_{kj}.

Estas acciones se guardan en un archivo llamado "ETA" (Elementary Transfomation Actions) y para realizar pivotaje parcial a una matriz **A** en sus m columnas el archivo ETA queda de la forma:

$$ETA = \begin{bmatrix} E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_m \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix}$$

De tal manera que ETA aplicado a **A** da como resultado:

$$ETA(\ \mathbf{A}\ ) = \mathbf{I}$$

En el caso de trabajar con descomposición LU es fácil ver que las acciones quedan de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{i}{} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

y para aplicarlas, ya sea por la izquierda o por la derecha, se aplican los mismos pasos solo que en donde aparece "para $j \neq i$" se sustituye por "para $j > i$".

En los ejemplos que aparecen en este trabajo, utilizaremos las matrices elementales en lugar de las acciones, ya que estas últimas tienen más sentido en la implementación computacional.

CAPITULO II

SIMPLEX REVISADO FORMA PRODUCTO DE LA INVERSA Y SIMPLEX REVISADO CON DESCOMPOSICION LU

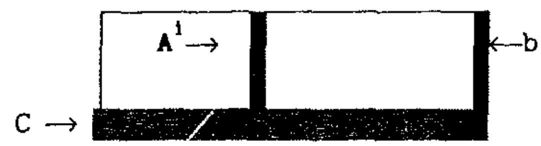
En este capítulo se presenta el simplex revisado junto con dos de sus versiones, estas son: la forma producto de la inversa y la descomposición LU. En ambos se muestra como utilizar los cálculos de la etapa anterior, que se conoce como la actualización y por último se hace una comparación del número de operaciones en cada método.

2.1 SIMPLEX REVISADO

En la mayoria de los PPL se tiene que el número de variables es mucho mayor que el número de restricciones $(n > m)$. Esto hace que al trabajar con el Simplex normal queden muchas columnas sin entrar a la base, esto es, nunca se realizó un pivotaje sobre ellas, sin embargo, se realizaron operaciones sobre todos sus elementos que realmente no fueron necesarias.

El método del Simplex Revisado es un procedimiento con el cual se ahorran cálculos, espacio de memoria. Por disminuir el número de operaciones al aplicar acciones y por aplicar permutaciones, se reducen errores de redondeo.

Las propiedades Primal-Dual (Apéndice A) aseguran que en cada iteración del Simplex Normal solo se requiere conocer una parte de la matriz, esto es, el vector b, el vector de costos y la columna pivote.



Estas propiedades dieron origen al método Simplex Revisado, en el cual C, A^i y b se van calculando en cada etapa, es decir, se van actualizando. Para actualizarlos es necesario resolver tres sistemas de ecuaciones, éstos son:

$$BX_B = b \qquad BY^j = A^j \qquad YB = C_B^t \quad \text{o} \quad YB = e_i^t$$

Como se vió en el capitulo I dos formas de resolverlos es utilizando la forma producto de la inversa y utilizando descomposición LU. Como veremos con la FPI en cada iteración también se puede actualizar B^{-1} aplicandole una matriz elemental, en el caso de utilizar descomposición LU, si la k-ésima columna de B es la que sale de la base se requiere aplicar $m - k + 1$ matrices elementales para actualizar U y las mismas sirven para actualizar L^{-1}.

Ahora veremos de donde se obtienen tales sistemas:

Consideremos el siguiente PPL

$$\text{Min } C^tX$$

$$\text{sujeto a } AX = b$$

$$\text{con } X \geq 0$$

Suponiendo que tenemos una solución básica factible tomemos $\mathbf{B} \subset \left\{ \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^n \right\}$ tal que $\mathbf{B}$ forme una base que da una solución básica factible, es decir, $\mathbf{A} = [\ \mathbf{B} \mid \mathbf{N}\ ]$ entonces a $\mathbf{A}X = b$ la expresamos como $\mathbf{B}X_B + \mathbf{N}X_N = b$ con $X_N = 0$ y una solución del sistema $\mathbf{B}X_B = b$ es:

$$X_B = \mathbf{B}^{-1}b$$

Por otra parte supongamos que tenemos la tabla del simplex

$$\left[\ \mathbf{A}^j \left[\ \mathbf{B}\ \right] \left[\ \mathbf{I}\ \right] \ \vdots\ b\ \right]$$

Donde $\mathbf{A}^j$ es la columna pivote. expresando a las columnas en la base $\mathbf{B}$, nos queda:

$$\left[\ \mathbf{B}^{-1}\ \mathbf{A}^j \left[\ \mathbf{I}\ \right] \left[\ \mathbf{B}^{-1} \right] \ \vdots\ \mathbf{B}^{-1}b\ \right]$$

En el lugar en donde estaba inicialmente la columna j aparece ahora $Y^j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^j$ que es la solución del sistema

$$\mathbf{B}Y^j = \mathbf{A}^j$$

En el apéndice A de la teoria de programación lineal definimos

$$Z_j = C_B 1 Y_{1j} + C_B 2 Y_{2j} + \ldots + C_B m Y_{mj}$$
$$Z_j = C_B^t\ Y^j$$
$$Z_j = C_B^t\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^j$$

Asi basta conocer $Y = C_B^t\ \mathbf{B}^{-1}$ para calcular todos los Z_j. Los coeficientes del vector de costos son:

$$Z_j - C_j = C_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^j - C_j$$

se tiene que conociendo $Y = C_B^t\, B^{-1}$ que es la solución del sistema

$$YB = C_B^t$$

se pueden calcular los coeficientes del vector de costos.

Estos coeficientes también se pueden calcular de la siguiente manera:

Consideremos la siguiente matriz

$$\begin{array}{r} \\ (1/a_{ij}) \\ C \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} \ \ldots & a_{1j} & \ldots \ a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{i1} \ \ldots & a_{ij} & \ldots \ a_{in} \\ & \vdots & \\ \hline -c_1 \ldots & -c_j & \ldots \ -c_n \end{array}\right]$$

al convertir a a_{ij} en uno y cero a $-c_j$ el renglón de costos nos queda:

$$\hat{C} = C + (c_j/a_{ij})R_i \qquad \text{donde } R_i \text{ es el renglón } i.$$

Y el renglón i cuando la matriz está en la base B se obtiene

$$e_i^t \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^1 \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^2 \ \ldots \ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^n \right] = e_i^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^k$$

donde $e_i^t\mathbf{B}^{-1}$ es solución del sistema $YB = e_i^t$

Entonces en cada paso necesitamos resolver los sistemas:

$$\begin{array}{rll} BX_B = b & & \text{sistema derecho} \\ BY^j = \mathbf{A}^j & & \text{sistema derecho} \\ YB = C_B^t \quad \text{o} \quad YB = e_i^t & & \text{sistemas izquierdos} \end{array}$$

Una forma de resolverlos es utilizando eliminacion de Gauss-Jordan en cada uno, otra manera es encontrando $\mathbf{B}^{-1}$ y la solución de cada sistema queda:

$$X_B = \mathbf{B}^{-1}b$$

$$Y^j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^j$$

$$Y = C_B^t\ \mathbf{B}^{-1} \quad \text{o} \quad Y = e_i \mathbf{B}^{-1}$$

Veamos como se va modificando la tabla en cada iteración. La tabla inicial del simplex es:

$\overbrace{\qquad}^{\mathbf{N}}$			
	$\mathbf{A}^j$	$\mathbf{B}$	b
C_N^t		C_B^t	Z

Después de elegir al elemento pivote sabemos automáticamente que vector sale de la base y cual entra, de tal manera que pasamos de la base **I** a la base **B**, suponiendo que se actualiza el vector de costos y el costo más positivo es c_k^* entonces la parte de la matriz que necesitamos conocer para elegir la nueva base es:

	↓		↓
	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^k$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}b$
		$C_B^t\ \mathbf{B}^{-1}$	

Similarmente si pasa de **B** a $\hat{\mathbf{B}}$ la nueva tabla es:

	$\hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{A}^l$	$\mathbf{I}$	$\hat{\mathbf{B}}^{-1}b$
		$C_{\hat{B}}^t\ \hat{\mathbf{B}}^{-1}$	

Considerando la tabla completa del Simplex, y al pasar a la base **B**, la tabla inicial:

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{N} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & b \\ \hline -C_N^t & -C_B^t & 0 & Z \end{array}\right]$$

Al realizar los pivotajes del método simplex nos queda:

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-1}b \\ \hline C_B^t\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - C_N^t & 0 & C_B^t\,\mathbf{B}^{-1} & \hat{Z} \end{array}\right]$$

De aqui se observa que:

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I} & b \\ \hline 0 & Z \end{array}\right] \xrightarrow{\text{pasa a}} \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-1}b \\ \hline C_B^t\,\mathbf{B}^{-1} & \hat{Z} \end{array}\right]$$

En cada iteración se resuelven tres sistemas encontrando $\mathbf{B}^{-1}$, ésta también se puede encontrar mediante eliminación de Gauss-Jordan, pero existen otros métodos más eficientes y que tienen además la ventaja que nos permitirán actualizar $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$ de una manera mucho más sencilla, tales como la descomposición LU y la Forma Producto de la Inversa. Enseguida presentamos los pasos del Simplex Revisado independientemente de la manera en que se encuentre $\mathbf{B}^{-1}$.

Para calcular el vector de costos se resolverá el sistema $YB = C_B^t$, ya que el sistema $YB = e_{m+1}^t$, actualiza solo cuando se cambia a una base adyacente. De ahora en adelante trabajaremos con el sistema $YB = C_B^t$.

PASOS DEL METODO SIMPLEX REVISADO

a) Se resuelve el sistema $YB = C_B$

b) Se calcula $YN - C_N$ y el máximo coeficiente , si éste es negativo se está en el óptimo, si no ir al paso c).

c) Se elige al vector A^j que entra a la base y se actualiza resolviendo el sistema:

$BY^j = A^j$.

d) Se actualiza al vector b resolviendo el sistema:

$BX_B = b$

e) Se elige el vector A^r que saldrá de la base y se intercambia por A^j. (aqui es donde se realiza el cambio de base)

f) ir al paso a)

2.2 SIMPLEX REVISADO FORMA PRODUCTO DE LA INVERSA

Presentamos esta forma porque es más fácil de entender y fué la primera implementación eficiente del Simplex, aunque trabajar con descomposición LU es más eficiente, como veremos más adelante.

En este método se resuelven los tres sistemas utilizando la forma producto de la inversa, como se vió en la sección 1.3 esto es, dado que $\mathbf{B}^{-1}$ se expresa como:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}_{t-1}\ldots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

entonces la solución a los sistemas es:

$$X_B = \mathbf{E}_{t-1}\ldots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\, b$$
$$Y^j = \mathbf{E}_{t-1}\ldots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\, \mathbf{A}^j$$
$$Y = C_B^t\, \mathbf{E}_{t-1}\ldots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

ACTUALIZACION DE LA INVERSA CON LA FORMA PRODUCTO

Si se pasa de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ se pueden calcular facilmente

$$\hat{\mathbf{B}}^{-1}b \ , \ \hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{A}^j \ \ y \ C_B^t\, \hat{\mathbf{B}}^{-1}$$

utilizando los cálculos de la etapa anterior .

Consideremos la base $\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \ldots , \mathbf{B}^m \right]$ con matriz inversa $\mathbf{B}^{-1}$, supongamos que la columna no-básica $\mathbf{A}^k$ reemplaza a $\mathbf{B}^r$ lo cual da como resultado $\hat{B}$. Se desea encontrar $\hat{B}^{-1}$ en términos de $\mathbf{B}^{-1}$, observando que $\mathbf{A}^k = \mathbf{B}Y^k$ y que $\mathbf{B}^i = \mathbf{B}e_i$ donde e_i es el i-ésimo vector canónico con 1 en la i-ésima posición. Tenemos que:

$$\hat{B} = \left[\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \ldots , \mathbf{B}^{r-1}, \mathbf{A}^k, \mathbf{B}^{r+1}, \ldots, \mathbf{B}^m \right]$$

$$\hat{B} = \left[\mathbf{B}e_1, \mathbf{B}e_2, \ldots, \mathbf{B}e_{r-1}, \mathbf{B}Y^k, \mathbf{B}e_{r+1}, \ldots, \mathbf{B}e_m \right]$$

$\hat{B} = \mathbf{BM}$, donde $\mathbf{M}$ es la matriz elemental:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & Y_{1k} & & & \\ & 1 & & Y_{2k} & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & Y_{rk} & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & Y_{mk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Como queremos obtener $\hat{B}^{-1}$ y ya conocemos $\mathbf{B}^{-1}$ necesitamos calcular $\mathbf{M}^{-1}$, la cual obtenemos multiplicando por una matriz elemental que realice un pivotaje en la columna r con el 1 en el lugar de Y_{rk}.

$$\mathbf{EM} = \begin{bmatrix} 1 & & & -Y_{1k}/Y_{rk} & & & \\ & 1 & & -Y_{2k}/Y_{rk} & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1/Y_{rk} & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & -Y_{mk}/Y_{rk} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & Y_{1k} & & & \\ & 1 & & Y_{2k} & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & Y_{rk} & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & Y_{mk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{EM} = \mathbf{I}_m$$

de donde:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{E}$$

dado que $\hat{B} = \mathbf{BM}$ entonces $\hat{B}^{-1} = (\mathbf{BM})^{-1} = \mathbf{M}^{-1}B^{-1} = \mathbf{E}B^{-1}$

$$\hat{B}^{-1} = \mathbf{E}B^{-1}$$

y como $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}_{t-1}\dots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$

$\hat{B}^{-1}$ se expresa como $\hat{B}^{-1} = \mathbf{E}\ (\mathbf{E}_{t-1}\dots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)$ de tal manera que:

$$X_{\hat{B}} = \hat{b} = \mathbf{E}\ (\mathbf{E}_{t-1}\dots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\ b$$

$$Y^j = \hat{\mathbf{A}}^j = \mathbf{E}\ (\mathbf{E}_{t-1}\dots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\ \mathbf{A}^j$$

$$Y = \hat{C}^t_{\hat{B}} = C^t_B\mathbf{E}\ (\mathbf{E}_{t-1}\dots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)$$

Observación: para obtener $X_B^{\hat{}} = \hat{b}$ no es necesario aplicarle todas las matrices elementales a b (la original) en cada etapa, sino que aplicarle solo la última matrices elemental a la b de la etapa anterior.

En consecuencia la base inversa de una nueva iteración se puede obtener premultiplicando la base inversa en la iteración anterior por una matriz elemental **E**. Recordando que **E** se representa por la acción que contiene la columna no unitaria en el lugar r.

En base a lo anterior tenemos los siguientes:

PASOS DEL METODO SIMPLEX REVISADO FORMA PRODUCTO DE LA INVERSA

a) Se calculan las primeras acciones que permitan expresar a $\mathbf{B}^{-1}$ como: $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}_m\mathbf{E}_{m-1}\ldots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$.

b) Se calcula $Y = ((\ldots((C_B^t\, \mathbf{E}_m)\mathbf{E}_{m-1})\ldots\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_1)$.

c) Se calcula $\mathbf{YN} - C_N$ y el máximo coeficiente, si éste es negativo ya se está en el óptimo, si no ir al paso d).

d) Se elige al vector $\mathbf{A}^j$ que entra a la base y se actualiza con: $Y^j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^j = (\mathbf{E}_m(\mathbf{E}_{m-1}\ldots(\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}^j))\ldots))$.

e) Se actualiza al vector $X_B^{\hat{}} = \hat{b}$ con :

$$X_B^{\hat{}} = \mathbf{E}b$$

donde b no es la original sino la de la etapa anterior.

f) Se elige el vector $\mathbf{A}^r$ que saldrá de la base y se intercambia por $\mathbf{A}^j$.

g) Se calcula la acción que actualiza apartir de los valores de Y^j y se agrega al archivo ETA.

h) ir al paso b)

Veamos un ejemplo en el cual se utilize el Método Simplex Revisado Forma Producto de la Inversa, en donde obviaremos algunos cálculos y trabajaremos con matrices elementales por ser más apropiadas para seguir el ejemplo.

