Hermosillo Sonora, Mex.

Julio - 1992

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIEDADES

Oswaldo Gonzalez Gaxiola.

A mi padre...

A mi tio...

En general a todos los que depositaron su confianza en mi...

INDICE

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIEDADES

CAPITULO 5: CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EXTERIOR

CAPITULO 6: CALCULO INTEGRAL EN VARIEDADES

CAPITULO 7: HOMOLOGIA Y COHOMOLOGIA SIMPLICIAL

CAPITULO 8: COHOMOLOGIA DE DE RHAM

INTRODUCCION

En el presente trabajo trato de dar un desarrollo del cálculo diferencial e integral en variedades , y los objetivos principales son, el estudio de un teorema clásico del cálculo integral, como lo es el Teorema de Stokes. El cuál se enuncia y se prueba en el capitulo 6; este teorema nos relaciona la integral de una forma diferencial sobre la frontera de una variedad diferenciable, con la integral de la diferencial de la forma sobre toda la variedad; Además establecer el teorema de De Rham, el cuál nos asegura la existencia de un isomorfismo entre el grupo de cohomología símplicial de un complejo símplicial K, y el grupo de cohomología de De Rham de una variedad triángulable sobre el complejo K, esto se desarrolla en el capitulo 8; para lo cuál previamente se da una introducción en el capitulo 7 del estudio de homología y cohomología símplicial.

Para establecer este último objetivo el cuál es el teorema de De Rham, se hace uso de la teoria desarrollada en los capitulos anteriores y muy especialmente el estudio de formas diferenciales sobre variedades y su diferencial exterior, la cuál es un operador que nos da información de la forma geometrica de un espacio, y esto nos lo muestra el lema de Poincaré, desarrollado en el capitulo 5 que establece condiciones para asegurar cuando una forma diferencial cerrada es exacta, conceptos tratados en el desarrollo de este trabajo, que al estudiarlos son sencillos, pero son de gran importancia para un estudio posterior de cohomología de De Rham.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

Este capítulo, que consta de tres secciones, tiene la finalidad de presentar algunos conceptos y resultados básicos que nos serviran como base en el desarrollo de este trabajo. En la primera sección se dan algunas definiciones relativas a cálculo diferencial e integral en espacios Euclidianos de dimensión finita; así como los resultados más importantes del cálculo que se utilizarán en esta tesis. En la segunda sección, se define el concepto de espacio de Banach y resultados importantes relacionados con el estudio de ellos, además se dan algunas definiciones y resultados básicos sobre topología, los cuales son de gran importancia en el desarrollo del capitulo 1 y en general en todo este trabajo. En la tercera y última sección, daremos algunas definiciones de álgebra, las cuales nos permitirán en capítulos posteriores definir conceptos de gran importancia, cómo lo son los grupos de homología y cohomología símplicial, los cuales se utilizan en los capítulos 7 y 8.

§ 0.1 CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

EFINICION 0.1.1

Sea n un número natural, y sea

^{n}= { X : X= $(x^1,\dots,x^n)$ donde cada x^i es un número real }, el onjunto $\mathbb{R}^n$, es llamado el *espacio Euclideano n-dimensional*.

La función $\pi^i:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\pi^i(X) = x^i$, donde $X \in \mathbb{R}^n$, s llamada la *i-ésima función coordenada* sobre $\mathbb{R}^n$.

OTA

A las funciones π^i de la definición anterior, también se les llama *proyecciones canonicas*.

DEFINICION 0.1.2

Una función $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es *diferenciable* en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $\lambda:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| \mathbf{f(a+h)-f(a)}-\lambda(\mathbf{h}) \|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Obsérvese que h es un punto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f(a+h)-f(a)}-\lambda(\mathbf{h})$ un punto de $\mathbb{R}^m$. La transformación lineal λ se denota por $\mathbf{Df(a)}$ y se llama la *diferencial* de **f** en el punto **a**.

TEOREMA 0.1.3 (REGLA DE LA CADENA).

Si $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en **a** y $\mathbf{g}:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en **f(a)**, entonces la composición $\mathbf{g\circ f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en **a**, y:

$$\mathbf{D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\cdot Df(a)}.$$

DEMOSTRACION.

(véase [3])

EOREMA 0.1.4

Si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ entonces $f=(f^1,\dots,f^m)$ donde $f^i=\pi^i\circ f$ $1\le i\le m$ s diferenciable en el punto $a\in\mathbb{R}^n$, sí y sólo si cada f^i lo es, y:

$$Df(a)=(\,Df^1(a),\dots,Df^m(a)\,)$$

EMOSRACION.

véase [3])

EOREMA 0.1.5

Si $f,g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en $a\in\mathbb{R}^n$, entonces:

$$D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a),$$

$$D(f\cdot g)(a)=g(a)Df(a)+f(a)Dg(a)$$

i, además, $g(a)\neq 0$, entonces se tiene que:

$$D(f/g)(a)=\frac{g(a)Df(a)-f(a)Dg(a)}{[g(a)]^2}$$

DEMOSTRACION.

(véase [3])

DEFINICION 0.1.6

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $A\subset\mathbb{R}^n$. Se dice que f es *continua* en $a\in A$ si:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

y se dice simplemente que f es continua, si lo es para todo punto $a\in A$.

TEOREMA 0.1.7

Sea $A\subset\mathbb{R}^n$. Una función $f:A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua sí y sólo si para cada conjunto abierto $U\subset\mathbb{R}^m$ existe algún conjunto abierto $V\subset\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(U)=V\cap A$.

DEMOSTRACION.

(véase [3])

DEFINICION 0.1.8

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a^1,\ldots,a^i+h,\ldots,a^n)-f(a^1,\ldots,a^n)}{h}$$

si existe, se denota por $Df_i(a)$, y se llama la derivada parcial respecto a la variable x^i de la función **f** en el punto **a**.

Si $D_if(X)$ existe para todo $X \in \mathbb{R}^n$, entonces se obtiene una función $D_if:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. La derivada parcial con respecto a x^j de esta función en el punto X, esto es, $D_j(D_if)(X)$, se denota por $D_{i,j}f(X)$. Obsérvese que en esta notación se cambia el orden de i y j. El siguiente teorema nos asegura cuando es posible la igualdad $D_{i,j}f = D_{j,i}f$.

TEOREMA 0.1.9

Si $D_{i,j}f$ y $D_{j,i}f$ son continuas en un conjunto abierto que contenga al punto $X \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$D_{i,j}f(X) = D_{j,i}f(X).$$

DEMOSTRACION.

(véase [3])

DEFINICION 0.1.10

La función $D_{i,j}f$ se llama *la segunda derivada parcial (mixta)* de **f**. Las derivadas parciales mixtas de orden superior se definen de forma análoga. Evidentemente, el teorema anterior puede utilizarse para probar la igualdad de las derivadas parciales mixtas de orden superior en condiciones apropiadas. y en este caso el orden de $i_1,\ldots,i_k$ es irrelevante en $D_{i1,\ldots,ik}f$. Si **f** posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes, entonces se dice que **f** es una función de clase C^∞.

EFINICION 0.1.11

Sea $R = [a_1, b_1] X \cdots X [a_n, b_n]$ (un rectángulo cerrado) donde $_i, b_i \in \mathbb{R}$. Si $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Riemann integrable, entonces odemos definir

$$\int_R f = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \cdots dx^n,$$

a *integral* de **f** sobre R.

La definición de $\int f$ también se puede extender a conjuntos biertos, (es decir $\int_U f$ está bien definida) donde **U** es un onjunto abierto. La siguiente afirmación es cierta:

TEOREMA 0.1.12 (CAMBIO DE VARIABLES)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $g : U \longrightarrow g(U) \subset \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, si $f : g(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable entonces

$$\int_{g(U)} f = \int_U f \circ g \ |\det g'|.$$

En la expresión anterior $\det g'$ es el determinante Jacobiano. (véase [3]).

TEOREMA 0.1.13 (TEOREMA DE FUBINI)

Sea **f** una función acotada cuyo dominio es un rectángulo $R=[a,b]x[c,d]$ y supongamos que las discontinuidades de **f** forman un conjunto de medida de Lebesgue cero. Si

$$\int_c^d f(x,y) dy \text{ existe para cada } x \in [a,b]$$

entonces

$$\int_a^b\left[\int_c^d \mathbf{f}(x,y)\,dy\right]dx \text{ existe}$$

y $$\int_a^b\int_c^d \mathbf{f}(x,y)\,dydx= \int_R \mathbf{f}(x,y)\,dA$$

nálogamente $$\int_c^d\int_a^b \mathbf{f}(x,y)\,dxdy= \int_R \mathbf{f}(x,y)\,dA$$

sí, si todas estas condiciones se cumplen simultáneamente, entonces

$$\int_a^b\int_c^d \mathbf{f}(x,y)\,dydx= \int_c^d\int_a^b \mathbf{f}(x,y)\,dxdy = \int_R \mathbf{f}(x,y)\,dA.$$

DEMOSTRACION (véase [3])

§ 0.2 ESPACIOS DE BANACH, TOPOLOGIA

En todo lo que sigue, el campo base **K** es el campo real $\mathbb{R}$. Se suponen conocidas las definiciones relativas a los espacios vectoriales y sus propiedades elementales.

DEFINICION 0.2.1

Sea **E** un espacio vectorial sobre **K**. Una *norma* sobre **E** es una función $\|\cdot\|:\mathbf{E}\longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

i). $\|X\| \geq 0,\ \forall\ X \in \mathbf{E}$

ii). $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X=\overline{0}$

iii). $\|X+Y\| \leq \|X\|+\|Y\|,\ \forall\ X,Y \in \mathbf{E}$

iv). $\|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|\ \forall\ X\in\mathbf{E}$ y $\forall\ \lambda \in \mathbf{F}$

Así un *espacio vectorial normado* es un par $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

DEFINICION 0.2.2

Sea S un conjunto no vacío. Una *metrica* sobre S es una función $d:SXS\longrightarrow \mathbb{R}$ Tal que:

i). $d(s_1,s_2) \geq 0\ \forall\ s_1,\ s_2\in S$

ii). $d(s_1,s_2) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$

ii). $d(s_1,s_2) = d(s_2,s_1)\ \forall\ s_1,\ s_2 \in S$ (Simetría)

v). $d(s_1,s_3) \leq d(s_1,s_2) + d(s_2,s_3)$ (Desigualdad Triangular)

sí un espacio *métrico es un par* (S,d).

EFINICION 0.2.3

Sea $\mathbf{E}$ un espacio vectorial normado, se define la *distancia* ntre dos "puntos" $X,Y \in \mathbf{E}$ como:

$$d(X,Y) = \|X-Y\|.$$

sí $\mathbf{E}$ es un espacio métrico $(\mathbf{E},d)$.

EFINICION 0.2.4

Sea S un conjunto $(S\neq\varnothing)$. Una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de S s una *topología* para S si satisface:

i). $\varnothing,\ S \in \mathcal{T}$.

ii). Si $B_1,\ \dots\ ,\ B_n \in \mathcal{T}$ $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{T}$.

iii). Si $(B_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \in \mathcal{T}$.

DEFINICION 0.2.5

Un *espacio topológico* es un par $(S,\mathcal{T})$, donde S es un conjunto no vacío y $\mathcal{T}$ una topología para S. Los elementos de $\mathcal{T}$ son llamados conjuntos abiertos en S.

DEFINICION 0.2.6

Sea (S,d) un espacio métrico, para $r > 0$ y $s \in S$ definimos la *bola abierta* $(B_r(s))$ de radio r y centro en s como el conjunto:

$$B_r(s) = \left\{ s'\in S : d(s,s') < r \right\}$$

DEFINICION 0.2.7

En cada espacio métrico (S,d), podemos definir una topología en S llamada *topología inducida* por la métrica d, ó topología métrica como:

$$\mathcal{T}_d = \varnothing \cup \left\{ B \subset S : B \text{ es la unión de bolas abiertas} \right\}$$

De esta manera quedan determinados los subconjuntos abiertos n un espacio métrico (S,d).

EFINICION 0.2.8

Sea **A** es un subconjunto de un espacio topológico S. La *topología elativa* sobre **A** es define como:

$$\mathcal{T}_A = \left\{ U \cap A : U \in \mathcal{T} \right\}.$$

EFINICION 0.2.9

Sean $(S,\mathcal{T}_T)$ y $(T,\mathcal{T}_T)$ espacios topológicos y $f:S \longrightarrow T$ una unción, decimos que **f** es *continua* en $u \in S$ si para todo $V \in \mathcal{T}_T$ tal ue $f(u) \subset V$ existe $U \in \mathcal{T}_S$ con $u \in U$ tal que $f^{-1}(V) \subset U$.

