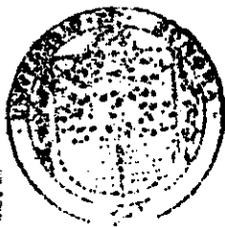


BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

UNIVERSIDAD DE SONORA
Departamento de Matematicas

PROPUESTA PARA UN PRIMER CURSO
DE CALCULO DE VARIAS VARIABLES



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
DEPARTAMENTO
DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

TESIS PROFESIONAL:
ROBERTO LEYVA ONTIVEROS

Hermosillo, Sonora, diciembre de 1991



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS



INDICE

	PAGINA
INTRODUCCION	
CAPITULO I PRELIMINARES	1
1. Un listado de temas y problemas de Algebra lineal y geometria analitica	2
2. Curvas de nivel	4
3. Sección de una superficie	5
4. Angulo de inclinación, pendiente y gráfica del plano $z = ax + by + c$	9
5. Gráficas de algunas superficies	12
6. Gráfica de una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un eje numérico definido sobre una recta en el espacio	20
7. Conjuntos de nivel	21
CAPITULO II DIFERENCIACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES	23
1. Funciones de dos o más variables	24
2. Derivadas parciales	27
3. Derivada direccional	34

Plano tangente	40
Diferencial	43
Gradiente	51
Regla de la cadena	57
Máximos y mínimos de una función de dos variables	67
Multiplicadores de Lagrange	75
PITULO III FUNCIONES VECTORIALES	89
Movimiento en el plano	89
Componentes tangencial y normal de la aceleración	98
Algunos ejemplos de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m para $n = 2, 3$	108
PITULO IV INTEGRALES MULTIPLES	118
Volumen bajo una superficie	119
Una aplicación de la integral doble en física	132
Integral doble	135
La integral doble en coordenadas cilíndricas	138
Integrales triples en coordenadas rectangulares	144

Integrales triples en coordenadas cilíndricas	149
Integrales triples en coordenadas esféricas	155
CAPITULO V INTEGRAL DE LINEA E INTEGRAL DE SUPERFICIE	163
Integral de líneas	164
Integral de superficie	183
INDICE I EL CONCEPTO DE PLANO TANGENTE	196
INDICE II PROBLEMARIO	205
BIBLIOGRAFIA	249



EL SABER DE MIS HIJOS
 HAZA SU GRANDEZA
 DEPARTAMENTO DE
 MATEMÁTICAS

INTRODUCCION

En México, como en otros países, existen bastantes problemas relacionados con la educación y uno de ellos es el de la enseñanza de cada una de las materias que se ofrecen en las distintas instituciones educativas de los diferentes niveles (nivel básico, superior, etc.). En particular el problema de la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior es crítico.

Según Calvillo y Brito¹, en nuestro país, el estudio de las matemáticas de una manera organizada prácticamente desapareció en el periodo 1810-1910 y reapareció hasta hace aproximadamente cincuenta años, así, en 1939 se fundó la hoy Facultad de Ciencias de la UNAM, la primera institución mexicana que emprendió la tarea de formar matemáticos y en 1942 se formó la Sociedad Matemática Mexicana. Después se fundaron otras instituciones formadoras de matemáticos como el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN en 1960 la Universidad Autónoma Metropolitana en 1974 en la ciudad de México. En Sonora, Yucatán, Puebla, Veracruz y otros Estados se fundaron, también, escuelas con el mismo propósito.

Según J. J. Rivaud² todas las escuelas formadoras de matemáticos en el país producen alrededor de 60 licenciados en matemáticas al año y la comunidad matemática mexicana cuenta con aproximadamente 1000 licenciados en matemáticas, 300 maestros en ciencias y 120 doctores (algunas personas están contadas en los tres casos o en dos).

Estas cifras resultan pequeñas para un país de aproximadamente 40 millones de habitantes, por lo que los matemáticos no logran cubrir las necesidades de la enseñanza en el nivel superior y tienen que participar otros profesionistas (contadores, ingenieros, etc.).

Revista Ciencia y Desarrollo/enero-febrero 1986. La actividad matemática en México

Es importante aclarar que en México un gran porcentaje de matemáticos se dedica a la docencia - en el caso de Sonora casi el cien por ciento - sin embargo durante su preparación al matemático cursa pocas materias o ninguna que tengan que ver con la pedagogía de las matemáticas, lo mismo sucede con los demás profesionistas que trabajan como profesores de matemáticas en el nivel superior.

Se torna más crítica la situación si se toma en cuenta que en las escuelas de matemáticas del país poca atención se presta a la pedagogía de las matemáticas aunque en los hechos muchos egresados de estas escuelas van a trabajar en la docencia.

Lo señalado anteriormente explica porqué es natural que en muchas instituciones se realicen pocas producciones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

Considero muy importante que en las escuelas formadoras de matemáticos se incremente el número de trabajos relativos a la actividad cotidiana del docente para poder colaborar más efectivamente en la solución de sus problemas.

Es por esto que el presente trabajo se realizó con el fin de participar en la solución de la problemática de la enseñanza de las matemáticas de nuestro país, haciendo una propuesta para un primer curso de cálculo de varias variables dirigido a los estudiantes de las licenciaturas en enseñanza de las matemáticas que ofrece el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de matemáticas aunque también pienso que puede ser de utilidad a los maestros que imparten en sus cursos temas del cálculo de varias variables.

Esta propuesta tiene por objeto mostrar otra forma de cómo abordar la discusión de algunos temas de un primer curso de cálculo de varias variables y sigue las siguientes líneas 1) utilizar el método intuitivo, 2) presentar conceptos del cálculo de varias variables de tal modo que se note de manera más explícita su relación con el cálculo de una variable y con la geometría

La experiencia que he tenido en el aula me ha enseñado que muchos estudiantes tienen experiencias poco gratificantes sobre sus clases de matemáticas y estas crecen cuando no se utilizan términos que tengan un sentido concreto para el alumno y cuando no le dan oportunidad de usar argumentos físicos, geométricos o generalizar a partir de casos particulares para justificar o proponer técnicas y conjeturas. Seguir el método lógico - deductivo, cuando se aborda un tema por vez primera, tiene el inconveniente de que el lenguaje que se utiliza resulta poco comprensible para los alumnos porque parece ajeno a los conocimientos y experiencias que ellos tienen, dicho método tampoco facilita la participación del estudiante ya que el maestro por lo general solo comunica resultados matemáticos con demostraciones muy elaboradas.

En base a los argumentos anteriormente expuestos, en este trabajo, se decidió usar el método intuitivo, como consecuencia no se dan demostraciones ni definiciones rigurosas. Creo que una discusión a nivel intuitivo de un tema previa a una presentación formal ayuda a la comprensión del mismo.

Respaldan la importancia del uso del método intuitivo diferentes autores. Así, W.W. Sawyer dice "el tipo de libro teorema-prueba-teorema-prueba explica en un sentido limitado las matemáticas al estudiante. El teorema 1, al menos es seguido por la prueba del teorema 1, lo cual puede arrojar alguna luz sobre la forma en que actúa el teorema 1. Pero mucho quedó aún oculto. ¿Cómo decidió el escritor que el teorema 1 debería ir primero? ¿Cómo decidió qué teoremas incluir y cuáles omitir? ¿Qué está tratando de hacer el libro? ¿Cómo llegaron a ser descubiertos todos estos teoremas? ¿Qué debe hacer el estudiante si desea descubrir otros teoremas por sí mismo?" También dice "hay al menos cuatro etapas para dominar un resultado matemático

- (1) Debes entender y ver claramente lo que establece el resultado. No es suficiente memorizar ciertas palabras. Debes saber lo que el resultado

- (2) Debes reunir evidencias que muestren que este resultado es razonable; debes sentir que el resultado coincide con tu experiencia en las matemáticas.
- (3) Debes saber lo que puedes hacer con el resultado. Puedes tener aplicaciones en la ciencia o simplemente conducir a otros resultados interesantes de la matemática pura. Debes saber cuáles son estos.
- (4) Debes saber y entender la prueba formal del resultado.

G. Polya, también opina sobre el método intuitivo y dice "mi consejo a los profesores de matemáticas de todos los grados puede sumirse en esta exclamación ;Enseñemos intuyendo!". El matemático I. Novikov afirma "el deseo de estudiar teoría (la que un estudiante percibe por primera vez) comenzando por conocer los fundamentos y el lenguaje formal, estropea a mi modo de ver, muchos cursos matemáticos", coincide el matemático M. Kline que dice "en la primera discusión del cálculo es más apropiado utilizar el enfoque intuitivo que el enfoque riguroso porque una presentación rigurosa es difícil de entender y oscurece el entendimiento".

Además de utilizar el método intuitivo, aquí se usan elementos de cálculo de una variable y de geometría analítica en el estudio del cálculo de varias variables porque muchos de los problemas que se abordan se pueden reducir a problemas del cálculo de una variable, esta reducción es importante porque el cálculo de una variable es una temática donde el estudiante tiene cierta familiaridad. El uso del cálculo de una variable y la geometría analítica en el estudio del cálculo de varias variables también es importante porque ayuda a dar imágenes geométricas de conceptos, que permite poder predecir resultados sin necesidad de hacer muchos cálculos algebraicos y porque, en mi opinión, permite un enfoque más natural a un estudio más avanzado del cálculo de varias

El tercer aspecto al que se le da importancia en este trabajo es a la motivación de las definiciones a través de problemas. Hacer esto en clase, permite que el alumno tenga referencias concretas para los conceptos, conduce en muchos casos a descubrir técnicas para resolver problemas, ayuda a entender porqué se incluyen ciertas condiciones en las definiciones, informa al estudiante en qué problemas se pueden aplicar los conceptos y da oportunidad para convencer que las definiciones no se construyen de manera arbitraria.

Este trabajo contiene cinco capítulos y dos apéndices. El primer capítulo trata cuestiones de geometría, éstas se pueden clasificar en tres grupos: a) un listado de problemas de álgebra lineal y geometría analítica que serán de utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos, este material se considera preliminar para el curso, por lo que no se desarrolla en este trabajo; b) una propuesta de graficación de superficies, en dicha propuesta se hace ver que muchas de las gráficas que son tratadas en los cursos de cálculo de varias variables se pueden generar por medio de movimientos de rotación o traslación de curvas y/o contracciones del espacio hacia los planos coordenados; c) un conjunto de conceptos que permitirán reducir algunos problemas del cálculo de varias variables a problemas de cálculo de una variable. El material de este capítulo facilitará la comprensión del cálculo a través de la geometría.

El segundo capítulo se desarrolla a partir de cinco tipos de problemas los cuales son resueltos usando argumentos intuitivos, cálculo de una variable y geometría analítica. Es importante recalcar que lo anterior se utiliza tanto para motivar las definiciones de los principales conceptos como para encontrar las técnicas que permiten la solución de los mencionados problemas.

Los problemas sobre razón de cambio y rectas tangentes a una curva que dan lugar a los conceptos de derivada parcial y derivada direccional se reducen a problemas de cálculo de una variable; lo mismo sucede con los problemas sobre cálculos aproximados que dan

El concepto de plano tangente se estudia a partir del mismo que se estudia en geometría y del de recta tangente a una curva. En el apéndice I se hace una discusión más cuidadosa sobre éste.

El concepto de gradiente es presentado en base a un problema especial sobre razones de cambio.

La regla de la cadena se enuncia pero no se demuestra, en virtud de que se necesitan más antecedentes matemáticos y más madurez matemática por parte de los que se inician en el estudio del cálculo de varias variables; sin embargo, se dan argumentos físicos y geométricos para convencer de su validez en el caso $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$. Se utiliza para resolver algunos problemas relacionados con funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} y también en problemas de optimización.

Finalmente, las secciones de máximos y mínimos y multiplicadores de Lagrange se abordan a partir de problemas de optimización.

El tercer capítulo consta de tres secciones. En las primeras se estudian las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n para $n = 2,3$ en el contexto del movimiento curvilíneo pero se estudia más el movimiento en el plano por considerar que es más sencilla su geometría. Aquí se usan elementos de cálculo de una variable, geometría analítica y argumentos intuitivos tanto para justificar porque es razonable que $\vec{v}(t)$ represente la velocidad de una partícula cuando la posición de la misma está dada por $\vec{r}(t)$ como para resolver algunos problemas sobre movimiento; sirven de ayuda para resolverlos, los conceptos de aceleración normal y tangencial.

En la última sección del capítulo se dan algunos ejemplos de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m para $n,m = 2,3$ y son útiles en el estudio de problemas de flujos, en el estudio del teorema de cambio de variables, etc.

Los temas del cuarto capítulo se estudian a partir de problemas sobre volúmenes, áreas de regiones planas, masas de regiones planas, masas de regiones sólidas y problemas de atracción gravitacional.

Con los problemas de volúmenes, áreas y masas de regiones planas se motiva el concepto de integral doble y se utiliza el cálculo de una variable y la geometría para justificar la técnica que permite su evaluación. Primero se plantean problemas donde es útil el sistema coordenado cartesiano y a continuación se abordan algunos donde se ejemplifica que es más conveniente el empleo del sistema coordenado cilíndrico que el cartesiano. Aquí, los problemas en coordenadas cilíndricas se reducen a problemas en coordenadas cartesianas.

Los problemas de masas de regiones sólidas y atracción gravitacional son el medio para abordar el concepto de integral triple. Se presentan diversos tipos de problemas en donde es necesario elegir el sistema coordenado más eficaz. Para justificar las técnicas que conducen a la solución de los problemas propuestos se recurre al cálculo de una variable y a la geometría analítica.

El tratamiento de las integrales dobles (triples) que aquí se sirve de antecedente para el estudio del teorema de cambio de variable para integrales dobles (triples) y permite valorar la importancia unificadora de dicho teorema.

En el capítulo cinco se expone una introducción al estudio de los temas: integral de línea e integral de superficie. Estos conceptos son centrales en áreas de la física como en la mecánica de fluidos, el electromagnetismo, etc. pero aquí sólo trataremos algunos problemas sencillos de geometría y física. Así, como primera vez introducimos el concepto de integral de línea del tipo $\int_C f \, ds$ se motiva por medio de problemas de áreas y se hace ver que algunas integrales se pueden calcular por medio de integrales de una variable. Luego por medio de un problema de hallar el trabajo que realiza una fuerza \vec{F} se introducen integrales de la forma $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$. Además de ejemplos se hace notar que $\int_C f(x,y) \, ds = \int_{-C} f(x,y) \, ds$ pero $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = - \int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$ y se resuelven algunos problemas de mecánica

En la segunda parte se estudia el concepto de integral de superficie motivándolo por medio de un problema de hallar la masa de una superficie y así obtener integrales de la forma $\int_S S(x,y,z) dS$, donde solo se tratan superficies S de la forma $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ ó $x = h(y,z)$. Posteriormente se estudian las integrales de superficie de la forma $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, previamente motivadas por medio de un problema de hallar el flujo a través de una superficie.

Influyó en la elección de los temas y problemas que aquí se estudian así como para el método seguido en el tratamiento de los temas lo siguiente:

Programas de cálculo de varias variables de distintas instituciones del Estado de Sonora.

Una colección de exámenes parciales y globales que presentaron los alumnos que cursaron cálculo de varias variables en varias instituciones del Estado de Sonora.

Manuales y textos de cálculo de varias variables más usadas en el Estado.

Una colección de exámenes globales sobre cálculo de varias variables aplicados en algunas universidades de los Estados Unidos³.

La experiencia como profesor de matemáticas durante alrededor de 15 años en los niveles medio superior y superior.

La experiencia como asesor de matemáticas por más de 6 años de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas.

Los elementos que sobre la enseñanza de las matemáticas he adquirido como estudiante de una Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

CAPITULO I

PRELIMINARES

INTRODUCCION

Este capitulo contiene:

Un listado de temas y problemas de algebra lineal y geometria analitica

Ademas los siguientes temas

Curvas de nivel

Seccion de una superficie

Angulo de inclinación, pendiente y grafica del plano $z=ax+by+c$

Graficas de algunas superficies

Grafica de una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde i es un eje numérico definido sobre una recta en el espacio

Conjuntos de nivel

Los temas y problemas de los cursos de algebra lineal y geometria analitica que abajo se enlistan serán utiles en el desarrollo de los siguientes capitulos y aqui no se discutirán.

Los conceptos de curva de nivel y seccion de una superficie así como los elementos de algebra lineal y geometria analitica del punto serán las herramientas basicas para estudiar los puntos 4, 5, 6 y de este capitulo, tambien se requerirán estas herramientas en los siguientes capitulos y en los apendices.

Dos conceptos ligados con la grafica de una linea recta, en un plano xy son los de ángulo de inclinación y pendiente de dicha recta. Se retomaran en cálculo de una variable para ligarlo al concepto de derivada. tambien los conceptos de ángulo de inclinación y pendiente un plano se estudiarán cuando veamos la grafica de un plano. Se relacionaran con el concepto de derivada de una función real de dos variables.

Un examen de los textos que más se utilizan en los cursos de cálculo de varias variables que se ofrece en las distintas instituciones de nivel superior del Estado de Sonora muestra que las superficies que más se manejan en dichos textos son: a) superficies de revolución, b) cilindros, c) superficies que se obtienen a partir de otras después de una contracción uniforme del espacio a lo largo de los planos coordenados, d) superficies que se generan por el movimiento de una curva C_1 que se mantiene siempre en un plano perpendicular al plano xy sin cambiar de dirección y que oscila por otra curva C_2 que está en otro plano que también es perpendicular al plano xy . Veremos algunas ideas que nos permitan aquejar las gráficas de esta clase de superficies. Si tener una imagen geométrica de una función definida analíticamente ayudará a resolver problemas que se planteen en los siguientes capítulos y los apéndices.

El estudio sobre la gráfica que se mencionó en el punto 4 y el concepto de conjunto de nivel serán de utilidad cuando se trabaje con conceptos del cálculo de funciones reales de tres variables.

El material que contiene este capítulo se seleccionó basándose en la idea de que nos servirá para proporcionar interpretaciones geométricas para muchos de los conceptos más importantes del cálculo de varias variables que es uno de los objetivos de este trabajo.

LISTADO DE LOS ELEMENTOS DE ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA ANALITICA QUE SE NECESITARAN EN EL DESARROLLO DE TODO EL TRABAJO

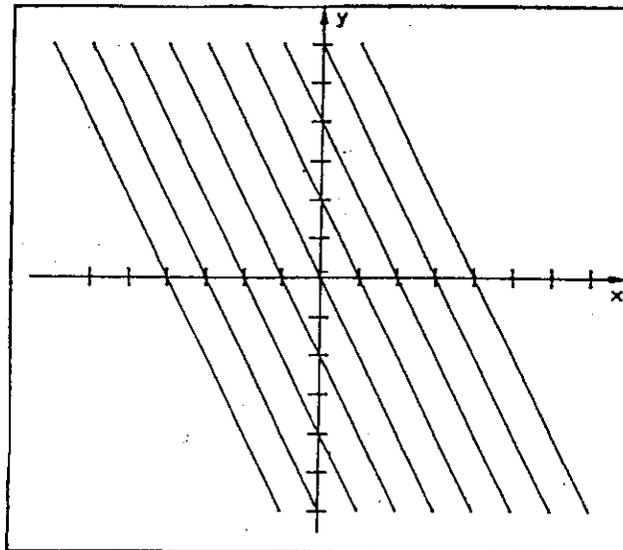
- a) La definición geométrica de las siguientes operaciones que involucran vectores: adición y sustracción de vectores, multiplicación de un número real por un vector, producto escalar de vectores y producto vectorial de vectores.
- b) La definición aritmética de las operaciones citadas en inciso a) que se contienen al desarrollar el trabajo.

- c) Hallar las ecuaciones paramétricas de una recta (tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3) sabiendo que pasa por un punto P y es paralela a un vector \vec{a} .
- d) Hallar las ecuaciones paramétricas de una recta (tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3) dados dos puntos P y Q por donde pasa.
- e) Hallar las ecuaciones paramétricas de una recta en \mathbb{R}^2 que pasa por un punto P y es perpendicular a un vector \vec{n} .
- f) Hallar la ecuación de un plano, sabiendo que pasa por un punto P y es perpendicular a un vector \vec{n} .
- g) Hallar la ecuación de un plano sabiendo que pasa por un punto P y es paralelo a dos vectores \vec{a} y \vec{b} .
- h) Hallar las ecuaciones paramétricas de una recta definida por dos planos .
- i) Hallar la distancia de un punto a una recta en \mathbb{R}^3 .
- j) Hallar la ecuación de una esfera, dados su centro y su radio .
- k) Se conoce el centro, el radio y un punto M de una esfera E. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera E en el punto M.
- l) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $z=-p$ y del punto $F(0,0,p)$ ($p>0$).
- m) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a los puntos $(-c,0,0)$ y $(c,0,0)$ es igual a $2a$ ($a>c>0$).
- n) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de sus distancias a los puntos $(0,c,0)$ y $(0,-c,0)$ sea igual a $2a$ ($c>a>0$).
- o) Graficar en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 una curva dadas sus ecuaciones paramétricas.
- p) Graficar en \mathbb{R}^3 ecuaciones de primer y segundo grado

CURVAS DE NIVEL

Dada una función $z = f(x,y)$ se pueden plantear los siguientes problemas, uno inverso del otro: dado un punto (a,b) , hallar el valor de z que le corresponde y dado un valor de z , digamos k , hallar el conjunto de puntos (x,y) a los cuales les corresponde el valor $z = k$. Nos interesa por ahora el segundo de estos problemas.

Consideremos la función $z = 2x + y$. ¿Cuáles son los puntos del plano xy a los cuales les corresponde el valor $z = 2$? Es claro que son los puntos (a,b) que satisfacen la ecuación $2x+y=2$. Al conjunto de puntos del plano xy a los cuales les corresponde el valor z igual a 2 se le llama curva de nivel de valor 2 de $z = 2x + y$ y por geometría analítica sabemos que forman una recta. Más generalmente, al conjunto de puntos del plano xy a los cuales les corresponde el valor de $z = k$, donde k es un número real, se le llama curva de nivel de valor k de $z = 2x + y$. También en este caso la curva de nivel de valor k de $z = 2x + y$ es una recta. En la figura 1 se muestran las gráficas de algunas curvas de nivel de $z = 2x + y$.



Consideremos la función $z = x^2 + y^2$. Al conjunto de puntos del plano a los cuales les corresponde el valor k se le llama curva de nivel de valor k de $z = x^2 + y^2$. Si $k < 0$, no hay puntos que satisfagan $x^2 + y^2 = k$; si $k = 0$, hay sólo un punto que satisface $x^2 + y^2 = 0$, éste es el $(0,0)$ y si $k > 0$, los puntos de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio \sqrt{k} son los que satisfacen $x^2 + y^2 = k$.

Más generalmente, consideremos una función $z = f(x,y)$ y un número real k , al conjunto de puntos del plano xy a los cuales la función $z = f(x,y)$ les asocia el número k se llama curva de nivel de valor k de $z = f(x,y)$. Así en el caso de $z = 2x + y$, las curvas de nivel son rectas paralelas de pendiente -2 y en el caso de $z = x^2 + y^2$ las curvas de nivel son circunferencias concéntricas con centro en $(0,0)$ y radio \sqrt{k} si $k > 0$, un punto si $k = 0$ y el conjunto vacío si $k < 0$.

El concepto de curva de nivel es útil cuando se desea dar una representación geométrica de una función $z = f(x,y)$ o cuando se desea resolver problemas de optimización, sin embargo, en este capítulo se utilizará como una herramienta que nos ayude a bosquejar las gráficas de algunas superficies. En particular, veremos que se puede tener una idea de la gráfica de una función $z = f(x,y)$ si el conjunto de curvas de nivel de dicha función son rectas paralelas o círculos concéntricos. También es útil el concepto de curva de nivel para descubrir que algunas superficies son de una misma clase, es decir nos ayuda a clasificar algunas superficies como paraboloides hiperbólicos, paraboloides elípticos, etc.

B. ECUACION DE LA SECCION EN LA DIRECCION $\langle a, b \rangle$ EN UN PUNTO P DE LA SUPERFICIE $z = f(x,y)$ CON RESPECTO A UN SISTEMA COORDENADO CARTESIANO BIDIMENSIONAL

Sabemos por geometría analítica que en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ representa la esfera E con centro en $(0,0,0)$ y radio $r = 7$ (ver

mitad de la esfera E, que es aquella formada por los puntos de la esfera E cuya tercera coordenada z es mayor o igual que cero (ver figura 3). También sabemos que si bien en un sistema de

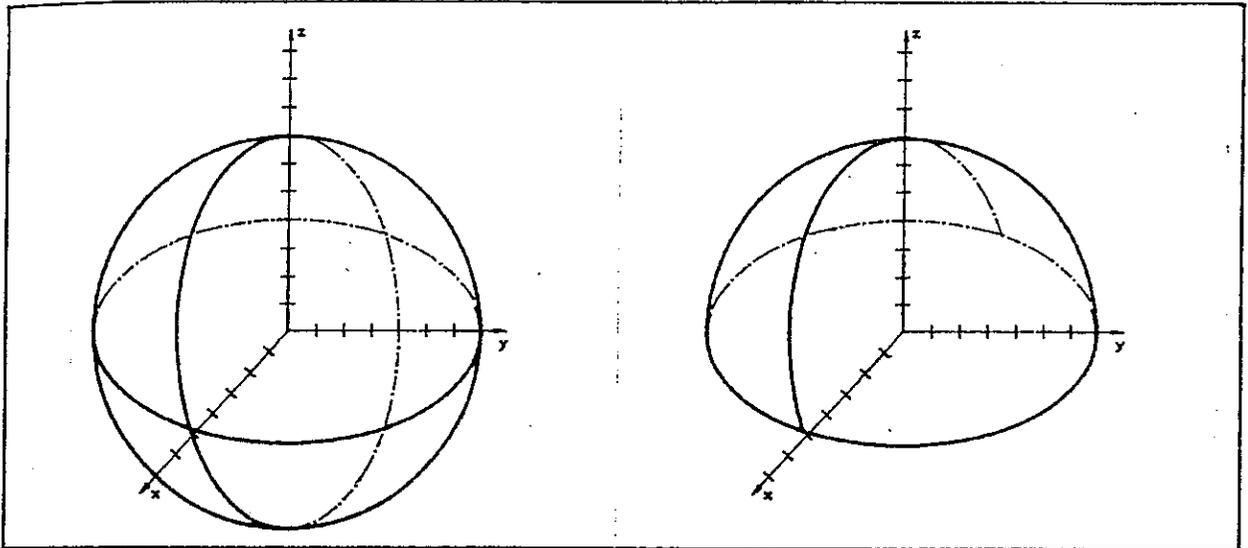
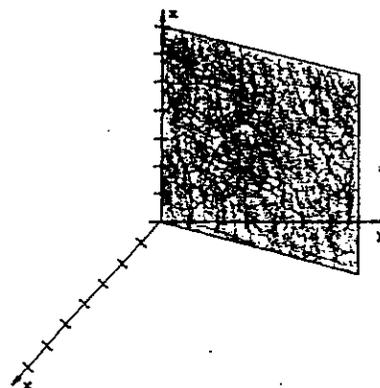
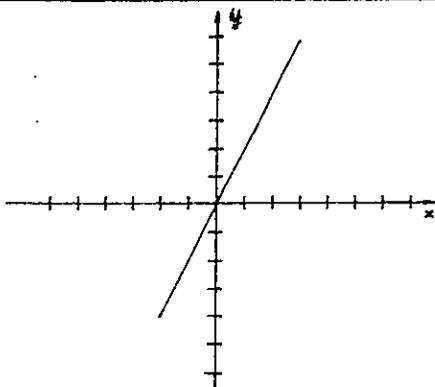


Figura 2

Figura 3

coordenadas cartesianas bidimensional $y = 2x$ representa una recta (ver figura 4) en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $y = 2x$ representa un plano perpendicular al plano coordenado xy . En la figura 5 se muestra una parte de dicho plano.



mitad de la esfera E, que es aquella formada por los puntos de la esfera E cuya tercera coordenada z es mayor o igual que cero (ver figura 3). También sabemos que si bien en un sistema de

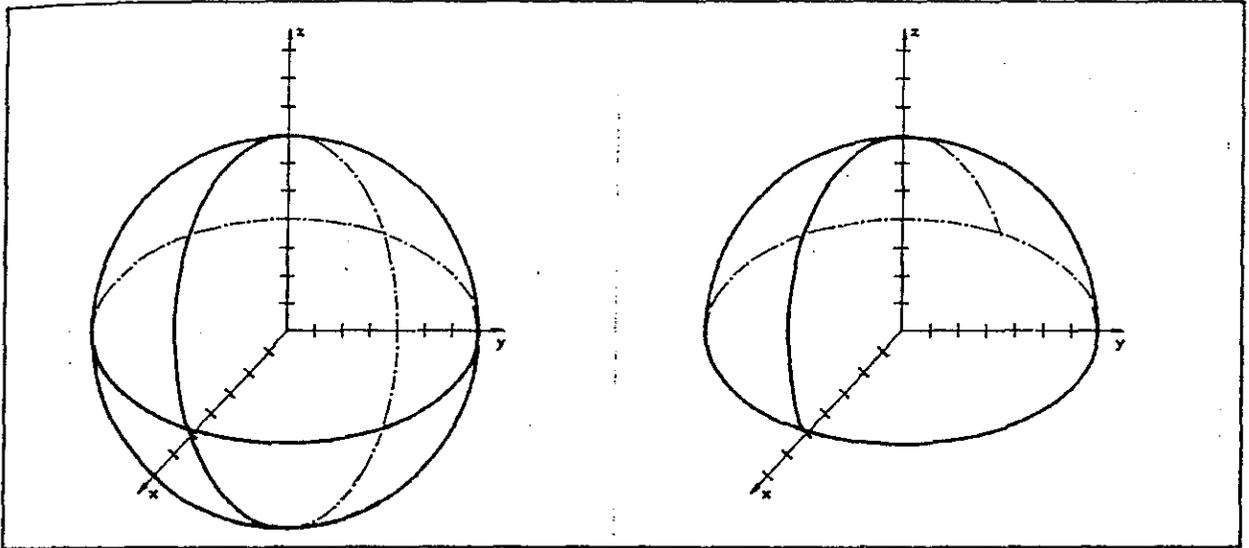
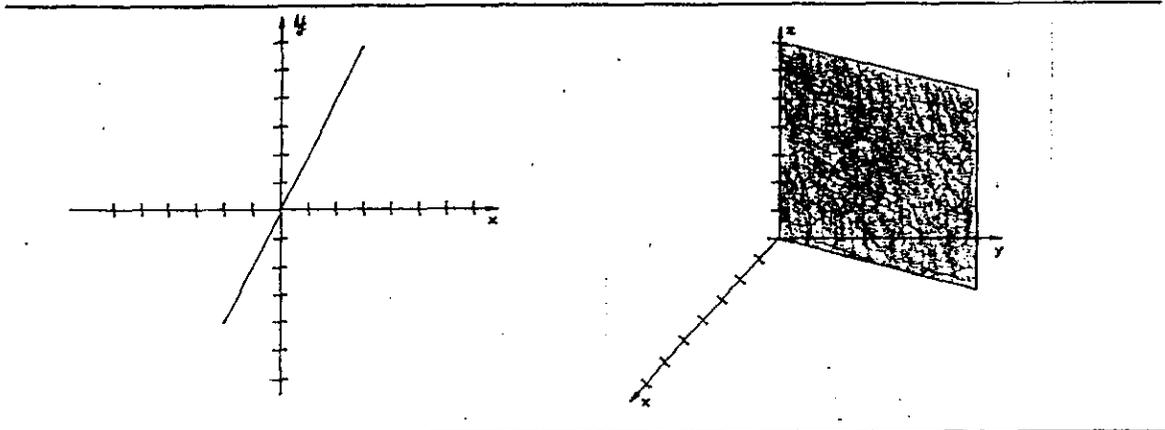


Figura 2

Figura 3

coordenadas cartesianas bidimensional $y = 2x$ representa una recta (ver figura 4) en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $y = 2x$ representa un plano perpendicular al plano coordenado xy. En la figura 5 se muestra una parte de dicho plano.



Consideremos en un sistema coordenado xyz la curva

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{49 - x^2 - y^2} \\ y = 2x \end{cases} \text{ que resulta de la intersección de la}$$

semiesfera $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ con el plano $y = 2x$ (figura 6) y encontremos la ecuación de la curva C con respecto al sistema de ejes $t - z_*$ definido de la siguiente manera: que el eje z_* sea igual al eje z , que el eje t sea la línea que resulta de la intersección del plano $y = 2x$ con el plano coordenado xy , donde hemos tomado como su dirección positiva la dirección del vector $\langle 1, 2 \rangle$, que el origen del eje t sea $(0, 0, 0)$ y que esté numerado a la misma escala que el eje z_* (ver figura 7).

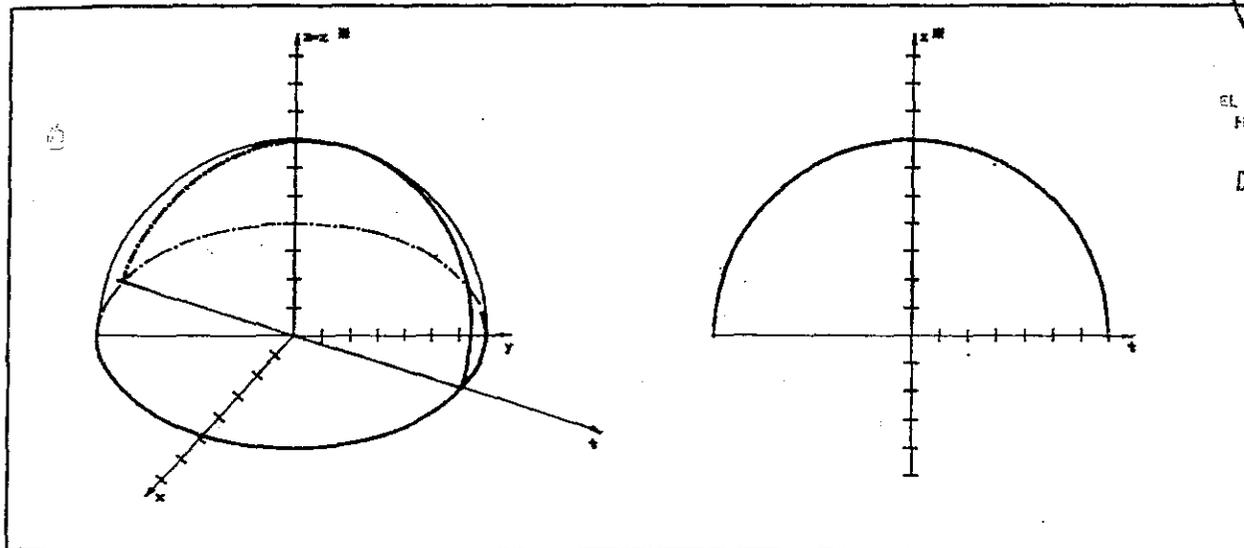


Figura 6

Figura 7

Para hallar la ecuación de C con respecto al sistema de ejes $t - z_*$ tenemos que relacionar los puntos del plano xy con los puntos del eje t . Como al punto de coordenada 1 del eje t se le asocia con la pareja $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, podemos decir que al punto con coordenada t del eje t se le asocia con el punto $(x, y) = \left(\frac{t}{\sqrt{5}}, \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$ del plano xy (ver figura 8). De aquí que

EL SABER
HACE A
EL
DEPART.
MATE

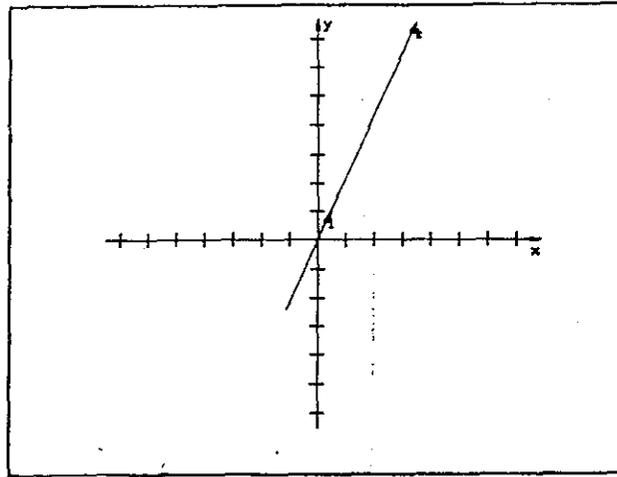


Figura 8

se pueda escribir $z = \sqrt{49 - \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2}$ y como $z = z_*$, podemos concluir que la ecuación de la curva C en el sistema de ejes $t - z_*$ es $z_* = \sqrt{49 - t^2}$.

Llamamos sección de una superficie $z = f(x,y)$ a la curva que resulta de la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con algún plano perpendicular al plano xy . Sea $C: \begin{cases} z = f(x,y) \\ bx - ay = c \end{cases}$ una sección de la superficie $z = f(x,y)$. Supongamos que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$ donde $z_0 = f(x_0, y_0)$ y $bx_0 - ay_0 = c$ y que está referida al sistema de ejes $t - z_*$ que se define a continuación: el eje z_* es la recta $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ y el eje t es la recta $\begin{cases} bx - ay = c \\ z = 0 \end{cases}$; se escoge como origen para ambos ejes al punto $(x_0, y_0, 0)$; se numeran con la misma escala con que se numeran los ejes coordenados x, y, z ; se elige la dirección del vector $\langle 0, 0, 1 \rangle$ como la dirección positiva del eje z_* y la dirección del vector $\langle a, b, 0 \rangle$ como la dirección positiva del eje t . A tal curva C la llamaremos SECCION EN LA DIRECCION $\langle a, b \rangle$ EN EL PUNTO $P(x_0, y_0)$ DE LA SUPERFICIE $z = f(x,y)$. Así

$z_* = \sqrt{49 - t^2}$ es la ecuación de la sección en la dirección

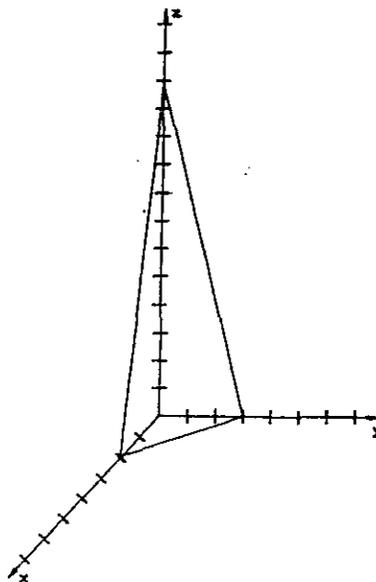
Podemos seguir pasos análogos a los dados en el problema anterior para concluir que la ecuación de la sección en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto $P(x_0, y_0)$ de la superficie $z=f(x, y)$

$$\text{está dada por } z_* = f \left[x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right].$$

4. ANGULO DE INCLINACION, PENDIENTE Y GRAFICA DEL PLANO $z=ax+by+c$

En caso de que $a = b = 0$ la ecuación $z = ax + by + c$ se reduce a $z = c$: se sabe por geometría analítica que $z = c$ representa un plano que pasa por $(0, 0, c)$ y que es paralelo al plano xy (muchos estudiantes al principio del curso creen que la gráfica de $z = c$ no es un plano sino un punto: el $(0, 0, c)$).

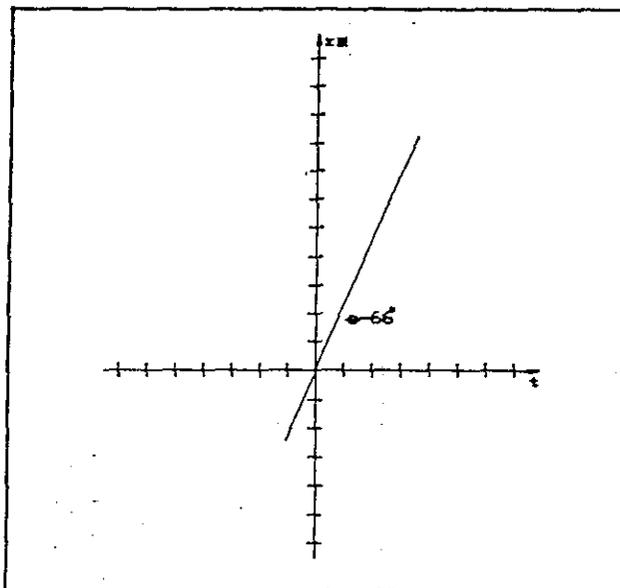
Consideremos el caso en que $a^2 + b^2 > 0$. Es muy común graficar un plano de la forma $z = ax + by + c$ de la siguiente manera: se hallan los puntos de intersección de los ejes coordenados con $z = ax + by + c$, luego se unen los tres puntos por medio de segmentos de recta y el triángulo que se obtiene resulta ser la gráfica de $z = ax + by + c$. Así, la gráfica de $z = -3x - 4y + 12$ se muestra en la figura 9.



Desde luego este procedimiento no funciona si se trata de graficar $z = ax + by$.

Se puede obtener información adicional sobre el plano $z = ax + by + c$ y por lo tanto tener una mejor idea del mismo, si encontramos el ángulo agudo que forma dicho plano con el plano xy . Resolvamos, pues, el siguiente problema: Hallar el ángulo agudo que forman el plano $z = 2x + y$ y el plano xy .
Solución: Dibujemos las curvas de nivel de $z = 2x + y$. En la figura 1 se han dibujado algunas curvas de nivel de $z = 2x + y$.

A partir de las gráficas de las curvas de nivel podemos concluir que el vector $\langle 2, 1 \rangle$ es perpendicular a dichas curvas de nivel y apunta en la dirección en la que crece z . Con esta información podemos hacer la gráfica del plano $z = 2x + y$ "visto como una rampa" y por lo tanto, hallar el ángulo que estamos buscando. Para lograrlo, podemos hallar la ecuación de la sección en la dirección $\langle 2, 1 \rangle$ en el punto $P(0, 0)$ de $z = 2x + y$. Note que son iguales todas las ecuaciones de las secciones en la dirección $\langle 2, 1 \rangle$ en $P(x_0, y_0)$ de $z = 2x + y$ si (x_0, y_0) es cualquier punto de la curva de nivel de valor cero. Dicha ecuación es $z_x = \sqrt{5} t$. La gráfica de la sección en un plano $t - z_x$ nos dice cómo se vería el plano o "rampa" visto "de perfil". (Ver figura 10).



A partir de la ecuación $z_* = \sqrt{5} t$ podemos concluir que el ángulo agudo que forma el plano $z = 2x + y$ con el plano xy es igual a $\arctan\sqrt{5} \approx 65^\circ 54'$.

El mismo resultado se obtiene si se escogen los planos $z = -2x + y$, $z = 2x - y$, $z = -2x - y$, es decir, el ángulo agudo que forman tales planos con el plano xy es $\theta = \arctan\sqrt{5} \approx 65^\circ 54'$.

Se puede demostrar, en general, que si el plano tiene por ecuación $z = ax + by$, forma con el plano xy un ángulo agudo $\theta = \arctan \sqrt{a^2 + b^2}$. Es claro que los planos $z = ax + by$ y $z = ax + by + c$ forman el mismo ángulo agudo con el plano xy .

Lo anterior nos permite saber que el plano $z = 2x + 3y$ está menos "empinado" que el plano $z = 3x - 4y$ y a la vez más empinado que $z = x + y$.

En geometría analítica plana se puede decir que las rectas $y = 5x$, $y = -5x$ forman el mismo ángulo agudo θ con la recta $y = 0$ y que el valor absoluto del coeficiente de la x de cualesquiera de estas dos rectas nos da el valor de $\tan\theta$.

La discusión dada arriba sobre el ángulo agudo que forman los planos xy y $z = ax + by + c$ ayuda a decir que los planos $z = 5x$, $z = -5y$, $z = 4x + 3y$, $z = -3x - 4y$ y en general $z = ax + by + c$, con $a^2 + b^2 = 25$ forman el mismo ángulo agudo con el plano xy (en realidad hay un número infinito de planos no paralelos entre sí que forman un ángulo agudo de medida θ con el plano xy mientras que en el caso de las rectas $y = 5x$ y $y = -5x$, cualquier otra recta que forme un ángulo agudo de medida θ con la recta $y = 0$ sería paralela a alguna de ellas dos). También aquí sucede que el valor absoluto del vector que se forma con los coeficientes de la x y la y de cualesquiera de los planos nos da el valor de la tangente del ángulo θ . Esto motiva decir que la pendiente de $z = 4x + 3y$ es $\langle 4, 3 \rangle$ y que el ángulo agudo que forma $z = 4x + 3y$ con el plano xy es igual a $\arctan \|\langle 4, 3 \rangle\|$.

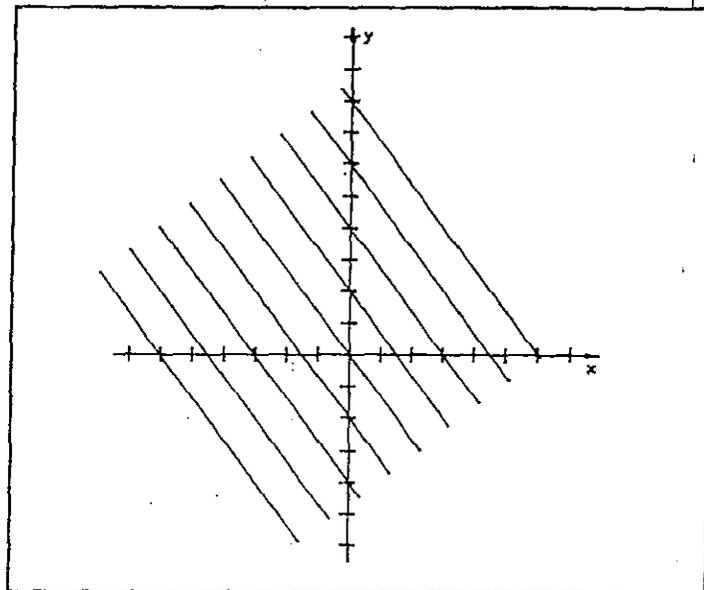
Más generalmente, se llamará ángulo de inclinación del plano $z = ax + by + c$ al ángulo agudo que determinan los planos $z = ax + by + c$ y plano xy , que como ya se sabe es igual a $\arctan \sqrt{a^2 + b^2}$ y al vector $\langle a, b \rangle$ que se forma con los coeficientes de la x y la y (en este orden) se llamará pendiente del plano $z = ax + by + c$.

5. GRAFICAS DE ALGUNAS SUPERFICIES

a) Gráfica de superficies de la forma $z = f(ax+by+c)$ donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Los conceptos de curva de nivel de una función $z = f(x, y)$ y de sección de una superficie son herramientas importantes para poder bosquejar las gráficas de funciones como $z = \sqrt{ax + by + c}$, $z = |ax + by + c|$, $z = \log(ax + by + c)$, $z = \sin(ax + by + c)$, etc.

Veamos un ejemplo. Bosquejemos la gráfica de $z = |4x+3y-12|$. La primera observación importante para lograr lo que se quiere, es notar que el conjunto de curvas de nivel de $z = |4x+3y-12|$ son líneas rectas paralelas (Ver figura 11).



El hecho de que el conjunto de curvas de nivel de $z = |4x + 3y - 12|$ sean rectas paralelas de pendiente $-4/3$, sugiere que TODAS las secciones en la dirección $\langle 4,3 \rangle$ en cualquier punto P de la curva de nivel de valor cero de $z = |4x + 3y - 12|$ sean IGUALES. Y esto es efectivamente así porque la ecuación de la sección en la dirección $\langle 4,3 \rangle$ en un punto $P(x_0, y_0)$ de $z = |4x + 3y - 12|$ es $z_* = |4(x_0 + \frac{4}{5}t) + 3(y_0 + \frac{3}{5}t) - 12| = |4x_0 + 3y_0 - 12 + 5t|$ y si $P(x_0, y_0)$ es un punto en la curva de nivel cero entonces la ecuación de la sección se reduce a $z_* = |5t|$ porque $4x_0 + 3y_0 - 12 = 0$. Esto significa que desde cierta perspectiva, la gráfica de la superficie se vería como lo muestra la gráfica en la figura 12 y por lo tanto un bosquejo para $z = |4x + 3y - 12|$ es como lo muestra la figura 13.

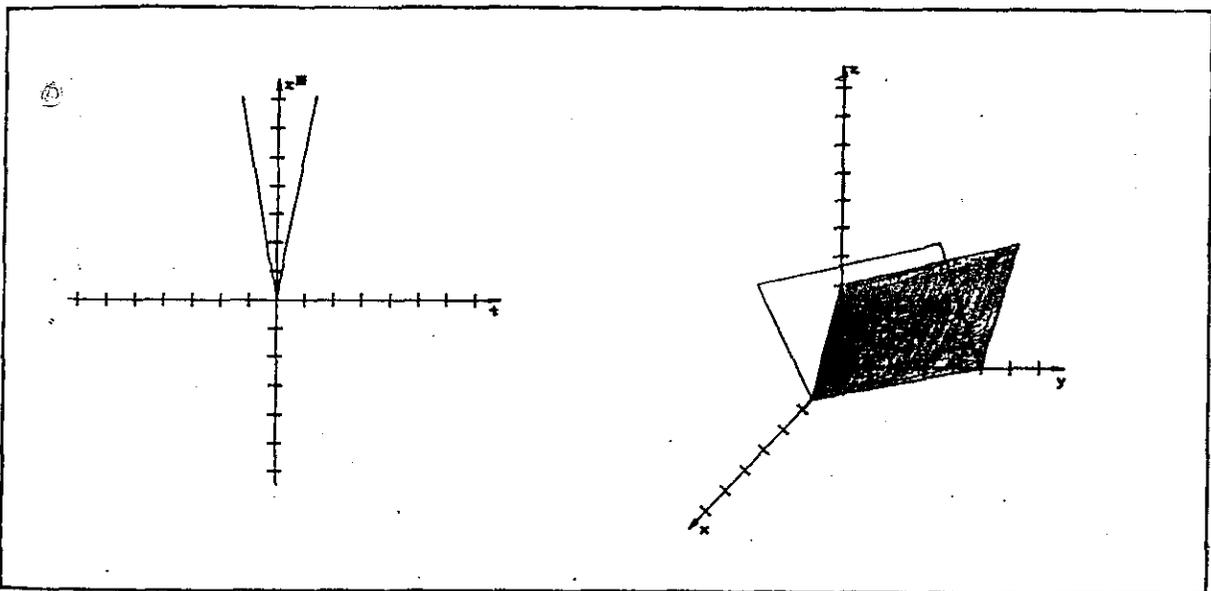


Figura 12

Figura 13

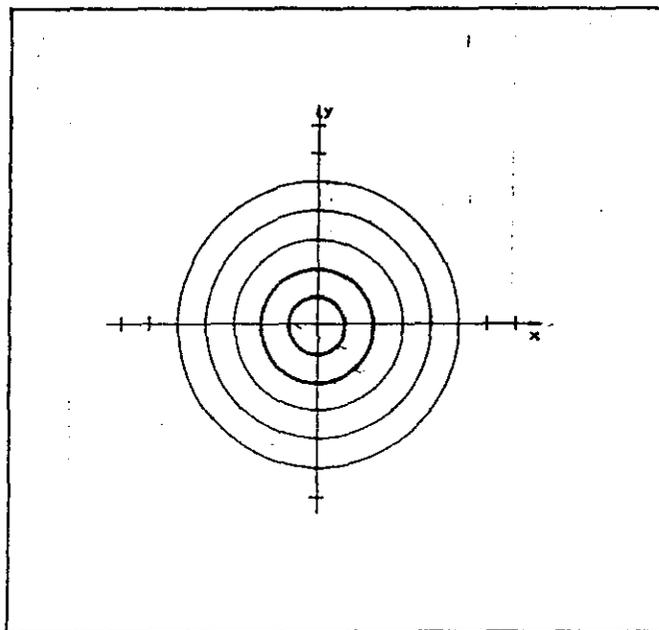
En general, puesto que todas las curvas de nivel de $z=f(ax+by+c)$ donde f es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} forman un conjunto de rectas paralelas, se puede demostrar que todas las secciones en la dirección $\langle a,b \rangle$ en cada punto P de la recta $ax+by+c=0$ de la función $z = f(ax+by+c)$ son iguales y ésta es $z_* = (f\sqrt{a^2+b^2} t)$, de aquí que sea posible bosquejar la gráfica de $z = f(ax + by + c)$ usando el mismo método utilizado para

Por último comentaremos que así como en geometría analítica plana cuando se estudia el método de graficación "por operaciones", se considera la gráfica de $y = x^2$, como el "cuadrado de la recta $y = x$ ", la gráfica de $y = |x - 5|$ como el "valor absoluto de la recta $y = x - 5$ ", etc. así, es posible considerar la gráfica de $z = (4x + 3y - 12)^2$ como el "cuadrado del plano $z = 4x + 3y - 12$ ", la gráfica de $z = |4x + 3y - 12|$ como "el valor absoluto del plano $z = 4x + 3y - 12$ ", etc.

b) Gráfica de una superficie de revolución

De nuevo los conceptos de sección y curva de nivel son herramientas básicas para poder bosquejar las gráficas de funciones como $z = x^2 + y^2$, $z = \log(x^2 + y^2)$, $z = e^{-(x^2 + y^2)}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, etc

Veamos un ejemplo. Bosquejemos la gráfica de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. La primera observación importante para lograr lo que se quiere es notar que el conjunto de curvas de nivel de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ son circunferencias concéntricas con centro en $(0,0)$. (Ver figura 14).



El hecho de que el conjunto de curvas de nivel de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sean circunferencias concéntricas con centro en $(0,0)$ sugiere que TODAS las secciones en cualquier dirección $\langle a,b \rangle$ en el punto $(0,0)$ de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sean IGUALES. Y esto efectivamente es así porque la ecuación de la sección en la dirección $\langle a,b \rangle$ con a y b reales tales que $a^2 + b^2 > 0$ es

$$z_* = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}t\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}t\right)^2} = \sqrt{t^2} = |t|. \text{ Esto significa que}$$

la gráfica de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se obtiene como la superficie que se genera al girar la curva $\begin{cases} z = |y| \\ x = 0 \end{cases}$ (ver figura 15) alrededor del eje z (ver figura 16).

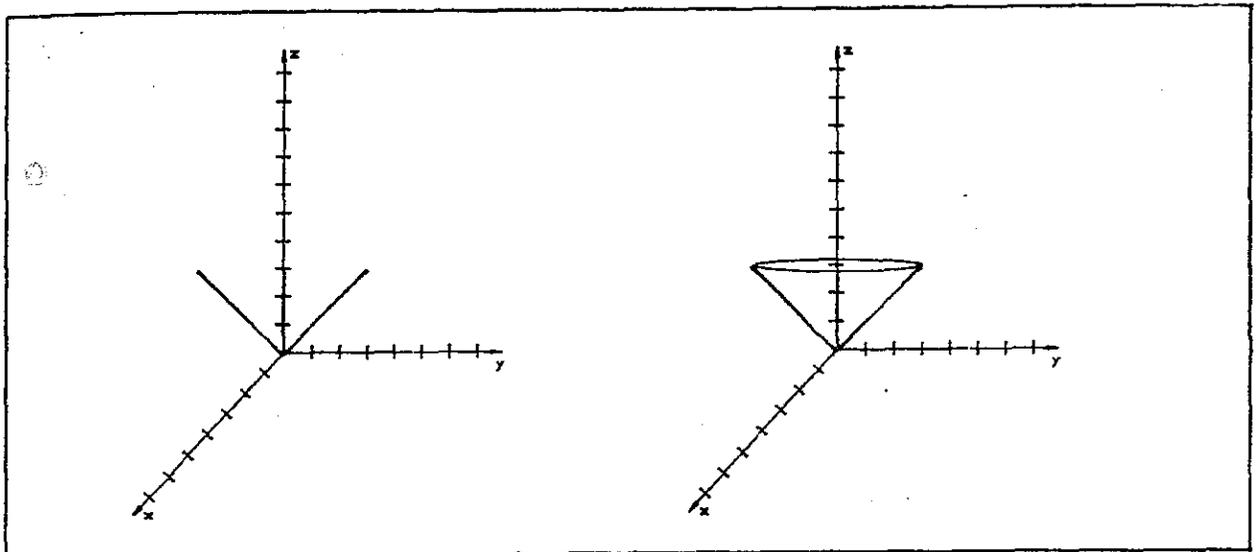


Figura 15

Figura 16

En general, puesto que todas las curvas de nivel de una superficie de revolución con el eje z como eje de revolución, forman un conjunto de circunferencias concéntricas con centro en el origen, se puede demostrar que todas las secciones en la dirección $\langle a,b \rangle$ en el punto $P(0,0)$ de las superficies de la forma $z = f(x^2 + y^2)$ con $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son iguales y ésta es $z_* = f(t)$, de aquí que sea posible bosquejar la gráfica de $z = f(x^2 + y^2)$ usando el mismo método que se usó para bosquejar la

c) Gráfica de superficies de la forma $z = f(x) + g(y)$

Estas superficies se pueden bosquejar, pensando que la superficie $z = f(x) + g(y)$ es generada por el movimiento de la curva $\begin{cases} z=f(x)+g(y) \\ y=0 \end{cases}$, que se mantiene siempre en un plano perpendicular al eje y y sin cambiar de dirección y que resbala por la curva $\begin{cases} z=f(x)+g(y) \\ x=0 \end{cases}$. Así, se pueden bosquejar las gráficas de $z=1+x^2+y$, $z=y^2-x^2$, $z=\text{sen}y+x^2$, etc. Por ejemplo la gráfica de $z = \frac{1}{16}y^2 - x^2$ está bosquejada en la figura 17.

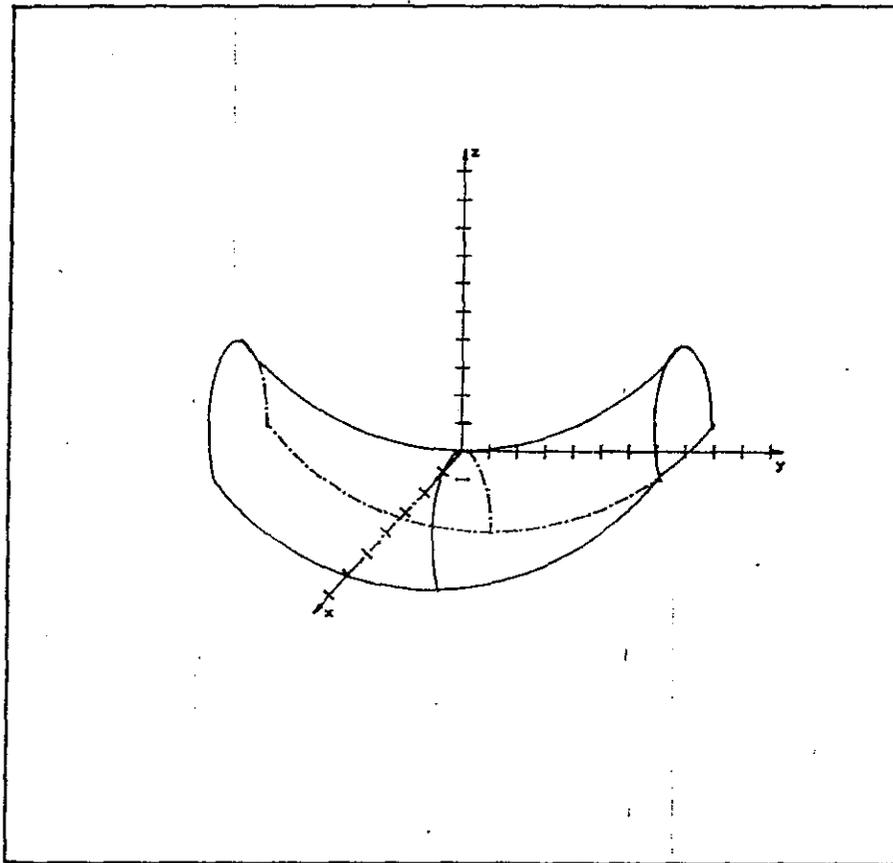


Figura 17

d) Gráfica de una superficie que se obtiene a partir de otra por medio de una contracción uniforme del espacio

En geometría analítica plana se resuelve el siguiente problema: dada la circunferencia $x^2+y^2 = 1$, hallar el lugar geométrico formado por los puntos medios de los segmentos con extremos en $P(\cos t, \sin t)$ y $Q(\cos 2t, \sin 2t)$.

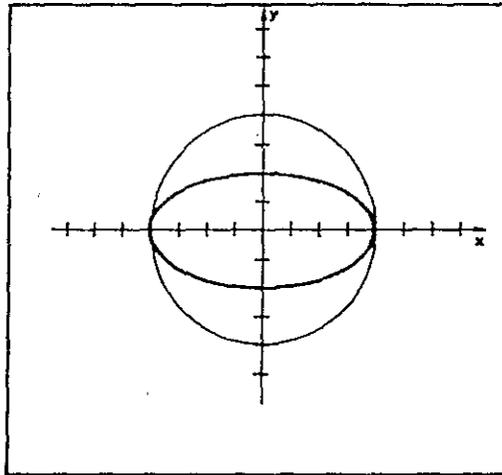
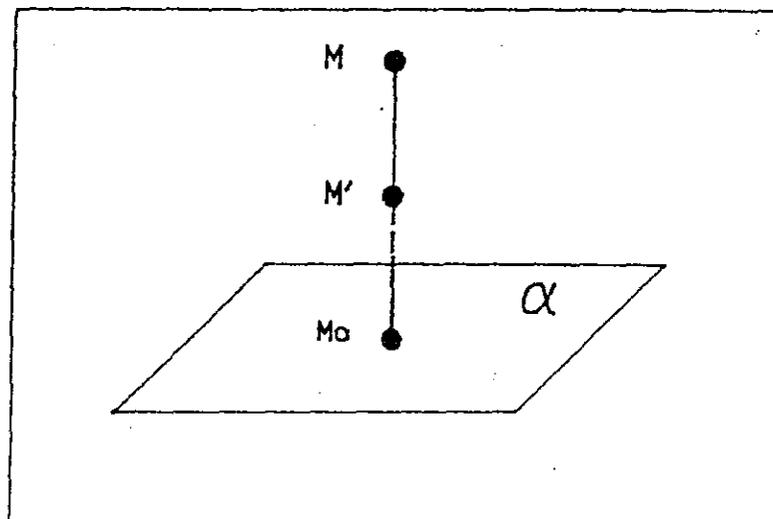


Figura 18

en la circunferencia. (Ver figura 18). Problemas similares también se resuelven en geometría analítica del espacio. Con respecto a estos problemas D. Kletenik en su libro Problemas de Geometría Analítica. Editorial MIR. págs. 216-217 escribe:

Consideremos ahora una transformación del espacio, llamada dilatación uniforme (o contracción uniforme).

Tomemos un plano arbitrario e indiquémoslo con la letra α . Sea q un número positivo. Supongamos que M es un punto arbitrario del espacio, situado fuera del plano α , y que M_0 es la base de la perpendicular bajada del punto M al plano α .



Traslademos el punto M , por la recta MM_0 , a una nueva posición M' , de manera que se verifique la igualdad $M_0M' = q(M_0M)$ y que el punto, en la nueva posición, esté al mismo lado del plano α en que se encontraba antes (figura 19). Hagamos lo mismo con todos los puntos del espacio situados fuera del plano α ; los puntos situados en el plano α los dejamos en su sitio. De este modo, todos los puntos del espacio, menos los que están situados en el plano α , cambian de posición; la distancia de cada punto al plano α se altera en una cantidad de veces determinada, que es común para todos los puntos. El traslado de los puntos del espacio, efectuado de la manera descrita se llama *contracción uniforme hacia el plano α (o dilatación)*; el número q es el *coeficiente de contracción (o dilatación)*.

Supongamos que se ha dado una superficie F : los puntos que la componen se trasladan, como resultado de la contracción, y en sus nuevas posiciones forman una superficie F' . Diremos que la superficie F' se ha obtenido de la superficie F como resultado de una *contracción (o dilatación) uniforme del espacio*. Resulta que muchas superficies de segundo orden (todas menos el paraboloides hiperbólico) se pueden obtener de las superficies de revolución mediante una *contracción uniforme del espacio*.

Podemos utilizar lo anterior para demostrar que el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ se puede obtener a partir de una superficie de revolución mediante una contracción. Así $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ es una superficie de revolución, hagamos ahora una contracción del espacio hacia el plano xy con $x=x'$, $y=y'$ y $z = \frac{a}{c} z'$ de donde resulta

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} z'^2 \cdot \frac{1}{a^2} = 1 \text{ es decir } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Lo anterior permite bosquejar la gráfica del elipsoide, primero bosquejando la gráfica de la superficie de revolución y después la superficie que resulta después de la transformación (ver figuras 20 y 21).

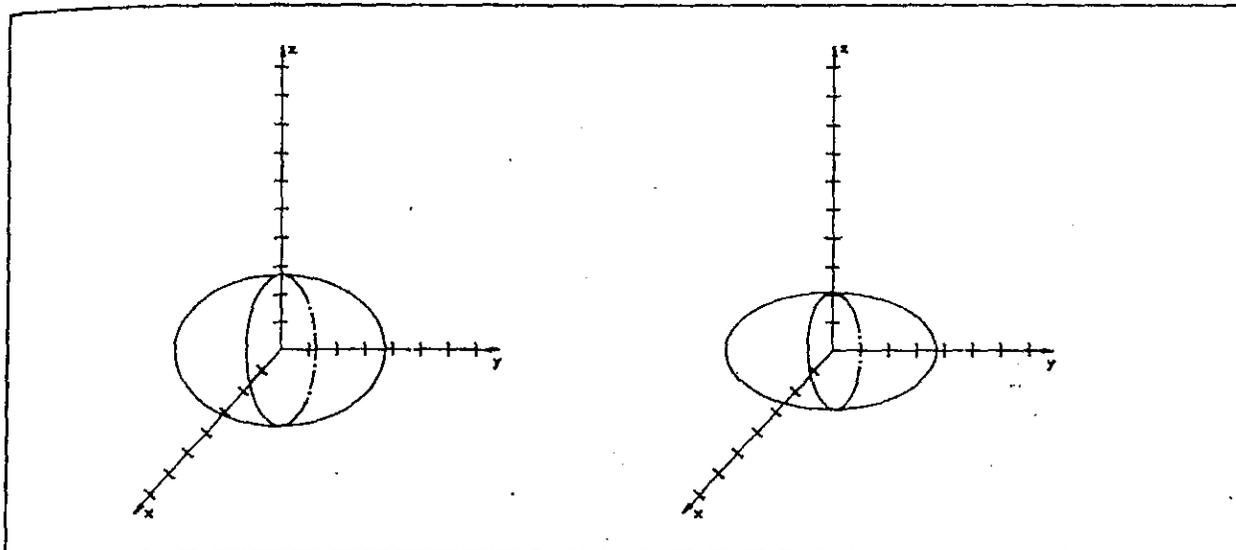


Figura 20

Figura 21

De igual manera el poder bosquejar las superficies de revolución $z = a^2x^2 + a^2y^2$, $z = \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2}$ permite bosquejar las superficies $z = a^2x^2 + b^2y^2$, $z = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$ que se obtienen de los anteriores después de una contracción.

Es claro que en algunos casos no se puede identificar rápidamente el tipo de superficie que se quiera graficar y se necesite hacer un trabajo previo como lo muestran los siguientes ejemplos:

- i) Se desea graficar $z = xy$. Al graficar sus curvas de nivel se identifica por geometría analítica plana que estos se pueden obtener a partir de las curvas de nivel de $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ después de una rotación de ejes, esto significa que bosquejar la gráfica de $z = xy$ se reduce a bosquejar la gráfica de una superficie de la forma $z = f(x) + g(y)$.
- ii) El saber que $y^2 + z^2 = x^2$ es una superficie de revolución (un cono con eje en el eje x) ayuda a identificar a $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ como la mitad de un cono y esto a la vez ayuda a saber que $z = \sqrt{xy}$ también es una mitad de un cono.
- iii) $z = x^2 + 2xy + y^2$ se puede bosquejar porque $z = (x+y)^2$

GRAFICA DE UNA FUNCION $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ DONDE \mathbb{R}^3 ES UN EJE NUMERICO
DEFINIDO SOBRE UNA RECTA EN EL ESPACIO

En el siguiente capitulo se plantearán algunos problemas donde se manejarán funciones que asocian a cada punto del espacio un número real y sera de interes conocer solamente los valores de las funciones en subconjuntos especiales del espacio: en líneas rectas.

Ejemplo. En una region por donde se mueve un insecto, se ha definido un sistema coordinado tridimensional y se conoce que la temperatura T en cada punto $P(x,y,z)$ es $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$. Calcular la temperatura que actua sobre el insecto despues de haberse alejado a) 1, b) 5 y c) t unidades de distancia del punto $(4, -1, 3)$ donde parti6 sabiendo que se está moviendo en la dirección $\langle 4, 12, 3 \rangle$.

Se sabe que el vector $\langle \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13} \rangle$ tiene magnitud 1 y que la punta del vector $\langle 4, -1, 3 \rangle + \langle \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13} \rangle$ con punto inicial en el origen, está sobre el punto que está a una unidad de distancia del punto $(4, -1, 3)$ y sobre la recta donde se mueve el insecto. Como el vector $5\langle \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13} \rangle$ tiene magnitud 5, entonces la punta del vector $\langle 4, -1, 3 \rangle + 5\langle \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13} \rangle$ con punto inicial en el origen, está en el punto que dista a 5 unidades del $(4, -1, 3)$ y sobre la recta donde se mueve el insecto; por último el vector $t\langle \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13} \rangle$ tiene t unidades de magnitud y por lo tanto la punta del vector $\langle 4, -1, 3 \rangle + t\langle \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13} \rangle$ señala el punto donde se encuentra el insecto despues de haberse alejado t unidades de distancia del punto $(4, -1, 3)$. Lo anterior sirve para concluir que la solución al problema planteado es:

a) $T(4 + \frac{4}{13}, -1 + \frac{12}{13}, 3 + \frac{3}{13}) = 4$

b) $T(4 + \frac{20}{13}, -1 + \frac{60}{13}, 3 + \frac{15}{13}) = 36$

c) $T(4 + \frac{4}{13}t, -1 + \frac{12}{13}t, 3 + \frac{3}{13}t) = t^2 + 2t + 1$



EL SABER DE NUESTROS
DIA PARA LA GRANDEZA

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Se pudo haber planteado el problema en una forma más general ya haber escogido $w = T(x, y, z)$ en lugar de $w = x^2 + y^2 + z^2 - 2z$, (x_0, y_0, z_0) en lugar de $(4, -1, 3)$ y (a, b, c) en vez de $(4, 12, 13)$ y en tal caso la solución a la pregunta ¿Cuál es la temperatura que actúa sobre el insecto justamente cuando ha recorrido t unidades de distancia? será

$$w = T\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, z_0 + \frac{ct}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

Es claro que a partir del problema que se acaba de plantear es posible construir una función real de variable real; así, en el caso particular planteado, se puede hablar de una función que asocia a cada número $t \geq 0$ (t representaba la distancia entre los puntos (x, y, z) y $(4, -1, 3)$ en la dirección $(4, 12, 13)$) el número $t^2 + 2t + 1$ (la temperatura que afectaba al insecto justamente cuando había recorrido t unidades de distancia) y por lo tanto se puede representar esta función en forma gráfica. El problema en el caso general también sugiere el estudiar funciones reales de variable real de la forma

$$z_0 = f(t) = w\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, z_0 + \frac{ct}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

con $w = f(x, y, z)$ y en particular sus gráficas.