Ejemplo 2.2.1 : MIN $\quad Z = -3X_1 - 5X_2$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:} \quad X_1 \qquad\quad + X_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 2X_2 \qquad + X_4 \qquad &= 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \qquad\qquad + X_5 &= 18 \end{aligned}$$

$$\text{con } X_i \geq 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Iteración 0

inicialmente tenemos que:

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 = \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [0,0,0] \qquad C_N^t = [-3,-5] \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de Y

$$Y = C_B^t E_3 E_2 E_1 = [0,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,0,0]$$

c) Cálculo de $\mathbf{YN} - C_N$

$$\mathbf{YN} - C_N = [0,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [-3,-5] = [3,5]$$

como el máximo es 5, la variable que entra es X_2

d) Actualización de A^2 , $Y^2 = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 A^2$

$$Y^2 = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e) Actualización de b

$$b = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

buscando el mínimo de los cocientes, se tiene que sale X_4 de la base.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Iteración 1

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_5 \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [0,-5,0] \quad C_N^t = [-3,0] \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de Y

$$Y = C_B^t E_4 E_3 E_2 E_1 = [0,-5,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,-5/2,0]$$

c) Cálculo de $\mathbf{YN} - C_N$

$$\mathbf{YN} - C_N = [0,-5/2,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - [-3,0] = [3,-5/2]$$

como el máximo es 3, la variable que entra es X_1

d) Actualización de A^1 , $Y^1 = \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 A^1$

$$Y^1 = \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 A^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e) Actualización de b

$$b = \mathbf{E}_4\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

buscando el mínimo de los cocientes, se tiene que sale X_5 de la base.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Iteración 2

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} X_5 \\ X_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [0,-5,-3] \qquad C_N^t = [0,0] \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de Y

$$Y = C_B^t E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = [0,-5,-3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [0,-3/2,-1]$$

c) Cálculo de $Y\mathbf{N} - C_N$

$$Y\mathbf{N} - C_N = [0,-3/2,-1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [0,0] = [-1,-3/2]$$

como el máximo es -1, ya se esta en el óptimo y por lo tanto ya no se actualiza ninguna columna de A.

d) Actualización de b

$$\text{tenemos que } b = \mathbf{E}_5 b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y la solución es :

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } Z = C_B^t X_B = [0,-5,-3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -36.$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

2.3 SIMPLEX REVISADO CON DESCOMPOSICION LU

Como se ha mencionado antes y como comprobaremos más adelante, la descomposición LU es un método más eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados y como ya se a visto en el simplex revisado es fundamental resolver tres sistemas en cada etapa, a saber:

$$BX_B = b \qquad BY^j = A^j \qquad YB = C_B t$$

Estos sistemas se resuelven como se mostró en el la sección 1.4. Ahora veremos como resuelve los sistemas aprovechando los cálculos de la etapa anterior, esto es, dado que los sistemas se resolvierón utilizando L^{-1}, U y dado que la base B cambia en una columna, como obtener $\hat{L}^{-1}$ y $\hat{U}$ para resolver los nuevos sistemas.

ACTUALIZACION DE LA DESCOMPOSICION LU

Consideremos el sistema $BX = b$ y expresemoslo así

$$[B^1,\ B^2,\ldots,B^m]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = b$$

Supongase que se pasa de B a $\hat{B}$ cambiando la columna K y como no afecta el orden en que se coloquen las columnas expresamos a $\hat{B}$ como

$$\hat{B} = [B^1,\ B^2,\ldots,B^{k-1},\ B^{k+1},\ldots,B^m,B^q]$$

siempre y cuando en $X_{\hat{B}}$ se realice el mismo reordenamiento, es decir:

Los indices de la variables básicas cambian de

$$[1,2,\ldots,k,\ldots,m] \quad \text{a} \quad [1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m,q]$$

El nuevo sistema a resolver será:

$$[B^1, B^2, \ldots, B^{k-1}, B^{k+1}, \ldots, B^m, B^q] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{k-1} \\ X_{k+1} \\ \vdots \\ X_m \\ X_q \end{bmatrix} = b$$

Ahora premultipliquemos a $\hat{B}$ por L^{-1}, esto es

$$L^{-1}\hat{B} = [L^{-1}B^1, L^{-1}B^2, \ldots, L^{-1}B^{k-1}, L^{-1}B^{k+1}, \ldots, L^{-1} B^m, L^{-1}B^q]$$

y dado que $L^{-1}B = U$ podemos expresar a $L^{-1}\hat{B}$ como

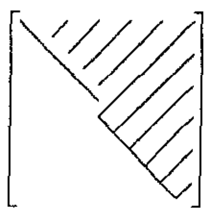
$$L^{-1}\hat{B} = [U^1, U^2, \ldots, U^{k-1}, U^{k+1}, \ldots, U^m, L^{-1}B^q] = M$$

(o a $\hat{B}$ como $\hat{B} = LM$) donde U^i es la i-ésima columna de U desde

$$i = 1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m.$$

La matriz **M** toma la forma:

M =



donde en las primeras $k-1$ columnas hay unos en la diagonal principal y ceros debajo de ella, en las $m-k+1$ columnas restantes hay unos en la diagonal inmediatamente inferior y ceros debajo de ella. A la matriz $\mathbf{M}$ se le puede transformar en triagular superior premultiplicandola por $m-k+1$ matrices elementales que terminen de hacer los unos en la diagonal principal y los ceros en la diagonal inmediatamente inferior, es decir:

$$\hat{\mathbf{U}} = E_m E_{m-1} \ldots E_k \mathbf{M}$$

notese que estas matrices elementales son triangulares inferiores.

Veamos ahora como obtener $\hat{\mathbf{L}}^{-1}$:

Despejando $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = E_k^{-1} \ldots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} \hat{\mathbf{U}}$$

y como $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{LM}$ entonces

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{L}E_k^{-1} \ldots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} \hat{\mathbf{U}}$$

donde las E_i^{-1} son también triangulares inferiores, asi que $\mathbf{L}E_k^{-1} \ldots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1}$ es triangular inferior y por lo tanto

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}E_k^{-1} \ldots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1}. \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{L}}\, \hat{\mathbf{U}}$$

De donde se obtiene que:

$$\hat{\mathbf{L}}^{-1} = \left(E_k^{-1} \ldots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1}\right)^{-1} \mathbf{L}^{-1}$$

esto es:

$$\hat{\mathbf{L}}^{-1} = (E_m E_{m-1} \ldots E_k)\mathbf{L}^{-1}$$

Para actualizar el vector de costos es necesario resolver $YB = C_B^t$, para esto se resuelve $XU = C_B^t$ y se calcula $Y = XL^{-1}$. Entonces el vector de costos no básicos acualizado es: $YN - C_N$

Para actualizar la columna que entra a la base es necesario resolver $BY^q = A^q$, para esto se calcula $Y = L^{-1}A^q$ y resuelve $UY^q = Y$

Para actualizar X_B o $\hat{b}$ se resuelve $BX_B = b$, para esto se calcula $Y = L^{-1}b$ y resuelve con sustitución regresiva $UX_B^{\wedge} = Y$ donde b es el vector original. De la segunda iteración en adelante se le puede actualizar:

$$X_B^{\wedge} = X_B - Y^q(b_k/a_{kq})$$

Donde a_{kq} es el k-ésimo elemento de la columna Y^q, b_k es la k-ésima componente de b, Y^q es la columna A^q actualizada y (b_k/a_{kq}) es el cociente mínimo positivo el cual refleja el valor de la variable que acaba de entrar a la base.

Esta manera de actualizar se toma de la tabla que se construye en la justificación de los pasos del método simplex normal, tiene la ventaja de que no es necesario resolver un nuevo sistema, esto se debe a que el sistema de donde se obtuvo Y^q ya está resuelto. Además es equivalente a aplicar a b, la acción que se utiliza en la FPI para el pivotaje en la columna q. Pero aunque sea más trabajo, utilizemos solo la primera opción que se da para actualizar. Veamos ahora como quedan los pasos del método:

PASOS DEL SIMPLEX REVISADO CON DESCOMPOSICION LU

a) Dada **B** se calculan **U** y L^{-1} como:

$$U = E_m E_{m-1} \ldots E_2 E_1 B \qquad y \qquad L^{-1} = E_m E_{m-1} \ldots E_2 E_1$$

b) Se resuelve con sustitución regresiva el sistema $XU = C_B^t$ luego se calcula $Y = XL^{-1}$.

c) Se calcula $YN - C_N$ y el máximo-coeficiente, si éste es negativo ya se está en el óptimo, si no ir al paso d).

d) Se elige al vector A^q que entra a la base y se actualiza calculando $Y = L^{-1}A^q$ y resolviendo $UY^q = Y$

e) Se actualiza al vector b calculando

$$Y = L^{-1}b$$

y resolviendo

$$U\hat{b} = Y$$

f) Se elige el vector A^k que saldrá de la base, se intercambia por A^q y el vector de indices de las variables básicas cambia de

$$[1,2,\ldots,k,\ldots,m] \quad a \quad [1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m,q]$$

g) se construye $M = \left[\, U^1\ U^2 \ldots\ U^{k-1}\ U^{k+1} \ldots\ Y^q \,\right]$

h) se calculan las $m-k+1$ matrices elementales que actualicen a:

$$\hat{U} = E_m\, E_{m-1} \ldots E_k M$$

$$\hat{L}^{-1} = E_m\, E_{m-1} \ldots E_k L^{-1}$$

i) ir al paso b)

Utilicemos este método con el ejemplo anterior:

Ejemplo 2.3.1 : MIN $\quad Z = -3X_1 - 5X_2$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:}\quad X_1 \qquad\quad + X_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 2X_2 \qquad + X_4 \qquad &= 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \qquad\qquad + X_5 &= 18 \end{aligned}$$

con $X_i \geq 0$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Iteración 0

inicialmente tenemos que:

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 = \mathbf{B} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [0,0,0] \qquad C_N^t = [-3,-5] \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de Y, que es solución del sistema $YB = C_B^t$

Primero se resuelve $XU = C_B^t$ con sustitución progresiva

y luego se calcula $Y = X\, \mathbf{L}^{-1} = X\, \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1$

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,0,0] \text{ entonces } \quad X = [0,0,0]$$

$$Y = X\, \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = [0,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,0,0]$$

c) Cálculo de $\mathbf{YN} - C_N$

$$\mathbf{YN} - C_N = [0,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [-3,-5] = [3,5]$$

como el máximo es 5, la variable que entra es X_2

d) Actualización de A^2, se resuelve $BY^2 = A^2$:

Primero se calcula $Y = \mathbf{L}^{-1}A^2 = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 A^2$

después se resuelve con sustitución regresiva $\mathbf{U}Y^2 = Y$

$$Y = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad Y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e) Actualización de b, resolviendo el sistema $\mathbf{B}X_B = b$

se calcula $Y = \mathbf{L}^{-1}b = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 b$

y luego se resuelve $\mathbf{U}X_B = Y$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } \hat{b} = X_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

f) buscando el mínimo de los cocientes, se tiene que sale X_4 de la base. Y X_B cambia a $X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_5 \\ X_2 \end{bmatrix}$

g) Construcción de **M**.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

h) Cálculo de la matrices elementales que actualizan a **U**.

Como en el lugar 2,2 hay un cero introducimos una matriz de permutaciones que denotaremos por $\mathbf{E}_4$.

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ aplicandola a } \mathbf{M}$$

$$\mathbf{E}_4\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

asi tenemos que la matriz **U** actualizada es:

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{M}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Actualización de la matriz L^{-1}:

$$L^{-1}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Iteración 1

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_5 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [0,0,-5] \quad C_N^t = [-3,0] \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de Y, se resuelve $XU = C_B^t$ con sustitución progresiva y luego se calcula $Y = X\,L^{-1} = X\,E_5E_4E_3E_2E_1$

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = [0,0,-5] \text{ entonces } X = [0,0,-5]$$

$$Y = XE_5E_4E_3E_2E_1 = [0,0,-5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = [0,-5/2,0]$$

c) Cálculo de $YN - C_N$

$$YN - C_N = [0,-5/2,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - [-3,0] = [3,-5/2]$$

como el máximo es 3, la variable que entra es X_1

d) Actualización de A^1, se calcula $Y = L^{-1}A^1 = E_5E_4E_3E_2E_1A^1$

después se resuelve con sustitución regresiva $UY^1 = Y$

$$Y = E_5E_4E_3E_2E_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}Y^1 = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad Y^1 = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$$

e) Actualización de b, se calcula $Y = L^{-1}b$

y luego se resuelve $UX_B = Y$

$$Y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\12\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\18\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}X_B = \begin{bmatrix}4\\18\\6\end{bmatrix} \quad \text{entonces } \hat{b} = X_B = \begin{bmatrix}4\\6\\6\end{bmatrix}$$

f) buscando el mínimo de los cocientes, se tiene que sale X_5 de la base.

base. Y X_B cambia a $X_B = \begin{bmatrix}X_3\\X_2\\X_1\end{bmatrix}$

g) Construcción de **M**.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

h) Cálculo de la matrices elementales que actualizan a **U**.

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando $\mathbf{E}_6$ a $\mathbf{M}$

$$\mathbf{E}_6\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \mathbf{E}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$$

asi tenemos que la matriz **U** actualizada es:

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}_7\mathbf{E}_6\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz $\mathbf{L}^{-1}$ actualizada es:

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Iteración 2

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} X_5 \\ X_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [0,-5,-3] \qquad C_N^t = [0,0] \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de Y, se resuelve $XU = C_B^t$ con sustitución progresiva y luego se calcula $Y = X\,L^{-1}$

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,-5,-3] \quad \text{así } X = [0,-5,9/2]$$

$$Y = [0,-5,9/2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = [0,-3/2,-1]$$

$$Y = [0,-3/2,-1]$$

c) Cálculo de $YN - C_N$

$$YN - C_N = [0,-3/2,-1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [0,0] = [-1,-3/2]$$

como el máximo es -1, ya se esta en el óptimo y por lo tanto ya no se actualiza ninguna columna de A.

e) Actualización de b, se calcula $Y = L^{-1}b$ y luego se resuelve $UX_B = Y$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{así } X_B = \hat{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y la solución es :

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

con $Z = C_B^t X_B = [0,-5,-3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -36.$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

2.4 COMPARACION DEL NUMERO DE OPERACIONES

En esta sección se obtiene el número de operaciones (multiplicaciones y/o divisiones que son las operaciones que necesitan más tiempo de cálculo) que se requieren para resolver, utilizando la forma producto de la inversa asi como la descomposición LU, los sistemas

$$BX_B = b \qquad BY^j = A^j \qquad YB = C_B^t$$

CALCULO DEL NUMERO DE OPERACIONES PARA LA FPI

Como se vió en la sección 1.3 los pasos para obtener B^{-1} son los siguientes:

1) Se extrae la primera columna de **B** y se construye E_1, entonces aqui se tiene una operación.

2) Se extrae B^2, se le aplica E_1 y con el resultado se construye E_2, aqui se tienen m+1 operaciones.

3) Se extrae B^3, se le aplica E_1 al resultado se le aplica E_2 y con el resultado se construye E_3. asi continúa hasta llegar a m.

De aqui deducimos que el cálculo de operaciones en cada paso es:

1) $B^1 \longrightarrow ETA \longrightarrow AC$	1
2) $B^2 \longrightarrow E_1B^2 \longrightarrow AC$	m 1
3) $B^3 \longrightarrow E_1B^3 \longrightarrow E_2(E_1B^3) \longrightarrow AC$	m m 1
$\vdots$	$\vdots$
m) $B^m \longrightarrow E_1B^m \ldots\ E_{m-1}(E_{m-2}(\ldots(E_1B^m)\ldots)) \longrightarrow AC$	m m m ... 1

Asi tenemos que el número de productos para encontrar la inversa es:

$$\begin{aligned} & m(m-1) + m(m-2) + \ldots + m \\ &= m + m\ ((m-1)m/2) \\ &= m + m\ (m^2-m)/2 \\ &= m + (m^3-m^2)/2 \\ &= m^3/2 - m^2/2 + m \end{aligned}$$

Ya que se tiene la inversa, para resolver cada sistema se requieren m^2 operaciones, ya que aplicar una acción lleva m operaciones y se aplican m acciones, asi que para resolver los tres sistemas se requieren $3m^2$ operaciones. Por lo tanto el número total de operaciones es:

$$m^3/2 - m^2/2 + m + 3m^2 = m^3/2 + 5m^2/2 + m$$

CALCULO DEL NUMERO DE OPERACIONES PARA LA DESCOMPOSICION LU

Veamos cuantas operaciones se necesitan para obtener $\mathbf{U}$ y $\mathbf{L}^{-1}$:

1) Para obtener $\mathbf{U}^1$ hacemos $\mathbf{U}^1 = e_1$ y con $\mathbf{B}^1$ se construye la primera acción, lo cual requiere una operación.