ROPOSICION 0.2.10

La composición de dos funciones continuas es una función continua.

DEMOSTRACION.

(véase [1]).

DEFINICION 0.2.11

Sean $(S,\mathcal{T}_S)$ y $(T,\mathcal{T}_T)$ espacios topológicos. Si $f:S \longrightarrow T$ es una biyección, **f** y f^{-1} son continuas, entonces diremos que **f** es un *homeomorfismo*, y que **S** y **T** son *homeomorfos*.

DEFINICION 0.2.12

Sea $(S,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathbb{B}$ de subconjuntos de S, es una *base* de la topología $\mathcal{T}$, sí y sólo si:

i). $\mathbb{B} \subset \mathcal{T}$.

ii). $\forall\ s \in S$ y $\forall\ U \in \mathcal{T}$ tal que $s \in U$ existe $B \in \mathbb{B}$ tal que $s \in B \subset U$

LEMA 0.2.13

Sea $(S,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathbb{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathbb{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si todo elemento de $\mathcal{T}$ se puede representar como unión de elementos de $\mathbb{B}$. (véase [1]).

JEMPLO

En el espacio topológico $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, tenemos que $\mathbb{B}_1= \{(a,b):a,b \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{B}_2= \{(a,b):a,b \in \mathbb{Q}\}$, son bases para la topología usual $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$.

BSERVACION 0.2.14

Todo espacio vectorial normado **E** es un espacio topológico $\mathbf{E},\mathcal{T}_d)$.

EFINICION 0.2.15

Un espacio topológico $(S,\mathcal{T})$ es llamado *segundo numerable,* si la topología $\mathcal{T}$ tiene una base numerable.

EFINICION 0.2.16

(1). Sea $\{S_i:i \in I\}$ una familia no vacía de conjuntos. El *producto cartesiano* $\prod_{i\in I} S_i$ es el conjunto de funciones $f:I\longrightarrow \bigcup_{i\in I} S_i$ tales que $f(i) \in S_i\ \forall\ i \in I$.

(2). La i-ésima *proyección* de $\prod_{i\in I} S_i$ es la función

$p_i:\prod_{i\in I} S_i\longrightarrow S_i$ definida como $p_i(f)= f(i)$.

DEFINICION 0.2.17

Sea $\{ (S_i,\mathcal{T}_i): i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in I$ y cada $V \in \mathcal{T}_i$ se define $V^*= p_i^{-1}(V)$ y $T= \{ C:$ para alguna $i \in I$ y algùn $V \in \mathcal{T}_i,\ C= V^*\}$. La *topología producto* en $\prod_{i\in I} S_i$ es la mínima topología de $\prod_{i\in I} S_i$ que contiene a **T**.

EJEMPLO

La topología producto en $\mathbb{R}X\mathbb{R}$ tiene como base todos los rectángulos abiertos, y por tanto coincide con la topología de $\mathbb{R}X\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, que es la inducida por la metrica usual de $\mathbb{R}^2$. (Y en general la topología producto para $\mathbb{R}^n$ tiene como base la colección de todos los rectangulos abiertos de $\mathbb{R}^n$).

DEFINICION 0.2.18

Sea $(S,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq S$. La colección $\{ U_i\}_{i\in I}$ con $U_i \subset S \ \forall \ i \in I$, es una *cubierta* para A, si $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Además diremos que $\{ U_i \}_{i\in I}$ es una *cubierta abierta* para A si $U_i \in \mathcal{T} \ \forall \ i \in I$.

DEFINICION 0.2.19

Sea $(S,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que S es *compacto,* si para toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de S existe una colección finita de los U_α que cubren a S, es decir existen $U_{\alpha 1},\dots,U_{\alpha n}$ tales que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha i}$.

DEFINICION 0.2.20

Diremos que un espacio topológico $(S,\mathcal{T})$ es de *Hausdorff* si dados dos puntos $s_1,\ s_2 \in S,\ s_1 \neq s_2$ existen abiertos U , $V \in \mathcal{T}$ tales que $s_1 \in U$, $s_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

DEFINICION 0.2.21

Sea $(S,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una cubierta $\{ U_\alpha\}$ para S es llamada un *refinamiento* de una cubierta $\{ V_i\}$, si para cada U_α existe una V_i tal que $U_\alpha \subset V_i$. Un espacio topológico es llamado *paracompacto* si cada cubierta abierta de S tiene un refinamiento localmente finito de conjuntos abiertos, y S es Hausdorff.

TEOREMA 0.2.22 (Heine-Borel)

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. (véase [1])

DEFINICION 0.2.23

Una *sucesión* en un espacio métrico (S,d), es una función $f:\mathbb{N} \longrightarrow S$ tal que $f(n) = s_n \in S \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$ y la denotamos por $f = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINICION 0.2.24

Una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (S,d) *converge* a $s_0 \in S$ si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in B_\varepsilon(s_0)\ \forall\ n \geq n_\varepsilon$ lo cual denotamos $s_n \longrightarrow s_0$ en S.

DEFINICION 0.2.25

Sea (S,d) un espacio métrico y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S, diremos que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(s_n,s_m) < \varepsilon\ \forall\ n,m \geq n_\varepsilon$.

Un espacio métrico S es llamado *completo* si toda sucesión de Cauchy en S converge en S.

DEFINICION 0.2.26

Sea E un espacio vectorial normado. Se dice que E es completo si toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de E con respecto a la métrica inducida por la norma de E.

DEFINICION 0.2.27

Un espacio de *Banach*, es un espacio vectorial normado que es completo respecto a la métrica inducida por la norma.

OBSERVACION 0.2.28

Si el campo base es $\mathbb{R}$, se dice que el espacio de Banach es real, si es $\mathbb{C}$ se dice que el espacio de Banach es complejo.

EJEMPLO:

Los espacios $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ con cualesquiera de las siguientes normas son espacios de Banach:

$$\|X\| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right]^{1/2},\quad \|X\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\ ,\quad \|X\| = \sup_{i=1,\ldots,n}|x_i| \quad \text{donde } X \in \mathbb{R}^n$$

OBSERVACION 0.2.29

$E\times F$ es un espacio de Banach sí y sólo si E y F lo son (véase [1])

EFINICION 0.2.30

Sean **E** y **F** espacio de Banach y $f:E \longrightarrow F$ una función. Se dice ue **f** es una *transformación lineal* de **E** en **F** si $\forall\ X,Y \in E$ y $\lambda \in K$ e tiene:

). $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$.

i). $f(\lambda X) = \lambda f(X)$.

EJEMPLO:

La función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(X) = (x,x+y,x-y)$. **f** es una transformación lineal.

En efecto, sean $X_1= (x_1,y_1)$, $X_2= (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces,

$$X_1+ X_2 = (x_1+x_2,y_1+y_2) \quad y \quad kX_1= k(x_1,y_1) = (kx_1,ky_1)$$

de modo que

$$\begin{aligned} f(X_1+X_2) &= (x_1+x_2,\ [x_1+x_2]+[y_1+y_2],\ [x_1+x_2]-[y_1+y_2]) \\ &= (x_1,\ x_1+y_1,\ x_1-y_1)+ (x_2,\ x_2+y_2,\ x_2-y_2) \\ &= f(X_1) + f(X_2). \end{aligned}$$

además

$$f(kX_1) = (kx_1,kx_1+ky_1,kx_1-ky_1) = k(x_1,x_1+y_1,x_1-y_1) = kf(X_1).$$

DEFINICION 0.2.31

Sean **E** y **F** espacios de Banach y $f:S \subset E \longrightarrow F$, una función. Diremos que **f** es continua en el punto $s \in S$ sí y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ x \in S$ con $d_E(\ x,s\ ) < \delta$ se tiene que $d_F(f(x),f(s))<\varepsilon$.

NOTACION

Con $L(E,F)$ denotará el conjunto de todas las transformaciones lineales y continuas de **E** en **F**.

OBSERVACION 0.2.32

$L(E,F)$ es un espacio vectorial sobre K.

Cuando $F=\mathbb{C}$ (respectivamente $\mathbb{R}$) entonces $L(E,\mathbb{C})$ (respectivamente $L(E,\mathbb{R})$) es denotado por E^* y es llamado el *espacio dual complejo,* (respectivamente el *espacio dual real*)

DEFINICION 0.2.33

Sean $E_1,E_2,\ldots,E_k$ y F espacios de Banach. Una transformación $f:E_1 X E_2 X\cdots X E_k \longrightarrow F$ se dice *k-multilineal* si $f(e_1,\ldots,e_k)$ es es lineal en cada argumento.

NOTACION

El conjunto de transformaciones k-multilineales y continuas de $E_1,\ldots,E_k$ a F se denota por $L(E_1,\ldots E_k; F)$. Si $E_i= E$ $1\le i\le k$ entonces el conjunto es denotado por $L^k(E,F)$.

DEFINICION 0.2.34

Una función $f:E\longrightarrow F$ (E y F espacios vectoriales normados) es un *isomorfismo* si:

i). $f\in L(E,F)$

ii). Existe $g:F\longrightarrow E$, $g\in L(F,E)$ tal que $g\circ f=id_E$ y $f\circ g=id_F$.

NOTACION

Si E y F son espacios vectoriales normados y existe $f:E\longrightarrow F$ tal que f es un isomorfismo, entonces diremos que E y F son isomorfos lo cual denotaremos por $E\approx F$.

DEFINICION 0.2.35

Sean E y F espacios de Banach, $V\subset E$ y $W\subset F$ subconjuntos abiertos, se dice que $f:V\longrightarrow W$ es un *difeomorfismo*, si f es biyectiva de clase C^∞ y además $f^{-1}:W\longrightarrow V$ es de clase C^∞.

§ 0.3 ALGEBRA

EFINICION 0.3.1

Un conjunto no vacío G se dice que forma un *grupo* si en G stá definida una operación binaria, llamada "producto" y denota-a por $*$ tal que:

). Si $a,b \in G$ entonces $a*b \in G$ (cerradura)

). Si $a,b,c \in G$ entonces $a*(b*c)= (a*b)*c$ (asociatividad)

). Existe un elemento $e \in G$ tal que $a*e= e*a$ $\forall$ $a \in G$ (existencia e un elemento identidad en G)

). $\forall$ $a \in G$ existe un unico $a^{-1}\in G$ tal que $a*a^{-1}= a^{-1}*a= e$ (existencia de inversos en G).

EFINICION 0.3.2

Un grupo G se dice *abeliano* (*o conmutativo*) si para cualesquiera $a,b \in G$ se tiene: $a*b= b*a$.

EFINICION 0.3.3

Llamaremos *orden* de G al número de elementos de G, lo cual denotaremos por $o(G)$. Si $o(G) < \infty$ diremos que G es de *orden finito*.

EJEMPLO

Sea $G = \mathbb{Z}=\{ \ldots,-1,0,1,\ldots \}$ con $a*b$, para $a,b \in G$ definida como la suma usual entre enteros, es decir con $a*b= a+b$. G es un grupo abeliano infinito.

EJEMPLO

Sea G $\{ 1,-1,\}$ con la operación $*$ definida como la multiplicación entre números reales. G es entonces un grupo abeliano de orden 2, es decir $o(G)= 2$.

DEFINICION 0.3.4

Un subconjunto **H** de un grupo **G** se dice que es un *subgrupo* de **G** si respecto a la operación $*$ definida en **G**, **H** mismo forma un grupo.

EJEMPLO

Sea $G = \mathbb{Z}$. Bajo la adición usual, $H = \{ 5n : n \in \mathbb{Z} \}$, **H** es un subgrupo de **G**.

DEFINICION 0.3.5

Sea **H** es un subgrupo de **G**, y $a \in G$, al conjunto:

$$Ha = \{ ha : h \in H \}.$$

se le llama *clase lateral derecha de* **H** *en* **G.** De manera similar se define la *clase lateral izquierda de* **H** *en* **G.**

DEFINICION 0.3.6

Un subgrupo **N** de un Grupo **G** se dice que es *un subgrupo normal* de **G** si para toda $g \in G$ y toda $n \in N$, se tiene que $gng^{-1} \in N$.