CONJUNTOS DE NIVEL

Dada una función $w = f(x, y, z)$ que asocia a cada punto del espacio un número real no se puede hacer su gráfica pero sirve el concepto de conjunto de nivel para dar una representación geométrica de ella. Se utilizará este concepto cuando se resuelvan algunos problemas de máximos y mínimos por el método de multiplicadores de Lagrange y estará ligado al concepto de gradiente de una función $w = f(x, y, z)$. El concepto de conjunto de nivel de $w = f(x, y, z)$ es análogo al concepto de curva de nivel de $z = f(x, y)$ como se verá a continuación.

Dada la función $w = 2x + 2y + z$, al conjunto de puntos del espacio a los cuales les corresponde el valor $w = 4$, se le

satisfacen la ecuación $2x + 2y + z = 4$, esto significa que el conjunto de nivel de valor 4 de $w = 2x + 2y + z$ es el plano $2x + 2y + z = 4$. Si k es un número real, al conjunto de puntos (x, y, z) del espacio a los cuales les corresponde el valor $w = k$, se llama conjunto de nivel de valor k de $w = 2x + 2y + z$. Es claro que el conjunto de nivel de valor k , $2x + 2y + z = k$ representa un plano para cada valor de k .

Consideremos ahora la función $w = x^2 + y^2 + z^2$. Al conjunto de puntos del espacio a los cuales les corresponde el valor $w = k$ se llama conjunto de nivel de valor k de $w = x^2 + y^2 + z^2$. Si $k < 0$, no hay puntos que satisfagan $x^2 + y^2 + z^2 = k$; si $k = 0$, el $(0, 0, 0)$ es el único punto que satisface $x^2 + y^2 + z^2 = k$; si $k > 0$, los puntos de la esfera con centro en $(0, 0, 0)$ y radio \sqrt{k} son los que satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 = k$.

Más generalmente, dada una función $w = f(x, y, z)$ y un número real k , al conjunto de puntos del espacio a los cuales les corresponde el valor $w = k$ se llama CONJUNTO DE NIVEL DE VALOR k de $w = f(x, y, z)$.

En el caso de la función $w = 2x + 2y + z$, los conjuntos de nivel son planos paralelos, todos perpendiculares al vector $\langle 2, 2, 1 \rangle$ y en el caso de la función $w = x^2 + y^2 + z^2$, los conjuntos de nivel de valor k son esferas concéntricas con centro en $(0, 0, 0)$ y radio \sqrt{k} , si $k > 0$; un punto si $k = 0$ y el conjunto vacío si $k < 0$.

En esta parte El concepto de conjunto de nivel de valor c se puede definir en general para una función f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} como el conjunto de puntos x de \mathbb{R}^n tales que $f(x) = c$. Si $n = 2$ es costumbre hablar de una curva de nivel. Si $n = 3$ nos referiremos a una superficie de nivel.

DIFERENCIACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

INTRODUCCION

Este capítulo contiene los siguientes temas:

1. Funciones de dos o mas variables
2. Derivadas parciales
3. Derivada direccional
4. Plano tangente
5. Diferencial
6. Gradiente
7. Regla de la cadena
8. Máximos y mínimos de una función de dos variables
9. Multiplicadores de Lagrange

Los temas de este capítulo se discuten observando el siguiente

Utilizar el cálculo de una variable y la geometría analítica tanto para motivar las definiciones que se involucran en los problemas de este capítulo como para encontrar las técnicas necesarias que permitan la solución de los mismos.

En este capítulo las definiciones de los conceptos más importantes del cálculo de funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} ($n = 2, 3$) se motivan a partir de problemas aunque en los textos tradicionales por lo general se presentan primero las definiciones de los conceptos y después se plantean problemas donde se involucran dichos conceptos. Los problemas sobre razón de cambio y rectas tangentes a una curva dan lugar a los conceptos de derivada parcial y derivada direccional se reducen a problemas de cálculo de una variable; lo mismo sucede con los problemas sobre cálculos aproximados que dan lugar al concepto de diferencial. El concepto de plano tangente se discute a partir de los conceptos de la geometría analítica del

discusión más cuidadosa sobre el concepto de plano tangente. También se utiliza la geometría analítica del espacio y el cálculo de una variable en la discusión de la definición y las propiedades del concepto de gradiente. La regla de la cadena se enuncia pero no se demuestra, aunque se dan argumentos físicos y geométricos para justificar cómo hallar $\frac{dz}{dt}$ en caso de que $z = f(x,y)$, $x = g(t)$ y $y = h(t)$. La regla de la cadena se utiliza para calcular la derivada direccional, el diferencial y el gradiente de una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} . También se utiliza para hallar una relación entre las superficies de nivel y el gradiente de una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} .

Se estudian dos métodos para resolver problemas de optimización. El primer método se obtiene con ayuda del cálculo de una variable y de la regla de la cadena y nos permite determinar la naturaleza de los puntos críticos de una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . El segundo, llamado método de los multiplicadores de Lagrange, se motiva con ayuda de la geometría analítica, el concepto de gradiente y los conceptos de curva y superficie de nivel.

1. FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

Si bien las funciones que se estudian en el cálculo de una variable son útiles para modelar muchos fenómenos, ellas no son suficientes para representar todos los fenómenos que el hombre trata de estudiar. Veamos algunos ejemplos de situaciones donde los modelos matemáticos que se tienen que considerar son funciones que se salen del campo del cálculo de una variable.

a) En geometría elemental aprendimos que la fórmula para el área de un rectángulo es el producto de la base x y la altura y , esto es $A = xy$. El área A por lo tanto depende de dos cantidades y si una de ellas o las dos varían, A también varía. La variable A es una función de dos variables x, y . Notemos que x, y pueden variar sin depender el valor que tome una del valor que tome la otra, esto es, no importa qué valor asignemos a x , podemos asignarles a y cualquier otro valor, de aquí que x, y sean variables independientes y A sea variable

dependiente. Si queremos estudiar el comportamiento del área A cuando las dimensiones del rectángulo varían, debemos tratar a A como una función de ambas variables.

Sabemos por geometría elemental que el volumen de una caja de dimensiones x , y , z es $V = xyz$. El valor de V depende del valor que le asignemos a x , y , z . Si queremos estudiar el comportamiento del volumen V cuando las dimensiones de la caja varían, debemos tratar a V como una función de las tres variables x , y , z .

Suponga que tenemos una lámina de metal tan delgada que podemos representarla como un rectángulo. Sea $ABCD$ (figura 22) este rectángulo. Si aplicamos calor al lado AB , el calor se transmitirá a lo largo de la placa. Si deseamos estudiar la temperatura T en algún punto P de la lámina, podemos

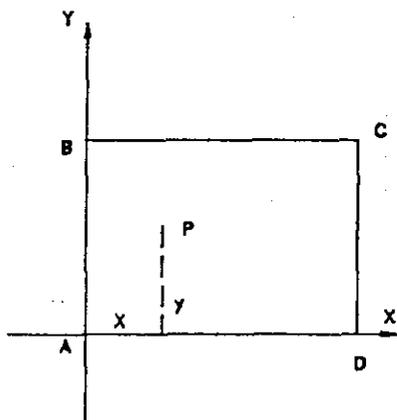


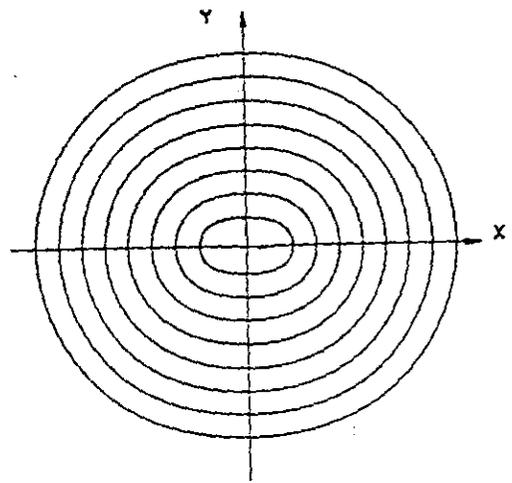
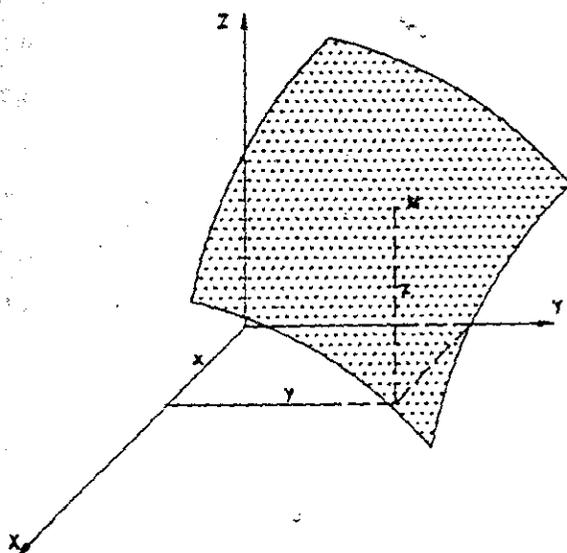
Figura 22

especificar, la posición de P introduciendo coordenadas x , y por lo tanto la temperatura T dependerá de x , y pero también variará con el tiempo t . Así T es una función de tres variables independientes x , y , t .

Existen muchos otros problemas en la geometría, en la física y en general en la ciencia que se modelan por medio de funciones de más de una variable y que se pueden atacar gracias a la teoría que se ha construido a costa de querer resolverlos.

En este trabajo se estudiarán algunos de los conceptos más importantes relacionados con las funciones de más de una variable. En la discusión de dichos conceptos se utilizarán principalmente funciones de dos variables, las cuales se denotarán por medio del símbolo $z = f(x, y)$; funciones de tres variables que se simbolizarán por medio de $w = f(x, y, z)$.

En cálculo elemental se vio que en general una función de una variable $y = f(x)$ se puede representar geoméricamente en un plano ordenado por medio de una curva. Una función de dos variables $z = f(x, y)$ se puede visualizar por lo general como una superficie usando un sistema de coordenadas en el espacio (ver figura 23). Hay otro método muy útil para representar geoméricamente las funciones de la forma $z = f(x, y)$ llamado el método de las curvas de nivel. Como ya se vio en la sección 2 del capítulo anterior, este método consiste en tomar una sucesión de números k_1, k_2, \dots y luego graficar en el plano xy las curvas de nivel $f(x, y) = k_1, f(x, y) = k_2, \dots$ (ver figura 24).



Como ya se comentó en el capítulo I, no es posible hacer la gráfica del espacio del conjunto de 4-adas (x, y, z, w) tales que $w = f(x, y, z)$ pero es posible dar una representación geométrica para $w = f(x, y, z)$ mediante el uso de superficies de nivel tal como se hizo en la última sección del capítulo anterior. Recordemos que se hace de la siguiente manera: elige una sucesión de números k_1, k_2, \dots y se grafican las superficies de nivel $f(x, y, z) = k_1, f(x, y, z) = k_2, \dots$. Las gráficas de $f(x, y, z) = k_1, f(x, y, z) = k_2, \dots$ proporcionan una representación geométrica para $w = f(x, y, z)$.

DERIVADAS PARCIALES

Un problema importante que se resuelve en el curso de cálculo de una variable es dada una función $y = f(x)$, hallar la razón de cambio de y con respecto a x . En el caso de las funciones de dos o tres variables se pueden considerar varias razones de cambio diferentes.

Así, en el cálculo de una variable se plantean problemas como el siguiente. Un insecto se mueve por un alambre recto y delgado. En él se ha introducido un sistema coordenado. Se le ha aplicado calor al alambre y se sabe que en el punto x la temperatura es $T(x) = 8 - x^2$. Hallar la velocidad con que crece o decrece la temperatura que actúa sobre el insecto cuando está en la posición $x = 1$ y se mueve con una rapidez de 1 unidad lineal por segundo en la dirección a) positiva, b) negativa.

Un problema de razón de cambio donde se involucre una función de tres variables es el siguiente:

Un insecto se mueve por una placa de metal tan delgada que puede ser considerada como un rectángulo. En él se ha introducido un sistema coordenado. Se le aplica calor a la lámina y se sabe que en el punto (x, y) la temperatura es de $T(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$. Hallar la velocidad con que crece o decrece la temperatura que actúa sobre el insecto cuando éste ocupa la posición $(2, 3)$, si recorre una unidad lineal por segundo.

dirección $\langle 0, -1 \rangle$; e) la dirección $\langle 3, 4 \rangle$; f) la curva $y = x^2 - 1$, tomando valores crecientes de x ; g) la curva $y = x^3 - 5$, tomando valores decrecientes de x (figura 25)

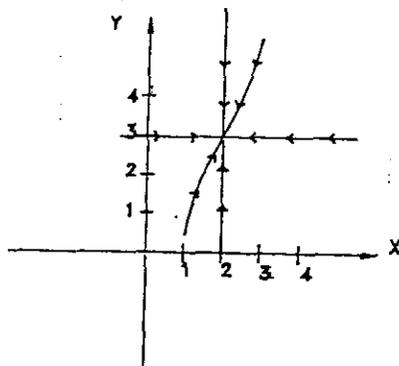


Figura 25

6. Un problema de razón de cambio donde se involucre una función de tres variables es el siguiente:

- (2) En una región por donde se mueve un insecto, se ha introducido un sistema coordenado tridimensional y se sabe que la temperatura T en cada punto $P(x, y, z)$ es $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$. Hallar la velocidad con que crece o decrece la temperatura que actúa sobre el insecto cuando éste ocupa la posición $(4, -1, 3)$ si recorre una unidad lineal por segundo y se mueve siguiendo a)
- a) la dirección $\langle 1, 0, 0 \rangle$;
 - b) la dirección $\langle 0, 1, 0 \rangle$;
 - c) la dirección $\langle 0, 0, 1 \rangle$;
 - d) la dirección $\langle 4, 12, 3 \rangle$;
 - e) siguiendo la curva $x = t + 1$, $y = t^2 + 1$, $z = t^3 + 3$, tomando valores crecientes de t .

Al revisar los problemas que se acaban de plantear vemos que también en el caso del movimiento a través de un alambre es posible acercarse a $x = 1$ por dos distintas direcciones, en el caso de movimiento a través de la lámina de metal y en el caso de movimiento en el espacio es posible acercarse a un punto P de muchas formas diferentes y no necesariamente siguiendo un camino rectilíneo.

En esta sección estamos interesados en resolver problemas de razón de cambio donde se involucran funciones de dos o tres variables y se considerarán sólo las direcciones positivas de los ejes coordenados.

En cálculo de una variable además de resolver problemas de razones de cambio también se resuelve el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto P de ella. En cálculo de varias variables además de resolver problemas de razones de cambio también se resuelve el problema de hallar la pendiente de la recta tangente a una sección de una superficie $z = f(x, y)$, aunque en esta sección sólo trabajaremos con secciones en las direcciones $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ de funciones $z = f(x, y)$.

Resolvamos pues, los problemas (1) y (2) y trabajemos sólo con las direcciones positivas de los ejes, los demás casos se considerarán en otras secciones.

Fig. 1 Solución al problema (1) a). Que el insecto se mueva en la dirección $\langle 1, 0 \rangle$ y pase por $(2, 3)$ significa que se mueva por los puntos del plano xy de la forma $(x, 3)$. Si pensamos que en el tiempo $T = 0$ el insecto está en el punto $(0, 3)$ entonces en el tiempo $T_* = t$ estará en el punto $(t, 3)$ y por lo tanto en el tiempo $T_* = t$ la

temperatura T que actúa sobre el insecto será $T(t) = \sqrt{49 - t^2} - 9 =$

$= \sqrt{40 - t^2}$. Esto significa que la velocidad con que varía la temperatura en el tiempo $t = 2$ es $\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=2} = -\frac{1}{3}$. Procediendo de

igual manera encontramos que la solución para (1) b) es $-\frac{1}{2}$.

Más generalmente, si se considera el punto (x_0, y_0) en lugar de $(2, 3)$, siguiendo pasos similares, encontramos que la solución para

(1)a) es $\frac{-x_0}{\sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2}}$ y para (1) b) $\frac{-y_0}{\sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2}}$.

Solución al problema (2)a). Que el insecto se mueva en la dirección $\langle 1, 0, 0 \rangle$ y pase por el punto $(4, -1, 3)$ significa que se está moviendo por los puntos del espacio de la forma $(x, -1, 3)$. Si pensamos que en el tiempo $T = 0$ el insecto está en el punto

$(0, -1, 3)$ entonces en el tiempo $T_* = t$ estará en el punto $(t, -1, 3)$ por lo tanto la temperatura T que actúa sobre el insecto será $T(t) = t^2 - 15$, por lo tanto la velocidad con que varía la temperatura en el tiempo $t = 4$ es $\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=4} = 8$. Procediendo de manera similar encontramos que la solución para (2) b) es -2 y es 6 para (2) c).

Más generalmente, si trabajamos con el punto (x_0, y_0, z_0) e lugar de $(4, -1, 3)$, siguiendo el mismo procedimiento, encontramos que la solución para (2)a) es $2x_0$, para (2)b) $2y_0$ y para (2) c) $2z_0$.

Podemos decir que lo que realmente se hizo en el problema (1)a) fue: dada la función $T = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ con x , y como variables independientes, considerar cambios en el valor de x mientras y se mantenía fija. En este caso la función T se convirtió en una función de sólo la variable x y la noción de razón de cambio instantánea o derivada se aplicó a T como función de sólo una variable. Para indicar que estamos considerando la razón de cambio de T como función únicamente de x , usamos las notaciones $\frac{\partial T}{\partial x}$ o T_x y llamaremos a esta derivada, la derivada parcial de T con respecto a x . Así para $T = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}$. De manera similar se

puede hablar de la derivada parcial de T con respecto a y cuyo símbolo es $\frac{\partial T}{\partial y}$ (o T_y). En este caso $\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}$.

Ya que en el actual proceso de diferenciación en el que estamos interesados no es más que una derivada ordinaria, no necesitamos conocer nuevas técnicas para calcular derivadas parciales: tenemos solamente que recordar que al calcular una derivada parcial con respecto a x , y es tratada como una constante.

La noción de derivada parcial se puede extender fácilmente a funciones de tres o más variables. Así, si consideramos la función del problema (2) $T = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, podemos considerar la razón de cambio de T con respecto a x o con respecto a y o con respecto a z . Si deseamos hallar la razón de cambio de T con respecto a una de las variables independientes, las otras dos deben mantenerse fijas. Encontramos entonces que $\frac{\partial T}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 2y$ y $\frac{\partial T}{\partial z} = 2z$.

También la noción de diferenciación se extiende a derivadas de orden superior. Si consideramos la función $z = x^3 + 2xy^2$, tenemos $z_x = 3x^2 + 2y^2$ y $z_y = 4xy$ y podemos preguntarnos por la derivada parcial de z_x con respecto a x que se indica por z_{xx} . Así la derivada parcial de z_x con respecto a x es $z_{xx} = 6x$. Podemos preguntarnos por la derivada parcial de z_y con respecto a y representada por z_{yy} y en este caso $z_{yy} = 4x$. Hay sin embargo, otras dos derivadas parciales que pueden ser consideradas. Ya que z_x también es una función de x y y podemos preguntar por la derivada parcial de z_x con respecto a y . Esta derivada parcial se indica como z_{xy} y en nuestro ejemplo $z_{xy} = 4y$. De igual manera podemos preguntarnos por la derivada parcial de z_y con respecto a x (z_{yx}) y ya que $z_y = 4xy$, $z_{yx} = 4y$.

Hemos usado la notación $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ así como z_x y z_y para las primeras derivadas parciales de z . Para las segundas derivadas parciales existe la notación correspondiente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ y } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

En el caso de $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ se debe entender que primero se halla $\frac{\partial z}{\partial x}$ y luego se halla la derivada parcial de $\frac{\partial z}{\partial x}$ con respecto a y . En la notación z_{xy} se debe entender que primero se halla z_x y después la derivada parcial de z_x con respecto a y .

Interpretación geométrica de la derivada parcial

Queremos saber qué significa geoméricamente $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, si se sabe que $z = f(x, y)$ está definida en una región del plano en la que está el punto (x_0, y_0) . Para lograr lo que nos proponemos consideremos la sección C_1 en la dirección $\langle 1, 0 \rangle$ en el punto $(0, 3)$ de la superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ y tracemos una recta l_1 tangente a C_1 en el punto $P_1(2, 3, 6)$ (ver figura 26(a)). Se quiere saber cuál es la pendiente de la recta l_1 . Sabemos que la ecuación de la sección C_1 es $z_* = \sqrt{49 - t^2}$ (ver fig. 26(b)) y por el cálculo de una variable la pendiente de l_1 es $\left. \frac{dz_*}{dt} \right|_{t=2} = -\frac{1}{3}$. De manera similar, si se tiene la sección C_2 en la dirección $\langle 0, 1 \rangle$ en el punto

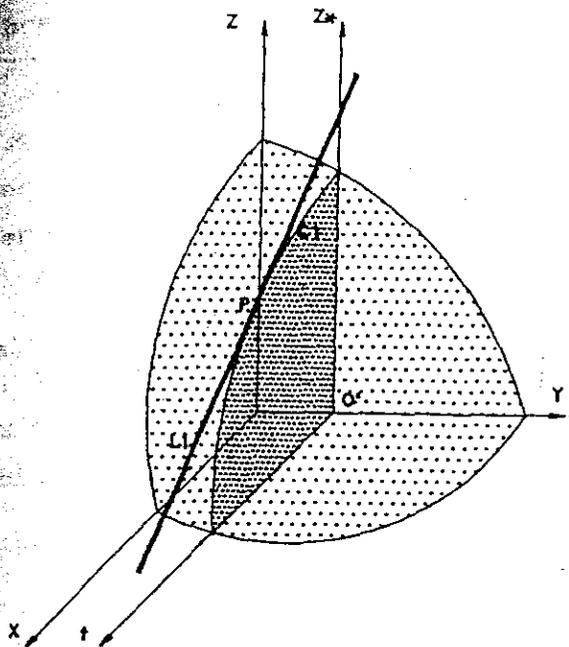


Figura 26(a)

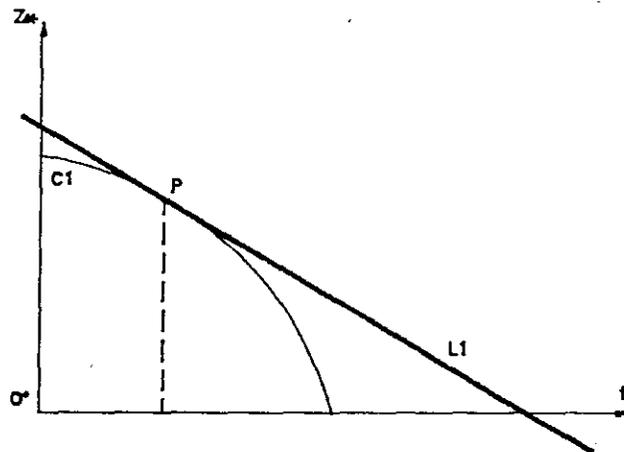


Figura 26(b)

(2,0) de la superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ y se traza la recta l_2 tangente a C_2 en el punto (2,3,6) encontramos que su pendiente es $-\frac{1}{2}$.

Más generalmente, si en lugar de (2,3,6) se escribe $P(x_0, y_0, \sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2})$ y se considera la sección C_3 en la dirección $\langle 1, 0 \rangle$ en el punto $(0, y_0)$ de la superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ entonces se puede concluir, haciendo pasos similares, que la pendiente de la recta l_3 tangente a C_3 en P es $\frac{-x_0}{\sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2}}$. De

manera similar, si se considera la sección C_4 en la dirección $\langle 0, 1 \rangle$ en el punto $(x_0, 0)$ de la superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ y se traza la recta l_4 tangente a C_4 en el punto P encontramos que su pendiente es $\frac{-y_0}{\sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2}}$.

Por lo tanto podemos decir que en el lenguaje de la geometría $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente en el punto

(x_0, y_0) de la superficie $z = f(x, y)$. Un significado similar es el de (x_0, y_0) .

Sobre la definición de derivada parcial

Si queremos dar una definición de derivada parcial con respecto a x de una función de dos variables $z = f(x, y)$, ésta debe ser adecuada en el sentido de que refleje lo que queremos y lo que queremos es que la derivada parcial con respecto a x de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) nos dé el valor de la pendiente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de la sección C en la dirección $\langle 1, 0 \rangle$ en el punto (x_0, y_0) de la superficie $z = f(x, y)$ y también nos dé el valor de la razón de cambio de $z = f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) .

Decimos esto porque cuando se halló la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, y_0, \sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2})$ de la sección en la dirección $\langle 1, 0 \rangle$ en el punto (x_0, y_0) de la superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$,

estuvo dada por $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{-x_0}{\sqrt{49 - x_0^2 - y_0^2}}$, igual respuesta se

obtuvo cuando se halló la razón de cambio de la temperatura $T = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) .

Para poder dar la definición que se desea, sirve el recordar que en el cálculo de una variable se presenta una situación similar: la razón de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x en $x = x_0$ y la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$ es la derivada de $y = f(x)$ con respecto a x .

Por lo tanto lo único que tenemos que hacer es adecuar la definición de derivada del cálculo de una variable a esta nueva situación. En cálculo de una variable se tomaban dos puntos $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$ sobre la curva $y = f(x)$, se hallaba la pendiente $m(h)$ de la recta que pasaba por estos puntos

$\left[m(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \right]$ y finalmente la pendiente m de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P está dada por $\lim_{h \rightarrow 0} m(h)$.

En este caso si queremos hallar la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, tomemos otro punto de la curva C $Q(x_0 + h, y_0 + k, f(x_0 + h, y_0 + k))$.

$m(h)$ de la recta que pasa por P y Q está dada por

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y la pendiente m de la recta tangente a la curva C en el punto P está dada por $\lim_{h \rightarrow 0} m(h)$. De aquí que la

definición que escogeremos para derivada parcial con respecto a x de $z = f(x, y)$ será:

DEFINICION. Sea f una función de dos variables. La derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Trabajando de manera análoga podemos llegar a la definición de derivada parcial con respecto a y de una función $z = f(x, y)$ en un

punto (x_0, y_0) y se obtiene
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Se puede hacer una discusión parecida a la anterior para definir la derivada parcial con respecto a x de una función $w = f(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) , para obtener

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Definiciones similares podemos hallar para $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ y para $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

3. DERIVADA DIRECCIONAL

Podemos ya resolver problemas de razón de cambio instantánea de $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) cuando (x, y) toma valores en la dirección de alguno de los ejes x o y . Ahora nos proponemos hallar la razón de cambio instantánea de $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) cuando (x, y) toma valores a lo largo de una recta que pasa por (x_0, y_0) . Veamos primero un problema particular.

Un insecto se mueve en línea recta en la dirección $\langle 3, 4 \rangle$ sobre una placa de metal plana que está sobre un plano coordenado xy . La temperatura T en el punto (x, y) está dada por

donde la temperatura se mide en grados y las distancias en centímetros. Calcule la velocidad con que el insecto siente que crece o decrece la temperatura cuando pasa por el punto (2, 3) si se mueve con una rapidez de 1 cm. por segundo.

Si acordamos en decir que en el tiempo $t = 0$ el insecto está en (2, 3) entonces tenemos que decir que en el tiempo t el insecto está en $(2, 3) + t(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, es decir, en $(2 + \frac{3}{5}t, 3 + \frac{4}{5}t)$.

Por lo tanto en este punto la temperatura es $T = \sqrt{49 - (2 + \frac{3}{5}t)^2 + (3 + \frac{4}{5}t)^2}$

$= \sqrt{36 - 7.2t - t^2}$. Calcular la velocidad con que cambia la temperatura en (2, 3) equivale a encontrar la derivada de T con respecto a t y evaluarla en $t = 0$. Como $T'(t) = -\frac{3.6+t}{\sqrt{36-7.2t-t^2}}$ y $T'(0) = -\frac{3}{5}$ entonces

la solución al problema planteado será $-\frac{3}{5}$ grados por segundo.

(3) El problema de hallar la razón de cambio instantánea de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) cuando (x, y) toma valores a lo largo de una recta que pasa por (x_0, y_0) lo podemos plantear también de la siguiente manera. Un insecto se mueve en línea recta en la dirección $\langle a, b \rangle$ sobre una placa de metal plana que está sobre un plano coordenado xy . La temperatura z en el punto (x, y) está dada por $z = f(x, y)$, donde la temperatura se mide en grados y las distancias en centímetros. Hallar la velocidad con que el insecto siente que crece o decrece la temperatura cuando pasa por el punto (x_0, y_0) si se mueve con una rapidez de 1 centímetro por segundo.

Acordemos en decir que cuando el insecto está en (x_0, y_0) el tiempo $t = 0$, así, en el tiempo t el insecto estará en el punto

$$\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

y la temperatura que siente el insecto en este punto es $z = f\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$, por

lo tanto calcular la velocidad con que crece la temperatura en (x_0, y_0) está dada por $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0}$. En las siguientes páginas

Encontraremos una expresión para $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0}$, en términos de $z_x(x_0, y_0)$ y (x_0, y_0) .

Veamos ahora un problema de geometría. Encontramos la pendiente de la recta tangente en el punto $P(2, 3, 6)$ a la sección C en la dirección $\langle 3, 4 \rangle$ en $(2, 3)$ de la superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$.

En las figuras 27(a) y 27(b) se muestra la curva C situada en el espacio y después se muestra cuando se toma como marco de referencia a los ejes $t - z_*$. De acuerdo con lo que vimos en el capítulo anterior, la ecuación de la sección C es

$z_* = \sqrt{36 - 7.2t - t^2}$. Las coordenadas de P con respecto al plano $t - z_*$ son $(0, 6)$, ya que las coordenadas de los puntos del espacio con los puntos del plano $t - z_*$ están relacionadas por las ecuaciones $(x, y) = (2, 3) + t\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $z = z_*$. Por lo tanto la pendiente de

la recta tangente a C en P es $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{3}{5}$

Resolvamos ahora un problema más general.

(4) Consideremos la sección C en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto (x_0, y_0) de la superficie $z = f(x, y)$; tracemos la recta l tangente a C en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y encontremos la pendiente de l .

Por lo visto en el capítulo anterior la ecuación de la sección C está dada por $z_* = f\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Las coordenadas de los puntos del plano $t - z_*$ están relacionadas con sus coordenadas con respecto al espacio xyz por medio de las

ecuaciones $(x, y) = \left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ y

$z = z_*$, por lo tanto las coordenadas de $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ respecto al plano $t - z_*$ son $(0, f(x_0, y_0))$, de aquí que la

pendiente de la recta l tangente a C en P sea $\left. \frac{dz_*}{dt} \right|_{t=0}$. Más adelante

encontraremos una expresión para $\left. \frac{dz_*}{dt} \right|_{t=0}$ en términos de $z_x(x_0, y_0)$ y

(x_0, y_0)

Sobre la definición de derivada direccional

Ahora nos proponemos dar una definición de la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto (x_0, y_0) y queremos que signifique $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0}$ donde $z = f\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ que fue la solución tanto del problema de razón de cambio planteado en (3) como del problema de hallar la pendiente de la recta tangente discutido en (4).

Como $\frac{dz}{dt}$ representa la derivada de una función real de variable real, será de utilidad recordar tanto el concepto como el significado geométrico de la derivada de este tipo de funciones. También nos servirá trabajar con la gráfica de C con referencia al espacio tridimensional y al plano $t - z_*$ (ver figuras 27(a) y 27(b)).

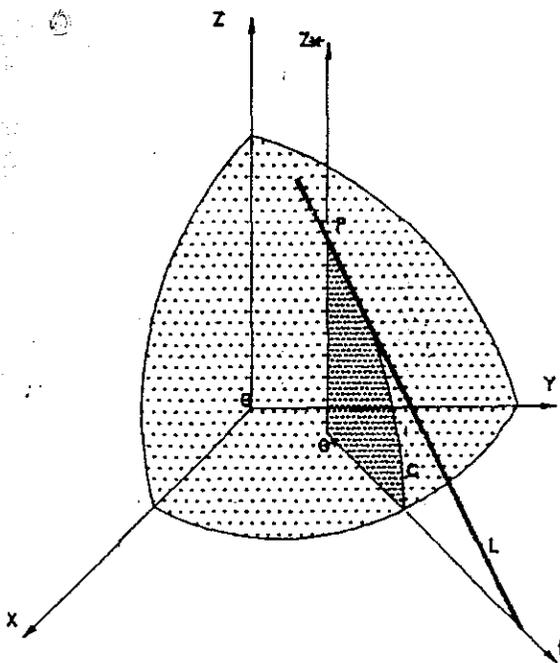


Figura 27(a)

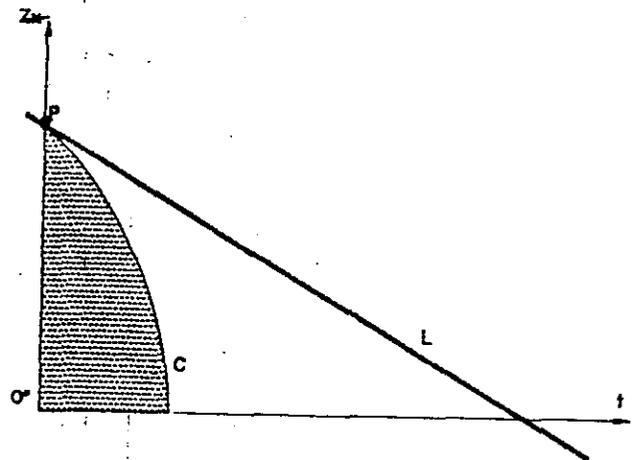


Figura 27(b)

Como queremos que la interpretación geométrica de la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto (x_0, y_0) sea la pendiente de la curva C de (4) con respecto al sistema $t - z_*$ definido en (4), tenemos que escoger dos puntos P y Q sobre C digamos $P(0, z(0))$ y $Q(h, z(h))$ (Ver figuras 27(a), 27(b)).

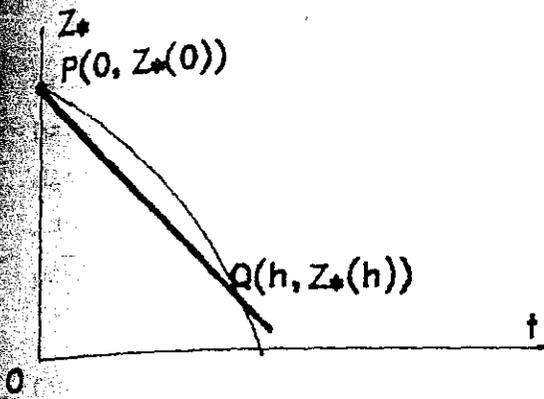


Figura 28(a)

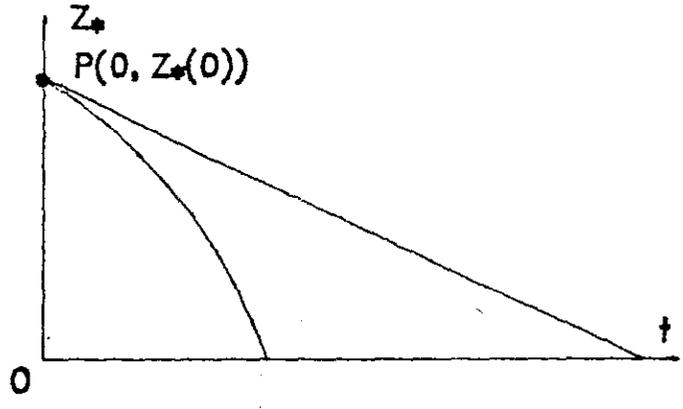


Figura 28(b)

La pendiente de la secante PQ que denotaremos por $m(h)$ es igual a $\frac{z_*(h) - z_*(0)}{h - 0}$ y la pendiente de la recta tangente es igual a

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(h) \text{ o sea } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_*(h) - z_*(0)}{h}$$

Ahora solamente tenemos que traducir las coordenadas de P y Q (que están escritas en el sistema $t-z_*$) al sistema de ejes x, y, z . $P(0, z_*(0))$ sería $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $Q(h, z_*(0))$ sería

$$Q \left[x_0 + \frac{ah}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 + \frac{bh}{\sqrt{a^2 + b^2}}, f \left(x_0 + \frac{ah}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 + \frac{bh}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right]$$

y la longitud h es la misma en ambos sistemas. Por lo tanto la expresión para $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_*(h) - z_*(0)}{h}$ en el sistema de ejes x, y, z será:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(x_0 + \frac{ah}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y_0 + \frac{bh}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ya podemos dar una definición de derivada direccional, sólo que en lugar de escoger un vector arbitrario $\langle a, b \rangle$ nos conviene escoger un vector unitario para que nuestra definición resulte más compacta.

DEFINICION. Sea f una función de x, y y $A = \langle a, b \rangle$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en la dirección A en (x_0, y_0) denotada por $D_A f(x_0, y_0)$ está dada por

$$D_A f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

En cálculo de una variable se usan técnicas de derivación para hallar la derivada de una función sin necesidad de obtenerlas directamente de la definición. Nosotros también veremos cómo hallar la derivada direccional por un camino más rápido que el que nos proporciona la definición.

Veamos un problema de razón de cambio donde se involucre una función de tres variables. Consideremos el problema (2) d) planteado anteriormente.

Cuando el insecto esté en $(4, -1, 3)$ siente una temperatura igual a 1. Después de t segundos de haber pasado por $(4, -1, 3)$ se encuentra a t unidades de $(4, -1, 3)$ y siente una temperatura igual a $T = \left(4 + \frac{4}{13}t\right)^2 + \left(-1 + \frac{12}{13}t\right)^2 + \left(3 + \frac{3}{13}t\right)^2 - 25 = t^2 + 2t + 1$. Por lo tanto la razón de cambio de T con respecto a t en $t = 0$ es $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 2$. A la razón de cambio de $T = t^2 + 2t + 1$ con respecto a t en $t = 0$ también la llamaremos razón de cambio de $T = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ en $(4, -1, 3)$ en la dirección $\langle 4, 12, 3 \rangle$.

Se puede plantear un problema más general si se considera a $w = T(x, y, z)$ en lugar de $T = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, (x_0, y_0, z_0) en lugar de $(4, -1, 3)$ y $\langle a, b, c \rangle$ en lugar de $\langle 4, 12, 3 \rangle$, en cuyo caso la temperatura que siente el insecto después de haberse alejado t unidades de distancia de (x_0, y_0, z_0) es

$$w = T\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z_0 + \frac{ct}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

por lo tanto la velocidad con que aumenta o disminuye la temperatura que actúa sobre el insecto cuando ocupa la posición (x_0, y_0, z_0) está dada por $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$.

A la razón de cambio de T con respecto a t en $t = 0$ que se acaba de encontrar también le llamaremos derivada direccional de

El problema que acabamos de resolver sugiere un camino para llegar a la definición de derivada direccional de una función de tres variables. No lo vamos a seguir, pero es similar al que seguimos cuando dimos la definición de derivada direccional para una función de dos variables. Sin embargo escribiremos una definición.

DEFINICION. Sea f una función de x, y, z y $A = \langle a, b, c \rangle$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en la dirección A en (x_0, y_0, z_0) denotada por $D_A f(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$D_A f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh, z_0 + ch) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Aunque la definición nos proporciona un método para hallar la derivada direccional de una función de tres variables desarrollaremos después una técnica para calcular la derivada direccional de manera más rápida.

4. PLANO TANGENTE

Consideremos la superficie S_1 $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ y un punto P de ella, digamos $P(2, 3, 6)$. Sabemos por geometría analítica que $2x + 3y + 6z = 49$ es la ecuación del plano tangente a S_1 en el punto P .

Sean C la sección en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto $(2, 3)$ de la superficie S_1 y ℓ la recta tangente a C en el punto P . Se desea saber qué relación existe entre la recta tangente ℓ y el plano tangente $2x + 3y + 6z = 49$. En el caso particular $\langle a, b \rangle = \langle 1, 0 \rangle$, se obtiene una sección C_1 cuya recta ℓ_1 tangente a C_1 en P tiene por ecuaciones paramétricas a $x = t + 2, y = 3, z = -\frac{1}{3}t + 6$. Estas ecuaciones satisfacen la ecuación $2x + 3y + 6z = 49$, por lo que podemos concluir que la recta tangente ℓ_1 está contenida en el plano tangente a la superficie S_1 en el punto P .

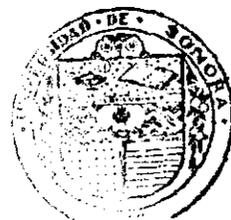
En el caso particular $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$, se obtiene una sección C_2 en P tiene por ecuaciones paramétricas a $x = 2, y = 3t + 3, z = -\frac{1}{2}t + 6$. Aquí también sucede que la recta tangente ℓ_2 está contenida en el plano tangente a la superficie S_1 en el punto P .

En el caso general, la recta ℓ tangente a la sección C en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto $(2, 3)$ de la superficie S_1 tiene por ecuaciones paramétricas $x = at + 2$, $y = bt + 3$ y $z = (\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b)t + 6$ que también satisfacen la ecuación del plano $3y + 6z = 49$, por lo que se puede concluir que todas las rectas tangentes a la superficie S_1 en el punto P pertenecen al plano tangente a la superficie S_1 en el punto P.

En lo sucesivo se estará interesado en superficies que tengan planos tangentes no perpendiculares al plano xy en cada uno de sus puntos. En cada caso, al igual que la superficie S_1 que se acaba de considerar el plano tangente a una superficie S en un punto P de ella, estará formado por el conjunto de todas las rectas tangentes a S en el punto P. En el apéndice 1 se hará una discusión sobre el concepto de plano tangente.

La discusión sobre el plano tangente a la superficie S_1 en el punto $(2, 3, 6)$ sugiere un camino que nos permite hallar la ecuación del plano tangente a una superficie S $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0, z_0) de ella. Hallemos, pues, la ecuación del plano tangente a la superficie S $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Como el plano tangente a S en el punto P contiene todas las rectas tangentes a S en el punto P, debe contener la recta ℓ_1 tangente a la sección C_1 en la dirección $\langle 1, 0 \rangle$ en el punto P de la superficie $z = f(x, y)$ y también debe contener la recta ℓ_2 tangente a la sección C_2 en la dirección $\langle 0, 1 \rangle$ en el punto P de la superficie $z = f(x, y)$. Como las ecuaciones paramétricas de ℓ_1 son $x = t + x_0$, $y = y_0$, $z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right]t + f(x_0, y_0)$ y las de ℓ_2 son $x = x_0$, $y = t + y_0$, $z = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]t + f(x_0, y_0)$ entonces la ecuación del plano que contiene tanto a ℓ_1 como a ℓ_2 es, por geometría analítica, $z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right](y - y_0) + f(x_0, y_0)$, que es la ecuación del plano tangente a S en P.



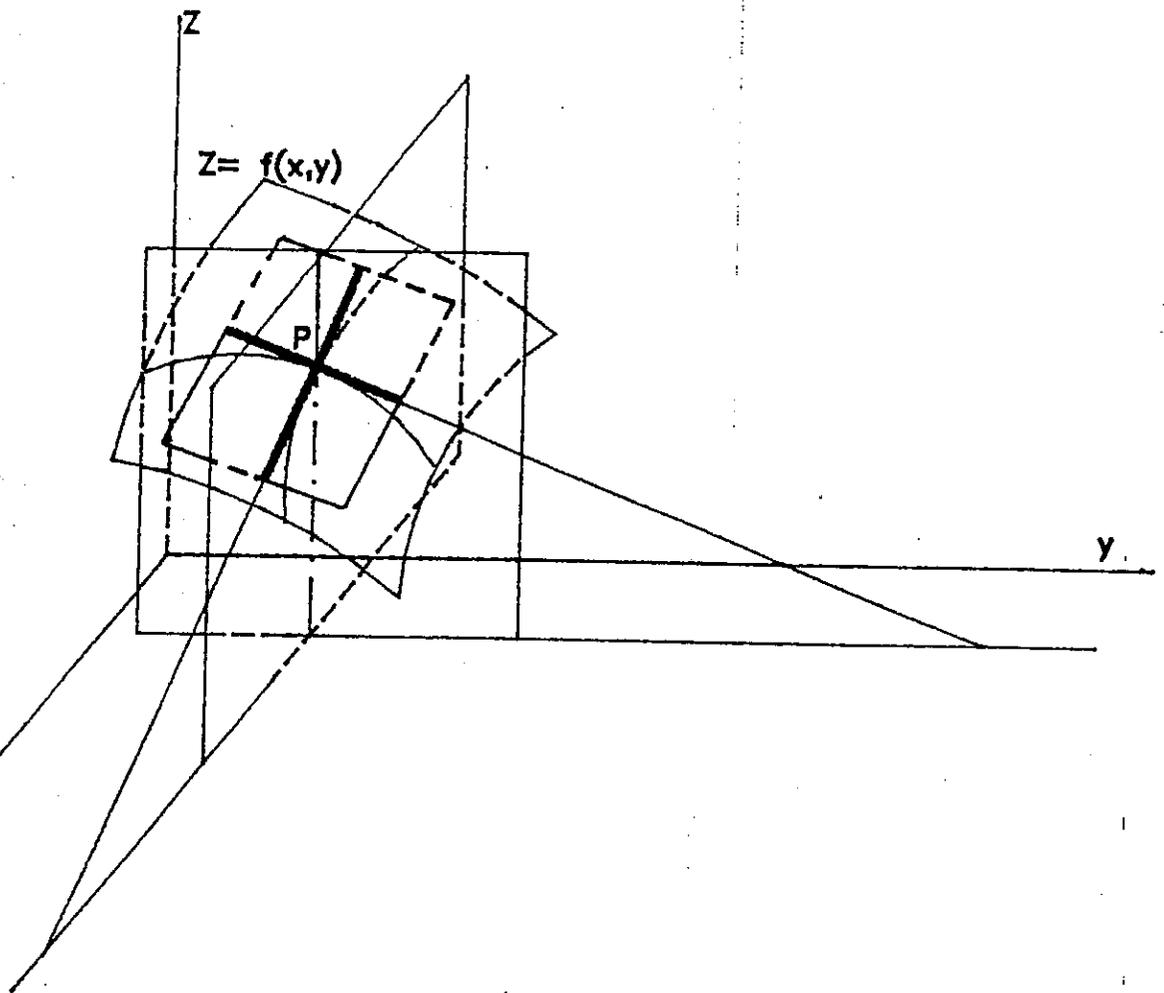


Figura 29 Plano tangente

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

En esta sección se motivará el concepto de diferencial para funciones de dos o tres variables por medio del concepto de diferencial de una función de una variable. Se usará el concepto de diferencial de funciones de dos o tres variables para hallar valores numéricos. Se darán argumentos geométricos para hallar una expresión analítica para la diferencial de una función de dos variables, posponiendo el encontrar una expresión analítica para la diferencial de una función de tres variables hasta cuando se estudie la regla de la cadena.

En el cálculo de una variable se usa el hecho de que una recta tangente a la curva $y = f(x)$ que pasa por $P(x_0, f(x_0))$, tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0 es la "mejor aproximación lineal" para $y = f(x)$ cerca de x_0 , para la cual $L(x_0 + \Delta x) - L(x_0)$ es la mejor aproximación lineal para

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

La ecuación $y = L(x)$ de la recta tangente es

$$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Se concluye que

$$L(x_0 + \Delta x) - L(x_0) = [f'(x_0)]\Delta x$$

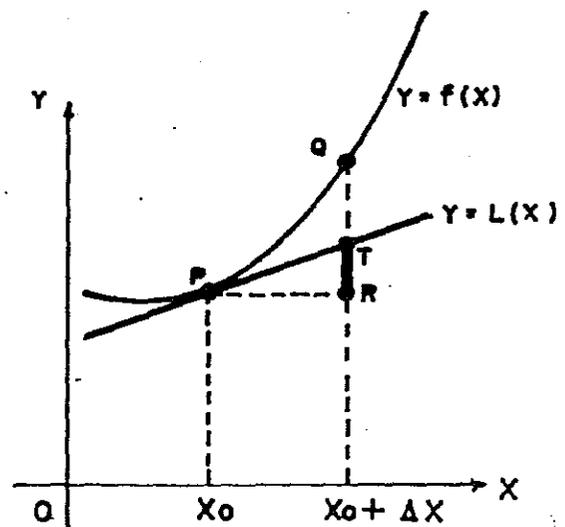
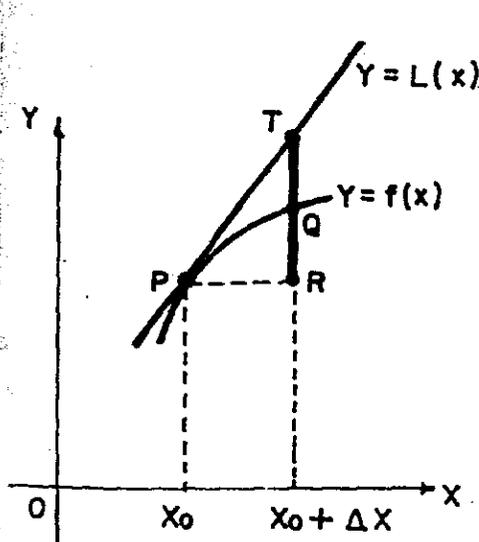


Figura 30. En la figura, AQ representa a $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ y RT al diferencial dv .
 Figura 31. En la figura, AQ representa a $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ y RT al diferencial dv .

$f'(x_0)\Delta x$ se le llama diferencial dy de $y = f(x)$ en $x = x_0$ con incremento Δx . Si se usa dx con el mismo significado que Δx resulta $[f'(x_0)]dx$. En las figuras 30 y 31, se da una interpretación geométrica para la diferencial dy de una función de una variable.

Usemos, ahora, el concepto de diferencial de una función de una variable, para hallar un valor aproximado de

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

donde

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Para lograr lo que se desea, consideremos únicamente los puntos del plano xy que están en la recta que pasa por (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y los correspondientes valores $f(x, y)$ asociados a ellos. Ver figura 32. Luego, construyamos un sistema de ejes $S-z$ de

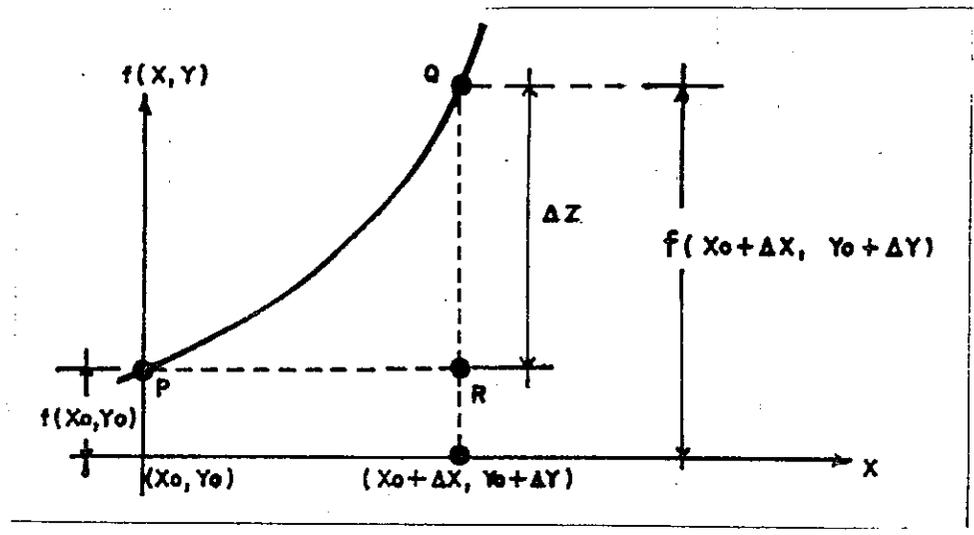


Figura 32. El segmento RQ representa a Δz .

la siguiente manera: en la recta que pasa por (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ seleccionemos como dirección positiva, la dirección del vector con punto inicial en (x_0, y_0) y punto final en $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, numeremos dicha recta con la misma escala con la que se numeraron los ejes xyz y asociemos al punto (x_0, y_0) el número cero. Así, hemos definido un eje numérico, que llamaremos eje S . De aquí que las coordenadas S de los puntos del eje S con las coordenadas (x, y) de los puntos del mismo eje S , están relacionadas

de las ecuaciones

$$x = x_0 + \frac{S(\Delta x)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \quad y = y_0 + \frac{S(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Los valores de z asociados a los puntos del eje S los tomamos por medio de z_* (es decir hacemos $z = z_*$), entonces, ya se puede traducir las coordenadas (x, y, z) de los puntos de la figura a coordenadas (S, z_*) . Así, el punto P tendría coordenadas $(0, f(x_0, y_0))$; Q tendría coordenadas $(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$, la curva PQ que es la sección en la dirección $\langle \Delta x, \Delta y \rangle$ en $P(x_0, y_0)$ de la superficie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ tendría por ecuación (ver sección 3 del capítulo I) a

$$z_* = S^2 + 2S \left[\frac{x_0(\Delta x) + y_0(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right] + x_0^2 + y_0^2$$

Así, hemos reducido el problema de trabajar con una función de dos variables a trabajar con una función de una variable. Veamos la figura 33, donde hemos trazado una recta tangente en P a la curva PQ . Esto nos dará una idea de cómo calcular un valor aproximado para Δz_* .

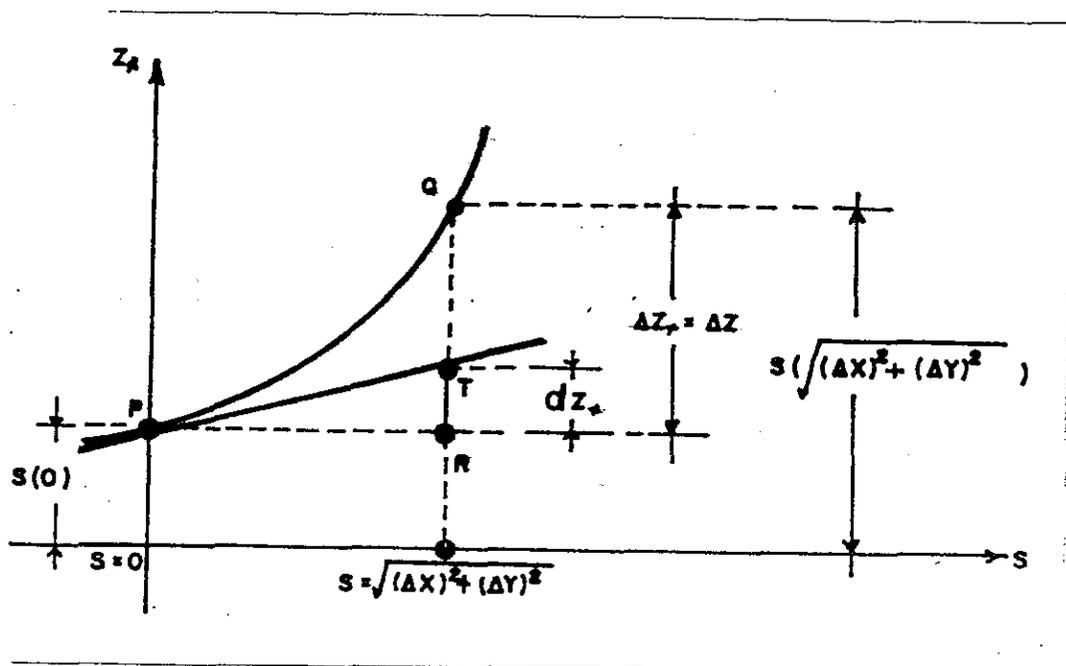


Figura 33. El segmento RT representa a dz_* .

El concepto de diferencial del cálculo de una variable y la figura 33 nos sugieren que RT es la "mejor aproximación lineal" para Δz , que en la figura 33 está representada por el segmento RQ.

$$RT = \left[\frac{dz}{dS} \Big|_{s=0} \right] \Delta S$$

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

o tanto

$$RT = 2x_0 (\Delta x) + 2y_0 (\Delta y)$$

$$= \left[\frac{\partial z}{\partial x} (x_0, y_0) \right] \Delta x + \left[\frac{\partial z}{\partial y} (x_0, y_0) \right] \Delta y$$

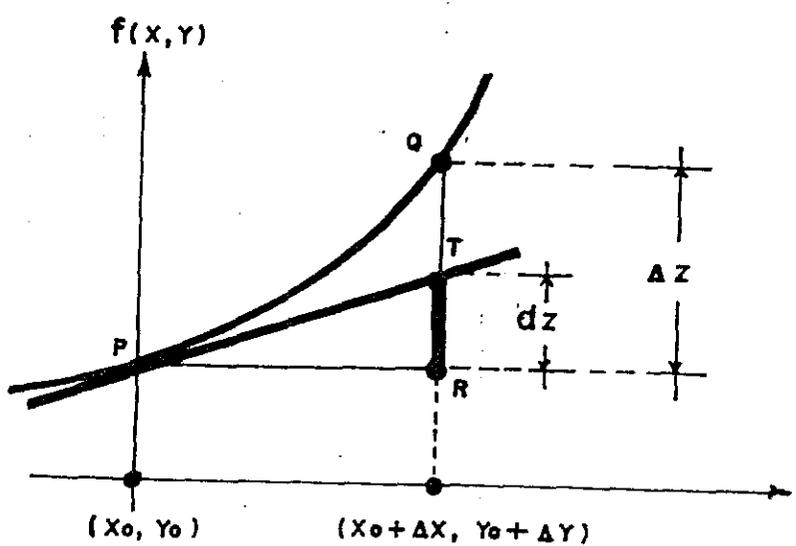
$$z = x^2 + y^2$$

Por lo que podemos decir que (1) es un valor aproximado, usando diferenciales, de Δz . A (1) le llamaremos la diferencial de $z = x^2 + y^2$ en (x_0, y_0) con incrementos Δx y Δy .

Ahora, queremos hallar un valor aproximado de

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

para una función $z = f(x, y)$, usando el concepto de diferencial de una variable. Será de utilidad la figura 34, donde están representados los puntos de la recta que pasa por (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y sus correspondientes valores de z asociados a ellos. Se quiere hallar un valor aproximado para Δz representado en la figura 34 por el segmento QR y será la medida del segmento RT,



erida por el cálculo de una variable, la que se escogerá como z y se aproximado para Δz y le llamaremos, la diferencial dz de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) con incrementos Δx y Δy .

Calcularemos la longitud del segmento RT , utilizando el hecho de que la recta PT tangente a la curva PQ en P está contenida en el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en P . Por lo que la longitud de RT será igual al incremento sobre el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en P . Así, si

$$z_* = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

es la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en P entonces

$$\begin{aligned} RT &= z_*(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z_*(x_0, y_0) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \Delta y. \end{aligned}$$

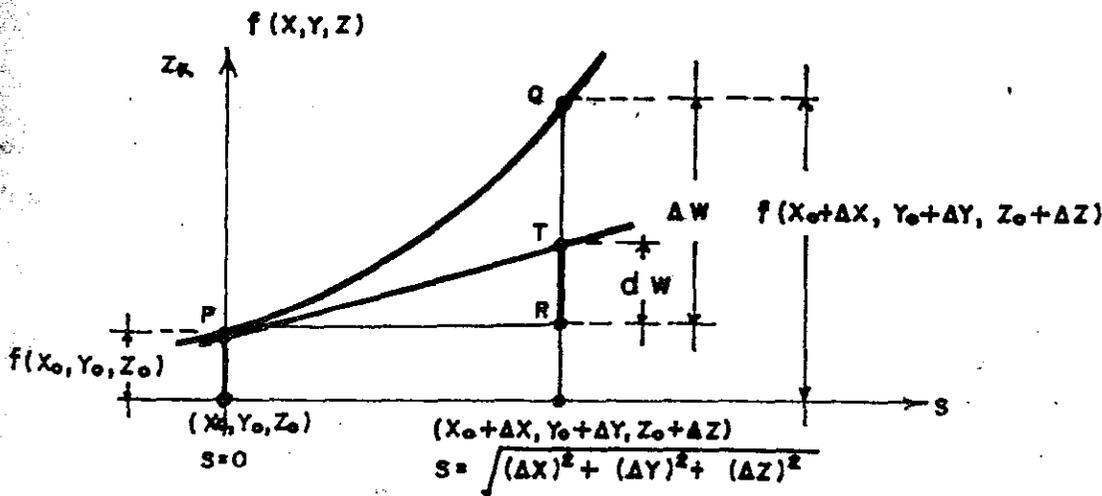
Lo anterior nos ayuda a dar la siguiente

DEFINICION. Sea $z = f(x, y)$. Se llama diferencial dz de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) con incrementos Δx y Δy a

$$dz = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \Delta y.$$

Si le damos el mismo significado a dx y Δx y hacemos lo mismo para dy y Δy , entonces la diferencial dz de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) con incrementos Δx y Δy toma la siguiente forma

$$dz = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] dy.$$



nos proponemos hallar una aproximación para $\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$ donde $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, usando el concepto de diferencial de una función de una variable. Para ello auxiliémonos de la figura 35. Vemos, a partir de la figura 35, que estamos ante una situación que es similar al problema de hallar una aproximación para $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ donde $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, sólo que ahora, tenemos que definir un eje S y una recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, hallar una función $z_* = f(S)$ para la curva PQ y una ecuación $z_1 = f(S)$ para la recta PT tangente a la curva PQ en P. No haremos estos cálculos, porque sería sólo repetir lo que se hizo cuando se halló una aproximación para $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ siendo $f(x, y) = x^2 + y^2$ (se puede ver la sección 6 del capítulo I para ver cómo se halla una ecuación $z_* = f(S)$ para la curva PQ).

Por el cálculo de una variable, la longitud del segmento RT es la mejor aproximación lineal para RQ (ver figura 35). De aquí que la longitud de RT representa geoméricamente lo que llamaremos la diferencial dw de $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en (x_0, y_0, z_0) con incrementos Δx , Δy y Δz .

Después de hallar las ecuaciones de la curva PQ y de la recta tangente PT con respecto al sistema de ejes $S-z_*$ de la figura 35 encontramos que

$$dw = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right] \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right] \Delta y + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right] \Delta z$$

donde

$$w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

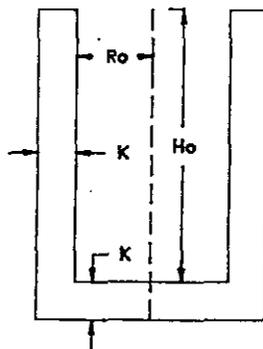
Con ayuda de la regla de la cadena que se estudiará más adelante y el concepto de diferencial de una función de una variable, se podrá encontrar que

$$dw = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right] \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right] \Delta y + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right] \Delta z$$

es la "mejor aproximación lineal" para Δw , donde $w = f(x, y, z)$. A dw le llamaremos la diferencial de $w = f(x, y, z)$ en (x_0, y_0, z_0) con incrementos Δx , Δy y Δz .

Utilicemos los conceptos de diferencial para funciones de dos y tres variables para resolver algunos problemas sobre valores aproximados.

Calcular el volumen del material necesario para fabricar un vaso cilíndrico de las dimensiones siguientes: (ver figura 36) radio exterior del cilindro R_o ; altura interior del cilindro H_o ; espesor de las paredes y del fondo del vaso, K .



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Figura 36

SOLUCION: Vamos a dar dos soluciones, la exacta y la aproximada. Para hallar la solución exacta encontremos el volumen del cilindro interior y el volumen del cilindro exterior y restemos el volumen menor al volumen mayor. Así, tendremos que el volumen del material necesario para fabricar el vaso es

$$\pi(R_o + K)^2(H_o + K) - \pi R_o^2 H_o = \pi(2R_o H_o K + R_o^2 K + H_o K^2 + 2R_o K^2 + K^3)$$

Demos ahora una solución aproximada para el volumen del cilindro exterior -volumen del cilindro interior. Sabemos que el volumen de un cilindro circular recto de radio R y altura H es $V(R, H) = \pi R^2 H$. Así, queremos hallar un valor aproximado para $V(R_o + K, H_o + K) - V(R_o, H_o)$ y el valor aproximado lo da dV , que es igual a

$$\left[\frac{\partial V}{\partial R}(R_o, H_o) \right] dR + \left[\frac{\partial V}{\partial H}(R_o, H_o) \right] dH, \text{ pero}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R}(R_o, H_o) = 2\pi R_o H_o, \quad \frac{\partial V}{\partial H}(R_o, H_o) = \pi R_o^2 \quad \text{y} \quad dR = dH = K$$

$$\text{Por lo tanto } dV = 2\pi R_o H_o K + \pi R_o^2 K = \pi(2R_o H_o K + R_o^2 K).$$

Si comparamos los valores exacto y aproximado que hemos encontrado, dando a R el valor de 4 cm, a H = 20 cm y a K = 0.1 cm., vemos que el valor exacto del volumen de material necesario para fabricar el vaso es 17.881π y el valor aproximado es 17.6π . Como este está entre el 98% y el 99% de 17.881π , podemos decir que dV da un valor aproximado con un error menor del 2% del valor exacto.

Vamos a resolver otro problema. El radio de un cilindro circular recto se mide con un error máximo de 2% y la altura se mide con un error máximo de 4%. Estimar el porcentaje máximo de error posible en el volumen calculado de V debido a estos errores.

SOLUCION: Sean r, h y V el radio, la altura y el volumen verdaderos del cilindro y sean Δr , Δh y ΔV los errores de estas cantidades.

Sabemos que $\left| \frac{\Delta r}{r} \right| \leq 0.02$ y $\left| \frac{\Delta h}{h} \right| \leq 0.04$. Se quiere estimar el máximo valor posible de $\left| \frac{\Delta V}{V} \right|$ y sabemos que $\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| \frac{dV}{V} \right|$. Como $V = \pi r^2 h$, $dV = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$, por lo tanto $\frac{dV}{V} = \frac{2}{r} \Delta r + \frac{1}{h} \Delta h$, así

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| \frac{2}{r} \Delta r + \frac{1}{h} \Delta h \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| = 2(0.02) + 0.04 = 0.08$$

Por lo tanto el porcentaje máximo de error de V es aproximadamente 8%.

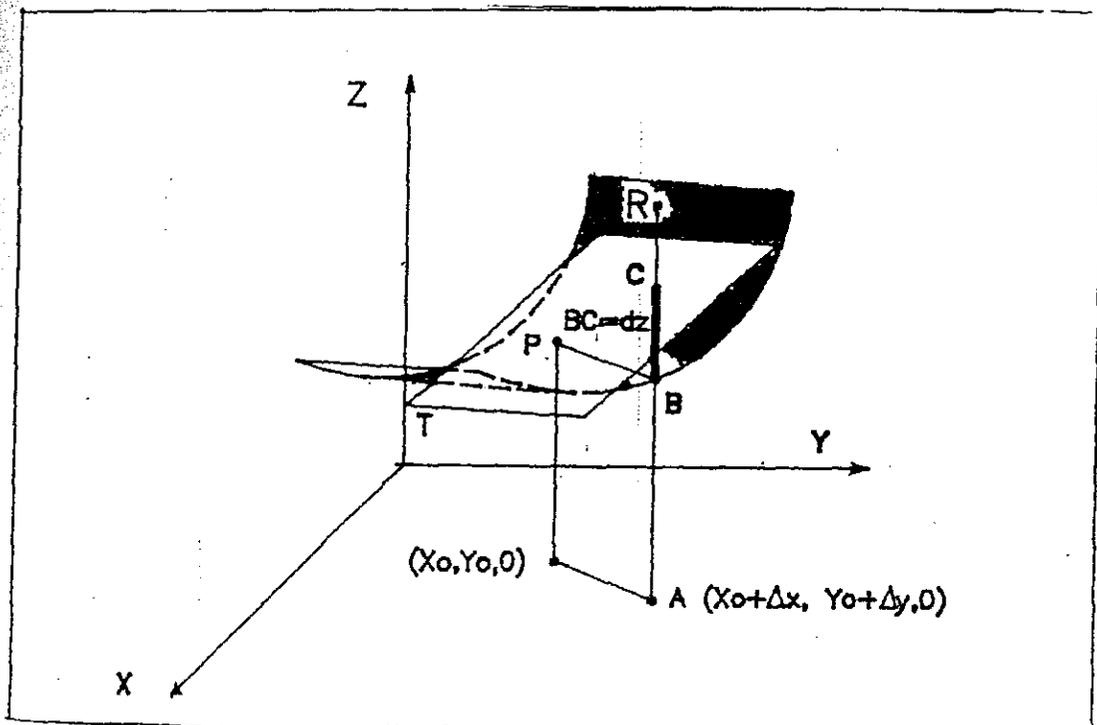
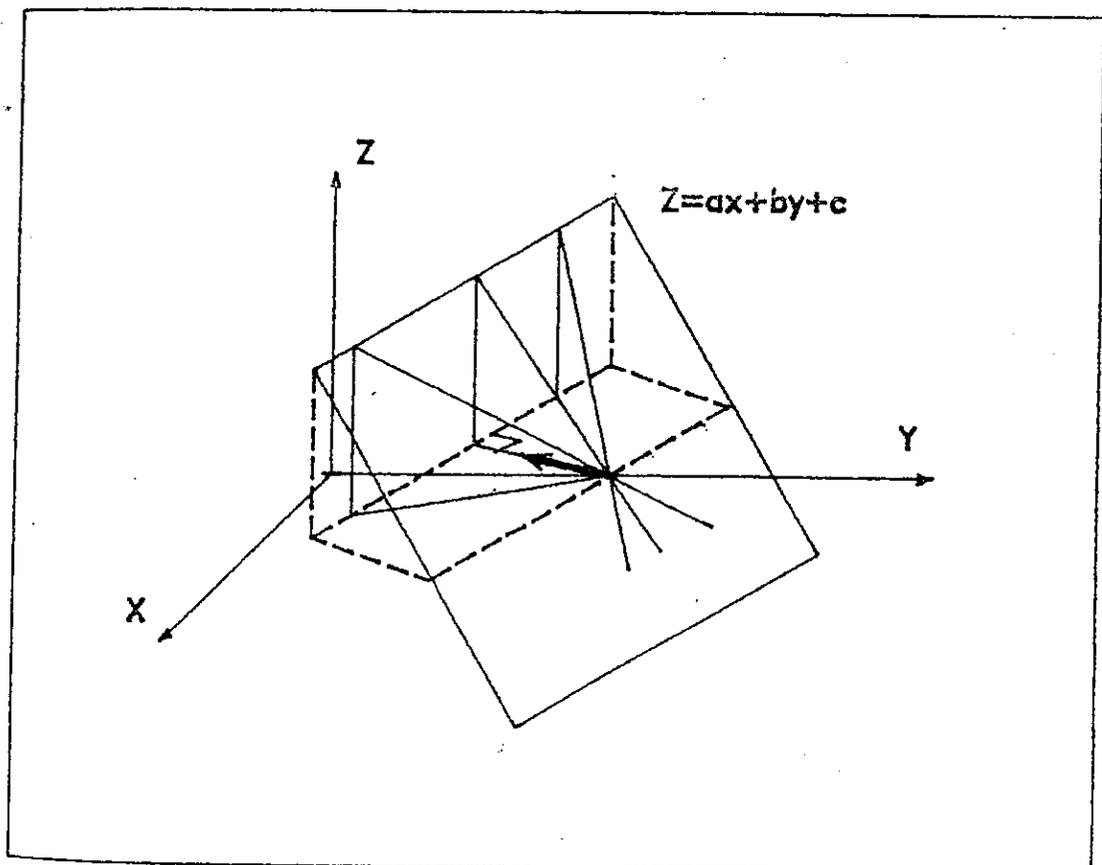


Figura 37. Interpretación geométrica de la diferencial de una

GRADIENTE

Nos proponemos definir el concepto de gradiente, primero para funciones de la forma $z = ax + by + c$ y después para funciones $z = f(x, y)$ usando argumentos geométricos. Vamos a abordar el problema del gradiente para funciones particulares de tres variables y el caso del gradiente para una función $w = f(x, y, z)$ lo atacaremos después de que veamos la regla de la cadena.