2) Para obtener $\mathbf{U}^2$ a $\mathbf{B}^2$ se le aplica la primera acción y se construye la segunda acción, para lo cual se requieren m y 1 operaciones respectivamente.

3). Para obtener $\mathbf{U}^3$ a $\mathbf{B}^3$ se le aplica la primera y segunda acción y se construye la tercera acción. y esto lleva m, m-1 y 1 operaciones.

⋮

m) Para obtener $\mathbf{U}^m$ a $\mathbf{B}^m$ se le aplican las m-1 acciones, para lo cual se requieren m , m-1 ,...,2 operaciones, a la última componente de este resultado se intercambia por un 1 y se construye la m-ésima acción, para lo que se requiere una operación.

Lo que da un total de:

$$
\begin{aligned}
& 1 \\
& + m + 1 \\
& + m + (m-1) + 1 \\
& + m + (m-1) + (m-2) + 1 \\
& \vdots \\
& + m + (m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1
\end{aligned}
$$

$$= (m-1)m + (m-2)(m-1) + \dots + (m-k)(m-(k-1)) + \dots + (1)(2) + m$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m-1} m^2 - 2km + m + k^2 - k \right) + m$$

$$= (m-1)m^2 - 2m\frac{(m-1)m}{2} + (m-1)m + \frac{(m-1)(m)(2m-1)}{6} - \frac{(m-1)m}{2} + m$$

$$= \frac{(m-1)(m)(2m-1)}{6} + \frac{(m-1)m}{2} + m$$

$$= \frac{m^3}{3} + \frac{m}{2} + m = \frac{m^3}{3} + \frac{3m}{2}$$

Con este número de operaciones obtenemos a $\mathbf{U}$ y como ya se sabe también obtenemos a $\mathbf{L}^{-1}$. Ahora calculemos el número de operaciones que se necesitan para resolver los sistemas:

Consideremos al sistema

$$BY^j = A^j$$

que para resolverse a su vez se resuelven los sistemas

$$LX = A^j \qquad y \qquad UY^j = X$$

Para resolver el primero se aplica una acción con m productos, luego la segunda acción con m-1 productos y así sucesivamente lo que da un total de $\frac{m(m+1)}{2}$. Para resolver el segundo se obtiene el valor de la última variable, el cual multiplica U^m, de donde se obtiene el valor de la penúltima variable, para lo cual se realizaron m-1 operaciones, el valor de la antepenúltima variable se obtiene de manera similar, para lo cual se utilizan m-2, y asi sucesivamente. Por lo tanto para resolver el sistema

$$BY^{j} = A^{j}$$

se requieren:

$$\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = m^{2}$$

Los dos sistemas que faltan se resuelven con el mismo número de operaciones. Por lo tanto el número total para resolver los tres sistemas es:

$$\frac{m^{3}}{3} + 3m^{2} + \frac{3m}{2}$$

Comparando este número con el obtenido para la forma producto de la inversa

$$m^{3}/2 + 5m^{2}/2 + m$$

es claro que trabajar con descomposición LU resulta más eficiente.

CAPITULO III

METODO SIMPLEX REVISADO PARA VARIABLES ACOTADAS

En la mayoría de los problemas prácticos de Programación Lineal las variables están acotadas, en algunos casos esto se debe a una disponibilidad limitada de recursos, en otros casos por cuestiones tácticas o políticas se acotan las variables y en otros, como en el caso de las dietas, es muy natural que se tengan restricciones de mínimo y máximo en los nutrientes, las cuales dan origen a variables de holgura con cotas superiores e inferiores.

En este capítulo presentamos la forma general de los problemas con variables acotadas y como se resuelven de tal forma que no se incremente significativamente el número de variables. Para esto presentamos los aspectos principales como lo son: la definición de solución básica factible, el criterio de optimalidad y no acotamiento, el criterio de pivotaje y la actualización.

La forma general de un PPL con variables acotadas es:

$$\text{Min } Z = C^t X$$

$$\text{Sujeto a} \quad AX = b$$

$$\text{con} \quad L \le X \le U$$

donde las componentes de L y U pueden ser positivos o negativos, incluso ∞ o $-\infty$.

En lo que sigue supondremos que las componentes de L y U son finitas, los casos de ∞ y $-\infty$ no se tratarán pues el problema a resolver no lo requiere.

El método más directo de manejar las restricciones $L \leq X \leq U$ consiste en introducir vectores de holgura X_1 y X_2 que hagan:

$$X + X_1 = U \quad \text{y} \quad X - X_2 = L$$

Pero esto incrementa el número de restricciones de m a m + 2n y el número de variables de n a 3n. Lo cual nos indica que usar esta forma sería mucho esfuerzo computacional. Coñ la técnica de variables acotadas se mantiene el número de restricciones y las variables se manejan implicitamente de manera similar como lo hace el método Simplex normal para mantener las restriciones $X \geq 0$.

3.1 SOLUCIÒN BASICA

Acontinuación damos la definición de solución básica factible la cual es una extención de la definición original.

<u>Definición</u>: Sea el sistema $\mathbf{A}X = b$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de mxn de rango m , entonces el vector X es una solución básica factible del sistema si $\mathbf{A}$ se descompone en

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}_1 \mid \mathbf{N}_2 \right]$$

Donde $\mathbf{B}$ tiene rango m y además se cumple que:

$$L_B \leq X_B = \mathbf{B}^{-1}\left(b - \mathbf{N}_1 L_{N1} - \mathbf{N}_2 U_{N2}\right) \leq U_B$$

$$L_{N1} = X_{N1} \quad \text{y} \quad U_{N1} = X_{N2}$$

B es la base, X_{N2} y X_{N1} son las variables no básicas en sus limites superiores e inferiores respectivamente.

Observaciónes: Si una variable es no básica entonces esta en su cota inferior o en su cota superior. Si tomamos $L_B = 0$ y a $U_B = \infty$, entonces tenemos las restricciones usuales de no negatividad $X_B \geq 0$

Suponiendo que se tiene una solución básica factible veamos como queda la expresión de Z con el fin de mejorar su valor.

Asi como X se descompone en:

$$X = \left[X_B \mid L_{N1} \mid U_{N2} \right]$$

de la misma manera el vector de costos C se descompone como:

$$C = \left[C_B \mid C_{N1} \mid C_{N2} \right]$$

Entonces una expresión para Z es:

$$Z = C^t X = \left[C_B \mid C_{N1} \mid C_{N2} \right] \begin{bmatrix} X_B \\ L_{N1} \\ U_{N2} \end{bmatrix} = C_B X_B + C_{N1} L_{N1} + C_{N2} U_{N2}$$

sustituyendo el valor de X_B en el cálculo de Z tenemos

$$Z = C_B \mathbf{B}^{-1} \left(b - \mathbf{N}_1 L_{N1} - \mathbf{N}_2 U_{N2} \right) + C_{N1} L_{N1} + C_{N2} U_{N2}$$

y reagrupando

$$Z = C_B B^{-1} b - \left(C_B B^{-1} N_1 - C_{N1} \right) L_{N1} - \left(C_B B^{-1} N_2 - C_{N2} \right) U_{N2} \qquad (2)$$

en donde notamos que

$$C_B B^{-1} N_1 - C_{N1} \qquad y \qquad C_B B^{-1} N_2 - C_{N2}$$

dan los valores de $Z_j - C_j$ de las variables no básicas en sus cotas inferiores y superiores respectivamente.

De lo anterior obtenemos que:

$$Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R_1} \left(Z_j - C_j \right) L_j + \sum_{\in R_2} \left(C_j - Z_j \right) U_j \qquad (3)$$

Donde R_1 es el conjunto de índices de las variables no básicas en sus cotas inferiores y R_2 es el conjunto de índices de las variables no básicas en sus cotas superiores.

Como se ve Z queda en terminos de las variables no básicas, veamos como hay que modificarlas para mejorar el valor de la función objetivo.

Si $X_j = L_j$ es la variable que entra a la base, ésta solo lo puede hacer aumentando su valor y si $Z_j - C_j > 0$ para $J \in R_1$ entonces el valor de Z disminuiria, de aqui que para entrar a la base se requiere que $Z_j - C_j$ para $J \in R_1$ sea lo más positivo con el fin de reducir a Z "lo más posible". Si $X_j = U_j$ entra a la base, ésta solo lo puede hacer disminuyendo su valor y si $C_j - Z_j > 0$ para $J \in R_2$ entonces el valor de Z disminuiria, de aqui que para entrar a la base se prefiere que $C_j - Z_j$ sea lo más positivo posible. En base a lo anterior se concluye el siguiente:

3.2 CRITERIO DE ELECCION DE LA VARIABLE QUE ENTRA A LA BASE

El indice k de la varible que puede entrar a la base se determina como aquel en donde el costo de la variable corresponda a:

$$M = \max\ (\ M_1,\ M_2) \qquad (4)$$

donde

$$M_1 = \max_{j \in R_1}\ (\ Z_j - C_j)\ \text{y}\ M_2 = \max_{j \in R_2}\ (\ C_j - Z_j\ ).$$

Si este máximo es positivo, entonces X_k es la variable que entra a la base. Si este máximo es no positvo entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema de optimalidad.- Si $M \leq 0$ entonces la solución actual es óptima. Donde

$$M = \max \left(M_1 = \max_{j \in R_1} (\ Z_j - C_j)\ ,\ M_2 = \max_{j \in R_2} (\ C_j - Z_j\ ) \right)$$

Esto es inmediato ya que si $M \leq 0$ entonces:

$$Z_j - C_j \leq 0 \ \text{ para toda } j \in R_1$$

$$C_j - Z_j \leq 0 \ \text{ para toda } j \in R_2$$

fijándonos en (3) vemos que Z ya no puede decrecer más lo cual indica que la solución actual es óptima.

La variable que puede entrar a la base modifica su valor de manera restringida, ya que un cambio en su valor obliga a que las variables básicas también se modifiquen y se debe asegurar que las variables X_k y $\hat{X}_B$ se mantengan dentro de sus cotas, es decir:

$$L_k \le X_k \le U_k \quad \text{y} \quad \hat{L}_B \le \hat{X}_B \le \hat{U}_B$$

Por lo que es necesario considerar el incremento o decremento de ésta variable. A continuación presentamos estos casos con su respectiva actualización.

3.3 INCREMENTO DE X_K APARTIR DE SU VALOR ACTUAL L_K Y SU ACTUALIZACION.

Sea $X_k = L_{N1} + \Delta_k e_k$, ésta representa que la variable con índice k aumenta de valor la cantidad Δ_k (inicialmente $\Delta_k = 0$). Las variables restantes no básicas están fijas y los valores actuales de X_B y Z al sustituir $X_k = L_{N1} + \Delta_k e_k$ en (1) y (3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_B &= \mathbf{B}^{-1}b - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1(\,L_{N1} + \Delta_k e_k) - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\, U_{N2} \\
&= \mathbf{B}^{-1}b - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\, L_{N1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\, U_{N2} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 e_k \Delta_k \\
&= X_B - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 e_k \Delta_k
\end{aligned}$$

y como $\mathbf{N}_1 e_k = A^k$

$$\hat{X}_B = X_B - \mathbf{B}^{-1} A^k \Delta_k$$

donde A^k es la columna del vector que entra a la base y como $Y^k = \mathbf{B}^{-1} A^k$ entonces $\hat{X}_B$ se expresa:

$$\hat{X}_B = X_B - \Delta_k Y^k \qquad (5)$$

Esta ecuación (5) nos dice como cambia X_B al aumentar X_k. Es decir $\hat{X}_B$ cambia a X_B menos el incremento en la variable por el valor de la columna actualizada.

Por otro lado, al sustituir en Z a $X_k = L_{N1} + \Delta_k e_k$ se obtiene:

$$\hat{Z} = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R_1} (Z_j - C_j) L_j - \sum_{j \in R_2} (Z_j - C_j) U_j - \sum_{j \in R_1} (Z_j - C_j) e_k \Delta_k$$

$$= Z - \sum_{j \in R_1} (Z_j - C_j) e_k \Delta_k$$

$$= Z - (Z_k - C_k)\Delta_k$$

Asi obtenemos la ecuación que nos dice como se modifica Z al aumentar X_k.

$$\hat{Z} = Z - (Z_k - C_k)\Delta_k \qquad (6)$$

Fijándonos en (6) se ve que es conveniente aumentar Δ_k tanto como sea posible. Sin embargo, cuando Δ_k crece las variables básicas se modifican de acuerdo con la ecuación (5). El incremento Δ_k está limitado como sigue:

Que las variables básicas actualizadas cumplan con:

1) $L_B^{\wedge} \leq X_B^{\wedge}$

2) $X_B^{\wedge} \leq U_B^{\wedge}$

y que la variable que entre a la base cumpla con:

3) $X_k \leq U_k$

Primer caso:

Sea D_1 el valor de Δ_k para el cual una variable básica alcanza su cota inferior. Recordando que $L_B \le \hat{X_B} = X_B - \Delta_k Y^k$ se obtiene:

$$\Delta_k Y^k \le X_B - L_B$$

es decir, $\Delta_k Y_i^k \le X_{Bi} - L_{Bi}$ para $i = 1,2,\dots,m$

Si $Y_i^k > 0$ entonces $\Delta_k \le \dfrac{X_{Bi} - L_{Bi}}{Y_i^k}$

Al igual que en el método simplex normal, tomamos a D_1 como:

$$D_1 = \min_{1\le i\le m}\left\{ \frac{X_{Bi} - L_{Bi}}{Y_i^k} \;\middle|\; Y_i^k > 0 \right\} = \frac{X_r - L_{Br}}{Y_r^k} \text{ si } Y_r^k > 0 \quad (7)$$

Ahora, si $Y_i^k \le 0$ para toda i, entonces Δ_k puede crecer arbitrariamente sin alterar la desigualdad y por lo tanto $D_1 = \infty$.

Segundo caso:

Sea D_2 el valor de Δ_k para el cual una variable básica alcanza su cota superior. Dado $\hat{X_B} = X_B - \Delta_k Y^k \le U_B$ se tiene que:

$$-Y^k \Delta_k \le U_B - X_B$$

Si $Y_i^k < 0$ entonces $\Delta_k \le \dfrac{U_{Bi} - X_{Bi}}{-Y_i^k}$; de manera similar tomamos a D_2 como:

$$D_2 = \min_{1\le i\le m}\left\{ \frac{U_{Bi} - X_{Bi}}{-Y_i^k} \;\middle|\; Y_i^k < 0 \right\} = \frac{U_{Br} - X_{Br}}{-Y_r^k} \text{ si } Y_r^k < 0 \quad (8)$$

Ahora, si $Y_i^k \geq 0$ entonces Δ_k puede crecer arbitrariamente sin alterar la desigualdad y en consecuencia $D_2 = \infty$.

Tercer caso.- Sea D_3 el valor de Δ_k en el que X_k alcanza su cota superior U_k . Este valor es claramente:

$$D_3 = U_k - L_k \qquad (9)$$

De estos tres casos se determina el valor máximo de $\Delta\delta_k$. Se toma entonces el mínimo de éstos tres para asegurar que se cumple que la variable que sale de la base se mantenga dentro de sus límites y que la variable que entra no exeda de su límite superior, esto es:

$$\Delta_k = \min \left\{ D_1,\ D_2,\ D_3 \right\} \qquad (10)$$

ACTUALIZACION CUANDO LA VARIABLE NO BASICA CRECE.