LEMA 0.3.7

El subgrupo **N** de **G** es un subgrupo normal de G sí y sólo si toda clase lateral izquierda de **N** en **G** es una clase lateral derecha de **N** en **G**. (véase [7]).

Sea **H** un subgrupo normal de **G** y **G′** el conjunto de clases laterales de **H** en **G**. (Por hipótesis, una clase lateral izquierda es igual a una clase lateral derecha, así que no es necesario distinguir entre ellas.), Si **xH** e **yH** son clases laterales, su producto **(xH)(yH)** es también una clase lateral, pues:

$$xHyH = xyHH = xyH$$

Por medio de este producto queda definida una operación en **G′** que es asociativa. La clase **1H** es el elemento identidad respecto a esta operación y $x^{-1}H$ es el inverso de la clase xH, así **G′** es un grupo el cual denotamos con **G/H** (que leemos **G** módulo **H**), el cual cibe el nombre de *grupo cociente* de **G** por **H**.

MA 0.3.8

Si **G** es un grupo finito y **N** es un subgrupo normal de **G**, ntonces $o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$ (véase [7]).

EFINICION 0.3.9

Una función **f** de un grupo **G** en un grupo **G'**, se dice que es n *homomorfismo* si para a,b $\in$ **G** cualesquiera se tiene:

$$f(a*b) = f(a)*'f(b),$$

donde $*$ y $*'$ son las operaciones de los grupos **G** y **G'** espectivamente.

EFINICION 0.3.10

Un conjunto no vácio $\mathfrak{R}$, se dice que es un *anillo asociativo* con 1 si en $\mathfrak{R}$ están definidas dos operaciones denotadas por "+" y "·" tales que para cualesquiera a,b y c de $\mathfrak{R}$:

(1). $a+b \in \mathfrak{R}$

(2). $a+b = b+a$

(3). $(a+b)+c = a+(b+c)$

(4). Existe un elemento 0 en $\mathfrak{R}$ tal que $a+0 = a \ \forall \ a \in \mathfrak{R}$

(5). Para cada $a \in \mathfrak{R}$ existe un elemento $-a \in \mathfrak{R}$ tal que $a+(-a) = 0$

(6). Existe $1 \in \mathfrak{R}$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall \ a \in \mathfrak{R}$

(7). $a \cdot b \in \mathfrak{R}$

(8). $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(9). $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

NOTA

Si la multiplicación de $\mathfrak{R}$ es tal que $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a,b \in \mathfrak{R}$ entonces decimos que $\mathfrak{R}$ es un anillo conmutativo.

CAPITULO 1

§ VARIEDADES DIFERENCIABLES

Este capítulo está dedicado al estudio de las variedades iferenciables; en la primera sección definiremos estructura iferenciable sobre algún conjunto S, para después, en la segunda ección, definir variedad diferenciable, ilustrar con algunos jemplos sencillos, en las secciones 3 y 4, estudiar las ubvariedades, productos de ellas y definir las variedades con rontera que serán de gran importancia, en el proceso de integración ue se desarrollará en el capitulo 6 de este trabajo.

§ 1.1 ESTRUCTURA DIFERENCIABLE

EFINICION 1.1.1

Sea S un conjunto no vácio. Una *carta* sobre S (ó un sistema de oordenadas) es una función biyectiva φ de un subconjunto $U \subset S$ obre un subconjunto abierto de un espacio de Banach.

OTACION

Denotaremos una carta o sistema de coordenadas como un par (U,φ) donde U es el dominio de φ, además las funciones $x^i = \pi^i \circ \varphi$ las lamaremos las *funciones coordenadas*.

OTA 1.1.2

En este trabajo, nuestros espacios de Banach simpre serán los espacios $\mathbb{R}^n$.vear la figura 1.1 .

figura 1.1

EFINICION 1.1.3

Un *atlas* sobre S, es una familia de cartas $\mathfrak{A}= \left\{(U_i,\varphi_i): i \in I\right\}$

ales que:

). $S=\bigcup_{i\in I}\{U_i\}$

i). Para dos cartas (U_i,φ_i) y (U_j,φ_j) tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ se iene una función de transición " ó cambio de coordenada" :

$_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} | \varphi_i(U_i \cap U_j)$, donde $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$ y φ_{ji} es n difeomorfismo. (figura 1.2)

figura 1.2

EJEMPLOS

(1) Cualquier espacio $\mathbb{R}^n$ admite un atlas formado sólo por la carta $(\mathbb{R}^n,\varphi)$ donde φ es la función identidad.

(2) Sea S^1 el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$S^1 = \{ X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| = 1 \}$$

Las cartas (U,φ) y (V,ψ) para S^1, pueden ser definidas de la siguiente forma:

$U = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ y sea $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$\varphi(x)$ = ángulo que el vector x forma con el primer eje, así $-\pi < \varphi(x) < \pi$.

$V = S^1 \setminus \{(1,0)\}$ y sea $\psi: V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$x) =$ ángulo que el vector x forma con el primer eje, es decir $< \psi(x) < 2\pi$. (figura 1.3)

figura 1.3

Con ayuda de la figura 1.3 podemos ver que;

$$\varphi\circ\psi^{-1} = \begin{cases} \text{id sobre } (0,\pi) \\ \text{id}-2\pi \text{ sobre } (\pi,2\pi) \end{cases}$$

La función $\varphi\circ\psi^{-1}$ es un difeomorfismo entre los conjuntos

$$\psi(\mathbf{U}\cap\mathbf{V}) = (0,2\pi)\setminus\{\pi\} \text{ y } \varphi(\mathbf{U}\cap\mathbf{V}) = (-\pi,\pi)\setminus\{0\}.$$

Las cartas $(\mathbf{U},\varphi)$ y $(\mathbf{V},\psi)$ son compatibles, y $\mathbf{S}^1$ es cubierto por $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$. Así estas dos cartas forman un atlas para $\mathbf{S}^1$.

DEFINICION 1.1.4

Un atlas $\mathfrak{A}$ sobre un conjunto **S** es un atlas *maximal* $\mathfrak{A}_m$ si para toda carta $(\mathbf{U},\varphi)$ tal que $\varphi\circ\varphi_i^{-1}$ y $\varphi_i\circ\varphi^{-1}$ son de clase $\mathbf{C}^\infty$ $\forall i\in I$ entonces $(\mathbf{U},\varphi) \in \mathfrak{A}$. A una carta $(\mathbf{U},\varphi)$ que cumple con lo anterior se le llama *carta localmente admisible.*

DEFINICION 1.1.5

Dos atlas $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ son *equivalentes* sí y sólo si $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ es un atlas.

OBSERVACION

La relación anterior define una relación de equivalencia.

DEFINICION 1.1.6

Una *estructura diferenciable* $\mathcal{F}$ sobre **S** es un atlas maximal sobre **S**.

EJEMPLO

La estructura diferenciable estándar sobre el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es obtenida tomando $\mathcal{F}$ como la colección máxima que contenga la carta $(\mathbb{R}^n,\varphi)$ donde φ es la identidad $\varphi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que es de clase C^∞.

§ 1.2 VARIEDAD DIFERENCIABLE

DEFINICION 1.2.1

Una *variedad diferenciable* es un par $(S,\mathcal{F})$ donde **S** es un conjunto y $\mathcal{F}$ una estructura diferenciable sobre **S**. Siempre denotaremos a las variedades difenciables con las letras **M, N...**

DEFINICION 1.2.2

Una variedad diferenciable **M** es una *n-variedad*, cuando cada carta tiene sus valores en un espacio euclideano n-dimensional. Así alrededor de cada punto $a \in M$ existe una carta localmente admisible (U,φ) con $a \in U$ y $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

DEFINICION 1.2.3

Sea **M** una varieded diferenciable, un subconjunto $A \subset M$ es *abierto* si $\forall\ a \in A$, existe una carta admisible localmente (U,φ) tal que $a \in U$ y $U \subset A$.

OBSERVACION 1.2.4

Toda carta en **M** es un conjunto abierto en **M**.

DEFINICION 1.2.5

Sea $\mathcal{T}_M$ la siguiente colección de conjuntos abiertos sobre **M**:

$$\mathcal{T}_M = \{ A \subseteq M : A \text{ es abierto en } M \}$$

PROPOSICION 1.2.6

$\mathcal{T}_M$ es una topología sobre **M**, siendo **M** una variedad diferenciable. Es decir **M** es un espacio topológico.

Demostracion.

i). $\emptyset \in \mathcal{T}_M$.

$M = \cup\left\{U_i : i \in I\right\}$ es decir es una unión de cartas, por lo que **M** es abierto.

ii). Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_M$, es decir A_1 y A_2 son abiertos (con $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$) entonces:

$\forall\, a \in A_1\ \exists\ (U_a, \varphi)$ tal que $a \in U_a \subset A_1$.

$\forall\, b \in A_2\ \exists\ (U_b, \varphi)$ tal que $b \in U_b \subset A_2$.

Como $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ sea $c \in A_1 \cap A_2$ luego $c \in A_1$ y $c \in A_2$ por lo que existe (U_c, φ) tal que:

$c \in U_c \subset A_1$ y $\exists\ (U'_c, \varphi')$ tal que $c \in U'_c \subset A_2$, así $c \in U_c \cap U'_c$, y $U_c \cap U'_c$ es abierto, por lo que $U_c \cap U'_c \subset A_1 \cap A_2$ y por lo tanto $A_1 \cap A_1 \in \mathcal{T}_M$.

Por inducción se tiene que $\bigcap_1^n U_i \in \mathcal{T}$ cuando $U_i \in \mathcal{T}$ $i = 1, \ldots, n$.

iii). Sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y sea $a \in A$. Entonces $a \in A_j$ para algun $j \in I$ por lo que existe (U_a, φ) tal que $a \in U_a \subset A_j$ **A** es abierto. Así $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{T}_M$. Por lo tanto la unión de abiertos es abierto. ■

Con esta topología, se tiene que $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, para toda carta (U, φ) en la variedad **M**.

NOTA

Siempre pediremos que nuestras variedades diferenciables sean espacios topológicos de Hausdorff y segundo numerables.

OBSERVACION 1.2.7

En nuestro trabajo, todas nuestras variedades diferenciables serán de dimensión finita.

JEMPLOS

(1). Todo espacio topológico discreto ($\mathcal{T}= \mathbb{P}(S)$) es una -variedad, las cartas están dadas por $(\{s\},\varphi_S)$, donde $_S:\{s\}\longrightarrow\{0\}$, con $s \in S$ y $\varphi(s) = 0$.

(2). $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable, su estructura diferen-iable está dada por el atlas que contiene la carta dada por la dentidad.

(3). Un espacio vectorial de dimensión finita V sobre $\mathbb{R}$, tiene structura de variedad diferenciable, de una manera natural. En fecto, si $\{e_i\}_1^n$ es una base para V, entonces podemos dar a V una structura diferenciables de la siguiente manera:

Sea $\{r_i\}_1^n$ la base dual (es decir, $r_i(e_j) = \delta_{ij}$, tal que si $\in V$, entonces $r_i(v) = r_i(v_1e_1+,\dots,+v_ne_n) = v_i$).

Un sistema global de coordenadas es $(V, r_1,\dots,r_n)$.

Si $v = v_1e_1+,\dots,+v_ne_n$, entonces identificamos V con $\mathbb{R}^n$ de la iguiente manera:

$:V\longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $v = (v_1e_1+,\dots,+v_ne_n) \longmapsto (v_1,\dots,v_n)$. Así (V,φ) es una carta global y $(V, r_1,\dots,r_n)$ es un sistema de oordenadas, $r_i = \pi^i\circ\varphi$.

§ 1.3 SUBVARIEDAD, VARIEDAD PRODUCTO

EFINICION 1.3.1

Una *subvariedad* de una variedad **M**, es un subconjunto **B** $\subset$ **M**, con a propiedad de que para todo **b** $\in$ **B**, existe una carta admisible $(\mathbf{U},\varphi)$ en **M** con **b** $\in$ **U**, la cual tiene la siguiente propiedad de ubvariedad (abreviadamente S.M.):

Existen espacios euclideanos de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ ales que:

S.M. $\varphi:U \longrightarrow \mathbb{R}^n X \mathbb{R}^m$ y $\varphi(U\cap B)= \varphi(U)\cap(\mathbb{R}^n X\{0\})$. Ver la figura 1.4

figura 1.4

OBSERVACION 1.3.2

Cualquier subconjunto abierto de **M** es una subvariedad. Basta tomar $\mathbb{R}^m=\{0\}$ en la definición anterior y usar cualquier carta.