Resolvamos el siguiente problema. Considere al conjunto \mathcal{L} todas las rectas que están en el plano π , $z = 12 - 2x - 3y$ y pasan por $P(1, 2, 4)$. Si un insecto está en P ¿sobre qué recta debe moverse el insecto para que suba por la recta de máxima pendiente? Podría uno pensar que posiblemente no existiera tal recta pero de la figura 38 podemos decir que en un plano, tal recta existe y que es aquella que al proyectarse sobre el plano es perpendicular a las curvas de nivel del plano.



En el caso del plano π , $z = 12 - 2x - 3y$, los vectores $\langle -2, -3 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$ y en general $k\langle -2, -3 \rangle$ con $k \neq 0$ son vectores perpendiculares a las curvas de nivel del plano π , por lo tanto podemos concluir que a (x, y) se le dan valores en la dirección $k\langle -2, -3 \rangle$ con $k > 0$, los valores de z crecen más rápidamente que en cualquier otra dirección. ¿Qué podría decir de los valores de z , si a (x, y) se le dan valores en la dirección $\langle 2, 3 \rangle$?

Hemos concluido a partir de la figura 38 que todos los vectores de la forma $k\langle -2, -3 \rangle$ con $k > 0$ apuntan en la dirección de máximo crecimiento de z y que son perpendiculares a las curvas de nivel del plano. Hay un vector de la forma $k\langle -2, -3 \rangle$ que queremos privilegiar con un nombre porque tiene dos propiedades más que no tienen los demás. Sabemos que el ángulo agudo que forma el plano $z = 12 - 2x - 3y$ con el plano coordenado xy es $\theta = \arctan \sqrt{14}$ además sabemos que si el insecto sube por la recta l de mayor pendiente, z está creciendo a la máxima velocidad posible y ésta es igual a la pendiente de la recta l cuyo valor es $\sqrt{14}$. Pero $\sqrt{14} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\langle -2, -3 \rangle\|$, de donde podemos decir que: $\langle -2, -3 \rangle$ tiene cuatro propiedades importantes.

- 1) Apunta en la dirección de máximo crecimiento;
- 2) Su magnitud da el valor del máximo crecimiento;
- 3) El ángulo agudo que forma el plano $z = 12 - 2x - 3y$ con el plano xy es $\arctan \frac{\|\langle -2, -3 \rangle\|}{\sqrt{2}}$;
- 4) Es perpendicular a las curvas de nivel del plano $z = 12 - 2x - 3y$.

En los siguientes renglones le vamos a dar un nombre al vector $\langle -2, -3 \rangle$.

Consideremos un caso más general. Supongamos que un insecto está en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del plano $z = ax + by + c$ y queremos saber por cuál de todas las rectas del plano $z = ax + by + c$ que pasan por P debe moverse el insecto que se mueva por la recta l de máxima pendiente. La figura 38 otra vez nos ayuda a concluir que la proyección sobre el plano xy de la recta l es perpendicular a las curvas de nivel del plano $z = ax + by + c$, pero cualquier vector de la forma $k\langle a, b \rangle$ con $k \neq 0$ es perpendicular a las curvas de nivel de $z = ax + by + c$, por lo que concluimos que z crece más rápidamente si (x, y) se mueven en la dirección $k\langle a, b \rangle$ con $k > 0$.

$ax + by + c$ en la recta $\langle x, y \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb \rangle$, $t \in \mathbb{R}$,
 obtenemos $z = a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = t(a^2 + b^2) +$
 $(ax_0 + by_0 + c)$ y podemos decir que z crece si t es positivo,
 decrece si t es negativo y no cambia de valor si $t = 0$. Este
 resultado nos ayuda a decir que z crece más rápidamente si damos
 valores a $\langle x, y \rangle$ en la dirección $\langle a, b \rangle$. Como ya sabemos que z crece
 más rápidamente en la dirección $\langle a, b \rangle$, es natural que nos
 preguntemos por su valor, esto es, que hallemos la derivada
 direccional de $z = ax + by + c$ en (x_0, y_0) en la dirección $\langle a, b \rangle$; es
 decir que hallemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[a \left(x_0 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} h \right) + b \left(y_0 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} h \right) + c \right] - [ax_0 + by_0 + c]}{h}$$

el cual es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Revisando lo que acabamos de hacer podemos observar algunas
 propiedades del vector $\langle a, b \rangle$:

1. $\langle a, b \rangle$ es perpendicular a las curvas de nivel de $z = ax + by + c$.
2. Dado un punto P de $z = ax + by + c$, crece más rápidamente en la dirección $\langle a, b \rangle$.
3. La derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento es $||\langle a, b \rangle||$

Por otro lado ya sabemos que

4. El ángulo agudo que forma el plano $z = ax + by + c$ con el plano coordenado xy es $\theta = \arctan \sqrt{a^2 + b^2} = \arctan ||\langle a, b \rangle||$, propiedad que nos motiva a decir que $||\langle a, b \rangle||$ es la "pendiente" del plano $z = ax + by + c$.

Esto significa que el vector $\langle a, b \rangle$ es un vector especial en el sentido de que nos ayuda a resolver algunos problemas relacionados con el plano $z = ax + by + c$, por lo que lo distinguiremos en la siguiente

DEFINICION. Dada la función $z = ax + by + c$ y un punto $P(x_0, y_0)$, al vector $\langle a, b \rangle$ lo llamaremos GRADIENTE de $z = ax + by + c$ en el punto $P(x_0, y_0)$ y lo denotaremos $\nabla z(x_0, y_0)$.

Ahora nos proponemos motivar la definición de gradiente de una función $z = f(x,y)$ en un punto $P(x,y)$.

Supongamos que un insecto está en el punto $(1,1,2)$ del paraboloides $z = x^2 + y^2$ y queremos saber en qué dirección debe moverse para que ascienda por la curva de máxima pendiente. Por pendiente a una curva C en un punto P , se entiende, la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto P . Como el plano tangente a $z = x^2 + y^2$ en $(1,1,2)$ nos da todas las rectas tangentes a todas las curvas contenidas en $z = x^2 + y^2$ y que pasan por $(1, 1, 2)$ entonces, la recta de máxima pendiente contenida en el plano tangente al paraboloides $z = x^2 + y^2$ en $(1,1,2)$, será la recta tangente a la curva de máxima pendiente. Por lo tanto, si de todas las rectas del plano tangente, se halla la de máxima pendiente, entonces se halla la curva de máxima pendiente. Así, como el plano tangente a $z = x^2 + y^2$ en $(1,1,2)$ es $z = 2x + 2y - 2$ entonces $\langle 2, 2 \rangle$ nos da la dirección (en el dominio de z) en la que debe moverse el insecto para que se mueva sobre la recta de máxima pendiente, así que si se mueve por el paraboloides, comenzando en $(1,1,2)$ en la dirección $\langle 2, 2 \rangle$, se estará moviendo por la curva de máxima pendiente. Note que aunque para un plano $z = ax + by + c$, el gradiente tiene el mismo valor en cualquier punto P , no sucede lo mismo para cualquier punto P en el caso del paraboloides.

Sabemos que si una superficie $z = f(x,y)$ tiene plano tangente en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de ella, su ecuación será

$$z = \left[\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) + f(x_0, y_0), \text{ así que}$$

el problema de hallar la dirección en que debe moverse un objeto que está en la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) para que ascienda por la curva de máxima pendiente es equivalente (por argumentos análogos a los dados en el problema anterior y que no queremos repetir) al problema de hallar la dirección en que debe moverse un objeto que está en el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en (x_0, y_0, z_0) para que ascienda por la recta de máxima pendiente, de donde podemos concluir que $\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \rangle$ da la dirección en la que se debe mover un objeto que está en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie $z = f(x,y)$ para que ascienda por la curva de máxima pendiente. Lo anterior da lugar a la siguiente definición

DEFINICION Si $z = ax + by + c$ es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ entonces el vector $\langle a, b, c \rangle$ lo llamaremos el GRADIENTE de $z=f(x,y)$ en $P(x_0, y_0)$ y será denotado por $\nabla f(x_0, y_0)$.

De acuerdo con la definición anterior si la superficie $z=f(x,y)$ tiene plano tangente en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ entonces $\nabla f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$.

Ahora resolvamos un problema donde se involucre el concepto de gradiente de una función de tres variables.

En cierta región en donde está un insecto, se ha definido un sistema coordenado tridimensional y se conoce que la temperatura T en cada punto $P(x,y,z)$ es $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$. La velocidad con que crece la temperatura es máxima en la dirección en la que se va a mover el insecto, hallar dicha dirección, sabiendo que parte del $(4, -1, 3)$ y recorre una unidad lineal por segundo. También, hallar la magnitud de la máxima velocidad.

Sabemos que en el tiempo $t_* = 0$, el insecto está en $(4, -1, 3)$ y que si se mueve en la dirección $\langle a, b, c \rangle$, en el tiempo $t_* = t$, estará en el punto $P = \left[4 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -1 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, 3 + \frac{ct}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]$, por lo tanto la temperatura que actúa sobre el insecto en el punto P será

$$T(t) = \left[4 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]^2 + \left[-1 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]^2 + \left[3 + \frac{ct}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]^2 - 25$$

$$= t^2 + \frac{8a - 2b + 6c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} t + 1.$$

Por lo tanto, la velocidad con que crece la temperatura, en la dirección $\langle a, b, c \rangle$ cuando $t = 0$ (es decir en $(4, -1, 3)$) es

(A)
$$\frac{8a - 2b + 6c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA M. GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

$$\frac{8a - 2b + 6c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \langle 8, -2, 6 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \langle a, b, c \rangle$$

(Producto punto de dos vectores)

$$= (\|\langle 8, -2, 6 \rangle\| (1) (\cos\theta)$$

(θ es el ángulo que forman los vectores $\langle 8, -2, 6 \rangle$ y $\langle a, b, c \rangle$).

De donde se concluye que (A) toma su valor máximo si $\theta = 0$ es decir, si $\langle a, b, c \rangle = k\langle 8, -2, 6 \rangle$, con $k > 0$. También se puede concluir que la magnitud de la máxima velocidad es $\|\langle 8, -2, 6 \rangle\| = \sqrt{104}$.

Si bien cualquier vector de la forma $k\langle 8, -2, 6 \rangle$ con $k > 0$, nos da la dirección de máximo crecimiento de la temperatura, sólo la magnitud de uno de ellos nos da el valor del máximo crecimiento, a saber: $\langle 8, -2, 6 \rangle$.

Hay otra propiedad que tienen los vectores de la forma $\langle 8, -2, 6 \rangle$: son perpendiculares a la superficie de nivel de $T = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ que pasa por $(4, -1, 3)$ en dicho punto.

Esto significa que el vector $\langle 8, -2, 6 \rangle$ tiene 3 propiedades:

- 1) Da la dirección de máximo crecimiento de T en $(4, -1, 3)$.
- 2) Su magnitud da el valor de máximo crecimiento de T en $(4, -1, 3)$.
- 3) Es perpendicular a la superficie de nivel de $T = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ que pasa por $(4, -1, 3)$ en dicho punto.

Si en lugar de $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, tenemos $w = T(x, y, z)$ y (x_0, y_0, z_0) en vez de $(4, -1, 3)$, se probará en la siguiente sección, con la ayuda de la regla de la cadena, que hay un vector $\langle a, b, c \rangle$ que tiene las siguientes propiedades:

- 1) Apunta en la dirección de máximo crecimiento de w en (x_0, y_0, z_0)
- 2) Su magnitud da el valor de máximo crecimiento de w en (x_0, y_0, z_0)
- 3) Es perpendicular, a la superficie de nivel de $w = T(x, y, z)$ que pasa por (x_0, y_0, z_0) , en dicho punto.

A tal vector lo llamaremos gradiente de $w = T(x,y,z)$ en (x_0, y_0, z_0) . Ya se conoce una expresión para el gradiente de una función $z = f(x,y)$ en un punto P, veremos en la siguiente sección que hay una expresión análoga para el gradiente de $w = T(x,y,z)$ en un punto P.

7. LA REGLA DE LA CADENA

En el cálculo de una variable se resolvió el siguiente problema: Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, usando la regla de la cadena, así se llegó a que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Suponga que $z = x^2 + y^2$, donde x , y son variables independientes y a la vez x , y son funciones de la variable t , digamos $x = 2t + 1$, $y = t^2 + 1$. Podemos preguntarnos por $\frac{dz}{dt}$, porque z puede ser expresada en términos de t , así $z = (2t + 1)^2 + (t^2 + 1)^2$ y de aquí podemos obtener $\frac{dz}{dt}$. Ahora, suponga que $z = x^3 + y^3$, con x , y variables independientes, y a la vez x , y funciones de las variables independientes s y t , digamos $x = st$, $y = 2s + t$; con los datos dados podemos escribir a z en términos de s y t , a saber $z = (st)^3 + (2s + t)^3$ y encontrar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$. Existe un teorema, que nos dice cómo obtener $\frac{dz}{dt}$ en caso de que $z = f(x,y)$ sea una función de dos variables independientes, con x , y funciones de la variable t (que le llamaremos regla de la cadena para $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$); también hay un teorema que nos dice cómo obtener $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $z = f(x,y)$ es una función de las variables independientes x , y donde tanto x como y son funciones de las variables independientes s y t (que le llamaremos regla de la cadena para $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$). Estos teoremas nos permiten hallar más rápidamente a $\frac{dz}{dt}$ en el primer caso y a $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ en el segundo caso, pero bien podemos hallar a $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ en el caso de que conozcamos explícitamente a $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, sin que conozcamos la regla de la cadena, aunque tardemos unos minutos más en hallarlas. La fortaleza de la regla de la cadena descansa en el hecho de que es una herramienta que nos permite hacer demostraciones donde se involucren a funciones como $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, aunque no conozcamos qué expresión analítica particular puedan tener ellas. Concretamente la regla de la cadena la vamos a

sar cuando necesitemos:

1. Hallar la derivada de una función $y(x)$ dada en la forma implícita $g(x,y) = 0$, en términos de las derivadas parciales de $z = g(x,y)$.
2. Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de una función $z(x,y)$ dada en la forma implícita $g(x,y,z) = 0$, en términos de las derivadas parciales de $w = g(x,y,z)$.
3. Hallar la razón de cambio instantánea de $w = f(x,y,z)$ (observe que es un caso general), en la dirección $\langle a,b,c \rangle$ en el punto P. (Antes habíamos hallado razones de cambio, solamente para casos particulares). Esto a la vez nos permitirá dar definiciones de los conceptos de gradiente y diferencial para una función real con tres variables.
4. Hallar una expresión para la primera y la segunda derivada direccional de una función $z = f(x,y)$ en un punto P en la dirección $\langle a,b \rangle$, lo que nos permitirá hallar un criterio para encontrar los valores máximo y mínimo de una función real con dos variables.
5. Estudiar los multiplicadores de Lagrange.

Enunciemos pues la regla de la cadena para un caso particular y después para el caso general y aunque no haremos una demostración de ella, si daremos argumentos físicos y geométricos para justificar que si $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ entonces $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

Queremos hallar, usando argumentos físicos y geométricos $\frac{dz}{dt}$, dado $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$. En la figura 39 Están representados: la superficie $z = f(x,y)$, la curva en el plano xy de ecuación vectorial $\vec{r}_1(t) = \langle g(t), h(t) \rangle$, la imagen bajo la función $z = f(x,y)$ de $\vec{r}_1(t)$ de ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = \langle g(t), h(t), f(g(t), h(t)) \rangle$$

y un punto $P(g(t_0), h(t_0), f(g(t_0), h(t_0)))$.

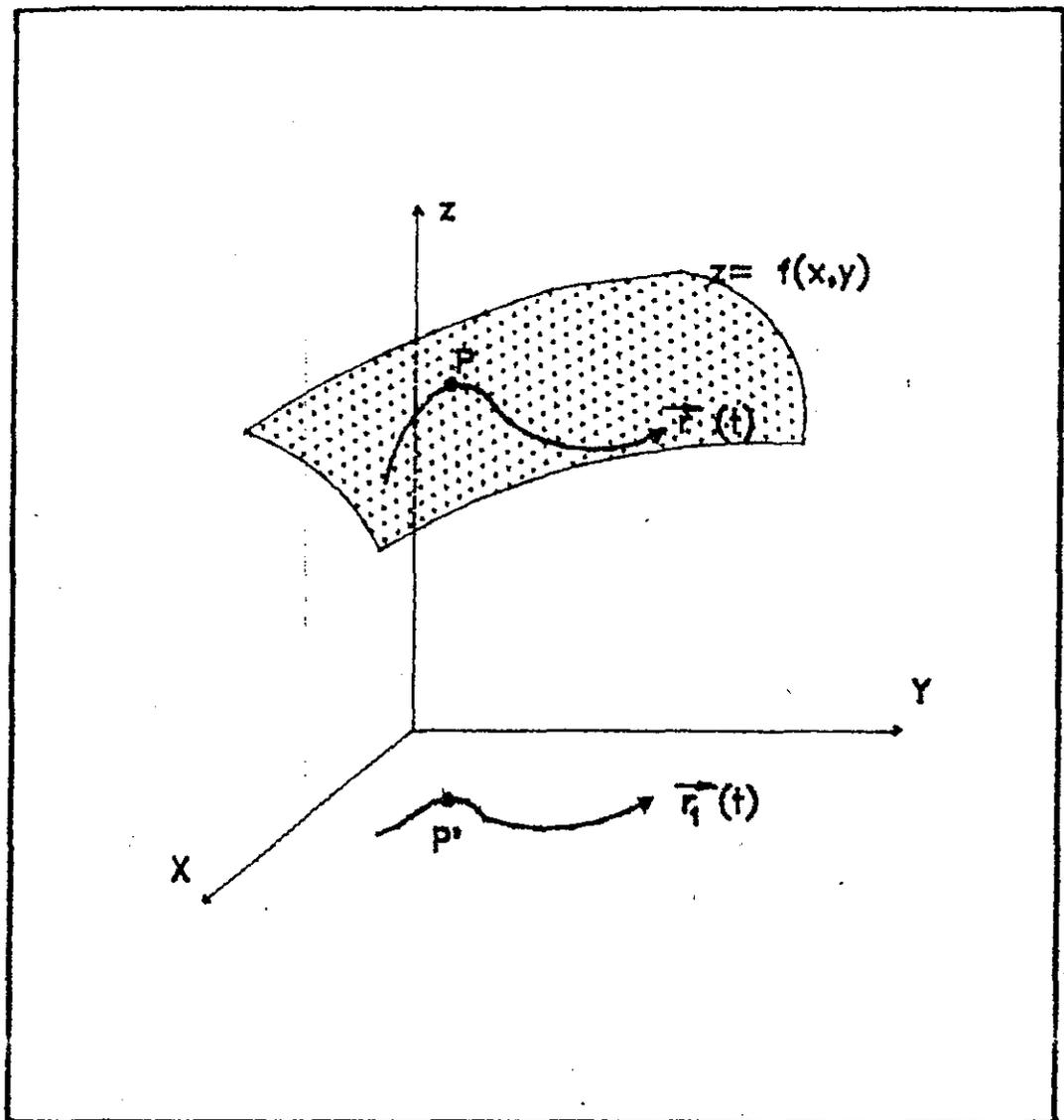


Figura 39

Supongamos que $\vec{r}(t)$ describe el movimiento de una partícula y nos interesa conocer su velocidad en el punto P, es decir en el tiempo $t = t_0$. Su velocidad está dada por

$$\vec{r}'(t_0) = \langle g'(t_0), h'(t_0), f'(g(t_0), h(t_0)) \rangle$$

está representada en la figura 40 por medio del vector

Pero $\vec{PQ} = \vec{PR} + \vec{RQ}$, donde \vec{PR} es igual a la proyección P'R' de \vec{PQ} sobre el plano xy y RQ es la proyección de PQ sobre el eje z, es

decir $\vec{RQ} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_0}$ (ver figura 40).

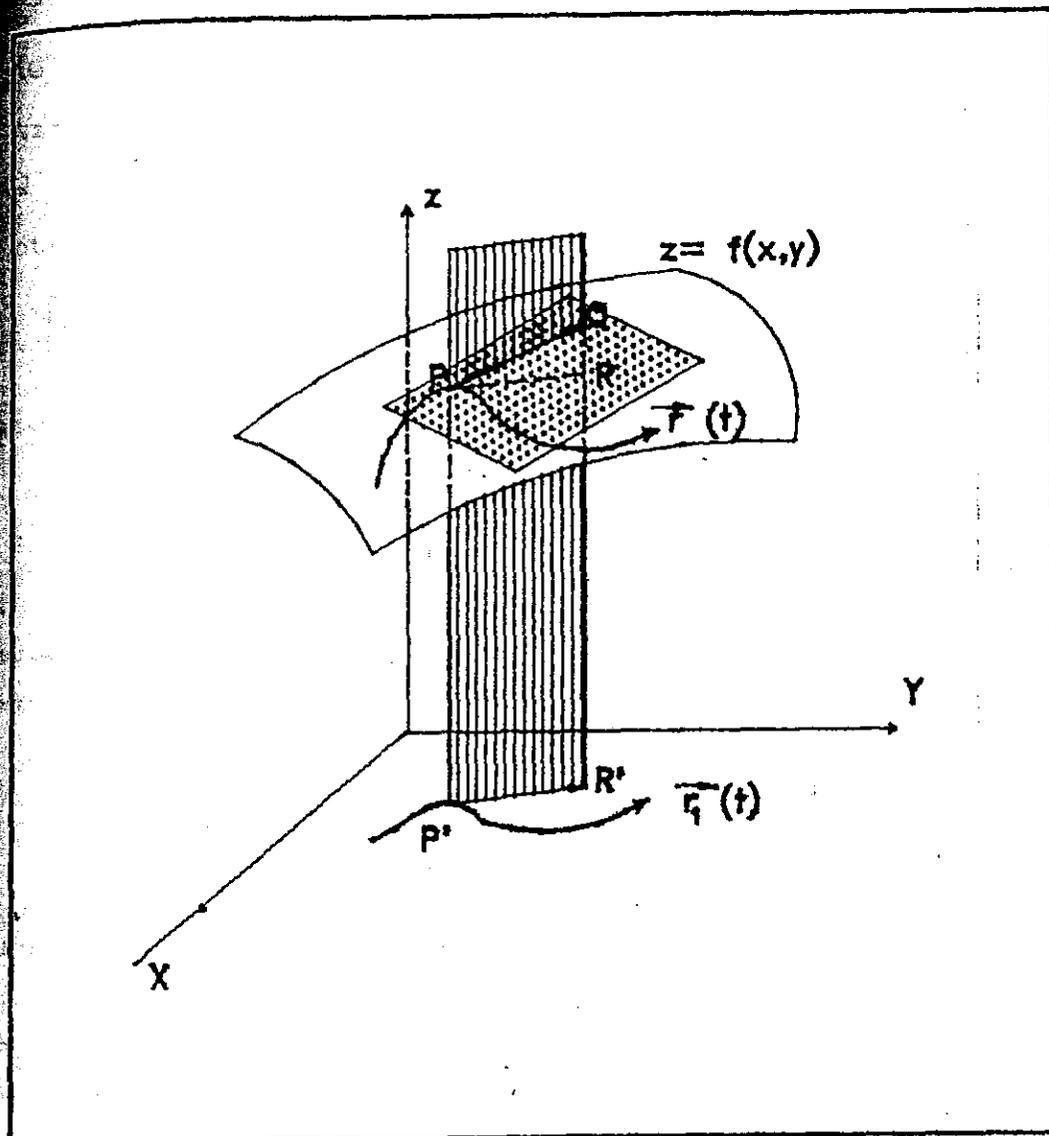


Figura 40

Por otro lado, por ser \vec{PQ} tangente a la curva $\vec{r}(t)$ en P , \vec{PQ} está en el plano tangente a $z = f(x, y)$ en P . Como P y Q son las imágenes bajo el plano tangente de P' y R' y se sabe que $P' = (g(t_0), h(t_0))$ y $R' = (g(t_0) + g'(t_0), h(t_0) + h'(t_0))$, podemos hallar otra expresión para el vector \vec{PQ} . Como la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en P es $z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(t_0), h(t_0)) \right] (x - g(t_0)) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(g(t_0), h(t_0)) \right] (y - h(t_0)) + f(g(t_0), h(t_0))$, entonces las coordenadas A, B, C , de $Q = (A, B, C)$ son:

$$g'(t_0) + g'(t_0)$$

$$h'(t_0) + h'(t_0)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(t_0), h(t_0)) \right] g'(t_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(g(t_0), h(t_0)) \right] h'(t_0) + f(g(t_0), h(t_0))$$

Por tanto

$$\langle g'(t_0), h'(t_0), \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(t_0), h(t_0)) \right] g'(t_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(g(t_0), h(t_0)) \right] h'(t_0) \rangle$$

otra forma del vector $\vec{r}'(t_0)$, de aquí que

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(t_0), h(t_0)) \right] g'(t_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(g(t_0), h(t_0)) \right] h'(t_0).$$

Esto significa que si $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

es a lo que se quería llegar.

TEOREMA. Si $w = f(u, v)$, $u = g(x, y)$ y $v = k(x, y)$ donde f es diferenciable y g y k tienen primeras derivadas parciales continuas,

entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

TEOREMA. Si W es una función de n variables u_1, u_2, \dots, u_n donde cada u_i es una función de m variables x_1, x_2, \dots, x_m que tiene primeras derivadas parciales continuas, entonces w es una función (compuesta)

de x_1, x_2, \dots, x_m y

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

En el caso de que $m = 1$ y que u_1, u_2, \dots, u_n dependan de una variable t , w se puede escribir como función de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt}$$

Aquí utilizamos $\frac{du_1}{dt}$ en lugar de $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ porque se acostumbra usar el símbolo ∂ para hacer notar que se está derivando una función que depende de más de una variable y u_1 es una función de una variable.

(Lo mismo podemos decir de $\frac{du_2}{dt}$, etc.)

ponga que $z = x^2y$, $x = t^2$, $y = t^3$. Usar la regla de la cadena para encontrar $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2) = (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6.\end{aligned}$$

ponga que $z = x^2 + y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Usar la regla de la cadena para encontrar $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x)(\cos \theta) + (2y)(\sin \theta) \\ &= 2r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (2x)(-r \sin \theta) + (2y)(r \cos \theta) \\ &= (2r \cos \theta)(-r \sin \theta) + (2r \sin \theta)(r \cos \theta) = 0\end{aligned}$$

ponga que $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, usar la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

SOLUCION: Hagamos $u = x^2 - y^2$ y $v = e^{xy}$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}(2x) + \frac{\partial z}{\partial v}(ye^{xy}) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}(-2y) + \frac{\partial z}{\partial v}(xe^{xy})\end{aligned}$$

A qué razón está cambiando el área de un rectángulo si su longitud es de 15 cm. y se incrementa 3 cm/seg, mientras que su ancho es de 6 cm. y se incrementa 2 cm/seg.?

SOLUCION: Representemos por x la longitud del rectángulo en cm, por y el ancho en cm, por A el área del rectángulo en centímetros cuadrados y por t al tiempo en segundos. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt} = 3 \text{ y que } \frac{dy}{dt} = 2 \text{ cuando } x = 15, y = 6.$$

Queremos hallar $\frac{dA}{dt}$ cuando $x = 15$ y $y = 6$.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} = y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} + x \frac{dy}{dt} = 3y + 2x.$$

$$\frac{dA}{dt}(15,6) = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 15 = 48.$$

Entonces encontramos $\frac{dy}{dx}$, donde $y(x)$ está dada implícitamente por $g(x,y) = 0$, en términos de las derivadas parciales de $z = g(x,y)$.

Si $z = g(x,y)$ entonces podemos preguntarnos por $\frac{dz}{dx}$ porque z depende de x , y pero a la vez y depende de x . Así

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$\frac{dz}{dx} = 0$ porque $g(x,y) = 0$. Por lo tanto

$$\text{si } \frac{\partial z}{\partial y} \neq 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

PROBLEMA: Hallar $\frac{dy}{dx}$ donde $y = f(x)$ está dada implícitamente por $3x^2 + 2y = 0$.

SOLUCION: Hacemos $z = 3x^2 + 2y$, aquí $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x}{2} = -3x$. Esta solución la podíamos haber obtenido más fácilmente si despejamos a y , así $y = -\frac{3}{2}x^2$, de donde $\frac{dy}{dx} = -3x$.

PROBLEMA: Hallar $\frac{dy}{dx}$ donde $y = f(x)$ está dada implícitamente por $ye^x - e^{xy} = 0$.

SOLUCION: Hacemos $z = ye^y + ye^x - e^{xy}$, aquí $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x - ye^{xy}$

$$\text{y } \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x - xe^{xy}, \text{ de donde } \frac{dy}{dx} = -\frac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$$

Entonces, de despejar a y para luego hallar $\frac{dy}{dx}$.

Si una función $z = f(x,y)$ de dos variables independientes está dada en forma implícita por $g(x,y,z) = 0$, podemos hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ sin necesidad de despejar z de $g(x,y,z) = 0$ en términos de las derivadas parciales de $W = g(x,y,z)$. Así, hagamos $u = x$, $v = y$, $z = f(x,y)$. Aquí tenemos una función W de las tres variables u, v, z y u, v, z funciones de las dos variables x, y .

Por lo tanto:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ pero como } g(x,y,z) = 0 \text{ entonces}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \text{ de aquí que}$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ pero como } u = x, v = y,$$

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x} 1 + \frac{\partial w}{\partial y} (0) + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ de donde si } \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right). \text{ De manera similar encontramos que}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) / \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Vamos a resolver un problema donde necesitamos encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ encontrar la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ en el punto } P(x_0, y_0, z_0).$$

SOLUCION: Sea $W = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, y encontremos

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2z}{c^2},$$

donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -(2x/a^2) / (2z/c^2) = -(xc^2/za^2) \text{ y}$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -(yc^2/zb^2)$. Como la ecuación de un plano tangente a $z = f(x, y)$

dada por $z = f(x_0, y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, la ecuación del plano tangente que buscamos es:

$$z = z_0 + (x-x_0) \left[- \left(\frac{x_0 c^2}{z_0 a^2} \right) \right] + (y-y_0) \left[- \left(\frac{y_0 c^2}{z_0 b^2} \right) \right]$$

Simplificando y reacomodando términos se expresa en la forma

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Ahora queremos resolver unos problemas que habíamos dicho que abordaríamos después de estudiar la regla de la cadena. Estos problemas consisten en hallar expresiones para la derivada direccional, la derivada direccional y el gradiente de una función $z = f(x, y, z)$.

Comencemos con hallar una expresión para la derivada direccional.

Un insecto se encuentra en una región en la que se ha introducido un sistema coordenado x, y, z . En el punto (x, y, z) la temperatura es $w = T(x, y, z)$. El insecto se mueve en línea recta en la

segundo. En el tiempo $t = 0$ está en el punto (x_0, y_0, z_0) . Hallar es decir, hallar la velocidad con que crece (o decrece) la temperatura que actúa sobre el insecto en $t = 0$. También se puede decir "hallar la razón de cambio de T con respecto a t en $t = 0$ ".

SOLUCION: Se sabe que en el tiempo $t = 0$ el insecto está en el punto (x_0, y_0, z_0) y que en el tiempo t está en el punto

$$\left(x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, z_0 + \frac{ct}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right), \text{ por lo}$$

tanto la temperatura que afecta al insecto en el tiempo t será:

$$T(t) = T \left[x_0 + \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, y_0 + \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, z_0 + \frac{ct}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]$$

de aquí que la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo en $t = 0$ es

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=0} = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{\partial T}{\partial x}(P) \right] \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \left[\frac{\partial T}{\partial z}(P) \right] \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \left[\frac{\partial T}{\partial z}(P) \right] \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$(A) = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle \cdot \left\langle \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right\rangle$$

donde $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Si consideramos a $w = T(x,y,z)$ como una función, no como una expresión que da el valor de la temperatura en el punto (x,y,z) y t como un valor numérico, no como una cantidad que representa al tiempo, la $\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=0}$ le podemos llamar la derivada direccional de $w = T(x,y,z)$ en la dirección $\langle a,b,c \rangle$. Por lo tanto podemos decir que (A) nos proporciona una técnica para calcular derivadas direccionales de una función de tres variables.

A partir de calcular la derivada direccional de $w = T(x,y,z)$ en (x_0, y_0, z_0) en la dirección $\langle a,b,c \rangle$ surge de manera natural preguntarse por la dirección $\langle a,b,c \rangle$ en la cual la derivada direccional de $w = T(x,y,z)$ en (x_0, y_0, z_0) es máxima y cuál es el valor de esta derivada direccional máxima.

Como ya se sabe que la derivada direccional de $w = T(x,y,z)$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección $\langle a,b,c \rangle$ es

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle \cdot \left\langle \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right\rangle$$

(Producto punto de dos vectores)

$$= \left\| \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle \right\| \cdot 1 \cdot \cos \theta$$

(θ es el ángulo que forman los vectores

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle \text{ y } \left\langle \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right\rangle)$$

de donde se concluye que (A) toma su valor máximo si $\theta = 0$, es decir, si $\langle a, b, c \rangle = k \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle$, con $k > 0$. También se puede concluir que la magnitud de la máxima velocidad es

$$\left\| \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle \right\| \text{ ya que el máximo valor se obtiene cuando } \cos \theta = 1.$$

Si se halla la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de $w = T(x, y, z)$ que pasa por (x_0, y_0, z_0) se encuentra que el vector $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle$ es perpendicular a dicho plano. (se deja esta problema como ejercicio).

Esto significa que el vector $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle$ tiene las siguientes propiedades:

- Da la dirección de la derivada direccional máxima (o da la dirección de máximo crecimiento de T en P).
- Su magnitud da el valor de máximo crecimiento de T en P .
- Es perpendicular a la superficie de nivel de $w = T(x, y, z)$ que pasa por P en el punto P .

Las tres propiedades anteriores del vector $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right\rangle$ y la definición de gradiente de $z = f(x, y)$ nos permiten ver que es razonable definir a $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle$ como el gradiente de una función $w = T(x, y, z)$.

En la sección dedicada al concepto de diferencial quedó pendiente el hallar una expresión para la diferencial de una función $w = f(x, y, z)$. Se deja como ejercicio hallar dicha expresión.

MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Si se nos pregunta por el valor mínimo de $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$, podemos decir basándonos en el álgebra que es cero y que se alcanza cuando $x = 1$, $y = 2$. Desde luego que también se puede resolver el problema si tenemos conocimiento de la representación geométrica de la ecuación. De igual manera podemos decir que el valor máximo de $z = 9 - x^2 - y^2$ es 9. Pero existen problemas que resultan muy difíciles de resolver si tenemos como únicas herramientas al álgebra y la geometría analítica, pero que son más fáciles de resolver por medio del cálculo diferencial. Vamos a plantear algunos de estos problemas pero antes demos algunas definiciones.

DEFINICION 1: Se dice que una función f de dos variables tiene un máximo relativo en el punto (x_0, y_0) si existe un círculo con centro en (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del interior de dicho círculo.

DEFINICION 2: Se dice que una función f de dos variables tiene un mínimo relativo en el punto (x_0, y_0) si existe un círculo con centro en (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del interior de dicho círculo.

DEFINICION 3: Se dice que una función f de dos variables tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (x_0, y_0) .

DEFINICION 4. Se dice que una función f de dos variables tiene un máximo absoluto en el punto (x_0, y_0) si $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para toda pareja (x, y) que esté en el dominio de f . De modo similar, f tiene un mínimo absoluto en el punto (x_0, y_0) si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para toda pareja (x, y) que esté en el dominio de f .

Hay una diferencia importante entre el concepto de máximo relativo y el de máximo absoluto. Para que $f(x_0, y_0)$ sea un máximo absoluto se requiere que la desigualdad $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ sea válida para todos los puntos (x, y) del dominio de f . En cambio, para que f tenga un máximo relativo en (x_0, y_0) , la desigualdad $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ solamente necesita ser válida para los puntos que estén en el interior de algún círculo con centro en (x_0, y_0) . Podemos decir algo similar sobre un mínimo...

En lo sucesivo usaremos los términos máximo y mínimo en lugar de máximo relativo y mínimo relativo.

El método para determinar los valores máximo y mínimo de una función de dos variables es similar al que se usa para funciones de una variable. Consideremos una superficie $z = f(x,y)$ que tiene planos tangentes en cada punto de ella y supongamos que en (x_0, y_0) tiene un máximo $f(x_0, y_0)$. Si cortamos a la superficie $z = f(x,y)$ por el medio del plano $y = y_0$, se determina una curva C de ecuaciones

$z = f(x, y_0)$. Como $f(x_0, y_0)$ es un máximo, entonces la desigualdad $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ se satisface para todo punto (x, y) del interior de algún círculo con centro en (x_0, y_0) , en particular se satisface para los puntos del interior de dicho círculo pero que tienen coordenada $y = y_0$. Por lo tanto $f(x_0, y_0)$ es un máximo de la función $f(x, y_0)$, la cual es sólo función de x . Por la teoría de los máximos y mínimos para funciones de una variable f'_x debe valer 0 en (x_0, y_0) . Argumentos similares demuestran que f'_y debe valer 0 en (x_0, y_0) .

Con argumentos análogos, podemos demostrar que si una superficie $z = f(x,y)$ que admite planos tangentes en todos sus puntos tiene un mínimo en (x_0, y_0) entonces tanto f'_x como f'_y valen cero al evaluarlos en (x_0, y_0) .

Podemos, por lo tanto, concluir que si se nos da una función $z = f(x,y)$ que admite planos tangentes en todos sus puntos y se nos pide encontrar los extremos relativos de $z = f(x,y)$, entonces debemos buscar todos los puntos (x_0, y_0) tales que hacen que tanto f'_x como f'_y valgan cero, a tales puntos les llamaremos puntos críticos o puntos estacionarios. Ya que la ecuación del plano tangente a $z = f(x,y)$ en un punto (x_0, y_0) cualquiera es $z = (x-x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y-y_0)f'_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)$ entonces $z = f(x_0, y_0)$ es la ecuación del plano tangente a $z = f(x,y)$ en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, en caso de que en (x_0, y_0) la función $z = f(x,y)$ alcance un valor máximo o un valor mínimo; es claro que $z = f(x_0, y_0)$ es un plano paralelo al plano coordenado xy . Esta situación geométrica es análoga a la que se presenta en el cálculo de una variable cuando se buscan los valores máximos y mínimos de una

Si una función derivable $y = f(x)$: si en $x = x_0$, la curva $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo, entonces la recta tangente a dicha curva en $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje x .

Veamos algunos ejemplos sobre máximos y mínimos.

EMPLO 1: Hallar los máximos y mínimos de:

a) $z = x^2 + y^2$

b) $z = 9 - x^2 - y^2$

c) $z = x^2 - y^2$



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

SOLUCION:

Si $z = x^2 + y^2$, $z_x = 2x$ y $z_y = 2y$, de donde se concluye que el único punto crítico es $(0,0)$. El valor de z en $(0,0)$ es $z = 0$ y si $(x,y) \neq (0,0)$, $z > 0$; por lo tanto la función alcanza un valor mínimo en $(0,0)$.

Si $z = 9 - x^2 - y^2$ entonces $z_x = -2x$, $z_y = -2y$, por lo tanto el único punto crítico es $(0,0)$. El valor de esta función en $(0,0)$ es $z = 9$. Y si $(x,y) \neq (0,0)$ $z < 9$, por lo tanto la función alcanza un valor máximo en $(0,0)$.

Si $z = x^2 - y^2$ entonces $z_x = 2x$, $z_y = -2y$, por lo tanto el único punto crítico es $(0,0)$. El valor de esta función en $(0,0)$ es $z = 0$ pero para los puntos del eje x diferentes de $(0,0)$, z es positiva y para los puntos del eje y distintos de $(0,0)$, z es negativa. Por lo tanto la función evaluada en su punto crítico no alcanza un extremo relativo. Debido a la apariencia de esta superficie cerca del punto $(0,0,0)$, este punto se llama punto silla de la gráfica.

COMENTARIO: En la función del inciso a) $z = 0$ es un mínimo absoluto y un mínimo relativo. En el caso de la función del inciso b), $z = 9$ es un máximo relativo y un máximo absoluto. De la función del inciso c) podemos aprender la siguiente lección: el hecho de que (x_0, y_0) sea un punto crítico de una función $z = f(x,y)$ no es suficiente como para garantizar que $f(x_0, y_0)$ sea un máximo o un mínimo de dicha función. En el cálculo de una variable se presenta una situación análoga: $f'(x_0) = 0$ no implica que $f(x_0)$ sea un extremo relativo.

$f(x_0, y_0)$ es un mínimo, si

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

$f(x_0, y_0)$ no es máximo ni mínimo, si

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 < 0;$$

No se puede asegurar que $f(x_0, y_0)$ sea extremo relativo

si

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 = 0.$$

DEMOSTRACION. Los problemas que se acaban de resolver nos sugieren un camino a seguir para lograr lo que nos proponemos. Hallemos

siendo $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = f(x, y)$ y el vector $\langle a, b \rangle$

arbitrario. Así,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} a + \frac{\partial z}{\partial y} b.$$

Es claro que $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0}$ es igual a cero porque $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ por ser (x_0, y_0) un punto crítico de $z = f(x, y)$

de donde

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} ab + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ab + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} b^2$$

pero $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ por ser $z = f(x, y)$ una función polinomial (este

hecho lo vamos a aceptar sin demostrarlo), por lo tanto si A

representa a $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, B a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ y C a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

entonces $\frac{d^2 z}{dt^2}$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\left. \frac{d^2 z}{dt^2} \right|_{t=0} = Aa^2 + 2Bab + Cb^2$$

Como A , B y C representan números fijos y a y b varían de tal manera que $a^2 + b^2 = 1$ podemos considerar a $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ como un polinomio en las variables a y b .

Ya que para $A \neq 0$

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 = A\left(a + \frac{bB}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}b^2$$

podemos concluir que:

1) Si $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$ entonces $Aa^2 + 2Bab + Cb^2 > 0$

2) Si $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$ entonces $Aa^2 + 2Bab + Cb^2 < 0$

para todo a y b tal que $a^2 + b^2 = 1$.

Esto significa que $f(x_0, y_0)$ es un mínimo si $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$ y

$f(x_0, y_0)$ es un máximo si $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$.

En caso de que:

3a) $A > 0$ y $AC - B^2 < 0$ entonces $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ puede tomar valores positivos en alguna dirección y valores negativos en otra. Así, en la dirección $\langle a, b \rangle = \langle 1, 0 \rangle$, $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ es positiva y en la dirección $\langle a, b \rangle = \left\langle \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rangle$ es negativa.

3b) $A < 0$ y $AC - B^2 < 0$ entonces $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ puede tomar valores positivos en alguna dirección y negativos en otra. Así, en la dirección $\langle a, b \rangle = \langle 1, 0 \rangle$, $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ es negativa y en la dirección $\left\langle \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rangle$ es positiva.

3c) $A = 0$ y $AC - B^2 < 0$ entonces $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ puede tomar valores de distinto signo. Como $A = 0$ y $AC - B^2 < 0 \rightarrow B \neq 0$, así que si $C \neq 0$; $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ toma valores de distinto

signo en las direcciones $\left\langle \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}} \right\rangle$, $\left\langle \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \frac{-B}{\sqrt{B^2 + C^2}} \right\rangle$

y si $C = 0$, $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ toma valores de distinto signo en

las direcciones $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ y $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$.

De 3a), 3b) y 3c) se puede concluir que si $AC - B^2 < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ ni es máximo ni es mínimo.

Por último, en caso de que:

$AC - B^2 = 0$, no se puede decir nada acerca de la función $z=f(x,y)$. Tomemos por ejemplo a $z = x^4 + y^4$, $z = x^4 - y^4$ y $z = 1 - x^4 - y^4$. En estos casos $AC - B^2 = 0$ para $(x_0, y_0) = (0,0)$. Sin embargo, en $z = x^4 + y^4$, $z(0,0)$ es un mínimo, en $z = x^4 - y^4$, $z(0,0)$ no es máximo ni mínimo y en el caso $z = 1 - x^4 - y^4$, $z(0,0)$ es un máximo.

EMPLO 4: Hallar el punto del plano $3x + 4y - z = 26$ que está más cercano al origen.

SOLUCION: Si (x,y,z) es un punto del plano, su distancia al origen

$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pero la terna (x,y,z) que hace que D^2 tome valor más pequeño, es la misma que hace que D tome el valor más pequeño. Por lo tanto hallaremos la terna (x,y,z) tal que hace que

$x^2 + y^2 + z^2$ sea mínima. Como $z = 26 - 3x - 4y$ entonces

$$w = x^2 + y^2 + (26 - 3x - 4y)^2.$$

Hallemos los puntos críticos de w .

$$w_x = 20x + 24y - 156$$

$$w_y = 24x + 34y - 208$$

La única pareja que hace $w_x = 0$ y $w_y = 0$ es $(3,4)$. Vamos a utilizar el teorema que nos permite saber qué clase de punto crítico es $(3,4)$.

$$w_{xx} = 20$$

$$w_{xy} = 24$$

$$w_{yy} = 34.$$

Como $[w_{xx}(3,4)][w_{yy}(3,4)] - [w_{xy}(3,4)]^2 = 20 \cdot 34 - 24^2 = 104$ es positiva y $w_{xx} = 20$, el teorema anterior nos asegura que en $(3,4)$ alcanza su valor mínimo. Por lo tanto, el punto del plano buscado es $(3,4,-1)$.

COMENTARIO: Este problema lo pudimos haber resuelto más rápidamente por los métodos de la geometría analítica, pero nuestro objetivo era ilustrar el método de tratar tales problemas mediante las derivadas parciales.

EMPLO 5: Hallar las dimensiones de una caja rectangular, abierta en su parte superior, que tenga un volumen de 32 cm^3 y que requiera la menor cantidad posible de material en su fabricación.

CONDICION: Sean x, y, z las dimensiones de la caja, donde z representa altura y sea S el área lateral de la caja. Se desea hallar el mínimo de $S = xy + 2xz + 2yz$, con la condición de que $xyz = 32$. Podemos, entonces, escribir a S como función de x , y decir:

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

encontramos los puntos críticos de S .

$$S_x = y - \frac{64}{x^2}, \quad S_y = x - \frac{64}{y^2},$$

entonces el único punto crítico de S es $(4, 4)$. Estudiemos la naturaleza de este punto crítico. Como

$$S_{xx} = \frac{128}{x^3}, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy} = \frac{128}{y^3}$$

entonces $S_{xx}(4, 4) = 2$, $S_{xy}(4, 4) = 1$ y $S_{yy}(4, 4) = 2$, de aquí que, $[S_{xx}(4, 4)][S_{yy}(4, 4)] - [S_{xy}(4, 4)]^2 = 3 > 0$ y $S_{xx}(4, 4) = 2 > 0$. Por tanto, por el teorema enunciado en esta sección S tiene un mínimo relativo cuando $x = 4$, $y = 4$. Las dimensiones que buscábamos son $x = 4$, $y = 4$, $z = 2$ y $S = 48$.

9. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Los problemas de máximos y mínimos que hemos resuelto los podemos dividir en dos clases. Hallar los extremos relativos de $z = x^2 + y^2$, es un problema de *extremo libre* (note que en este caso, tanto x como y pueden tomar cualquier valor real). Hallar los extremos relativos de $z = x^2 + y^2$ sujeto a la condición $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$, es un problema de *extremo restringido* (note que en este caso, los únicos valores que pueden tomar la x y la y son aquellos que satisfacen la ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$). En esta sección nos limitaremos a resolver problemas de extremos restringidos.

Los problemas que vamos a resolver en esta sección son:

- a) Hallar los extremos relativos de $z = f(x,y)$ sujeto a la restricción (o condición) $g(x,y) = 0$.
- b) Hallar los extremos relativos de $w = f(x,y,z)$ sujeto a la restricción $g(x,y,z) = 0$.
- c) Hallar los extremos relativos de $w = f(x,y,z)$ sujeto a las restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$.

Muchos de los problemas de máximos y mínimos que se plantearon en el cálculo de una variable tienen la forma del problema del inciso a). Para resolver el problema del inciso a) en cálculo de una variable procedíamos de la siguiente manera: de $g(x,y) = 0$, "despejábamos" a y , obteniendo digamos, $y = h(x)$, este valor de y lo usábamos para escribir a $z = f(x,y)$ como una función de solamente la variable x . Por ejemplo el problema de hallar el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio R , se reduce a encontrar el valor máximo de $z = f(x,y) = xy$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = R^2$. De $x^2 + y^2 = R^2$ obtenemos $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, y de aquí $z = x\sqrt{R^2 - x^2}$, que es una función de una variable. Naturalmente que en ciertos problemas es difícil despejar a y y en otros casos es imposible despejarla. En la sección anterior resolvimos problemas de máximos y mínimos que tienen la forma del problema del inciso b). Por ejemplo el problema de calcular el volumen máximo posible de una caja rectangular de superficie total A se reduce a encontrar el valor máximo de $w = f(x,y,z) = xyz$, sujeto a la restricción $2(xy+xz+yz) = A$. De $2(xy+xz+yz) = A$ obtenemos $z = (A - 2xy)/(2x + 2y)$ y de aquí $w = xy(A - 2xy)/(2x + 2y)$. También en ciertos problemas de este tipo se presenta la dificultad y en otros la imposibilidad de escribir a z explícitamente como una función de las variables x y y , y en caso de poder escribir a w como una función de x y y , y hacer uso del método estudiado en la sección anterior para hallar los extremos relativos de w permanece (en algunos casos) el inconveniente de las complicaciones de tipo algebraico. Para los problemas de extremo restringido es más sencillo el método de los *multiplicadores de Lagrange*.

Evaluar a $z = f(x,y)$ en $g(x,y) = 0$, significa geoméricamente, evaluar a $z = f(x,y)$ en puntos que pertenecen a una curva (no a una superficie). Por ejemplo cuando se pide hallar los extremos relativos de $z = xy$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 25$, se tiene que evaluar a $z = xy$ no en los puntos del interior del círculo, sino en los puntos que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Evaluar a $w = f(x,y,z)$ en $g(x,y,z) = 0$, significa, geoméricamente, evaluar a $w = f(x,y,z)$ en una región que forma una superficie. Por ejemplo, cuando se pide hallar los extremos relativos de $w = x + y + z$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, se tiene que evaluar a $w = x + y + z$, en los puntos de la esfera hueca $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y no en la esfera sólida. Por último evaluar a $w = f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$, significa, geoméricamente, evaluar a $w = f(x,y,z)$ en una región del espacio que forma una curva. Por ejemplo, cuando se pide hallar los extremos relativos de $w = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las restricciones $x + y + z + 1 = 0$ y $2x - y + z + 3 = 0$, se tiene que evaluar a $w = x^2 + y^2 + z^2$ en los puntos que están en la intersección de los planos $x + y + z + 1 = 0$ y $2x - y + z + 3 = 0$ que, como se estudió en geometría analítica, es una recta.

Vamos a resolver primeramente, algunos problemas de extremos restringidos, utilizando solamente métodos geoméricos. Esto nos ayudará, por un lado, a conocer la interpretación geométrica del método de los multiplicadores de Lagrange y por otro lado nos sugerirá cómo escribir en forma compacta una ecuación que contiene la solución. En la discusión de estos problemas las curvas de nivel y las superficies de nivel jugarán un papel importante.

EJEMPLO 1: Hallar los extremos relativos de $z = x + y$ sujeto a la restricción $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$.

SOLUCION: Para resolver este problema, "tapicemos" el plano xy utilizando rectas de la forma $x + y = k$, una para cada valor de k , (estas rectas son las curvas de nivel de valor k de $z = x + y$) y luego dibujemos la circunferencia C $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$. Ver figura 41.

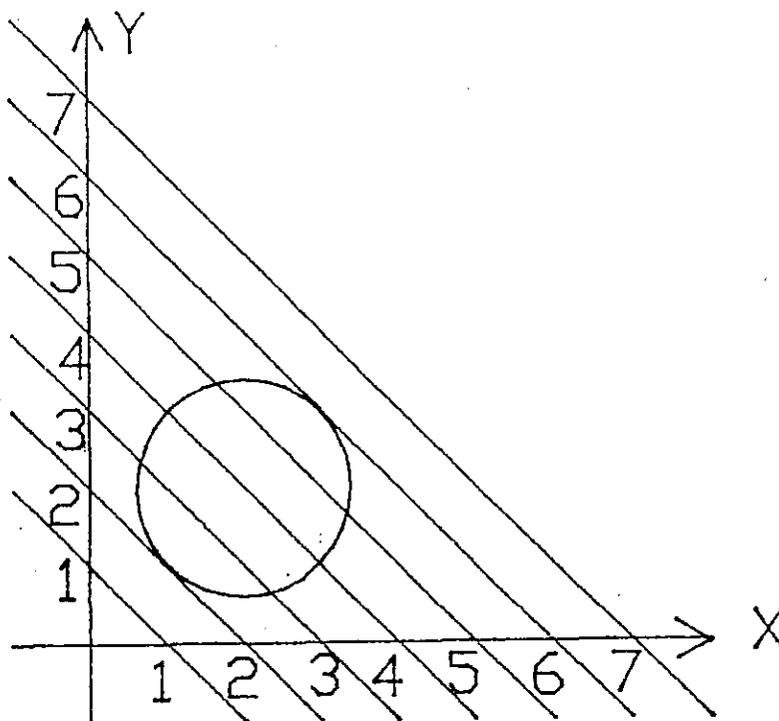


Figura 41



EL SABER DE NUESTROS DIAS
 PARA EL MAÑANA
 BIBLIOTECA
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Como las rectas con las que tapizamos el plano son rectas de pendiente -1 , algunas de estas rectas no cortan a C , dos de ellas son tangentes a C y algunas tienen dos puntos en común con C . De la geometría analítica sabemos que $x + y = 4$ y $x + y = 8$ son tangentes a C , si $4 < k < 8$, $x + y = k$ tiene dos puntos en común con C y si $k < 4$ ó $k > 8$ entonces $x + y = k$ y C no tienen puntos en común. Como estamos interesados en evaluar a z en los puntos que cumplan con la condición $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$, nos tenemos que limitar a estudiar los valores de z en los puntos de intersección de las rectas de pendientes -1 que son tangentes o secantes a C . Para tales puntos todos los valores de $z = x + y$ están en el intervalo cerrado $[4, 8]$. Esto significa que el mínimo valor de z es 4 y el máximo es 8. El valor 4 lo toma en el punto de intersección de la recta tangente a C $x + y = 4$, este punto es $(2, 2)$.

El valor 8 lo alcanza en el punto de intersección de la recta tangente a C $x + y = 8$, tal punto es $(4, 4)$.

EJEMPLO 2: Hallar los extremos relativos de $z = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + (y-3)^2 = 1$.

SOL: Para resolver este problema "tapicemos" el plano xy por medio de circunferencias de la forma $x^2 + y^2 = k$, una para cada real no negativo de k , (estas circunferencias son las curvas de nivel de valor k de $z=x^2+y^2$) y luego dibujemos la circunferencia $(y-3)^2=1$. Ver figura 42.

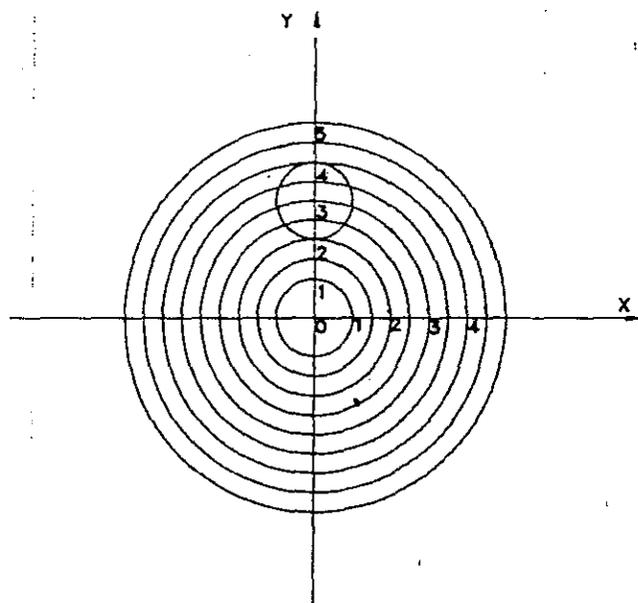


Figura 42

Como las curvas de nivel que dibujamos son circunferencias concéntricas con centro en el origen, algunas de estas circunferencias no cortan a C , dos son tangentes a C y otras cortan en dos puntos. De la figura 42 se deduce que las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 16$ son tangentes a C , que las circunferencias $x^2 + y^2 = k$ con $4 < k < 16$ cortan a C en dos puntos y que las circunferencias $x^2 + y^2 = k$ con $0 < k < 4$ ó $k > 16$ no tienen puntos en común con C . Como estamos interesados en evaluar a z en los puntos que cumplan con la condición $x^2 + (y-3)^2 = 1$ nos tenemos que limitar a estudiar los valores de z en los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 = k$ tangentes o secantes a C . Para tales puntos todos los valores de $z = x^2 + y^2$ están en el intervalo cerrado $[4,16]$. Por lo tanto el valor mínimo para $z = x^2 + y^2$ es 4 y el máximo 16. De la figura 42 concluimos que el valor 4 lo alcanza

PROBLEMA 3: Hallar los extremos relativos de $w = 2x + 2y + z$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

SOLUCION: Como ahora queremos encontrar los extremos relativos de la función $w = f(x,y,z)$ sujeta a una restricción $g(x,y,z) = 0$, tenemos que trabajar con superficies de nivel, en este caso son los planos de la forma $2x+2y+z=k$, los cuales son perpendiculares al vector $\langle 2,2,1 \rangle$. Así, tapicemos el espacio tridimensional por medio de planos de la forma $2x + 2y + z = k$, uno para cada valor real de k . Luego dibujemos la esfera E con centro en el origen $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. La geometría analítica se obtiene que las superficies de nivel de valor $k = \pm 12$ son tangentes a la esfera E , que las superficies de nivel con valor de k , tal que $-12 < k < 12$ corta a la esfera y que para $k < -12$ ó $k > 12$, la superficie de nivel de valor k no tiene puntos en común con la esfera E . Como queremos evaluar a $w = 2x+2y+z$ en los puntos de la esfera E , tenemos que encontrar los valores que w toma en los puntos de intersección de los planos $2x + 2y + z = k$ con la esfera E . Para todos estos puntos los valores de w están en el intervalo cerrado $[-12,12]$: Por lo tanto el valor mínimo para w es -12 y el máximo 12 . El valor mínimo se alcanza en $(-8/3, -8/3, -4/3)$ y el máximo en $(8/3, 8/3, 4/3)$.

PROBLEMA 4: Hallar los extremos relativos de $w = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las restricciones $x + 2y - z - 6 = 0$ y $2x - y + z + 1 = 0$.

SOLUCION: Ahora notemos que estamos ante un problema de hallar los extremos relativos de una función de la forma $w=f(x,y,z)$ sujeta a dos restricciones, una $g(x,y,z) = 0$ y otra $h(x,y,z) = 0$. Geométricamente, esto significa que queremos encontrar el cuadrado de la distancia que hay entre la recta L determinada por los dos planos dados y el origen. En este caso las superficies de nivel son esferas de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = k$, es decir esferas concéntricas con centro en el origen. Como las ecuaciones paramétricas de la recta L determinada por los dos planos son $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = -1$, podemos obtener por medio de la geometría analítica que la distancia entre dicha recta y el origen es $\sqrt{6}$. Así, si tapizamos al espacio tridimensional por medio de esferas de la forma $x^2+y^2+z^2 = k$,

$0 \leq k < 6$ no tienen puntos en común con la recta L , si $k = 6$,
 entonces la curva de nivel $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ es tangente a L en
 (-1) y las superficies de nivel de valor de k con $k > 6$ cortan a
 la recta L en dos puntos. Como queremos evaluar a w en los puntos de
 la recta L , tenemos que estudiar los valores de w en los puntos de
 intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = k$ que son tangentes o cortan a
 L . Para todos estos puntos los valores de w están en el intervalo
 $(-\infty, 6]$, por lo tanto el valor mínimo para w es 6 y lo alcanza en
 (-1) , también podemos decir que w no tiene valor máximo.

Revisemos los ejemplos que acabamos de discutir, para encontrar
 una propiedad algebraica (si es que la hay) que tengan los puntos
 que fueron soluciones. En todos los ejemplos que estudiamos,
 encontramos una coincidencia geométrica: en los ejemplos 1 y 2 las
 curvas de nivel que pasan por los puntos solución son tangentes a la
 curva C que representa la restricción dada y las curvas de nivel que
 pasan por los demás puntos de la curva C no son tangentes a C . En el
 ejemplo 3, las superficies de nivel que pasan por los puntos
 solución, son tangentes a la superficie E que representa a la
 restricción dada y las superficies de nivel que pasan por los demás
 puntos de E , no son tangentes a la superficie de restricción E . En
 el ejemplo 4, la superficie de nivel que pasa por el punto solución
 es tangente a la recta L que representa a las dos restricciones
 dadas, en cambio las superficies de nivel que pasan por los demás
 puntos de L , no son tangentes a la recta L .

Sabemos que si $z = f(x, y)$ entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a
 la curva de nivel $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ en el punto (x_0, y_0) . Así que,
 si una curva de nivel C_1 de $z = f(x, y)$ y una curva restricción
 $C_2: g(x, y) = 0$ son tangentes en cierto punto P , podemos encontrar una
 recta L que pase por P y que sea tangente tanto a C_1 como a C_2 . Como
 $\nabla g(x, y) = 0$ es una curva de nivel de $z = g(x, y)$ entonces $\nabla g(P)$, es
 decir, el gradiente de $z = g(x, y)$ evaluado en P , es perpendicular a
 C_2 en P y por lo tanto perpendicular a L , por otro lado $\nabla f(P)$, es
 decir el gradiente de $z = f(x, y)$ evaluado en P , es perpendicular a
 C_1 en P y por lo tanto perpendicular a L , esto significa que los
 vectores $\nabla f(P)$ y $\nabla g(P)$ son perpendiculares a L en P , esto es, $\nabla f(P)$

también sabemos que si $w = f(x,y,z)$ entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel $f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$. Así si S_1 es una superficie de nivel S_1 de $w = f(x,y,z)$ y una superficie de nivel S_2 $g(x,y,z) = 0$ son tangentes en algún punto P , podemos encontrar un plano T que pase por P y que sea tangente tanto a S_1 como a S_2 . Como $g(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel de $w_1 = g(x,y,z)$ entonces $\nabla g(P)$ es perpendicular a S_2 en P y por lo tanto a T . Por otro lado $\nabla f(P)$ es perpendicular a S_1 en P y por lo tanto a T . Como tanto $\nabla g(P)$ como $\nabla f(P)$ son perpendiculares a T , podemos concluir que dichos vectores son colineales, es decir, existe algún número λ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

Ahora, sea $w = f(x,y,z)$ y C una curva determinada por las superficies $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$. si C es una tangente a la superficie de nivel S $f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ entonces existe una recta L que pase por P y que es tangente tanto a S como a C . Ya que $\nabla f(P)$ es perpendicular a S en P , es decir, ya que $\nabla f(P)$ es perpendicular al plano tangente T a S en P y L está contenida en T podemos concluir que $\nabla f(P)$ es perpendicular a L . Como $g(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel de $w_1 = g(x,y,z)$ que pasa por P , entonces $\nabla g(P)$ es perpendicular a $g(x,y,z) = 0$ en P , es decir $\nabla g(P)$ es perpendicular al plano T_1 que es tangente a $g(x,y,z) = 0$ en P pero como L está contenida en T_1 , podemos concluir que $\nabla g(P)$ es perpendicular a L . De manera similar, ya que $h(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel de $w_2 = h(x,y,z)$ que pasa por P , podemos concluir que $\nabla h(P)$ es perpendicular a L . El hecho de que los vectores $\nabla f(P)$, $\nabla g(P)$ y $\nabla h(P)$ sean perpendiculares a L implica que están en un mismo plano y que por lo tanto cualquiera de ellos pueda ser escrito como una combinación lineal de los otros dos, así para $\nabla f(P)$ existen dos números λ y μ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$.

Todo lo anterior nos invita a que evaluemos los gradientes de cada una de las funciones involucradas en los ejemplos anteriores, en los puntos solución, para investigar si la contraparte algebraica es congruente con los hechos geométricos encontrados.

En el ejemplo 1, las funciones que involucramos son $f(x,y) = x+y$ y $g(x,y) = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 2$, los puntos solución fueron $(2,2)$ y $(4,4)$. El gradiente de f en $(2,2)$ es $\nabla f(2,2) = (1,1)$ y el gradiente de g en $(2,2)$ es $\nabla g(2,2) = (-4, -4)$. Así $\nabla f(2,2) = -\frac{1}{4} \nabla g(2,2)$.

$\nabla f(2,2) = \langle 2x-6, 2y-6 \rangle$, por lo tanto $\nabla f(2,2) = \langle 1,1 \rangle$ y $\nabla g(2,2) = \langle -2,-2 \rangle$, esto implica que $\nabla f(2,2) = (-1/2) \nabla g(2,2)$. Como $\nabla f(4,4) = \langle 1,1 \rangle$ y $\nabla g(4,4) = \langle 2,2 \rangle$ tenemos $\nabla f(4,4) = (1/2) \nabla g(4,4)$.

En el ejemplo 2, las funciones que se involucran son $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = x^2 + (y-3)^2 - 1$. Los puntos solución fueron $(0,2)$ y $(0,4)$. Aquí $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 2y \rangle$ y $\nabla g(x,y) = \langle 2x, 2y-6 \rangle$, por lo tanto $\nabla f(0,2) = \langle 0,4 \rangle$ y $\nabla g(0,2) = \langle 0,-2 \rangle$, esto implica que $\nabla f(0,2) = (-2) \nabla g(0,2)$. Como $\nabla f(0,4) = \langle 0,8 \rangle$ y $\nabla g(0,4) = \langle 0,2 \rangle$, entonces $\nabla f(0,4) = 4 \nabla g(0,4)$.

En el ejemplo 3, las funciones que se manejan son $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$ y $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16$, los puntos solución fueron $(-8/3, -8/3, -4/3)$ y $(8/3, 8/3, 4/3)$. $\nabla f(x,y,z) = \langle 2, 2, 1 \rangle$ y $\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$. Por lo tanto $\nabla f(-8/3, -8/3, -4/3) = \langle 2, 2, 1 \rangle$ y $\nabla g(-8/3, -8/3, -4/3) = \langle -16/3, -16/3, -8/3 \rangle$, esto implica que $\nabla f(-8/3, -8/3, -4/3) = (-3/8) \nabla g(-8/3, -8/3, -4/3)$. Como $\nabla f(8/3, 8/3, 4/3) = \langle 2, 2, 1 \rangle$ y $\nabla g(8/3, 8/3, 4/3) = \langle 16/3, 16/3, 8/3 \rangle$, podemos concluir que $\nabla f(8/3, 8/3, 4/3) = (3/8) \nabla g(8/3, 8/3, 4/3)$.