Para actualizar los valores de la función objetivo y las variables básicas, a Z se le remplaza por $Z - (Z_k - C_k)\Delta_k$ y a X_B por $X_B - Y^k\Delta_k$, es decir, de acuerdo a las ecuaciones (5) y (6).

Si Δ_k esta dado por D_3, entonces no se hace ningún cambio de base y X_k sigue siendo variable no básica, solo que ahora está en su cota superior. Si Δ_k está dado por D_1 o D_2, a la r-ésima componente del nuevo vector X_B se remplaza por L_k o por U_k, para reflejar el valor de X_k, el cual acaba de entrar a la base. En este caso X_k entra a la base y X_r sale de ella. Donde el índice r se determina de acuerdo con:

a) la ecuación (7) si $\Delta_k = D_1$, en cuyo caso X_r se va a su cota inferior; esto se deduce de la ecuación (5).

b) la ecuación (8) si $\Delta_k = D_2$, en cuyo caso X_r se va a su cota superior; esto se deduce de la ecuación (5).

3.4 DECREMENTO DE X_K DESDE SU VALOR ACTUAL U_K Y SU ACTUALIZACION

Para este caso se tiene que $Z_k - C_k < 0$, queremos disminuir a X_k lo más posible, entonces $X_k = U_k - \Delta_k e_k$, en donde $\Delta_k \geq 0$. Similarmente al caso de incrementar X_k, al sustituir $X_k = U_k - \Delta_k e_k$ en (1) y (3) se obtiene:

$$\hat{X}_B = X_B + \Delta_k Y^k \quad (11)$$

$$\hat{Z} = Z + (Z_k - C_k)\Delta_k \qquad (12)$$

De acuerdo a la ecuación (12) se ve que Δ_k debe ~~ser lo~~ más grande posible.

El incremento máximo que puede tomar Δ_k está dado por la ecuación (10), en donde D_1, D_2 y D_3 están especificados como sigue:

Dado que se debe cumplir que

$$L_B \leq \hat{X}_B \leq U_B$$

por la ecuación (11) y por las mismas razones que en el caso anterior D_1 y D_2 estan dados por:

$$D_1 = \begin{cases} \min\limits_{1\le i \le m}\left\{\dfrac{X_{Bi} - L_{Bi}}{-Y^k_i} : Y^k_i < 0\right\} = \dfrac{X_{Br} - L_{Br}}{-Y^k_r} & \text{si } Y^k_r < 0 \\ \infty & \text{si } Y_i \ge 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$D_2 = \begin{cases} \min\limits_{1\le i \le m}\left\{\dfrac{U_{Bi} - X_{Bi}}{-Y^k_i} : Y^k_i > 0\right\} = \dfrac{U_{Br} - X_{Br}}{-Y^{k'}_r} & \text{si } Y^k_r > 0 \\ \infty & \text{si } Y_i \le 0 \end{cases} \quad (14)$$

Con el fin de que la variable X_k no sea menor que su cota inferior D_3 está dada por (9).

ACTUALIZACION CUANDO LA VARIABLE NO BASICA DECRECE.

Para actualizar los valores de la función objetivo y las variables básicas, a Z se le remplaza por $Z + (Z_k - C_k)\Delta_k$ y a X_B por $X_B + Y^k\Delta_k$, es decir, de acuerdo a las ecuaciones (11) y (12).

Si Δ_k esta dado por D_3, entonces no se hace ningún cambio de base y X_k sigue siendo variable no básica, solo que ahora está en su cota iñferior. Si Δ_k está dado por D_1 o D_2, a la r-ésima componente del nuevo vector X_B se remplaza por L_k, para reflejar el valor de X_k, el cual acaba de entrar a la base. En este caso X_k entra a la base y X_r sale de ella. Donde el índice r se determina de acuerdo con:

a) la ecuación (13) si $\Delta_k = D_1$, en cuyo caso X_r se va a su cota inferior; esto se deduce de la ecuación (11).

b) la ecuación (14) si $\Delta_k = D_2$, en cuyo caso X_r se va a su cota superior; esto se deduce de la ecuación (11).

3.5 PASOS DEL METODO SIMPLEX REVISADO CON VARIABLES ACOTADAS

Partiendo de que se tiene una SBF.

a) Se resuelve el sistema $YB = C_B$

b) Se calculan $Z_j - C_j = Y\,\mathbf{N}_1 - C_{N1}$ para $j \in R_1$ y

$Z_j - C_j = Y\,\mathbf{N}_2 - C_{N2}$ para $j \in R_2$

c) El indice k de la varible que puede entrar a la base es aquella que corresponde a $M = \max\,(M_1, M_2)$ donde

$$M_1 = \max_{j \in R_1}\,(Z_j - C_j) \text{ y } M_2 = \max_{j \in R_2}\,(C_j - Z_j).$$

Si M es negativo ya se está en el óptimo, en caso contrario ir al paso d).

d) Se elige al vector A^k que puede entrar a la base y se actualiza resolviendo el sistema $\mathbf{B}\,Y^k = A^k$.

e) se elige $\Delta_k = \min\left\{ D_1, D_2, D_3 \right\}$, donde D_1 y D_2 se calculan de acuerdo a las ecuaciones:

Si $M = M_1$

$$D_1 = \min_{1 \le i \le m}\left\{ \frac{X_{Bi} - L_{Bi}}{Y_i^k} : Y_i^k > 0 \right\} = \frac{X_r - L_{Br}}{Y_r^k} \text{ si } Y_r^k > 0$$

$$D_2 = \min_{1 \le i \le m}\left\{ \frac{U_{Bi} - X_{Bi}}{-Y_i^k} : Y_i^k < 0 \right\} = \frac{U_{Br} - X_{Br}}{-Y_r^k} \text{ si } Y_r^k < 0$$

Uk - Lk

Si $M = M_2$

$$D_1 = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{X_{Bi} - L_{Bi}}{-Y_i^k} : Y_i^k < 0\right\} = \frac{X_r - L_{Br}}{Y_r^k} \text{ si } Y_r^k < 0$$

$$D_2 = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{U_{Bi} - X_{Bi}}{Y_i^k} : Y_i^k > 0\right\} = \frac{U_{Br} - X_{Br}}{-Y_r^k} \text{ si } Y_r^k > 0$$

$$D_3 = U_k - L_k$$

Si $\Delta_k = \infty$ la solución es no acotada.

f) Z y X_B se acualizan de acuerdo a las ecuaciones:

a) si $M = M_1$

$$\hat{X_B} = X_B - \Delta_k Y^k \quad \text{y} \quad \hat{Z} = Z - (Z_k - C_k)\Delta_k$$

si $\Delta_k = D_3$ entonces $X_k = U_k$

si no $X_k = L_k + \Delta_k$

$$\text{y} \qquad X_r = \begin{cases} L_r \text{ si } \Delta_k = D_1 \\ U_r \text{ si } \Delta_k = D_2 \end{cases}$$

b) si $M = M_2$

$$\hat{X_B} = X_B + \Delta_k Y^k \quad \text{y} \quad \hat{Z} = Z + (Z_k - C_k)\Delta_k$$

si $\Delta_k = D_3$ entonces $X_k = L_k$

si no $X_k = U_k - \Delta_k$

$$\text{y} \qquad X_r = \begin{cases} L_r \text{ si } \Delta_k = D_1 \\ U_r \text{ si } \Delta_k = D_2 \end{cases}$$

g) Si $\Delta_k = D_3$ entonces no hay cambio de base, pero X_k cambia de región de R_1 a R_2 o de R_2 a R_1.

Si $\Delta_k = D_1$ o $\Delta_k = D_2$ entonces X_r sale de la base y X_k entra a ella.

h) Se actualiza B si es necesario

i) Ir al paso a)

Enseguida mostraremos su implementación con un ejemplo pequeño, pues el objetivo es ilustrar como se trabaja con las cotas de las variables (cuando no hay cambio de base). De hecho esto se da en la iteración 0, en la iteración 1 se cambia de base y en la iteración 2 se sabe que se está en el óptimo.

Ejemplo.- Min $Z = -X_1 - 2X_2$

$$\text{s.a. } X_1 + X_2 + X_3 = 5$$

$$2X_1 + X_2 + X_4 = 7$$

con

$$0 \le X_1 \le 3$$
$$0 \le X_2 \le 4$$
$$0 \le X_3 \le 5$$
$$0 \le X_4 \le 7$$

- -

Iteración 0

Inicialmente tenemos

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad X_{N1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$C_B^t = [0,0] \qquad C_{N1}^t = [-1,-2] \quad N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Resolver $YB = C_B^t$

$$Y = I\ [0,0] = [0,0]$$

b) Cálculo de $Z_j - C_j$

$$YN_1 - C_{N1}^t = [0,0]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - [-1,-2] = [1,2]$$

c) $M = M_1 = 2$ que corresponde a X_2

la cual podrá entrar a la base.

d) Actualización de A^2

$$Y^2 = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) Cálculo de Δ_2

$$D_1 = \min \left\{ \frac{5 - 0}{1} , \frac{7 - 0}{1} \right\} = 5$$

$$D_2 = \infty$$

$$D_3 = 4 - 0 = 4$$

$$\Delta_2 = D_3 = 4$$

f) Actualización de X_B y Z.

$$X_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Z = 0 - 4(2) = -8$$

g) No hay cambio de base y X_2 pasa a N_2 es decir, $X_2 = 4$

- -

Iteración 1

$$X_B = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad X_{N1} = [X_1] \quad X_{N2} = [X_2] \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$C_B^t = [0,0] \qquad C_{N1}^t = [-1] \quad N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C_{N2}^t = [-2] \quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Resolver $YB = C_B^t$

$$Y = I\ [0,0] = [0,0]$$

b) Cálculo de $Z_j - C_j$

$$YN_1 - C_{N1}^t = [0,0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - [-1] = [1]$$

$$YN_2 - C_{N2}^t = [0,0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - [-2] = [2]$$

c) $M = M_1 = 1$ que corresponde a X_1
la cual podrá entrar a la base.

d) Actualización de A^1

$$Y^1 = B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e) Cálculo de Δ_1

$$D_1 = \min\left\{ \frac{1-0}{1}, \frac{3-0}{2} \right\} = 1$$

$$D_2 = \infty$$

$$D_3 = 3 - 0 = 3$$

$$\Delta_1 = D_1 = 1$$

f) Actualización de X_B y Z.

$$X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = -8 - 1(1) = -9$$

g) X_1 entra a la base y X_3 pasa a N_1

h) Actualización de B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- -

Iteración 2

$$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_{N1} = [X_3] \quad X_{N2} = [X_2] \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B^t = [-1,0] \qquad C_{N1}^t = [0] \quad N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_{N2}^t = [-2] \quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Resolver $YB = C_B^t$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} [-1,0] = [-1,0]$$

b) Cálculo de $Z_j - C_j$

$$YN_1 - C_{N1}^t = [-1,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - [0] = [-1]$$

$$YN_2 - C_{N2}^t = [-1,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - [-2] = [1]$$

c) Ya se está en el óptimo y la solución es:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 4$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = 1$$

con $Z = -9$.

Si se desea tener más ejemplos, plantee un problema y utilize el programa dado e el apéndice B.

APENDICE A

TEORIA DE PROGRAMACION LINEAL

En este apéndice se presenta la teoria de programación lineal necesaria para comprender el algoritmo del Método Simplex y a la vez se sientan las bases para el Método Simplex Revisado. Empezaremos señalando las caracteristicas que tienen los problemas de programacion lineal (PPL), dando los conceptos básicos. Después pasaremos a ver los principales resultados de la teoria de convexidad y puntos extremos, los resultados fundamentales de programación lineal, resultados de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y por último veremos el algoritmo del método simplex, la justificación de sus pasos y las condiciones de óptimalidad.

A.1 INTRODUCCION

Enseguida presentamos parte de la notación, asi como las diferentes formas en que se pueden presentar los PPL y la clasificación de las soluciones.

Los problemas de programación lineal se representan por el modelo siguiente:

Maximizar (o Minimizar) $F(x_1,x_2,\dots,x_n) = C_1X_1+ C_2X_2+\dots+ C_nX_n$

Sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +\dots+ a_{1n}x_n &\ (\le)(\ge)(=)\ b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +\dots+ a_{2n}x_n &\ (\le)(\ge)(=)\ b_2\\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad &\qquad\qquad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +\dots+ a_{mn}x_n &\ (\le)(\ge)(=)\ b_m
\end{aligned}$$

$$\text{Con } x_1,x_2,\dots,x_n \ge 0$$

A la función F se le llama "función objetivo", al vector $(C_1,C_2,\dots,C_n)^t$ se le llama "vector de costos", a las variables $X_1,X_2,\dots,X_n$ se les llama "variables de decisión"

A la matriz $\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn}\end{bmatrix}$

se le llama "matriz de restricciones" y a sus coeficientes se les llama "coeficientes tecnologicos", al vector $(b_1,b_2,\dots,b_m)^t$ se le llama "vector de requerimientos". Ahora considerando a los vectores como matrices de nx1 lo anterior lo podemos representar en la forma matricial de la siguiente manera:

$$\text{Min (max) } f(X) = C^tX$$

$$\text{sujeta a } \mathbf{AX}\ (\le)(\ge)(=) \le b$$

$$X \ge 0.$$

Donde **A** es la matriz de restricciones, C el es vector de costos, b es el vector de requerimientos y f(X) es la función objetivo.

En este problema se trata se encontrar un vector X que cumpla con las restricciones y que a su vez minimice o maximice la función objetivo según sea el caso.

Como Max f(X) = -Min (- f(X)) trataremos únicamente el caso de min Z=f(x).

Definición A.1.1: Un problema de programación lineal se dice que está en su forma general cuando es expresado de la forma:

$$\text{Min (o Max)} \quad Z = C^tX$$

$$\text{sujeta a } \mathbf{A}X = b$$

$$X \geq 0, \ b \geq 0$$

Definición A.1.2: A un PPL escrito de la forma

$$\text{Max } Z = C^tX$$

$$\text{sujeta a } \mathbf{A}X \leq b$$

$$\text{con } X \geq 0$$

se dice que está en forma estándar.

Definición A.1.3: Cuando un PPL está escrito como

$$\text{Min } Z = C^tX$$

$$\text{sujeta a } \mathbf{A}X \geq b$$

$$\text{con } X \geq 0$$

se dice que está en forma canónica.

Observación : si el PPL está en su forma estandar o canonica no se pide que el vector $b \geq 0$.

La siguiente definición nos sirve para transformar un PPL que está en cualquiera de las tres formas en un PPL a la forma general.

Definición A.1.4: Por una variable de holgura entenderemos a una variable que se agregue a una desigualdad para transformarla en igualdad, estas variables pueden ser positivas o negativas y esto solo depende del signo con el que se agregue la variable.

Ejemplo A.1.5: Considere las siguientes desigualdades:

$$(1) \qquad 3X + Y - 2Z \leq 4$$

Esta puede ser transformada en:

$$3X + Y - 2Z + W = 4.$$

Donde $W = 4 - 3X - Y + 2Z$, W es variable de holgura positiva.

En el caso de que la desigualdad sea de la forma:

$$(2) \qquad 3X + Y - 2Z \geq 4$$

Se puede transformar en:

$$3X + Y - 2Z - W = 4$$

Donde $W = -4 + 3X + Y - 2Z$, W es variable de holgura negativa.

La representación en la forma general es muy importante ya que los paquetes computacionales para resolver un PPL manejan internamente esta forma, esto se debe a que un PPL expresado en la forma general se reduce a resolver sistemas de ecuaciones, tema que veremos mas adelante.