PROPOSICION 1.3.3

Sea **B** una subvariedad de una variedad **M**, entonces **B** misma es una variedad con la estructura diferenciable generada por los atlas:

$\left\{(U\cap B, \varphi|(U\cap B))\right.$: con (U,φ) es una carta admisible en **M** que tiene la propiedad S.M. para **B**.$\left.\right\}$

DEMOSTRACION.

Si $U_i\cap U_j\neq \emptyset$ y (U_i,φ_i), (U_j,φ_j) con la propiedad S.M. Así escribimos:

$\varphi_i=(\alpha_i,\beta_i)$, $\varphi_j=(\alpha_j,\beta_j)$ donde

$\alpha_i:U_i\longrightarrow E \quad \alpha_j:U_j\longrightarrow E$

$\beta_i:U_i\longrightarrow F \quad \beta_j:U_j\longrightarrow F$

$\alpha_i|U_i\cap B:U_i\cap B\longrightarrow \varphi_i(U_i)\cap(E\times\{0\})$ y

$\alpha_j|U_j\cap B:U_j\cap B\longrightarrow \varphi_j(U_j)\cap(E\times\{0\})$ son biyectivas.

la función de transición $(\varphi_j|U_j\cap B)\circ(\varphi_i|U_i\cap B)^{-1}$ está dada por

$(e,0)\longmapsto((\alpha_j\circ\alpha_i^{-1})(e),0)=\varphi_{ji}(e,0)$ y es un función de clase C^∞.

■

OBSERVACION 1.3.4

En una subvariedad **B** de **M**, la topología de **B** es la topología relativa respecto a la de **M**.

DEFINICION 1.3.5 (VARIEDAD PRODUCTO)

Sean $(S_1,\mathcal{F}_1)$ y $(S_2,\mathcal{F}_2)$ dos variedades diferenciables, la *variedad producto* $(S_1XS_2,\mathcal{F}_1X\mathcal{F}_2)$ consiste del conjunto S_1XS_2, junto con la estructura diferencable $\mathcal{F}_1X\mathcal{F}_2$ generada por las cartas $\{\ (U_1XU_2,\varphi_1X\varphi_2)$: donde (U_i,φ_i) es una carta de $(S_i,\mathcal{F}_i)\ \}$.

OBSERVACION 1.3.6

La topología en el producto de variedaes es la topología producto. Así el conjunto de todos los productos cartesianos U_iXU_j resulta ser una base para la topología de la variedad producto.

NOTA 1.3.7

Si M_1 y M_2 son n,m-variedades respectivamente, entonces la dimension de M_1XM_2 es igual a n+m. Esto lo podemos extender, por inducción, para un número finito de variedades.

EJEMPLO

Sabemos que $S^1=\{\ X\in\mathbb{R}^2:\ \|X\|=1\ \}$ es una 1-variedad. Entonces $T^2=S^1XS^1$, (2-toro) es una 2-variedad, y de la misma manera podemos afirmar que el n-toro $T^n = S^1X...XS^1$ es una n-variedad.

EJEMPLO

Un ejemplo de una variedad producto es el cuadrado unitario abierto " 2-rectángulo (0,1)X(0,1)".

DEFINICION 1.3.8

Sean $f:M\longrightarrow N$, una función entre variedades **M** y **N** con dimensiones m y n respectivamente. Diremos que **f** es una *función de clase*

C^{∞} si para toda $m \in M$, y una carta admisible (V,ψ) de N con $f(m) \in V$ existe una carta (U,φ) en M con $m \in U$ y $f(U) \subset V$, tal que $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^{∞}. Véase la figura 1.5

figura 1.5

NOTA

A la función $f_{\varphi\psi}$ se la llama la representación local de **f**.

OBSERVACION 1.3.9

Si r= 0 esto coincide con la definición de continuidad de **f**.

EJEMPLOS

Ejemplos de funciones C^{∞} entre variedades son la función antípoda en $S^n = \{ X \in \mathbb{R}^{n+1} : \|X\| = 1 \}$, $X \longmapsto -X$, y la traslación sobre T^n dado por $(e^{ir_1}, \ldots, e^{ir_n}) \longmapsto (e^{i(r_1+\theta_1)}, \ldots, e^{i(r_n+\theta_n)})$ con $r_i \in \mathbb{R}$ $0 \leq r_i \leq 2\pi$.

PROPOSICION 1.3.10

Si $f:M \longrightarrow N$ y $g:N \longrightarrow P$ son funciones C^{∞} entre variedades diferenciables de dimensiones n,m,k respectivamente. entonces la composición $g \circ f:M \longrightarrow P$ tambien es una función de clase C^{∞} (figura 1.6).

figura 1.6

DEMOSTRACION. Es consecuencia directa de **0.1.3** .

§ 1.4 VARIEDADES CON FRONTERA

DEFINICION 1.4.1

Llamaremos *semi- espacio* de $\mathbb{R}^n$ al siguiente conjunto: $\mathbb{H}^n = \{ X \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \ \forall\ i = 1, \ldots, n \}$

La frontera de $\mathbb{H}^n$ se define como el hiperplano $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, y la denotaremos por $\partial\mathbb{H}^n$.

DEFINICION 1.4.2

Un conjunto **M**, es llamado *n-variedad diferenciable con frontera*, si cada punto $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ tiene una carta localmente admisible $(\mathbf{U}, \varphi)$ alrededor de él, tal que φ es un difeomorfismo sobre un subconjunto abierto $\mathbf{V} \cap \mathbb{H}^n$ de $\mathbb{H}^n$, (figura 1.7).

figura 1.7

DEFINICION 1.4.3

La frontera de una variedad diferenciable **M**, la cual denotaremos por ∂**M**, es el conjunto de todos los puntos en **M**, los cuales corresponden a puntos de $\partial\mathbb{H}^n$ bajo los difeomorfismos de **1.4.2**

OBSERVACION 1.4.4

∂**M** es una (n-1)-variedad, pues existe un difeomorfismo entre cada vecindad de cada punto de ∂**M** y un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n-1}X\{0\}$.

EJEMPLO

El disco unitario D^n, que consiste de todos los puntos $X \in \mathbb{R}^n$ tales que $1 - \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \geq 0$.

es una variedad diferenciable con frontera la esfera S^{n-1}.

CAPITULO 2

HACES VECTORIALES (HAZ TANGENTE)

En este capitulo definiremos los haces vectoriales locales, para después definir lo que será un haz vectorial. Además definiremos el espacio tangente a una variedad diferenciable en cada punto de ella, para después de una manera mas general definir el haz tangente a una variedad el cual será de gran utilidad en el próximo capítulo para el estudio de campos vectoriales sobre variedades y sus flujos; veremos lo que es la tangente a una función (**Tf**), la cual está definida entre haces tangentes de variedades y probaremos un teorema análogo a la ya bien conocida "regla de la cadena" que nos dirá cómo se comporta el operador **T** aplicado ala composición de funciones. En general los conceptos y resultados que se establecen en este capítulo son fundamentales para el desarrollo subsiguiente.

§ 2.1 HAZ VECTORIAL

Para la definición formal podemos tener en mente el ejemplo de la n-esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con la colección de planos tangentes para S^n que forman un " haz vectorial " ver la figura 2.1 .

figura 2.1

DEFINICION 2.1.1

Sean **E** y **F** espacios vectoriales y **U** un subconjunto abierto de **E**, llamaremos h*az vectorial local* al producto cartesiano **UXF**, y llamaremos a **U** el *espacio base*, el cual puede ser identificado con UX{0},"sección cero o base local" (véase figura 2.2)

figura 2.2

DEFINICION 2.1.2.

Para cada **u** $\in$ **U**, {u}X**F** es llamada la *fibra sobre* **u**.

DEFINICION 2.1.3

La función π:**UXF**$\longrightarrow$ **U** dada por π(**u**,**f**)= **u** es llamado *la proyección de* **UXF** sobre la primera componente. Véase **(0.2.12)**.

OBSERVACION 2.1.4

Para cada **u** $\in$ **U** la fibra sobre **u** es π^{-1}(**u**).

DEFINICION 2.1.5

Sean **UXF** y **U'XF'** haces vectoriales locales. Una función φ: **UXF**$\longrightarrow$**U'XF'** es llamada *una función de clase* **C**$^{\infty}$ *entre haces vectoriales locales* si:

$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{f})= (\varphi_1(\mathbf{u}),\ \varphi_2(\mathbf{u})\cdot\mathbf{f})$ donde φ_1:**U**$\longrightarrow$ **U'** y φ_2:**U**$\longrightarrow$ **L(F,F')** son de clase **C**$^{\infty}$. Si la función anterior resulta ser una biyección entonces se dice que es un *isomorfismo* entre heces vectoriales locales. ver la figura 2.3

vectoriales locales, y esto nos define una relación de equivalencia.

DEFINICION 2.1.10

Una *estructura* $\mathcal{V}$ de haces vectoriales locales sobre **S** es la unión de los elementos de una clase de equivalencia de atlas de haces vectoriales sobre **S**, es decir si $[\mathcal{B}] = \{\mathcal{B}' \in \mathbf{S} : \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}\}$ entonces $\mathcal{V} = \cup \left\{ \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \sim \mathcal{B} \right\}$.

DEFINICION 2.1.11

Un *haz vectorial* **E** es un par $(\mathbf{S}, \mathcal{V})$, donde **S** es un conjunto y $\mathcal{V}$ es una estructura de haces vectoriales locales sobre **S**. Una carta en un atlas de $\mathcal{V}$ es una *carta admisible de haz vectorial.* Figura 2.4

figura 2.4

DEFINICION 2.1.12

Para un haz vectorial $\mathbf{E} = (\mathbf{S}, \mathcal{V})$, se define la *sección cero o base* por:

$$\mathbf{B} = \left\{ e \in \mathbf{E} : \text{existe } (\mathbf{W}, \varphi) \in \mathcal{V} \text{ con } e = \varphi^{-1}(u, 0) \right\}$$

OBSERVACION 2.1.13

Observemos que **B** es la unión de todas las secciones cero de un haz vectorial local, identificando **W** con un haz vectorial local via $\varphi: W \longrightarrow UXF$. Ver la figura 2.5

figura 2.5

DEFINICION 2.1.14

Sean **E** y **E'** dos haces vectoriales, una función $f: E \longrightarrow E'$ es llamada *de clase* C^{∞} *entre haces vectoriales* (isomorfismo) cuando para cada $e \in E$ y cada haz de cartas admisibles (V, ψ) de **E'** para el cual $f(e) \in V$ existe un haz de cartas admisibles (W, φ) con $f(W) \subset V$, tal que la representación local $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es una función de clase C^{∞} de haces vectoriales locales (isomorfismo). ver la figura 2.6

figura 2.6

PROPOSICION 2.1.15

Supongamos que $\mathbf{f}:\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ es una función entre haces vectoriales de clase C^∞ entonces **f** preserva la sección cero, es decir $\mathbf{f}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{B}'$

DEMOSTRACION· Supongamos $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, mostraremos que $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \in \mathbf{B}'$ para una carta de haz vectorial $(\mathbf{V},\psi)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \in \mathbf{V}$, Probaremos que $\psi(\mathbf{f}(\mathbf{b}))= (\mathbf{v},0)$, pero se tiene una carta $(\mathbf{W},\varphi)$ así $\mathbf{b} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{f}(\mathbf{W}) \subset \mathbf{V}$ y $\varphi(\mathbf{b})= (\mathbf{u},0)$. Puesto que $\psi(\mathbf{f}(\mathbf{b}))= (\psi\circ\mathbf{f}\circ\varphi^{-1})(\mathbf{u},0)$. Pero es de la forma $(\mathbf{v},0)$ pues $\mathbf{f}_{\varphi\psi}$ es lineal sobre cada fibra. ∎

EJEMPLOS

(1). Cualquier variedad **M**, es un haz vectorial con fibras de dimensión cero, es decir $M\mathrm{X}\{0\}$. ver la figura 2.7

figura 2.7

(2). El cilindro $\mathbf{E}= \mathbf{S}^1\mathrm{X}\mathbb{R}$ es un haz vectorial con $\pi:\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{B}=\mathbf{S}^1$, que es justamente la proyección de la primera componente o factor. Este es un haz vectorial trivial, pues se puede ver simplemente como un producto. ver la figura 2.8

figura 2.8

DEFINICION 2.1.16

Sea $\mathbf{f:U} \subset \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ una función de clase C^1, se define la la *tangente* de **f** por la función $\mathbf{Tf:UXE} \longrightarrow \mathbf{FXF}$, dada como sigue

$$\mathbf{Tf(u,e)= (f(u),Df(u)(e))}$$

donde **Df(u)(e)** denota **Df(u)** aplicada a $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ es una función lineal, si **f** es de clase C^r $r \geq 1$, definimos $T^r f= T(T^{r-1}f)$ inductivamente. Ver la figura 2.9

figura 2.9

OBSERVACION 2.1.17

Observemos que **Tf** es una función entre haces vectoriales de clase C^∞.