En el ejemplo 4, las funciones con las que trabajamos son $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x,y,z) = x + 2y - z - 6$ y $h(x,y,z) = x + y + z + 1$. Hubo solamente un punto solución, el punto $(1,2,-1)$. Como $\nabla f(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$ entonces, $\nabla f(1,2,-1) = \langle 2, 4, -2 \rangle$, de $\nabla g(x,y,z) = \langle 1, 2, -1 \rangle$, obtenemos $\nabla g(1,2,-1) = \langle 1, 2, -1 \rangle$ y de $\nabla h(x,y,z) = \langle 1, 1, 1 \rangle$, se obtiene $\nabla h(1,2,-1) = \langle 2, -1, 1 \rangle$. Como $\nabla f(1,2,-1)$ es perpendicular a la recta L de ecuaciones paramétricas $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$ y también lo son $\nabla g(1,2,-1)$ y $\nabla h(1,2,-1)$, esto significa que el vector $\nabla f(1,2,-1)$ se puede escribir como una combinación lineal de $\nabla g(1,2,-1)$ y $\nabla h(1,2,-1)$, es decir, $\nabla f(1,2,-1) = \lambda \nabla g(1,2,-1) + \mu \nabla h(1,2,-1)$ para ciertos números reales λ y μ . En este caso podemos decir que $\nabla f(1,2,-1) = 2 \nabla g(1,2,-1) + 0 \nabla h(1,2,-1)$. Todo esto que hemos discutido nos permite plantear los siguientes teoremas:

Teorema 1: Si $f(x_0, y_0)$ es un extremo relativo de $z = f(x,y)$ sujeto a la restricción (o condición) $g(x,y) = 0$ entonces $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún número λ . [Aquí se supone que $z = f(x,y)$ y $g(x,y) = 0$ son diferenciables].

Teorema 2: Si $f(x_0, y_0, z_0)$ es un extremo relativo de $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$ entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ para algún número λ . [Aquí se supone que $w = f(x, y, z)$ y $w_1 = g(x, y, z)$ son funciones diferenciables.]

Teorema 3: Si $f(x_0, y_0, z_0)$ es un extremo relativo de $f(x, y, z)$ sujeto a las restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$ para algunos números λ y μ . [Aquí se supone que $w = f(x, y, z)$, $w_1 = g(x, y, z)$ y $w_2 = h(x, y, z)$ son funciones diferenciables.]

Demostración del Teorema 1: De $g(x, y) = 0$, podemos decir que existe una función $y = f_1(x)$ (es decir "despejamos" a la variable y de $g(x, y) = 0$), así que $z = f(x, y)$ la podemos escribir como función de sólo la variable x , por el cálculo de una variable, si en $x = x_0$ alcanza un extremo relativo entonces $dz/dx = 0$. Como $dz/dx = (\partial f/\partial x) + (\partial f/\partial y)(dy/dx)$, entonces en aquellos valores de x en los que la función z tiene un extremo relativo

$$(\partial f/\partial x) + (\partial f/\partial y)(dy/dx) = 0, \text{ de donde} \\ (1) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{(\partial f/\partial x)}{(\partial f/\partial y)}$$

De $g(x, y) = 0$, $(\partial g/\partial x) + (\partial g/\partial y)(dy/dx) = 0$, de donde

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{(\partial g/\partial x)}{(\partial g/\partial y)}$$

De (1) y (2) se concluye que

$$\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = \frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}$$

de la igualdad de estas fracciones

$$\begin{aligned} \partial f/\partial x &= \lambda (\partial g/\partial x) \\ \partial f/\partial y &= \lambda (\partial g/\partial y) \end{aligned}$$

para algún número λ . Estas igualdades, se pueden escribir en forma más compacta por medio de

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

que es la ecuación que satisfacen los puntos de la curva $g(x, y) = 0$ en la que $z = f(x, y)$ alcanza un extremo restringido.

Demostración del Teorema 2: De $g(x, y, z) = 0$, podemos decir que existe una función $z = f_1(x, y)$ (es decir "despejar" a la

... como función de las dos variables x y y , por el cálculo de funciones de dos variables, si en $x = x_0$ y $y = y_0$ w alcanza un extremo relativo, $\partial w / \partial x = 0$ y $\partial w / \partial y = 0$. Como

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

... en aquellos valores de x y y en los que la función w tiene un extremo relativo se cumple

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

... otro lado, de $g(x, y, z) = 0$, obtenemos

$$(4) \quad \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

De (3) y (4) despejamos a $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ y obtenemos

$$\frac{(\partial f / \partial x)}{(\partial f / \partial z)} = \frac{(\partial g / \partial x)}{(\partial g / \partial z)} \quad \text{y} \quad \frac{(\partial f / \partial y)}{(\partial f / \partial z)} = \frac{(\partial g / \partial y)}{(\partial g / \partial z)}$$

... de aquí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f / \partial z}{\partial g / \partial z} \right) \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f / \partial z}{\partial g / \partial z} \right) \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f / \partial z}{\partial g / \partial z} \right) \frac{\partial g}{\partial z}$$

... hacemos $\lambda = (\partial f / \partial z) / (\partial g / \partial z)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}$$

... estas tres igualdades se pueden combinar en una ecuación

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z).$$

... que es la ecuación que satisfacen los puntos de la curva $g(x, y, z) = 0$ en la que $w = f(x, y, z)$ tiene un extremo restringido.

Demostración del Teorema 3: Nos limitaremos a hacer la demostración para el caso particular en que la intersección de las superficies $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ es una recta L . Supongamos pues, que $P(x_0, y_0, z_0)$ es un extremo relativo de $w = f(x, y, z)$ restringido a la recta L que tiene por ecuaciones paramétricas a $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$, $z = ct + z_0$. Como $w = f(x, y, z)$ se puede describir en función de la única variable t , los extremos relativos

$(\partial f/\partial x)a + (\partial f/\partial y)b + (\partial f/\partial z)c = \nabla f(x,y,z) \cdot \langle a,b,c \rangle$. Por ser (x_0, y_0, z_0) un extremo relativo $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle a,b,c \rangle = 0$, esto significa que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a L. Como $g(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel de $w_1 = g(x,y,z)$ y está definida en un segmento de L que contiene a $P(x_0, y_0, z_0)$ podemos calcular dw_1/dt donde $w_1 = g(x,y,z)$ y $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$, $z = ct + z_0$. Así $dw_1/dt = (\partial g/\partial x)a + (\partial g/\partial y)b + (\partial g/\partial z)c = \nabla g(x,y,z) \cdot \langle a,b,c \rangle$ pero $\nabla g(x,y,z) \cdot \langle a,b,c \rangle = 0$ para todos los puntos del segmento de L que contiene a (x_0, y_0, z_0) porque $g(x,y,z) = 0$ para estos puntos. En particular se cumple que $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la recta L. De manera similar podemos ver que $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a L. Como los vectores $\nabla f(P)$, $\nabla g(P)$ y $\nabla h(P)$ son perpendiculares a L, entonces dichos vectores pertenecen a un mismo plano, de aquí que cualquiera de ellos se pueda escribir como una combinación lineal de los otros dos, así $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$ para ciertos números λ y μ .

Vamos a aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver los problemas que resolvimos por los métodos de la geometría analítica.

1. Hallar los extremos relativos de $z = x + y$ sujeto a la restricción $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$.

SOLUCION: Aquí $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 2$. Queremos hallar los puntos (x_0, y_0) que cumplan con $g(x_0, y_0) = 0$ y $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ donde λ representa un número. Como $\nabla f(x,y) = \langle 1,1 \rangle$ y $\nabla g(x,y) = \langle 2x-6, 2y-6 \rangle$, debemos hallar valores de λ tal que $\langle 1,1 \rangle = \lambda \langle 2x-6, 2y-6 \rangle$, es decir $1 = \lambda(2x-6)$ y $1 = \lambda(2y-6)$ por lo tanto $1/(2x-6) = 1/(2y-6)$ es decir $2x-6 = 2y-6$ de aquí $x = y$, pero debido a que se debe cumplir la restricción $g(x,y) = 0$, tenemos, $2(x-3)^2 = 2$, $(x-3)^2 = 1$ y de aquí $x = 2$ ó $x = 4$. Por lo tanto los pares ordenados que son candidatos a ser puntos donde $f(x,y)$ tenga extremos relativos son $(2,2)$ y $(4,4)$. Por la naturaleza del problema $f(2,2) = 4$ es un mínimo relativo restringido y $f(4,4) = 8$ es un máximo relativo restringido. Aunque no necesitamos hallar los valores de λ para hallar los extremos relativos podemos decir que un valor de λ es $-1/2$ y el otro $1/2$.

2. Hallar los extremos relativos de $z = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + (y-3)^2 = 1$.

SOLUCION: Aquí $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = x^2 + (y-3)^2 - 1$. Queremos encontrar las parejas (x,y) tales que $g(x,y) = 0$ y $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ para cierto número λ . De $\langle 2x, 2y \rangle = \langle 2x, 2y-6 \rangle$, $2x = \lambda 2x$ y $2y = \lambda(2y-6)$, $(2x)\lambda(2y-6) = \lambda 2x(2y)$, $\lambda x = 0$. Si $\lambda \neq 0$, $x = 0$. De $g(x,y) = 0$ y $x = 0$, obtenemos $(y-3)^2 = 1$ y de aquí $y = 2$ ó $y = 4$. Por lo tanto posiblemente sean extremos relativos restringidos $f(0,2) = 4$ y $f(0,4) = 16$. por las características del problema en $(0,2)$, $z = f(x,y)$ alcanza su valor mínimo y en $(0,4)$ alcanza su valor máximo.

3. Hallar los extremos relativos de $w = 2x + 2y + z$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

SOLUCION: Aquí $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$ y $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16$. Queremos encontrar las ternas (x,y,z) tales que cumplen con $g(x,y,z) = 0$ y $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ para algún número λ . De $\langle 2, 2, 1 \rangle = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$, $2\lambda = 2/x = 2/y = 1/z$, $y = 2z$, por lo tanto $4z^2 + 4z^2 + z^2 = 16$, $9z^2 = 16$, $z = \pm 4/3$. Por lo tanto, los puntos donde probablemente $f(x,y,z)$ tenga extremos relativos restringidos son $(-8/3, -8/3, -4/3)$ y $(8/3, 8/3, 4/3)$. Aquí también de la característica del problema $f(-8/3, -8/3, -4/3) = -40/3$ es un mínimo relativo restringido y $f(8/3, 8/3, 4/3) = 40/3$ es un máximo relativo restringido.

4. Hallar los extremos relativos de $w = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las restricciones $x + 2y - z - 6 = 0$ y $2x - y + z + 1 = 0$.

SOLUCION: Aquí $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x,y,z) = x + 2y - z - 6$ y $h(x,y,z) = 2x - y + z + 1$. Queremos hallar los puntos que cumplan con a) $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$ para ciertos valores de λ y μ , y con b) $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$. Así

$$\langle 2x, 2y, 2z \rangle = \lambda \langle 1, 2, -1 \rangle + \mu \langle 2, -1, 1 \rangle, \text{ es decir}$$

$$2x = \lambda + 2\mu \quad 2y = 2\lambda - \mu, \quad 2z = -\lambda + \mu, \text{ de aquí,}$$

$$2y + 2z = \lambda \quad \text{y} \quad 2x + 4y = 5\lambda \quad \text{lo que implica que} \quad x = 3y + 5z.$$

como $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$ tenemos

$$5y + 4z - 6 = 0 \quad \text{y}$$

$$5y + 11z + 1 = 0$$

$z = -1$ es solución de este sistema de ecuaciones por lo que
 $-5 = 1$. Esto significa que en $(1, 2, -1)$ $f(x, y, z)$ probablemente
un extremo relativo. Por las características del problema,
decimos que en $(1, 2, -1)$, $f(x, y, z)$ tiene un mínimo relativo y éste
 $f(1, 2, -1) = 6$.

Si la trayectoria de un proyectil es curvilínea (no rectilínea) entonces el vector aceleración es distinto de cero. Para convencernos de esto, debemos darnos cuenta que las pendientes de las rectas tangentes varían (ver figura 46), pero como el valor de las pendientes de estas rectas tangentes está dado por $y'(t)/x'(t)$ concluimos que $y'(t)/x'(t)$ es variable, esto obliga a que en ningún intervalo de tiempo, $x'(t)$, $y'(t)$ sean simultáneamente constantes. Esto significa que en cualquier intervalo de tiempo $x'(t)$ varía o $y'(t)$ varía o ambas varían y de aquí podemos concluir que ó $\frac{dx'(t)}{dt}$ ó $\frac{dy'(t)}{dt}$ ó ambas no son idénticamente igual a cero. Por lo tanto en el movimiento curvilíneo siempre al menos una componente de la aceleración es distinta de cero (aún cuando la rapidez del proyectil sea constante).

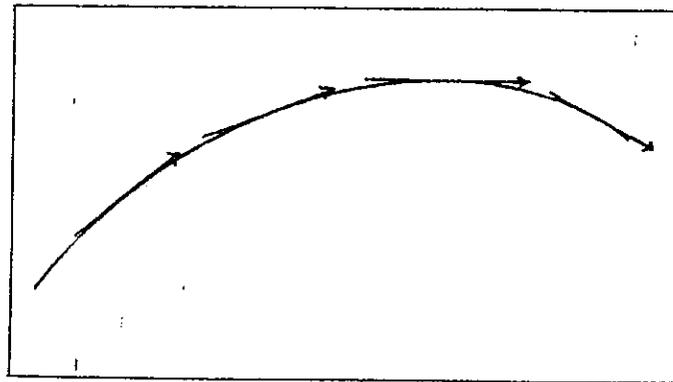


Figura 46

Hemos dicho que la dirección del vector aceleración por lo general no es tangente a la trayectoria. Esto sucede por ejemplo cuando se lanza un proyectil desde un cañón inclinado un ángulo A con respecto al suelo, si suponemos despreciable la resistencia del aire (ver figura 47). La única aceleración que actúa es causada por la fuerza con que la tierra atrae al objeto, y está dirigida siempre hacia abajo en todos los puntos de la curva, esto es $\vec{a}_x = 0$ y $a_y = -9.8j$

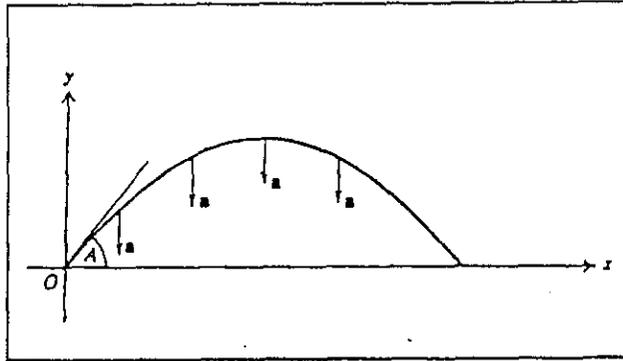


Figura 47

Otro ejemplo que nos permite comparar al vector velocidad con el vector aceleración en el movimiento curvilíneo, es el movimiento de una partícula a lo largo de una circunferencia. Las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio R son $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$. Sin embargo, estas ecuaciones no especifican el movimiento hasta que establezcamos como varía θ con el tiempo t . Sea w la velocidad angular de la partícula P en el tiempo t . Por definición w es $d\theta/dt$, esto es, w es la razón de cambio de θ con respecto al tiempo en radianes por unidad de tiempo, para cualquier unidad de tiempo que se use. Luego θ es el número de radianes que recorre P en el tiempo t . Si w es constante, $\theta = wt$. Así, si $w = 3$ y la unidad de tiempo es el segundo, $\theta = 3t$ y en 2 segundos θ cambia en 6 radianes.

Supongamos que w es constante, así $\theta = wt$ y las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio R (ver figura 48) son $x = R \cos wt$, $y = R \sin wt$. Por lo tanto la ecuación vectorial que describe al movimiento es

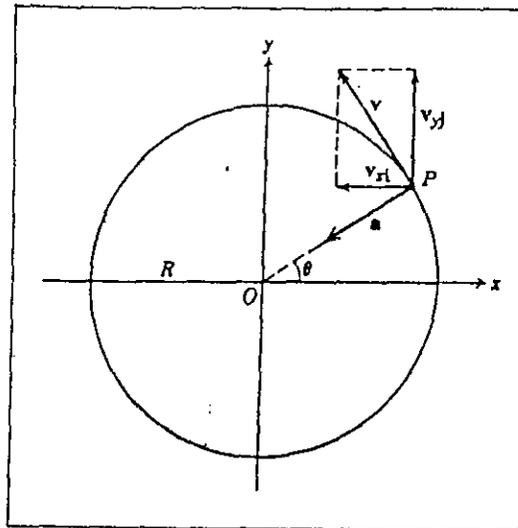
$$\vec{r}(t) = R \cos wt \, \mathbf{i} + R \sin wt \, \mathbf{j}$$

por lo tanto

$$\vec{v}(t) = -wR \sin wt \, \mathbf{i} + wR \cos wt \, \mathbf{j}$$

y

$$\vec{a}(t) = -w^2 R \cos wt \, \mathbf{i} - w^2 R \sin wt \, \mathbf{j}$$



EL SABER DE SUS HIJOS
HA HECHO SU GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

Figura 48

Como $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$, concluimos que el vector de posición $\vec{r}(t)$ y el vector velocidad $\vec{v}(t)$ son perpendiculares, es decir $\vec{v}(t)$ es tangente a la circunferencia.

Como $\vec{a}(t) = (-\omega^2 R)\vec{r}(t)$, concluimos que el vector de posición $\vec{r}(t)$ y el vector aceleración $\vec{a}(t)$ son colineales y además de dirección opuesta. De esto se deduce que $\vec{a}(t)$ no es tangente a la trayectoria.

Para este caso particular, calculemos d^2s/dt^2 y $\|\vec{a}(t)\|$. Como $ds/dt = \|\vec{v}(t)\| = \omega R$, $d^2s/dt^2 = 0$ y $\|\vec{a}(t)\| = \omega^2 R$, por lo tanto $d^2s/dt^2 \neq \|\vec{a}(t)\|$.

El significado físico del hecho de que la aceleración es a lo largo de PO es que el movimiento circular sólo puede suceder si hay una fuerza que continuamente empuja al cuerpo en movimiento hacia el centro. Esta situación física ocurre por ejemplo cuando se ata a un extremo de un hilo una piedra y se le hace girar. La mano debe ejercer una fuerza, que por la segunda ley de Newton del movimiento implica una aceleración hacia el centro para mantener al objeto girando en forma circular. Además, ya que la magnitud de la aceleración es $\omega^2 R$ y ω es la magnitud de la aceleración angular, la aceleración debe ser mayor si la velocidad angular se incrementa. Esto, también

Como la función $g(t)$ describe la posición de la partícula en dirección horizontal y la función $h(t)$ describe la posición en dirección vertical, podemos usar una expresión vectorial que dé exactamente la misma información que proporcionen las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, ésta es:

$$\vec{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$$

donde $\vec{r}(t)$ representa un vector con punto inicial en el origen y punto final en el punto $P(g(t), h(t))$, ver figura 43. así cuando t varía, el punto final de $\vec{r}(t)$ va describiendo la

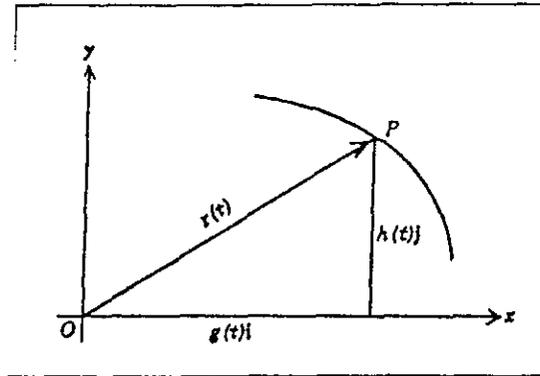


Figura 43

trayectoria de la partícula. A $\vec{r}(t)$ le vamos a llamar vector de posición de la partícula en el tiempo t o simplemente vector de posición.

Queremos pues, encontrar la velocidad y la aceleración de una partícula conociendo el vector de posición $\vec{r}(t)$. Del cálculo de una variable, sabemos que si $y = f(t)$ es la ecuación que describe la posición de una partícula que se mueve en línea recta, la derivada de $f(t)$ con respecto a t nos da la velocidad de la partícula en el tiempo t ; no podemos aplicar el mismo procedimiento a $\vec{r}(t)$, porque $\vec{r}(t)$ no es una función que tome valores numéricos sino vectores; sin embargo, el cálculo de una variable nos sugiere que investiguemos si

$$(1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

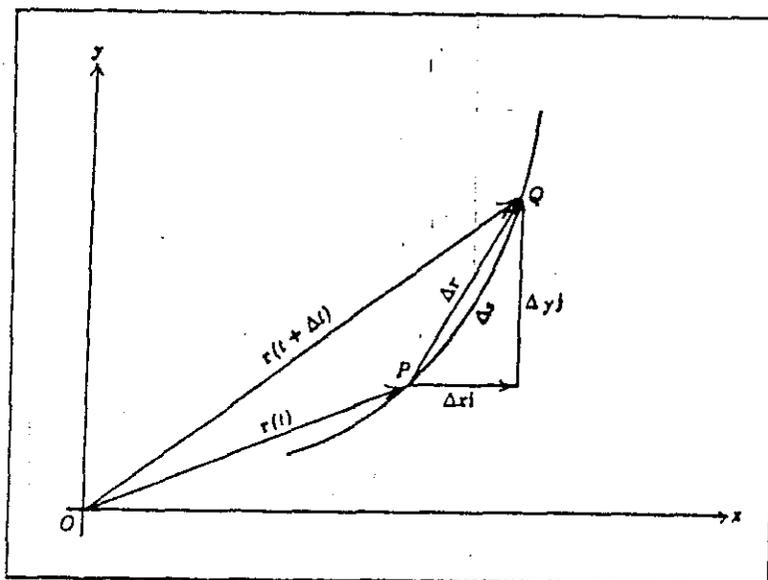
es una cantidad que sirva para representar realmente la velocidad de una partícula en cualquier punto de la trayectoria descrita por $\vec{r}(t)$. Representemos a $(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t))/\Delta t$ por medio de $\Delta\vec{r}(t)/\Delta t$ y a $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{r}(t)/\Delta t$ por medio de $d\vec{r}(t)/dt$. Hagamos $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ y escribamos a (1) en términos de las componentes de $\vec{r}(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} &= \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{(x(t+\Delta t)\mathbf{i} + y(t+\Delta t)\mathbf{j}) - (x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j})}{\Delta t} \\ &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} \\ &= \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d\vec{r}/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$$

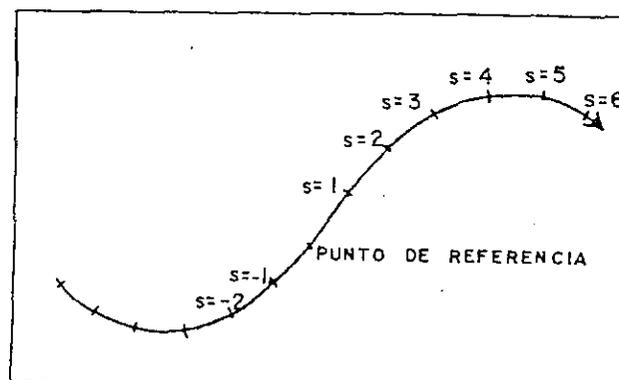
De aquí que podemos calcular a $d\vec{r}(t)/dt$ por medio de sus componentes. Ya dimos el primer paso que nos ayudará a investigar si (1) representa realmente la velocidad de una partícula que sigue una trayectoria $\vec{r}(t)$: escribimos a (1) en términos de las componentes de $\vec{r}(t)$. La figura 44 muestra el significado geométrico de $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t+\Delta t)$, $\Delta\vec{r}(t+\Delta t)$, $\Delta\vec{r}(t)$ (ó $\Delta\vec{r}$), $\Delta x(t)$ (ó Δx) y $\Delta y(t)$ (ó Δy).



$\vec{r}(t)$ está representada por el vector con punto inicial en P y punto final en Q, cuando Δt tiende a cero, Q se aproxima a P y por el trabajo del cálculo de una variable, sabemos que la cuerda PQ se aproxima a la recta tangente a la curva en P, por lo tanto la dirección de $d\vec{r}(t)/dt$ es la de la recta tangente a la curva en P, así $d\vec{r}(t)/dt$ tiene la dirección correcta para la velocidad del objeto en movimiento. Conociendo entonces $d\vec{r}(t)/dt$, podemos hallar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva descrita por el objeto en movimiento, puesto que, conocemos las coordenadas del punto $P(x(t), y(t))$ y un vector paralelo a la recta tangente dado por $\langle x'(t), y'(t) \rangle$.

Ahora falta calcular la magnitud de $d\vec{r}(t)/dt$ y ver si ésta nos da el valor de la rapidez con que se mueve el objeto en el tiempo t . antes de calcular la magnitud de $d\vec{r}(t)/dt$ recordemos un procedimiento para "numerar" una curva C que nos ayudara a lograr nuestro objetivo. Esto puede hacerse de la siguiente manera:

- Paso 1:* Se selecciona un punto cualquiera de la curva C para que sirva de punto de referencia.
- Paso 2:* Partiendo del punto de referencia, se elige un sentido sobre la curva como el sentido positivo y el otro como el sentido negativo.
- Paso 3:* Si $P(x, y)$ es un punto de la curva, sea s la longitud de arco, "con signo", sobre C desde el punto de referencia hasta P , donde s es positiva si P está en el sentido positivo a partir del punto de referencia, y es negativa si P está en el sentido negativo. Ver figura 45.



Por medio de este procedimiento se determina un punto único (x, y) de la curva, cuando se da un valor de s . Por ejemplo, $s=2$ determina el punto que está a dos unidades sobre la curva en el sentido positivo a partir del punto de referencia y $s=-3$ determina el punto que está a 3 unidades sobre la curva en el sentido negativo a partir del punto de referencia.

Si tenemos una función de una variable t , donde t representa el tiempo, que nos da el valor de s para cada valor de t y el sentido positivo de la curva la escogemos de tal manera que s crece cuando t crece, entonces $|ds/dt|$ nos da el valor de la rapidez de la partícula en el tiempo t .

Si la curva C está definida por el vector de posición $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, el cálculo de una variable nos dice cuál es la función de una variable que nos da el valor de s para cualquier valor del tiempo t . Esta es:

$$s = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

por lo tanto, por el teorema fundamental del cálculo de una variable

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

por otro lado la magnitud del vector $d\vec{r}(t)/dt = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ es

$$\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

por lo tanto

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \right|$$

Lo anterior significa que la magnitud de $d\vec{r}(t)/dt$ nos da el valor de la rapidez con que se mueve el objeto en el tiempo t . Hemos pues, llegado a la conclusión de que $d\vec{r}(t)/dt$ es una cantidad vectorial que proporciona el valor de la velocidad del objeto en movimiento en el tiempo t ; así tenemos derecho de llamar a $d\vec{r}(t)/dt$ el vector velocidad en el tiempo t y darle un símbolo. El símbolo para $d\vec{r}(t)/dt$ será $\vec{v}(t)$. Indicaremos las

componentes del vector $\vec{v}(t)$ por:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$$

ya que $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$, entonces

$v_x(t) = x'(t)$ y $v_y(t) = y'(t)$. Cuando tratamos directamente con

las ecuaciones paramétricas $x=g(t)$ y $y=h(t)$, sabemos que $\frac{dx}{dt}$ y

$\frac{dy}{dt}$ representan las componentes horizontal y vertical

respectivamente de la velocidad, esto también está contenido

en:

$$(2) \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}.$$

Las componentes horizontal y vertical de la aceleración son

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ y $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$. Estos hechos pueden ser expresados

vectorialmente en términos de la derivada de (2). Esto es,

definimos el vector aceleración como:

$$(3) \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

Si denotamos $d\vec{r}(t)/dt$ por $\vec{v}(t)$ entonces

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j}$$

$$\text{donde } a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ y } a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

La magnitud de $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ está dada por

$$\left| \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2} \right)^2}$$

pero esta magnitud no es d^2s/dt^2 . Esto se puede verificar calculando d^2s/dt^2 de

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2}$$

Este hecho implica que la magnitud del vector aceleración no

es la derivada con respecto al tiempo de la rapidez ds/dt .

Veremos más tarde que d^2s/dt^2 no es más que una componente del vector aceleración.

Un hecho importante es que el vector aceleración

$\left\langle \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right\rangle$ por lo general no es tangente a la curva.

CAPITULO III

FUNCIONES VECTORIALES

INTRODUCCION

Este capítulo contiene los siguientes temas:

Movimiento en el plano

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Algunos ejemplos de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m para $n, m = 2, 3$

En las primeras dos secciones de este capítulo se estudian principalmente las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 en el contexto del movimiento de una partícula en el plano. En la primera sección se da una justificación de por qué es razonable que $\vec{r}'(t)$ represente la velocidad de una partícula cuando $\vec{r}(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t . En la primera sección se estudian algunos casos particulares de movimiento curvilíneo y en la segunda se halla información acerca del movimiento curvilíneo con ayuda de los conceptos de aceleración tangencial y normal. Los tipos de movimiento que se consideran en estas secciones son tales que $\vec{r}'(t) \neq \langle 0, 0 \rangle$ para todo t . Finalmente, en la tercera sección se dan ejemplos de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m para $n, m = 2, 3$ que surgen del estudio de la geometría.

MOVIMIENTO EN EL PLANO

Si una partícula se mueve en un plano y se nos pregunta por la velocidad y la aceleración que tiene dicha partícula en algún punto de su trayectoria y el único dato que se nos da, es que siguió una trayectoria que tiene por ecuación a $y = x^2$, es imposible saber el valor de tales cantidades, en cambio, si se nos informa que la trayectoria que siguió la partícula está dada por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$, $y = h(t)$ donde t representa el tiempo, sí podremos hallar los valores de dichas

este ejemplo de movimiento que aunque el objeto se mueve a lo largo de un círculo con rapidez constante, está actuando una aceleración. Es esta aceleración la que continuamente cambia la dirección del movimiento y que si deja de existir, el objeto se movería en línea recta.

COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACION

Si una partícula se mueve de tal manera que su trayectoria es curva y para la cual conocemos las ecuaciones paramétricas como funciones del tiempo, ya podemos calcular la magnitud y la dirección de la velocidad y la magnitud y la dirección de la aceleración. Obtuvimos estas cantidades calculando las componentes de la velocidad y la aceleración en las direcciones de los ejes x , y . En el movimiento curvilíneo la dirección del movimiento está a lo largo de la tangente a la curva, pero, como ya hemos señalado, debe haber alguna fuerza actuando que continuamente cambia la dirección del movimiento, porque de no existir esta fuerza, el movimiento sería en línea recta. De aquí que la fuerza que cambia la dirección del movimiento debe empujar al objeto en una dirección diferente a la dirección tangente. Para estudiar tales movimientos, es útil saber qué sucede en la dirección de la tangente y qué está actuando para causar la desviación de esta dirección. El saber que el vector aceleración es $\vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ no nos dice cuánto de la aceleración actúa a lo largo de la tangente y cuánto no.

Reconsideremos primero al vector tangente. Las ecuaciones paramétricas que hemos usado aquí para estudiar la velocidad y la aceleración han sido funciones de un parámetro t que representa al tiempo. Sin embargo, cuando un punto P se mueve a lo largo de una curva, su posición puede ser especificada por la longitud de arco s que ha recorrido desde un punto de referencia al que se le asigna $s=0$. Por lo tanto el vector de posición desde el origen O hasta P se convierte en una función de s y las componentes del vector de posición son de igual manera funciones de s . Esto es:

Si el objeto se mueve de P hasta Q, $\vec{r}(s)$ cambia a $\vec{r}(s+\Delta s)$ (figura 49). Por lo tanto

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s},$$

podemos ahora definir $d\vec{r}/ds$ como $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$.

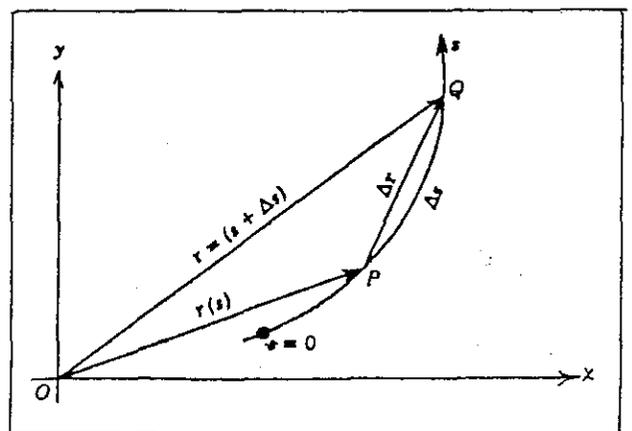
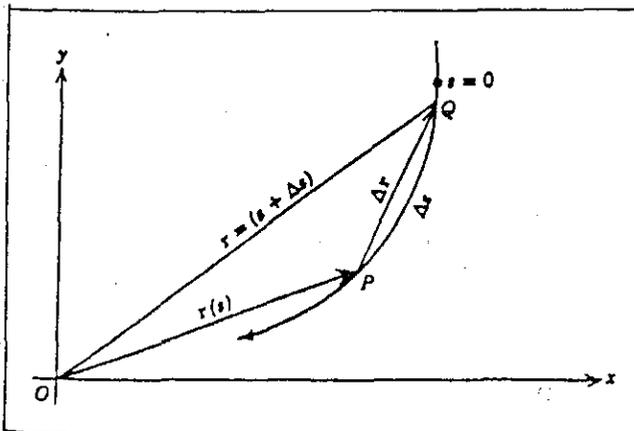
Calculemos la magnitud de $\frac{d\vec{r}}{ds}$. Si $\vec{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ y s es función del tiempo t , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(s)}{dt} &= \frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{j} \\ &= \frac{ds}{dt} \left[\frac{dx(s)}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{j} \right] = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\|, \text{ pero como } \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \left| \frac{ds}{dt} \right|, \text{ entonces } \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1.$$

Encontremos la dirección de $d\vec{r}/ds$. La dirección de $d\vec{r}/ds$ es el límite de la dirección $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$. Cuando Δs se aproxima a cero, Q se aproxima a P. Así que el vector $d\vec{r}/ds$ es paralelo a la recta tangente en P. Veamos más sobre la dirección de $d\vec{r}/ds$ (ver figuras 49 y 50), y 2.8). $\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)$, para $\Delta s > 0$, tiene la dirección del vector \vec{PQ} , como $\Delta s > 0$, $\frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$ también tiene la dirección del vector \vec{PQ} . $\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)$, para $\Delta s < 0$, tiene la dirección del vector \vec{QP} , como $\Delta s < 0$, $\frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$ tiene la dirección del vector \vec{PQ} . Esto significa que la dirección de $d\vec{r}/ds$ es la del vector tangente a la curva en P y que apunta en la dirección en la que crece s . Vamos a denotar al vector unitario $d\vec{r}/ds$ por medio del símbolo $\hat{\tau}$.



La dirección del vector \hat{T} se especifica por (ver figura 51) el ángulo ϕ medido tal como se hace en trigonometría. Entonces ϕ puede variar desde 0 a 360.

Como $\vec{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$, entonces:

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{dx(s)}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds}\mathbf{j}.$$

El vector \hat{T} tiene la misma dirección que la del vector velocidad \vec{v} o $d\vec{r}/dt$ porque $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$ y $\frac{ds}{dt}$ es positiva porque escogeremos que s crezca cuando así lo haga el tiempo t .

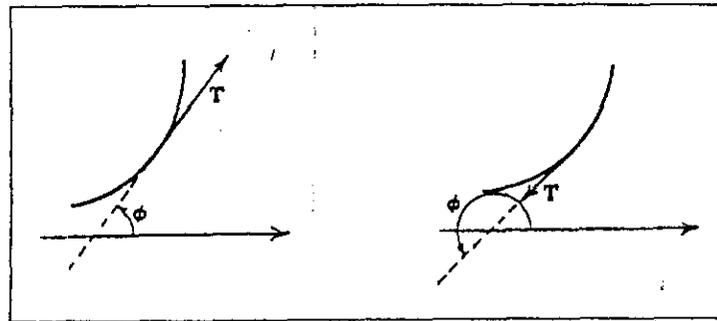


Figura 51

Para determinar la aceleración que obliga a que un objeto en movimiento sobre una curva se desvíe del movimiento rectilíneo, primero estudiaremos la razón de cambio de \hat{T} .

Como \hat{T} es un vector unitario, siempre es posible escribirlo en la forma $\hat{T} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$, donde ϕ representa la dirección del vector \hat{T} .

Como $d\hat{T}/d\phi = (-\sin\phi)\mathbf{i} + (\cos\phi)\mathbf{j}$, podemos ver que relación hay entre $d\hat{T}/d\phi$ y \hat{T} . Como $d\hat{T}/d\phi = (-\sin\phi)\mathbf{i} + (\cos\phi)\mathbf{j} = \cos(\phi+90^\circ)\mathbf{i} + \sin(\phi+90^\circ)\mathbf{j}$, concluimos que $d\hat{T}/d\phi$ es un vector que tiene una dirección igual a $\phi + 90^\circ$ y además es unitario porque $\|d\hat{T}/d\phi\| = \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = 1$. Por lo tanto, podemos obtener el vector $d\hat{T}/d\phi$ a partir del vector \hat{T} , girándolo 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (ver figura 52). A este vector lo vamos a representar por medio del símbolo \hat{n} .

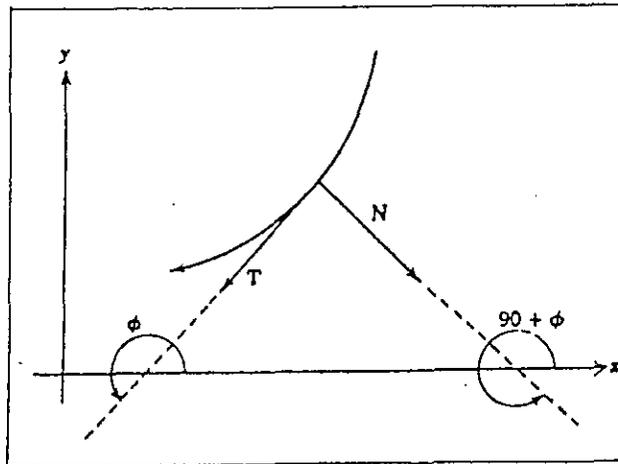


Figura 52

Vamos a escribir la aceleración $\vec{a}(t)$ en términos de los vectores \vec{T} y \vec{N} . Los vectores \vec{T} y \vec{N} nos servirán como vectores unitarios de referencia, así como nos sirvieron los vectores unitarios i y j cuando estudiamos la velocidad y la aceleración en las direcciones horizontal y vertical.

⊙

Si el vector de posición $\vec{r}(t)$ es $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ entonces sabemos que el vector velocidad es $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$. Por la regla de la cadena podemos escribir

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

Veamos un caso particular para ver que $\frac{d\vec{u}(s)}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$, por lo que podemos escribir $\frac{d\vec{u}}{dt}$ sin necesidad de especificar el parámetro del que depende \vec{u} . Sea $\vec{u} = (3\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. La gráfica de $\vec{u}(t)$ es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen y orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para cada valor de t , sea s la longitud del arco subtendido por el ángulo t (figura 53), es decir, $s=3t$ ó $t=s/3$. Ahora

$$\frac{d\vec{u}(s)}{dt} = 3 \left[-\sin\left(\frac{s}{3}\right) \right] \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{3}\right) \vec{i} + 3 \left[\cos\left(\frac{s}{3}\right) \right] \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{3}\right) \vec{j}$$

$$3 \left[-\sin\left(\frac{s}{3}\right) \right] \frac{1}{3} \frac{ds}{dt} \vec{i} + 3 \left[\cos\left(\frac{s}{3}\right) \right] \frac{1}{3} \frac{ds}{dt} \vec{j}$$

pero

$\frac{d\vec{v}(s)}{dt}$ se puede escribir en función de t porque $s=3t$ y $ds/dt=3$.

$$\begin{aligned}\text{Así } \frac{d\vec{v}(s)}{dt} &= 3 \left[-\text{sen} \left(\frac{3t}{3} \right) \right] \frac{1}{3} \cdot 3 \mathbf{i} + 3 \left[\cos \left(\frac{3t}{3} \right) \right] \frac{1}{3} \cdot 3 \mathbf{j} \\ &= 3 \left[-\text{sen} t \right] \mathbf{i} + 3 \left[\cos t \right] \mathbf{j} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.\end{aligned}$$

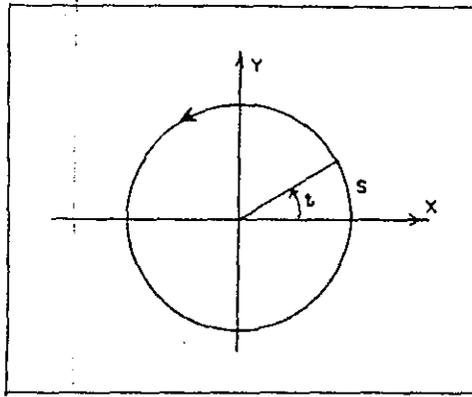


Figura 53

El vector aceleración está dado por $d\vec{v}/dt$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{ds}{dt} \vec{t} \right] \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) \right] \vec{t} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{t}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{t} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{t}}{dt}\end{aligned}$$

Pero como $\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt}$

Por lo tanto

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\vec{t}}{ds}$$

Podemos escribir a \vec{a} en términos de \vec{t} y \vec{N} , recordando que

$\vec{N} = d\vec{t}/d\phi$. Así, de $d\vec{t} = ds \frac{d\vec{t}}{ds}$ obtenemos:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \vec{N}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right) \vec{N}$$

Hemos expresado al vector aceleración en términos de dos componentes perpendiculares. El primero, $\vec{T} \frac{d^2s}{dt^2}$, está a lo largo de la tangente y tiene la magnitud de la aceleración a lo largo de la curva. La segunda componente está a lo largo de \vec{N} y tiene magnitud.

$$\left| \frac{d\phi}{ds} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right|$$

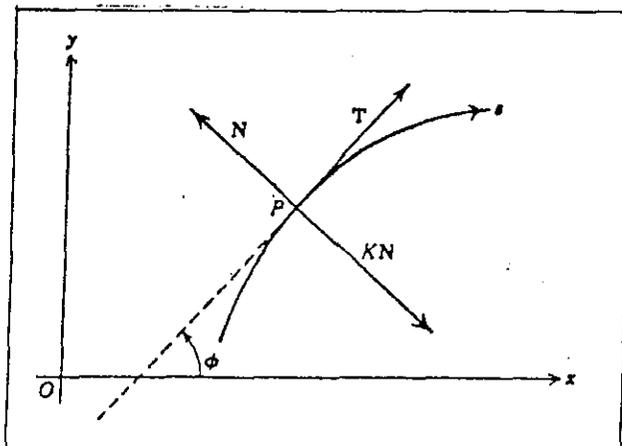
La cantidad $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ es simplemente el cuadrado de la rapidez instantánea $\|\vec{v}(t)\|$ del objeto a lo largo de la curva y la cantidad $d\phi/ds$ proporciona el valor de la curvatura de la curva. Si representamos a $d\phi/ds$ por K y a ds/dt por v , la aceleración puede ser escrita como:

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + Kv^2 \vec{N}$$

o en términos del radio de curvatura $R = 1/K$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \vec{T} + (v^2/R) \vec{N} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

Deberíamos ver también que la componente normal $(v^2/R) \vec{N}$ está dirigida hacia el lado cóncavo de la curva. Ya que v^2 es positiva, la dirección de $(v^2/R) \vec{N}$ o $(Kv^2) \vec{N}$ depende de $K \vec{N}$. Dos ilustraciones pueden convencernos que la componente normal está realmente dirigida hacia el lado cóncavo de la curva. En la figura 54, s es positiva hacia arriba. El vector unitario tangente \vec{T} como ya lo hicimos notar posee la dirección en la que crece s y \vec{N} una dirección mayor en 90° en sentido contrario de las manecillas del reloj a la dirección de \vec{T} .



RIS. T 858

La curvatura $d\phi/ds$ es negativa en P porque ϕ decrece cuando s crece. Por lo tanto $\vec{K}\vec{N}$ y \vec{N} tienen direcciones opuestas, es decir $\vec{K}\vec{N}$ apunta hacia el lado cóncavo de la curva.

Consideremos la figura 55, aquí s crece hacia abajo. El vector tangente \vec{T} tiene la dirección en la que crece s y \vec{N} está dirigido 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a \vec{T} .

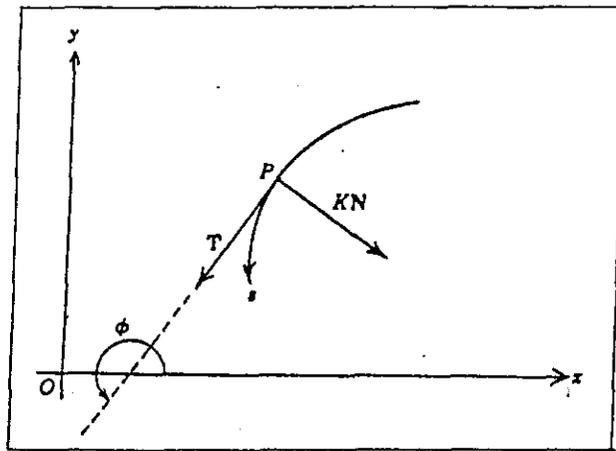


Figura 55

Si el objeto se mueve en la dirección en la que s crece, entonces ϕ es creciente y por lo tanto $d\phi/ds$ es positiva. De aquí que $\vec{K}\vec{N}$ está otra vez dirigida hacia el lado cóncavo de la curva.

El hecho de que el vector aceleración en un punto P sea el mismo si está expresado en términos de los vectores \vec{i} y \vec{j} o en términos de los vectores \vec{T} y \vec{N} , nos sirve para calcular el valor de a_N . Así como $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$, entonces

$$\|\vec{a}\|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_T^2 + a_N^2 \text{ y de aquí } a_N = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - a_T^2}. \text{ Veamos un ejemplo.}$$

EJEMPLO: Supongamos que un cuerpo se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$. Encontrar a_T y a_N .

SOLUCION: La ecuación vectorial que representa al movimiento es:

por lo tanto

$$\vec{v}(t) = (t \cos t) \mathbf{i} + (t \sin t) \mathbf{j}$$

y

$$\vec{a}(t) = (-t \sin t + \cos t) \mathbf{i} + (t \cos t + \sin t) \mathbf{j}$$

como $ds/dt = \|\vec{v}(t)\|$, $ds/dt = t$ y de aquí, $a_T = d^2s/dt^2 = 1$

$$\text{y } a_N = \|\vec{a}\|^2 - a_T^2 = \sqrt{(-t \sin t + \cos t)^2 + (t \cos t + \sin t)^2} - 1 = t.$$

La expresión para \vec{a} en términos de los vectores \hat{T} y \hat{N} muestra más claramente que la expresión para \vec{a} en términos de los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} , un hecho fundamental acerca del movimiento curvilíneo. Uno tiende a pensar que la primera derivada del valor algebraico v de la velocidad, esto es dv/dt o d^2s/dt^2 , es la aceleración total o resultante. Sin embargo, un cambio en la dirección de la velocidad también implica que haya aceleración. Esta aceleración apunta hacia el lado cóncavo de la curva y nuestro resultado para a_N nos dice cuánto es esta aceleración normal. Esta cantidad a_N también se llama *aceleración centrípeta*. Ya que la aceleración normal o centrípeta se presenta en el movimiento curvilíneo, alguna fuerza debe producir esta aceleración. Además, en vista de que $\vec{a} = (d^2s/dt^2)\hat{T} + (kv^2)\hat{N}$, mientras más grande sea la curvatura de la curva en un punto o más grande la velocidad a lo largo de la curva, a_N debe ser más grande y por lo tanto de acuerdo a la segunda ley de Newton sobre el movimiento, la fuerza que produce esta aceleración debe ser más grande. Utilicemos el valor de \vec{a} en términos de los vectores \hat{T} y \hat{N} para calcular el valor de v para que un satélite entre en órbita circular. Supongamos que la órbita de un satélite es circular, el centro de su trayectoria es el centro de la tierra y que orbita r metros desde el centro de la tierra. La magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la tierra es:

$$F_g = \frac{GMm}{r^2},$$

donde M es la masa de la tierra y m la masa del satélite. La magnitud de la fuerza centrípeta requerida para mantener al satélite en su trayectoria circular es:

$$= \frac{mv^2}{r}$$

que el radio de curvatura es r . Para que el satélite permanezca en su trayectoria circular, entonces toda la fuerza gravitacional debe ser usada para ejercer la fuerza centrípeta requerida. Esto es.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

Este resultado nos da la velocidad a la cual el satélite debe orbitar si está a una distancia r del centro de la tierra.

Una partícula también puede describir una curva en el espacio tridimensional. Recordemos de una curva C definida por una función vectorial $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, se obtiene de manera similar a como se obtiene la gráfica de una curva definida por una función vectorial $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO. Trazar la curva que tiene la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ para $t \geq 0$.

SOLUCION: las ecuaciones paramétricas de la curva dada son $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$. de donde concluimos que $x^2 + y^2 = 1$. esto significa que todos los puntos de la curva están en el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 1$. Esta información nos ayudara a graficar la curva. también nos ayudará el calcular valores de x , y , z para algunos valores específicos de t .

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
y	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0
z	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π

un dibujo de la curva se muestra en la figura 58. Se le puede imaginar como un triángulo rectángulo isósceles que se "enrolla" en un cilindro. En el triángulo ABC de la figura 58 el cateto AB se debe "enrollar" alrededor de la circunferencia de radio 1 y centro en (0,0,0) que está en el plano xy con A localizado en (1,0,0).

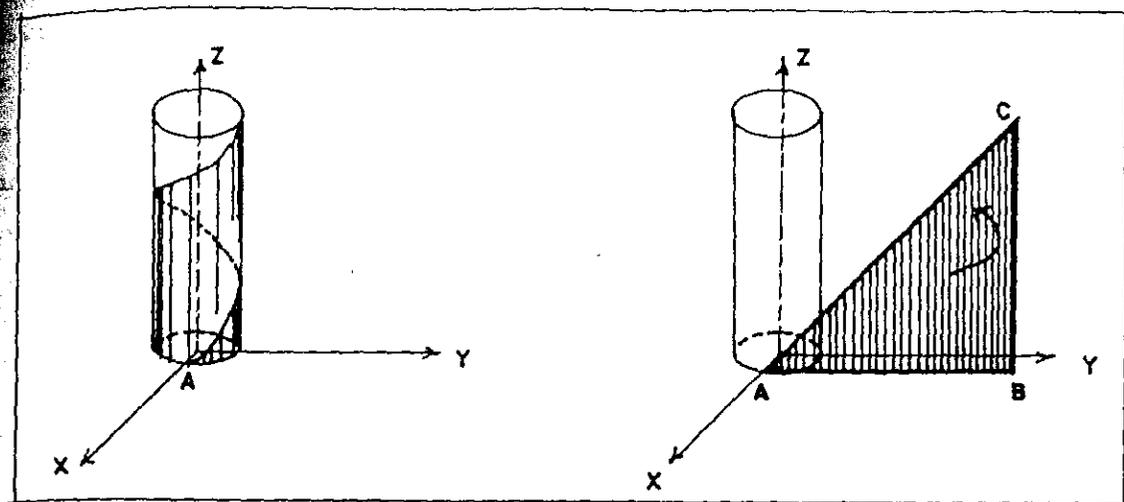


Figura 36

En este caso, la hipotenusa determinará sobre el cilindro la curva C que deseábamos graficar.

EJEMPLO: Trazar la curva cuya ecuación vectorial es $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

SOLUCION: Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$, de donde concluimos que $y = x^2$, es decir los puntos de la curva están en el cilindro parabólico $y = x^2$. La figura 37 muestra un dibujo del cilindro y una porción de la curva de $t = 0$ a $t = 2$.

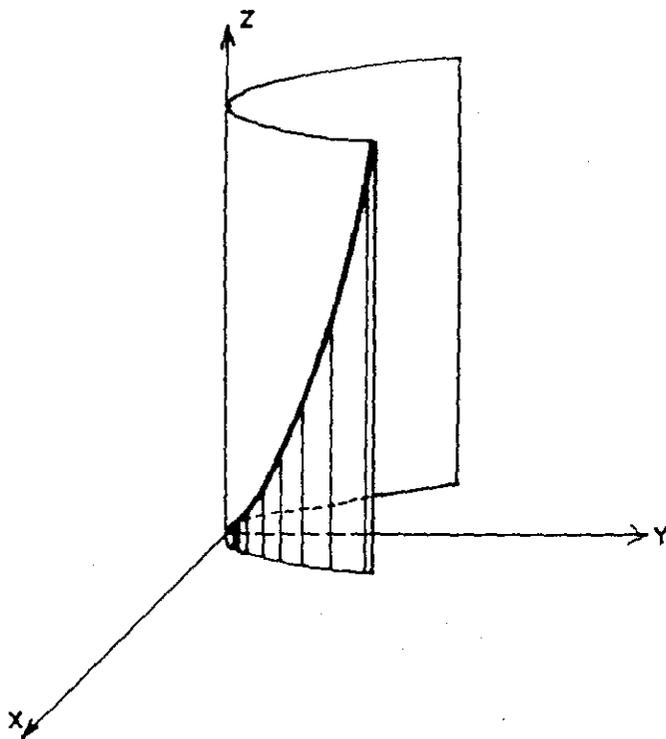


Figura 37

moviéndose en un sistema coordenado de tres dimensiones. Si $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es la ecuación vectorial que describe el movimiento de una partícula en el espacio, donde el parámetro t es el tiempo, la velocidad de dicha partícula en el tiempo t está dada por

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.$$

La aceleración de la partícula en el tiempo t está dada por

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle.$$

También es cierto que si $\vec{r}(s) = \langle f(s), g(s), h(s) \rangle$ es la ecuación vectorial de una curva C , donde s es el parámetro longitud de arco, entonces $||\vec{r}'(s)|| = 1$ y que la aceleración $\vec{a}(t)$ se puede escribir como

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \hat{N} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{T} + \frac{v^2}{R} \hat{N}$$

ALGUNOS EJEMPLOS DE FUNCIONES DE \mathbb{R}^n EN \mathbb{R}^m PARA $n, m = 2, 3$

En geometría analítica plana se resuelve el problema de dado un punto en coordenadas polares; escribirlo en coordenadas cartesianas y dado un punto en coordenadas cartesianas, escribirlo en coordenadas polares.

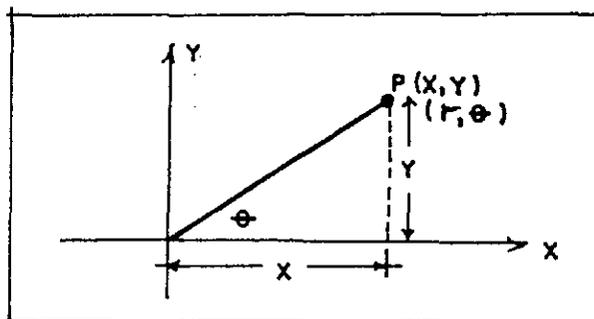


Figura 58

De la figura 58 se tiene que si r y θ son las coordenadas polares de P entonces

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sene} \theta$$

y que si (x, y) son las coordenadas de P entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0 \end{cases}$$



si $(x, y) = (0, 0)$, θ no está definida.

De estas fórmulas de transformación, podemos definir dos funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 a saber

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

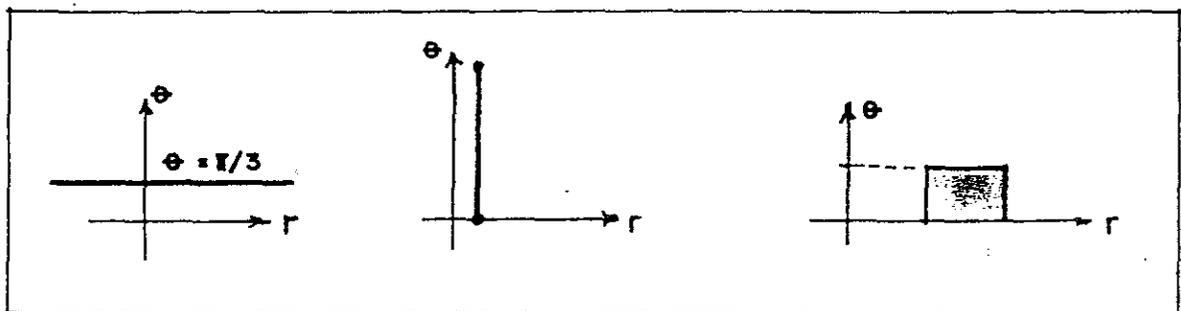
y

$$f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0 \end{cases} \right)$$

que son realmente otra forma de escribir las fórmulas de transformación para pasar de coordenadas polares a coordenadas cartesianas y viceversa.

Sin embargo esta forma de escribir estas transformaciones nos permite, no solo saber la transformada de un punto del plano, sino también la transformada de un conjunto de \mathbb{R}^2 . Veamos un ejemplo.

EJEMPLO: Sea $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Hallar los respectivos conjuntos que esta función asocia a cada uno de los conjuntos dados.



a) La recta $\theta = \pi/3$ b) El segmento $r = 1$ c) El rectángulo definido

SOLUCION: El conjunto de la figura 59a) se transforma en la recta $y = \sqrt{3}x$. El conjunto de la figura 59b) se transforma bajo la función en el círculo unitario y el conjunto de la figura 59c) se transforma bajo la función en el conjunto de punto (x,y) tales que $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ y $x, y \geq 0$. En la figura 60 se muestran geoméricamente los conjuntos dados y los conjuntos asociados bajo la función dada.

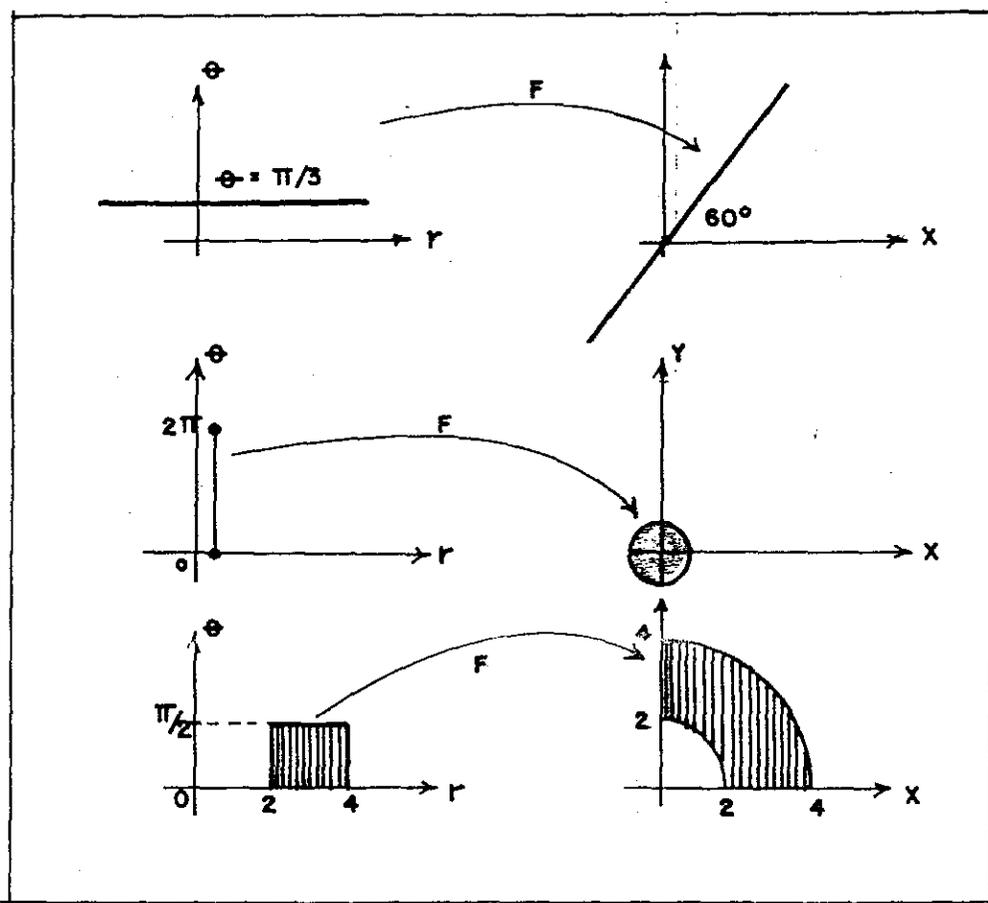


Figura 60

Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO: Sea $A = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ con $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi/2$ y definamos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Determinar el conjunto imagen $B = f(A)$.

SOLUCION: El conjunto B está formado por el conjunto de puntos tales que $r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2$ y $(\tan \theta_1)x \leq y \leq (\tan \theta_2)x$. Ver figura 61.

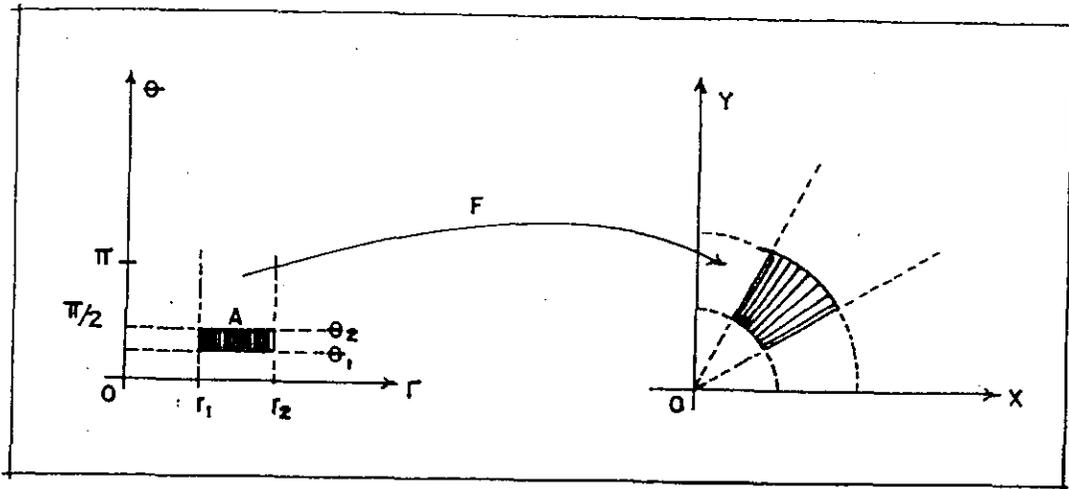


Figura 61

En geometría analítica, también se resuelve el problema de dadas las coordenadas cilíndricas de un punto P en el espacio tridimensional escribirlas en coordenadas cartesianas, asimismo se resuelve el problema de dadas las coordenadas esféricas de un punto P en el espacio tridimensional escribirlas en coordenadas cartesianas. La solución a estos problemas, al igual que la solución del problema de pasar de coordenadas polares a cartesianas nos conduce a definir dos funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 .

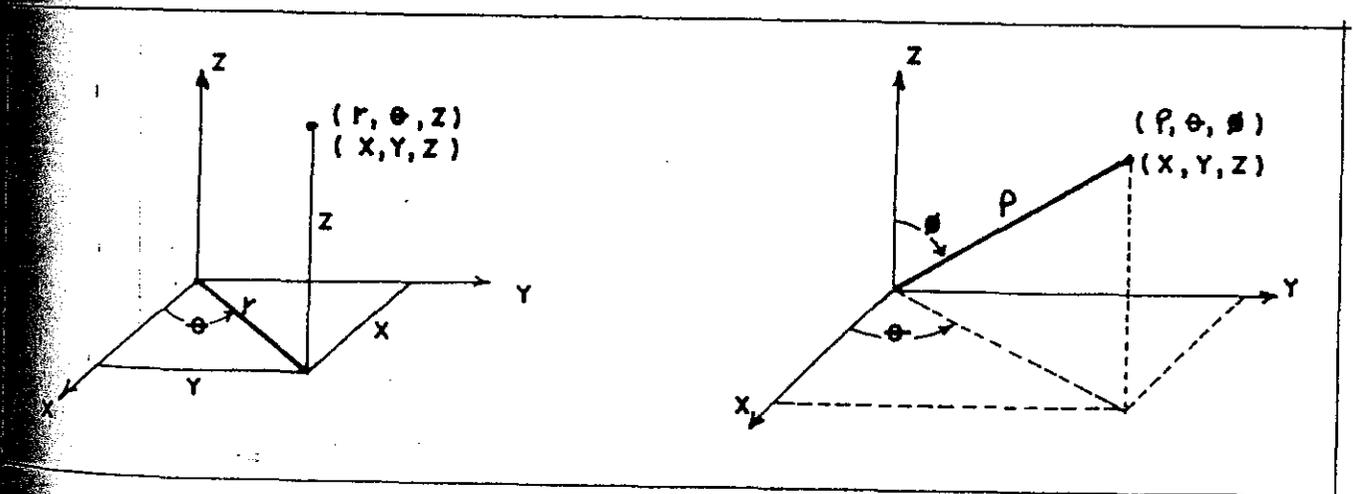


Figura 62

De la figura 62a) encontramos que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z$$

o descrita como una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3

de la figura 52b) obtenemos

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Estas fórmulas de transformación las podemos escribir como una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , a saber

$$F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$

Las fórmulas que nos ayudan a obtener las coordenadas cartesianas de un punto a partir de sus coordenadas cilíndricas o esféricas, nos ayudan a generar algunas funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , así, de $F(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, podemos obtener $F(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ que se consigue al obligar que r tome un valor constante, en este caso se tomó $r = 1$. Otra función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , se consigue si hacemos a θ constante, digamos $\theta = \pi/4$, a saber $F(r, z) = ((\sqrt{2}/2)r, (\sqrt{2}/2)r, z)$. De igual manera de $F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ podemos generar funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , por ejemplo $F(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$, es una función que asocia a cada pareja (θ, ϕ) con $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. También $F(\rho, \theta) = ((\sqrt{2}/2)\rho \cos \theta, (\sqrt{2}/2)\rho \sin \theta, (\sqrt{2}/2)\rho)$ definida para $\rho > 0$ y $\theta \leq 0 < 2\pi$, asocia a cada pareja (ρ, θ) un punto del semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

También las fórmulas para obtener las coordenadas cartesianas a partir de las cilíndricas o las esféricas nos ayudan a generar algunas funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 , como

$$F(r, \theta, z) = (r \cos \theta, z)$$

$$F(r, \theta, z) = (r \sin \theta, z)$$

$$F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta)$$

$$F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \cos \phi)$$

Veamos algunos ejemplos donde se muestre la interpretación geométrica de algunas de las funciones que acabamos de definir.

EJEMPLO: De la función $F(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, que sirve para pasar de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas, encuentre la imagen de

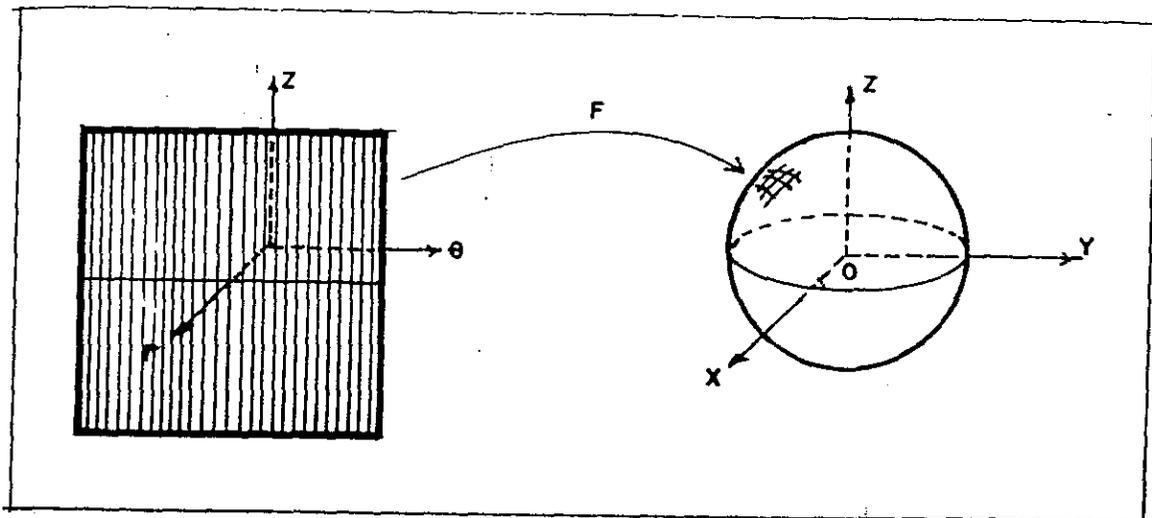
a) El conjunto de puntos $(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ tal que $r = k$, donde k es un número real positivo fijo y θ y z

b) El conjunto de puntos (r, θ, z) tal que $\theta = k$, donde k es fija y r y z varían en todo \mathbb{R} .

c) El conjunto de puntos (r, θ, z) tal que $z = k$, donde k es fijo y r, θ toman cualesquier valor real.

SOLUCION:

a) Ver figura 63.



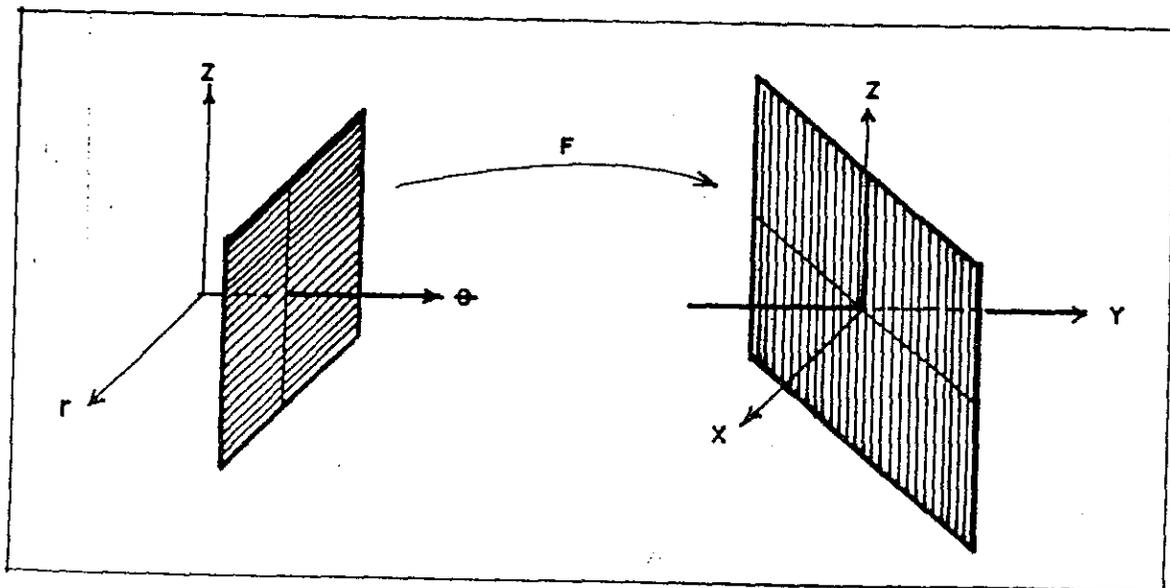
Plano $r = k$

Esfera con centro en el origen y radio k

Figura 63

La misma esfera le corresponde al conjunto de puntos (r, θ, z) del plano $r = k$, con $0 \leq \theta < 2\pi$ y $-k \leq z \leq k$.