Ahora se mostrará que dado cualquier PPL se puede llevar a la forma general utilizando las siguientes reglas:

REGLAS PARA LLEVAR UN PPL A SU FORMA GENERAL

1.- Si en alguna restricción aparece un término $b_i < 0$, se multiplica por (-1) teniendo cuidado de cuidar el sentido de la desigualdad . Ejemplo si tenemos una restricción de la forma:

$$a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+\ldots+a_{in}X_n \; \{ \geq, =, \leq \} \; b_i \qquad \text{con } b_i < 0$$

multiplicando por (-1) la restricción nos queda

$$-a_{i1}X_1-a_{i2}X_2-\ldots-a_{in}X_n \; \{ \leq, =, \geq \} \; -b_i$$

2.- Si tenemos alguna restricción de la forma :

$$a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+\ldots+a_{in}X_n \leq b_i \qquad \text{con } b_i \geq 0$$

se agrega una variable de holgura positiva $X_{n+i} \geq 0$ para transformarla en la siguiente:

$$a_{i1}X_1+ a_{i2}X_2+\ldots+a_{in}X_n + X_{n+i} = b_i$$

3.- Si tenemos una restricción de la forma:

$$a_{j1}X_1+ a_{j2}X_2+\ldots+ a_{jn}X_n \geq b_j \qquad \text{con } b_j \geq 0$$

agregamos una variable de holgura negativa $X_{n+j} \geq 0$ para transformarla en:

$$a_{j1}X_1+ a_{j2}X_2+\ldots+ a_{jn}X_n - X_{n+j} = b_j$$

Ejemplo A.1.6: Considere el sig. PPL

$$\text{MAX } F = -5X + 8Y$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \; & 5X + 2Y = 3 \\ & X - 4Y + Z \leq -4 \\ & 2X + 3Y \geq 6 \\ & X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

Transformado a la forma general queda:

$$\text{Min } F^{*} = 5X - 8Y$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \; & 5X + 2Y = 3 \\ & -X + 4Y - Z - W = 4 \\ & 2X + 3Y - H = 6 \\ & \text{con } X, Y, Z, W \text{ y } H \geq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo A.1.7: Considere el sig. PPL

$$\text{Max } F = -2X + 6Y$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \; & 3X - 4Y = -7 \\ & 4X + 5Y \leq 9 \\ & -3X - Y \geq 2 \\ & \text{con } X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

Transformado a la forma general queda:

$$\text{Min } F^{*} = 2X - 6Y$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \; & -3X + 4Y = 7 \\ & 4X + 5Y + Z = 9 \\ & -3X - Y - W = 2 \\ & \text{con } X, Y, Z \text{ y } W \geq 0 \end{aligned}$$

Observación : Al agregar variables de holgura llevamos nuestro problema a espacios de dimensión mayor.

A.2 CONVEXIDAD Y PUNTOS EXTREMOS

En esta sección presentaremos un resumen de la teoria de convexidad utilizada para justificar el algoritmo del Método Simplex. Uno de los aspectos más importantes de dicha teoria es que la región factible K es un conjunto convexo. Se definen los puntos extremos, los cuales vienen a ser los vértices del conjunto convexo K y que a su vez están intimamente relacionados con las posibles soluciones de los PPL.

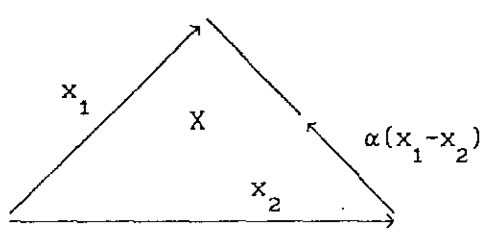
Definición A.2.1: Sea $A \subseteq R^n$, se dice que A es convexo sí para dos vectores cualesquiera x_1 y x_2 que pertenecen a A, el vector:

$$X = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$$

también pertenece a A para $\alpha \in (0,1)$.

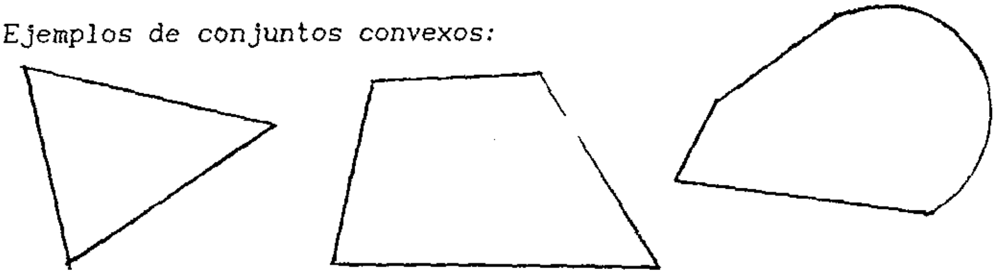
En otras palabras en un conjunto convexo el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera del conjunto pertenece también al mismo conjunto.

En el siguiente dibujo veremos que $X = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ está en el segmento que une a x_1 y x_2.



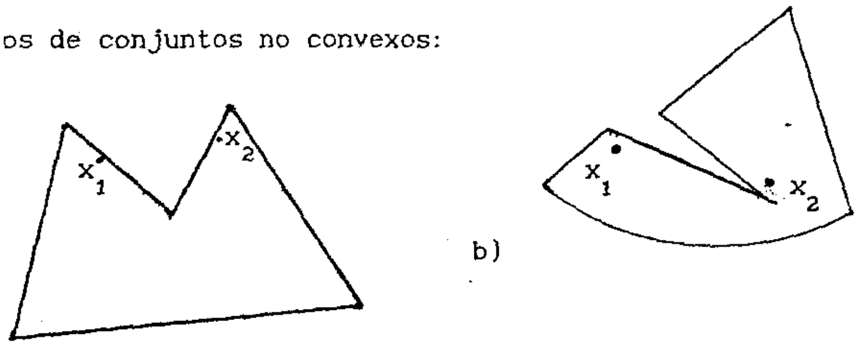
$$\begin{aligned} X &= x_2 + \alpha(x_1 - x_2) \\ &= x_2 + \alpha x_1 - \alpha x_2 \\ &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2. \end{aligned}$$

Ejemplos de conjuntos convexos:



a) b) c)

Ejemplos de conjuntos no convexos:



a) b)

Proposición A.2.2: La intersección finita de conjuntos convexos es también un cojunto convexo.

Para su demostración, ver la referencia [8]

Observación : Los siguientes conjuntos son convexos.

$$C = \left\{ x \in R^n \mid Ax = b \right\}$$

$$C = \left\{ x \in R^n \mid Ax \leq b \right\}$$

$$C = \left\{ x \in R^n \mid Ax \geq b \right\}$$

$$C = \left\{ x \in R^n \mid Ax < b \right\}$$

$$C = \left\{ x \in R^n \mid Ax > b \right\}.$$

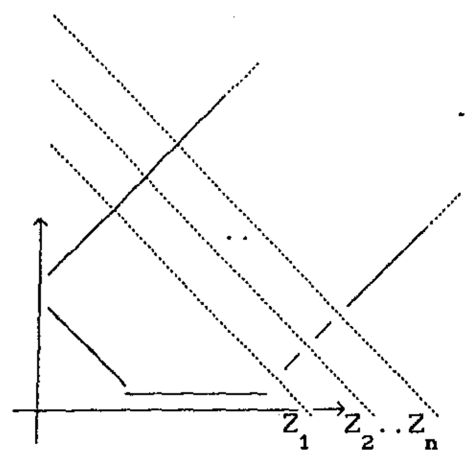
Definición A.2.3: Consideremos el PPL en su forma **general**.

i) Al conjunto $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \right\}$ se le llama región factible.

Observaciónes: a) Como conclución de lo anterior la región factible (K) es un conjunto convexo.

b) Sí la región factible es no acotada el PPL puede o no tener óptimo.

El siguiente dibujo muestra una región factible no acotada de un PPL.



Como la función objetivo es lineal tenemos que:

$$Z_1 \leq Z_2 \leq \ldots \leq Z_n \text{ o bien } Z_1 \geq Z_2 \geq \ldots \geq Z_n$$

según sea el caso el PPL puede o no tener óptimo.

Proposición A.2.4: Si la región factible es no vacia y acotada entonces el PPL tiene solución.

Para la demostración de esta proposición consultar la referencia [6]

Ahora se verán los conceptos de puntos extremos y combinaciones convexas, cuya relación es fundamental para la teoria de la Programación Lineal.

Definición A.2.5: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, diremos que X es un punto extremo o vértice de A si no existen X_1, $X_2 \in A$ y $t \in (0,1)$ tales que $X = tX_1 + (1-t)X_2$.

Observación : Lo puntos extremos siempre están en la frontera de los conjuntos convexos, ya que si un punto esta en el interior del conjunto convexo se puede expresar como combinación lineal de otros dos puntos del conjunto.

Definición A.2.6: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathbb{R}^n$ diremos que

$$X = h_1X_1 + h_2X_2 + \ldots + h_mX_m$$

$$\text{con } h_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \text{ y } h_1 + h_2 + \ldots + h_m = 1$$

es una combinación convexa de $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

De la teoria de conjuntos convexos se tiene el siguiente resultado: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $x \in A$, entonces x se puede expresar como una combinación convexa de los puntos extremos de A. Si se desea su demostración ver referencias [5],[8].

A.3 RESULTADOS FUNDAMENTALES DE LA PROGRAMACION LINEAL

En esta sección se presentan los conceptos necesarios para entender el teorema fundamental de la programación lineal así como el teorema que establece la equivalencia entre una solución factible básica y los puntos extremos, por último se ve que el óptimo de un PPL se encuentra en los puntos extremos de la región factible K.

Para demostrar los resultados requerimos de algunas definiciones previas.

Definición A.3.1: Cosideremos el PPL en su forma **general.**

i) $X \in K$ es una solución factible básica si contiene a lo más m componentes positivas

ii) $X \in K$ es una solución factible óptima si minimiza a la función objetivo.

iii) $X \in K$ es una solución básica no-degenerada si tiene exáctamente **m** componentes positivas.

Definición A.3.2:

a) Sean $A^1, A^2, \ldots, A^n$ n vectores en R^m, se dice que son linealmente independientes (LI) si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^i = 0 \qquad \text{implica que } \alpha_i = 0 \text{ para } i=1,2,..,n$$

Si existe al menos un α_i distinto de cero se dice que son Linealmente Dependientes (LD).

b) El rango de una matriz es el número máximo de renglones o columnas LI.

Los siguientes resultados se necesitarán para la demostración del teorema fundamental de la programación lineal. Dichos resultados se pueden consultar en [6].

Sean A^i $i=1,2,...m$ vectores columna en $\mathbb{R}^m$

a) si $n > m$ entonces $A^1, A^2, ..., A^n$ son (LD) donde $A^i \in R^m$

b) El sistema $\mathbf{A}X = b$ puede tener un número infinito de soluciones solo si A^1, $A^2, ..., A^n$ son LD, donde:

$$\mathbf{A} = \left[A^1 \ A^2 ... \ A^n \right]$$

c) Si el sistema $\mathbf{A}X = b$ tiene solución y $A^1, A^2, ... A^n$ son LD entonces tiene un número infinito de soluciones.

e) Si $\mathbf{A} \in M_{mxn}$, existen a lo sumo C_m^n soluciones básicas factibles no degeneradas.

El siguiente teorema es de suma importancia dentro de la teoria de P.L. ya que establece la relación que guarda una solución óptima con una solución básica óptima y a travéz de su demostración se aprende a construir las soluiones factibles básicas.

Teorema A.3.3 (Fundamental de la Programación Lineal)

i) Si existe una solución factible, entonces existe una solución básica factible.

ii) Si existe una solución factible óptima entonces existe una solución básica factible óptima.

Demostración: Sea $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ una solución factible y $A^1, A^2, ... A^n$. Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ de mxn del sistema $\mathbf{A}X = b$, entonces

$$X_1 A^1 + X_2 A^2 + ... + X_n A^n = b$$

lo que hay que probar es que existe una solución factible con a lo mas m componentes distintas de cero. Sin perdida de generalidad supongamos que las primeras k componenetes de X son distintas de cero, entonces

$$X_1A^1 + X_2A^2+\ldots+ X_kA^k = b \tag{1}$$

y se dan dos casos:

primer caso.- Los k vectores columna son L.I.. Puesto que el rango de **A** es m

$$k \le r(\mathbf{A}) = m$$

y se tiene que $X = (x_1,x_2,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ es una solución básica factible.

Segundo caso.- Cuando los k vectores son L.D.. Entonces existen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ no todos cero tales que

$$\alpha_1A^1+ \alpha_2A^2+\ldots+ \alpha_kA^k = 0 \tag{2}$$

donde al menos una de las α_i es positiva. Multiplicando (2) por un escalar t y restando de (1) se obtiene:

$$(X_1-t\alpha_1)A^1 + (X_2-t\alpha_2)A^2+\ldots+ (X_k-t\alpha_k)A^k = b \tag{3}$$

Ahora tenemos que $X^* = (X_1-t\alpha_1,\ X_2-t\alpha_2 +,\ldots,+ X_k-t\alpha_k,0,\ldots,0)$

Si $t > 0$ para los α_i negativos no hay problema pues $X_i - t\alpha_i \ge 0$ pero para los $\alpha_i \ge 0$ necesitamos que:

$$X_i - t\alpha_i \ge 0$$

o bien $\dfrac{X_i}{\alpha_i} \geq t$. Si tomamos $t = \min\left\{ \dfrac{X_i}{\alpha_i} \;/\; \alpha_i > 0 \right\}$

entonces tenemos que X^* es una solución factible y se tendrá que

$$X_i - t\alpha_i = 0$$

para al menos un índice i y hay a lo más ahora k-1 variables positivas ya que por lo menos se hizo un cero. Repitiendo este procedimiento para eliminar variables positivas, hasta tener k' variables positivas donde las columnas correspondientes de la matriz **A** sean L.I. y se tendrá que $k' \leq m$, por lo cual será una SBF.

Sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una solución factible óptima y que k variables son positivas al igual que en a), si las k columnas correspondientes son L.I. entonces se tendrá que $k \leq m$ y la solución factible óptima es la solución básica. Consideremos el caso en que $A^1, A^2, \ldots, A^k$ son L.D. entonces como en a) podemos encontrar k' columnas L.I..

Sea $X^* = (X_1 - t\alpha_1,\ X_2 - t\alpha_2 +, \ldots, + X_k - t\alpha_k, 0, \ldots, 0)$ la solución factible con estas caracteristicas, entonces también es factible básica y lo que hay que ver es que también es óptima.

Probaremos por contradicción. Para t suficientemente pequeño, X^* es una solución factible para valores positivos o negativos de t. El valor de la función objetivo es:

$$C^tX^* = (C_1X_1 - C_1t\alpha_1,\ C_2X_2 - C_2t\alpha_2, \ldots,\ C_kX_k - C_kt\alpha_k, 0, \ldots, 0)$$

Supongamos que $C_i\alpha_i \neq 0$ para algun i , t de magnitud pequeña y singo apropiado podría llevar a ser C^tX^* más pequeño que C^tX lo cual contradice al hecho de que C^tX es solución óptima. Por lo tanto $C_it\alpha_i = 0$ y C^tX^* es solución óptima.

Observación : Sean X_1 y X_2 óptimos con $X_1 \neq X_2$ entonces cualquier combinación convexa de X_1 y X_2 es óptima.

Conclución: Sí un PPL tiene óptimo, entonces ~~existe~~ un vertice donde se alcanza ese óptimo.

El siguiente teorema enuncia la correspondencia entre las soluciones básicas factibles y puntos extremos; es decir, que son equivalentes.

èêàêèêñçùäá

Teorema A.3.4: Sea la región factible

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

X_0 es un punto extremo de esta región factible, si y solo si X_0 es una solución básica factible.

Demostración:

a) Si X_0 es un punto extremo (vertice) entonces es una solución básica factible.

Sin perdida de generalidad supongamos que X_0 es de la forma: $X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ con $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, p$. Para probar que X_0 es una solución básica factible, basta demostrar que el conjunto de vectores

$$\left\{A^1\ A^2, \ldots, A^p\right\} \qquad (4)$$

es Linealmente Independiente.