OBSERVACION 2.1.18

De 0.1.3 podemos observar que la siguiente relación se cumple $T(f \circ g)= Tf \circ Tg$.

§ 2.2 ESPACIO TANGENTE, HAZ TANGENTE

En esta sección trataremos de extender la operación **T** del contexto local, al contexto de funciones entre variedades diferenciables. En la definición será muy útil tener en mente el ejemplo de la n-esfera con su colección de haces vectoriales locales.

Nosotros construiremos el haz tangente por medio de "curvas aproximadas". Además la idea intuitiva de vector tangente a una superficie es el vector velocidad de una curva en la superficie.

DEFINICION 2.2.1

Sean $\mathbf{f},\mathbf{g}:\mathbf{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, funciones de clase C^1 e $\mathbf{I}$ abierto en $\mathbb{R}$, se dice que **f** y **g** son *tangentes* en $x_0 \in \mathbf{I}$ si:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{g}(x)\|}{|x-x_0|} = 0$$

ó equivalentemente $\mathbf{Df}(x_0) = \mathbf{Dg}(x_0)$.

DEFINICION 2.2.2

Sea **M** una variedad y $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, una *curva* por el punto **m** es una función de clase C^1, $\mathbf{c}:\mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{M}$ de un intervalo $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ sobre **M** con $0 \in \mathbf{I}$ y $\mathbf{c}(0)= \mathbf{m}$.

DEFINICION 2.2.3

Sean $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ curvas por el punto **m** y $(\mathbf{U},\varphi)$ una carta admisible con $\mathbf{m} \in \mathbf{U}$, entonces diremos que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son *tangentes* en **m** con respecto a φ sí y sólo si $\varphi\circ\mathbf{c}_1$ y $\varphi\circ\mathbf{c}_2$ son tangentes en 0, en el sentido de 2.2.1. es decir $\mathbf{D}(\varphi\circ\mathbf{c}_1)(0)= \mathbf{D}(\varphi\circ\mathbf{c}_2)(0)$. Ver la fig. 2.10

figura 2.10

PROPOSICION 2.2.4

Sean c_1 y c_2 dos curvas por el punto $m \in M$, y supongamos que (U_i, φ_i) i= 1,2, son cartas admisibles con $m \in U_i$. Entonces c_1 y c_2 son tangentes en m con respecto a φ_1 sí y sólo si son tangentes en m con respecto a φ_2.

DEMOSTRACION. c_1 y c_2 son tangentes en m respecto a φ_1 sí y sólo si $D(\varphi_1 \circ c_1)(0) = D(\varphi_2 \circ c_2)(0)$. En la intersección $U_1 \cap U_2$ tenemos $\varphi_2 \circ c_i = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ c_i)$ y de **0.1.3** se tiene que:
$D(\varphi_2 \circ c_1)(0) = D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ D(\varphi_1 \circ c_1)(0) = D(\varphi_2 \circ c_2)(0)$, pues como c_1 y c_2 son tangentes respecto a φ_1, se sigue que $D(\varphi_1 \circ c_1)(0) = D(\varphi_1 \circ c_2)(0)$.∎

La proposición anterior garantiza que la tangente a una curva en m es una propiedad *intrínseca* o independiente de la carta usada.

DEFINICION 2.2.5

Sean c_1 y c_2 dos curvas por el punto m, se dice que estas curvas son equivalentes si tienen la propiedad de ser tangentes en el punto m.

PROPOSICION 2.2.6

Ser tangente en el punto **m** es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACION.

Sean **M** una variedad diferenciable, **m** $\in$ **M** y:

c_m = { c : c es una curva por el punto m }. Denotemos por ser tangente en **m** mediante el símbolo ~, y tomemos c_α, c_β y $c_\gamma \in c_m$. Las propiedades de simetría y reflexividad de ~ son obvias. Probemos la transitividad:

Supongamos $c_\alpha \sim c_\beta$ y $c_\beta \sim c_\gamma$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|\varphi\circ c\alpha(x)-\varphi\circ c\beta(x)\|}{\|x\|} + \lim_{x\to 0} \frac{\|\varphi\circ c\beta(x)-\varphi\circ c\gamma(x)\|}{\|x\|} = 0 \text{ entonces}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|\varphi\circ c\alpha(x)-\varphi\circ c\gamma(x)\|}{\|x\|} = 0 \text{ , por lo que } c_\alpha \sim c_\gamma \qquad \blacksquare$$

DEFINICION 2.2.7

Un *vector tangente* a **M** en el punto **m** es una clase de equivalencia de curvas tangentes en m, y se denotara $[c]_m$, donde **c** es un representante de clase.

DEFINICION 2.2.8

Para una variedad **M** y **m** $\in$ **M**, el *espacio tangente* a **M** en el punto **m** es el conjunto de clases de equivalencia de curvas por el punto **m**, y lo expresaremos como:

$$T_m M = \{ [c]_m : c \text{ es una curva por el punto } m \}$$

PROPOSICION 2.2.9

El espacio tangente $T_m M$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION. Sean $[c_1]_m$ y $[c_2]_m \in T_m M$ y sean $c_1 \in [c_1]_m$ y $c_2 \in [c_2]_m$. Escojamos una carta arbitraria (U,φ) en **M** tal que **m** $\in$ **M**, y definamos

$$[c_1]_m+[c_2]_m= \left[\varphi^{-1}\Big((D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ D_t(\varphi\circ c_2)|_{t=0})+ \quad \varphi(m)\Big)\right]_m$$

ver la figura 2.11

figura 2.11

Veamos la cerradura bajo la suma definida anteriormente.

Sea $\mathbf{c}$ un representante de $[c_1]_m+[c_2]_m$ entonces

$$\mathbf{c} = \varphi^{-1}\Big((\mathbf{D}(\varphi\circ c_1)(0) + \mathbf{D}(\varphi\circ c_2)(0)) + \varphi(\mathbf{m})\Big)$$

Tomemos una curva c_* por $\mathbf{m}$ y una carta $(\mathbf{U},\varphi)$ que contenga a $\mathbf{m}$ tal que c_* es tangente a $\mathbf{M}$ en $\mathbf{m}$ respecto a φ, es decir $c_* \in [c_1]_m$. Tenemos que ver que $\mathbf{D}(\varphi\circ c_*)(0) = \mathbf{D}(\varphi\circ \mathbf{c})(0)$.

$$\mathbf{D}(\varphi\circ \mathbf{c})(0) = \mathbf{D}\Big[\varphi\circ\Big(\varphi^{-1}(\{\mathbf{D}(\varphi\circ c_1)(0)+\mathbf{D}(\varphi\circ c_2)(0)\} + \varphi(\mathbf{m}))\Big)\Big]_{(0)}$$

$$= \mathbf{D}\Big[\varphi\circ\Big(\varphi^{-1}(\{\mathbf{D}(\varphi\circ c_1)(0)+\mathbf{D}(\varphi\circ c_2)(0)\}) + \mathbf{m} \Big) \Big]_{(0)} =$$

$$= \mathbf{D}\Big[\varphi\circ\varphi^{-1}\Big(\mathbf{D}(\varphi\circ c_1)(0)+\mathbf{D}(\varphi\circ c_2)(0)\Big)\Big]_{(0)} = \mathbf{D}\Big[(\varphi\circ c_1)(0)\Big] = \mathbf{D}(\varphi\circ c_*)(0).$$

Se tiene así que $[c_1]_m+[c_2]_m \in \mathbf{T}_m\mathbf{M}$.

Tomemos $c_1' \in [c_1]_m$ y $c_2' \in [c_2]_m$ y cualquier otra carta ψ tal que $\mathbf{m} \in \psi$, entonces:

$[c_1']_m+[c_2']= \Big[\psi^{-1}\Big((\mathbf{D}_t(\psi\circ c_1')|_{t=0}+\mathbf{D}_t(\psi\circ c_2')|_{t=0}) + \psi(\mathbf{m})\Big)\Big]_m$ Debemos ver que la suma esta bien definida, es decir, para cualquier carta φ se debe cumplir

$$\mathbf{D}_s\Big(\varphi\Big(\varphi^{-1}\Big[(\mathbf{D}_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ \mathbf{D}_t(\varphi\circ c_2)|_{t=0})+ \varphi(\mathbf{m})\Big]\Big)\Big)^{(\#)}_{s=0} =$$

$$= \mathbf{D}_s\Big(\varphi\Big(\psi^{-1}\Big[(\mathbf{D}_t(\psi\circ c_1')|_{t=0}+ \mathbf{D}_t(\psi\circ c_2')|_{t=0})+ \psi(\mathbf{m})\Big]\Big)\Big)^{(\#\#)}_{s=0}$$

Desarrollando (#) tenemos:

$$D_s\varphi(\varphi^{-1})|_{t=0}D_s\Big((D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ D_t(\varphi\circ c_2)|_{t=0})+ \varphi(m)\Big)_{s=0}=$$

$$= D_s\Big((D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ D_t(\varphi\circ c_2)|_{t=0})\Big)_{s=0}$$

Ahora desarrollando (##) se tiene:

$$D_s\left(\varphi\left(\psi^{-1}\Big[(D_t(\psi\circ c_1'+\psi\circ c_2')|_{t=0}+ \psi(m)\Big]\right)\right)_{s=0}=$$

$$= D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}D_s\Big(D_t(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ c_1'+ \psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ c_2')|_{t=0}\Big)_{s=0}=$$

$$= D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}D_s\Big(D_t(\psi\circ\varphi^{-1})|_{t=0}\big(D_t(\varphi\circ c_1')|_{t=0}+ D_t(\varphi\circ c_2')|_{t=0}\big)\Big)_{s=0}=$$

$$= D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}D_t(\psi\circ\varphi^{-1})|_{t=0}D_s\Big(D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ D_t(\varphi\circ c_2)|_{t=0}\Big)_{s=0}=$$

$$= D_s\Big((D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ D_t(\varphi\circ c_2)|_{t=0})\Big)_{s=0}$$

como se observa (#)=(##), por lo tanto la suma esta bien definida.

Ahora definiremos la multiplicacion por escalares, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $c_1\in [c_1]_m$ entonces definamos $\lambda[c_1]= \Big[\varphi^{-1}\Big(\lambda D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+ \varphi(m)\Big)\Big]_m$ observe la figura 2.12

figura 2.12

Veamos la cerradura para la multiplicación por escalares definida anteriormente.

Sea c un representante de $\lambda[c_1]_m = \Big[\varphi^{-1}\Big(\lambda D(\varphi\circ c_1)(0) + \varphi(m)\Big)\Big]_m$,

entonces $c = \varphi^{-1}\Big(\lambda D(\varphi\circ c_1)(0) + \varphi(m)\Big)$

Tomemos una curva c_* por el punto m y una carta (U,φ) que contenga a m, tal c_* sea tangente a M en el punto m con respecto a φ, es decir, $c_* \in [c_1]_m$.

Tenemos que ver que se cumple $D(\varphi\circ c)(0) = D(\varphi\circ c_*)(0)$

$$D(\varphi\circ c)(0) = D\left[\varphi\circ\varphi^{-1}\left(\lambda D(\varphi\circ c_1)(0)+\varphi(m)\right)\right]_{(0)}=$$

$$D\left[\varphi\circ\left(\varphi^{-1}(\lambda D(\varphi\circ c_1)(0))+m\right)\right]_{(0)}= D\left[\varphi\circ\left(\varphi^{-1}(\lambda D(\varphi\circ c_1)(0))\right)\right]_{(0)}=$$

$$= D(\varphi\circ c_1)(0) = D(\varphi\circ c_*)(0).$$

Se tiene así que $\lambda[c_1]_m \in T_mM$ para todo escalar λ.