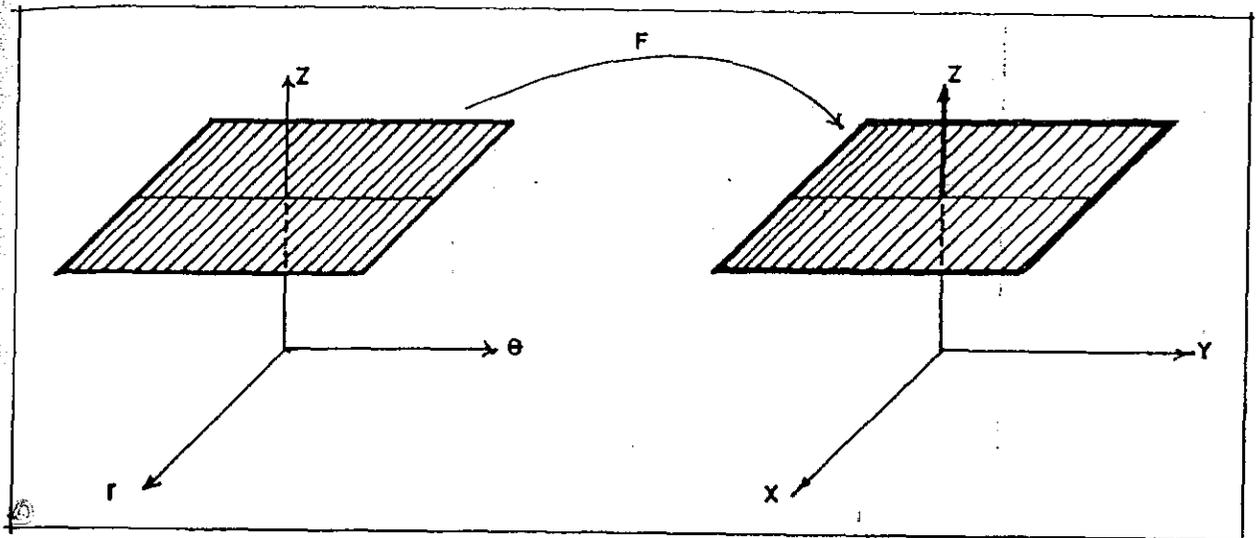
b) Ver figura 64.



Plano $\theta = k$

Si hubieramos deseado encontrar la imagen del conjunto de puntos (r, θ, z) tal que $r \geq 0$, $\theta = k$ y $z \in \mathbb{R}$, la solución que se obtendría sería la parte del plano obtenido que se está en el primer octante y en el octante que está en la parte inferior del primero, incluyendo los puntos del eje z .

c) Ver figura 65.



Plano $z = k$

Plano $z = k$

Figura 65

La misma imagen se obtiene para el conjunto de puntos (r, θ, z) tales que $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $z = k$, k un número real fijo.

Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO: Encuentre la imagen bajo la función

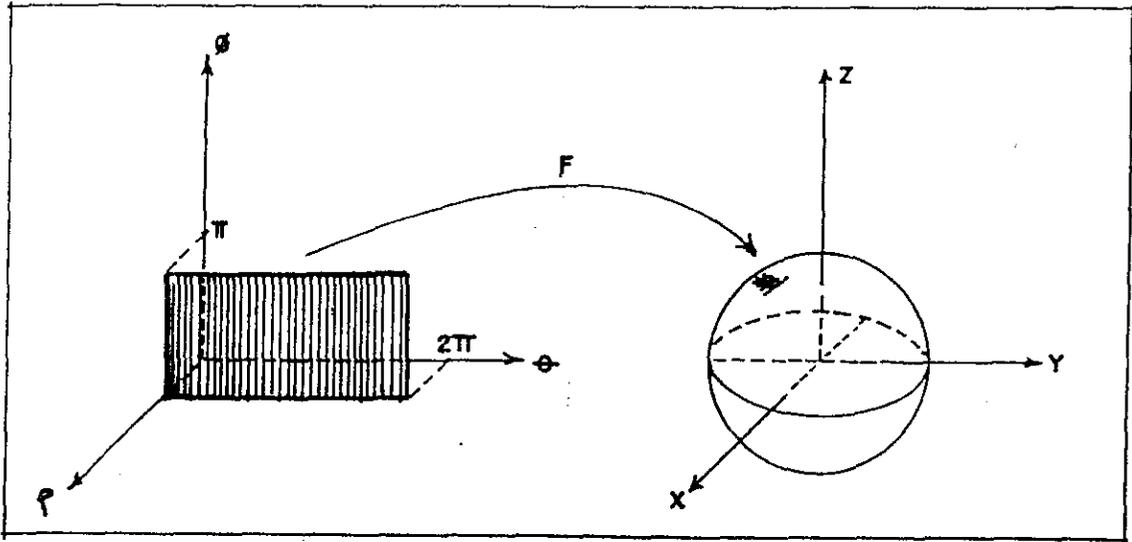
$$F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

de los siguientes conjuntos:

- El conjunto de puntos (ρ, θ, ϕ) tales que $\rho = k$, k un número positivo fijo, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.
- El conjunto de punto (ρ, θ, ϕ) tales que $\theta = k$, $k \in [0, 2\pi]$ pero fijo, $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.
- El conjunto de puntos (ρ, θ, ϕ) tales que $\phi = k$, $k \in [0, \pi]$ pero fijo, $\rho \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

SOLUCION:

a) Ver figura 66.

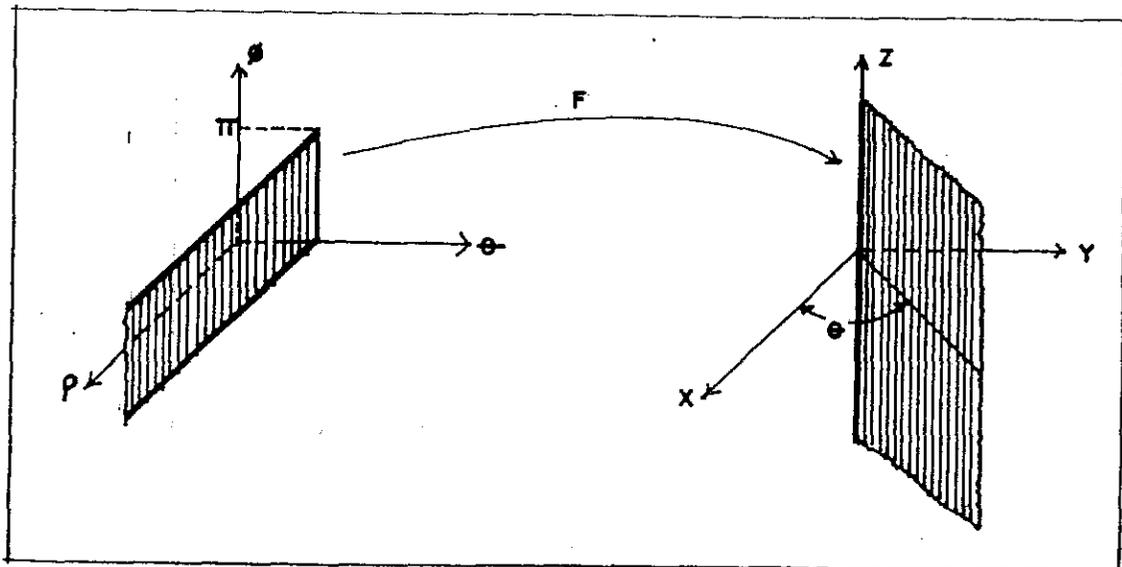


Rectángulo $\rho=k, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$

Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$

Figura 66

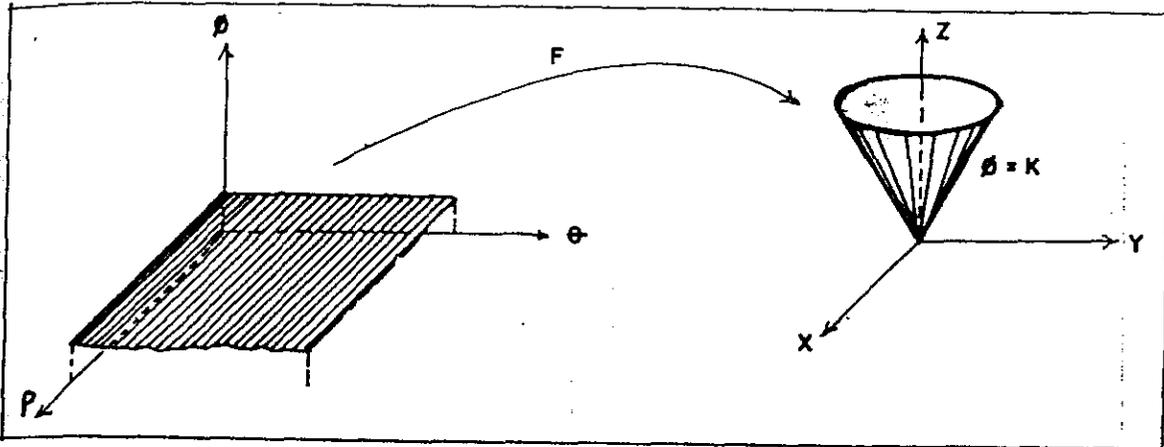
b) Ver figura 67.



La porción del plano $\theta = k$

Semiplano $y = ctank(x)$

c) Ver figura 68.



La porción del plano $\phi = k$, Semicono $z = \tan((\pi/2) - k) \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\phi \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Figura 68

La ecuación para el semicono no es válida para $\phi = 0$ ó $\phi = \pi$; para $\phi = 0$, la imagen sería la parte no negativa del eje z ; y para $\phi = \pi$, la imagen sería la parte no positiva del eje z . Otro caso particular diferente a los semiconos se obtiene para $\phi = \pi/2$, en este caso, la imagen sería el plano $z = 0$.

Podemos plantear más problemas para funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 similares a los que planteamos para funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 .

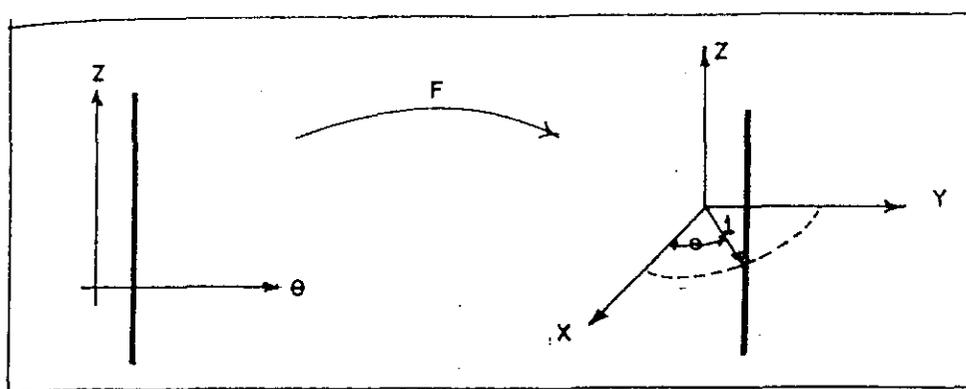
Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO: Sea $f(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$. Hallar la imagen para

- el conjunto de (θ, z) tales que $\theta = k$, k un número fijo en $[0, 2\pi]$ y z en \mathbb{R} .
- El conjunto de (θ, z) tales que $z = k$, k un número real fijo y $\theta \in [0, 2\pi]$.

SOLUCION:

a) Ver figura 69

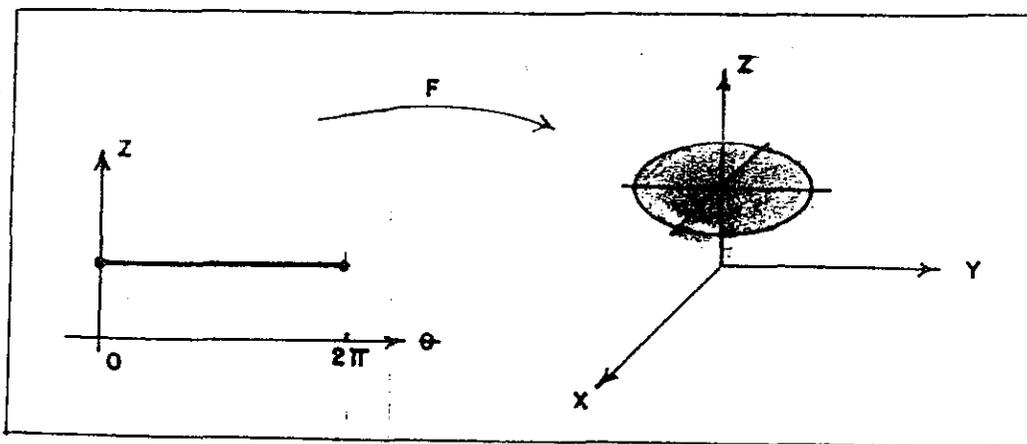


Recta $\theta = k$

$$\text{Recta } \begin{cases} x = \cos k \\ y = \text{sen} k \end{cases}$$

Figura 69

b) Ver figura 70.



Segmento de recta

$$z = k, 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{Circunferencia } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Figura 70

CAPITULO IV INTEGRALES MULTIPLES



EL SABER DE MIS
DIAZ M. CRANI
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO
MATEMÁTICA

INTRODUCCION

Este capítulo contiene los siguientes temas:

1. Volumen bajo una superficie
2. Una aplicación de la integral doble en física
3. Integral doble
4. La integral doble en coordenadas cilíndricas
5. Integrales triples en coordenadas rectangulares
6. Integrales triples en coordenadas cilíndricas
7. Integrales triples en coordenadas esféricas.

En este capítulo se estudian los conceptos de integral doble e integral triple. Se dedican las primeras cuatro secciones al concepto de integral doble y las últimas tres secciones al concepto de integral triple. El estudio de estos conceptos se motiva por medio de problemas. Así, primeramente se halla el volumen de un sólido en la primera sección y la masa de una lámina en la segunda sección para después pasar a la definición de la integral doble en la tercera sección. En la cuarta sección se plantean algunos problemas y se muestra que para obtener su solución resulta más conveniente trabajar con un sistema de coordenadas cilíndricas que con un sistema de coordenadas rectangulares. El concepto de integral triple se motiva hallando la masa de un sólido en la sección cinco. En la secciones 5 y 6 se plantean algunos problemas sobre fuerza de atracción gravitacional que dan lugar a integrales triples pero donde resulta más conveniente utilizar el sistema de coordenadas cilíndricas (sección seis) o el sistema de coordenadas esféricas (sección siete) que el sistema de coordenadas rectangulares.

Para justificar la técnica de integración repetida que permite calcular las integrales dobles y triples que en este capítulo se plantean se dan argumentos de carácter intuitivo. Se dan argumentos geométricos para reducir los problemas de integrales dobles en

ordenadas rectangulares. También se dan argumentos geométricos para reducir problemas de integrales triples en coordenadas cilíndricas o en coordenadas esféricas a problemas de integrales triples en coordenadas rectangulares; esto permite preparar el terreno para la demostración del teorema de cambio de variable para integrales (dobles o triples) que da un tratamiento único a los problemas planteados en los diferentes sistemas de coordenadas y no tratamientos distintos a dichos problemas como en este capítulo se hace.

VOLUMEN BAJO UNA SUPERFICIE

Comencemos con la superficie $z = 25 - x^2 - y^2$. Este es un paraboloides que se abre hacia abajo y que tiene su vértice en $(0, 0, 25)$.

La superficie corta al plano xy en un círculo; esto se puede afirmar porque cuando $z = 0$, los puntos de la superficie satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, que es la ecuación de un círculo en el plano $z = 0$. Hay, por lo tanto, un volumen acotado por la superficie y el plano xy . Encontremos, pues, el volumen acotado por la superficie $z = 25 - x^2 - y^2$ y el plano xy . Ya que la superficie es simétrica con respecto al plano xz y al plano yz , la porción de volumen en el primer octante es una cuarta parte del volumen total que deseamos hallar, así que primero encontraremos el volumen de esta cuarta parte (figura 71). Notemos que está acotada por la superficie, el plano xz , el plano yz y el plano xy .

Para obtener este volumen seguiremos el procedimiento que se usa para obtener el área bajo una curva. Cuando se quiere hallar el área bajo una curva, primero se halla una aproximación para el área por medio de una suma de rectángulos y luego se hace que las anchuras de estos rectángulos tiendan a cero, mientras tanto, se incrementa su número para cubrir el área tanto como sea posible. En el caso del volumen los rectángulos serán reemplazados por columnas con secciones

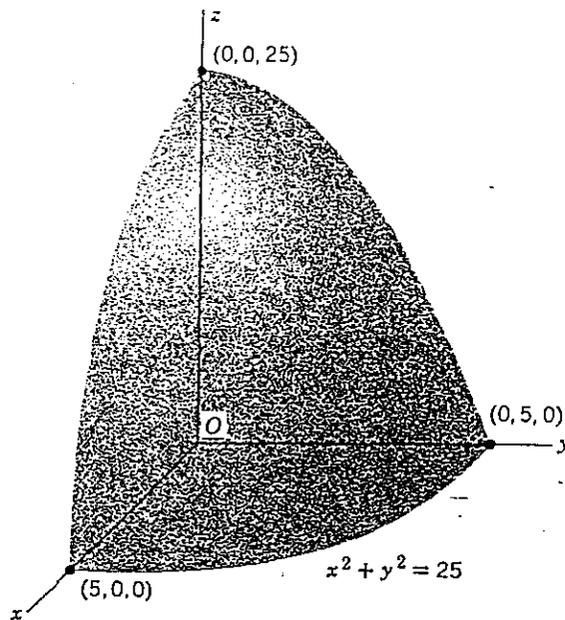


Figura 71

dividamos el intervalo $[0,5]$ del eje X en j partes iguales Δx y el intervalo $[0,5]$ del eje Y en j partes iguales Δy (figura 72).

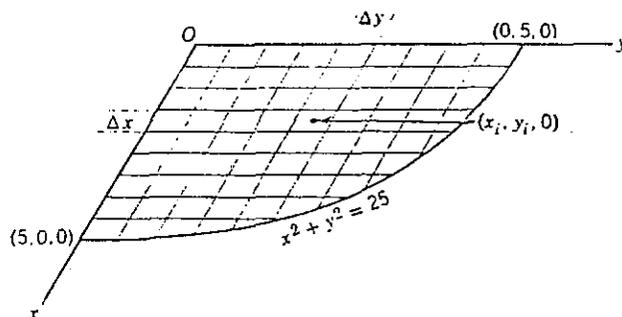


Figura 72

En cada punto de subdivisión sobre un eje dibujamos líneas paralelas al otro eje, así queda cubierta la cuarta parte del círculo que están en el plano xy por medio de cuadrados. No toda el área del cuarto de círculo está cubierta por cuadrados que estén completamente dentro de este cuadrado. Consideraremos solamente aquellos cuadrados que estén totalmente dentro del cuarto de círculo y asignamos un número a cada uno de ellos desde 1 hasta k , de modo que cada cuadrado i tiene un número i asignado.

número. Así del i -ésimo cuadrado o cuadrado típico escogemos un punto $(x_i, y_i, 0)$.

Enseguida consideremos el valor de la función $z=25-x^2-y^2$ en $(x_i, y_i, 0)$ y denotémoslo por z_i . La cantidad $z_i \Delta x \Delta y$ es el volumen de una columna (figura 73) con base $\Delta x \Delta y$ y altura z_i .

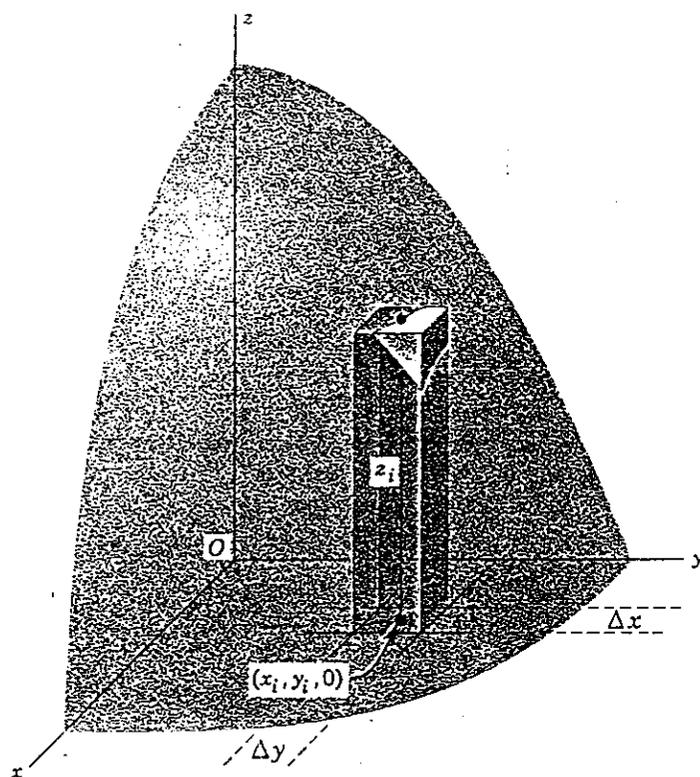


Figura 73

Esta columna es una aproximación para el volumen que está bajo la superficie $z = 25 - x^2 - y^2$ pero a la vez directamente arriba del i -ésimo cuadrado. Que la columna es solamente una aproximación resulta del hecho de que la superficie de la cima de la columna está en parte por arriba de $z = 25 - x^2 - y^2$ y en parte por debajo.

Ahora formamos la suma:

$$(1) \quad S_1 = z_1 \Delta x \Delta y + z_2 \Delta x \Delta y + \dots + z_k \Delta x \Delta y$$

Esta suma es una aproximación para el volumen que estamos buscando.

Nuestro próximo paso es decrecer el tamaño de Δx que permite que el intervalo $[0, 5]$ en el eje x sea dividido en n subintervalos de longitud $\Delta x = 5/n$.

iguales y hacemos lo mismo con Δy . Por lo tanto, habrá un número algo más grande de cuadrados $\Delta x \Delta y$ que estén completamente dentro del cuarto de círculo de la figura 72 y, de hecho, este nuevo conjunto de cuadrados cubrirá más porción del cuarto del círculo que la que cubrió el conjunto anterior. Numeremos otra vez los cuadrados, digamos, desde 1 hasta l , donde l es el número de cuadrados que acabamos de formar, y escogeremos algún punto $(x_i, y_i, 0)$ en cada cuadrado. Sea z_i el valor de z en cada $(x_i, y_i, 0)$. Formamos la suma

$$(2) \quad S_2 = z_1 \Delta x \Delta y + z_2 \Delta x \Delta y + \dots + z_l \Delta x \Delta y.$$

La suma S_2 es una mejor aproximación para el volumen que estamos buscando que la suma S_1 ya que los cuadrados más pequeños $\Delta x \Delta y$ cubrirán más porción del cuarto del círculo y porque cualquier columna con base $\Delta x \Delta y$ y altura z_i se aproxima más al volumen bajo esa parte de la superficie que está sobre $\Delta x \Delta y$.

Podemos continuar el proceso haciendo a los Δx aún más pequeños para que el intervalo $[0, 5]$ del eje x quede dividido en un número muy grande de partes iguales, lo mismo podemos hacer con Δy . En el n -ésimo paso de este proceso tendremos, digamos, m cuadrados y la suma

$$(3) \quad S_n = z_1 \Delta x \Delta y + z_2 \Delta x \Delta y + \dots + z_m \Delta x \Delta y$$

Ahora hacemos precisamente lo que se hace en el caso de funciones de una variable. Dejamos que el número de cuadrados se haga más y más grande, asegurando cada vez un nuevo S_n y una mejor aproximación para el volumen que estamos buscando. Así obtenemos una sucesión de sumas

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

Ya que las aproximaciones suministradas por los términos de la sucesión parecen acercarse más y más al volumen bajo la superficie, el límite de esta sucesión debe ser el volumen que buscamos. Este límite, que es, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, está indicado por

$$(4) \quad \iint_A z \, dx \, dy \quad \text{o} \quad \iint_A (25 - x^2 - y^2) \, dx \, dy.$$

La notación emplea dos signos de integral para mostrar que estamos tratando con una función de dos variables. La letra A

dominio de los valores de x , y que son considerados y que en el presente problema se refiere a la región determinada por el cuarto de círculo que está en el plano xy .

El denotar por medio de (4) al límite de la sucesión formada por los valores de las aproximaciones que íbamos encontrando para el volumen, no determina, por supuesto cuál es el volumen. En (4) se tienen solamente símbolos y el problema del volumen aún permanece. La técnica que resultó útil para hallar $\int_a^b f(x) dx$ probó ser la antidiferenciación nos ayudará también aquí.

Supongamos que en la suma de elementos de volumen, cada $\Delta x \Delta y$ representa una columna, tratamos de involucrar sólo una variable. Precisamente, suponga que consideramos un conjunto de cuadrados que están determinados por un punto y_1 de la subdivisión del eje y . Estos cuadrados están en una línea paralela al eje x . (Figura 74).

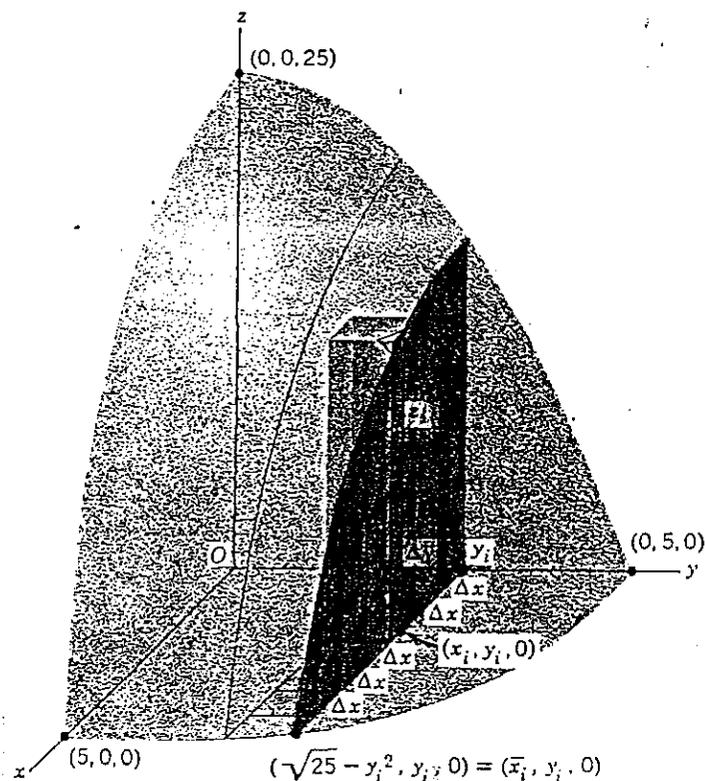


Figura 74

De cada cuadrado escogamos un punto. Ya que cualquier punto

escojamos cualquier valor de x en cada cuadrado pero que el valor de y sea y_i . Así todos los x_i están en la línea $y = y_i$. Estas elecciones fijan un x_i y un y_i en cada cuadrado. Sea $z_i = 25 - x_i^2 - y_i^2$.

El volumen contribuido por las columnas que están sobre estos cuadrados es

$$(5) \quad S_j = z_1 \Delta x \Delta y + z_2 \Delta x \Delta y + \dots + z_j \Delta x \Delta y$$

donde j es el número de cuadrados de la hilera. Ahora hacemos Δx más pequeño, lo que hace que se incremente el número de divisiones del intervalo $[0, \bar{x}]$, donde \bar{x} es el valor de x sobre la frontera $x^2 + y^2 = 25$ que corresponde a y_i . Sin embargo, mantenemos a Δy fija. Ya que los z_i varían solamente con la x_i , la sucesión de sumas suministradas por (5) es exactamente de la misma clase que la que se construye cuando se trata con funciones de una variable. Esta sucesión tiene un límite que podemos denotar por:

$$(6) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} S_j = \int_0^{\bar{x}} (25 - x^2 - y_i^2) dx \Delta y.$$

Aquí el intervalo de integración es el intervalo $[0, \bar{x}]$ donde \bar{x} es el valor de x sobre el círculo frontera. Por supuesto, \bar{x} depende del valor y_i que escogimos para mantenerla fijo.

Reconocemos dos hechos importantes acerca de (6). Primero, el valor de $\int_0^{\bar{x}} (25 - x^2 - y_i^2) dx$ representa el área bajo la curva determinada por la intersección de la superficie $z = 25 - x^2 - y^2$ y el plano $y = y_i$, el área sombreada en la figura 74. Segundo, podemos calcular (6), porque, ya que y_i está fija y Δy es sólo un factor constante, el integrando es una función de una variable, esta variable es la x ; la interpretación geométrica de (6) es el volumen determinado por el cilindro parabólico $z = 25 - x^2 - y_i^2$, los planos $y = y_i$, $y = y_i - \Delta y$, el plano xy y el plano yz ; (figura 3-5) que es una aproximación para el volumen que está entre los planos verticales $y = y_i$, $y = y_i - \Delta y$.

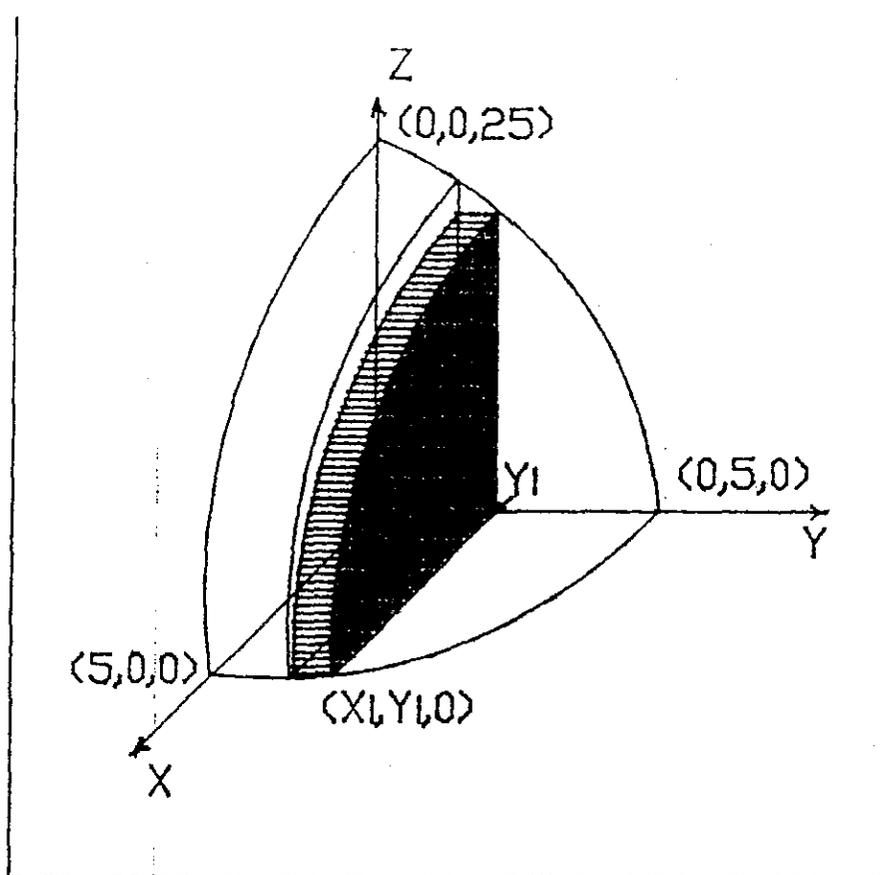


Figura 75

Supongamos que el intervalo $[0,5]$ del eje y queda dividido en 7 partes iguales y que los puntos de división son $0=y_0, y_1, y_2, \dots, y_7=5$ el valor de Δy resulta ser $\frac{5}{7}$, una aproximación para el volumen será

$$S_7 = \int_0^{y_1} \sqrt{25-y_1^2} \sqrt{25-x^2-y_1^2} dx \frac{5}{7} + \int_0^{y_2} \sqrt{25-y_2^2} \sqrt{25-x^2-y_2^2} dx \frac{5}{7} + \int_0^{y_3} \sqrt{25-y_3^2} \sqrt{25-x^2-y_3^2} dx \frac{5}{7} +$$

$$\int_0^{y_4} \sqrt{25-y_4^2} \sqrt{25-x^2-y_4^2} dx \frac{5}{7} + \int_0^{y_5} \sqrt{25-y_5^2} \sqrt{25-x^2-y_5^2} dx \frac{5}{7} + \int_0^{y_6} \sqrt{25-y_6^2} \sqrt{25-x^2-y_6^2} dx \frac{5}{7}$$

y podemos hallar el valor de esta suma porque sabemos que

$$y_1 = \frac{5}{7}, y_2 = 2\left(\frac{5}{7}\right), y_3 = 3\left(\frac{5}{7}\right), y_4 = 4\left(\frac{5}{7}\right),$$

$$y_5 = 5\left(\frac{5}{7}\right) \text{ y } y_6 = 6\left(\frac{5}{7}\right); \text{ y podemos hallar la integral de cada}$$

sumando. La interpretación geométrica para el valor de la suma de las seis integrales definidas de funciones de una variable es la suma de volúmenes correspondientes a seis pedazos de cilindros parabólicos de grosor $\Delta y = \frac{5}{7}$ (figura 76).

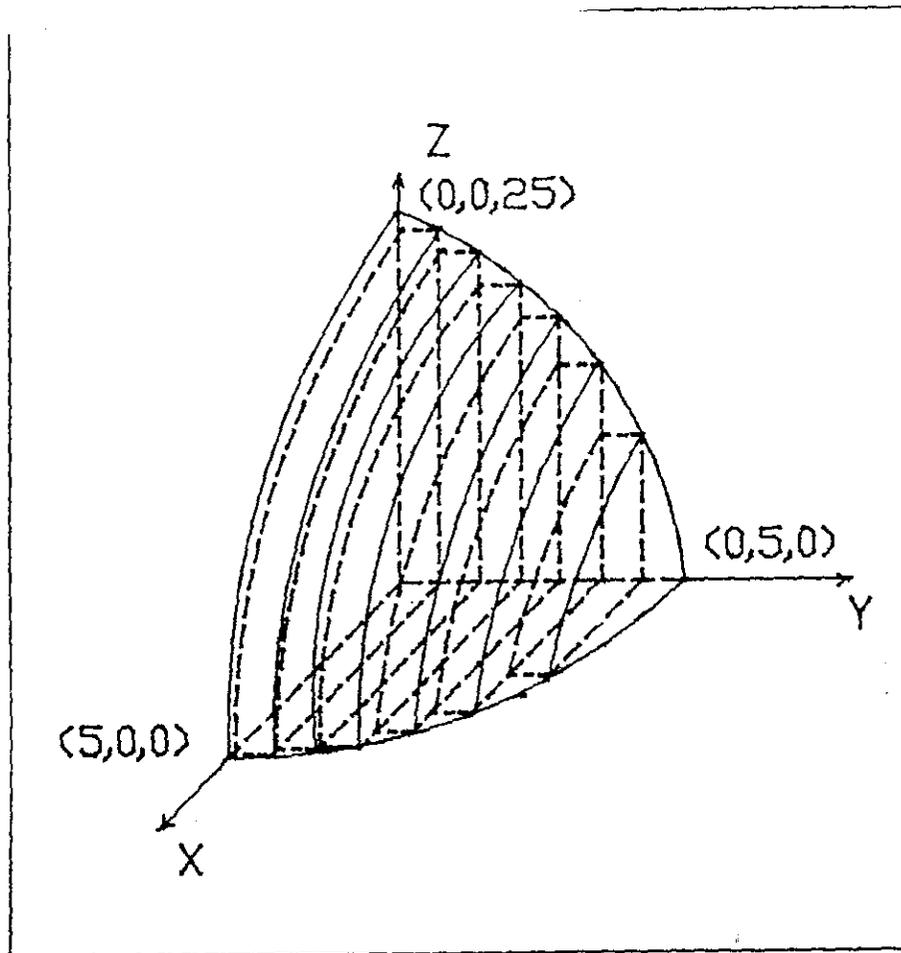


Figura 76

Si queremos hallar una mejor aproximación para el volumen, dividimos al intervalo $[0,5]$ del eje Y en más partes iguales y repetimos el proceso anterior. En el caso de que dividamos el intervalo $[0,5]$ en n partes iguales, los puntos de división serán $y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_n = 5$; aquí el valor de Δy es $\frac{5}{n}$, los valores de los puntos de división son $y_1 = \frac{5}{n}, y_2 = 2(\frac{5}{n}), \dots, y_i = i(\frac{5}{n}), \dots, y_n = n(\frac{5}{n})$. Una aproximación para el volumen está dada por:

$$S_n = \int_0^{\sqrt{25-y_1^2}} (25-x^2-y_1^2) dx \frac{5}{n} + \dots + \int_0^{\sqrt{25-y_i^2}} (25-x^2-y_i^2) dx \frac{5}{n} + \dots + \int_0^{\sqrt{25-y_{n-1}^2}} (25-x^2-y_{n-1}^2) dx \frac{5}{n}$$

y podemos calcular cada una de estas integrales porque los valores de $y_1, \dots, y_i, \dots, y_{n-1}$ son fijos y tenemos por lo tanto solamente integrales definidas de funciones de una variable. S_n puede ser escrita también de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left[\left(25x - \frac{x^3}{3} - y_1^2 x \right) \Big|_0^{\sqrt{25-y_1^2}} \right] \frac{5}{n} + \dots + \left[\left(25x - \frac{x^3}{3} - y_i^2 x \right) \Big|_0^{\sqrt{25-y_i^2}} \right] \frac{5}{n} \\
 &+ \dots + \left[\left(25x - \frac{x^3}{3} - y_{n-1}^2 x \right) \Big|_0^{\sqrt{25-y_{n-1}^2}} \right] \frac{5}{n} \\
 &= \left[\frac{2}{3} (25-y_1^2)^{3/2} \right] \frac{5}{n} + \dots + \left[\frac{2}{3} (25-y_i^2)^{3/2} \right] \frac{5}{n} + \dots + \left[\frac{2}{3} (25-y_{n-1}^2)^{3/2} \right] \frac{5}{n}
 \end{aligned}$$

Sabemos que mientras más grande sea el valor de n , mejor será la aproximación para el volumen que queremos encontrar. Así que, si el intervalo $[0,5]$ lo dividimos en n partes iguales y hacemos que n tome los valores $10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$ entonces Δy se acerca a cero y

$$S_n = \frac{2}{3} (25-y_1^2)^{2/3} \Delta y + \dots + \frac{2}{3} (25-y_i^2)^{2/3} \Delta y + \dots + \frac{2}{3} (25-y_{n-1}^2)^{2/3} \Delta y$$

se acerca a: $\int_0^5 \frac{2}{3} (25-y^2)^{2/3} dy$ que es el valor del volumen que

queríamos encontrar. El valor de la integral es:

$$\int_0^5 \frac{2}{3} (25-y^2)^{2/3} dy = \frac{2}{3} \left[\frac{y}{8} (125-2y^2) \sqrt{25-y^2} + \frac{1875}{8} \arcsen \frac{y}{5} \right]_0^5 = \frac{625}{8} \pi$$

Mencionemos lo que hemos realizado. Nos dispusimos a encontrar un volumen y vimos que puede ser expresado como el límite de una sucesión de sumas de columnas cada una de volumen $z \Delta x \Delta y$. Este límite se expresó por la integral doble $\iint_A z dx dy$.

Para formar cualquier suma solamente numeramos los elementos de área $\Delta x \Delta y$ contenidos totalmente dentro del cuarto de círculo en algún orden. Sin embargo, para *evaluar* la integral doble primero consideramos todos los cuadrados que estuvieron determinados por un valor fijo de y , $y = y_i$ y sumamos las columnas sobre estos cuadrados. Hicimos que Δx se aproximara a

cero, y obtuvimos el elemento de volumen $\int_0^{\sqrt{25-y_i^2}} (25-x^2-y_i^2) dx \Delta y$,

que pudimos evaluar porque y_i era un número fijo. La integral es función de y_i . Luego sumamos elementos de la forma

$$\sqrt{25-y_i^2}$$

del intervalo $[0,5]$ del eje Y . Repetimos el proceso de hacer decrecer Δy y sumar las integrales definidas que obteníamos. Ya

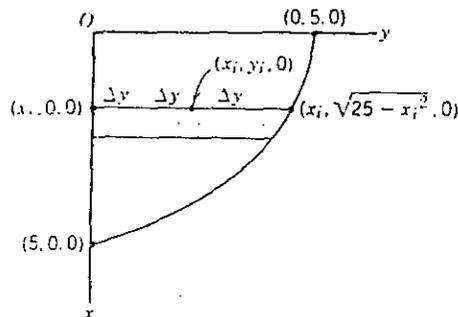
que $\int_0^{\sqrt{25 - y_i^2}} (25 - x^2 - y_i^2) dx \Delta y$ es una función de y solamente,

el límite de esta segunda secuencia de sumas es

$$\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25 - y^2}} z \, dx \right) dy.$$

En otras palabras, evaluamos la integral doble primero integrando la función z con respecto a x , manteniendo fija a la y y usamos como los límites de integración de esta integral a cero y el valor de x correspondiente a cualquier valor típico de y . Cuando integramos con respecto a y el resultado de la primera integración, usamos como límites de integración a los valores extremos del intervalo $[0,5]$, que representa el dominio de los valores de y . Así la integral doble $\iint_A z \, dx \, dy$ fue evaluada por dos integraciones ordinarias sucesivas, o por integración repetida.

Por supuesto, pudimos también primero integrar con respecto a y usando como límites de integración de la integral los valores de y que corresponden a un valor típico x_i de x (figura 77). Luego integramos la función resultante de x con respecto



a x, usando los límites de integración 0 y 5 para esta segunda integral. Esto es pudimos haber evaluado

$$\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-y^2}} z \, dy \right) dx$$

Cuando uno escribe una integral repetida tal como

$$\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-y^2}} z \, dx \right) dy \quad \text{ó} \quad \int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-y^2}} z \, dy \right) dx,$$

el símbolo de diferencial que está encerrado entre los paréntesis, dx en caso

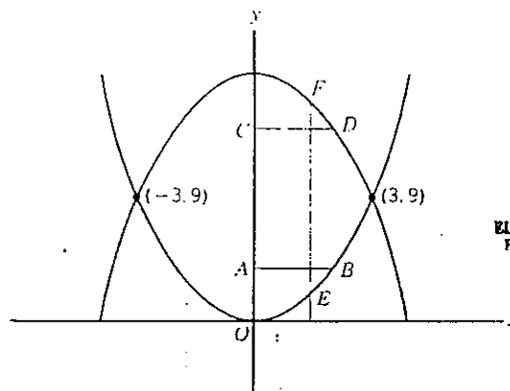
de $\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-y^2}} z \, dx \right) dy$ se asocia con la integral que está encerrada entre paréntesis y que tiene como límites de integración a los valores que están en función de y; el símbolo de diferencial que está fuera del paréntesis, dy en el caso de

$$\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-y^2}} z \, dx \right) dy$$

se asocia con la integral que está fuera del paréntesis. Lo mismo podemos decir de los símbolos dy y

dx en $\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-y^2}} z \, dy \right) dx$ esto significa que no es necesario escribir los paréntesis en los casos anteriores.

Para ilustrar más la noción de una integral de una función de dos variables y su evaluación por integración repetida, encontremos el volumen bajo la superficie $z = xy$ y que está sobre el área comprendida en el primer cuadrante entre las dos parábolas $y = x^2$, $y = 18-x^2$. La superficie es un paraboloides hiperbólico. Aunque es difícil graficarlo, es esencial darse cuenta que z es positiva, si x, y son positivas, por lo tanto estamos seguros que la superficie está por arriba del plano xy. El dominio de integración es la región del primer cuadrante ilustrada en la figura 78.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

Figura 78

La integral que deseamos evaluar es $V = \iint_A z dx dy$ donde A es el dominio ya descrito.

Para fijar A precisamente, debemos conocer donde se cortan las dos curvas y encontramos que los puntos de intersección de las parábolas son $(-3, 9)$ y $(3, 9)$. Integremos $\iint_A z dx dy$ por integración repetida. Primero mantendremos y fija y tratemos de integrar con respecto a x. Aquí se presenta una dificultad. Debemos determinar el intervalo de integración para x, y para hacerlo así tomemos cualquier valor típico de y, y encontremos el rango de x para este valor de y. Sin embargo, notemos que el rango de los valores de x es diferente a lo largo de AB en la figura 78 de los que toma a lo largo de CD. Esto es, B está sobre la curva $y = x^2$ mientras que D está sobre la curva $y = 18 - x^2$. Podríamos ser capaces de vencer esta dificultad, pero puede ser más fácil esquivarla integrando primero con respecto a y y luego con respecto a x. Mantendremos, pues, a x fija y encontremos el intervalo típico de los valores de y. Este es ejemplificado por EF en la figura 78; vemos que y toma sus valores iniciales sobre la parábola $y = x^2$ y los valores finales sobre la parábola $y = 18 - x^2$. El conjunto de los valores de x es de 0 a 3. Por lo tanto

$$V = \iint_A z dx dy = \int_0^3 \int_{x^2}^{18-x^2} xy dy dx$$

integramos con respecto a y , manteniendo x fija, entonces

$$V = \int_0^3 \left\{ x \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{18-x^2} \right\} dx$$

$$V = \int_0^3 \left\{ x \frac{(18-x^2)^2}{2} - x \frac{x^4}{2} \right\} dx$$

$$V = \int_0^3 (162x - 18x^3) dx = \frac{729}{2}$$

Vemos en este ejemplo que aunque es posible en principio evaluar la integral doble por integración repetida en cualquier orden, puede ser más fácil hacerlo en un orden que en el otro.

Hay otro punto para ser recogido de este ejemplo. Supongamos que el problema original hubiera sido encontrar el volumen sobre toda el área entre $y = x^2$, $y = 18 - x^2$. En este caso el intervalo de integración para x sería de -3 a 3 . La evaluación

$\int_{-3}^3 \int_x^{18-x^2} xy dy dx$ daría cero. Este resultado es sorprendente porque, como encontramos al principio, el volumen sobre la mitad del área ciertamente no es cero. La explicación radica en la naturaleza de nuestra integral doble. La introducimos por medio del concepto de volumen y el elemento de volumen fue $z dx dy$. Ahora el área $\Delta x \Delta y$ siempre se escoge con valor positivo exactamente como Δx en la definición de la integral simple siempre se escoge positiva. Luego $z \Delta x \Delta y$ representa volumen cuando z es positiva, si por volumen entendemos el concepto geométrico puro. Sin embargo, vemos que la función $z = xy$ es negativa cuando x , y están en el segundo cuadrante y por lo tanto la integral doble a la negativa del volumen cuando z es negativo. En nuestro ejemplo el volumen dado por integral cuando z es positivo es compensado por el "volumen negativo" cuando z es negativa.

UNA APLICACION DE LA INTEGRAL DOBLE EN FISICA

Notemos, primero, que la integral doble, que hemos introducido para representar un volumen, también puede representar un área. Supongamos que la función z de x y de y es la función $z = 1$ y el dominio A es la región que está entre la parábola $y = x^2$ y la línea recta $y = x$ (figura 79).

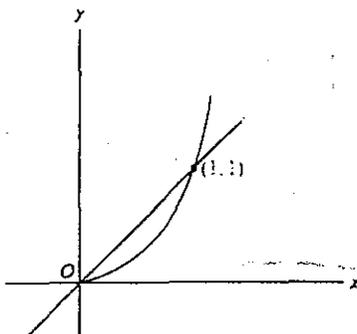


Figura 79

Entonces la integral doble $\iint_A dx dy$ representa el volumen sobre el dominio A y acotado por arriba por el plano $z = 1$. Sin embargo, es igualmente correcto interpretar la integral doble como el área A del dominio de integración A , ya que el volumen es realmente un cilindro con base A y altura 1. Luego el área de la base numéricamente igual al volumen. Por lo tanto podemos usar la integral doble para evaluar el área A y nuestro método de evaluación es el mismo que para cualquier integral doble. La integral doble que específicamente represente a A es:

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$$

y el valor de esta integral doble, obtenida por supuesto, por integración repetida es $\frac{1}{6}$.

El uso de la integral doble para encontrar áreas no consigue más de lo que se puede lograr con integrales sencillas. Una aplicación importante es la de encontrar la masa de un sólido. Con la integral doble podemos encontrar la masa de cuerpos que

están esencialmente en dos dimensiones, tales como discos delgados. Por el momento consideremos discos que tienen una distribución de masa uniforme. Si un disco tiene masa total M , área A y grosor t , tendrá un volumen igual a At , así que la masa por unidad de volumen será $\frac{M}{At}$ y la masa por unidad de área será $\frac{M}{A}$. (Ya que el disco es delgado, podemos ignorar el grosor y considerar la masa distribuida solamente sobre el área como si no hubiera grosor. Este disco ideal es a menudo llamado lámina. Sin embargo, es importante tener en mente que físicamente cualquier disco tiene grosor y que M es la masa de un volumen).

La masa de un disco puede ser especificado de otra manera, que es especialmente importante cuando la masa no está distribuida uniformemente. Supongamos que la masa por unidad de volumen de un disco cilíndrico de grosor t es M , entonces, la masa de un volumen formado por un cilindro delgado, cuya base es un cuadrado unitario y de grosor t es $m \cdot 1 \cdot t$, así que la masa por unidad de área del disco es Mt . la masa de un elemento de área ΔA es entonces $Mt\Delta A$.

La masa de un sólido puede variar de punto a punto. El concepto de densidad se usa para representar esta variación de masa de punto a punto. Para darle significado a la densidad en un punto, pensamos en un pequeño volumen ΔV que contiene a dicho punto (por ejemplo una esfera pequeña de radio r y con centro en el punto en el que estamos interesados) y de masa ΔM y consideremos el límite de la fracción $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ cuando ΔV se contrae a cero pero siempre conteniendo el punto. Así obtenemos una función $D(x,y,z)$, la densidad, que puede variar de punto a punto. Así densidad significa masa por unidad de volumen en un punto. En términos de esta función de densidad, la masa de un elemento de un disco delgado de área ΔA y grosor t es aproximadamente $D(x,y,z) t\Delta A$ donde (x,y,z) es algún punto del volumen que se considera. Ya que el disco es delgado, se puede despreciar cualquier variación de la densidad sobre el grosor y considerar solamente la variación sobre la superficie. Luego la variación de la densidad sobre la superficie es una función de x y de y solamente. Esta densidad cuantitativamente es

$D(x,y,z)t$, porque D no varía cuando varía z en la situación bajo discusión, acordaremos en hablar de densidad por unidad de área y escribiremos $D(x,y)$ en lugar de $D(x,y,z)t$.

Ahora encontremos la masa de un disco delgado con densidad variable. Si dividimos toda el área en cuadrados pequeños $\Delta x \Delta y$ y escojamos cualquier punto (x_i, y_i) en cada cuadrado, entonces una aproximación para la masa del disco es:

$$D(x_1, y_1) \Delta x \Delta y + D(x_2, y_2) \Delta x \Delta y + \dots + D(x_n, y_n) \Delta x \Delta y.$$

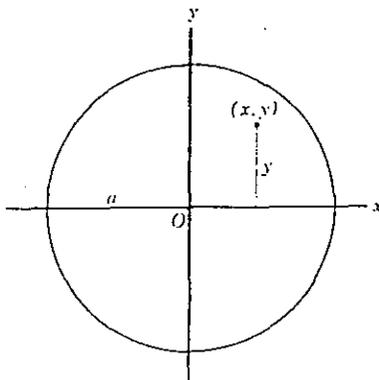
Si ahora hacemos que Δx y Δy decrezcan pero tomamos todos los cuadrados contenidos totalmente en el disco, obtenemos una mejor aproximación para la masa. El límite de la sucesión de sumas cuando Δx y Δy se aproximan a cero es la masa del disco; este límite es denotado por la integral

$$\iint_A D(x,y) dy dx,$$

donde A es el área del disco. Así la masa se puede representar por una integral doble si se conoce la densidad en cada punto.

Para hacer uso de lo que acabamos de discutir, encontramos la masa de un disco circular delgado de radio a , si la densidad en cada punto es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de ese punto desde un diámetro fijo (figura 80). Coloquemos el disco circular en un sistema coordenado con el centro del disco en $(0,0)$ y que el diámetro que fijemos esté a lo largo del eje x . Entonces la densidad $D(x,y)$ en cualquier punto (x,y) es ky^2 donde k es una constante. La masa de todo el disco entonces está dado por:

$$M = \iint_A ky^2 dy dx$$



donde A es el área del disco circular y M la masa de todo el disco. Esta integral doble se evalúa por medio de integración repetida

$$M = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^2 dy dx$$

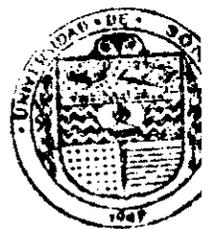
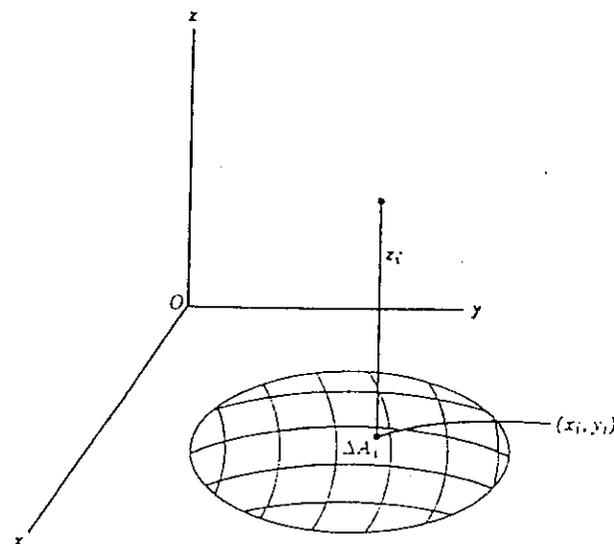
o, ya que la masa es la misma en cada cuadrante por:

$$\frac{M}{4} = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^2 dy dx.$$

3. LA INTEGRAL DOBLE

Se introdujo la integral doble para representar un volumen bajo una superficie y luego la evaluamos por integración repetida. El concepto de integral doble es en realidad un concepto analítico, esto, se aplica a funciones de dos variables sin considerar su interpretación física o geométrica. Además, la distinción entre la integral doble y las integrales repetidas usadas para evaluarlas es muy sutil, pero se aclarará a medida que avancemos. Comencemos de nuevo con el concepto de la integral doble.

Suponga que tenemos un dominio bidimensional A (figura 81).



EL SABER DE MIS HI
HARA MI GRANDE
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

Analíticamente, esto puede ser descrito como una colección de parejas de valores (x,y) . Podemos pensar que A es una región del plano xy , pero la interpretación geométrica no es esencial. Suponga también que nos han dado una función $z = f(x,y)$ que está definida para cada pareja (x,y) que está en el dominio A . Subdividimos el dominio A en subdominios ΔA de forma arbitraria (anteriormente fueron cuadrados). Estos subdominios pueden también ser descritos analíticamente especificando para cada uno de ellos las parejas que a ellos pertenecen.

Denotemos el área de un subdominio típico por ΔA . El área es un número. Tomemos en cuenta aquellos subdominios ΔA que están completamente dentro de A y asignémosles un número $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_k$. De cada subdominio escojamos una pareja cualquiera (x_i, y_i) . Sea $z_i = f(x_i, y_i)$.

Luego introducimos la suma:

$$S_1 = z_1 \Delta A_1 + z_2 \Delta A_2 + \dots + z_k \Delta A_k,$$

donde ΔA_i se usa para denotar el área del subdominio ΔA_i .

Dividimos el dominio bidimensional en pedazos de área más pequeñas de área ΔA , otra vez tomamos en cuenta solo aquellos pedazos o subdominios ΔA que están completamente dentro de A y éstos se numeran de cierta manera; supongamos que hay l de ellos. De cada ΔA escogemos una pareja (x_i, y_i) y otra vez formamos la suma,

$$S_2 = z_1 \Delta A_1 + z_2 \Delta A_2 + \dots + z_l \Delta A_l,$$

donde $z_i = f(x_i, y_i)$.

Continuamos este proceso de subdividir a A en subdominios ΔA cada vez más y más pequeños y cada vez formamos sumas como S_1 y S_2 . La única restricción sobre la forma de los subdominios ΔA es que cuando se hagan más y más pequeños es que el diámetro (la distancia más grande posible entre dos puntos cualesquiera de ΔA) se aproxime a cero. Obtenemos así una sucesión de sumas

$$(1) \quad S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

y si esta secuencia tiene un límite, entonces este límite es lo que se entiende por la integral de la función $f(x,y)$ sobre el dominio A . El $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ es denotado por $\iint_A f(x,y) dA$ o $\iint_A z dA$.

Estrictamente hablando, hay una condición adicional en la definición de la integral doble. Es posible hacer muchas elecciones diferentes de los ΔA , no solamente en la primera subdivisión de A sino también en las siguientes subdivisiones. Además, es posible hacer muchas elecciones diferentes de sucesiones del tipo dado en (1). Para que la integral doble exista o tenga significado, cada una de las posibles sucesiones debe tener el mismo límite. Hay teoremas que nos dicen cuando todas las posibles sucesiones tienen el mismo límite, pero no los estudiaremos. Confiaremos en el argumento intuitivo de que todas estas secuencias se aproximan al volumen que está arriba de A y bajo la superficie $z = f(x,y)$.

La definición de la integral doble ofrece en principio un método para calcularla. Dado cualquier dominio A y una función $f(x,y)$ se puede calcular los miembros individuales de la sucesión (1) y luego intentar encontrar el límite de esta sucesión. Sin embargo, este método no es práctico para calcular las integrales repetidas. Cuando quisimos evaluar $\iint_A (25-x^2-y^2)dydx$ donde A representaba un cuarto de círculo, se formó primero una sucesión manteniendo una variable fija (en este caso fue la y) y para cada y_i se encontró una sucesión cuyo límite fue igual a una integral sencilla, después se formó una segunda sucesión donde los elementos eran integrales sencillas y el límite de esta segunda sucesión se halló también por integración sencilla. En consecuencia, el método de integración repetida involucra dos secuencias separadas de sumas y sus límites, mientras que la integración doble implica tomar el límite de una sola sucesión de sumas. Así las dos nociones, la integral doble y la integral repetida, son diferentes.

Surge, entonces, la pregunta de cuándo una integral doble se puede evaluar por integración repetida (o iterada). En el caso de las coordenadas rectangulares usamos un argumento geométrico para justificar la evaluación en lo sucesivo de las integrales dobles por integración repetida.

En la definición de la integral doble $\iint_A f(x,y) dA$ o $\iint_A z dA$, utilizamos x,y,z y en la figura 81 dibujamos a A en un sistema coordenado cartesiano. Sin embargo, la definición es realmente independiente del significado geométrico de x,y,z . Como la revisión de esta sección debería demostrarlo. De aquí que deberíamos ser capaces de aplicar la noción de integral doble a situaciones físicas y geométricas totalmente diferentes. Veremos en la siguiente sección como aplicar la definición sin cambios, a una nueva situación geométrica.

LA INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS CILINDRICAS

En el trabajo con funciones de una variable se encuentran muchos problemas que pueden ser formulados y resueltos en términos de coordenadas polares de una manera más fácil que en coordenadas rectangulares. Esto también es cierto para funciones que involucran dos o más variables ya que sistemas de coordenadas diferentes al sistema de coordenadas rectangulares son más útiles para ciertos problemas. Uno de éstos es el sistema de coordenadas cilíndricas.

Este sistema es en realidad el sistema de coordenadas polares usual en un plano -el plano horizontal de la figura 82- al que una tercera dimensión, la dimensión z , es añadida. El eje z es perpendicular al plano $r-\theta$ y pasa a través del polo del sistema coordenado polar. Así, cualquier punto del espacio se representa en el sistema de coordenadas cilíndricas por medio de tres coordenadas -un valor de r , un valor de θ , y un valor de z - y éstas se escriben en el siguiente orden (r,θ,z) . Las convenciones ya adoptadas para coordenadas polares se aplican aquí sin cambio alguno y los valores de z , como en el sistema de coordenadas rectangulares, puede ser positiva o negativa -positiva si el punto está por arriba del plano $r-\theta$ y negativa si está debajo.

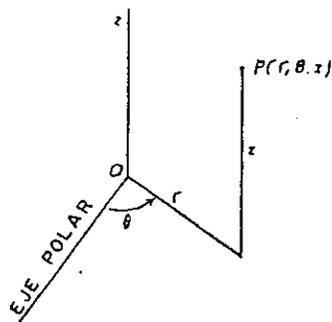


Figura 82

Una función cuya interpretación geométrica sea en coordenadas cilíndricas generalmente toma la forma $z = f(r, \theta)$. Veremos como aplicar el concepto de integral doble a tales funciones.

Si revisamos la definición de la integral doble $\iint_A f(x, y) dA$ dada en la sección anterior vemos que se aplica palabra por palabra a $z = f(r, \theta)$. Por A debemos entender ahora alguna región del plano (r, θ) y los ΔA son subdominios de A . Solamente para indicar que vamos a pensar geoméricamente en términos de coordenadas cilíndricas, podemos escribir la integral doble como $\iint_A f(r, \theta) dA$. Sin embargo, si vamos a usar coordenadas cilíndricas, debemos expresar ΔA en este sistema.

Consideremos, entonces, una región A en el plano (r, θ) (figura 83) y dividámoslo en elementos ΔA que podemos expresar en términos de las coordenadas r y θ . Supongamos que en cuanto a los valores de θ que nos interesan, son los de la región A , que están entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Dividamos el intervalo $[\alpha, \beta]$ de los valores de θ en subintervalos escogiendo valores de θ entre α y β a saber, $\alpha, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{m-1}, \beta$.

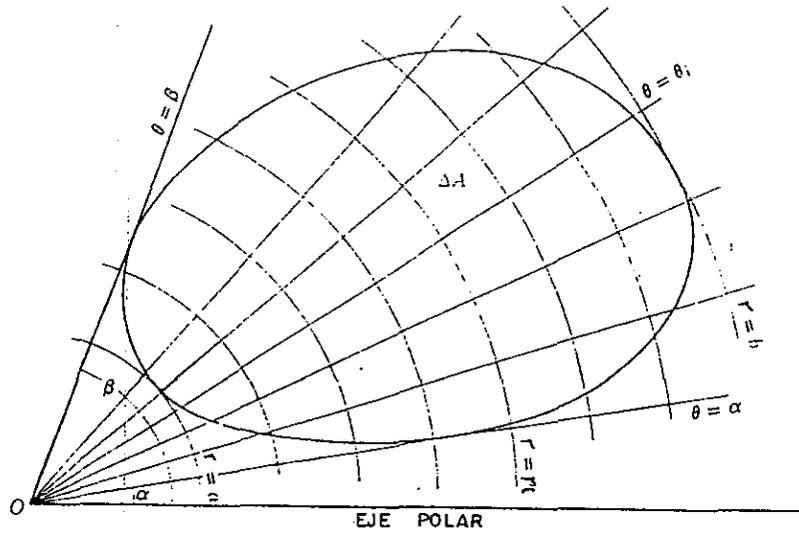
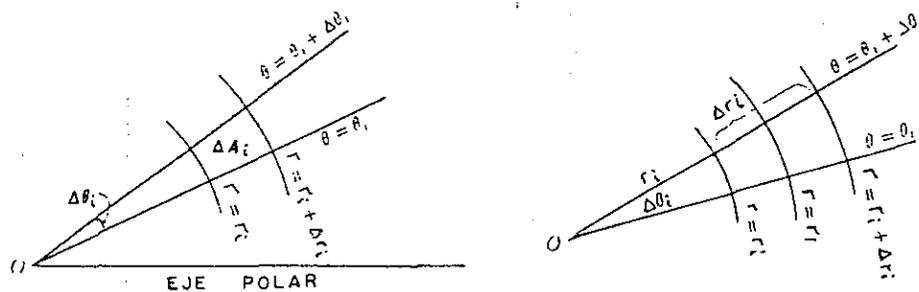


Figura 83

De igual manera, suponga que estamos interesados en los valores de r que están relacionados con la región A , los cuales están entre $r = a$ y $r = b$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ de los valores de r en subintervalos escogiendo valores de r entre a y b , a saber $a, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, b$. Dibujemos las líneas $\theta = \alpha, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta = \beta$, las cuales pasan por el polo O , y dibujamos los círculos $r = a, r = r_2, \dots, r = b$, que tienen el mismo centro, el polo O . Este conjunto de líneas y círculos dividen la región A en subregiones ΔA_i , una subregión típica es mostrada en la figura 84. Consideremos solamente aquellos ΔA_i que están completamente dentro de A .



Para obtener una expresión para ΔA_i , notemos que es la diferencia entre dos sectores circulares. El sector más grande tiene el área $\frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta \theta_i$ donde $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, y el más pequeño es de área $\frac{1}{2}r_i^2 \Delta \theta_i$. El área ΔA_i es entonces la diferencia de estas dos cantidades, esto es:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta \theta_i - \frac{1}{2}r_i^2 \Delta \theta_i \\ &= \frac{1}{2}[(r_i + \Delta r_i)^2 - r_i^2] \Delta \theta_i \\ &= \frac{1}{2}[(\Delta r_i)(r_i + \Delta r_i + r_i)] \Delta \theta_i \\ &= (\Delta r_i) \frac{(r_i + \Delta r_i + r_i)}{2} \Delta \theta_i \\ &= \Delta r_i \frac{(r_i + r_{i+1})}{2} \Delta \theta_i \\ &= \Delta r_i \bar{r} \Delta \theta_i \end{aligned}$$

= $\bar{r} \Delta r_i \Delta \theta_i$, donde \bar{r} es la media aritmética de r_i y r_{i+1} . (ver figura 85).

Aquí nos restringimos al valor \bar{r} en la expresión para ΔA_i pero, como veremos en un momento, esto no es realmente una restricción.

Para formar la suma S_n que nos lleva a la integral $\iint_A f(x,y) dA$, podemos tomar cualquier punto $(r, \theta) = (x_i, y_i)$ de cada ΔA_i . En el sistema de coordenadas en el que estamos trabajando podemos tomar cualquier punto (r, θ) y bien podemos tomar $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$, donde $\bar{\theta}_i$ también está en la i -ésima subregión ΔA_i . Exactamente como se usa la notación $dx dy$ para indicar que nuestros elementos de área son $\Delta x \Delta y$, así se usa la notación $r dr d\theta$ para indicar que nuestros elementos de área son $\bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_i$. Escribimos entonces $\iint_A f(r, \theta) dA$ como $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$.

Deberíamos notar que el factor r en el integrando proviene del elemento de área.

La expresión $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$ es una integral doble. Surge la pregunta de cómo evaluarla. Podemos presentar argumentos geométricos análogos a los que se presentaron cuando evaluamos $\iint (25 - x^2 - y^2) dx dy$ para mostrar que la

evaluada por integración repetida. La esencia de los argumentos sería interpretar $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$ como un volumen bajo la superficie $z = f(r, \theta)$ y mostrar que el mismo volumen es obtenido primero sumando todas las columnas que pertenecen a un mismo $r = r_1$, lo cual nos conduciría a una integral sencilla con respecto a θ , y luego sumando elementos que resultan de esta integración pero ahora tomando en cuenta la variación de r . Sin embargo, no necesitamos este argumento. Probamos aunque por medio de argumentos geométricos intuitivos, que la integral doble $\iint_A f(x, y) dx dy$ puede ser evaluada por integración repetida. Este argumento, si confiamos en la intuición, muestra que cualquier expresión analítica tal como $\iint_A f(x, y) dx dy$ puede ser evaluada por integración repetida. Ahora $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$ es una expresión analítica como $\iint_A f(x, y) dx dy$. De hecho $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$ es precisamente del mismo tipo que $\iint_A f(x, y) dx dy$, donde $f(r, \theta) r$ juega el papel de $f(x, y)$ y $dr d\theta$ juega el papel de $dx dy$. Por lo tanto si $\iint_A f(x, y) dx dy$ puede ser evaluada por integración repetida, también se puede $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$.

Por supuesto, para evaluar $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$, si primero integramos con respecto a r , debemos encontrar los valores extremos para r que corresponden a un valor típico θ y luego encontrar los valores extremos para θ . Si los valores extremos de r son r_1 y r_2 , que son funciones de θ ; y si los valores extremos de θ son α y β , entonces el valor de $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$ estará dada por la integral repetida

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

pero, si primero integramos con respecto a θ y luego con respecto a r , tendremos que evaluar:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

donde θ_1 y θ_2 son los valores extremos de θ y ambas son funciones de r .

Consideremos un ejemplo. La densidad de un disco circular delgado de radio a en un punto P , es directamente proporcional a la distancia que hay entre P y un punto fijo O que está en la frontera del círculo. Encontrar la masa del disco.

Introducimos un sistema de coordenadas polares con el punto O del disco como polo y el eje polar como diámetro del disco (figura 86). La ecuación del círculo es $r = 2a \cos \theta$. Ya que la densidad en cualquier punto (r, θ) del disco es directamente proporcional a la distancia que hay entre (r, θ) y O , la densidad en (r, θ) es $D(r, \theta) = kr$. La masa del disco es el límite de la suma de los elementos de masa $kr \Delta A$ cuando ΔA se aproxima a cero. En otras palabras,

$$M = \iint_A kr dA$$

donde A es el área del círculo. Ya que estamos usando coordenadas polares

$$M = \iint_A kr r dr d\theta$$

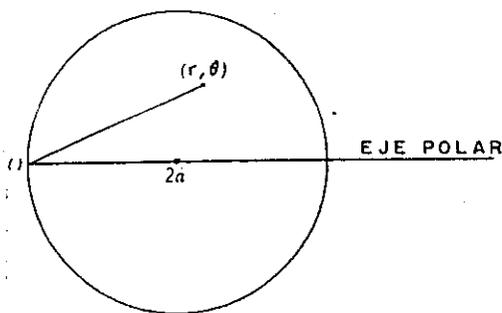


Figura 86

Notemos que esta integral es de la forma $\iint_A f(r, \theta) r dr d\theta$ donde $f(r, \theta)$ es kr . Si mantenemos θ constante, entonces para cualquier θ típico, r varía desde 0 hasta $2a \cos \theta$. El ángulo θ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Entonces la integral es:

$$M = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} r^2 dr d\theta$$

La integración con respecto a r nos da:

$$M = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \theta} \right\} d\theta.$$

ó

$$M = \frac{8a^3 k}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32}{9} k a^3.$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS RECTANGULARES

Las ideas que se han discutido relacionadas con la integración de funciones de dos variables pueden ser extendidas a funciones de tres o más variables. Nos limitaremos a funciones de tres variables. La motivación para trabajar con integrales de funciones de tres variables no es hallar volúmenes (aunque éste es un caso especial, como lo es el hallar áreas para las integrales dobles), y es que hay una gran cantidad de aplicaciones las cuales se originan del hecho de que los objetos físicos son tridimensionales. Así, la atracción gravitacional y la masa de un cuerpo son propiedades de los cuerpos y el cálculo de estas propiedades requerirá el uso de las integrales de funciones de tres variables.