Supongamos que (4) es LD, es decir que exiten escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ no todos ceros tales que:

$$\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 +, \ldots, + \lambda_p A^p = 0$$

consideremos al vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0)$ y tomando a

$$\delta = \min \left\{ \frac{x_i}{|y_i|} \ / \ y_i \neq 0 \right\}$$

Asi los vectores $X_0 + \delta\lambda$ y $X_0 - \delta\lambda$ son elementos diferentes que pertenecen a $\mathbb{K}$ tales que:

$$X_0 = \left[(X_0 + \delta\lambda) + (X_0 - \delta\lambda)\right]/2$$

lo cual significa que X_0 no es un punto extremo, contradiciendo asi a la hipótesis. Entonces (4) son LI.

b) Si X_0 es una SBF entonces X_0 es un punto extremo de $\mathbb{K}$.

Sea $X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ con $p \leq m$ entonces

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_p A^p = b$$

donde (4) son LI. Supongamos que X_0 no es un punto extremo de $\mathbb{K}$ es decir que exiten Y y Z elementos de $\mathbb{K}$ tales que:

$$X_0 = \alpha Y + (1-\alpha)Z \text{ con } Y \neq Z \text{ y } \alpha \in (0,1)$$

Esta relación y las condiciones de α nos aseguran que las últimas n-p componentes de Y y Z son nulos; con lo cual se tiene que:

$$y_1 A^1 + y_2 A^2 + \ldots + y_m A^m = b$$
$$z_1 A^1 + z_2 A^2 + \ldots + z_m A^m = b$$

restando estas dos ecuaciones y tomando en cuenta que (4) es LI se obtiene que: $X_0 = Y = Z$, por lo tanto X_0 es un punto extremo de $\mathbb{K}$.

A.4 RESULTADOS DE SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

En la presente sección presentaremos los resultados básicos de la solución de sistemas de ecuaciones lineales ya que dado un PPL en su forma general, para resolverlo, en el fondo lo que se hace es ir resolviendo sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Al cual denotamos por $\mathbf{A}X = b$ donde $\mathbf{A} \in M_{mxn}$, $X \in M_{nx1}$ y $b \in M_{mx1}$

$$m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \\ \mathbb{A} \\ \\ \end{bmatrix}}^{n}\right. \; n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \\ \mathbb{X} \\ \\ \end{bmatrix}}^{1}\right. = m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \\ b \\ \\ \end{bmatrix}}^{1}\right.$$

También por:

$$X_1A^1 + X_2A^2 + \ldots + X_nA^n = b$$

donde A^i es la i-ésima columna de **A**, $i=1,2,\ldots,n$.

Observación: Al plantear los PPL en forma general, casi siempre el sistema resultante tiene mas variables que restricciones.

METODO DEL PIVOTAJE PARA SOLUCION DE UN S.E.L.

Un S.E.L. de la forma:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \qquad (4)$$

se le llama sistema canónico y lo podemos expresar como: $\mathbf{A}X = b$; donde:

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es la matriz de restricciones

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$$

Supongamos que $m < n$ y además que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} = 1$ para $i = 1,2,\ldots m$.

Notación.- La matriz asociada al sistema (4) se le llama <u>matriz canónica</u> y a las variables $X_1, X_2, \ldots, X_m$ se les llama <u>variables básicas</u>.

Una solución básica para este sistema seria:

$$X = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0).$$

i.e. $X_1 = b_1$, $X_2 = b_2, \ldots, X_m = b_m$, $X_{m+1} = 0, \ldots, X_n = 0$.

Ahora veremos el procedimiento para transformar una variable básica en una no-básica y viceversa, así como determinar un nuevo sistema canónico con una solución básica de este nuevo sistema.

Si se desea remplazar la variable básica X_p con $1 \leq p \leq m$ por la variable no-básica X_j con $m+1 \leq j \leq n$ en el sistema de ecuaciones lineales (4) esto es posible hacerlo solo si $a_{pj} \neq 0$ usando el método de eliminación de Gauss-Jordan, con operaciones elementales se logran los siguientes cambios, es decir se obtiene un nuevo sistema canónico con los siguientes coeficientes de las variables X_i:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{jq}}{a_{pq}} (a_{pj}) \quad \text{si} \quad i \neq p$$

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}}.$$

a estas ecuaciones se les llama ecuaciones de pivoteo, a_{pq} es llamado elemento pivote, a la columna que contiene al elemento pivote se le llama columna pivote.

Ejemplo A.4.1: Consideremos el siguiente sistema se ecuaciones canónico:

$$
\begin{aligned}
X_1 \qquad\quad + X_4 + X_5 - X_6 &= 5 \\
X_2 \quad + 2X_4 - 3X_5 + X_6 &= 3 \\
X_3 - X_4 + 2X_5 - X_6 &= -1
\end{aligned}
$$

La matriz aumentada es:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1
\end{bmatrix}
$$

Sea X_4 la variable pivote y $a_{14} = 1$ el elemento pivote al efectuar el primer paso el primer renglón queda igual, luego multiplicamos el primer renglón por (-2) y lo sumamos al segundo renglón, multiplicamos al primer renglón por (1) y lo sumamos al tercer renglón, así obtenemos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -7 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 4
\end{bmatrix}
$$

Cambiamos la variables básica X_1 por la variables no básica X_4 y ahora la solución básica de este nuevo sistema es (0,-7,4,5,0,0) que también es solución del sistema anterior.

Tomamos ahora a X_5 como la variable pivote y $a_{25} = -5$ como el elemento pivote. Dividimos el segundo renglón por (-5) para obtener un 1 en el lugar de a_{25}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2/5 & -1/5 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & 7/5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por (-1) al segundo renglón y lo sumamos al primero, multiplicamos por (-3) al segundo renglón y lo sumamos al tercero obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 18/5 \\ 2/5 & -1/5 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & 7/5 \\ -1/5 & 3/5 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Ahora en este nuevo sistema tomamos a X_6 como variable pivote y $a_{36} = -1/5$ como el elememto pivote. Dividimos al tercer renglón por (-1/5) (es decir multipliquemoslo por -5).

$$\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 18/5 \\ 2/5 & -1/5 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & 7/5 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos al tercer renglón por 3/5 y lo sumamos al segundo, multiplicamos al tercer renglón por 2/5 y lo sumamos al primero.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aqui las variables básicas son X_4, X_5, X_6 y las no-básicas X_1, X_2, X_3. La solución de este nuevo sistema es $X = (0,0,0,4,2,1)$.

Observación :Con el método del pivotaje se logro transformar una solución básica $X = (5,3,-1,0,0,0)$ del sistema original en una solución básica $X' = (0,0,0,4,2,1)$ de un nuevo sistema canónico; y por supuesto X' es una solución no-básica del sistema original.

A.5 METODO SIMPLEX

Ahora con todo lo anterior podemos mostrar el método simplex, su justificación y sus resultados importantes.

Por resultados de la Programación Lineal sabemos que X es un punto extremo si y solo si es una solución básica factible, entonces el método Simplex, en lugar de probar cada punto extremo de la región factible, empieza con un punto extremo cualquiera y mediante algunas operaciones elementales pasa a otros puntos extremos garantizando paso a paso que siempre decrecen o siempre crecen los valores de la función objetivo según sea el caso, es decir en dirección del óptimo. Para mostrar el algoritmo del método simplex empezaremos dando un ejemplo introductorio.

Ejemplo A.5.1: Consideremos el sig. problema de PL.

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
\text{Sujeto a} \quad & X_1 + 3X_2 \le 12 \\
& 2X_1 + X_2 \le 8 \\
& 3X_1 + 4X_2 \le 20 \\
& \text{con } X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Lo expresamos en la forma general:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z = -2X_1 - 3X_2 \\ \text{Sujeto a} \quad & X_1 + 3X_2 + X_3 = 12 \\ & 2X_1 + X_2 + X_4 = 8 \\ & 3X_1 + 4X_2 + X_5 = 20 \\ \text{con } & X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Esto equivale a resolver el sistema

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 + X_3 &= 12 \\ 2X_1 + X_2 + X_4 &= 8 \\ 3X_1 + X_2 + X_5 &= 20 \end{aligned}$$

con Z lo menor posible y las variables no negativas

Lo anterior lo expresmos por la siguiente " tabla del Método Simplex ":

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Z	b
A^3	1	3	1	0	0	0	12
A^4	2	1	0	1	0	0	8
A^5	3	4	0	0	1	0	20
Z	2	3	0	0	0	1	0

Donde los A^i que aparecen debajo de B son los vectores de la base, de aqui que si $X_1 = 0$ y $X_2 = 0$ se obtiene la solución básica factible (0,0,12,8,20), entonces deseamos pasar a otra solución básica factible (otra nueva base) asegurando que Z decrezca lo mas posible con la condición de no evaluar en todas las soluciones básicas factibles ya que se puede llegar a tener un número muy grande de estas. Inicialmente tenemos que:

$$Z = -2(0) - 3(0) - 0(12) - 0(8) - 0(20) = 0$$

Como deseamos otra solución básica necesitamos que X_1 o X_2 entren a la base y salga una de las siguientes variables X_3, X_4 o X_5. La variable que promete reducir mas a Z es la variable X_2 ya que tiene el coeficiente más negativo (más positivo en la tabla).

Ahora para elegir al elemento pivote y saber cual vector sale de la base, el Método Simplex escoje el subíndice donde se alcanza el mínimo de los $\frac{b_i}{a_{ij}}$ con $a_{ij} \geq 0$ para asegurar que la solución que se obtiene es factible. Esto es porque de no tomar el mínimo alguna de las variables seria negativa, como se verá más adelante en la justificación de estos pasos.

Entonces en nuestro problema tenemos que:

$$\min \left\{ \frac{12}{3}, \frac{8}{1}, \frac{20}{4} \right\} = \frac{12}{3} = 4$$

Asi que el valor máximo que puede tomar X_2 sin salirse de la región factible es 4 y el elemento pivote es 3.

Ahora hacemos 1 en el lugar del elemento pivote arriba y abajo de él; obteniendo la siguiente tabla del Simplex.

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Z	b
A^2	1/3	1	1/3	0	0	0	4
A^4	5/3	0	-1/3	1	0	0	4
A^5	5/3	0	-4/3	0	1	0	4
Z	1	0	-1	0	0	1	-12

Notese que A^3 es el vector que sale de la base y A^4 es el vector que entra a la base.

Con $X_1 = 0$ y $X_3 = 0$ se obtiene la solución factible (0,4,0,4,4) y Z toma el valor de -12. Repetimos el procedimiento para encontrara otra solución básica factible la cual decrezca aún mas a la función objetivo.

Ahora la variable pivote es X_1 ya que si tomamos X_2 esta aumentará a la función objetivo Z, es decir X_2 ya no se puede mover. Lo mas que puede valer X_1 si salirse de K es:

$$\min \left\{ \frac{4}{1/3} , \frac{4}{5/3} , \frac{4}{5/3} \right\} = \frac{4}{5/3} = 12/5$$

el elemento pivote es 5/3, como hay dos elegimos cualquiera digamos el que esta en el lugar a_{21}, Ahora haciendo 1 en en el elemento pivote y ceros arriba y abajo obtenemos:

B	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Z	b
A^2	0	1	2/5	-1/5	0	0	16/5
A^1	1	0	-1/5	3/5	0	0	12/5
A^5	0	0	-1	-1	1	0	0
Z	0	0	-4/5	-3/5	0	1	-72/5

Como los coeficientes de la función objetivo son ahora no negativos esto es:

$$Z = -72/5 + 0(x_1) + 0(x_2) + 4/5(0) + 3/5(0) + 0(x_5)$$

y las variables son no negativas, entonces de entrar x_3 o x_4 a la base incrementarian el valor de Z. Por lo tanto se está en el óptimo.

Por lo tanto la solución básica factible que minimiza a Z es:

$$\left(\frac{12}{5} , \frac{16}{5} , 0 , 0 , 0 \right) \text{ con el valor de } Z = -\frac{72}{5} .$$

A continuación presentamos los pasos del método Simplex

PASOS ALGORITMO DEL METODO SIMPLEX

Supongamos que para el PPL existe una base de vectores canónicos i.e. una solución básica factible con la cual comenzar a operar.

1.-Construir la tabla de la matriz aumentada.

2.-Si todos los C_j (componentes del vector de costos) son negativos ya se está en el óptimo si no ir al paso 3.

3.-Determinar la columna pivote que es la que tiene la entrada más positiva en el renglón de los C_j

4.-Determinar el elemento pivote, que es el elemento de la columna pivote que hace menor la razón entre los elementos del vector b y los de la columna pivote.

5.-Con el método de Gauss-Jordan convertir el elemento pivote a 1 y hacer ceros arriba y abajo de él.

6.-Volver al paso 2.

Observaciónes: 1) Si en el paso 3 al elegir los C_j hay dos con el mismo valor y que son los mas positivos se escoge el primero que aparezca.

2) Si en el paso 4 hay 2 relaciones mas pequeñas iguales se escoge la primera de ellas.

3) Si en la columna pivote no existen valores positivos, el problema tiene solución no acotada.

4) De no tener una base con la cual comenzar a operar se implementa " La primera fase del método Simplex ". La cual consiste en completar una base agregando variables artificiales, introducir una nueva función objetivo $Z^{*} = \sum_{i=1}^{n} X_i$, se realiza lo que se llama "iniciación" que consiste en tener ceros en donde están los costos correspondientes a la variables artificiales (esto es para obtener al conjunto de vectores canónicos) y resolver el problema de min Z^{*} sujeto a las mismas restricciones, con el fin de que las variables agregadas salgan de la base. En donde la función objetivo original se maneja como si fuera una restricción más. Una vez resuelto el problema se obtiene la base deseada, nos olvidamos de Z^{*} y de las variables artificiales.

A.6 JUSTIFICACIÓN DE LOS PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX.

Considere un PPL en su forma general, agregadas m variables de holgura se obtiene la tabla:

A^1	A^2	$\cdots$	A^j	$\cdots$	A^n	Z	b
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	0	b_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}	0	b_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	0	b_m
$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_j$	$\cdots$	$-c_n$	1	W

Supongamos que A^j es la columna pivote y a_{ij} es el elemento pivote, con $a_{ij} \neq 0$, haciendo 1 en a_{ij} y ceros arriba y abajo de él se obtiene:

A^1	A^2	$\cdots$	A^j	$\cdots$	A^n	Z	b
a^*_{11}	a^*_{12}	$\cdots$	0	$\cdots$	a^*_{1n}	0	$b_1 - a_{1j}(b_i/a_{ij})$
a^*_{12}	a^*_{22}	$\cdots$	0	$\cdots$	a^*_{2n}	0	$b_2 - a_{2j}(b_i/a_{ij})$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a^*_{i1}	a^*_{i2}	$\cdots$	1	$\cdots$	a^*_{in}	0	b_i/a_{ij}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a^*_{m1}	a^*_{m2}	$\cdots$	0	$\cdots$	a^*_{mn}	0	$b_m - a_{mj}(b_i/a_{ij})$
c^*_1	c^*_2	$\cdots$	0	$\cdots$	c^*_n	1	$W + c_j(b_i/a_{ij})$

La variable que entra a la base es X_j y debe ser igual a b_i/a_{ij} y como $b_i \geq 0$ entonces debe cumplirse que $a_{ij} > 0$, esto es que el elemento pivote debe ser positivo para que la nueva tabla de una nueva solución factible.

Para que ésto suceda se requiere que:

$$b_k - a_{kj}\ (b_i/a_{ij}) \geq 0 \text{ para } k = 1,2,\ldots,m$$

Si alguna a_{kj} es negativa, no hay problema ya que $b_k \geq 0$, $b_i \geq 0$ y $a_{ij} \geq 0$. Si alguna a_{kj} es positiva se requiere que:

$$b_k - a_{kj}\ (b_i/a_{ij}) \geq 0$$

lo cual es equivalente a decir

$$\frac{b_k}{a_{kj}} \geq \frac{b_i}{a_{ij}}\ .$$

Entonces se debe tomar el renglón pivote que haga mínima la relación b_i/a_{ij}.

Asi el nuevo valor de la función objetivo es:

$$W^* = W + c_j\ (b_i/a_{ij})$$

Deseamos que la función objetivo decrezca lo más posible. Como $b_i/a_{ij} \geq 0$ se escoge el valor de la entrada $-c_j$ mas positiva, entonces ésto nos garantiza que:

$$W^* \leq W$$

es decir la función objetivo siempre decrece.