La multiplicación por escalares está bien definida: sea $c_1' \in [c_1]_m$ y ψ cualquier otra carta que contiene a m en su dominio; debemos ver que $\lambda[c_1']_m$ esta en la misma clase de equivalencia de $\lambda[c_1]_m$, es decir, para cualquier carta φ:

$$D_s\left(\varphi\left[\varphi^{-1}\left(\lambda D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+\varphi(m)\right)\right]\right)_{s=0} \overset{(\$)}{=} D_s\left(\varphi\left[\psi^{-1}\left(\lambda D_t(\psi\circ c_1')|_{t=0}+\psi(m)\right)\right]\right)_{s=0}^{(!)}$$

desarrollando ($):

$$D_s(\varphi(\varphi^{-1})_{s=0}D_s(\lambda D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0}+\varphi(m))_{s=0}= \lambda D_s(D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0})$$

desarrollando (!) tenemos:

$$D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}D_s(\lambda D_t(\psi\circ c_1')|_{t=0}+\psi(m))_{s=0}=$$

$$= D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}\lambda D_s(D_t(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ c_1')|_{t=0})_{s=0}=$$

$$= \lambda D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}D_s(D_t(\psi\circ\varphi^{-1})|_{t=0}D_t(\varphi\circ c_1')|_{t=0})_{s=0}=$$

$$=\lambda D_s(\varphi\circ\psi^{-1})_{s=0}D_t(\psi\circ\varphi^{-1})|_{t=0}D_s(D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0})_{s=0}= \lambda D_s(D_t(\varphi\circ c_1)|_{t=0})_{s=0}$$

como se ve ($)= (!), por lo tanto el producto por escalares está bien definido y así T_mM es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ∎

DEFINICION 2.2.10

Llamaremos el *haz tangente* de M al conjunto $\cup_m T_mM$ y lo denotaremos por $TM= \cup_m T_mM$. (Unión ajena)

DEFINICION 2.2.11

Llamaremos la *proyección del haz tangente* a la función definida en **TM**, $\mathcal{T}_M:\mathbf{TM}\longrightarrow \mathbf{M}$ definida por $\mathcal{T}_M([c]_m)= \mathbf{m}$.

Ahora daremos una construcción alternativa, para el espacio tangente a una variedad diferenciable en algún punto de ella. La manera expuesta a continuación facilita el trabajo a la hora de estudiar formas diferenciales sobre variedades. Veremos esta construcción sin abundar demasiado en detalles.

DEFINICION 2.2.12

Sea **M** una variedad diferenciable y $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$. Un *vector tangente* a **M** en el punto **m**, es una función $v:\mathcal{F}(\mathbf{M})\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que si $(\mathbf{U},\varphi)$ es un sistema de coordenadas con $\mathbf{m} \in \mathbf{U}$, entonces existe una n-ada $(\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^n)$ de números reales con la siguiente propiedad. Para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$:

$$v(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^i}(\mathbf{f}\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(\mathbf{m})}$$

donde $\mathbf{r}^i:\mathbb{R}^n\longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r}^i(\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^n) = \mathbf{a}^i$

(Si **W** es el dominio de **f**, entonces φ y **f** están definidas sobre un conjunto abierto $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$ que contiene a **m**, así $\mathbf{f}\circ\varphi^{-1}$ es una función suave con dominio $\varphi(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a $\varphi(\mathbf{m})$).

OBSERVACION 2.2.13

Si $v:\mathcal{F}(\mathbf{M})\longrightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedades para ser un vector tangente con respecto a un sistema de coordenadas φ alrededor de **m**, entonces éste también tiene las mismas propiedades con respecto a cualquier otro sistema de coordenadas alrededor de **m**.

En efecto, si ψ es otro sistema de coordenadas alrededor de **m**, entonces usando la regla de la cadena, obtenemos

$$v(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{i}}(\mathbf{f}\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(\mathrm{m})} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{i}}(\mathbf{f}\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(\mathrm{m})} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{j}}(\mathbf{f}\circ\psi^{-1})|_{\psi(\mathrm{m})} J_{ij}(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(\mathrm{m})}$$

donde $J_{ij}(\psi\circ\varphi^{-1})$ es la matriz jacobiana de la función $\psi\circ\varphi^{-1}$. Entonces:

$$v(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{j} J_{ij}(\psi\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(\mathrm{m})}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{j}}(\mathbf{f}\circ\psi^{-1})|_{\varphi(\mathrm{m})}$$

obtenemos:

$$\mathbf{b}^{j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{i} J_{ij}(\psi\circ\varphi^{-1})|_{\psi(\mathrm{m})}$$

por lo que;

$$v(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}^{j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{j}}(\mathbf{f}\circ\psi^{-1})|_{\psi(\mathrm{m})}.$$

NOTACION

Dado un sistema de coordenadas alrededor de **m**, sea $\mathbf{x}^{j} = \mathbf{r}^{j}\circ\varphi$ lo cual denota la j-ésima función coordenada de φ. Por $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{j}}$ (j= 1,...,n) es definido el vector tangente en **m** por:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{j}}(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{j}}(\mathbf{f}\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(\mathrm{m})}.\ \text{para } \mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$$

Entonces aquí $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{j}}$ corresponde al sistema de coordenadas φ con la n-ada (0,...,1,...,0) donde 1 esta en el j-ésimo lugar.

OBSERVACION 2.2.14

Si $\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{n}$ son las funciones coordenadas, de un sistema de coordenadas φ alrededor de **m** y $\mathbf{y}^{1},\ldots,\mathbf{y}^{n}$ son las funciones coordenadas de otro sistema de coordenadas ψ alrededor de **m**, entonces tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j}(\mathbf{y}^i)\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^i}$$

OBSERVACION 2.2.15

Un vector tangente v en $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ tiene las siguientes propiedades. Para cualquier $\mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1). $v(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = v(\mathbf{f}) + v(\mathbf{g})$

(2). $v(\lambda \mathbf{f}) = \lambda v(\mathbf{f})$

(3). $v(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = v(\mathbf{f})\cdot\mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{f}(\mathbf{m})v(\mathbf{g})$.

Así se dice que $v:\mathcal{F}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *derivación*, pues cumple con (1), (2) y (3). Estas son las propiedades que caracterizan a un vector tangente.

OBSERVACION 2.2.16

El conjunto $\mathbf{T_mM}$ de vectores tangentes en **m** forma un espacio vectorial bajo las siguientes reglas de suma y multiplicación por escalares:

$$(v_1 + v_2)(\mathbf{f}) = v_1(\mathbf{f}) + v_2(\mathbf{f}) \qquad v_1,\ v_2 \in \mathbf{T_mM}$$

$$(\lambda v_1(\mathbf{f})) = \lambda(v_1(\mathbf{f})) \qquad v_1 \in \mathbf{T_mM} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para ver que $v_1 + v_2$ y λv_1 son vectores tangentes en **m**, se φ un sistema de coordenadas alrededor de **m**, con funciones coordenadas $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^n$, entonces:

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^i\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}\right) \text{ y } v_2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}^i\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}\right)$$

Para $(\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^n)$ y $(\mathbf{b}^1,\ldots,\mathbf{b}^n)$ es facil checar que:

$$v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}^i + \mathbf{b}^i)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} \text{ y } \lambda v_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda \mathbf{a}^i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}$$

La función $(a^1,\dots,a^n) \longrightarrow \sum a^i(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i})$. Nos da un isomorfismo entre espacios vectoriales $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{T}_m\mathbf{M}$. Así $\mathbf{T}_m\mathbf{M}$ tiene dimensión n. Más aún, es claro que $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}\}_{i=1}^n$ es una base para $\mathbf{T}_m\mathbf{M}$. El espacio $\mathbf{T}_m\mathbf{M}$ es llamado el espacio tangente de **M** en **m**.

Para φ y ψ dos sistemas de coordenadas alrededor de **m** con funciones coordenadas $\mathbf{x}^1,\dots,\mathbf{x}^n$ y $\mathbf{y}^1,\dots,\mathbf{y}^n$ respectivamente, la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j}(\mathbf{y}^i)\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^i}$$

expresa los vectores $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j}$ en términos de la base $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^i}\}_{i=1}^n$. Entonces la matriz de cambio de base, de la base $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^i}\}$ de **TM** a la base $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}\}$ es precisamente la matriz jacobiana $((\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j})(\mathbf{y}^i))$.

OBSERVACION 2.2.17

El conjunto $\{d\mathbf{x}^j\}_{j=1}^n$, es la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j}\}$, a causa de que $d\mathbf{x}^j(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij}$. Es decir es una base para el espacio *cotangente*, $(\mathbf{T}_m\mathbf{M})^*$, a la variedad **M** en el punto **m**.

LEMA 2.2.18

Sea $U \subset E$ un subconjuto abierto de un espacio de Banach y c una curva por $u \in U$. Entonces existe un único $e \in E$ tal que la curva c_{ue}, dada por $c_{ue}(t) = u + te$ (definida en algún intervalo I, $0 \in I$ tal que $c_{ue}(I) \subset U$) es tangente a c en u.

DEMOSTRACION. Por definición $Dc(0)$ es la única función lineal en $L(\mathbb{R},E)$ tal que la curva $g:\mathbb{R} \longrightarrow E$ dada por $g(t) = u + Dc(0)\cdot t$ es tangente a c en $t=0$ si $e = Dc(0)\cdot 1$, entonces $g = c_{ue}$ ■

LEMA 2.2.19

Supongamos c_1 y c_2 son curvas por el punto $m \in M$ y además son tangentes en m, sea $f:M \longrightarrow N$ una función entre variedades diferenciables entonces $f\circ c_1$ y $f\circ c_2$ son tangentes en $f(m) \in N$.

DEMOSTRACION. P.D. $D(\psi\circ f\circ c_1)(0) = D(\psi\circ f\circ c_2)(0)$.

Sabemos que $\psi\circ f\circ c_i = (\psi\circ f\circ \varphi^{-1})\circ(\varphi\circ c_i)$ $i=1,2$. Y por 0.1.3 tenemos que $D(\psi\circ f\circ c_1)(0) = D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(0)\cdot D(\varphi\circ c_1)(0)$ pero por hipotesis, $D(\varphi\circ c_1)(0) = D(\varphi\circ c_2)(0)$, entonces $D(\psi\circ f\circ c_1)(0) = D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(0)\cdot D(\varphi\circ c_2)(0) = D(\psi\circ f\circ c_2)(0)$. Así $f\circ c_1$ y $f\circ c_2$ son tangentes en $f(m)$. ■

Siendo un hecho que sucede lo anterior, podemos justificar lo siguiente.

DEFINICION 2.2.20

Sea $f:M \longrightarrow N$ una función entre variedades, definimos la *tangente de* f (Tf) por:

$Tf:TM \longrightarrow TN$ dada por $Tf([c]_m) = [f\circ c]_{f(m)}$.

Tf está bien definida pues, si escogemos cualquier otro representante de clase $[c]_m$, digamos c_1, entonces c y c_1 son tangentes en m y por lo tanta $f\circ c_1$ y $f\circ c$ son tangentes en $f(m)$, esto es $[f\circ c]_{f(m)} = [f\circ c_1]_{f(m)}$, y por construcción se sigue que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \Big\downarrow \mathcal{T}_M & & \Big\downarrow \mathcal{T}_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Es decir $f\circ\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_N\circ Tf$

TEOREMA 2.2.21

(i) Supongamos que $f:M\longrightarrow N$ y $g:N\longrightarrow P$ son funciones de clase C^∞ entre variedades, entonces $g\circ f:M\longrightarrow P$ es una función de clase C^∞ y $T(g\circ f)= Tg\circ Tf$.

(ii) Si $h:M\longrightarrow M$ es la función identidad entonces

$Th:TM\longrightarrow TM$ es la función identidad.

(iii) Si $f:M\longrightarrow N$ es un difeomorfismo entonces $Tf:TM\longrightarrow TN$ es una biyección y $(Tf)^{-1}= T(f^{-1})$.

DEMOSTRACION. (i). Sean $(U,\varphi),(V,\psi)$ y (W,ρ) cartas de M,N y P, con $f(U)\subset V$ y $g(V)\subset W$, entonces tenemos para la representación local

$(g\circ f)_{\varphi\rho}= \rho\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}= \rho\circ g\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}= g_{\psi\rho}\circ f_{\varphi\psi}$ (0.1.2)

por lo tanto $g\circ f$ es de clase C^r

luego $T(g\circ f)_{[C]m}= [g\circ f\circ c]_{(g\circ f)(m)}$ y

$(Tg\circ Tf)_{[C]m}= Tg([f\circ c]_{f(m)})=[g\circ f\circ c]_{(g\circ f)(m)}$ por lo que $T(g\circ f)= Tg\circ Tf$.