Encontremos la masa de semi-esfera (sólida) $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$ (figura 87) sabiendo que la densidad en cada punto P de ella es directamente proporcional a la distancia que hay entre el plano coordenado xy y el punto P , es decir $\rho(x,y,z) = kz$, donde k es un número positivo. Por la simetría con respecto a los planos xz y yz de la semi-esfera y la masa, necesitamos únicamente encontrar la masa de la parte del sólido que está en el primer octante. Denotemos por V la región que está en el primer octante. Ya que la semi-esfera está definida para los valores de x que están en $[0,5]$, dividamos dicho intervalo en n partes iguales e introduzcamos los planos $x = \Delta x, x = 2\Delta x, \dots, x = n\Delta x$.

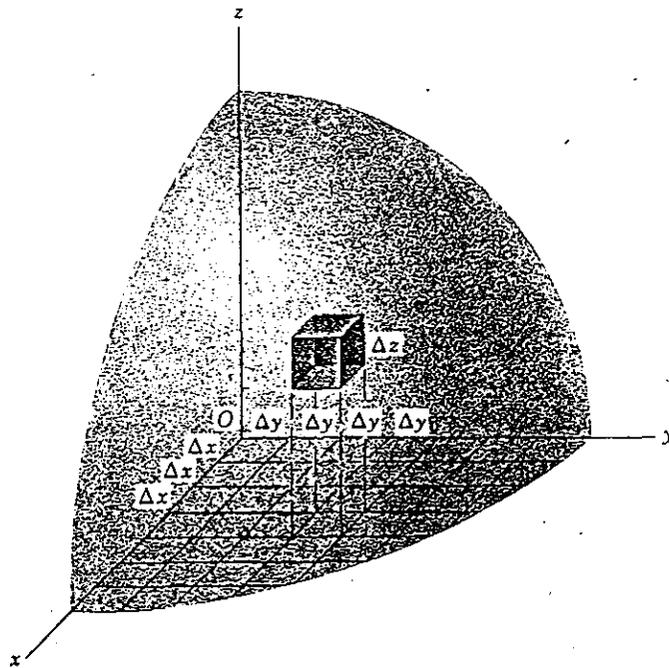


Figura 87

De igual manera dividamos al intervalo $[0, 5]$ que corresponde a los valores que toma y en a partes iguales e introduzcamos los planos $y = \Delta y, y = 2\Delta y, \dots, y = a\Delta y$. Hacemos lo mismo para los valores de z que están en $[0, 5]$. La introducción de estos planos, divide a V en cubos pequeños cada uno de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$. Numeremos a los cubos que quedan completamente dentro de V , digamos desde 1 hasta k . La masa de cualquier cubo está dada aproximadamente por $z_i \Delta x \Delta y \Delta z$ donde z_i es la coordenada en z , de algún punto que esté en el i -ésimo cubo. Por lo tanto la cantidad

$$S_1 = z_1 \Delta x \Delta y \Delta z + z_2 \Delta x \Delta y \Delta z + \dots + z_k \Delta x \Delta y \Delta z$$

es una buena aproximación para la masa de la región V .

Si hacemos que disminuyan los valores de $\Delta x, \Delta y$ y Δz pero incrementamos el número de divisiones de los intervalos en x, y y z respectivamente, obtenemos una mejor aproximación para la masa de dos maneras. Primera: cuando los cubos son más pequeños, crece el número de cubos que están completamente dentro de V y por lo tanto, llenan más parte de V . Segunda:

como cada cubo es más pequeño, la elección de z que representa la densidad del cubo es más exacta. Supongamos que hay l de estos cubos. Entonces la suma:

$$S_2 = z_1 \Delta x \Delta y \Delta z = z_2 \Delta x \Delta y \Delta z + \dots + z_l \Delta x \Delta y \Delta z$$

es una mejor aproximación para la masa en el primer octante.

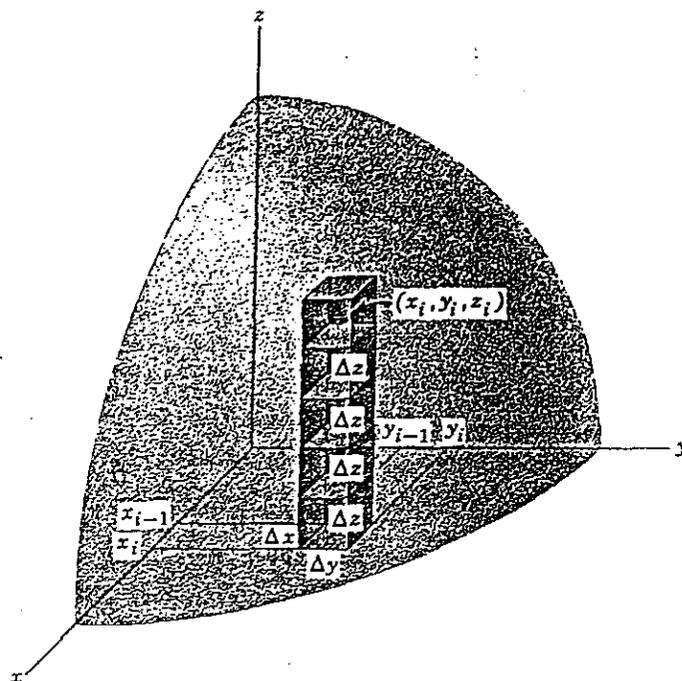
Como en el caso de las integrales dobles, obtenemos una sucesión de sumas

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

Tomaremos el límite de esta sucesión como la masa de la región V y vamos a simbolizar a este límite por la integral triple

$$\iiint_V z \, dx dy dz.$$

Para evaluar esta integral usaremos integración repetida. Escojamos una columna de cubos pequeños, tales que las medidas de la base de la columna sean Δx y Δy , que se mantendrán fijos y que tengan como valores extremos a x_{i-1} , x_i y y_{i-1} , y_i , respectivamente. Ver figura 88.



De cada cubo de la columna, escoja el punto (x_i, y_i, z_i) donde z_i cambia de cubo a cubo. Ahora consideremos la suma:

$$(z_1 \Delta z) \Delta x \Delta y + (z_2 \Delta z) \Delta x \Delta y + \dots + (z_n \Delta z) \Delta x \Delta y.$$

Si mantenemos a Δx y a Δy fijas y hacemos que la magnitud de todos los intervalos z se aproximen a cero, el límite de la sucesión que formemos será

$$\Delta x \Delta y \int z dz$$

y los límites de integración de la integral son los valores extremos de z en los valores fijos x_i, y_i . Para un par típico de valores fijos x, y , el conjunto de los valores de z es de 0 a $\sqrt{25-x^2-y^2}$. Por lo tanto $\Delta x \Delta y \int z dz$ se convierte en

$\Delta x \Delta y \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz$. Ahora debemos sumar todas estas cantidades

sobre el dominio de los valores de x, y . Este dominio es el cuarto de círculo en el plano xy . Para tomar en cuenta la suma

de elementos tales como $\Delta x \Delta y \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz$ sobre el cuarto de

círculo tenemos solo que reconocer que $\Delta x \Delta y \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz$ es de la

forma $F(x, y) \Delta x \Delta y$ donde $F(x, y) = \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz$. Por lo tanto, el límite al cual nos conduce la suma de los elementos

$\Delta x \Delta y \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz$ cuando Δx y Δy tienden a cero es la integral doble $\iint_A F(x, y) dx dy$, donde A es el cuarto de círculo. En vista de nuestro método para evaluar integrales dobles y ya que la ecuación del cuarto de círculo es $x^2 + y^2 = 25$, $\iint_A F(x, y) dx dy$

se convierte en $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz dx dy$.

La discusión del concepto de la integral triple y su evaluación por integración repetida trató con la integral triple particular $\iiint_V z dx dy dz$. La situación general es aquella en la que comenzamos con alguna función $u = f(x, y, z)$ y nos conduce a la integral triple $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, donde V es algún dominio tridimensional. Suponga que la integral triple va

a ser evaluada, integrando primero con respecto a z . La frontera de V consiste de una o más superficies. Se buscan las superficies que acotan los valores de z . Estas superficies deben ser expresadas en la forma $z=f(x,y)$. En nuestro ejemplo las superficies acotadoras fueron $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ y $z=0$. Después debemos determinar el dominio de los valores de x , y . Este debe incluir todos los valores de x , y que dan los valores de z . Dicho de otra manera, el dominio de los valores de x , y consiste de los pies de las perpendiculares desde todos los puntos (x,y,z) de V al plano xy . En nuestro ejemplo el dominio de los valores de x , y fue un cuarto de un círculo. La evaluación de la integral doble que queda, sobre el dominio de los valores de x , y se hace exactamente como hemos evaluado las integrales dobles.

En el caso especial cuando $f(x,y,z) = 1$, la integral triple se convierte en $\iiint_V dzdxdy$, y esta integral representa el volumen de la región V .

EJEMPLO. Encontrar la masa de la porción del cilindro $y^2+z^2=4$ que está en el primer octante y está acotado por $x=0$, $y=0$, $z=0$ y el plano $x+2y=6$ y en el punto (x,y,z) del volumen descrito tiene densidad z . (Ver figura 89).

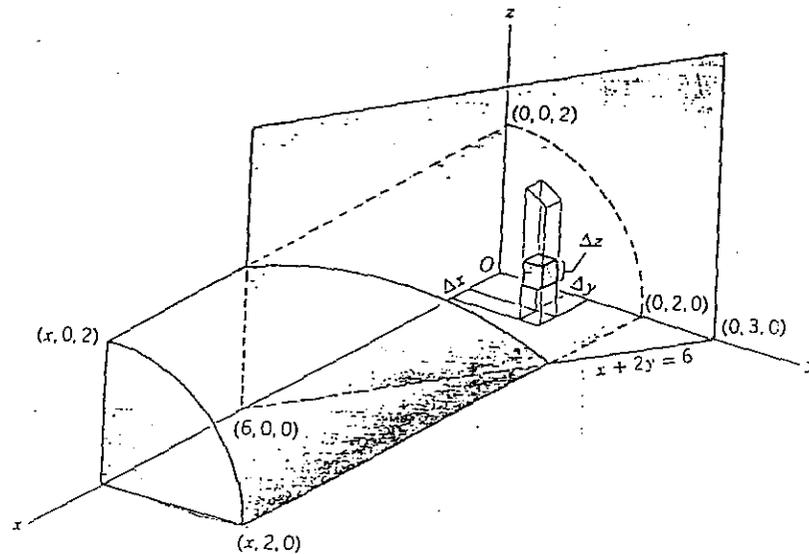


Figura 89

SOLUCION. Ya que la masa es densidad por volumen, la masa de cualquier elemento de volumen ΔV es $z\Delta V$ o $z\Delta x\Delta y\Delta z$. La masa total está dada por la integral triple $\iiint_V z dx dy dz$ donde V es la porción del cilindro descrita en el planteamiento del problema. Determinemos los límites de integración. Si tomamos cualquier punto (x,y,z) de V y mantenemos fijas a x y a y , z tomará valores desde 0 hasta $\sqrt{4-y^2}$, el valor de z sobre la superficie del cilindro. Si ahora pensamos en que y está fija, los valores que x toma están entre 0 y $6-2y$, y , por último, para cualquier x , z , la y toma valores entre 0 y 2 ya que el volumen en cuestión está acotado por la derecha por el cilindro. Así llegamos a la integral repetida

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z dz dx dy &= \int_0^2 \int_0^{6-2y} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{6-2y} (4-y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4-y^2) x \Big|_0^{6-2y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4-y^2)(6-2y) dy = 12. \end{aligned}$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILINDRICAS

hemos introducido la noción de la integral triple encontrando la masa de un objeto particular y trabajamos en el sistema coordenado rectangular. Sin embargo, la noción de integral triple es un concepto analítico que no depende de interpretación geométrica alguna.

En términos analíticos, el concepto se define como sigue: Suponga que tenemos una función $u = f(x,y,z)$ y un dominio tridimensional V que puede ser especificado por las ternas (x,y,z) que lo componen. Podemos ahora dividir este dominio en subdominios ΔV de forma arbitraria y consideremos aquéllos que están completamente dentro de V . Suponga que hay m de ellas.

...temos los volúmenes de estos subdominios por medio de $\Delta V_1, \dots, \Delta V_m$. Cada volumen es, por supuesto, un número. De cada uno escogemos una terna (x_i, y_i, z_i) . Sea $u_i = f(x_i, y_i, z_i)$. Entonces formamos la suma

$$S_1 = u_1 \Delta V_1 + u_2 \Delta V_2 + \dots + u_m \Delta V_m$$

Ahora disminuimos el tamaño de los subdominios ΔV_i e incrementamos el número de ellos de tal manera que llenemos todo como sea posible el dominio V . Entonces formamos una nueva suma del mismo tipo que S_1 . Continuando este proceso obtenemos una sucesión de sumas

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

Como formamos nuevas sumas requerimos que el diámetro de cada ΔV_i (la distancia más grande posible entre cualquier par de ternas de ΔV_i) tienda a cero. El límite de la sucesión $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ es, por definición, la integral triple de f sobre el dominio V , este límite se denota

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \text{ o } \iiint_V u dV.$$

Hay ciertos puntos de carácter teórico que se consideran en la presentación completa del concepto de la integral triple. Algunos de ellos se mencionaron en el caso análogo de la integral doble. Sin embargo, no detallaremos más, en esta introducción del concepto.

Revisemos de nuestro trabajo anterior que una interpretación de la integral triple, es aquella en la cual x, y, z son interpretadas como coordenadas cartesianas rectangulares y las subregiones son cubos. Consideremos otra interpretación. Hemos ya introducido un segundo sistema coordenado tridimensional, éste es el sistema cilíndrico, para tratar algunas integrales triples. Consideremos una integral triple en coordenadas cilíndricas.

Antes de comenzar a resolver un problema donde usemos coordenadas cilíndricas, debemos disponer de un detalle. Para $\iiint_V f(x, y, z) dV$ cuando x, y, z son los valores de las coordenadas cilíndricas r, θ y z debemos saber como expresar el elemento de volumen ΔV en términos de r, θ, z . La figura 90 muestra un tal elemento típico con base ABCD y cima EFGH. Notemos que se determina este elemento.

Cuando usamos coordenadas rectangulares, dividimos el intervalo que formaban los valores de x del dominio de integración V por medio de planos paralelos al plano yz . Hicimos lo mismo con los intervalos que se forman al considerar el conjunto de valores de y y el de valores de z , y como consecuencia, el volumen V quedó dividido en cubos pequeños. En el caso de las coordenadas cilíndricas vamos a hacer una cosa análoga. Consideremos el intervalo formado por el conjunto de valores de r entre los cuales se localiza el volumen V y dividamos este en subintervalos Δr . Así si los valores de r están entre a y b , introducimos las superficies $r = a$, $r = a + \Delta r$, $r = a + 2\Delta r, \dots, r = b$. Estas superficies son cilindros cuyo eje común es el eje z . Las caras $ADHE$ y $BCGF$ están sobre tales cilindros. Ahora consideremos el intervalo formado por el conjunto de valores de θ entre los cuales se encuentra el volumen V . Si los valores que toma θ están entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, dividamos el intervalo en subintervalos $\Delta \theta$ e introduzcamos las superficies $\theta = \alpha$, $\theta = \alpha + \Delta \theta$, $\theta = \alpha + 2\Delta \theta, \dots, \theta = \beta$. Estas superficies son semiplanos verticales que se extienden desde el eje z . En la figura 90 las caras $ABFE$ y $DCGH$ del elemento ΔV están sobre dos de tales semiplanos. Finalmente consideremos el intervalo formado por el conjunto de los valores de z entre los cuales se extiende el dominio de integración V . Si los valores de z están entre c y d , dividamos este intervalo en subintervalos Δz e introducimos las superficies $z = c$, $z = c + \Delta z$, $z = c + 2\Delta z, \dots, z = d$. Estas superficies son planos perpendiculares al eje z . Las caras $ABCD$ y $EFGH$ (de la figura 90) están en dos de tales planos.

Las tres familias de superficies, llamadas superficies coordenadas, que usamos para dividir el volumen V en elementos ΔV , son las análogas en el sistema de coordenadas cilíndricas de las tres familias de planos usados en el sistema coordenado rectangular. La razón para escoger las superficies que se describieron en el párrafo anterior, es que por este modo, seremos capaces de llevar a cabo la evaluación de nuestra integral triple en coordenadas cilíndricas.

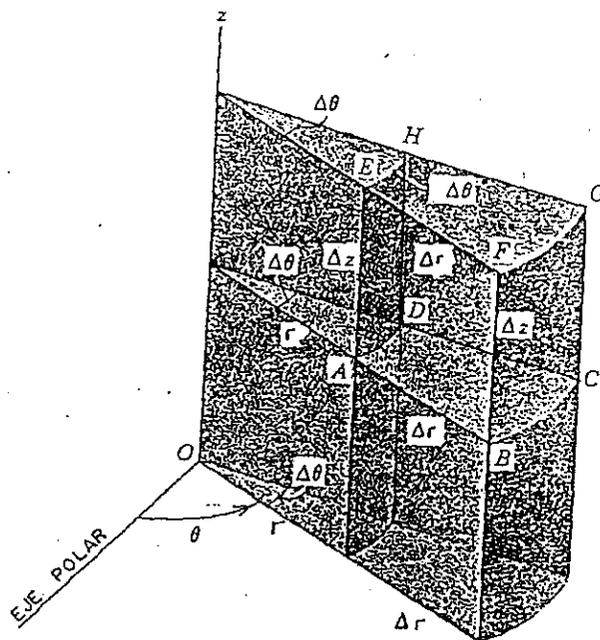


Figura 90

Conocemos ahora la forma geométrica de nuestro elemento de volumen ΔV , pero no tenemos una expresión para el volumen. Cuando discutimos la integral doble en coordenadas cilíndricas se encontró que un elemento de área tal como ABCD está dado por $r\Delta r\Delta\theta$, donde r es el valor de algún punto que se encuentra en dicha área. Por lo tanto el volumen de un pedazo pequeño de corteza cilíndrica desde ABCD hasta a EFGH es $\Delta V = r\Delta r\Delta\theta\Delta z$. Por lo tanto la integral triple $\iiint_V f(x,y,z)dV$ expresada en coordenadas cilíndricas se convierta en $\iiint_V f(r,\theta,z)r drd\theta dz$.

¿Cómo vamos a evaluar tal integral triple? la respuesta es, por supuesto, integración repetida. Como en el caso de las coordenadas rectangulares, podemos dar un argumento burdo para demostrar que la integración repetida realiza la clase de suma que la integral triple demanda. Considerando todos los elementos ΔV que se determinan fijando r y θ pero dejando que z de $\iiint_V u dV$ varíe cuando z varíe, podemos formar una suma

$$f(r,\theta,z_1)\Delta z + f(r,\theta,z_2)\Delta z + \dots + f(r,\theta,z_n)\Delta z,$$

donde los Δz llenan el conjunto de valores de z correspondiente a una elección de valores típicos fijos r y θ . Ahora, los Δz los hacemos más pequeños, pero escogemos más para llenar el conjunto de valores de z y formamos una nueva suma. El límite de esta sucesión de sumas cuando Δz tiende a cero es una integral sencilla de la forma $\int_{z_1}^{z_2} f(r, \theta, z) dz$, donde z_1 y z_2 son funciones de r y θ . Este paso reduce la integral triple $\iiint_V f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$ a una integral doble en las variables r y θ , que puede ser evaluada por integración repetida primero con respecto a una variable digamos θ y luego con respecto a r . El resultado de las tres integraciones tomará en cuenta todos los elementos de la forma $f(r_i, \theta_i, z_i) r dr d\theta dz$ los cuales entran en la integral triple $\iiint_V f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$. Esta es la clase de argumento que se usó en el caso de la integración triple en coordenadas rectangulares para demostrar que ellas pueden ser evaluadas por integración repetida.

Consideremos un ejemplo del uso de $\iiint_V f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$. Encontraremos la atracción gravitacional que un sólido determinado por los cilindros $r = a$, $r = b$ ($a < b$) y los planos $z = 0$ y $z = h$, que tiene densidad D por unidad de volumen, ejerce sobre un cuerpo situado en el origen y que tiene masa 1. La figura 91 muestra la cuarta parte de este sólido. La partícula de masa 1 está en O . Consideremos un elemento de masa ΔM . La fuerza con que ΔM atrae a la masa unitaria puede ser considerada como la suma vectorial de una fuerza horizontal y una fuerza vertical. Sin embargo, para cada elemento ΔM habrá otro al mismo nivel y diametralmente opuesto cuya fuerza horizontal sobre la masa unitaria contrarresta la fuerza horizontal que ejerce ΔM . Por lo tanto necesitamos solamente considerar la componente vertical de la fuerza que ejerce cada elemento ΔM . Esta componente es $\frac{G\Delta M}{d^2} \cos\alpha$, donde α es el ángulo mostrado en la figura 91 y d es la distancia OP , que en coordenadas cilíndricas es $\sqrt{r^2 + z^2}$. Ahora, $\cos\alpha = \frac{z}{d}$. Por lo tanto la componente vertical es $\frac{G\Delta M z}{d^3}$. Ya que el cilindro es homogéneo, entonces como $\Delta V = r dr d\theta dz$ y $\Delta M = D\Delta V = D r dr d\theta dz$,

donde D es la densidad constante. Luego la fuerza vertical total es:

$$\iiint_V \frac{GDzrdrd\theta dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

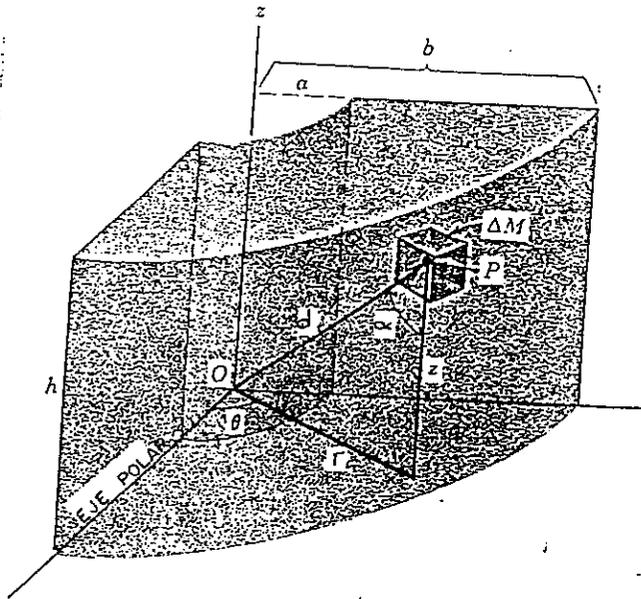


Figura 91

Para evaluar esto por integración repetida, escojamos el orden $dzdrd\theta$. Cuando z y r se mantienen constantes, θ varía desde 0 a 2π . Luego cuando r se mantiene constante, z varía de 0 a h . Finalmente, r varía desde a hasta b . Así llegamos a:

$$\int_a^b \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{GDzrdrd\theta dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

que es igual a

$$2\pi GD \left[b-a-\sqrt{b^2+h^2} + \sqrt{a^2+h^2} \right].$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFERICAS

Aunque al principio pudimos formular todos nuestros problemas de integración triple en coordenadas rectangulares, podemos ver de la sección anterior que algunos problemas son más fácilmente formulados y resueltos en coordenadas cilíndricas. Además, la integración puede ser más simple en este sistema que en el sistema rectangular. Ventajas similares son ofrecidas por otro sistema coordenado tridimensional: el sistema de coordenadas esféricas.

Este sistema para describir la posición en el espacio es una modificación del sistema de longitud y latitud. La localización (figura 92) de cualquier punto P está descrito por la distancia ρ de P desde un punto fijo O , por el ángulo θ que forma la proyección OQ de OP con respecto a una línea fija OU en un plano horizontal y por el ángulo ϕ que OP forma con la línea fija vertical OV . El ángulo θ es comúnmente llamado la longitud de P y ϕ la colatitud, porque es el complemento del ángulo latitud en el sistema de longitud y latitud. Para describir todos los puntos del espacio, debemos variar ρ desde 0 a ∞ ; θ debe variar de 0 a 2π y ϕ desde 0 hasta π . Las coordenadas de un punto se escriben en el orden (ρ, θ, ϕ) .

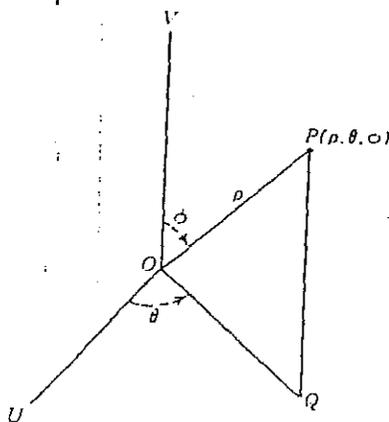
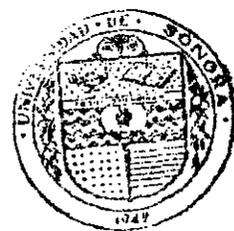


Figura 92

Para identificar las figuras representadas por ecuaciones en coordenadas esféricas y recíprocamente para escribir la ecuación de una figura dada, es útil conocer la relación entre



EL SABER DE MIS HIJOS
PARA LA GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

las coordenadas rectangulares y las coordenadas esféricas. Si el sistema rectangular tiene su origen en O (figura 93), si la dirección positiva del eje x está a lo largo de OU y si la dirección positiva del eje z está a lo largo de OV , es fácil relacionar las coordenadas esféricas y rectangulares de cualquier punto P . Podemos ver de la figura 93 que $OQ = \rho \operatorname{sen} \phi$

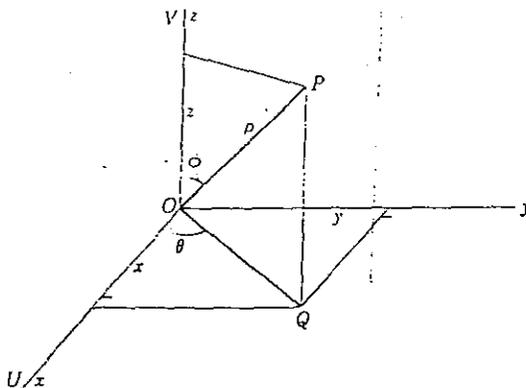


Figura 93

y, por lo tanto, que

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Recíprocamente, si hallamos $x^2 + y^2 + z^2$, obtenemos $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, de $z = \rho \cos \phi$ obtenemos $\cos \phi = \frac{z}{\rho}$ y de la figura tenemos que $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

Al trabajar con coordenadas esféricas deberíamos también tener presente que aún una ecuación en una o dos variables puede representar una superficie si la ecuación se interpreta como una figura en tres dimensiones. Así la ecuación $\rho = 5$, representa la esfera con centro en el origen y radio 5.

Para trabajar con integrales triples cuando la interpretación geométrica del integrando y el volumen V están en términos de coordenadas esféricas, debemos dividir V en elementos de volumen ΔV que son más simplemente expresados en ese sistema coordenado. Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, estos elementos están determinados por las superficies coordenadas. esto es, las superficies $\rho = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$ y $\phi = \text{constante}$. Las superficies $\rho = p$ son esferas con centro en O y radio p . Las superficies $\theta = \text{constante}$ son semiplanos que comienzan a lo largo de toda

la línea vertical OV. (figura 93). Las superficies $\theta = \text{constante}$ son semiconos excepto cuando $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ó $\phi = \pi$.

Para ver cuál es la forma del elemento de volumen ΔV tracemos el volumen ΔV acotado por las superficies $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$, $(\rho_1 < \rho_2)$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, $(\theta_1 < \theta_2)$ y $\phi = \phi_1$, $\phi = \phi_2$ $(\phi_1 < \phi_2)$. (Ver figura 94).

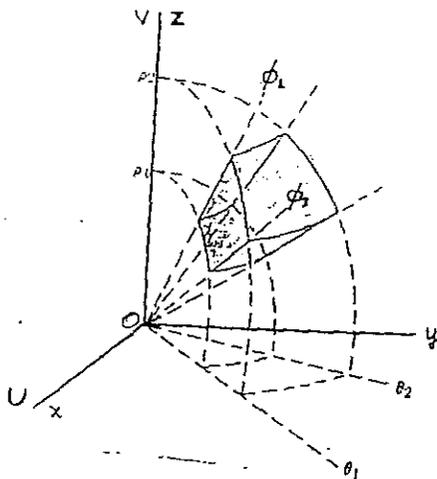


Figura 94

El volumen de la región esférica elemental ΔV que acabamos de describir, es igual a

$$\left(\frac{\rho_2^3}{3} - \frac{\rho_1^3}{3}\right)(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(\phi_2 - \phi_1).$$

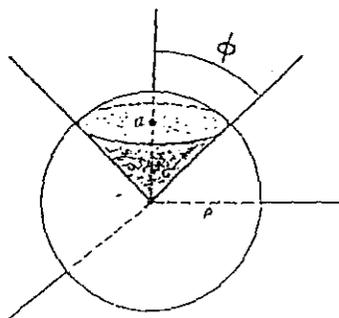


Figura 95

Para ver esto, encontraremos el volumen de una región ligeramente más simple, que es aquella situada por encima de un semicono y dentro de una esfera, como se muestra en la figura 95. El radio de la esfera es ρ y el ángulo del cono es ϕ , como se muestra en la figura 95. Sea a la altura a la cual el cono corta a la esfera. El volumen de esta región consta de dos partes. La primera es el volumen de un cono de altura a y cuya base es $b = \rho \sin \phi$, obsérvese que $a = \rho \cos \phi$. El volumen de este cono es entonces igual a $\frac{1}{3}\pi(\rho \sin \phi)^2 \rho \cos \phi$. La otra parte se encuentra debajo de la cúpula esférica y se puede obtener como un volumen de revolución de la curva $x^2 + y^2 = \rho^2$, haciendo que x varíe entre a y ρ , así el volumen de la cúpula esférica es

$$\int_a^\rho \pi(\rho^2 - x^2) dx = \pi \left[\rho^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_a^\rho$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3} \rho^3 - \rho^2 a + \frac{a^3}{3} \right] = \pi \left[\frac{2}{3} \rho^3 - \rho^3 \cos \phi + \frac{1}{3} \rho^3 \cos^3 \phi \right].$$

Sumando los dos volúmenes y observando que $\cos^3 \phi = \cos^2 \phi \cos \phi$, encontramos que el volumen de la región situada encima del cono y dentro de la esfera es igual a $\frac{2}{3} \pi \rho^3 - \frac{2}{3} \pi \rho^3 \cos \phi$.

El volumen de esta región situada entre los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 , se obtiene por sustracción y es igual a $\frac{2}{3} \pi \rho^3 (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)$. Considerando solamente la parte ubicada entre las esferas de radios ρ_1 y ρ_2 , obtenemos un volumen también por sustracción y hallamos $\frac{2}{3} \pi (\rho_2^3 - \rho_1^3) (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)$. Finalmente, debemos tomar la parte situada entre los ángulos θ_1 y θ_2 , o sea que debemos tomar la fracción $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$ de este último volumen. En esta forma obtenemos precisamente el volumen deseado de la región esférica elemental ΔV .

Usando el teorema del valor medio encontramos que $\rho_2^3 - \rho_1^3 = 3\bar{\rho}^2(\rho_2 - \rho_1)$, para algún $\bar{\rho}$ entre ρ_1 y ρ_2 . Nuevamente por el teorema del valor medio $\cos \phi_2 - \cos \phi_1 = (-\sin \bar{\phi})(\phi_2 - \phi_1)$. Por tanto, el volumen de ΔV es igual a $\bar{\rho}^2 \sin \bar{\phi} (\rho_2 - \rho_1)(\phi_2 - \phi_1)(\theta_2 - \theta_1)$.

Así cualquier integral triple $\iiint_V f(x, y, z) dV$, cuando las variables tienen significado geométrico en coordenadas esféricas

se convierte en $\iiint_V f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\phi$. Estas integrales triples se evalúan por integración repetida, la justificación es del mismo tipo a la ya dada en los casos de las coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Consideremos un ejemplo para comenzar a familiarizarnos con el uso de integrales triples expresadas en coordenadas esféricas. Consideremos el sólido V (figura 96) que está determinado por la región que está entre dos esferas que tienen su centro en el origen y que son de radios R_1 y R_2 , con $R_1 < R_2$. Supongamos que M es la masa por unidad de volumen del sólido V . Considere también un cuerpo de masa 1 que está en el interior de la esfera de radio R_1 y que está localizada en $Q(C, 0, 0)$. Demostraremos que la atracción gravitacional que ejerce el sólido V sobre la masa unitaria que está en Q es cero. El hecho de que vamos a trabajar con esferas nos sugiere que el sistema más adecuado a usarse es el de coordenadas esféricas. La fuerza de atracción que un elemento del casquete, en, digamos P , ejerce sobre la masa unitaria puede ser

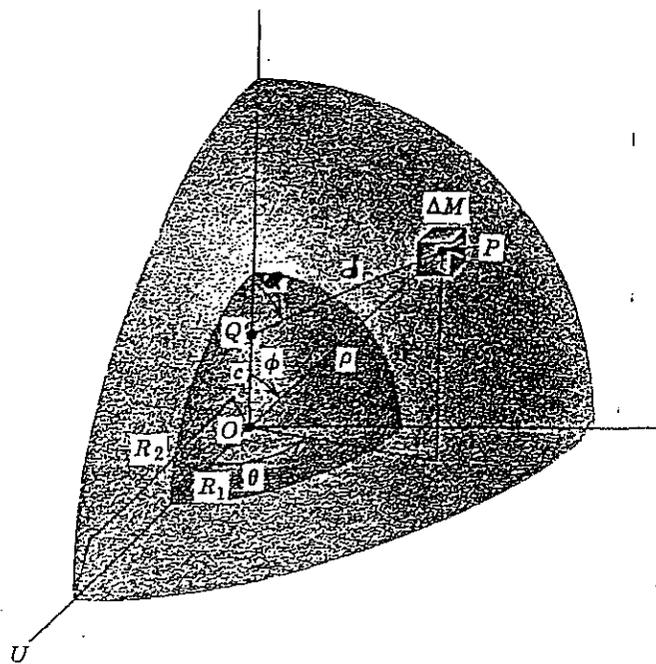


Figura 96

considerada como el vector suma de una fuerza horizontal y una vertical. Ya que el casquete es simétrico con respecto al eje vertical, la fuerza gravitacional que el elemento ejerce en dirección horizontal se contrarresta por la dirección horizontal del elemento colocado simétricamente a P . De aquí que el elemento y por lo tanto todo el casquete pueden ejercer solamente una fuerza vertical sobre la masa unitaria en O .

Debemos, por lo tanto, demostrar que la componente vertical de la fuerza gravitacional ejercida por el casquete es cero.

Construiremos una integral triple de la forma $\iiint_V f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$ para representar la suma total de las componentes verticales de cada uno de los elementos de volumen ΔV del casquete. La atracción ejercida por cualquier elemento de volumen en el casquete, digamos la del elemento típico localizado en P , es $GM\Delta V/d^2$ donde d es la distancia OP . Esta atracción está dirigida de O a P . La componente vertical de la fuerza de atracción es $\frac{GM\Delta V}{d^2} \cos \alpha$, donde α es el ángulo en O entre OP y el eje vertical. Si las coordenadas de P son (ρ, θ, ϕ) , entonces (figura 97) $\cos \alpha = \frac{\rho \cos \phi - c}{d}$. Entonces la componente vertical de la fuerza ejercida por el elemento ΔV es $\frac{GM\Delta V(\rho \cos \phi - c)}{d^3}$. Debemos expresar a d en coordenadas esféricas.

Para hacer esto notemos que

$$d^2 = RQ^2 + PR^2 \quad \text{o} \quad d = (\rho \cos \phi - c)^2 + (\rho \sin \phi)^2 = \rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \phi.$$

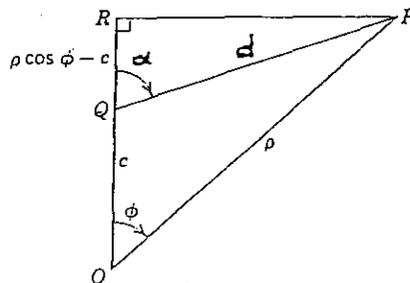


Figura 97

Como la componente vertical de la fuerza de atracción ejercida por $\Delta V = \frac{GM\Delta V(\rho \cos\phi - c)}{d^3}$ y

$d^2 = \rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi$, la forma de esta componente en coordenadas esféricas es: $\frac{GM(\rho \cos\phi - c)}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$. Estos

elementos deben ser sumados sobre el volumen del casquete esférico. Este volumen se describe cuando θ varía de 0 a 2π , ϕ varía 0 a π , y ρ varía de R_1 a R_2 . Por lo tanto la integral que deseamos es:

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{GM(\rho \cos\phi - c) \rho^2 \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\theta d\phi d\rho.$$

Comenzaremos a integrar con respecto a ϕ porque de esta manera vamos a encontrar pronto el valor de la integral triple así:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{GM(\rho \cos\phi - c) \rho^2 \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi = GM\rho^2 \int_0^\pi \frac{\rho \cos\phi \sin\phi - c \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \\ & = GM\rho^2 \left[\int_0^\pi \frac{\rho \cos\phi \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi - \int_0^\pi \frac{c \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right] \\ & = GM\rho^2 \left[\int_0^\pi \frac{-2\rho c \cos\phi \sin\phi}{-2c(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi - \frac{1}{2\rho} \int_0^\pi \frac{2\rho c \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right] \\ & = GM\rho^2 \left[\int_0^\pi \frac{(\rho^2 + c^2) \sin\phi - 2\rho c \cos\phi \sin\phi + (\rho^2 + c^2) \sin\phi}{-2c(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\rho} \int_0^\pi \frac{2\rho c \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right] \\ & = GM\rho^2 \left[\int_0^\pi \frac{\sin\phi(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi) - (\rho^2 + c^2) \sin\phi}{-2c(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\rho} \int_0^\pi \frac{2\rho c \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right] \\ & = GM\rho^2 \left[\int_0^\pi \frac{\sin\phi}{-2c(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{1/2}} d\phi + \int_0^\pi \frac{(\rho^2 + c^2) \sin\phi}{2c(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\rho} \int_0^\pi \frac{2\rho c \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\phi \right] \end{aligned}$$

$$= Gm\rho^2 \left[\frac{1}{-\rho c} - \frac{\rho^2 + c^2}{(\rho^2 - c^2)\rho c} - \frac{2c}{\rho^2 - c^2} \right] = Gm\rho^2 \cdot 0 = 0$$

Se usó el hecho de que $\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi = d^2$, es positiva y que $(\rho^2 + c^2 - 2\rho c)^{1/2} = \rho - c$, por la definición de raíz cuadrada positiva y porque por hipótesis $\rho > c$.

No hay necesidad de llevar a cabo las integraciones en que

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-GM(\rho \cos\phi - c)\rho^2 \sin\phi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\phi)^{3/2}} d\theta d\phi d\rho$$

ya que el integrando es 0, el resultado es 0. Consideremos un ejemplo más sencillo. Encontramos el volumen acotado por las esferas $\rho = a$, $\rho = b$ y el cono $\phi = \alpha$, ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). El volumen

de este cono está dado por

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_a^b \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \frac{b^3 - a^3}{3} \sin\phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{b^3 - a^3}{3} (1 - \cos\alpha) d\theta = \frac{2}{3}\pi (b^3 - a^3)(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

INTEGRAL DE LINEA E INTEGRAL DE SUPERFICIE

Este capítulo contiene los siguientes temas:

Integral de línea

Integral de superficie

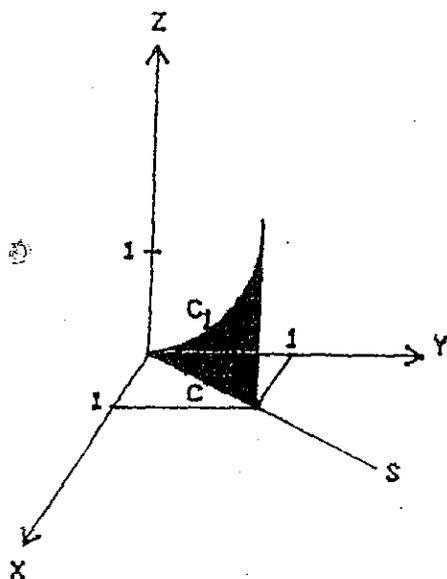
En este capítulo se estudia primeramente la integral de línea. El estudio de este tema con problemas sobre áreas para la definición de la integral de línea del tipo $\int_C f(x,y) ds$ ó $\int_C f(x,y) ds$ y ver que estas integrales se pueden reducir a integrales ordinarias. Después se plantea un problema de hallar el trabajo que realiza una fuerza \vec{F} para llegar a manejar integrales de la forma $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ds. Enseguida se ve la conveniencia de las ecuaciones paramétricas para las curvas C donde el parámetro es necesariamente el parámetro longitud de arco y se calcula el trabajo hecho por una fuerza \vec{F} donde las ecuaciones paramétricas estén en función de un parámetro t cualquiera. Después de un ejemplo donde se ve que el valor de la integral de línea es independiente de la curva C de integración y de ilustrar por algunos ejemplos que $\int_C f(x,y) ds = \int_{-C} f(x,y) ds$ pero que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, se resuelven algunos problemas de mecánica donde se ilustra el concepto de integral de línea.

En segundo lugar se estudia el concepto de integral de superficie motivándolo por medio de un problema de hallar la masa de una superficie y así obtener integrales de la forma $\int_S G(x,y,z) ds$. Después se manejan superficies S de la forma $z = f(x,y)$, $x = g(y,z)$ ó $x = h(y,z)$. Después vemos que estas integrales se pueden reducir a integrales dobles para poder evaluarlas. Posteriormente se estudian las integrales de superficie de la forma $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, motivada por medio de un problema de hallar el flujo a través de una superficie.

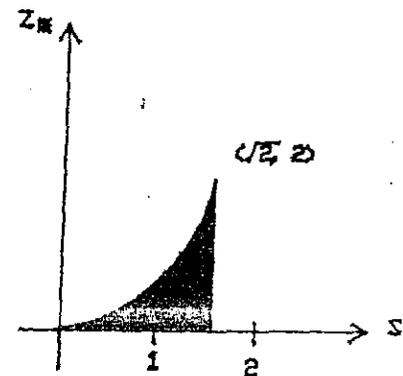
INTEGRAL DE LINEA

resolvamos algunos problemas que nos conducirán a la definición del concepto de integral de línea.

PROBLEMA 1. Consideremos la curva C_1 determinada por la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = y$. Encontrar el área de la región A que está sobre el plano $y = x$, limitada por la curva C_1 , el segmento de recta C que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$ y la recta perpendicular al plano xy que pasa por $(1,1,0)$. Ver figura 98.



REGION A EN EL ESPACIO XYZ



REGION A EN EL PLANO SZ^*

Figura 98

SOLUCION: Antes de resolver el problema, notemos que es esencialmente un problema de cálculo de una variable (encontrar el área bajo una curva) y que se puede reducir a un problema de cálculo de una variable, si se introduce un sistema de ejes $s-z^*$ tal como se hizo en el capítulo II. Al numerar el eje s se encuentra que los puntos del plano xy están relacionados con los puntos del eje s por medio de la ecuación vectorial

$\mathbf{v} = s \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$, de aquí que la ecuación de la curva C_1 con respecto al sistema de ejes coordenados $s - z^*$ está dada por $z^* = s^2$ y el segmento de recta C se traduce en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$ del eje s . Por lo tanto el área que se quiere encontrar está dada por $\int_0^{\sqrt{2}} s^2 ds = (2/3)\sqrt{2}$. (Después veremos que el área encontrada se representará por medio del símbolo $\int_C (x^2 + y^2) ds$ que se lee "la integral de línea de $x^2 + y^2$ sobre C de $(0,0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ".)

PROBLEMA 2. Hallar el área de la región que se encuentra sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y que está limitada por la curva determinada por el cuarto de circunferencia $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ con $y \geq 0$ y la curva C_1 que se determina al asociar el valor de $z = xy^2$ a cada punto de la curva C . Ver figura 99.

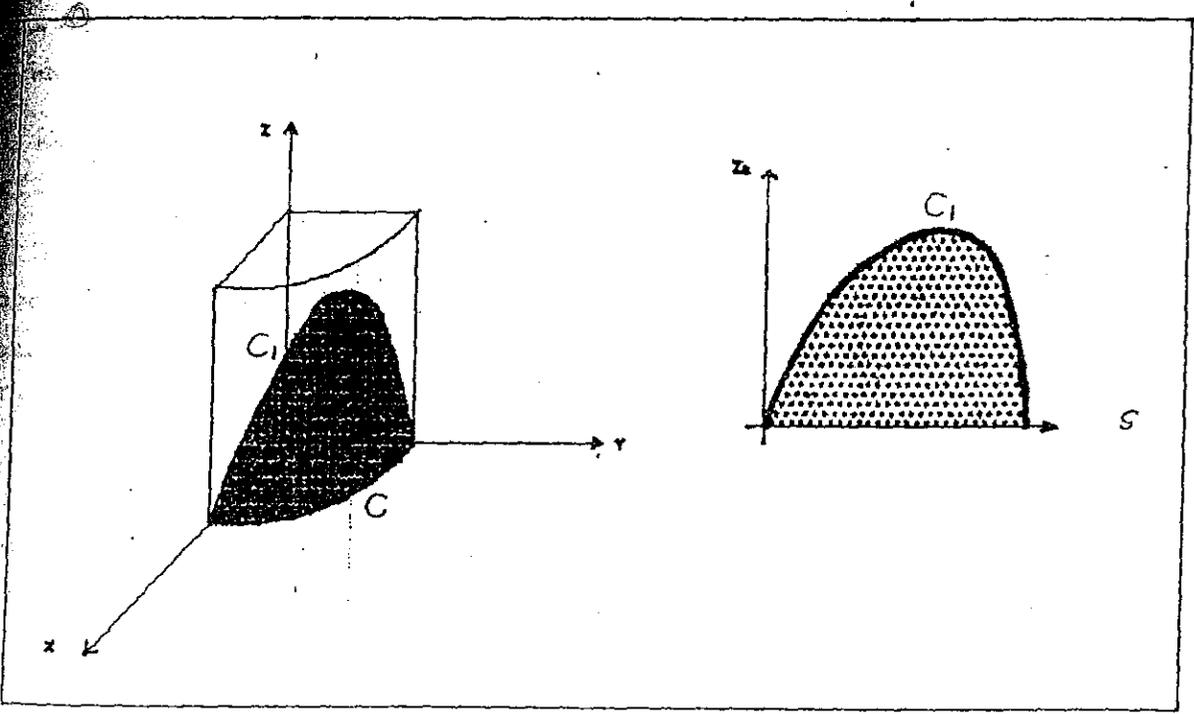


Figura 99

SOLUCION. De nuevo estamos ante un caso que se puede reducir a un problema de cálculo de una variable sólo que ahora tenemos que introducir un sistema de ejes $s - z^*$, donde el eje z^* sea

la recta que es perpendicular al plano xy , que pasa por $(3,0,0)$ y el eje s no va a ser otra cosa mas que la "curva C enderezada" para que la región limitada por las curvas C_1 y C esté sobre un plano. (En el problema anterior no se necesitó "enderezar" la correspondiente curva C por ser ya un segmento de recta); "enderezar" la curva C , matemáticamente significa que la podemos numerar con la misma escala que tienen los ejes coordenados y esto es posible lograrlo porque conocemos las ecuaciones paramétricas de C en términos de la longitud de arco s , a saber, $x = 3\cos(s/3)$, $y = 3\sin(s/3)$; así, al punto $(3\cos(s/3), 3\sin(s/3))$ del plano xy , se le asocia el número real s y de aquí se concluye que los valores de s están en el intervalo $[0, 3\pi/2]$ y los valores de z^* en función de s están dados por $z^* = 27 \sin^2(s/3) \cos(s/3)$. Por lo tanto el área de la región acotada por las curvas C_1 y C está dada por

$$\int_0^{3\pi/2} 81 \sin^2(s/3) \frac{1}{3} \cos(s/3) ds = \frac{81}{3}.$$

(Más adelante veremos que el área que acabamos de hallar, se representará por el símbolo $\int_C xy^2 ds$, que se lee "la integral de línea de xy^2 sobre C de $(3,0)$ a $(0,3)$ ").

Resolvimos dos problemas sobre áreas para motivar la definición de integral de línea que enseguida damos:

Definición de integral de línea para una función $z=f(x,y)$. Supongamos que tenemos una función $z = f(x,y)$ que está definida sobre una curva C que está dada paramétricamente por $x = x(s)$, $y = y(s)$, con $a \leq s \leq b$ donde s es la longitud de arco. Sean A y B los puntos de C determinados por los valores a y b respectivamente del parámetro s . Diremos que la dirección positiva de C es aquella determinada por el crecimiento del parámetro s . Tomemos una partición del intervalo $[a,b]$ eligiendo

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N = b.$$

Esto nos lleva a una división de C en subarcos $P_{\ell-1}P_\ell = s_\ell$ donde $P_\ell (x_\ell, y_\ell)$ es el punto en C correspondiente a s_ℓ . Denotemos por Δs_ℓ la longitud del subarco $P_{\ell-1}P_\ell$. Ahora escogemos un punto $Q_\ell (\bar{x}_\ell, \bar{y}_\ell)$ en cada $P_{\ell-1}P_\ell$ como se ilustra

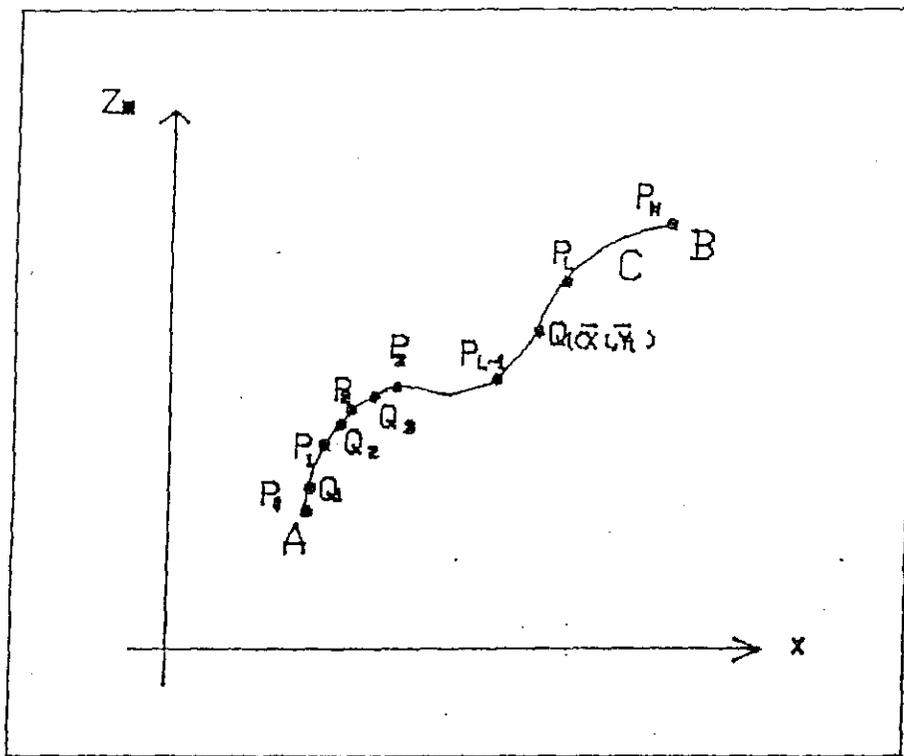


Figura 100

en la figura 100. Para cada l , evaluamos la función f en (\bar{x}_l, \bar{y}_l) , multiplicamos este número por Δs_l y formamos la suma

$$\sum_{l=1}^N f(\bar{x}_l, \bar{y}_l) \Delta s_l$$

Por definición, la integral de línea de $z = f(x, y)$ a lo largo de la curva C es el límite de esta suma cuando el número de subarcos tiende a infinito y la longitud de cada subarco tiende a cero:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{cada } \Delta s_l \rightarrow 0}} \sum_{l=1}^N f(\bar{x}_l, \bar{y}_l) \Delta s_l$$

Como conocemos las ecuaciones paramétricas de C en términos de la longitud de arco s , podemos evaluar la integral de línea, reduciéndola a una integral definida ordinaria:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f[x(s), y(s)] ds.$$

Ahora definamos la integral de línea de una función $w=f(x, y, z)$ a lo largo de una curva C en el espacio, que es similar a la integral de línea para una función de dos variables.

Supongamos que tenemos una curva C en tres dimensiones (ver figura 101) cuyas ecuaciones paramétricas son $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ donde s es la longitud de arco con $a \leq s \leq b$. Sean A y B los puntos de C determinados por los valores a y b respectivamente del parámetro s . Vamos a escoger como dirección positiva de C aquella determinada por el crecimiento del parámetro s . Supongamos además que tenemos una función $f(x, y, z)$ definida en cada punto de la curva C . Tomemos una partición del intervalo $[a, b]$, eligiendo

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = b$$

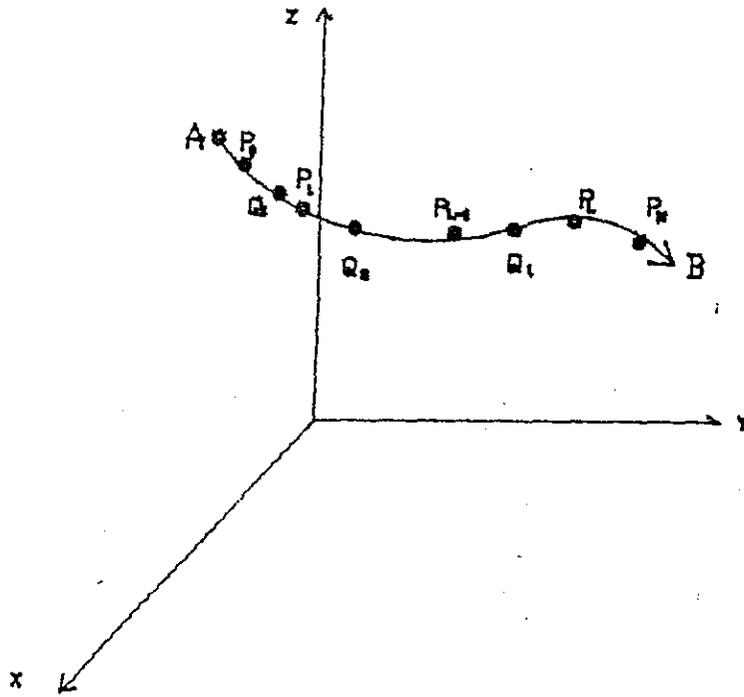


Figura 101

esto nos lleva a una división de C en subarcos $P_{l-1}P_l = S_l$ donde $P_l(x_l, y_l, z_l)$ es el punto en C correspondiente a S_l . Denotemos por Δs_l la longitud del subarco $P_{l-1}P_l$. Ahora escogemos un punto $Q_l(\bar{x}_l, \bar{y}_l, \bar{z}_l)$ en cada $P_{l-1}P_l$ como lo muestra la figura 101. Para cada l , evaluamos la función f en $(\bar{x}_l, \bar{y}_l, \bar{z}_l)$ y multiplicamos este número por Δs_l y formamos la suma

$$\sum_{l=1}^n f(\bar{x}_l, \bar{y}_l, \bar{z}_l) \Delta s_l.$$

Por definición, la integral de línea de $f(x,y,z)$ a lo largo de C es el límite de esta suma cuando el número de subarcos tiende infinito y la longitud de cada subarco tienda a cero:

$$\int_C f(x,y,z) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta s_i$$

Cada $\Delta s_i \rightarrow 0$

Para evaluar la integral de línea necesitamos conocer la curva C . Como ya tenemos definida a la curva C , podemos reducir la integral de línea a una integral definida ordinaria:

$$\int_C f(x,y,z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds.$$

Veamos un ejemplo de una integral de línea que a la vez nos ayuda a concluir que el valor de la integral de línea puede depender de la curva C de integración.

EJEMPLO. Evaluar $\int_C (x + y) ds$

- a) A lo largo del segmento de recta que une el origen con el punto $(1,1)$. Ver figura 102.
- b) A lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 103.

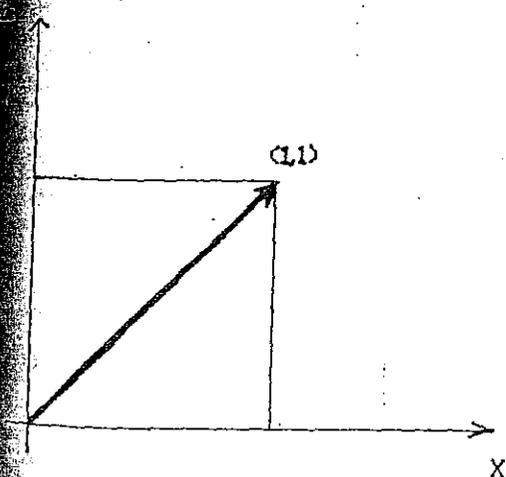


Figura 102

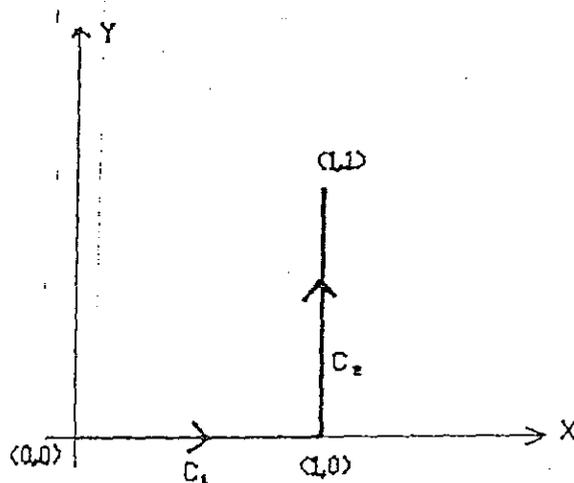


Figura 103

SOLUCION.

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta están dadas por
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2} s$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} s$ con $0 \leq s \leq \sqrt{2}$, donde s es la longitud de arco medido desde el origen. Por lo tanto

$$\int_C (x+y) ds = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} s ds = \sqrt{2}.$$

b) Ahora integraremos la misma función $f(x,y)=x+y$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ a lo largo de otra trayectoria como lo muestra la figura 103. Aquí dividimos la integración en dos partes, una a lo largo de C_1 y otra a lo largo C_2 . Sobre C_1 tenemos $x = s$, $y = 0$, $0 \leq s \leq 1$, de donde $x + y = s$, por tanto

$$\int_{C_1} (x + y) ds = \int_0^1 s ds = 1/2.$$

Las ecuaciones paramétricas de C_2 son $x = 1$, $y = s$ con $0 \leq s \leq 1$, donde la longitud de arco es medida desde $(1,0)$. De aquí que $x + y = 1 + s$ y por lo tanto.

$$\int_{C_2} (x + y) ds = \int_0^1 (1+s) ds = 3/2$$

Sumando los resultados para los dos segmentos encontramos

$$\int_C (x + y) ds = \int_{C_1} (x + y) ds + \int_{C_2} (x + y) ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

Por lo tanto la integral de línea puede depender de la trayectoria de integración.

Ahora queremos estudiar integrales de línea donde se involucren funciones vectoriales, esto nos obliga a que discutamos el concepto de función vectorial.

Sabemos que una función de una variable, generalmente escrita como $y = f(x)$, es una regla que nos dice cómo asociar dos números x, y ; dada la x , la función nos dice el valor de y que se le va a asociar. Así, por ejemplo, si $y = f(x) = x^2 + 3$, entonces calculamos el valor de y elevando al cuadrado el valor de x y luego sumando 3. Así, si $x = 4$, $y = 4^2 + 3 = 19$.

En el capítulo II vimos ejemplos de funciones de dos y tres variables como $z = f(x,y)$ y $w = f(x,y,z)$ que también son reglas que nos dicen qué número asociar a una pareja ordenada en el

caso de $z = f(x,y)$ y qué número asociar a una terna ordenada (x,y,z) en el caso de $w = f(x,y,z)$.

Las funciones $y = f(x)$, $z = f(x,y)$, $w = f(x,y,z)$ son funciones escalares. La generalización a funciones vectoriales es directa. Una función vectorial (en tres dimensiones) es una regla que nos dice cómo asociar un vector con cada punto (x,y,z) . Un ejemplo es la velocidad de un fluido. Representemos esta función por medio de $\vec{v}(x,y,z)$, la cual especifica la rapidez del fluido así como la dirección del flujo en el punto (x,y,z) . En general, una función vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ especifica una magnitud y una dirección para cada punto (x,y,z) en alguna región del espacio. Podemos representar gráficamente una función vectorial por medio de un conjunto de flechas (figura 104), una para cada punto (x,y,z) . La dirección de la flecha en un punto cualquiera es la dirección especificada por la función vectorial y su longitud es proporcional a la magnitud de la función.

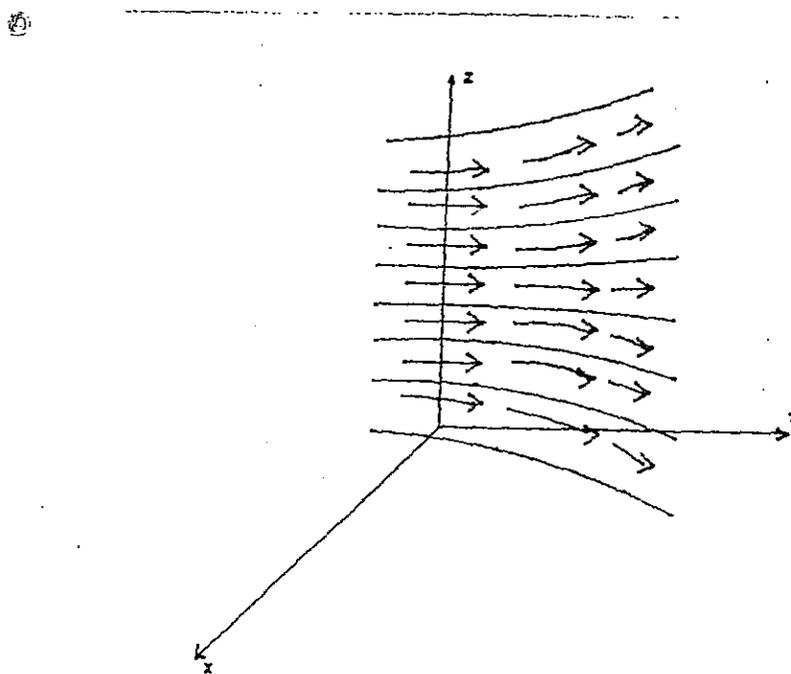


Figura 104

Un ejemplo de una función vectorial (en dos dimensiones) es

$$\vec{F}(x,y) = ix + jy,$$

que se ilustra en la figura 105. Esta función a cada punto (x,y) le asocia el vector de posición \vec{r} .

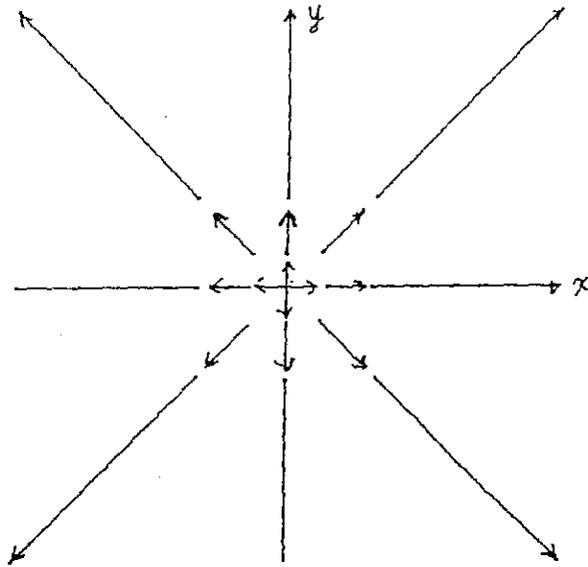


Figura 105

Estamos ya en posibilidades de comenzar a estudiar problemas de integrales de línea donde intervengan funciones vectoriales. Resolvamos un problema de trabajo, que es un caso más general que los que se estudian en cálculo de una variable.

Una partícula se mueve de un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ a un punto $B(b_1, b_2, b_3)$ a través de una curva C de ecuaciones paramétricas $\vec{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s) \rangle$, $a \leq s \leq b$, donde s es el parámetro longitud de arco, en cada punto P de la curva actúa una fuerza $\vec{F}(P)$. Hallar el trabajo que realiza \vec{F} sobre la partícula que se movió de A a B siguiendo el camino C .

SOLUCION. Sabemos que si una partícula se mueve desde un punto M hasta un punto N en línea recta y la fuerza \vec{F} que actúa sobre la partícula es constante (figura 106), entonces el trabajo realizado por \vec{F} sobre la partícula es $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{F}$. En el caso del

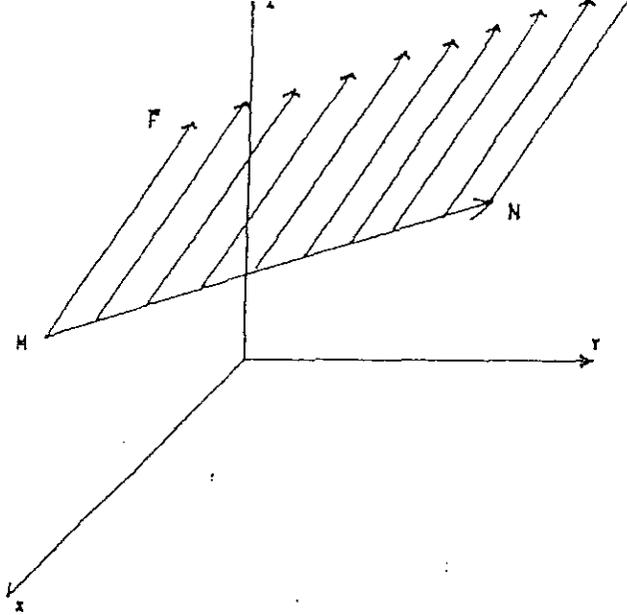


Figura 106

problema que deseamos resolver, C puede no ser recta y \vec{F} puede no ser constante, sin embargo, el saber hallar el trabajo para el caso en que C sea un segmento de recta y \vec{F} sea constante nos va a ser de utilidad.

Supongamos que para $s = a$ la partícula está en A y para $s=b$ la partícula está en B . Tomemos una partición del intervalo $[a,b]$ eligiendo

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_N = b$$

esto nos lleva a una división de C en N partes $A = \vec{r}(s_0)$, $P_1 = \vec{r}(s_1), \dots, P_{i-1} = \vec{r}(s_{i-1}), P_i = \vec{r}(s_i), \dots, B = \vec{r}(s_N)$ y por lo tanto en N subarcos. (Ver figura 107).

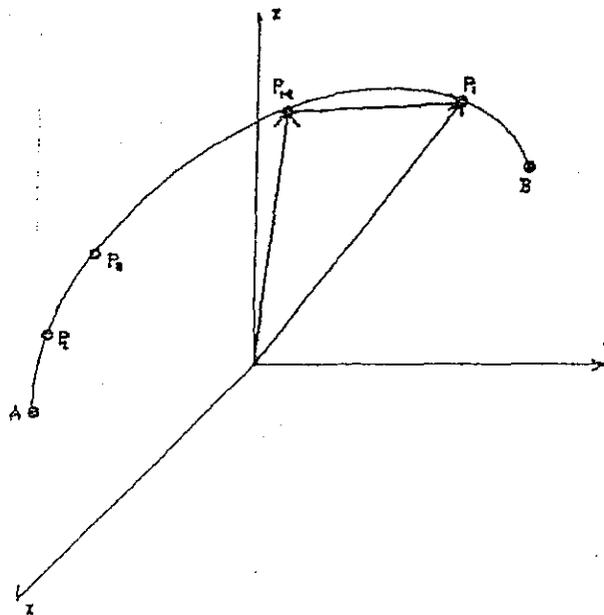


Figura 107

Hallemos una aproximación para el trabajo realizado por \vec{F} en el arco $P_{i-1}P_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Esta aproximación la logramos considerando que la partícula se movió por el segmento de recta $\overline{P_{i-1}P_i}$ y que a lo largo de este segmento estuvo actuando una fuerza $\vec{F}(P_{i-1})$ que se mantuvo constante en dicho segmento.

Por lo tanto, una aproximación para el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de C es

$$\sum_{L=1}^N \left[\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1}) \right] \cdot \vec{F} \left[\vec{r}(s_{i-1}) \right]$$

Sabemos, por otro lado que

$$\frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} \approx \vec{r}'(s)$$

de aquí que

$$\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1}) \approx \vec{r}'(s_{i-1}) (s_i - s_{i-1})$$

y por lo tanto una aproximación para el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de C es

$$\sum_{i=1}^N \vec{F} \left[\vec{r}(s_{i-1}) \right] \cdot \vec{r}'(s_{i-1}) \Delta s_i$$

donde $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$.

Si N tiende a infinito y la longitud de los subarcos $P_{i-1}P_i = \Delta s_i$ tienden a cero entonces se tiene una mejor aproximación para el trabajo realizado por \vec{F} , por lo tanto, el trabajo realizado por \vec{F} desde A hasta B es

$$T = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \vec{F} \left[\vec{r}(s_{i-1}) \right] \cdot \vec{r}'(s_{i-1}) \Delta s_i = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds$$

COMENTARIO. Observe que si hacemos $g(s) = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s)$, $g(s)$ representa a una función real de variable real y por lo tanto calcular el valor de T se reduce al cálculo de una integral definida ordinaria.