Si ninguna de las entradas de la función objetivo es positiva, con excepción de la entrada del extremo derecho (la que corresponde a Z) se esta en el óptimo.

A.7 CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

Consideremos a un PPL en su forma general:

$$\text{Minimizar} \quad Z = C^t X$$
$$\text{Sujeto a} \quad \mathbf{A}\, X = b$$
$$\text{con} \quad X \geq 0 \text{ y } b \geq 0$$

Donde $\mathbf{A}$ es de mxn, $m \leq n$, C y X son vectores de nx1 y b de mx1.

Sea A^i la i-esima columna de $\mathbf{A}$, entonces lo anterior se puede escribir:

$$\text{Minimizar } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$
$$\text{Sujeto a} \quad A^1X_1 + A^2X_2 + \dots + A^nX_n = b \qquad **$$
$$\text{con} \qquad X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots , n$$

Supongamos que $\mathbf{B} = \left[B^1, B^2, \dots , B^m \right]$ forman una base para $\mathbb{R}^m$, como $m \leq n$ entonces $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$; si tomamos cualquier vector $A^j \notin \mathbf{B}$, este se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de $\mathbf{B}$, i.e.:

$$A^j = Y_{1j}B^1 + Y_{2j}B^2 + \dots + Y_{mj}B^m$$

$$A^j = \sum_{i=1}^{m} Y_{ij}B^i$$

Sustituyendo A^j en ** se tiene:

$$X_1(Y_{11}B^1+Y_{21}B^2+\ldots+Y_{m1}^m B^m)+X_2(Y_{12}B^1+Y_{22}B^2+\ldots+Y_{m2}B^m)$$

$$+\ldots+X_n(Y_{1n}B^1+Y_{2n}B^2+\ldots+Y_{mn}B^m)=$$

$$(X_1Y_{11}+X_2Y_{12}+\ldots+X_nY_{1n})B^1+(X_1Y_{21}+X_2Y_{22}+\ldots+X_nY_{2n})B^2$$
$$+\ldots+(X_1Y_{m1}+X_1Y_{m2}+\ldots+X_nY_{mn})B^m=b$$

entonces

$$X_{B^1}=X_1Y_{11}+\ldots+X_nY_{1n}$$
$$X_{B^2}=X_1Y_{21}+\ldots+X_nY_{2n}$$
$$\vdots$$
$$X_{B^m}=X_1Y_{m1}+\ldots+X_nY_{mn}$$

Sea $Y^j=\begin{bmatrix}y_{1j}\\ \vdots\\ y_{mj}\end{bmatrix}=\left[\ A^j\ \right]_B$ entonces $A^j=\mathbf{B}\,Y^j$ y como $\mathbf{B}$ es invertible

$$Y^j=\mathbf{B}^{-1}A^j$$

Es decir Y^j queda en lugar de A^j cuando la matriz $\mathbf{B}$ se hace unitaria.

La solución básica asociada a la base **B** es:

$$X_B=\mathbf{B}^{-1}b.$$

Sea $C_B=(C_{B^1},C_{B^2},\ldots,C_{B^m})$ donde C_{B^i} es el costo de X_{B^i}
El valor de la función objetivo para esta base será:

$$Z=C_BX_B=C_B\mathbf{B}^{-1}b$$

Los coeficientes de la función objetivo en el lugar j-ésimo, al hacer unitaria la matriz **B**, queda de la siguiente forma:

$$-C_j + C_B^1 Y_{1j} + C_B^2 Y_{2j} + \ldots + C_B^m Y_{mj}$$

definimos $Z_j = C_B^1 Y_{1j} + C_B^2 Y_{2j} + \ldots + C_B^m Y_{mj}$ de aqui que:

$$Z_j = C_B Y^j$$

La tabla final del Método Simplex queda:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & A^1 & A^2 & \ldots & A^j & I & B^{-1}b \\
\hline
\begin{matrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^m \end{matrix} & & & & \begin{bmatrix} \\ Y^j \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0..0 \\ 0 & 1 & 0..0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0..1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\
\hline
 & Z_1 - C_1 & & \ldots & Z_j - C_j & 0\ 0\ \ldots 0 &
\end{array}
$$

Si A^j es la columna i de **B** entonces $C_j = C_B^i$ y al hacer unitaria a **B**, tenemos que $Y^j = e_j$, lo cual implica que $Z_j = C_B e_j = C_B^i$, luego $Z_j - C_j = C_B^i - C_B^i = 0$. esto es los coeficientes de la función objetivo debajo de la base **B** son ceros.

Por otra parte, como $Z_j = C_B Y^j = C_B \mathbf{B}^{-1} A^j$, solo hay que conocer $Y = C_B \mathbf{B}^{-1}$ para calcular todos los Z_j.

Teorema A.7.1: Si $Z_j - C_j < 0$ para las $A^j \notin \mathbf{B}$ entonces X_B es la solución óptima al PPL. en su forma general.

Teorema A.7.2: Si existe j tal que $Z_j - C_j > 0$ y $Y_{ij} \leq 0 \ \forall\ i$, con al menos uno distinto de cero, entonces la función a minimizar es no acotada.

Para la demostración de estos teoremas consultar referencias [6] y [7].

A.8 PROPIEDADES IMPORTANTES PRIMAL-DUAL

En esta sección presentamos los resultados más importantes de la teoria de Dualidad; los cuales, dependiendo de las caracteristicas del problema, pueden ser usados para obtener mejores soluciones.

Definición :Dado un PPL en su forma estándar

$$\text{Max } Z = C^t X$$
$$\text{s.a. } AX \le b$$
$$\text{con } X \ge 0.$$

Se plantea el problema

$$\text{Min } W = b^t Y$$
$$\text{s.a. } A^t Y \ge C$$
$$Y \ge 0.$$

Al primero se le llama problema Primal y al segundo problema Dual.

Observaciónes: a) El problema Primal tiene m restricciones y n variables, el problema Dual tiene m variables y n restricciones.

b) Los elementos del lado derecho del las restricciones en un problema son iguales a los coeficientes respectivos de la función objetivo en el otro.

Teorema: Si la restricción j-ésima del problema Primal, entonces la variable j-ésima del problema Dual es irrestricta en signo.

Teorema: Cualquier solución factible del problema Primal da un valor de la función objetivo del problema Primal menor o igual al valor que tirne la función objetivo del Dual en cualquier solución factible de ésta.

Teorema: Si existe una solución óptima del problema Primal, entonces existe una solución óptima del problema Dual y en ambas soluciones los valores de las respectivas funciones objetivo coinciden.

Para la demostración de estos teoremas ver [1].

PRINCIPALES PROPIEDADES PRIMAL-DUAL

Propioedad I .- En cualquier iteración de la solución Simplex del Primal o del Dual, la matriz formada por las columnas correspondietes a las variables no básicas puede ser utilizada para general los coeficientes de la función objetivo correspondietes a la primera iteración.

Propiedad II .- En cualquier iteración, al actualizar el lado izquierdo, los coeficientes del la función objetivo en el Primal están dados por la diferencia entre los lados izquierdos y derechos de las restricciones duales correspondientes.

Propiedad III .- En cualquier iteración del Primal o del Dual, los valores correspondietes de las variables básicas pueden obtenerse multiplicando la matriz definida en la propiedad I por el vector b original.

Propiedad IV.- En cualquier iteración del Primal o del Dual, los coeficientes de las restricciones bajo cualquier variable pueden obtenerse multiplicando la matriz definida en la propiedad I por el vector columna que abarca los elementos originales de los coeficientes de la restriccion bajo la variable designada.

APENDICE B

El programa contempla el método de dos fases, al pasar a la segunda fase elimina las variables artificiales. Es posible checar en su corrida, que ninguna variable artificial quede en la base, de ser asi; existen dos maneras de atacar este problema: Una es eliminando la respectiva restricción y otra es construyendo una acción que saque a la variable artificial de la base y introdusca una variable original.

En el programa y en las subrutinas se utilizan las siguientes variables :

A : Matriz de los coeficientes tecnológicos.
AA : Columna de A actualizada.
AC : Matriz de acciones, a éste se le conoce como ETA.
b : Vector b.
C : Matriz del los costos originales de las dos funciones objetivo.
CN : Vector de costos no básicos actualizados.
CS : Vector de las cotas superiores de las variables.
D : Vector de candidatos para Δ_k (D_1, D_2 y D_3).
IXB : Vector de indices de las variables básicas.
IXN : Vector de indices de las variables no-básicas.
IRP : Indice del renglón pivote.
IRP1: Indice del renglón donde se calcula D_1
IRP2: Indice del renglón donde se calcula D_2
JC : Indice de la variable que puede entrar a la base.
KF : Contador para la fase que se ests trabajando.
MAXPIV : Número máximo de pivotajes.
NCN : Número de columnas de la matriz N.
NNA : Número de variables artificiales.
NR : Número de restricciones.
NVO : Número de variables originales.
Y : Vector solución del sistema YB = C_B.

B.1 PROGRAMA PRINCIPAL

```
      PROGRAM SRFPIVAC
C     PROGRAMA 'METODO SIMPLEX REVISADO CON VARIABLES ACOTADAS'
C     DIMENSION A(NR,NTV),AA(NR),C(2,NTV),CN(NTV),AC(NR1,MAXPIV),CS(NTV)
C    *,D(3),IXB(NR),IXN(NCN),Y(NR),b(NR)
      DIMENSION A(11,30),AA(11),C(2,30),CN(30),AC(12,40),CS(30),D(3),IXB
     *(11),IXN(19),Y(11),b(11)
      NR=11
      NVO=19
      NVA=NR
      MAXPIV=40
      NTV=NVO+NVA
      NCN=NTV-NR
      WRITE(*,*)'NCN=',NCN
      NR1=NR+1
      CALL LEER(A,NR,NTV,b,C,CS,IXB,NVO,IXN,NCN)
      NAC=0
      KF=1
```

```
      Z=0
      DO 5 I=1,NR
   5        Z=Z+C(KF,IXB(I))*b(I)
   1  WRITE(*,*)'Z= ',Z
C--------------------------------------------------------------PASO A)
   10 DO 55 J=1,NR
   55 WRITE(*,*)'CIXB(',IXB(J),')=',C(KF,IXB(J))
      WRITE(*,*)'NAC',NAC
      CALL APLICC(AC,NR1,MAXPIV,NTV,NR,C,IXB,NAC,KF,Y)
      DO 555 I=1,NR
  555 WRITE(*,*)'Y(',I,')=',Y(I)
      WRITE(*,*)'PASO A TERMINADO'
   12 CONTINUE
C--------------------------------------------------------------PASO B)
      DO 40 J=1,NCN
         PP=0.
         DO 50 K=1,NR
   50            PP=PP+Y(K)*A(K,ABS(IXN(J)))
         CN(ABS(IXN(J)))=PP-C(KF,ABS(IXN(J)))
         WRITE(*,*)'CN(',ABS(IXN(J)),')=',CN(ABS(IXN(J)))
   40 CONTINUE
      WRITE(*,*)'PASO B TERMINADO'
C--------------------------------------------------------------PASO C)
      CALL MAYOR(CN,NTV,IXN,NCN,JCP,GRANDE,IND)
      IF(GRANDE.LE.0.000001) THEN
C           THEN
                IF(KF.EQ.1) THEN
                             WRITE(*,*)' PRIMERA FASE TERMINADA'
                             Z=0.
                             KF=2
                             DO 20 I=1,NR
   20                        Z=Z+C(KF,IXB(I))*b(I)
                             Z1=0.
                             I=0
                             DO 14 J=1,NCN
                                IF(ABS(IXN(J)).LE.NVO) THEN
                                                        I=I+1
                                                        IXN(I)=IXN(J)
                                                       ELSE
                                ENDIF
   14                        CONTINUE
                             NCN=NCN-NVA
                             DO 30 I=1,NCN
                             S=SG(IXN(I))
                  IF(S.EQ.-1.) Z1=Z1+C(KF,ABS(IXN(I)))*CS(ABS(IXN(I)))
   30                        CONTINUE
                             Z=Z+Z1
                             GOTO 1
                            ELSE
                             WRITE(*,*)'! YA SE ESTA EN EL OPTIMO !'
                             GOTO 500
                ENDIF
            ELSE
      ENDIF
```

```
      WRITE(*,*)'COLUMNA PIVOTE',JCP,'  GRANDE',GRANDE
      S=SG(JCP)
      IF(S.EQ.1.)  M=1
      IF(S.EQ.-1.) M=2
      WRITE(*,*)'PASO C TERMINADO'
C--------------------------------------------------------------PASO D)
      JC=ABS(JCP)
      CALL APLICA(JC,A,NAC,AC,AA,NR,NTV,NR1,MAXPIV)
      WRITE(*,*)'PASO D TERMINADO'
C--------------------------------------------------------------PASO E)
      CALL MENOR(A,NR,NTV,b,AA,JC,CS,IXB,D,IRP1,IRP2,CHICO,M)
      WRITE(*,*)'D1= ',D(1),'   D2= ',D(2),'   D3= ',D(3)
      CALL CDELTA(D,IRP1,IRP2,DELTA,IRP)
      WRITE(*,*)'PASO E TERMINADO'
C--------------------------------------------------------------PASO F)
      IF(M.EQ.1) THEN
                 DO 120 I=1,NR
 120                     b(I)=b(I)-DELTA*AA(I)
                 Z=Z-CN(JC)*DELTA
                         b(IRP)=DELTA
             ELSE
                 DO 130 I=1,NR
 130                     b(I)=b(I)+DELTA*AA(I)
                 Z=Z+CN(JC)*DELTA
                         b(IRP)=CS(JC)-DELTA
             ENDIF
      WRITE(*,*)'PASO F TERMINADO'
C--------------------------------------------------------------PASO G)
      IF(IRP.EQ.0) THEN
                 WRITE(*,*)'NO HAY CAMBIO DE BASE'
                 WRITE(*,*)'LA VARIABLE',JC,'  CAMBIA DE LA REGION'
                 IF(M.EQ.1) THEN
                            WRITE(*,*)' 1 A LA 2'
                            ELSE
                            WRITE(*,*)' 2 A LA 1'
                            ENDIF
                 IXN(IND)=-1*IXN(IND)
              ELSE
                WRITE(*,*)'ENTRA LA VARIABLE',JC
                WRITE(*,*)
                WRITE(*,*)'Y SALE LA VARIABLE',IXB(IRP)
                ITEMP=IXB(IRP)
                IXB(IRP)=JC
                IXN(IND)=ITEMP
                IF(IRP.EQ.IRP2) THEN
                                IXN(IND)=-1*IXN(IND)
                      WRITE(*,*)'Y SE VA A SU COTA SUPERIOR'
                                ELSE
                      WRITE(*,*)'Y SE VA A SU COTA INFERIOR'
                                ENDIF
                CALL CONST(AA,NR,IRP,JC,AC,NR1,MAXPIV,NAC)
              ENDIF
      CALL DAR(A,NR,NTV,b,AA,Z)
      WRITE(*,*)'PASO G TERMINADO'
      GOTO 10
```

```
500 WRITE(*,*)'SOLUCION'
    WRITE(*,*)'          BAS'
    DO 11 J=1,NR
 11           WRITE(*,*)'X[',IXB(J),']=',b(J)
    WRITE(*,*)'          NO-BAS'
    DO 17 J=1,NCN
    S=SG(IXN(J))
    ISS=S*IXN(J)
    IF(S.EQ.1) THEN
              WRITE(*,*)'X[',ISS,']=',0
              ELSE
              WRITE(*,*)'X[',ISS,']=',CS(ISS)
              ENDIF
 17 CONTINUE
    WRITE(*,*)' CON  Z = ',Z
    STOP
    END
```