(ii). Es inmediato de la definicion de T pues

$T_h([c]_m)= [h\circ c]_{h(m)}= [c]_m$.

(iii). f y f^{-1}son difeomorfismos con $f\circ f^{-1}$ la identidad sobre N, mientras $f^{-1}\circ f$ es la identidad sobre M, por lo que usando (i) y (ii) $Tf\circ Tf^{-1}$ es la identidad sobre TN, $Tf^{-1}\circ Tf$ es la identidad sobre TM ■

LEMA 2.2.22

Sean $U \subset E$ y $V \subset F$ (E,F espacios de Banach) subconjuntos abiertos y $f:U \longrightarrow V$ una función de clase C^1. Si $i:U\times E \longrightarrow TU$ es la función $i(u,e) = [c_{ue}]_u$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} U\times E & \xrightarrow{f'} & U\times F \\ \big\downarrow i & & \big\downarrow i \\ T(U) & \xrightarrow{Tf} & T(V) \end{array}$$

$[f\circ c_{ue}]_{f(u)}$. Tambien se cumple la siguiente igualdad

$(i\circ f')(u,e)= i(f(u),Df(u)(e))= [c_{f(u),Df(u)e}]$ a condición de que las siguientes curvas sean tangentes para $t= 0$

$t\longmapsto f(u+te)$ y $t\longmapsto f(u)+ t(Df(u)(e))$ pero es claro de la definición de derivada y de 2.2.19 ∎

El lema anterior nos muestra que si identificamos $U\times E$ con $T(U)$ por medio de i, entonces podemos identificar f' y Tf.

LEMA 2.2.23

Si $f:U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, entonces $Tf:U\times E \longrightarrow V\times F$ es un isomorfismo entre haces vectoriales locales.

DEMOSTRACION.

Ya que $Tf(u,e)= (f(u),Df(u)(e))$, entonces Tf es una función entre haces vectoriales locales, pero como f es difeomorfismo entonces $(Tf)^{-1}= T(f^{-1})$ es también una función entre haces vectoriales locales, y por tanto Tf es isomorfismo entre haces vectoriales locales. ∎

Para una carta (U,φ) sobre una variedad diferenciable M, podemos construir:

$T\varphi:TU \longrightarrow T(\varphi(U))$, entonces $T\varphi$ es una biyección, ya que φ es un difeomorfismo, por lo tanto sobre **TM** podemos decir que $(TU,T\varphi)$ es una carta de haz vectorial local. Nótese que tenemos un haz vectorial local especial donde las fibras tienen la misma dimension que la base.

LEMA 2.2.24

Sea **M** una subvariedad suave k-dimensional de la variedad n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Si (U,φ) es una carta para $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de subvariedad para **M**, entonces $(TU,T\varphi)$ es una carta para $\mathbb{R}^{2n}$ tal que:

$$T\varphi(TU\cap TM) = T(\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^k X\{0\}X\mathbb{R}^k X\{0\}))$$

DEMOSTRACION

Sea (U,φ) que cumple con la hipótesis; por **2.2.19** la función $T\varphi:TU \longrightarrow T\varphi(TU)$ es biyectiva sobre el conjunto $T\varphi(TU) = T(\varphi(U)) = \varphi(U)X\mathbb{R}^n$ el cual es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$, por lo tanto $(TU,T\varphi)$ es una carta para $\mathbb{R}^{2n}$. Finalmente

$$T\varphi(TU\cap TM) = T\varphi(T(U\cap M)) = T(\varphi(U\cap M)) = T(\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^k X\{0\})) =$$
$$= [(\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^k X\{0\})]\cap[(\mathbb{R}^k X\{0\})X(\mathbb{R}^k X\{0\})] = T\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^k X\{0\}X\mathbb{R}^k X\{0\}) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.2.25

Sea **M** una variedad diferenciable y $\mathfrak{A}$ un atlas de cartas admisibles, entonces:

$T\mathfrak{A}= \left\{(TU,T\varphi):\ (U,\varphi) \in \mathfrak{A}\right\}$ es un atlas de haz vectorial de **TM** llamado el *atlas natural.*

DEMOSTRACION. Ya que por definición la unión de los dominios de las cartas del atlas $\mathfrak{A}$ es **M**, la unión de las correspondientes **TU** es **TM**. Ahora debemos ver qué pasa en las intersecciones. Supongamos que $TU_i\cap TU_j\neq \emptyset$, entonces $U_i\cap U_j\neq \emptyset$ y la función interseccion o cambio de coordenadas $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ es formada por restricción de φ_j^{-1} a $\varphi_j(U_i\cap U_j)$, así debemos verificar que $T\varphi_i\circ(T\varphi_j)^{-1}$ es un isomorfismo entre haces vectoriales locales, pero esto lo garantiza el lema 2.2.23 . ∎

Por lo tanto **TM** tiene un estructura de haz vectorial natural inducido por la estructura diferenciable de **M**. **TM** es 2n-dimensional de Hausdorff y segundo numerable.

TM Hausdorff:

Sean $v_1 \neq v_2 \in$ **TM** si $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$, entonces hay vecindades $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \emptyset$ y $\pi^{-1}(\mathbf{V}_1) \cap \pi^{-1}(\mathbf{V}_2) = \emptyset$, así que $v_1 \in \pi^{-1}(\mathbf{V}_1)$ y $v_2 \in \pi^{-1}(\mathbf{V}_2)$. Si $\pi(\mathbf{V}_1) = \pi(\mathbf{V}_2) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{M}$, $(\mathbf{V},\varphi)$ es una carta $v_1, v_2 \in \mathbf{T}_m\mathbf{M}$, con $\pi(v_1) = \pi(v_2) = \mathbf{m}$.

TM es segundo numerable:

Si $(\mathbf{V},\varphi)$ es una carta en la estructura diferenciable $\mathcal{F}$ con funciones coordenadas $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^l$, definimos:

$\tilde{\varphi}:\pi(v) \longrightarrow \mathbb{R}^{2l}$ cómo $\tilde{\varphi}(v) = \left(\mathbf{x}^1(\pi(v)),\ldots,\mathbf{x}^l(\pi(v)),\mathbf{dx}^1(v),\ldots,\mathbf{dx}^l(v)\right)$

$\tilde{\varphi}$ es uno-uno y manda abiertos en abiertos de $\mathbb{R}^{2l}$.

$\{\ \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{W})\ :\ \mathbf{W}$ **es abierto en** $\mathbb{R}^{2l}$, $(\mathbf{V},\varphi) \in \mathcal{F}\ \}$ **es una base para la** topología de **TM**:

Sea $v \in$ **TM** ($v \in \mathbf{T}_m\mathbf{M}$), entonces $v \in \pi^{-1}(\mathbf{V})$, $(\mathbf{V},\varphi)$ es una carta en **M** y $v \in \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(\mathbf{V}))$. Si $v \in \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{W}) \cap \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{V})$, entonces existe un abierto $\tilde{\varphi}^{-1}$ contenido en este tal que $\mathbf{V} \in \tilde{\varphi}^{-1}(v)$.

PROPOSICION 2.2.26

Si $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, entonces $\mathcal{T}_M^{-1}(\mathbf{m}) = \mathbf{T}_m\mathbf{M}$ es una fibra de **TM** y su base **B** es difeomorfa a **M** por la proyección $\mathcal{T}_M|\mathbf{B}:\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{M}$.

DEMOSTRACION. Sea $(\mathbf{U},\varphi)$ una carta local que contiene a **m**, con $\varphi:\mathbf{U} \longrightarrow \varphi(\mathbf{U})$ y $\varphi(\mathbf{m}) = \mathbf{u}$, entonces $\mathbf{T}\varphi:\mathbf{TM}|\mathbf{U} \longrightarrow \varphi(\mathbf{U})\mathbf{XE}$ es una carta natural de **TM**, $\mathbf{T}\varphi^{-1}(\{\mathbf{u}\}\mathbf{XE}) = \mathbf{T}\varphi^{-1}\{[\mathbf{c}_{ue}]:\ \mathbf{e} \in \mathbf{E}\ \}$, por la definición de $\mathbf{T}\varphi$, y esto es exactamente $\mathbf{T}_m\mathbf{M}$ así $\mathcal{T}_M|\mathbf{B}$ es una biyección y su representación local para $\mathbf{T}\varphi$ y φ respectivamente, es la identificacion natural $\varphi(U)X\{0\} \longrightarrow \varphi(U)$, la cual es un difeomorfismo local. ■

OBSERVACION 2.2.27

De lo anterior podemos observar que **M** puede ser identificada con la seccion cero de **TM**.

PROPOSICION 2.2.28

Si **M** y **N** son variedades diferenciables y $\mathbf{f}:\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ una función de clase C^{r+1}, entonces $\mathbf{Tf}:\mathbf{TM} \longrightarrow \mathbf{TN}$ es una función entre haces tangentes de clase C^r.

DEMOSTRACION. Es suficiente verificar que es una función entre haces vectoriales locales usando el atlas natural. Para $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ tomando cartas $(\mathbf{U},\varphi)$ y $(\mathbf{V},\psi)$ sobre **M** y **N** respectivamente, con $\mathbf{m} \in \mathbf{U}$ y $\varphi(\mathbf{m}) \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{f}_{\varphi\psi} = \psi \circ \mathbf{f} \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^{r+1}, luego usando $(\mathbf{TU},\mathbf{T}\varphi)$ para **TM** y $(\mathbf{TV},\mathbf{T}\psi)$ para **TN**, debemos verificar que $(\mathbf{Tf})_{\mathbf{T}\varphi\mathbf{T}\psi}$ es una función entre haces vectoriales locales de clase C^r pero tenemos que :

$(\mathbf{Tf})_{\mathbf{T}\varphi\mathbf{T}\psi} = T\psi \circ \mathbf{Tf} \circ T\varphi^{-1} = T(\mathbf{f}_{\varphi\psi})$, y $\mathbf{Tf}_{\varphi\psi}(\mathbf{u},\mathbf{e}) = (\mathbf{f}_{\varphi\psi}(\mathbf{u}),\mathbf{Df}_{\varphi\psi}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{e})$ y esta es una función entre haces vectoriales de clase C^r. ■

CAPITULO 3

CALCULO DIFERENCIAL EN VARIEDADES

Este capítulo ha sido dividido en dos secciones. La primera se ha elaborado para estudiar campos vectoriales sobre variedades diferenciales y sus flujos, en la segunda, operadores diferenciales como por ejemplo " la derivada de Lie " que es una generalización de lo que conocemos en el cálculo diferencial de varias variables cómo la derivada direccional de una función en la dirección de algún vector. Además obtendremos la derivada de un campo vectorial en la dirección de otro campo, y la relación que esto guarda con sus respectivos flujos. El material aquí expuesto es de gran importancia para el estudio de sistemas dinámicos sobre variedades diferenciables, un tema que aquí no se toca ya que no es el objetivo de este trabajo.

§ 3.1 CAMPOS VECTORIALES Y FLUJOS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIBLES

En esta primera sección definiremos lo que es un campo vectorial sobre una variedad diferenciable, después veremos lo que es un flujo, y estableceremos algunas relaciones y propiedades de ambos conceptos, para después, en la sección proxima, ver qué es lo que sucede con los flujos y campos sobre variedades al evaluarlos en funciones suaves.

DEFINICION 3.1.1

Sea **M** una variedad diferenciable. Un *campo vectorial* $\mathbb{X}$ sobre **M** es una función $\mathbb{X}:\mathbf{M}\longrightarrow \mathbf{TM}$ tal que $\mathbb{X}(m) \in \mathbf{T_m M}$ $\forall$ $m \in \mathbf{M}$.
Esto se puede ver como una sección del haz tangente **TM** de **M**. Es decir $\mathcal{T}_M \circ \mathbb{X} = id_M$.

El conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^r es denotado por $\mathfrak{X}^r(\mathbf{M})$ y el conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ por $\mathfrak{X}^\infty(\mathbf{M})$ o solamente por $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

En otras palabras un campo vectorial asigna a cada punto de **M** un vector anclado en ese punto. ver la figura 3.1

figura 3.1

EJEMPLO.