EJEMPLO. Hallar el trabajo realizado por $\vec{F}(x,y) = x^2i + yj$, sobre un cuerpo que se mueve desde $A(2,0)$ hasta $B(0,2)$ a través de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.



EL SABER DE MIS
PARA MI GRANDE
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

SOLUCION. La trayectoria que siguió el cuerpo tiene por ecuación vectorial a $\vec{r}(s) = \langle 2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2} \rangle$, $0 \leq s \leq \pi$, donde el parámetro s es la longitud de arco. $\vec{F}(\vec{r}(s)) = \langle (2 \cos \frac{s}{2})^2, 2 \sin \frac{s}{2} \rangle = \langle 4 \cos^2 \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2} \rangle$ y $\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) = \langle -\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2} \rangle$. Por lo tanto

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \int_0^\pi \langle 4 \cos^2 \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2} \rangle \cdot \langle -\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2} \rangle \, ds$$

$$= \int_0^\pi \{ (-4 \cos^2 \frac{s}{2})(\sin \frac{s}{2}) + 2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} \} \, ds = -\frac{2}{3}.$$

En muchos de los problemas donde se necesita calcular el trabajo hecho por una fuerza \vec{F} , es difícil hallar la ecuación vectorial de la trayectoria seguida por una partícula en términos del parámetro longitud de arco s o la expresión que se encuentra para $\vec{r}(s)$ es muy complicada, sin embargo como se vió en el capítulo III resulta relativamente más fácil, hallar la ecuación vectorial de una trayectoria en términos de otro parámetro que no sea la longitud de arco.

EJEMPLO. Una partícula A se mueve desde el punto P(0,0) hasta el punto Q(1,1) a través de la curva $y^2 = x^3$. Hallar dos ecuaciones vectoriales para la trayectoria seguida por la partícula A. Una de las ecuaciones escribirlas en términos de la longitud de arco s .

SOLUCION. $\vec{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle$; $0 \leq t \leq 1$ es una ecuación paramétrica para la trayectoria seguida por la partícula A. Para hallar la ecuación vectorial en términos del parámetro longitud de arco s , hagamos

$$s = \int_0^t \sqrt{4t^2 + 9t^4} \, dt$$

$$= \frac{1}{27} \left[(4 + 9t^2)^{3/2} - 8 \right]$$

de donde

$$\vec{r}(s) = \left\langle \frac{(27s + 8)^{2/3} - 4}{9}, \frac{[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}}{27} \right\rangle$$

con

$$0 \leq s \leq \frac{1}{27} [13\sqrt{13} - 8].$$

Este ejemplo nos muestra que tenemos que buscar una expresión para hallar el trabajo que realiza una fuerza, cuando la ecuación vectorial de la trayectoria está escrita en términos de otro parámetro (digamos t) donde t no sea la longitud de

arco (por cierto que en mecánica se utilizan ecuaciones vectoriales en términos del parámetro t , donde t representa el tiempo para describir la trayectoria seguida por una partícula en movimiento).

Encontremos pues una expresión que nos dé el valor del trabajo hecho por una fuerza \vec{F} al mover una partícula a lo largo de la curva C de A a B , donde la curva C está descrita por la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ donde t es el tiempo (con $\vec{r}(a) = \vec{OA}$ y $\vec{r}(b) = \vec{OB}$). Subdividamos C como lo indica la figura 108. Imagine a \vec{F} actuando sobre la partícula de P_{i-1} a P_i , dos puntos de subdivisión consecutivos de C . El trabajo ΔT_i realizado es aproximadamente igual al producto de la componente tangencial de \vec{F} a lo largo de C multiplicado por la longitud del arco $P_{i-1}P_i$.

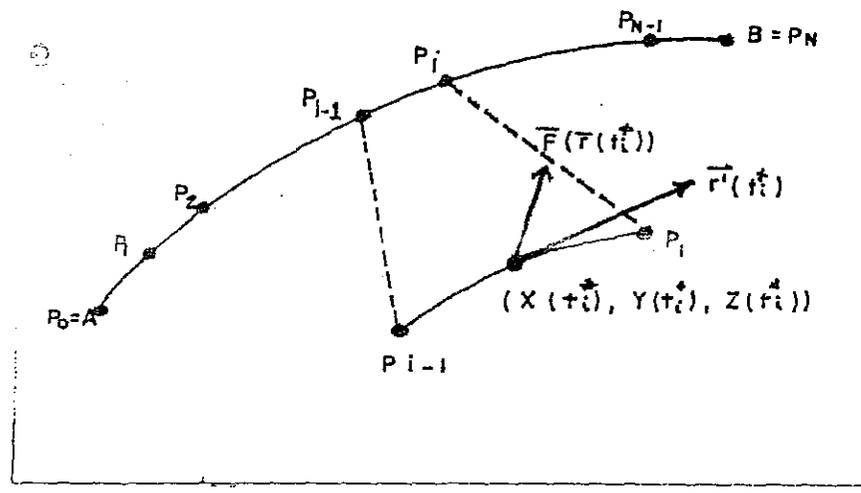


Figura 108

Como la longitud del arco

$$P_{i-1}P_i = \Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

entonces

$$\Delta s_i \approx \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^*)]^2 + [z'(t_i^*)]^2} \Delta t_i$$

para un $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ (por el teorema del valor medio para integrales). Como suponemos que el valor de \vec{F} es

aproximadamente el mismo para todo $t \in [t_{i-1}, t_i]$, tomemos a

$\vec{F}(\vec{r}(t_i^*))$ como el valor de \vec{F} a lo largo del arco $P_{i-1}P_i$. El vector tangente a la curva C para $t = t_i^*$ es $\vec{r}'(t_i^*) = \langle x'(t_i^*), y'(t_i^*), z'(t_i^*) \rangle$. Por lo tanto

la componente de \vec{F} a lo largo de C es $\vec{F}(\vec{r}(t_i^*)) \cdot \frac{\vec{r}'(t_i^*)}{\|\vec{r}'(t_i^*)\|}$ y

un valor aproximado para ΔT_i es

$$\Delta T_i \approx \vec{F}(\vec{r}(t_i^*)) \cdot \frac{\vec{r}'(t_i^*)}{\|\vec{r}'(t_i^*)\|} \Delta s_i$$

Pero $\Delta s_i = \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^*)]^2 + [z'(t_i^*)]^2} \Delta t_i = \|\vec{r}'(t_i^*)\| \Delta t_i$
por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta T_i &\approx \vec{F}(\vec{r}(t_i^*)) \cdot \frac{\vec{r}'(t_i^*)}{\|\vec{r}'(t_i^*)\|} \|\vec{r}'(t_i^*)\| \Delta t_i \\ &= \vec{F}(\vec{r}(t_i^*)) \cdot \vec{r}'(t_i^*) \Delta t_i \end{aligned}$$

De aquí que el trabajo hecho por \vec{F} sobre la partícula que se movió sobre C desde A hasta B está dada por

$$T = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

EJEMPLO. Hallar el trabajo realizado por $\vec{F}(x,y) = x^2 i + y j$, sobre un cuerpo que se mueve desde $A(2,0)$ hasta $B(0,2)$ a través de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

SOLUCION. Una ecuación vectorial para la trayectoria seguida por el objeto está dada por $\vec{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t \rangle$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (4 \cos^2 t) i + (2 \sin t) j$ y $\vec{r}'(t) = \langle -2 \sin t, 2 \cos t \rangle$, de aquí que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt &= \int_0^{\pi/2} \langle 4 \cos^2 t, 2 \sin t \rangle \cdot \langle -2 \sin t, 2 \cos t \rangle dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [(-8 \cos^2 t \sin t) + 4 \sin t \cos t] dt = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

COMENTARIO 1. Sabemos que si un cuerpo se mueve desde un punto A hasta un punto B de una curva C que esté en el espacio y

llamamos dos ecuaciones vectoriales para describir el camino seguido por dicho cuerpo, a saber: $\vec{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s) \rangle$ con $s_1 \leq s \leq s_2$, donde s es el parámetro longitud de arco, y $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ con $a \leq t \leq b$, donde t es otro parámetro, en general los intervalos $[s_1, s_2]$ y $[a, b]$ son distintos. sin embargo es importante hacer notar que el trabajo hecho por una fuerza \vec{F} sobre dicho cuerpo está dado por:

$$\int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds$$

(cuando s es el parámetro longitud de arco) y por

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

(cuando t es otro parámetro).

COMENTARIO 2. Hay una diferencia importante entre una integral de línea de la forma $\int_C f(x,y) ds$ y una integral de línea de la forma $\int_C \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds$, a saber:

$$\int_C f(x,y) ds = \int_{-C} f(x,y) ds$$

pero

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds = - \int_{-C} \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds$$

Esto lo ilustraremos por medio de ejemplos:

EJEMPLO. Calcular $\int_C (x+y) ds$ y $\int_{-C} (x+y) ds$. C es el segmento de recta con punto inicial en $A(0,1)$ y punto final en $B(1,3)$. Ver figura 109.

SOLUCION. La ecuación vectorial de C está dada por

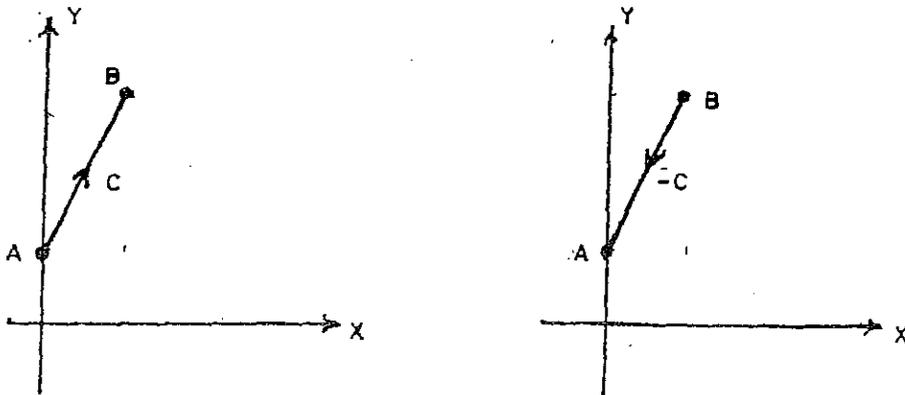


Figura 109

$$\vec{r}(s) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} s, \frac{2}{\sqrt{5}} s+1 \right\rangle; \quad 0 \leq s \leq \sqrt{5}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$\int_C (x+y) ds = \int_C \left(\frac{1}{\sqrt{5}} s + \frac{2}{\sqrt{5}} s+1 \right) ds = \frac{5}{2} \sqrt{5}. \quad \text{Por otro lado, la ecuación vectorial de } -C \text{ es } \vec{r}(s) = \left\langle 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} s, 3 - \frac{2}{\sqrt{5}} s \right\rangle; \quad 0 \leq s \leq \sqrt{5}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-C} (x+y) ds = \int_0^{\sqrt{5}} \left[1 - \frac{s}{\sqrt{5}} + 3 - \frac{2s}{\sqrt{5}} \right] ds = \frac{5}{2} \sqrt{5}.$$

EJEMPLO. Calcular $\int_C \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds$ y $\int_{-C} \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds$ si C está dada por $\vec{r}(s) = \left\langle 2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2} \right\rangle$ con $0 \leq s \leq \pi$, donde

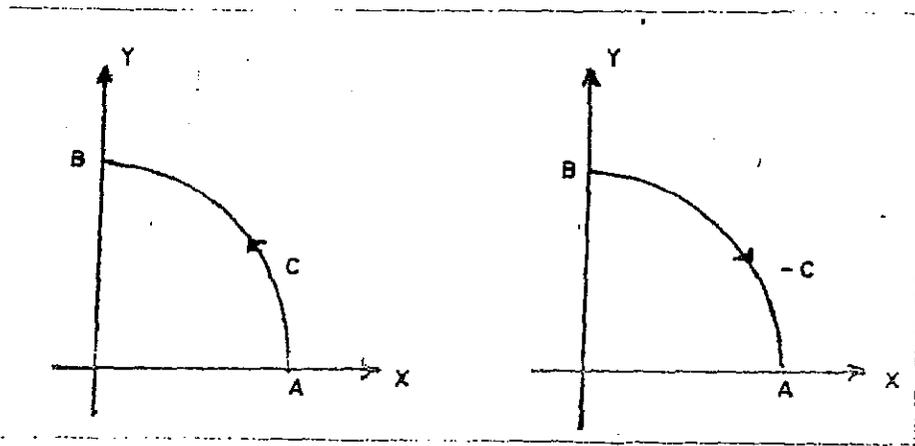


Figura 110

$\vec{F}(x,y) = x^2 \mathbf{i} + y \mathbf{j}$. Anteriormente vimos que $\int_C \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds = -\frac{2}{3}$, ahora calculemos la otra integral. La ecuación vectorial para $-C$ es $\vec{r}(s) = \left\langle 2 \sin \frac{s}{2}, 2 \cos \frac{s}{2} \right\rangle$ con $0 \leq s \leq \pi$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) ds &= \int_0^{\pi} \left\langle 4 \sin^2 \frac{s}{2}, 2 \cos \frac{s}{2} \right\rangle \cdot \left\langle \cos \frac{s}{2}, -\sin \frac{s}{2} \right\rangle ds = \\ &= \int_0^{\pi} \left[4 \sin^2 \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} - 2 \cos \frac{s}{2} \sin \frac{s}{2} \right] ds = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Resolvamos ahora un problema donde se pone de manifiesto una propiedad del trabajo.

EJEMPLO. Principio del trabajo y la energía. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva C descrita por $\vec{r}(t)$; $a \leq t \leq b$, donde el parámetro t es el tiempo. Si la rapidez $\|\vec{r}'(t)\|$ de la partícula en el instante t la simbolizamos por medio de $v(t)$, su energía cinética está definida por $\frac{1}{2} m v^2(t)$. Demostrar que el trabajo realizado por \vec{F} durante el intervalo de tiempo $[a, b]$ es igual $\frac{1}{2} m v^2(b) - \frac{1}{2} m v^2(a)$.

SOLUCION. En la solución de este problema vamos a utilizar del campo de la física dos hechos relativos a una partícula en el momento t .

1. $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m \vec{a}(t) = m \vec{r}''(t)$ (Segunda Ley de Newton).
2. E.C. = $\frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2$ (E.C. = Energía cinética).

El trabajo realizado por \vec{F} durante el intervalo de tiempo $[a, b]$ es

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt &= \int_a^b m \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b m \frac{1}{2} [r'(t) \cdot r'(t)]' dt \\ &= \int_a^b m \frac{1}{2} (\|\vec{r}'(t)\|^2)' dt = \left[\frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(a)\|^2 = \frac{1}{2} m v^2(b) - \frac{1}{2} m v^2(a). \end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea

En cálculo de una variable se demostró que $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$. Hay un resultado similar para integrales de línea que demostraremos y lo utilizaremos para resolver dos problemas de mecánica.

TEOREMA. Sea C una curva derivable que une los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ y cuya ecuación vectorial es $\vec{r}(t) = \langle r_1(t), r_2(t), r_3(t) \rangle$, $a \leq t \leq b$ con $\vec{r}(a) = A$ y $\vec{r}(b) = B$. Sea f una función real y derivable, definida en una región R que contiene a la curva C , entonces

$$\int_C [\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)] dt = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1).$$

DEMOSTRACION.

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \text{ y } \nabla f(\vec{r}(t)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right\rangle.$$

Por lo tanto $\int_C \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ es igual

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right\rangle \cdot \langle r_1'(t), r_2'(t), r_3'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] dt \\ &= \left[f(\vec{r}(t)) \right]_a^b = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) \\ &= f(B) - f(A) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena si $w=f(x,y,z)$, $x=r_1(t)$, $y=r_2(t)$ y $z=r_3(t)$ entonces para $w=f(\vec{r}(t))$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)) \right] r_1'(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)) \right] r_2'(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right] r_3'(t), \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right\rangle \cdot \langle r_1'(t), r_2'(t), r_3'(t) \rangle \\ &= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \end{aligned}$$

COMENTARIO. Este resultado nos indica que si una fuerza $\vec{F}(x,y,z)$ es igual al gradiente de una función escalar f , entonces el trabajo efectuado por $\vec{F}(x,y,z)$ sobre una partícula que se mueve desde un punto A hasta un punto B es independiente de la trayectoria, es decir sin importar cual sea la curva C cuya ecuación vectorial es $\vec{r}(t)$ se cumple:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = f(B) - f(A).$$

EJEMPLO. Potencial Newtoniano. Hallar el trabajo que realiza la fuerza que ejerce una partícula de masa M sobre otra partícula de masa m que se mueve desde un punto A hasta un punto B.

SOLUCION. En la solución de este problema vamos a utilizar del campo de la física un hecho relativo a la fuerza de atracción entre dos cuerpos.

La ley de gravitación universal establece que la fuerza \vec{F} que ejerce una partícula de masa M sobre una partícula de masa m.

- Está dirigida de m hacia M.
- Su magnitud es GmM/r^2 , donde G es una constante y r es la distancia entre m y M.

Introduzcamos un sistema de coordenadas con el objeto de encontrar una expresión para \vec{F} . Situemos a M en el origen y sea $\vec{r} = xi + yj + zk$ el vector de posición de m. Entonces $r = \|\vec{r}\|$ y $\frac{\vec{r}}{r}$ es un vector unitario con la misma dirección que \vec{r} . con lo que la ley de gravitación toma la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{GmM}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = - \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (xi+yj+zk)$$

pero como $\vec{F} = \nabla f$ donde $f(x,y,z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ concluimos que el trabajo T que realiza \vec{F} sobre m independientemente de la trayectoria seguida por m es igual a

$$T = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

$$= \frac{GmM}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{GmM}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

si escribimos r_i en lugar de $\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $i = 1,2$ tenemos

$$\begin{aligned} T &= \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1} \\ &= GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= -GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) * \end{aligned}$$

A la función $f(x,y,z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ se le llama *potencial Newtoniano*. En la física a la función $f(x,y,z) = -\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ le llaman *energía potencial*.

EJEMPLO. Principio de conservación de la energía mecánica. Supóngase que un objeto de masa m se mueve a lo largo de una curva derivable C, dada por

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r_1(t)i + r_2(t)j + r_3(t)k, \quad a \leq t \leq b$$

bajo la influencia de una fuerza \vec{F} tal que $\vec{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f. Demuestre que para todo momento t la suma de las energías cinética y potencial de un objeto es constante.

SOLUCION. Tomemos del campo de la física tres hechos relativos a un objeto en el momento t .

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t) = m \vec{r}''(t) \quad (\text{Segunda Ley de Newton})$$

$$E.C. = \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 \quad (E.C. = \text{Energía Cinética})$$

$$E.P. = -f(\vec{r}(t)) \quad (E.P. = \text{Energía Potencial})$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [E.C. + E.P.] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 - f(\vec{r}(t)) \right] \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\vec{r}'(t)\|^2 \right] - \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t) \right] - \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] \\ &= \frac{m}{2} \left[2\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) \right] \left[\frac{\partial f}{\partial x} r'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y} r'_2(t) + \frac{\partial f}{\partial z} r'_3(t) \right] \\ &= m \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) - \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \\ &= \left[m \vec{r}''(t) - \nabla f(\vec{r}(t)) \right] \cdot \vec{r}'(t) \\ &\stackrel{\text{O}}{=} \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) - \vec{F}(\vec{r}(t)) \right] \cdot \vec{r}'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde concluimos que $E.C. + E.P.$ es constante.

COMENTARIO. Debido a que se conserva el valor de $E.C. + E.P.$ al evaluarla en cualquier momento t , cuando un objeto se mueve bajo una fuerza \vec{F} tal que $\vec{F} = \nabla f$; a \vec{F} se le llama fuerza conservativa o campo conservativo. A $E.C. + E.P.$ se le llama energía mecánica.

INTEGRAL DE SUPERFICIE

Vamos a resolver un problema que nos conducirá al concepto de integral de superficie.

EJEMPLO 1. Sea S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está en el primer octante y supongamos que la densidad en cualquier punto $P(x,y,z)$ es $\rho(x,y,z) = x^2$. Encontrar la masa de S .

SOLUCION. Lo primero que vamos a hacer es encontrar una aproximación para la masa de S , esto lo podemos lograr de la siguiente manera:

Ya que el dominio de la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, consiste en la región del plano xy determinada por las ecuaciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq \sqrt{9-x^2}$ (esto es un cuarto de círculo), dividamos el intervalo $[0,3]$ del eje x en tres partes iguales, lo mismo hagamos con el intervalo $[0,3]$ del eje y (ver figura 111). En cada punto de subdivisión de cada eje dibujamos líneas paralelas al otro eje, así queda cubierta la cuarta parte del círculo que está en el plano xy por medio de cuadrados. No toda el área del cuarto de círculo está cubierta por cuadrados que estén completamente dentro del cuarto del círculo. Consideremos solamente aquellos cuadrados que estén dentro de la cuarta parte del círculo y asignémosle un número a cada uno de ellos desde 1 hasta 4.

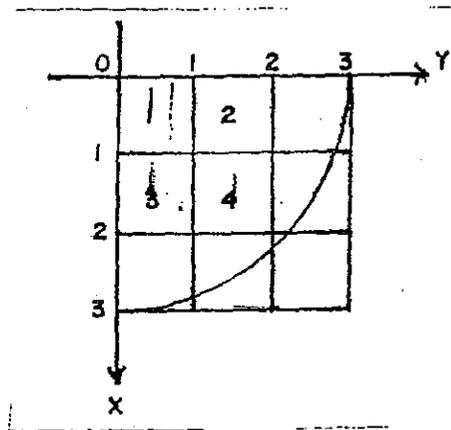


Figura 111

- 2) Encontremos el valor de la función $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ en cuatro puntos (un punto para cada cuadrado contenido totalmente en el cuarto de círculo), digamos $(1/2, 1/2)$, $(3/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$ y $(3/2, 3/2)$. Así obtenemos 4 puntos de la superficie S a saber $P_1(1/2, 1/2, \sqrt{34}/2)$, $P_2(1/2, 3/2, \sqrt{26}/2)$, $P_3(3/2, 1/2, \sqrt{26}/2)$ y $P_4(3/2, 3/2, \sqrt{18}/2)$.

3) Hallemos los planos tangentes a la superficie S en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y el valor de la función densidad $\rho(x,y,z)$ en los mismos puntos:

$$P_1: \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{34}}{2}z = 9 \quad \rho(P_1) = 1/4$$

$$P_2: \quad \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{26}}{2}z = 9 \quad \rho(P_2) = 1/4$$

$$P_3: \quad \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{26}}{2}z = 9 \quad \rho(P_3) = 9/4$$

$$P_4: \quad \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{18}}{2}z = 9 \quad \rho(P_4) = 9/4$$

4) Ahora vamos a considerar que el valor de $\rho(x,y,z)$ en cada punto de aquella parte de S que está por arriba del cuadrado No. 1 (llamémosle S_1) es aproximadamente igual a $\rho(P_1) = 1/4$ y que el área de S_1 es aproximadamente igual al área de aquella parte del plano $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{34}}{2}z = 9$ que está por arriba del cuadrado No. 1, de donde podemos obtener una aproximación para la masa de S_1 . Procedemos de igual manera con aquella parte de S que se encuentra por arriba del cuadrado No. m ($m = 2,3,4$), llamémosle S_m ($m = 2,3,4$) y así logramos una aproximación para la masa de S_m ($m = 2,3,4$) y por lo tanto una aproximación para la masa de S . Pero cómo podemos hallar el valor del área de aquella parte del plano $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{34}}{2}z = 9$ que se encuentra por arriba del cuadrado No. 1? La siguiente figura 112 nos ayudará a lograr este objetivo.

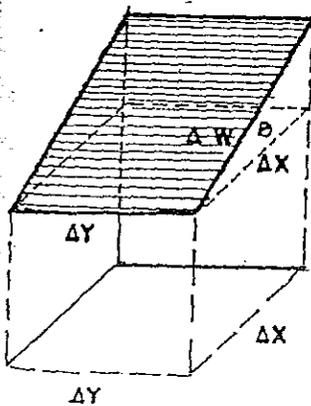


Figura 112

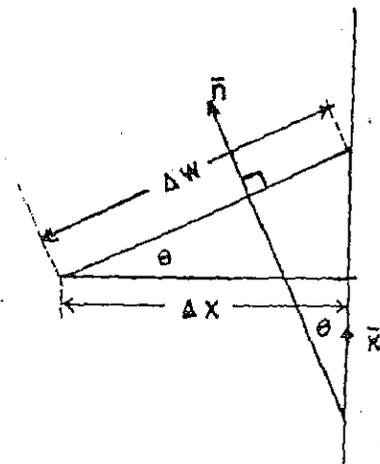


Figura 113

De la figura 112 podemos ver que si se conocen $\Delta x, \Delta y$ y θ , (θ es el valor del ángulo agudo que forma el plano inclinado con el plano xy entonces el área del plano inclinado es igual a $\Delta y \Delta w = \Delta y \frac{\Delta x}{\cos \theta}$ ya que $\Delta x = \Delta w \cos \theta$. Ahora, la figura 113 nos permite hallar una expresión para $\cos \theta$ en términos de vectores. Si \hat{n} es el vector normal unitario que forma un ángulo agudo con la parte positiva del eje z ,

$$\cos \theta = \frac{\hat{n} \cdot \hat{k}}{\|\hat{n}\| \|\hat{k}\|} = \hat{n} \cdot \hat{k}$$

De donde una expresión para el área del plano inclinado es $\frac{\Delta x \Delta y}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|}$, donde \hat{n} es un vector unitario perpendicular al plano inclinado. Con estos elementos podemos decir que el área del plano mencionado que se encuentra por arriba del cuadrado No. 1 es

$$\frac{1 \times 1}{\left| \left\langle \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{34}}{6} \right\rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle \right|} = \frac{6}{\sqrt{34}}$$

De aquí, que una aproximación para la masa de S_1 sea $\frac{1}{4} \times \frac{6}{\sqrt{34}}$. $\frac{6}{4\sqrt{26}}$, $\frac{27}{2\sqrt{26}}$ y $\frac{27}{2\sqrt{18}}$ son aproximaciones para las masas de S_2 , S_3 y S_4 respectivamente, de donde una aproximación para la masa de S es

$$\frac{3}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{34}} + \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{9}{\sqrt{26}} + \frac{9}{\sqrt{18}} \right] \approx 6.38.$$

Si dividimos el intervalo $[0,3]$ del eje x en 12 partes iguales y lo mismo hacemos para el intervalo $[0,3]$ del eje y y en cada punto de subdivisión de cada eje trazamos líneas paralelas al otro eje, queda cubierta la cuarta parte del círculo por cuadrados, pero sólo 22 están completamente dentro del cuarto de círculo. Si realizamos las mismas operaciones que hicimos para el caso anterior, encontramos una mejor aproximación para la masa de S , esto es 14.49.

Si el intervalo $[0,3]$ del eje x se divide en j partes iguales Δx y el intervalo $[0,3]$ del eje y en j partes iguales Δy , y en cada punto de subdivisión sobre un eje dibujamos líneas paralelas al otro eje, cubrimos la cuarta parte del círculo que está en el plano xy por medio de cuadrados. No todo el área del cuarto de círculo está cubierta de cuadrados que

estén completamente dentro de este cuadrado. Consideraremos solamente aquellos cuadrados que estén completamente dentro del cuarto de círculo y asignemos un número a cada uno de ellos desde 1 hasta k , de modo que cada cuadrado tiene un número único, así del i -ésimo cuadrado o cuadrado típico escogemos un punto (x_i, y_i) , luego encontramos el valor de la función $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ en (x_i, y_i) , denotémoslo z_i , enseguida encontramos el plano tangente a $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ en (x_i, y_i, z_i) , este es $x_i x + y_i y + z_i z = 9$ y el valor de la función densidad en (x_i, y_i, z_i) , éste es $\rho(x_i, y_i, z_i) = x_i^2$. El considerar que el valor de $\rho(x, y, z)$ en cada punto de aquella parte de S que está por arriba del cuadrado i -ésimo (llamémosle S_i) es aproximadamente igual a $\rho(x_i, y_i, z_i) = x_i^2$ y que el área de S_i es aproximadamente igual al área de aquella parte del plano $x_i x + y_i y + z_i z = 9$ que está por arriba del cuadrado i -ésimo, nos ayuda a encontrar una aproximación para la masa de S_i ésta es

$$\text{masa de } S_i \approx \frac{3x_i^2}{\sqrt{9-x_i^2-y_i^2}} \Delta x \Delta y.$$

De aquí que una aproximación para la masa de S es

$$M_1 = \sum_{i=1}^k \frac{3x_i^2}{\sqrt{9-x_i^2-y_i^2}} \Delta x \Delta y.$$

Nuestro próximo paso es hacer decrecer el valor de Δx que permite que el intervalo $[0, 3]$ del eje x quede dividido en más partes iguales y hacemos lo mismo con Δy . Por lo tanto, habrá un número algo más grande de cuadrados $\Delta x \Delta y$ que estén completamente dentro del cuarto de círculo de la figura 111 y, de hecho, este nuevo conjunto de cuadrados cubrirá más porción del cuarto del círculo que la que cubrieron los k cuadrados. Numeremos otra vez los cuadrados, digamos, desde 1 hasta l , donde l es el número de cuadrados que acabamos de formar, y escogemos algún punto (x_i, y_i) en cada cuadrado y encontramos que una aproximación para la masa de S es

$$M_2 = \sum_{i=1}^l \frac{3x_i^2}{\sqrt{9-x_i^2-y_i^2}} \Delta x \Delta y.$$

La suma M_2 es una mejor aproximación para la masa que estamos buscando que la suma M_1 ya que los cuadrados por ser más pequeños, cubrirán más porción de la parte del círculo, también es cierto que la parte de S que se encuentra directamente arriba del cuadrado i -ésimo (llamémosle S_i) es más pequeña que en el caso anterior, por lo tanto si P_i es un punto de S_i , entonces $\rho(P_i)$ es una mejor aproximación para la densidad de S_i , también la parte del plano tangente a S_i en P_i , que se encuentra directamente por arriba del cuadrado i -ésimo, tiene una área que da una mejor aproximación para el área de S_i , de aquí, que se obtiene una mejor aproximación para la masa de S_i y por lo tanto para S .

Podemos continuar el proceso haciendo a los Δx aún más pequeños para que el intervalo $[0,3]$ del eje x quede dividido en un número muy grande de partes iguales, lo mismo podemos hacer con Δy . En el n -ésimo paso de este proceso tendremos, digamos m cuadrados y la suma

$$M_n = \sum_{i=1}^m \frac{3x_i^2}{\sqrt{9-x_i^2-y_i^2}} \Delta x \Delta y.$$

Ahora hacemos precisamente lo que se hace en el caso de funciones de una variable. Hacemos que el número de cuadrados se haga más y más grande, asegurando cada vez un nuevo M_n y una mejor aproximación para la masa que estamos buscando. Así obtenemos una sucesión de sumas

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

Ya que las aproximaciones suministradas por los términos de la sucesión parecen acercarse más y más a la masa de S , el límite de esta sucesión debe ser la masa que buscamos. Por lo visto, en el capítulo IV

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \iint_R \frac{3x^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dx dy = \frac{27\pi}{2}.$$

Una manera de denotar a $\lim M_n$ es

$$\iint_S x^2 dS$$



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

donde S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que esté en el primer octante y x^2 , la función de densidad $\rho(x,y,z) = x^2$. Por lo que podemos decir que

$$\text{La masa de } S = \iint_S x^2 dS = \iint_R \frac{3x^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dx dy = \frac{27}{2} \pi$$

En general sea S una porción de una superficie de ecuación $z=f(x,y)$ y $w = g(x,y,z)$ una función escalar, supongamos que la porción S la aproximamos por medio de un poliedro de N caras, cada una de las cuales es tangente a S en algún punto. (La figura 114 muestra un poliedro aproximador para un octavo de esfera). Sea ΔS_i el área de la cara i -ésima y (x_i, y_i, z_i) las coordenadas del punto en el cual la cara es tangente a la superficie S , formemos el producto $G(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$, hagamos lo mismo para cada cara y sumemos los N productos

$$\sum_{i=1}^N G(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

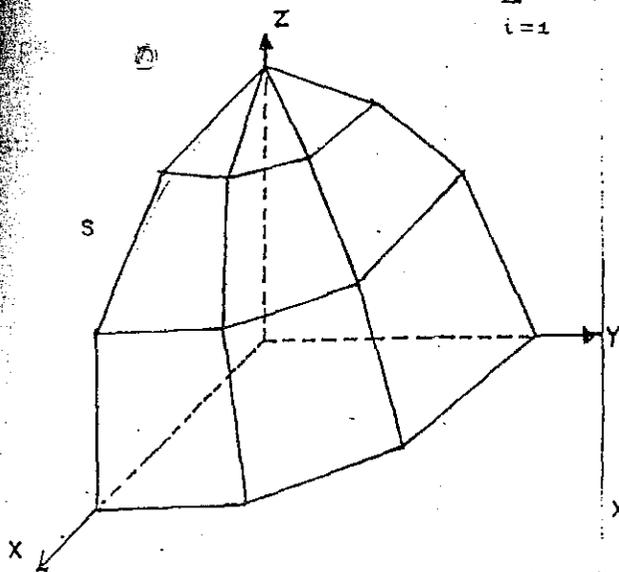


Figura 114

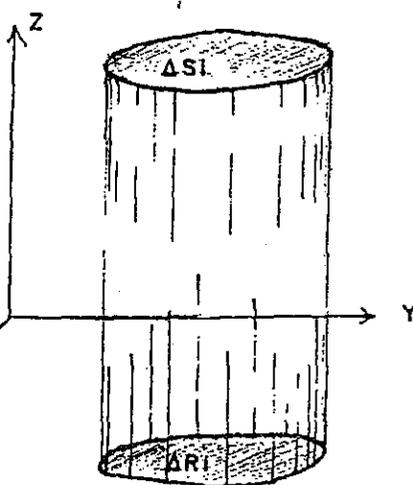


Figura 115

Al límite de esta suma, cuando el número de caras N tiende a infinito y el área de cada cara tienda a cero, se le llama INTEGRAL DE SUPERFICIE DE $G(x,y,z)$ SOBRE S y se le representa

$$\text{por medio de } \iint_S G(x,y,z) dS = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \text{Cada } \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N G(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

Para evaluar una integral de superficie, podemos proceder de manera similar a como le hicimos para resolver el problema de encontrar la masa de la octava parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

es decir, la idea básica es relacionar el área ΔS_i con el área ΔR_i de su proyección sobre el plano xy (ver figura 115). Haciéndole así, veremos, que podemos expresar la integral de superficie sobre S en términos de una integral doble ordinaria sobre R , donde R es la proyección de S sobre el plano xy . No es difícil relacionar ΔS_i si recordamos que ΔS_i (como el área de cualquier superficie plana) puede ser aproximada con el grado de exactitud que se desee por medio de un conjunto de rectángulos. Por esta razón sólo necesitamos encontrar la relación entre el área de un rectángulo y su proyección sobre el plano xy . De las figuras 112 y 113 se obtuvo esta relación a saber

$$\Delta S_i = \Delta R_i / \cos \theta = \frac{\Delta R_i}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}$$

pero como $\vec{n} = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \rangle}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1}}$ es un vector unitario

perpendicular a cada cara del poliedro aproximador de la superficie S ,

$$|\vec{n} \cdot \vec{k}| = 1 / \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1} \quad \text{de donde}$$

$$\sum_{i=1}^N G(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^N G(x_i, y_i, z_i) \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1} \Delta R_i$$

y de aquí

$$\iint_S G(x, y, z) dS = \iint_R G(x, y, f(x, y)) \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1} dx dy$$

La discusión anterior está basada en la suposición de que la superficie S está descrita por una función de la forma $z = f(x, y)$, en este caso una integral de superficie puede reducirse a una integral doble ordinaria sobre una región del plano xy . Pero puede suceder que una superficie dada se pueda describir mejor por una ecuación de la forma $y = g(x, z)$ como se muestra en la figura 116a). En este caso

$$\iint_S G(x,y,z) dS = \iint_R G(x,g(x,z),z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dx dz,$$

donde R es una región en el plano xz . Similarmente, si tenemos una superficie descrita por $x = h(y,z)$, como se muestra en la figura 116b), entonces

$$\iint_S G(x,y,z) dS = \iint_R G(h(y,z),y,z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} dy dz,$$

donde R en este caso es una región que está en el plano yz . Finalmente, una superficie S puede constar de varias partes y puede entonces ser conveniente proyectar partes diferentes, sobre diferentes planos coordenados.

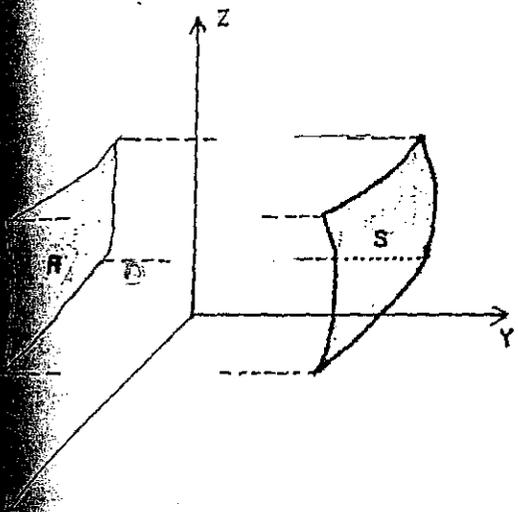


Figura 116a)

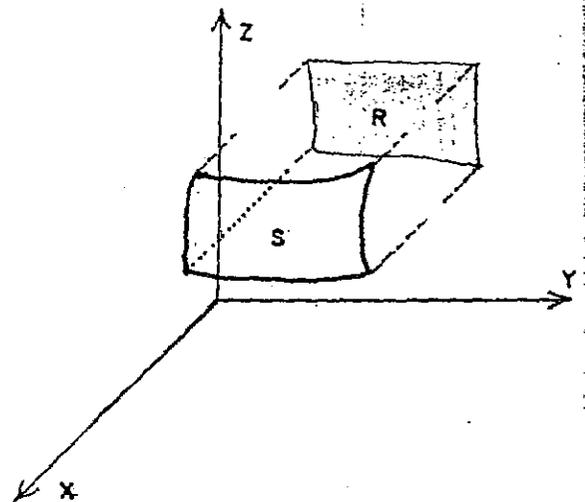


Figura 116b)

Ahora plantearemos un problema que nos lleve a resolver una integral de superficie pero donde involucran funciones vectoriales.

PROBLEMA. Considere una superficie S en alguna región del espacio por donde fluye líquido; siendo $\vec{v}(x,y,z)$ la velocidad del líquido en el punto (x,y,z) . Encontrar el volumen de líquido que atraviesa a S por unidad de tiempo. Ver figura 117

SOLUCION. Si nos preguntan por la cantidad de líquido que cruza una área ΔS perpendicular a la dirección del flujo en un

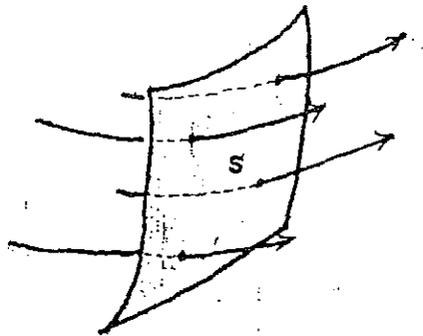


Figura 117

tiempo Δt , diremos que si la velocidad constante del líquido es \vec{v} , entonces la cantidad de líquido que pasa por ΔS es igual al volumen del cilindro de la figura 118a), ésta es $\|\vec{v}\| \Delta t \Delta S$. Por lo tanto la cantidad de líquido que fluye por ΔS por unidad de tiempo es $\|\vec{v}\| \Delta S$. Pero si el flujo del líquido no es perpendicular a ΔS , sino que forma un ángulo θ (ver figura 118b) entonces la cantidad de líquido que pasa por ΔS en el tiempo Δt es precisamente el volumen del paralelepípedo de la figura 118b). Este volumen es $(\Delta S \cos \theta) \|\vec{v}\| \Delta t$ pero como $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}\|}$ donde \vec{n} es un vector unitario perpendicular a la cara de área ΔS , entonces el volumen del paralelepípedo es $\Delta S \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}\|} \right) \|\vec{v}\| \Delta t = \Delta S \Delta t \vec{v} \cdot \vec{n}$, de donde la cantidad de líquido que pasa por ΔS en el tiempo Δt es $\Delta S \vec{v} \cdot \vec{n}$.

Ahora, consideremos la superficie S por la que está fluyendo el líquido. Aproximamos la superficie por medio de un poliedro. Por lo que acabamos de ver, la cantidad de líquido que pasa por la cara i -ésima es $\vec{v}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$. Aquí, por supuesto (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del punto que está en la i -ésima cara tangente a S y $\vec{n}(x_i, y_i, z_i)$ es el vector unitario normal a la i -ésima cara. Sumando sobre todas las caras y tomando el límite obtenemos

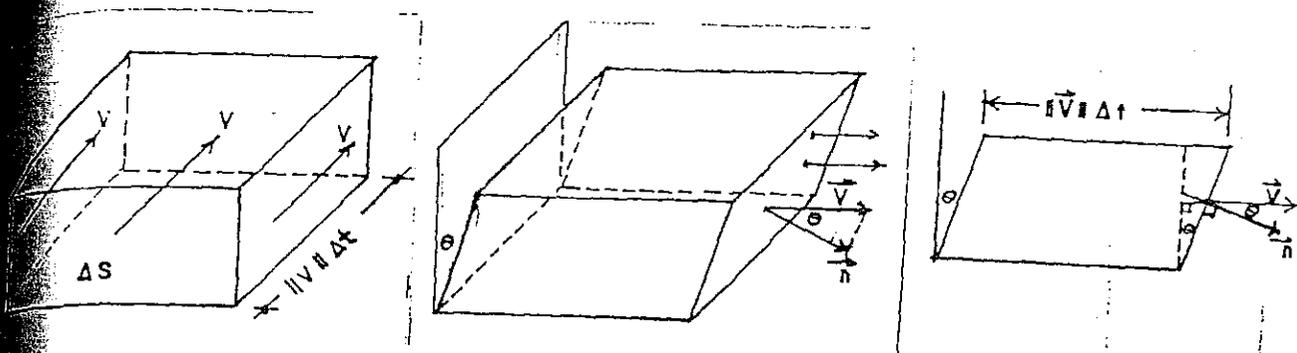


Figura 118a)

Figura 118b)

$$\left(\begin{array}{l} \text{cantidad de líquido que pasa por } S \text{ por} \\ \text{unidad de tiempo} \end{array} \right) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS.$$

En general, si $\vec{F}(x,y,z)$ es una función vectorial a la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ le vamos a llamar EL FLUJO DE \vec{F} A TRAVES DE S aun cuando \vec{F} no represente la velocidad de un líquido.

COMENTARIO 1. Estas integrales ya las podemos calcular, porque $\vec{F} \cdot \vec{n}$ es una función real en tres variables.

COMENTARIO 2. Al plantearse el problema de calcular una integral de superficie de la forma $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, debe de especificarse cuál de los dos posibles vectores unitarios normales a S debe tomarse, aunque cuando la superficie sea cerrada (esfera, elipsoide, etc.) se hace la convención de que se escoge el vector unitario normal que apunta hacia afuera de la superficie S .

EJEMPLO 1. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x,y,z) = iz - jy + kx$ y S es la porción del plano $x + 2y + 2z = 2$ acotada por los planos coordenados y el vector normal \vec{n} a S forma un ángulo agudo con el vector k .

SOLUCION. Según los datos que se dan, $\vec{n} = \frac{i + 2j + 2k}{3}$ de donde $\vec{F} \cdot \vec{n} = (iz - jy + kx) \cdot \left(\frac{i + 2j + 2k}{3} \right) = \frac{z}{3} - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}x$, es decir

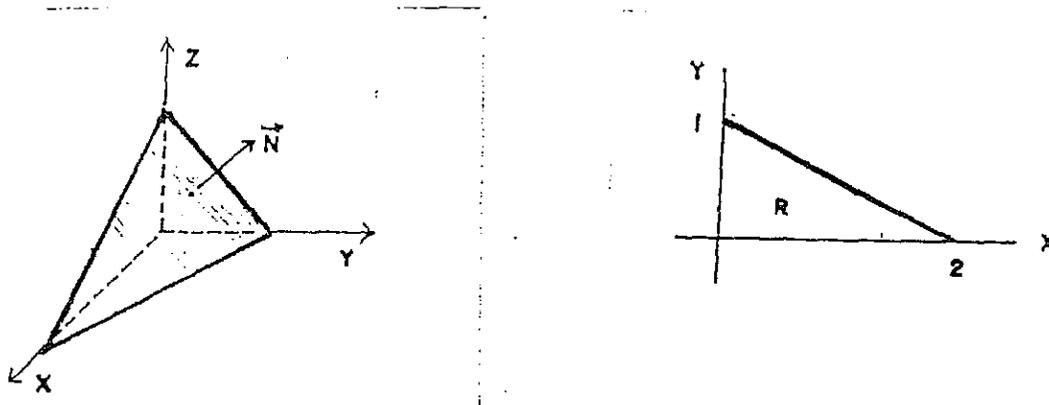
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \left(\frac{z - 2y + 2x}{3} \right) dS.$$

Como reducimos una integral de superficie de la forma $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

a una de la forma $\int_S G(x,y,z)dS$ y estas últimas ya las sabemos manejar, llegamos a que

$$\iint_S \left(\frac{z - 2y + 2x}{3} \right) dS = \iint_R \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \right) dx dy = \frac{1}{2},$$

donde R es la proyección de S sobre el plano xy (ver figura 119).



⊙

Figura 119

NOTACION. Cuando S sea una superficie cerrada vamos a utilizar los símbolos $\iiint_S G(x,y,z)dS$ o $\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

EJEMPLO 2. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = xi + yj + zk$ a través de S donde S es el cilindro circular recto de altura H , R el radio de la base y su eje es el eje z . Ver figura 120.

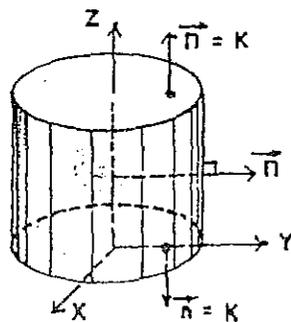


Figura 120

SOLUCION. Queremos encontrar $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$. De acuerdo a la convención para tomar \vec{n} , debe apuntar hacia afuera del cilindro. Como S se compone de la superficie lateral S_1 , de la base superior S_2 y de la base inferior S_3 del cilindro, debemos calcular $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$; $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ y $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ y luego sumar estas cantidades.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{S_1} (xi+yj+zk) \cdot \left(\frac{xi + yi + 0k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dS \\
 &= \iint_{S_1} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dS \\
 &= \iint_{S_1} \frac{R^2}{R} \, dS = R \iint_{S_1} dS = R(\text{Área de } S_1) = 2\pi R^2 H.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{S_2} (xi+yj+zk) \cdot k \, dS = \iint_{S_2} z \, dS \\
 &= \iint_{S_2} H \, dS = H \iint_{S_2} dS = \pi R^2 H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{S_3} (xi+yj+zk) \cdot (-k) \, dS = \iint_{S_3} (-z) \, dS \\
 &= \iint_{S_3} 0 \, dS = 0
 \end{aligned}$$

De (1) y (3) concluimos que $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 3\pi R^2 H$.

EL CONCEPTO DE PLANO TANGENTE

En algunos cursos de cálculo con geometría analítica se define el concepto de recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto (x_0, y_0) de ella como "la mejor aproximación lineal" de $y = f(x)$ en $x = x_0$ en el siguiente sentido:

DEFINICION 1. $L(x)$ es recta tangente a $y = f(x)$ en $P(x_0, f(x_0))$ si: $L(x)$ pasa por P y dada cualquier otra recta $K(x)$ que pase por P , existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - L(x)| \leq |f(x) - K(x)| \text{ para } |x - x_0| < \delta.$$

También se define el concepto de derivada de una función $y = f(x)$ en $x = x_0$ y se observa que la pendiente de la recta tangente (en el sentido de la definición 1) a la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ coincide con el valor de la derivada de $y = f(x)$ en $x = x_0$; esto permite dar la siguiente definición de recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ que resulta equivalente a la definición 1.

DEFINICION 2. $L(x)$ es recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_0, f(x_0))$ si $L(x)$ pasa por P y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$.

Por otro lado, en geometría analítica se resuelve el problema de hallar la ecuación del plano tangente a una esfera en un punto P de ella. Así, se encuentra que el plano $z = 7$ es el plano tangente a la semiesfera $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ en el punto $(0, 0, 7)$.

Con el concepto de recta tangente que se discute en el curso de cálculo de una variable y el concepto de plano tangente que se estudia en geometría analítica nos auxiliaremos para llegar a una definición de plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$.

Del hecho de que $z = 7$ sea el plano tangente a la semiesfera $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ en $(0, 0, 7)$ se puede deducir que cada una de las secciones en la dirección $\langle a, b \rangle$ ($a^2 + b^2 > 0$) en $(0, 0)$ de la

superficie $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ tiene recta tangente en $(0, 0, 7)$ y todas estas rectas pertenecen a un mismo plano, a saber, el plano $z = 7$, esto es, se cumple que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{49 - x^2 - y^2} - 7}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0$$

a lo largo de la recta $ax + by = 0$.

para cada par a y b de números reales tales que $a^2 + b^2 > 0$.

Lo anterior sugiere que para que una superficie $z = f(x, y)$ tenga plano $P_T(x, y)$ tangente en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es necesario que

- 1) Deban existir cada una de las rectas tangentes en cada una de las secciones en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto P de la superficie $z = f(x, y)$ (con $a^2 + b^2 > 0$).
- 2) Todas las rectas tangentes del inciso anterior estén en un mismo plano. En otras palabras, todas las rectas tangentes a las secciones en la dirección $\langle a, b \rangle$ en el punto P deben formar un plano $P_T(x, y)$ tal que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - P_T(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

(a lo largo de la recta $ax + by = ax_0 + by_0$)

para todo par a y b de números reales tales que $a^2 + b^2 > 0$.

Si estas condiciones tiene que satisfacer una superficie $z=f(x,y)$ para que tenga plano tangente en un punto P de ella entonces podemos decir que

$$(1) \quad z = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad y \quad z = \begin{cases} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no tienen plano tangente en $(0,0,0)$ porque la sección en la dirección $\langle 1,1 \rangle$ en $(0,0)$ de cada una de las superficies de (1) no es continua en $x = 0$. (Ver figura 121).

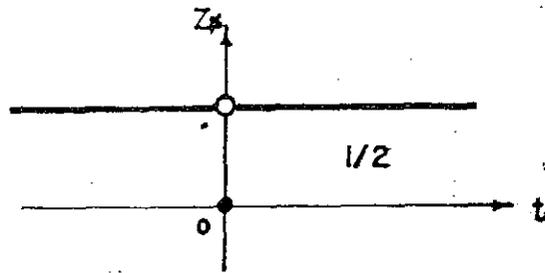


Figura 121. Gráfica de la sección en la dirección $\langle 1,1 \rangle$ en $(0,0)$ de cada superficie de (1).

En el caso de la superficie

$$(2) \quad z = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se puede afirmar que no tiene plano tangente en $(0,0,0)$ porque la sección en la dirección $\langle 1,1 \rangle$ en $(0,0)$ de la superficie (2) no es derivable en $x = 0$; su ecuación es $z = \frac{1}{2}|t|$ y su gráfica se muestra en la figura 122.

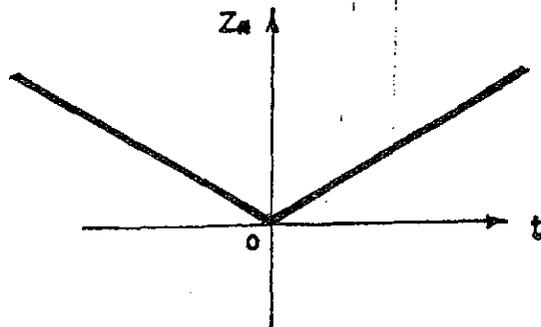


Figura 122. Gráfica de la sección en la dirección $\langle 1,1 \rangle$ en $(0,0)$ de la superficie (2).

Respecto a la superficie

$$(3) \quad z = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se puede afirmar que tiene rectas tangentes en todas las direcciones porque todas las derivadas direccionales de (3) existen, pero de la ecuación de la sección en la dirección $\langle a,b \rangle$ en $(0,0)$ de (3)

$$z_* = ab^2 t$$

donde a,b son números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$, se puede observar que NO están en un mismo plano todas las rectas tangentes por lo que se puede concluir que (3) NO tiene plano tangente en $(0,0,0)$. De

$$z = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se puede decir lo mismo que de (3): existen todas las derivadas direccionales en $(0,0)$, es decir, tiene rectas tangentes en todas las direcciones, pero, NO están en un mismo plano.

Ahora estudiemos a

$$(4) \quad z = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \text{ cumple con } y = x^2 \text{ y } x \neq 0; \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

en este caso la ecuación de la sección en la dirección $\langle a,b \rangle$ ($a^2 + b^2 = 1$ y $ab \neq 0$) en $(0,0)$ de (4) es

$$(5) \quad z_*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{b}{a^2} \\ 0 & \text{si } t \neq \frac{b}{a^2} \end{cases}$$

y la ecuación de la sección en la dirección $\langle a,b \rangle$ ($a^2 + b^2 = 1$ y $ab = 0$) en $(0,0)$ es

$$(6) \quad z_*(t) = 0$$

La gráfica de (5) se muestra en la figura 123 y la de (6) en la figura 124.

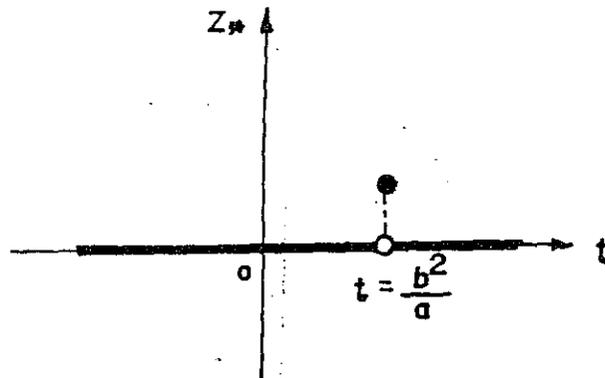


Figura 123. Gráfica de la sección en la dirección $\langle a, b \rangle$ en $(0, 0)$ de (4) para $a^2 + b^2 = 1$ y $ab \neq 0$.

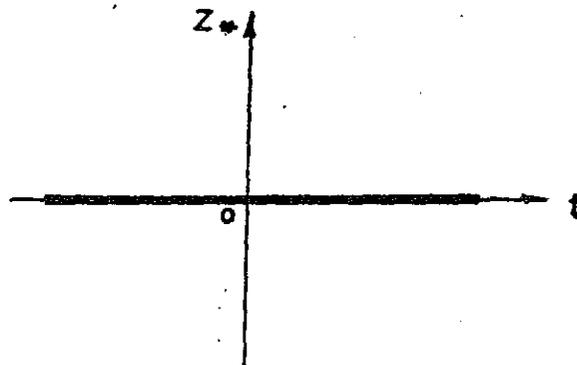


Figura 124. Gráfica de la sección en la dirección $\langle a, b \rangle$ en $(0, 0)$ de (4) para $a^2 + b^2 = 1$ y $ab = 0$.

De las ecuaciones de las secciones de (4) se puede concluir que existen todas las rectas tangentes a (4) en $(0, 0, 0)$ y además todas están en un mismo plano, a saber $z = 0$. Sin embargo esta superficie no tiene una propiedad que si tiene $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, razón por la cual se descarta a $z = 0$ como plano tangente a (4) en $(0, 0, 0)$. Esta propiedad la señalaremos a continuación.

La propiedad que tiene $z = \sqrt{49-x^2-y^2}$ y no tiene (4) es 1.

Siguiente: para todas las secciones $z_*(t)$ de $z = \sqrt{49-x^2-y^2}$ se cumple que:

(7) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$
que no depende de la
sección, tal que

$$\left| \frac{z_*(t) - z_*(0)}{t - 0} \right| < \varepsilon$$

si $0 < |t| < \delta$.

Del hecho de que $z_*(t) = \sqrt{49 - t^2}$ sea la ecuación de la sección en la dirección $\langle a, b \rangle$ ($a^2 + b^2 > 0$) en $(0,0)$ de $z = \sqrt{49-x^2-y^2}$ se puede afirmar que se cumple (7) en el caso de $z = \sqrt{49-x^2-y^2}$. En cambio, si consideramos las secciones (5) de (4) (ver figura 123) se observa que, para la sección $z_*(t)$ en la dirección $\langle a, b \rangle$ ($a^2 + b^2 = 1$ y $ab = 0$) se cumple que

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \left| \frac{b^2}{a} \right|$ tal que

$$\left| \frac{z_*(t) - z_*(0)}{t - 0} \right| < \varepsilon$$

si $0 < |t| < \left| \frac{b^2}{a} \right|$

pero el valor de δ sí depende de la sección porque el mismo valor de δ no sirve para todas las secciones. Se sabe que $z = \sqrt{49-x^2-y^2}$ tiene la propiedad (7) y que (4) no la tiene. ¿Pero qué significa que $z = \sqrt{49-x^2-y^2}$ tenga la propiedad (7)? Pues significa que:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(8) \quad \left| \frac{\sqrt{49 - x^2 - y^2} - 7}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \varepsilon$$

$$\text{si } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

es decir, (8) no sólo se cumple para sucesiones $\{(x_n, y_n)\}$ tales que (x_n, y_n) varíen a lo largo de líneas rectas sino que (8) se cumple para cualquier sucesión que tienda a $(0,0)$ y que cumpla con

$0 < \sqrt{x_n^2 + y_n^2} < \delta$. Una propiedad similar a (8) no la tiene la superficie (4) ya que

$$\left| \frac{z(x,y) - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| > 1$$

para algunos (x,y) tales que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ no importando que valor tome δ .

Ya se vió que el pedir que existan las rectas tangentes a todas las secciones de la superficie $z = f(x,y)$ en un punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y que todas estas rectas pertenezcan a un mismo plano $P_T(x,y)$ no asegura que $z = f(x,y)$ se comporte en P como

$z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ en $(0,0,7)$ y como se desea que las propiedades que

tienen $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ y su plano tangente en $(0,0,7)$ se cumplan también en una superficie $z = f(x,y)$ que tenga plano tangente en un punto P de ella, definiremos plano tangente de la siguiente manera:

(9) DEFINICION: Sea $z = f(x,y)$ una superficie y $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un punto de ella. Se dice que $z = f(x,y)$ tiene un plano tangente $P_T(x,y)$ en P si

i) Existen las rectas tangentes a las secciones $\langle 1,0 \rangle$ y $\langle 0,1 \rangle$ en (x_0, y_0) de $z = f(x,y)$.

ii) Si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x,y) - P_T(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right| < \varepsilon$$

Si $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, donde $P_T(x,y)$ es el plano que determinan las rectas del inciso i.

Si una superficie $z = f(x,y)$ tiene un plano tangente $P_T(x,y)$ en un punto P de ella se dirá que la función $z = f(x,y)$ es derivable en (x_0, y_0) , también se dirá que $P_T(x,y)$ es la mejor aproximación lineal de $z = f(x,y)$ cerca de (x_0, y_0) ; por último, así como en cálculo de una variable, si $y = mx + b$ es una recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$, se dice que m es la derivada de $y = f(x)$ en $x = x_0$, también diremos que si $z = ax + by + c$ es tangente a $z = f(x,y)$ en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ entonces diremos que $\langle a, b \rangle$ es la derivada de $z = f(x,y)$ en (x_0, y_0) .

COMENTARIO

En cálculo de una variable se dice que una recta tangente a una curva C en un punto P de C es, de todas las rectas que pasan por P , aquella que mejor aproxima a C cerca de P . Esta idea se precisa en la siguiente definición:

DEFINICION 1. Una recta L que pasa por $P(x_0, f(x_0))$ se llama recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en P si L da la mejor aproximación lineal a $y = f(x)$ cerca de P . Más precisamente, una recta $L = L(x)$ que pasa por P es una recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en P si dada cualquier otra recta $k = k(x)$ que pasa por P , existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L(x)| \leq |f(x) - k(x)|$ si $|x - x_0| < \delta$.

Otra manera de definir recta tangente es la siguiente:

DEFINICION 2. Una recta $L(x)$ que pasa por $P(x_0, f(x_0))$ se llama recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en P si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$$

En algunos textos se da la definición 2 y no la 1 y a partir de la definición 2 dicen "a la recta $L(x)$ de la definición le llamamos la mejor aproximación lineal de $y = f(x)$ cerca de $x = x_0$ ", pero, aunque sean equivalentes las definiciones 1 y 2, a muchos estudiantes que manejan la definición 2 no les queda claro la idea de aproximación lineal que se da en la definición 1 porque es más elaborada, es decir la idea intuitiva de "mejor aproximación lineal" que tienen muchos estudiantes está más cercana a la definición 1.

La anterior discusión sugiere definir el concepto de plano tangente a una superficie $z = f(x,y)$ en un punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como la "mejor aproximación lineal a $z = f(x,y)$ cerca del punto (x_0, y_0) " de manera similar como se definió recta tangente en la definición 1 para luego ver que es equivalente a otra definición en términos del concepto de límite, similar a la definición de recta tangente de la definición 2.

Pero si se definiera plano tangente como: un plano $P_T(x,y)$ que pasa por $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se llama plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en P si dado cualquier otro plano $P_K(x,y)$ que pasa por P , existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - P_T(x,y)| \leq |f(x,y) - P_K(x,y)| \text{ si } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

encontraríamos que no sería equivalente la definición (9) porque, dada la superficie $z = x^2 + y^2$, su plano tangente (según definición (9)) $z = 0$ en $(0,0,0)$ y un plano que pase por $(0,0,0)$, por ejemplo $z = x$, NO se puede hallar un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 + y^2 - 0| \leq |x^2 + y^2 - x| \text{ si } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

(Se deja al lector la demostración)

Por lo tanto podemos concluir que no es posible, a partir de una definición de plano tangente similar a la definición 1 de recta tangente, demostrar que es equivalente a la definición de plano tangente establecida en (9).

APENDICE II
EJERCICIOS CAPITULO I

1. Grafique las siguientes ecuaciones

a) $z = x^2 + y^2$

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = 9 - x^2 - y^2$

e) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

c) $z = x^2 - y^2$

f) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

2. Graficar $z = xy$ y $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

3. Hallar el ángulo agudo que forma cada uno de los siguientes planos con el plano coordenado xy .

a) $z = x + 2y$

c) $z = 3x + y$

b) $z = x + y + 1$

d) $z = -3x - 4y$

4. Describir las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $z = \sin(x+2y)$

c) $z = (3x+y)^2$

b) $z = \sqrt{x + y + 1}$

d) $z = e^{-3x-4y}$

5. Describir las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $z = 1 - 2y + x^3$

c) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$

b) $z = y + \cos x$

d) $z = \ln(x^2 + y^2)$

6. Describir las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $z = 4x^2 + 9y^2$

d) $z^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

e) $z^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$

c) $z^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

f) $z = 4x^2 - y^2$

EJERCICIOS CAPITULO II

1. La función $z = f(x,y)$ está definida geoméricamente en la región $[4, 10] \times [3, 9]$. Ver. figura 125.

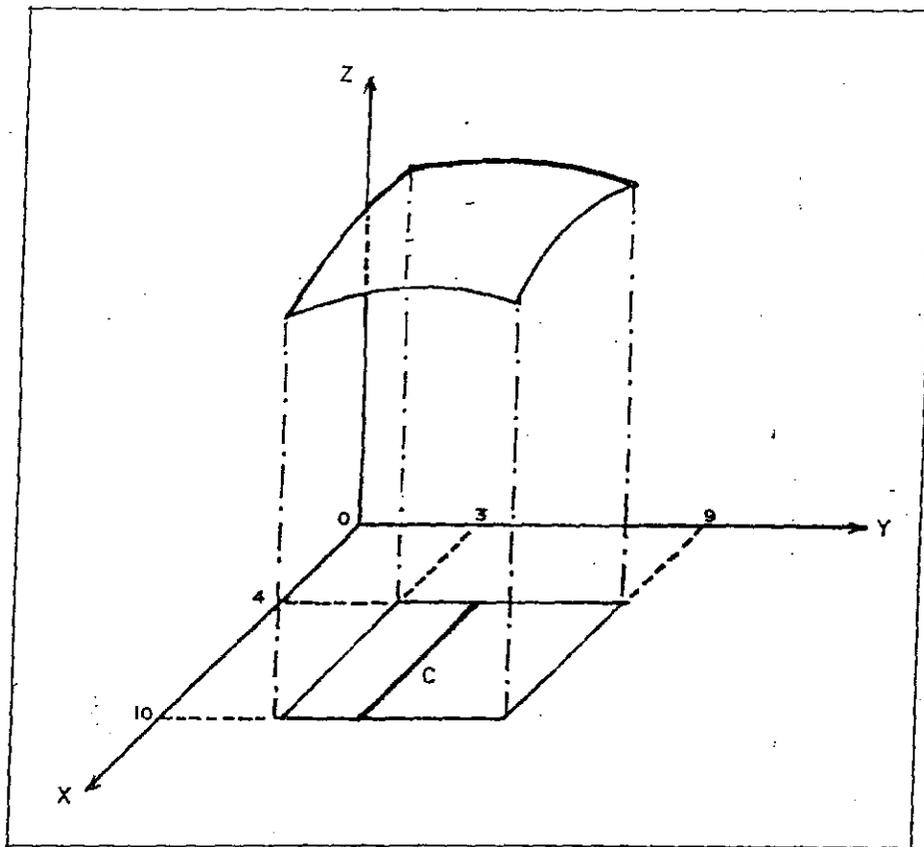


Figura 125

- a) Hallar (geoméricamente) la imagen bajo la función $z = f(x,y)$ del segmento de recta c . Denotémosla $f(c)$.
- b) Hallar la ecuación del plano que contiene a $f(c)$.
- c) Halle la ecuación de la curva $f(c)$

SOLUCION:
$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 5 \end{cases}$$

2.- La función $z = f(x,y)$ está definida geoméricamente. Ver figura 126.

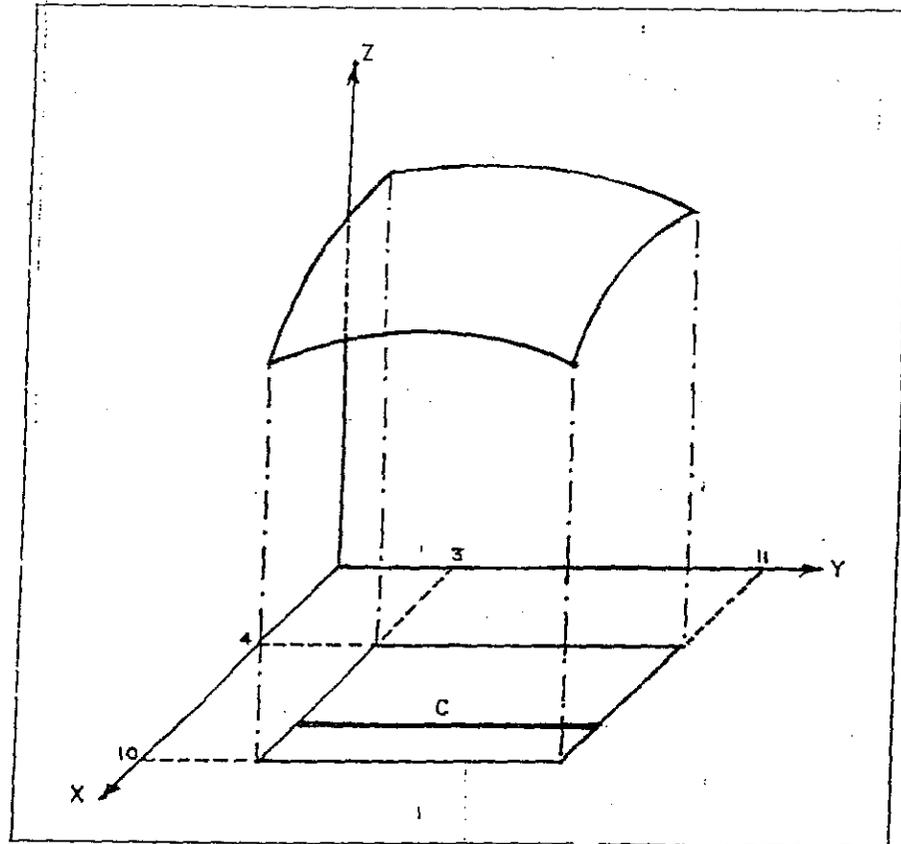
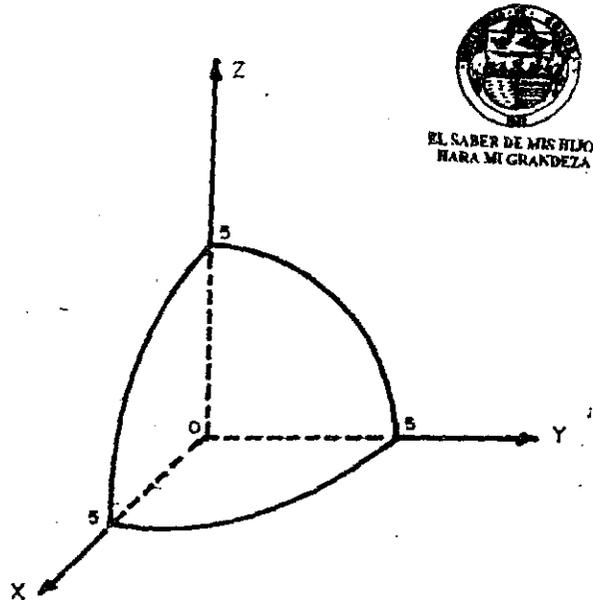


Figura 126

- Hallar la región del plano en la que está definida (geoméricamente).
- Hallar la imagen bajo la función $z = f(x,y)$ del segmento de recta c.
- Hallar la ecuación del plano que contiene a $f(c)$.
- Hallar la ecuación de la curva $f(c)$.