B.2 SUBRUTINA LEER

Esta subrutina inicializa los valores (con cero) y proporcina los datos del problema. Con el fin ahorrar espacio, la mayoría de ellos están agrupados, debiendose presentar en forma vertical apartir de la la columa 8 o en su defecto utilizar la instrucción DATA.

```
      SUBROUTINE LEER(A,NR,NTV,b,C,CS,IXB,NVO,IXN,NCN)
      DIMENSION A(NR,NTV),IXB(NR),IXN(NCN),CS(NTV),C(2,NTV),b(NR)
      DO 999 I=1,NR
         DO 999 J=1,NTV
 999           A(I,J)=0.

      DO 888 I=1,2
         DO 888 J=1,NTV
 888           C(I,J)=0.

      DO 224 I=1,NR
224             IXB(I)=I+NCN

      DO 223 I=1,NCN
223         IXN(I)=I

A(1,1)=.7     A(2,1)=.054   A(3,1)=.011   A(4,1)=.065   A(5,1)=3.546
A(1,2)=.573   A(2,2)=.101   A(3,2)=.008   A(4,2)=.141   A(5,2)=3.765
A(1,3)=.476   A(2,3)=.015   A(3,3)=.047   A(4,3)=.394   A(5,3)=3.615
A(1,4)=.452   A(2,4)=.07    A(3,4)=.103   A(4,4)=.117   A(5,4)=2.906
A(1,5)=.49    A(2,5)=.437   A(3,5)=0      A(4,5)=.034   A(5,5)=6.029
A(1,6)=.114   A(2,6)=.02    A(3,6)=.028   A(4,6)=.819   A(5,6)=3.864
A(1,7)=.112   A(2,7)=.033   A(3,7)=.025   A(4,7)=.807   A(5,7)=3.973
A(1,8)=.082   A(2,8)=.005   A(3,8)=.004   A(4,8)=.903   A(5,8)=3.985
A(1,9)=.007   A(2,9)=.002   A(3,9)=.002   A(4,9)=.988   A(5,9)=3.998
```

```
A(6,1)=.0495  A(7,1)=.0288  A(8,1)=0.     A(9,1)=-.0207
A(6,2)=.0068  A(7,2)=.0123  A(8,2)=0.     A(9,2)=.0055
A(6,3)=.013   A(7,3)=.007   A(8,3)=0.     A(9,3)=-.006
A(6,4)=.0731  A(7,4)=.0156  A(8,4)=0.     A(9,4)=-.0575
A(6,5)=.0019  A(7,5)=.0076  A(8,5)=.0305  A(9,5)=.0057
A(6,6)=.001   A(7,6)=.0033  A(8,6)=0.     A(9,6)=.0023
A(6,7)=.0003  A(7,7)=.003   A(8,7)=0.     A(9,7)=.0027
A(6,8)=.0002  A(7,8)=.0012  A(8,8)=0.     A(9,8)=.0001
A(6,9)=0      A(7,9)=0      A(8,9)=0.     A(9,9)=0.

A(10,1)=.0005    A(11,1)=1.075
A(10,2)=-.0141   A(11,2)=2.
A(10,3)=.0011    A(11,3)=1.098
A(10,4)=.0465    A(11,4)=1.428
A(10,5)=-.011    A(11,5)=3.846
A(10,6)=-.0046   A(11,6)=1.123
A(10,7)=-.0048   A(11,7)=1.123
A(10,8)=-.0018   A(11,8)=1.123
A(10,9)=0.       A(11,9)=1.098

    DO 124 J=1,10
 124              A(J,J+9)=1.
    DO 121 J=1,11
 121              A(J,J+NVO)=1.

                                    CS(20)=.31        b(1)=.31
CS(1)=.4429      CS(10)=.03         CS(21)=.07        b(2)=.07
CS(2)=.4549      CS(11)=.06         CS(22)=.05        b(3)=.05
CS(3)=.6513      CS(12)=.04         CS(23)=.81618     b(4)=.81618
CS(4)=.4855      CS(13)=.61618      CS(24)=4.9805     b(5)=4.9805
CS(5)=.1602      CS(14)=2.1805      CS(25)=.04        b(6)=.04
CS(6)=.8079      CS(15)=.03         CS(26)=.025       b(7)=.025
CS(7)=.8079      CS(16)=.014        CS(27)=.006       b(8)=.006
CS(8)=.8079      CS(17)=.0047       CS(28)=0          b(9)=0
CS(9)=.8261      CS(18)=.029        CS(29)=0          b(10)=0
                 CS(19)=.0325       CS(30)=.9078      b(11)=.9078
    DO 444 J=1,NR
 444      C(1,J+NVO)=1.

    DO 127 J=1,9
 127     C(2,J)=1.

    CONTINUE
    RETURN
    END
```

B.3 SUBRUTINA APLICC

Esta subrutina aplica las acciones por la izquierda, que se hayan construido hasta el momento, al vector C_B, es decir; resuelve el sistema: $YB = C_B$.

```
      SUBROUTINE APLICC(AC,NR1,MAXPIV,NTV,NR,C,IXB,NAC,KF,Y).
      DIMENSION AC(NR1,MAXPIV),C(2,NTV),IXB(NR),Y(NR)
      DO 20 J=1,NR
   20 Y(J)=C(KF,IXB(J))
```

```
      DO 35 J=NAC,1,-1
      I=AC(1,J)
      H=Y(I)
      D=AC(I+1,J)
      F=H*D
      PP=0.
      DO 30 K=1,NR
      IF(K.NE.I) PP=PP+Y(K)*AC(K+1,J)
   30 CONTINUE
   35 Y(I)=F-D*PP
      RETURN
      END
```

B.4 SUBRUTINA MAYOR

El trabajo de esta subrutina es extraer el indice de la variable que corresponde a $M = \max\left\{M_1, M_2\right\}$, extrae M, asi como la región de donde se extrajo. Para saber en que región se encuentra cada variable, se toma en cuenta su signo, esto es; si la variable está en su cota superior el signo del indice es negativo, de cambiar región se le cambia de signo.

```
      SUBROUTINE MAYOR(CN,NTV,IXN,NCN,JCP,GRANDE,IND)
      DIMENSION CN(NTV),IXN(NCN)
      S=SG(IXN(1))
      GRANDE=CN(ABS(IXN(1)))*S
      JCP=IXN(1)
      IND=1
      DO 111 I=2,NCN
                S=SG(IXN(I))
               SS=CN(ABS(IXN(I)))*S
            IF(SS.GT.GRANDE) THEN
                                   GRANDE=SS
                                   JCP=IXN(I)
                                   IND=I
                              ELSE
            ENDIF
  111 CONTINUE
      S=SG(IXN(1))
      GRANDE=GRANDE*S
      RETURN
      END
```

B.5 SUBRUTINA APLICA

Esta subrutina actualiza la columna pivote, aplicandole las acciones por la derecha, es decir resuelve el sistema $BY = A^j$. El resultado se da en AA.

```
      SUBROUTINE APLICA(JC,A,NAC,AC,AA,NR,NTV,NR1,MAXPIV)
      DIMENSION A(NR,NTV),AC(NR1,MAXPIV),AA(NR)
              DO 70 I=1,NR
   70                 AA(I)=A(I,JC)
```

```
                  DO 80 J=1,NAC
                        I=AC(1,J)
                        C=AA(I)
                        D=AC(I+1,J)
                        F=D*C
                        AA(I)=F
                         DO 80 K=1,NR
                              IF(K.NE.I) AA(K)=AA(K)-F*AC(K+1,J)
80                       CONTINUE
   RETURN
   END
```

B.6 SUBRUTINA MENOR

Esta subrutina calcula D_1, D_2 y D_3 ,asi como en indice del renglón en donde se encontró, en caso de que alguna de ellas sea infinita se indicará asignandole el valor de -1. Consta de 4partes pricipales, en donde en cada una está un ciclo para detectar algun cociente positivo o negativo según sea el caso. No se incluye la opción de solución no acotada, por ser imposible que ésta se presente.

```
      SUBROUTINE MENOR(A,NR,NTV,b,AA,JC,CS,IXB,D,IRP1,IRP2,CHICO,M)
      DIMENSION A(NR,NTV),AA(NR),D(3),CS(NTV),IXB(NR),b(NR)
      IRP1=0
      IRP2=0
      D(1)=-1.0
      D(2)=-1.0
      D(3)=CS(JC)
      IF(M.EQ.1) THEN
                   DO 112 I=1,NR
                     IF(AA(I).GT.0) THEN
                                    CHICO=b(I)/AA(I)
                                    D(1)=CHICO
                                    IRP1=I
                                    ELSE
                     ENDIF
112                CONTINUE
                 DO 113 I=1,NR
                  IF(AA(I).GT.0) THEN
                                      C=b(I)/AA(I)
                                      IF(C.LT.D(1)) THEN
                                                        D(1)=C
                                                        IRP1=I
                                                     ELSE
                                      ENDIF
                                 ELSE
                  ENDIF
113              CONTINUE
                  DO 114 I=1,NR
                    IF(AA(I).LT.0) THEN
                                   CHICO=(CS(IXB(I))-b(I))/(-1*AA(I))
                                   D(2)=CHICO
                                   IRP2=I
                                   ELSE
```

```
          ENDIF
114       CONTINUE
        DO 115 I=1,NR
         IF(AA(I).LT.0) THEN
                    C=(CS(IXB(I))-b(I))/(-1*AA(I))
                      IF(C.LT.D(2)) THEN
                                D(2)=C
                                IRP2=I
                              ELSE
                      ENDIF
                  ELSE
         ENDIF
115     CONTINUE
      ELSE
         DO 116 I=1,NR
           IF(AA(I).LT.0) THEN
                  CHICO=b(I)/(-1*AA(I))
                  D(1)=CHICO
                  IRP1=I
                  ELSE
           ENDIF
116      CONTINUE
        DO 117 I=1,NR
         IF(AA(I).LT.0) THEN
                    C=b(I)/(-1*AA(I))
                    IF(C.LT.D(1)) THEN
                                D(1)=C
                                IRP1=I
                              ELSE
                    ENDIF
                  ELSE
         ENDIF
117     CONTINUE
         DO 118 I=1,NR
           IF(AA(I).GT.0) THEN
                  CHICO=(CS(IXB(I))-b(I))/AA(I)
                  D(2)=CHICO
                  IRP2=I
                  ELSE
           ENDIF
118      CONTINUE
        DO 119 I=1,NR
         IF(AA(I).GT.0) THEN
                    C=(CS(IXB(I))-b(I))/AA(I)
                      IF(C.LT.D(2)) THEN
                                D(2)=C
                                IRP2=I
                              ELSE
                      ENDIF
                  ELSE
         ENDIF
119     CONTINUE
      ENDIF
  RETURN
  END
```

B.7 SUBRUTINA CDELTA

Con esta subrutina se escoge el valor de Δ_k, se sabe de donde proviene (D_1, D_2 o D_3). Utiliza el hecho de que no se presenta el caso de que D_1y D_2 sean infinitos a la vez.


```
      SUBROUTINE CDELTA(D,IRP1,IRP2,DELTA,IRP)
      DIMENSION D(3)
      P=D(1)*D(2)
      IF(P.GE.0) THEN
C          THEN
               IF(D(1).LE.D(2)) THEN
C                  THEN
                      DELTA=D(1)
                      WRITE(*,*)'D1 < D2'
                      IRP=IRP1
                  ELSE
                      DELTA=D(2)
                      WRITE(*,*)'D2 < D1'
                      IRP=IRP2
              ENDIF
          ELSE
            IF(D(1).GE.0.) THEN
                            DELTA=D(1)
                            WRITE(*,*)'D1 < D2'
                            IRP=IRP1
                          ELSE
                            DELTA=D(2)
                            WRITE(*,*)'D2 < D1'
                            IRP=IRP2
           ENDIF
     ENDIF
     IF(DELTA.LT.D(3)) THEN
                       WRITE(*,*)'(D1 O D2)  <  D3'
                     ELSE
                       DELTA=D(3)
                       WRITE(*,*)'D3 <  (D1 O D2)'
                       IRP=0
                     ENDIF
     RETURN
     END
```

B.8 SUBRUTINA CONST

Esta subrutina construye la acción correspondiente, para lo cual necesita la columna pivote actualizada.

```
      SUBROUTINE CONST(AA,NR,IRP,JC,AC,NR1,MAXPIV,NAC)
      DIMENSION AA(NR),AC(NR1,MAXPIV)
      NAC=NAC+1
      AC(1,NAC)=IRP
      DO 300 I=1,NR
             IF(I.EQ.IRP) THEN
                        AC(I+1,NAC)=1/AA(IRP)
                     ELSE
                     AC(I+1,NAC)=AA(I)
                     ENDIF
  300 CONTINUE
      RETURN
      END
```

B.9 CORRIDA DEL PROGRAMA

Por último presentamos la corrida del programa anterior, con modificaciones en la información que proporciona en cada iteración. Se van indicando los índices de las variables que van entrando y saliendo de la base. En caso de no haber cambio de base, se indica a que región cambia la variable; si cambia a la región 1, esto indica que se va a su cota inferior y si cambia a la región 2, indica que se va a su cota superior.

```
ENTRA   5   SALE  28  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA   4   SALE  29  VA A SU COTA SUPERIOR
ENTRA  19   SALE  21  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  18   SALE  19  VA A SU COTA INFERIOR
NO HAY CAMBIO DE BASE LA VARIABLE  29 CAMBIA DE LA REGION  2 A LA 1
ENTRA   8   SALE  30  VA A SU COTA INFERIOR
NO HAY CAMBIO DE BASE LA VARIABLE  11 CAMBIA DE LA REGION  1 A LA 2
ENTRA  21   SALE  27  VA A SU COTA SUPERIOR
ENTRA  17   SALE   5  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  19   SALE  18  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  27   SALE  17  VA A SU COTA SUPERIOR
NO HAY CAMBIO DE BASE LA VARIABLE  10 CAMBIA DE LA REGION  1 A LA 2
NO HAY CAMBIO DE BASE LA VARIABLE  12 CAMBIA DE LA REGION  1 A LA 2
ENTRA  13   SALE  23  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA   1   SALE   4  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  18   SALE  21  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  11   SALE  20  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  14   SALE  24  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  15   SALE  25  VA A SU COTA INFERIOR
NO HAY CAMBIO DE BASE LA VARIABLE  16 CAMBIA DE LA REGION  1 A LA 2
ENTRA   4   SALE  19  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  10   SALE  26  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  16   SALE  10  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA   3   SALE  16  VA A SU COTA SUPERIOR
ENTRA  26   SALE  22  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA   5   SALE  14  VA A SU COTA SUPERIOR
ENTRA   6   SALE  26  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  19   SALE   4  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  10   SALE   3  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA   7   SALE  27  VA A SU COTA INFERIOR
 PRIMERA FASE TERMINADA
ENTRA  17   SALE   6  VA A SU COTA INFERIOR
ENTRA  12   SALE   8  VA A SU COTA INFERIOR
! YA SE ESTA EN EL OPTIMO !
SOLUCION
         BAS
   X[ 11]= .021898
   X[ 19]= .001939
   X[ 17]= .004690
   X[ 13]= .518189
   X[  5]= .042951
   X[ 15]= .023227
   X[ 10]= .016221
   X[ 18]= .005773
   X[  7]= .340454
   X[  1]= .335146
   X[ 12]= .037802
         NO-BAS
    X[  4]=  0
    X[  2]=  0
    X[ 16]= .014000
    X[  9]=  0
    X[  8]=  0
    X[  3]=  0
    X[ 14]=2.180500
    X[  6]=  0
 CON  Z =   7.185506E-001
Stop - Program terminated.
```

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Taha Hamdy. "Investigacion de operaciones (una introduccion)"

[2] Calvillo Vives Gilberto. "Metodos de la Programacion Lineal".

[3] Gass Saul. "Programacion Lineal".

[4] Hillier Frederick y J. Lieberman Gerarld. "Introduccion a la investigacion de operaciones".

[5] L. Burden Richard, J. Douglas Faires. "Analisis Numerico".

[6] Martinez O. Efrain, Mejia T. Juan y Tapia R. Horacio. "Elementos de Programacion Lineal".

[7] Mokhtar S. Bazaraa y John J. Jarvis. "Programacion Lineal y flujo en redes".

[8] Prawda Juan. "Metodos y modelos de investigacion de operaciones".

[9] Trujillo Figueroa Vicente. "Metodos Matematicos en la Nutricion Animal".

[11] J. Best Michael, Ritter Klaus. "Linear Programing (Active Set Analisis and Computer Programs) ".