- 3.- a) Graficar $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, sobre la región del plano acotado por las curvas $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ y $y = \sqrt{25 - x^2}$. SOLUCION: Ver figura 127.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Figura 127

- b) Dibuje la curva c que resulta de la intersección de la superficie del inciso anterior con el plano $x = 2$.
- c) Localizar el punto $P(2, 3, 2\sqrt{3})$.
- d) Trazar la recta ℓ tangente a la curva c en el punto P .
- e) Hallar la pendiente de la recta ℓ .
- f) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta ℓ .
- 4.- a) Graficar $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ sobre la región del plano acotado por las curvas $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$, $y = \sqrt{25 - x^2}$.

- b) Dibuje la curva c que resulta de la intersección de la superficie $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ con el plano $y = 3$.
- c) Graficar el punto $P(2, 3, 2\sqrt{3})$.
- d) Trazar la recta ℓ tangente a la curva c en el punto P .
- e) Hallar la pendiente de la recta ℓ .
- f) Hallar las ecuaciones paramétricas de ℓ .
5. - a) Graficar $z = 9 - x^2 - y^2$ sobre la región del plano acotado por las curvas $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$. Solución: Ver figura 128.

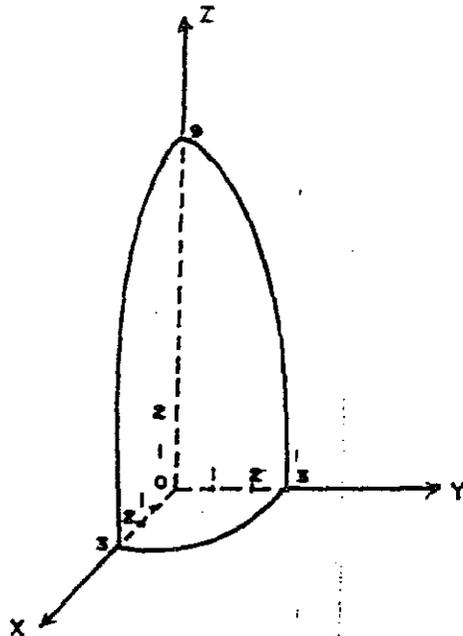


Figura 128

- b) Dibuje la curva c que resulta de la intersección de la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ con el plano $x = 1$.
- c) Graficar el punto $(1, 2, 4)$.

- d) Trazar la recta l tangente a la curva c en el punto P .
- e) Hallar la pendiente de la recta l .
- f) Hallar las ecuaciones paramétricas de l .

6. - Sea C la intersección de la gráfica de $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ con el plano $y = 2$. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta l tangente a C en el punto $(1, 2, \sqrt{11})$. Dibuje la superficie (la parte que está en el primer octante), C y l .
7. Dada la curva $\begin{cases} z = x^2 + 4y \\ x = -1 \end{cases}$, Hallar $\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1)$. ¿Qué significa geoméricamente hallar $\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1)$?
8. - Dé una definición aritmética de $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ si $z = f(x, y)$, que sea congruente con el significado geométrico que tiene. Hacer lo mismo para $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.
9. - El volumen V , de un cilindro circular recto está dado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura.
- a) Encontrar una fórmula para la razón de cambio instantánea de V con respecto a r si h permanece constante.
 - b) Encontrar una fórmula para la razón de cambio instantánea de V con respecto a h si r permanece constante.
 - c) Supóngase que h tiene un valor constante de 4 pulgadas y que r varía. Encontrar la razón de cambio instantánea de V con respecto a r cuando $r = 6$ pulgadas.
 - d) Supóngase que r tiene un valor constante de 8 pulgadas y que h varía. Encontrar la razón de cambio instantánea de V con respecto a h cuando $h = 10$ pulgadas.
10. - Una placa de metal caliente se sitúa sobre un plano xy . La temperatura en el punto (x, y) está dada por $T = 10(x^2 + y^2)^2$. Calcule la razón de cambio instantánea de T con respecto a la distancia, en el punto $(1, 2)$ si empezamos a movernos
- a) En la dirección del eje x ;
 - b) En la dirección del eje y . Ver figura 129.



EL SABER DE MIS HI
HARA LO GRANDEZ
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

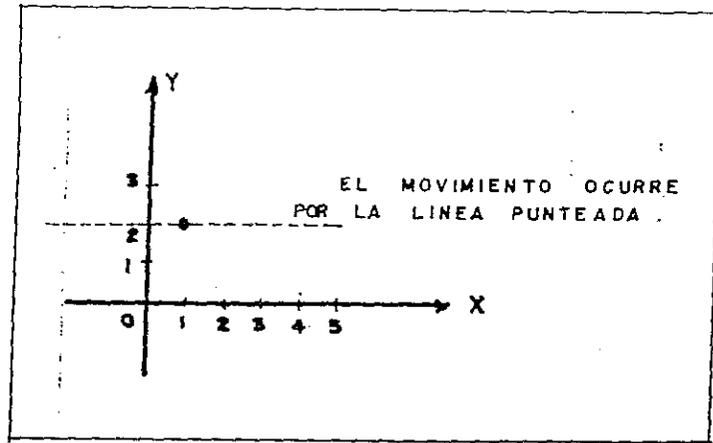


Figura 129

11. - Recordemos de la física o de la química la fórmula $PV = nRT$, que relaciona la presión P , el volumen V y la temperatura T de un gas ideal dentro de un cilindro. Los números n y R son constantes físicas, fijas en toda nuestra discusión. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la presión a medida que aumenta el volumen, suponiendo que la temperatura se mantiene fija, digamos $T = T_0 > 0$?

[interpretamos el resultado de la siguiente manera:

Ya que n , R , T_0 y V^2 son positivas, $\frac{\partial P}{\partial V}(V, T_0)$ es negativo para cada V . Por consiguiente, la razón de cambio de la presión con respecto al volumen (en una temperatura fija) es negativa; es decir, la presión disminuye a medida que el volumen aumenta].

Demuestre que para un volumen fijo V_0 , la presión aumenta a medida que la temperatura aumenta calculando $\frac{\partial P}{\partial T}(V_0, T)$ y verificando que es positiva.

12. - a) Si $u(x, t)$ denota el desplazamiento, digamos en centímetros, de una cuerda que vibra en un punto x de la cuerda en el

momento t . ¿Cómo se interpretarían físicamente las funciones $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right)$ y $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$?

b) Sea $u(x,t) = 3\sin 2x \cos 2\pi t$ el desplazamiento de una cuerda vibrante de longitud π estirada en $x = 0$ y $x = \pi$. ¿Qué puede deducirse acerca de las puntas de la cuerda? ¿Cuál es la posición inicial de la cuerda? ¿Cuál es la velocidad inicial de cada punto de la cuerda? ¿Cuál es la velocidad en $x = \frac{\pi}{4}$ para $t = 3$? ¿Cuál es la pendiente de la cuerda en $x = \frac{\pi}{4}$ para $t = 3$? Hacer dibujos mostrando la posición de la cuerda en $t = 0$, $t = 1/4$, $t = 1/2$ y $t = 3$.

13. - a) Graficar $\sqrt{25 - x^2 - y^2}$, sobre la región del plano acotado por las curvas $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ y $y = \sqrt{25 - x^2}$.

b) Dibuje las curvas $C_1: \begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \\ x = 2 \end{cases}$ y $C_2: \begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \\ y = 3 \end{cases}$

c) Dibuje la recta ℓ_1 tangente a C_1 en el punto $P(2, 3, 2\sqrt{3})$

d) Dibuje la recta ℓ_2 tangente a C_2 en el punto $P(2, 3, 2\sqrt{3})$

e) Hallar las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .

f) Halle las ecuaciones paramétricas de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .

g) Grafique el plano tangente a la superficie $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ en el punto $(2, 3, 2\sqrt{3})$.

h) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

14. - a) Grafique la parte del elipsoide $3x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 24$ que está contenida en el primer octante. Denotémosla con la letra S .

b) Dibuje la curva C_1 que se obtiene por la intersección de S con el plano $x = 2$.

c) Dibuje la curva C_2 que se obtiene por la intersección de S con el plano $y = 1$.

- d) Dibuje la recta l_1 que es tangente a C_1 en el punto $(2,1,1)$.
- e) Dibuje la recta l_2 que es tangente a C_2 en el punto $(2,1,1)$.
- f) Halle las pendientes de las rectas l_1 y l_2 .
- g) Halle las ecuaciones paramétricas de las rectas l_1 y l_2 .
- h) Dibuje el plano T tangente a S en $(2,1,1)$.
- i) Hallar un vector normal al plano T.
- j) Hallar la ecuación del plano T.

15. - La superficie $z = f(x,y)$ está definida geoméricamente en una región R del plano xy. Ver figura 130.

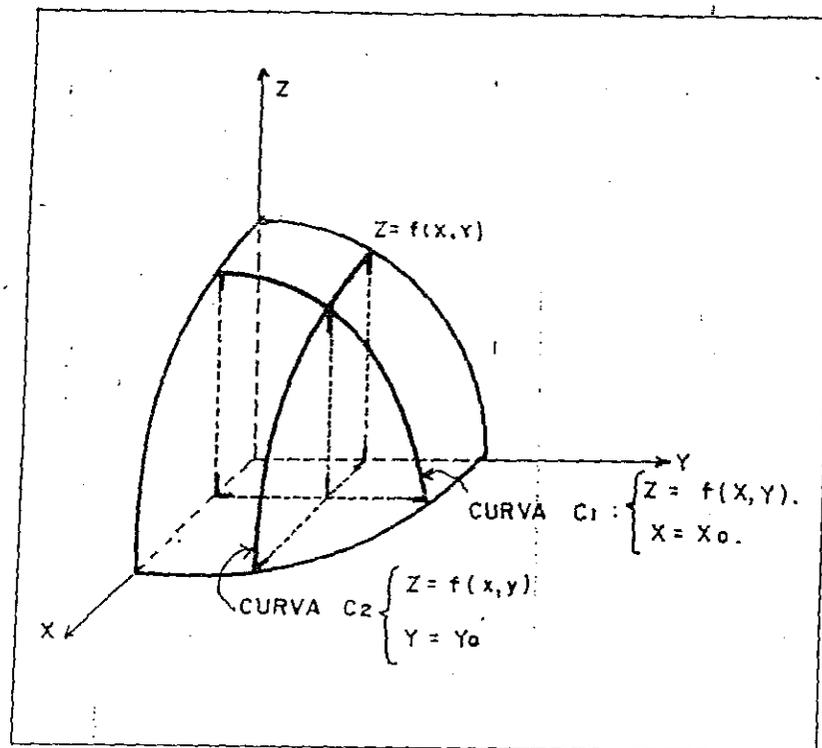


Figura 130

- a) Hallar las coordenadas del punto P que resulta de la intersección de C_1 y C_2 . Solución: $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- b) Dibuje la recta ℓ_1 tangente a C_1 en P.
 c) Dibuje la recta ℓ_2 tangente a C_2 en P.
 d) Hallar la pendiente de la recta ℓ_1 . Solución: $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.
 e) Hallar la pendiente de la recta ℓ_2 .
 f) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta ℓ_1 .
 Solución: $x = x_0$, $y = t + y_0$

$$z = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)t + f(x_0, y_0)$$

- g) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta ℓ_2
 h) Dibujar el plano tangente T a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
 i) Hallar un vector normal al plano T.
 j) Hallar la ecuación del plano t
 Solución: $z = \frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0) + f(x_0, y_0)$.

16. - Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies.

- a) $z = 2x^2 + 3y^2$ en $(1, 2, 14)$
 b) $z = 4x^2 + 6y^2$ en $(1, -1, 10)$
 c) $z = 4x^2 - 9y^2$ en $(2, -1, 7)$
 d) $3x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 24$ en $(2, 1, -1)$
 e) $z = 3\text{sen}(x-2y)$ en $(\pi, \frac{\pi}{4}, 3)$

17. - Calcular dz para cada una de las siguientes funciones:

- a) $z = x^2 + 2xy - y^2$
 b) $z = \pi r^2 h$
 c) $z = \text{Ln}(x^2 + y^2)$
 d) $z = \text{sen}x \text{sen}y$
 e) $z = e^{xy}$

- 19.- Calcular Δf y df para los datos $f, x, y, \Delta x$ y Δy indicados.
- $f(x, y) = xy, x = 2; y = 3, \Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$
 - $f(x, y) = 2x + 3y, x = 3, y = 4, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.3$
 - $f(x, y) = \frac{x}{y}, x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$
 - $f(x, y) = x\sqrt{y}, x = 1, y = 4, \Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$
- 20.- Sea $f(x, y) = 3x^2 - xy$. Encuentre la diferencial df y úsela para estimar el cambio en f cuando (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.01, 1.98)$.
- 21.- Use diferenciales para estimar $\sqrt[3]{26.98} \sqrt{36.04}$.
- 22.- Hallar la longitud del segmento de la recta $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ comprendido entre la superficie $z = x^2 + y^2$ y su plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.
- 23.- Estimar el error máximo que se puede cometer al medir las cantidades que se indican
- $x^3 y^2$
 - x^3 / y^2
 - $x^5 y$
- Si x se mide con un error posible de un 3 por 100 y y con uno de un 4 por 100.
- 24.- Las dimensiones interiores de una caja rectangular sin tapa, construida de aluminio, son 3, 4 y 5 cm. Use diferenciales para encontrar el valor aproximado del volumen del material necesario para construir una caja, si el grosor de las paredes y el fondo es de 0.05 cm.
- 25.- Si cada una de las dimensiones de una caja rectangular se miden con un error que no excede al 2%. ¿Cuál es el porcentaje de error aproximado máximo en el valor del volumen?

26. - Dibuje en el plano $t - z'$ la curva que resulta de la intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 2x$. El sistema de ejes $t - z'$ está definido como sigue: que el origen sea el punto $(0,0,0)$; que el eje z' coincida con el eje z , que el eje t coincida con la intersección del plano coordenado xy con el plano $y = 2x$ y que el punto $(1,2,0)$ esté en la dirección positiva del eje t .

27. - Dibuje en el plano $t-z'$ la curva que resulta de la intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 2x + 1$. El sistema de ejes $t - z'$ está definido como sigue: que el punto $(0,1,0)$ sea el origen de los ejes t y z' , que el eje z' tenga la misma dirección que el eje z , que el eje t coincida con la intersección del plano coordenado xy con el plano $y = 2x + 1$ y que $(2,5,0)$ sea un punto en la dirección positiva del eje t .

28. - Dibuje en el plano $t - z'$ la curva

$$\begin{cases} z = 4x^2 + 9y^2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Origen de los ejes t y z' : $(3,2,0)$

Dirección de eje z' : la misma que la del vector k

Dirección del eje t : la misma que la del vector

$\langle -1, -1, 0 \rangle$

29. - Dibuje en el plano $t - z'$ la curva por $\begin{cases} z = xy \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

Origen de los ejes t y z' : $(1, -1, 0)$

Dirección del eje z' : la del vector k

Dirección del eje t : la del vector $\langle 1, -2, 0 \rangle$

30. - Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva del

a) Problema 26 en el punto $(1,2,5)$

b) Problema 26 en el punto $(2,4,20)$

c) Problema 27 en el punto $(2,5,29)$

d) Problema 27 en el punto $(0,1,1)$



EL SABER DE MIS DIAS
PARA MI GRANDEZA

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

- e) Problema 28 en el punto (3,2,72)
- f) Problema 29 en el punto (1,-1,-1)
- g) Problema 29 en el punto (1,-1,-1)
- h) Problema 29 en el punto (-3,7,-21)

COMENTARIO: En este problema usted encontró derivadas direccionales. Así, por ejemplo en el inciso e) encontró la derivada direccional $z = 4x^2 + 9y^2$ en el punto $P(3,2)$ en la dirección $\langle -1,1 \rangle$.

31.- Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $\begin{cases} z=f(x,y) \\ bx-ay+c=0 \end{cases}$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ [se supone que $bx_0 - ay_0 + c = 0$]; tomando en cuenta que la curva está en el plano $t - z'$ definido de la siguiente manera: el origen de los ejes t y z' es el punto $(x_0, y_0, 0)$, la dirección positiva del eje z' es la misma que la del vector k , la dirección positiva del eje t es la del vector $\langle a,b,0 \rangle$.

- a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $bx-ay+c = 0$, sabiendo que pasa por (x_0, y_0) y es paralela al vector $\langle a,b \rangle$.
- b) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\begin{cases} z=f(x,y) \\ bx-ay+c=0 \end{cases}$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, sabiendo que la curva está en el plano $t - z'$.
- d) Halle la pendiente de la recta tangente a la curva, sabiendo que la recta tangente está en el plano $t-z'$.

$$\text{Solución: } \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

COMENTARIO: En otras palabras, el problema puede ser planteado de la siguiente manera: hallar la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección $\langle a,b \rangle$.

32. - Use el resultado del problema anterior para hallar la derivada de f en el punto P y en la dirección indicada.

- a) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$; $P(3,-1)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$
b) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y - y^3$; $P(1,-2)$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$
c) $f(x,y) = x^2 \ln y$; $P(5, 1)$, $\vec{a} = -i + 4j$
d) $f(x,y) = x^2 \cos^2 y$; $P(2, \pi/4)$, $\vec{a} = \langle 5, 1 \rangle$
e) $f(x,y) = x e^{3y}$; $P(4, 0)$, $\vec{a} = \langle -1, 3 \rangle$

33. - Dibuje en un plano coordenado rectangular $t - f$ los valores que se asocian a cada punto $P(x,y,z)$ de la recta $\ell \subset \mathbb{R}^3$, definida por las ecuaciones paramétricas $x = 2t + 1$, $y = t - 2$, $z = 2t + 3$, bajo la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Que la dirección positiva del eje t , esté dada por el vector $\langle 2, 1, 2 \rangle$

34. - Halle la pendiente de la recta tangente a la curva cuando $t = 0$.

Ⓞ

COMENTARIO: En otras palabras usted encontró la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, en el punto $(1, -2, 3)$ en la dirección $\langle 2, 1, 2 \rangle$

35. - Hallar la derivada de f en el punto P y en la dirección indicada.

- a) $f(x,y,z) = xy^3z^2$; $P(2,-1,4)$, $\vec{a} = i + 2j - 3k$
b) $f(x,y,z) = x^2 + 3yz + 4xy$; $P(1,0,-5)$, $\vec{a} = 2i - 3j + k$
c) $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$, $P(-1,2,3)$; $\vec{a} = 3i + j - 5k$

36. - i) Un insecto está en el punto $A(1,2,7)$ del plano P , $z=2x+3y-1$. Sabemos que el plano P contiene un número infinito de rectas que pasan por A .

¿En qué dirección debe moverse el insecto para que:

- a) Esté ganando altura sobre la recta ℓ del plano P , que pasa por A y que tiene máxima pendiente?

- b) Esté perdiendo altura sobre la recta l del plano P , que pasa por A y que tiene máxima inclinación?
- c) Esté sobre una recta l del plano P , que pasa por A y tiene inclinación cero?
(Hay dos posibles direcciones)

ii) Hallar la tangente del ángulo agudo que forma la recta del inciso i) a) con el plano coordenado xy .

37. - i) Un insecto está en un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ del plano P , $z = ax + by + c$. Sabemos que el plano P contiene muchas rectas que pasan por A . Hallar la dirección en lo que debe moverse el insecto para que:

- a) Esté ganando altura sobre la recta l de P que pasa por A y que tiene máxima inclinación.
- b) Esté perdiendo altura sobre la recta l de P que pasó por A y que tiene máxima inclinación.
- c) Esté sobre una recta l del plano P que pasa por A de inclinación cero. (Hay dos posibles direcciones).

ii) Hallar la tangente del ángulo que forma la recta del inciso a) con el plano coordenado xy .

38. - Contestar las preguntas del problema 36 para los siguientes planos, dado el punto P .

- a) $z = 2x + 3y$, $P(1,1,5)$
- b) $z = -2x + 3y$, $P(1,1,1)$
- c) $z = 2x - 3y$, $P(1,1,-1)$
- d) $z = -2x - 3y$, $P(1,1,-5)$

39. - Un cuerpo está en el punto $(1,2,4)$ sobre el paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$. ¿En qué dirección debe moverse para caminar

- a) sobre la curva de máxima pendiente?
- b) Sobre la curva de mínima pendiente?

40. - Un cuerpo está en el punto $A(1, 2, 5)$ del plano P , $z = 5$. ¿En qué dirección debe moverse el objeto para que se mueva sobre la recta de

a) Máxima inclinación?

b) Mínima inclinación?

41. - Hallar el gradiente de la función $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 2, 4)$. Solución: $\nabla z = \langle -2, -4 \rangle$.

42. - Hallar el gradiente de $z = f(x, y)$ en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

43. - Hallar el gradiente de las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $z = 2x^2 + 3y^2$ en $P(1, 2, 14)$

b) $z = 4x^2 + 6y^2$ en $P(1, -1, 10)$

c) $z = 4x^2 - 9y^2$ en $P(2, -1, 7)$

d) $z = 3\text{sen}(x-2y)$ en $P(\pi, \frac{\pi}{4}, 3)$

e) $z = 4 + 2x - 4y - x^2 - y^2$ en $P(1, -2, 9)$

f) $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$ en $P(2, 3, 0)$

44. - Una placá metálica se coloca en un plano xy de tal manera que la temperatura T en el punto (x, y) resulta ser inversamente proporcional a la distancia de P al origen. la temperatura en $P(3, 4)$ es 100° . Calcula la razón de cambio de T en P en la dirección $i + j$ ¿En qué dirección a partir de P crece más rápidamente T ? ¿En qué dirección la razón de cambio es 0?

45. - La función $z = 3x - y + 4$ se evalúa en la región R del plano xy definida por las siguientes desigualdades: $y \leq x$, $y \leq (-1/2)x + 6$ y $y \geq 0$. ¿En qué punto de R , alcanza z su valor máximo?

SUGERENCIA: Halle el gradiente de z , dibuje algunas curvas de nivel de z y dibuje la región R .

46. - La función $z = 2x + y + 2$ se evalúa en la región R definida por las siguientes desigualdades: $y \leq 2x + 1$, $y \leq x + 5$, $y \leq -3x + 33$, $y \geq -5x + 15$ y $y \geq 0$. ¿En qué punto de R alcanza z su valor máximo?

47. - Sea $w = u^2 \operatorname{sen} v$, $u = x^2 - 2y^3$, $v = xy^2$. Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

48. - Sea $w = u^3 + u^2 v - 3v$, $u = \operatorname{sen} xy$, $v = y \ln x$. Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

49. - Sea $r = x^2 + 3y - xy^2$, $x = u + v \operatorname{Ln} t$, $y = v^2 - \operatorname{Ln} ut$. Hallar $\frac{\partial r}{\partial u}$, $\frac{\partial r}{\partial v}$ y $\frac{\partial r}{\partial t}$.

50. - Sea $w = x^3 - y^3$, $x = \frac{1}{t+1}$, $y = \frac{t}{t+1}$. Hallar $\frac{dw}{dt}$.

51. - Sea $w = x^2 y^3 z^4$, $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = 5t + 4$. Hallar $\frac{dw}{dt}$.

52. - Demuestre que si $w = f(x, y)$ y $x = e^r \cos \theta$, $y = e^r \operatorname{sen} \theta$, entonces:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right).$$

53. - Demuestre que si $w = f(x^2 + y^2)$ entonces $y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$. (Sugerencia: defina $u = x^2 + y^2$).

54. - Sea $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

55. - Demuestre que si $w = f(u, v)$ $u = g(x, y)$ y $v = k(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

56. - Sea $z = f(x, y)$, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$. Hallar $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{d^2 z}{dt^2}$.

57. - El radio r de un cono está decreciendo a razón de 2 pies/seg, y la altura h está aumentando a razón de 3 pies/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando el volumen cuando $r = 6$ pies y $h = 10$ pies?
58. - Dos carros salen de un mismo punto en el mismo instante. Uno viaja directamente hacia el oriente a 60 km/h, mientras que el otro viaja en forma directa hacia el norte a 45 km/h. Después de 4 horas ¿a qué velocidad está aumentando la distancia entre los carros?
59. - La longitud y la anchura de un prisma rectangular decrecen a razón de 2 unidades/seg y 3 unidades/seg, respectivamente. ¿A qué velocidad debe aumentar la altura si el volumen permanece constante?
60. - ¿A qué velocidad está aumentando el área de un triángulo si la altura se incrementa a razón de 3 cm/seg, mientras que la base aumenta a razón de 4 cm/seg?
61. - Dada $y = f(x)$ en forma implícita por $x^3 - 3xy^2 + y^3 + 3 = 0$.
- Hallar $\frac{dy}{dx}$
 - Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en $(1, 2)$.
62. - Dada $F(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 + 3$.
Hallar $\nabla F(x, y)$ y $\nabla F(1, 2)$.
¿Se puede usar el concepto de gradiente, para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva $g(x, y) = 0$ en un punto P de ella?
63. - Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el punto $P(x_0, y_0)$.
64. - a) Use la regla de la cadena para hallar la derivada direccional de $w = f(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección $\langle a, b, c \rangle$ (caso general).

- b) Use el resultado del inciso anterior para hallar la derivada direccional de $w = f(x,y,z)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$ (caso particular).
- c) Escribir las derivadas direccionales que encontró en los incisos a) y b), como el producto punto de dos vectores \vec{P} y \vec{Q} , donde el vector $\vec{P} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$.
- d) Utilice el resultado del inciso c) para escribir a $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ en la forma $||\vec{P}|| ||\vec{Q}|| \cos \alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores \vec{P} y \vec{Q} .
- e) Lo que encontró en el inciso d) fue las magnitudes de las derivadas direccionales en el caso general $\langle a, b, c \rangle$ y en el caso particular $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$. Relacione estas magnitudes por medio del símbolo menor o igual (\leq). ¿En qué dirección la derivada direccional es máxima? ¿En qué dirección la derivada direccional es mínima?
- f) Halle la derivada direccional en la dirección $K \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$, $K > 0$.
- g) Halle las magnitudes de los vectores $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$ y $K \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$ ($K > 0$). Relacione las magnitudes de estos vectores con la derivada direccional de w en P_0 en la dirección $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right\rangle$.

COMENTARIO: Los resultados de los incisos e) y g) y la definición de gradiente para las funciones de la forma $z = f(x,y)$, nos permiten ver que es razonable definir al vector $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$ como el gradiente de una función $w = f(x,y,z)$. La abreviatura para $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$ será ∇f .

65. - Resolver nuevamente el problema 35.

66. - El potencial eléctrico V en el punto $P(x,y,z)$ en un sistema coordenado rectangular está dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Calcule la razón de cambio de V en $P(2,-1,3)$ en la dirección de P al origen. Encuentre la dirección en la que la razón de crecimiento de V es máxima en P . ¿Cuál es la razón de crecimiento máximo?
67. - Un objeto está situado en un sistema coordenado rectangular de tal manera que la temperatura T en el punto $P(x,y,z)$ está dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$. Calcule la razón de cambio de T en el punto $P(4,-2,1)$ en la dirección del vector $2i + 6j - 3k$. ¿En qué dirección a partir de P aumenta más rápidamente T ? ¿Cuál es la razón de cambio máxima en P ?
68. - Dada $z = f(x,y)$ en forma implícita por $x^3z - x^2y + z^3 - 28 = 0$
- Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$
 - Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2,3)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2,3)$
 - Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z(x,y)$ en $(1,2,3)$.
69. - Dado $w = x^3z - x^2y + z^3 - 28$, hallar $\nabla w(x,y,z)$ y $\nabla w(1,2,3)$. ¿Se puede usar el concepto de gradiente para hallar la ecuación de un plano tangente a una superficie $w = (x,y,z) = 0$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$?
70. - Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $Ax^2 + Bx'^2 + Cy^2 + Dxy' + Exy + Fxz + Gyz + Hx + Jy + Kz + L = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.
71. - Sea $z = x^2 + y^2$
- Halle la ecuación de la curva de nivel de z que pasa por $(3,4)$
 - Dibuje la curva de nivel de z que pasa por el punto $(3,4)$.
 - Halle la pendiente de la curva de nivel de z en $(3,4)$.
 - Halle el gradiente de z en $(3,4)$
 - ¿Qué se puede decir del vector gradiente de z en $(3,4)$ y de la curva de nivel de z que pasa por $(3,4)$?

72. - Sea $z = f(x, y)$

a) Halle la ecuación de la curva de nivel de z que pasa por (x_0, y_0) . [Recuerde que las curvas de nivel de $z = f(x, y)$ se dibujan en el plano xy].

SOLUCION: $f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

b) Halle la pendiente de la curva de nivel $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0) .

c) Halle un vector que sea paralelo a la recta que es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ en el punto (x_0, y_0) .

d) Hallar el gradiente de z en (x_0, y_0) .

e) Hallar el producto punto de los vectores obtenidos en c) y d).

f) ¿Qué se puede decir de la curva de nivel $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ y el gradiente de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) ?

73. - Sea $W = x^2 + y^2 + z^2$

a) Dibuje la superficie de nivel de W que pasa por $(1, 2, 4)$.

b) Halle la ecuación de la superficie de nivel de W que pasa por $(1, 2, 4)$.

c) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $x^2 + y^2 + z = 9$, en el punto $(1, 2, 4)$.

d) Halle el gradiente de W en $(1, 2, 4)$

e) ¿Qué se puede decir del vector gradiente de W en $(1, 2, 4)$ y de la superficie de nivel de W que pasa por $(1, 2, 4)$?

74. - Sea $W = f(x, y, z)$

a) Halle la ecuación de la superficie de nivel de W que pasa por (x_0, y_0, z_0) .

b) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) .

c) Halle el gradiente de W en (x_0, y_0, z_0) .

d) ¿Qué se puede decir del vector gradiente de W en (x_0, y_0, z_0) y de la superficie de nivel de W que pasa por (x_0, y_0, z_0) ?

75. - En cada inciso dibuje la curva de nivel C de f que pasa por el punto P , dibuje la recta tangente a la curva de nivel C que pasa por P y dibuje también un vector (con punto inicial en P) correspondiente al gradiente de f en P .

a) $f(x,y) = y^2 - x^2$; $P(2,1)$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $P(3,4)$

c) $f(x,y) = x^2 - y$; $P(-3,5)$

d) $f(x,y) = xy$; $P(3,2)$.

76. - Halle los puntos críticos de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

b) $f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$

c) $f(x,y) = x^2 + xy + 3y + 2x + 3$

d) $f(x,y) = x^6 + y^6$

e) $f(x,y) = e^x \sin y$

f) $f(x,y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$

g) $f(x,y) = yx^2 + y^3 - 4x^2$

h) $f(x,y) = x^a - y^b$

i) $f(x,y) = 1 - x^4 - y^4$

j) $f(x,y) = x + 3y + 5$

77. - Clasifique cada uno de los puntos críticos del problema 76 como: máximo, mínimo, ni máximo ni mínimo de la función correspondiente. SUGERENCIA: halle d^2z/dt^2 , en la dirección $\langle a,b \rangle$ usando la regla de la cadena, donde $z = f(x,y)$, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ y (x_0, y_0) es punto crítico.

78.- Sea $z = f(x,y)$ una superficie que tiene planos tangentes en todos sus puntos. Sea $\langle a,b \rangle$ un vector unitario (lo que implica que a y b no sean simultáneamente cero). Suponga que en (x_0, y_0) , $z = f(x,y)$ tiene un punto crítico, es decir $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

a) Si $x = x_0 + at$ y $y = y_0 + bt$, halle $\frac{dz}{dt}$ y valúela en $t = 0$.

b) Halle $\frac{d^2z}{dt^2}$ y valúe $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $t = 0$.

$$\text{SOLUCION: } \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \right] a^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right] ab + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right] ab +$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] b^2.$$

Como las funciones $z = f(x,y)$ que vamos a manejar son tales

que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, podemos escribir la solución en la siguiente forma:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \right] a^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right] ab + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] b^2.$$

Acordemos en escribir A en lugar de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, B

en lugar de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ y C en lugar de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ para

simplificar; entonces el valor de la segunda derivada en $t = 0$ se puede escribir como:

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2$$

Aquí A , B , y C representan a números fijos y a y b variables tales que $a^2 + b^2 = 1$.

c) Demuestre que $Aa^2 + 2Bab + Cb^2 > 0$, si $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$. A partir de este resultado ¿Qué puede decir de $f(x_0, y_0)$?

d) Demuestre que $Aa^2 + 2Bab + Cb^2 < 0$, si $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$. A partir de este resultado, ¿Qué puede decir de $f(x_0, y_0)$?

e) Demuestre que $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ toma valores de distintos signos si $A > 0$ y $AC - B^2 < 0$.

SUGERENCIA: Tome los vectores $\langle 1, 0 \rangle$ y $\left\langle \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rangle$

$$\text{que } Aa^2 + 2Bab + Cb^2 = A\left(a + \frac{B}{A}b\right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A}\right)b^2$$

f) Demuestre que $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ toma valores de distintos signos si $A < 0$ y $AC - B^2 < 0$.

SUGERENCIA: Tome los vectores

$$\langle 1, 0 \rangle \text{ y } \left\langle \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rangle$$

g) Demuestre que $Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ toma valores de distintos signos si $A = 0$ y $AC - B^2 < 0$.

[Fijese que $A = 0$ y $AC - B^2 < 0 \rightarrow B \neq 0$]

SUGERENCIA: Tome los vectores.

$$\left\langle \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}} \right\rangle \text{ y } \left\langle \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \frac{-B}{\sqrt{B^2 + C^2}} \right\rangle \text{ para } C \neq 0 \text{ y}$$

para $C \neq 0$ y

$$\langle \cos 45^\circ, \sin 45^\circ \rangle \text{ y } \langle \cos 135^\circ, \sin 135^\circ \rangle \text{ para } C = 0.$$

h) Basándose en los resultados de los incisos e), f) y g), ¿qué puede decir de $f(x_0, y_0)$ si $AC - B^2 < 0$, sin importar qué valor real tome A ?

i) Demuestre que si $AC - B^2 = 0$, no se puede asegurar que $f(x_0, y_0)$ sea un mínimo relativo, ni que sea un máximo relativo, ni que sea un punto silla.

SUGERENCIA: Utilice las funciones $z = x^4 + y^4$, $z = 1 - x^4 - y^4$,
 $z = x^4 - y^4$.

79. - En cada uno de los siguientes problemas, escriba solamente la función de dos variables que se necesita estudiar para resolver el mismo.

a) Hallar el punto del plano $z = ax + by + c$, que está más cercano al origen.

- b) Descomponer un número a en tres sumandos positivos de modo que el producto de éstos tenga un valor máximo.
- c) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una caja rectangular, abierta en su parte superior, con volumen fijo V para que el área de su superficie sea mínima?
- d) Hallar las dimensiones de una caja rectangular, abierta en su parte superior, con superficie A fija, para que su volumen sea máximo.
- e) Hallar las dimensiones de una caja rectangular de superficie total A fija, para que su volumen sea máximo.
- f) Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los planos coordenados, que se puede inscribir en una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- g) Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los coordenados, que se puede inscribir en el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.
- h) Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los planos coordenados, un vértice en el origen y otro vértice en la parte del plano $x/a + y/b + z/c = 1$, ($a, b, c > 0$) que se encuentra en el primer octante.

80.- Halle los puntos críticos de las funciones obtenidas en el problema 79.

81.- Determine la naturaleza de los puntos críticos de las funciones obtenidas en el problema 79.

82.- Halle el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x, y) = xy$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 8$.

- a) Utilizando las propiedades geométricas de las curvas de nivel de $f(x, y)$ y de la circunferencia.
- b) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

83.- En cada uno de los siguientes incisos. hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $z = x^2 + y^2$, si el dominio de z se restringe a la curva dada geoméricamente. Ver figura 131.

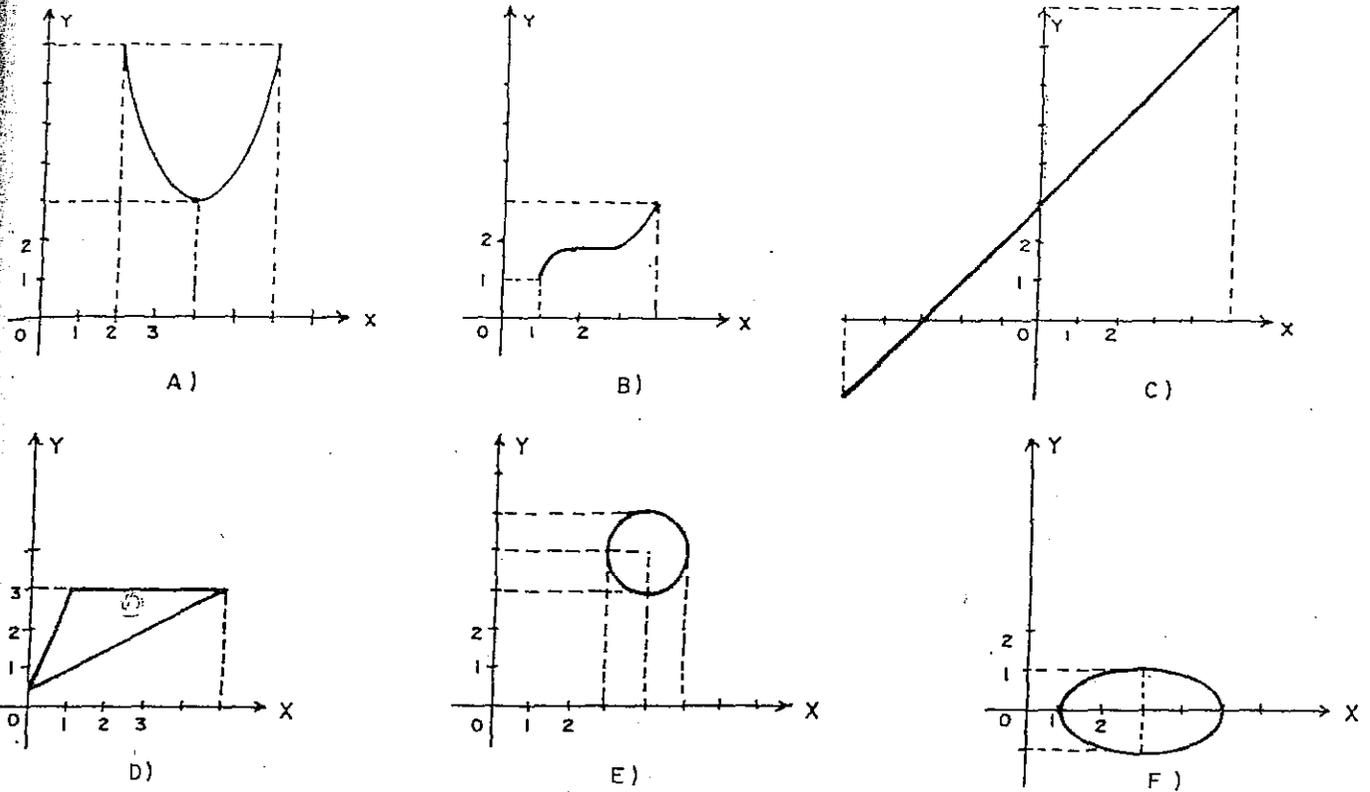


Figura 131

84.- Resolver el problema 83 para $z = \text{Log}_2(x^2 + y^2)$.

85.- En cada uno de los siguientes incisos, hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $z = 2x + y + 1$, si el dominio se restringe a la curva dada geoméricamente. Ver figura 132.

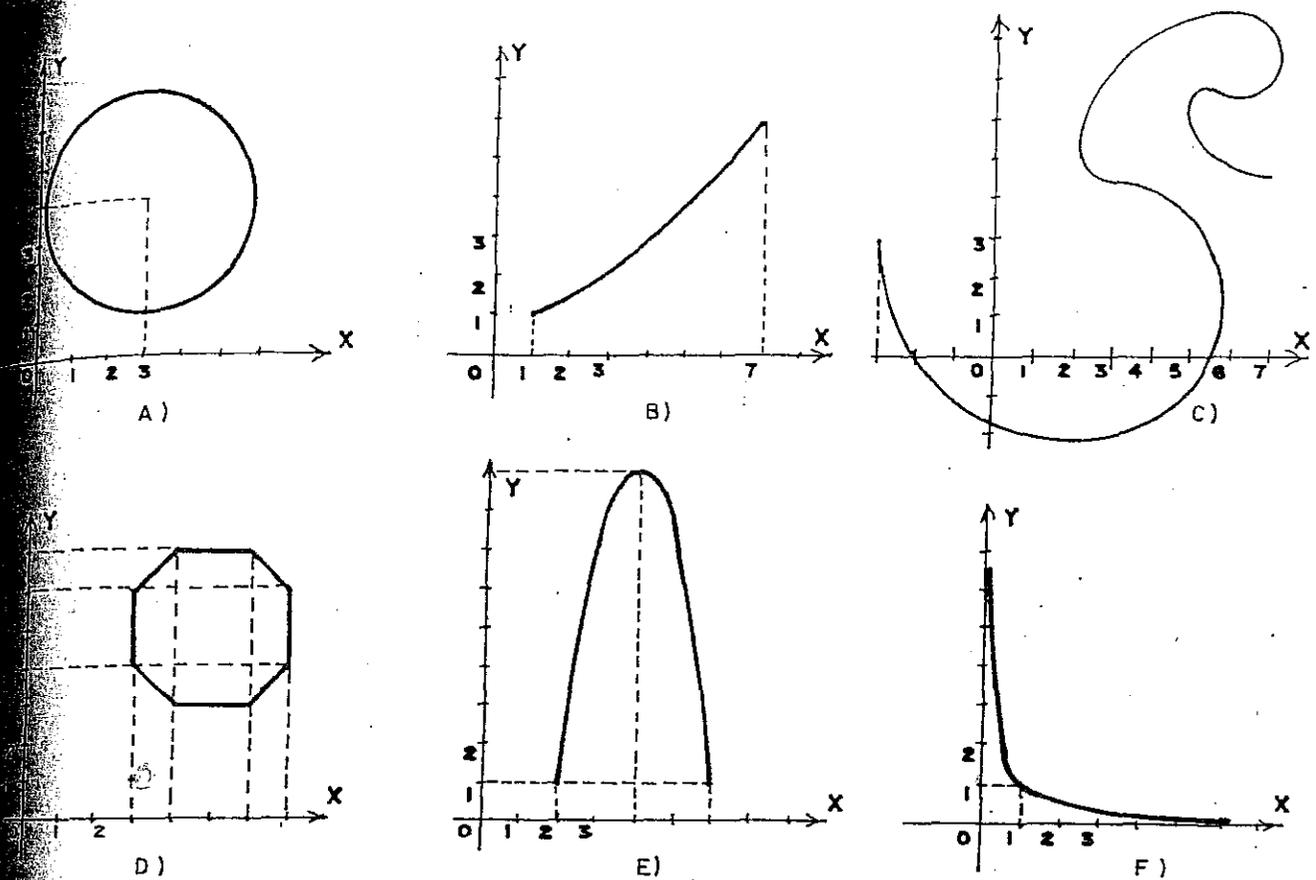


Figura 132

6) Resolver el problema 85 para $z = \sqrt{2x + y + 1}$.

7) Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $z = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$

a) Interprete geoméricamente este problema.

b) Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 8$ halle $F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ donde λ es un número real distinto de cero.

c) Halle $F(x_0, y_0)$, si se sabe que (x_0, y_0) es un punto que pertenece a la curva en el plano xy , $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$.

d) Halle la pareja (x, y) en la que $F(x, y) = f(x, y) + 4g(x, y)$ tiene un extremo relativo. ¿La pareja que encontró satisface la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$?

- e) Halle la pareja (x,y) en la que $F(x,y) = f(x,y) + 2g(x,y)$ tiene un extremo relativo. ¿La pareja que encontró satisface la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$?
- f) Halle la pareja (x,y) en la que $F(x,y) = f(x,y) + (-\frac{1}{2})g(x,y)$ tiene un extremo relativo. ¿La pareja que encontró satisface la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$?
- g) Halle la pareja (x,y) en la que $F(x,y) = f(x,y) + (-3/2)g(x,y)$ tiene un extremo relativo. ¿La pareja que encontró satisface la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$?
- h) ¿Para qué valores de λ del conjunto $\{-3/2, -1/2, 2, 4\}$ se cumple que el extremo relativo hallado, satisface la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$?
- i) En el inciso f) se encontró que en $(-1, -1)$, $F(x,y) = f(x,y) + (-1/2)g(x,y)$ tiene un mínimo relativo, esto significa que existe un círculo con centro en $(-1, -1)$, tal que la desigualdad $F(-1, -1) \leq F(a,b)$ se satisface para todos los puntos (a,b) del interior del círculo con centro en $(-1, -1)$, en particular la desigualdad se satisface para los puntos (a,b) de la curva $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ que están en el interior del círculo con centro en $(-1, -1)$ (ver figura 133.). Pero $F(-1, -1) = f(-1, -1) + (-1/2)g(-1, -1) = f(-1, -1) + (-1/2) \cdot 0 = f(-1, -1)$, también $F(a,b) = f(a,b)$ si

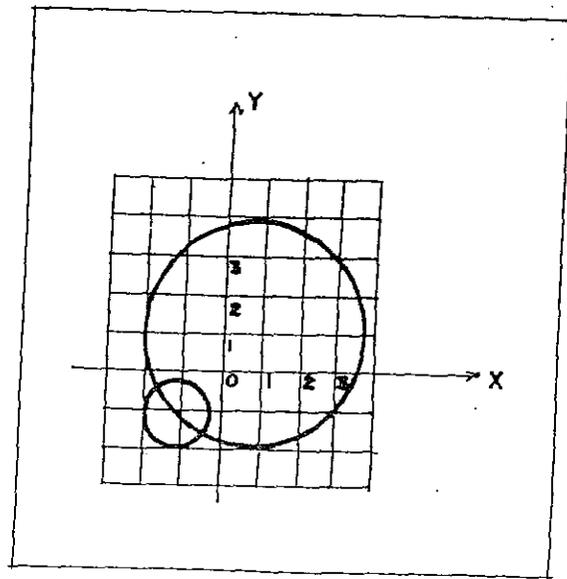


Figura 133

(a,b) es un punto que cumple con el par de requisitos de estar en el interior del círculo con centro en (-1,-1) y ser un punto que satisface la ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$. Por lo tanto $f(-1,-1) \leq f(a,b)$ para todos los puntos (a,b) que cumplen con el par de requisitos antes mencionados. esto significa que $f(-1,-1)$ es un mínimo relativo de $f(x,y)$ sujeta a la restricción $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$.

j) En el inciso g) se encontró que en (3,3), la función $F(x,y) = f(x,y) + (-3/2)g(x,y)$, tiene un máximo relativo, dé argumentos para justificar que $f(3,3)$ es un máximo relativo para (x,y) restringida a $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$.

88.- Suponga que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones diferenciables y que hemos encontrado un número λ distinto de cero tal que $F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) con $g(x_0, y_0) = 0$. Dé argumentos para justificar que $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo para $f(x,y)$ restringido a $g(x,y) = 0$.

89.- Demostrar que $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ si x_1, x_2, x_3 son números reales positivos.

SUGERENCIA: Halle el valor máximo de $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ sujeto a la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = a$.

90.- Demostrar que $\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} \geq \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right]^2$ si x_1, x_2, x_3 son números reales positivos.

91.- Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver los problemas 80 y 81.

92. Sea C el arco contenido en el primer octante de la curva $\begin{cases} 2z = 16 - x^2 - y^2 \\ x+y = 4 \end{cases}$. Encuentre los puntos de C

a) más cercano, b) más alejado del origen. Calcule la distancia mínima y la distancia máxima del origen a C

EJERCICIOS CAPITULO III

1. En cada uno de los ejercicios del a) al g), dibuje la gráfica de la curva C trazada por el punto extremo del vector de posición $\vec{r}(t)$ al variar t según se indica:
- a) $\vec{r}(t) = 2i + tj; t \geq 0$
 - b) $\vec{r}(t) = \langle 3t - 4, 6t + 2 \rangle; t \geq 0$
 - c) $\vec{r}(t) = \langle \cos, \sin \rangle; 0 \leq t \leq 2\pi$
 - d) $\vec{r}(t) = \langle 2\cos t, 5\sin t \rangle; 0 \leq t \leq 2\pi$
 - e) $\vec{r}(t) = \langle 1-t^3, t \rangle; t \geq 0$
 - f) $\vec{r}(t) = e^t \cos t i + e^t \sin t j; 0 \leq t \leq \pi$
 - g) $\vec{r}(t) = 2\cos ht i + 3\sin ht j; t \text{ en } \mathbb{R}.$
2. Encuentre las ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las curvas definidas en los siguientes incisos, en el punto correspondiente a $t = 1$.
- a) $\vec{r}(t) = \langle 4t^2 - 5, 2t + 3 \rangle; t \text{ en } \mathbb{R}$
 - b) $\vec{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle; t \text{ en } \mathbb{R}$
 - c) $\vec{r}(t) = \langle e^t, e^{-2t} \rangle; t \text{ en } \mathbb{R}$
 - d) $\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t}, 3t + 4 \rangle; t \geq 0$
 - e) $\vec{r}(t) = \langle 2\sin t, 3\cos t \rangle; 0 \leq t \leq 2\pi$
 - f) $\vec{r}(t) = \langle \cos t - 2, \sin t + 3 \rangle; 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. El movimiento de una partícula está descrito por el vector de posición dado abajo en donde t representa el tiempo. Encontrar la fórmula para la distancia viajada como una función del tiempo comenzando en $t = 0$. Halle también ds/dt .
- a) $\vec{r}(t) = 3t^2 i + 4t^2 j$
 - b) $\vec{r}(t) = 3\sin t i + 3\cos t j$
 - c) $\vec{r}(t) = (2t+1)i + (3t-2)j$

En cada uno de los ejercicios del a) al e), la posición de una partícula que se mueve en el plano está dada por $\vec{r}(t)$. Encuentre su velocidad, su aceleración y su rapidez en el tiempo t . Dibuje la trayectoria de la partícula junto con los vectores correspondientes a la velocidad y la aceleración en el tiempo t indicado.

a) $\vec{r}(t) = 2ti + (4t^2 + 1)j$, $t = 1$

b) $\vec{r}(t) = (4 - 9t^2)i + 3tj$, $t = 1$

c) $\vec{r}(t) = (2/t)i + (3/(t+1))j$, $t = 2$

d) $\vec{r}(t) = \text{sen } t i + 4\cos 2t j$, $t = \pi/6$.

e) $\vec{r}(t) = 2ti + e^{-t^2}j$, $t = 1$.

5. Encontrar en los ejercicios del a) al d), las ecuaciones paramétricas de las curvas usando la longitud de arco, S como parámetro. Usar el punto de la curva en el que $t = 0$ como punto de referencia.

a) $\vec{r}(t) = (3t-2)i + (4t+3)j$; t en \mathbb{R}

b) $\vec{r}(t) = (3\cos t)i + (3\text{sen } t)j$; $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\vec{r}(t) = (3 + \cos t)i + (2 + \text{sen } t)j$; $0 \leq t \leq 2\pi$

d) $\vec{r}(t) = (\frac{1}{3} t^3)i + (\frac{1}{2} t^2)j$; $t \geq 0$

6. Sea C la curva dada paramétricamente en términos de la longitud de arco por

$$\vec{r}(s) = 2\cos\left(\frac{s}{2}\right)i + 2\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)j, \quad 0 \leq s \leq 4\pi$$

a) Encontrar $\vec{T} = \vec{T}(s)$ y $\vec{N} = \vec{N}(s)$

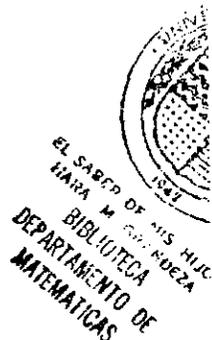
b) Trazar la curva y los vectores $\vec{T}(\pi/2)$ y $\vec{N}(\pi/2)$

7. Sea C la curva dada paramétricamente en términos de la longitud de arco por

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{3}{5}s + 1\right)i + \left(\frac{4}{5}s - 2\right)j; \quad 0 \leq s \leq 10$$

a) Encontrar $\vec{T} = \vec{T}(s)$ y $\vec{N} = \vec{N}(s)$

b) Trazar la curva y los vectores $\vec{T}(s)$ y $\vec{N}(s)$.



8. Pruebe que si $\vec{u}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ y $s = f(t)$ entonces

$$\frac{d\vec{u}(s)}{dt} = \frac{d\vec{u}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

9. Pruebe que $\frac{d}{dt} [f(t)\vec{r}(t)] = f(t) \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \vec{r}(t) \frac{df(t)}{dt}$, donde $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ y $z = f(t)$ es una función real.

10. En cada uno de los ejercicios del a) al d), $\vec{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en el tiempo t . Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t .

a) $\vec{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (3t + 2)\mathbf{j}$ d) $\vec{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$

b) $\vec{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$ e) $\vec{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j}$

EJERCICIOS CAPITULO IV

- 1.- Evaluar las siguientes integrales repetidas:

$$a) \int_0^2 \int_0^1 (x+y) dy dx$$

$$c) \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x-x^3}^{3x-x^3} 1 dy dx$$

$$b) \int_{1/2}^1 \int_0^y y dx dy$$

$$d) \int_0^b \int_0^{10t} \sqrt{st-t^2} ds dt.$$

- 2.- Encontrar el volumen acotado por el paraboloides eliptico $z = 1 - (x^2/a^2) - (y^2/b^2)$ y el plano xy .

- 3.- Evaluar $\iint_A (2xy - x^2) dx dy$, donde A es el rectángulo acotado por $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 4$.

4.

- 4.- Evaluar $\iint_A (y-2x) dx dy$, donde A es el triángulo acotado por $x=0$, $y = 0$ y $y = 3x+6$.

- 5.- Encontrar el volumen que hay debajo del plano $x + y + z = 9$ y arriba del triángulo que está en el plano xy acotado por $y=0$, $x = 3$ y $y = 2x/3$.

- 6.- Encontrar el volumen que hay debajo del plano $z = 2y$ y arriba del área que está en el primer cuadrante acotado por $x=3$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 36$.

- 7.- Encontrar el volumen que hay debajo del cilindro $y = z^2$ y arriba del área que está en el plano xy acotada por $y = 0$ y $x^2 + 9y = 9$.

- 8.- Encontrar el volumen que hay debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del área que está en el primer cuadrante acotada por $y = 0$, $y = x$ y $x^2 + y^2 = 1$.

9.- Encontrar el volumen que hay debajo del plano $z = x + y$ y arriba del área que está en el primer cuadrante acotada por la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

10.- Encontrar el volumen acotado por el paraboloides $x^2 + 4z^2 + 8y = 16$ y por el plano xz . Sugerencia: Tratar a y como la variable dependiente.

11.- Encontrar el volumen acotado por el primer octante y el plano $2x + 3y + 6z = 6$.

12.- Encontrar el volumen que está en el primer octante, acotado por el cilindro $z = 4 - x^2$, los planos coordenados y el plano $4x + 3y = 12$.

13.- Describir el volumen representado por:

$$(a) \int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} \, dy \, dx \quad (b) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} (2a - x - y) \, dx \, dy$$

14.- Reescribir las siguientes integrales de tal manera que se puedan realizar en orden inverso

$$(a) \int_0^{a/2} \int_{x^2/a}^{x - (x^2/a)} f(x, y) \, dy \, dx \quad (b) \int_0^a \int_{(b/a)\sqrt{a^2 - x^2}}^b f(x, y) \, dy \, dx$$

$$(c) \int_0^a \int_{\sqrt{a^2 - x^2}/2}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

15.- Encontrar el volumen de una de las cuñas cortadas del cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ por los planos $z = 0$ y $z = mx$.

16.- Encontrar el volumen en el primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $y = 0$, $z = 0$ y $z = x$.

17.- Encontrar el volumen en el primer octante acotado por las superficies $y^2 = x$, $x + z = 1$, $y = 0$ y $z = 0$.

18. - Encontrar el volumen en el primer octante acotado por las superficies $y^2 = x$, $x + y + z = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.
19. - Encontrar el volumen común a los dos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $x^2 + z^2 = r^2$.
20. - Calcular por medio de integrales dobles el área acotada por cada uno de los siguientes pares de curvas:
- | | | | | | | | |
|-----|------------------|---|-------------|-----|----------------|---|-----------------|
| (a) | $y^2 = x^3$ | y | $y = x$ | (e) | $xy = 4$ | y | $x + y = 5$ |
| (b) | $x^2 + y^2 = 10$ | y | $y^2 = 9x$ | (f) | $y^2 = 5 - x$ | y | $y^2 = 4x$ |
| (c) | $y^2 = x + 1$ | y | $x + y = 1$ | (g) | $y = 2x - x^2$ | y | $y = 3x^2 - 6x$ |
| (d) | $y = 9 - x^2$ | y | $y = x + 7$ | (h) | $4y = x^3$ | y | $y = x^3 - 3x$ |
21. - La densidad de un disco circular de radio a , en un punto P es directamente proporcional a la distancia que hay entre P y un diámetro fijo del disco. Hallar la masa del disco.
22. - En un triángulo rectángulo isósceles la densidad en cualquier punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre P y el vértice del ángulo recto. hallar la masa del triángulo.
23. - La densidad en cualquier punto P de una lámina cuadrada es directamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay desde P a una esquina fija de la lámina. Encontrar la masa de la lámina.
24. - La densidad en cualquier punto P de un triángulo rectángulo isósceles es directamente proporcional a la distancia que hay entre P y uno de los lados iguales del triángulo. Encontrar la masa del triángulo.
25. - Encontrar la masa de una lámina acotada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = e^x$ si la densidad en cualquier punto P es directamente proporcional a la distancia que hay entre el punto P y el eje x .

26. - Encontrar la masa de la lámina acotada por la parábola $x^2 = 16y$ y la recta $y = 4$ si la densidad en cualquier punto P es directamente proporcional a la distancia que hay entre P y la recta $y = 4$.
27. - Hallar la masa en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 25$ si la densidad en un punto cualquiera P es directamente proporcional a la suma de las distancias desde P a los bordes rectos.
28. - Evaluar las siguientes integrales repetidas:
- (a) $\int_0^{\pi} \int_{\cos\theta}^{\sec\theta} r \, dr \, d\theta$ (b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\cos\theta} r^2 \, dr \, d\theta$
- (c) $\int_0^{\pi/2} \int_{\cos\theta}^1 r^4 \, dr \, d\theta$
29. - Encontrar el área que hay dentro del círculo $r = 2a \cos\theta$ y fuera del círculo $r = a$.
30. - Encontrar el área que hay dentro del círculo $r = 1$ y a la derecha de la línea $4r \cos\theta = 3$.
31. - Encontrar el área que hay dentro del círculo $r = 3 \cos\theta$ y fuera del círculo $r = \cos\theta$.
32. - Encontrar el área que hay dentro del cardioides $r = 1 + \cos\theta$ y a la derecha de la línea $4r \cos\theta = 3$.
33. - Encontrar el área que hay dentro del círculo $r = 1$ y fuera de la parábola $r(1 + \cos\theta) = 1$.
34. - Encontrar el área que hay dentro de la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ y fuera del círculo $r = a$.
35. - Suponga que la densidad en un punto cualquiera P de un disco circular de radio a, es directamente proporcional al cubo de la distancia que hay entre P y un fijo que está en la frontera del disco. Escribir una expresión para la masa del disco usando coordenadas polares.

- 36.- En coordenadas cilíndricas la ecuación de la esfera de radio a , si el centro de la esfera está en el polo, es $r^2 + z^2 = a^2$. Calcular el volumen en el primer octante.
- 37.- Un anillo circular con radio interior a y radio exterior b , tiene una densidad en un punto cualquiera P que es inversamente proporcional a la distancia que hay entre P y el centro del anillo. Encontrar la masa del anillo.
- 38.- Hallar el volumen en el primer octante que está por debajo de la superficie elíptica $9r^2 + 4z^2 = 36$.
- 39.- Encontrar el volumen cortado de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ por el cilindro $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.
- 40.- Encontrar la masa de una lámina homogénea acotada por el cardiode $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$

41.- Evaluar las siguientes integrales repetidas:

$$(a) \int_1^2 \int_0^1 \int_2^4 x^2 y^2 z \, dz dy dx$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{z-2x} dz dy dz$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{1-x} x \, dz dx dy$$

$$(d) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y^2} z \, dz dy dx$$

$$(e) \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) \, dz dy dx$$

$$(f) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyz \, dz dy dx$$

42.- Expresar como una integral triple y evaluar lo siguiente:

a) El volumen en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$.

b) El volumen acotado por el paraboloides $y^2 + z^2 = x + 1$ y el plano $x = 0$.



- c) El volumen en el primer octante acotado por las superficies $x^2 + z = 1$, $y^2 + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.
- d) El volumen de una de las cuñas cortadas del cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ por los planos $z = 0$ y $z = mx$.
- e) El volumen acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.
- f) El volumen acotado por el paraboloides $y^2 + z^2 = 4ax$, el cilindro parabólico $y^2 = ax$ y el plano $x = 3a$.
- g) El volumen sobre el área común a las dos parábolas $x = y^2$ y $y = x^2$ y debajo de la superficie $z = 12 + y - x^2$.
- h) El volumen acotado por las dos paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + 3y^2$.
- i) El volumen acotado por el paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$.

3.

3. - Encontrar la masa de la mitad de la corteza esférica acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ si la densidad en un punto cualquiera P (masa por unidad de volumen) es el valor de z en ese punto.
4. - Los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ y $x + y - z = 0$ encierran un tetraedro. Suponga que la densidad en cualquier punto $P(x, y, z)$ es directamente proporcional a la distancia que hay desde P a la cara $z = 1$. Hallar la masa del tetraedro.
45. - Considere el sólido que consiste de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está acotada por $z = 0$ y $z = h$, $h > 0$ y que está a la derecha del plano xz . Suponga que la densidad en cualquier punto es $\rho = kyz$. Encontrar la masa del sólido.
46. - Considere el cubo unitario acotado por los planos coordenados, $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Suponga que la densidad en un punto cualquiera (x, y, z) es $\rho = kyz$. Encontrar la componente en x de la atracción gravitacional que el cubo ejerce sobre una masa m en el origen.

47.- Describa el volumen representado por la integral iterada

$$\int_0^1 \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx$$

48.- Hallar la masa del volumen del ejercicio 47 si la densidad en cualquier punto P es inversamente proporcional a la distancia que hay desde P al origen.

49.- Encontrar el volumen acotado por las superficies $z = 0$, $az = xy$ y $x + y + z = a$.

50.- Encontrar el volumen en el primer octante acotado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

51.- Encontrar el volumen sólido acotado por los paraboloides elípticos $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ y $z = 3x^2 + \frac{1}{4}y^2$.

52.- Calcular la integral triple de $f(x,y,z) = z$ sobre el volumen en el primer octante acotado por $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 6$, $x + y = 2$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$.

53.- Describir el volumen representado por la integral:

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/4}^4 dz dy dx$$

54.- Evaluar las siguientes integrales:

(a) $\int_0^{\pi/4} \int_1^{\cos\theta} \int_1^r \frac{1}{r^2 z^2} dz dr d\theta$

(b) $\int_0^2 \int_0^1 \int_0^2 z r^2 \operatorname{sen}\theta dz dr d\theta$

(c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16-r^2)^{1/2} r z dr dz d\theta$

- Calcular la atracción gravitacional que la corteza cilíndrica de densidad homogénea D determinada por los cilindros $r = a$, $r = b$ ($a < b$) y los planos $z = 0$ y $z = h$ ejerce sobre un cuerpo de masa 1 que está en $(0, 0, h + c)$.
66. - Calcular el volumen de la parte del paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = 2z$ cortada por el plano $z = 2$.
67. - Encontrar la atracción gravitacional que un cono circular recto, sólido, homogéneo de densidad D , con base de radio a y altura h ejerce sobre un cuerpo de masa uno que está en el vértice. Sugerencia: la ecuación del cono en coordenadas cilíndricas es $z = (h/a)r$.
68. - Un sólido de densidad uniforme y de masa M por unidad de volumen está acotado por el paraboloides $x^2 + y^2 = 4az$ o $r^2 = 4az$ en coordenadas cilíndricas y el plano $z = a$. Demostrar que la fuerza de atracción que ejerce este sólido sobre un cuerpo de masa 1 que está en el polo es $2\pi GMa [1 - \sqrt{5} + 4 \ln \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})]$.
69. - Un sólido de densidad uniforme y de masa M por unidad de volumen está acotado por el paraboloides de revolución $r^2 = 4az$ (en coordenadas cilíndricas) y por el plano $z = 2a$. Demostrar que la atracción que ejerce dicho sólido sobre una masa unitaria que está en $(0, 0, 2a)$ es $4\pi GMa [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$.
60. - Calcular la integral triple de $f(r, \theta, z) = r^2$ sobre el volumen acotado por el paraboloides $r^2 = 9 - z$ y el plano $z = 0$.
61. - Calcular el volumen que hay dentro del cilindro $r = 4 \cos \theta$ y está acotado por la esfera $r^2 + z^2 = 16$ y el plano $z = 0$.
62. - Evaluar las siguientes integrales:

$$a) \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \sin 2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$b) \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \int_0^{\sqrt{6}} \rho \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$c) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^5 \rho^4 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

- 63.- usar coordenadas esféricas para hallar el volumen que se obtiene al cortar un cono circular recto con un ángulo semivertical de 30° (es decir $\phi = 30^\circ$), por una esfera de radio 6. El vértice del cono es el centro de la esfera.
- 64.- Hallar el volumen cortado del cono $\phi = \frac{\pi}{4}$ por la esfera $\rho = 2a \cos \phi$.
- 65.- Encontrar la masa de la esfera de radio R si la densidad D es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro.
- 66.- un cono circular recto sólido de altura h y ángulo semivertical α es de masa uniforme. Encontrar la atracción que ejerce sobre una partícula unitaria localizada en su vértice. Use coordenadas esféricas.
- 67.- Use el método usado en el ejemplo del capítulo IV para demostrar que una corteza esférica con distribución de masa uniforme atrae a una masa unitaria externa al casquete, como la atraería una partícula de masa igual a la masa de la corteza esférica, colocada en el centro de la corteza.

EJERCICIOS CAPITULO V

1. Considere la curva C_1 determinada por la intersección de la superficie $Z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 2x$. Encontrar el área de la región A que está sobre el plano $y = 2x$, limitada por la curva C_1 , el segmento de recta C que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 4, 0)$ y la recta perpendicular al plano xy que pasa por $(2, 4, 0)$.

2. Considere la curva C_1 determinada por la intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 2x + 1$. Encontrar el área de la región A que está en el plano $y = 2x + 1$, limitada por la curva C_1 , el segmento de recta C que une los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(2, 5, 0)$ y las rectas perpendiculares al plano xy que pasan por P y Q respectivamente.

3. Un alambre delgado se dobla en la forma de un semicírculo de radio a . La densidad en el punto P es directamente proporcional a la distancia de P a la recta que pasa por los extremos del alambre. Encuentre la masa del alambre.

4. Encuentre la masa de un alambre de densidad $\delta(x, y, z) = kz$, si el alambre tiene la forma de una hélice C cuyos parámetros son $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$, $0 \leq t \leq \pi$.

5. Evaluar $\int_C (x + 2y) \, ds$ suponiendo que
 - (a) C consta de segmentos rectos que van de $(2, 1)$ a $(4, 1)$ y de $(4, 1)$ a $(4, 5)$.
 - (b) C es el segmento recto que va de $(2, 1)$ a $(4, 5)$.

6. Halle el trabajo realizado por $\vec{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ para mover una partícula de $(-1, 2, -2)$ a $(1, 5, 2)$ donde la trayectoria C consta de tres segmentos de recta paralelos a los ejes de las z , de las x y de las y , en ese orden.

7. La fuerza que actúa en un punto (x,y,z) de un sistema tridimensional es

$$\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}.$$

Calcule el trabajo efectuado por $\vec{F}(x,y,z)$ sobre un punto que se mueve a lo largo de la curva $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ de $(0,0,0)$ a $(2,4,8)$.

8. a) Calcule $\int_C (x^3 + y) ds$ y $\int_{-C} (x^3 + y) ds$ de donde C es la curva $x=3t$, $y=t^3$, $0 \leq t \leq 1$.
- b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo $\vec{F}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$; C es el cuadrante de elipse $x = acost$, $y = bsent$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
9. Mencione las condiciones que debe cumplir \vec{F} para que el valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sea independiente de la trayectoria C .
10. En los incisos (a) - (d) determine si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria o no. Si lo es, encuentre una función de potencial f para \vec{F} .
- a) $\vec{F}(x,y) = (3x^2y+2)\vec{i} + (x^3 + 4y^3)\vec{j}$
- b) $\vec{F}(x,y) = e^x\vec{i} + (3 - e^x \operatorname{sen}y)\vec{j}$
- c) $\vec{F}(x,y) = 4xy^3\vec{i} + 2xy^3\vec{j}$
- d) $\vec{F}(x,y,z) = 8xz\vec{i} + (1-6yz^3)\vec{j} + (4x^2-9y^2z^2)\vec{k}$

11. En los incisos (a)-(c) demuestre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria y calcule su valor.

a) $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\vec{F} = (y^2+2xy)\vec{i} + (x^2 + 2xy)\vec{j}$

b) $\int_{(0,0)}^{(1, \pi/2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\vec{F} = (e^x \operatorname{sen}y)\vec{i} + (e^x \operatorname{cos}y)\vec{j}$

c) $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\vec{F} = (6xy^3+2z^2)\vec{i} + 9x^2y^2\vec{j} + (4xz+1)\vec{k}$.

12. Hallar la masa de S , siendo S la superficie del paraboloida $z = 2 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano xy , y con densidad en cualquier punto $P(x, y, z)$ igual a (a) 1, (b) $x^2 + y^2$, (c) z .
13. Evaluar $\iint_S g(x, y, z) dS$, donde $g(x, y, z) = x + y$; S es la superficie del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
14. Sea S la parte de la gráfica de $z = 9 - x^2 - y^2$ en la cual $z \geq 0$ y sea $\vec{F}(x, y, z) = 3xi + 3yj + zk$. Calcule el flujo de \vec{F} a través de S , siendo \vec{n} el vector unitario que apunta hacia arriba en el punto (x, y, z) de S .
15. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, donde \vec{n} es el vector unitario normal a S que apunta hacia arriba. Con $\vec{F} = xi + yj + zk$ y S es la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.