(1). Consideremos el campo de fuerza dado por la ley de gravitación universal de Newton. Aqui la variedad es $\mathbb{R}^3-\{0\}$, y el campo vectorial es:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-mMG(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-mM\bar{G}\mathbf{r}}{\mathbf{r}^3}$$ donde

m = masa del cuerpo de prueba

M = masa del cuerpo central

$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. ver la figura 3.2

figura 3.2

(2). La función $\mathbb{X}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{T}\mathbb{R}^2$, dada por $\mathbb{X}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((\mathbf{x},\mathbf{y}),(-\mathbf{y},\mathbf{x}))$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$, puesto que $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}\circ\mathbb{X} = id_{\mathbb{R}^2}$. Véase la figura 3.3

figura 3.3

A continuación daremos algunos resultados que involucran campos vectoriales sobre una variedad **M**. Si **M**= **U** es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces el campo vectorial sobre **U** es una función $\mathbb{X}:\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{E}$ (**E** espacio vectorial)de la forma $\mathbb{X}(X)= (X,\mathbf{V}(X))$, llamaremos a **V** la parte principal de $\mathbb{X}$. ($\mathbf{V}(X):\mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.)

Si **M** es una variedad y $\varphi:\mathbf{U} \subset \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ es una carta para **M**, entonces un campo vectorial $\mathbb{X}$ sobre **M**, induce un campo vectorial

$\tilde{\mathbb{X}}$ sobre **E** llamado la representación local de $\mathbb{X}$ y se obtiene de forma natural por:

$$\tilde{\mathbb{X}}(X)= \mathbf{T}\varphi\circ\mathbb{X}(\varphi^{-1}(X)).$$

DEFINICION 3.1.2

Sea **M** una variedad diferenciable y $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. Una *curva integral* de $\mathbb{X}$ por $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ es una curva **c** por el punto **m** tal que $\mathbf{c}'(t)= \mathbb{X}(\mathbf{c}(t))$ para cada $t \in \mathbf{I}$ (**I** dominio de **c** con $0 \in \mathbf{I}$). ver la figura 3.4

figura 3.4

Si $\mathbf{M}= \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$, una curva $\mathbf{c}(t)$ es curva integral de $\mathbb{X}:\mathbf{U}\longrightarrow \mathbf{TU}$ cuando $\dot{\mathbf{c}}(t)= \mathbb{X}(\mathbf{c}(t))$ donde $\dot{\mathbf{c}}(t)= \mathbf{dc/dt}$.

Si $\mathbb{X}$ es un campo vectorial sobre una variedad diferenciable **M** y $\tilde{\mathbb{X}}$ representa la parte principal de estas representaciones locales en una carta φ, entonces una curva **c** es una curva integral de $\mathbb{X}$ cuando

$$\frac{d\tilde{c}}{dt}(t)= \tilde{\mathbb{X}}(\tilde{c}(t)) \quad \text{(sistema de ecuaciones diferenciales)}$$

donde $\tilde{c}= \varphi\circ c$ (la representación local de **c**)

Si **M** es una n-variedad y las representaciones locales de $\mathbb{X}$ y **c** son $(\mathbb{X}^1,\dots,\mathbb{X}^n)$ y $(c^1,\dots,c^n)$ respectivamente, entonces **c** es una curva integral de $\mathbb{X}$ cuando satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \dot{c}^1(t) &= \mathbb{X}^1(c^1(t),\dots,c^n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{c}^n(t) &= \mathbb{X}^1(c^1(t),\dots,c^n(t)). \end{aligned}$$

DEFINICION 3.1.3

Un campo vectorial $\mathbb{X}$, sobre una variedad **M** se dice que es *completo*, si toda curva integral para $\mathbb{X}$, está definida en todo $\mathbb{R}$.

EJEMPLO

El campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\mathbb{X}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((\mathbf{x},\mathbf{y}),(-\mathbf{y},\mathbf{x}))$$

tiene para cada punto $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^2$, la curva integral $\mathbf{c}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{c}(t) = (\mathbf{a}\cos t - \mathbf{b}\operatorname{sen} t,\ \mathbf{a}\operatorname{sen} t + \mathbf{b}\cos t)$$

cada curva integral está definida sobre todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto $\mathbb{X}$ es completo.

NOTACION

Si **M** es una variedad diferenciable, denotaremos por $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{M})$, el conjunto de todos los difeomorfismos de clase C^∞ de **M** sobre **M**.

LEMA 3.1.4

El conjunto $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{M})$ es un grupo bajo la operación composición.

DEFINICION 3.1.5

Un flujo sobre una variedad **M** es una función $\mathbf{F}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{M})$ tal que para cada s y t $\in \mathbb{R}$, $\mathbf{F}(s+t) = \mathbf{F}(s)\circ\mathbf{F}(t)$, además esto lo denotaremos por $\mathbf{F}_t$.

DEFINICIONES 3.1.6

(1). Un punto $m \in M$ se llama punto *singular* de $X \in \mathfrak{X}(M)$, si $X(m)=0$.

(2). $X \in \mathfrak{X}(M)$ se llama campo vectorial no cero, si $X(m)\neq 0$ $\forall$ $m\in M$

(3). El *soporte* de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es la cerradura de conjunto $\{ m \in M: X(m)\neq 0\}$.

EJEMPLOS

(1). la siguiente función es un flujo, sobre la variedad diferenciable $\mathbb{R}$:

$$F_t:\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ dada por } t\longmapsto e^{t}id$$

(2). Un ejemplo de un flujo sobre la variedad diferenciable $\mathbb{R}^2$, es la función:

$$F_t:\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{R}^2) \text{ dada por}$$

$$t\longmapsto (\cos t(id_1)-\mathrm{sen}\,t(id_2),\ \mathrm{sen}\,t(id_1) + \cos t(id_2))$$

§ 3.2 OPERADORES DIFERENCIALES (DERIVADA DE LIE)

En esta sección veremos algunos operadores, que al aplicarlos a campos vectoriales y a funciones definidas en alguna variedad tienen cierto comportamiento, el cual será de gran utilidad al desarrollar la teoría de integración de formas sobre cubos para después extenderla a un contexto más general, que será la integración sobre una variedad.

Empezaremos discutiendo la acción de funciones sobre otras funciones y campos vectoriales. Primero estableceremos lo siguiente.

NOTACION

Con $C^r(M,F)$ denotaremos el espacio de funciones de clase C^r,

$f: M \longrightarrow F$, donde **M** es una variedad diferenciable y **F** es un espacio de Banach ($\mathbb{R}^n$) y para abreviar escribiremos $\mathcal{F}^r(M) = C^r(M,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$.

OBSERVACION 3.2.1

$\mathcal{F}^r(M)$ tiene estructura de álgebra, pues para f, g y $h \in \mathcal{F}^r(M)$, el producto $f \cdot g$ definido por $f \cdot g(m) = f(m) \cdot g(m)$ $\forall$ $m \in M$, obedece a las propiedades algebraicas usuales del producto de funciones:

$$f \cdot g = g \cdot f \text{ y } f(g+h) = f \cdot g + f \cdot h$$

DEFINICIONES 3.2.2

(1). Sea $\psi: M \longrightarrow N$ una función de clase C^r entre variedades y $f \in \mathcal{F}^r(N)$, se define el *pull-back* de **f** por ψ por:

$$\psi^* f = f \circ \psi \in \mathcal{F}^r(M).$$

(2). Si ψ es un difeomorfismo de clase C^r y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ el *push-forward* de X por ψ es definido por:

$$\psi_* X = T\psi \circ X \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{X}^r(N).$$

La razón de los nombres se muestra en la figura 3.5

figura 3.5

Podemos intercambiar pull-back por push-forward cambiando φ por

$\psi,^{-1}$ definiendo ψ_*(respectivamente ψ^*) por $\psi_*= (\psi^{-1})^*$ (respectivamente $\psi^*= (\psi^{-1})_*$). De aquí que el push-forward de una función **f** sobre **M** es $\psi_* f= f\circ\psi^{-1}$ y el pull-back de un campo vectorial $\mathbb{Y}$ sobre **N** es $\psi^*\mathbb{Y}= (T\psi)^{-1}\circ\mathbb{Y}\circ\psi$; aquí ψ debe ser un difeomorfismo para que el push-forward y el pull-back tengan sentido.

DEFINICION 3.2.3

Sea $\varphi:\mathbf{M}\longrightarrow \mathbf{N}$ una función entre variedades de clase C^∞, los campos vectoriales $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^{r-1}(\mathbf{M})$ y $\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^{r-1}(\mathbf{N})$, se dicen estar *$\psi$-relacionados* denotado $\mathbb{X} \overset{\psi}{\sim} \mathbb{Y}$ si $T\psi\circ\mathbb{X}= \mathbb{Y}\circ\psi$.

OBSERVACION 3.2.4

Si ψ es un difeomorfismo y $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ están ψ-relacionados entonces $\mathbb{Y}= \psi_*\mathbb{X}$. En general $\mathbb{X}$ puede estar ψ-relacionado con más de un campo vectorial sobre **N**. La ψ-relación se rige por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{TM} \arrow[r, "T\psi"] & \mathbf{TN} \\
\mathbf{M} \arrow[u, "\mathbb{X}"] \arrow[r, "\psi"] & \mathbf{N} \arrow[u, "\mathbb{Y}"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSICION 3.2.5

(i). pull-back y push-forward, son funciones lineales y $\psi^*(f\cdot g) = (\psi^* f)(\psi^* g)$, $\psi_*(f\cdot g)= (\psi_* f)(\psi_* g)$, mas aún si $\mathbb{X}_i \overset{\psi}{\sim} \mathbb{Y}_i$, $i=1,2$ y $a,b \in \mathbb{R}$ entonces $a\mathbb{X}_1+ b\mathbb{X}_2 \overset{\psi}{\sim} a\mathbb{Y}_1+ b\mathbb{Y}_2$.

(ii). Para $\psi:\mathbf{M}\longrightarrow \mathbf{N}$, $\Phi:\mathbf{N}\longrightarrow \mathbf{P}$ con **M**,**N** y **P** variedades, se tiene $(\Phi\circ\psi)^*= \psi^*\circ \Phi^*$ y $(\Phi\circ \psi)_*= \Phi_*\circ \psi_*$, si $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{N})$ y $\mathbb{Z} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$, $\mathbb{X} \overset{\psi}{\sim} \mathbb{Y}$ y $\mathbb{Y} \overset{\Phi}{\sim} \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{X} \overset{\Phi\circ\psi}{\sim} \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACION.

(i). $\psi^*(f+g)= (f+g)\circ\psi= f\circ\psi+ g\circ\psi= \psi^* f+ \psi^* g$

$\psi_*(f+g)= (f+g)\circ\psi^{-1}= f\circ\psi^{-1}+ g\circ\psi^{-1}= \psi_* f+ \psi_* g$.

ahora

$\psi^{*}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})= (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})\circ\psi= (\mathbf{f}\circ\psi)(\mathbf{g}\circ\psi)= (\psi^{*}\mathbf{f})(\psi^{*}\mathbf{g})$

$\psi_{*}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})= (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})\circ\psi^{-1}= (\mathbf{f}\circ\psi^{-1})(\mathbf{g}\circ\psi^{-1})= (\psi_{*}\mathbf{f})(\psi_{*}\mathbf{g})$.

por otra parte si $\mathbb{X}_i \overset{\psi}{\sim} \mathbb{Y}_i$ $i= 1,2$ $a,b \in \mathbb{R}$, entonces

$\mathbf{T}\psi(a\mathbb{X}_1+ b\mathbb{X}_2)= a\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}_1+ b\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}_2= a\mathbb{Y}_1\circ\psi+ b\mathbb{Y}_2\circ\psi$ es decir $a\mathbb{X}_1+ b\mathbb{X}_2 \overset{\psi}{\sim} a\mathbb{Y}_1+ b\mathbb{Y}_2$.

(ii). la relación que se da aquí entre funciones es una simple consecuencia de las definicones anteriores. Ahora para la segunda parte se prueba en el siguiente sentido;

$\mathbf{T}(\Phi\circ\psi)\circ\mathbb{X}= \mathbf{T}\Phi\circ\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}= \mathbf{T}\Phi\circ\mathbb{Y}\circ\psi= \mathbb{Z}\circ\Phi\circ\psi$, luego $\mathbb{X} \overset{\Phi\circ\psi}{\sim} \mathbb{Z}$. ■

El comportamiento de flujos bajo estas operaciones es el siguiente.

PROPOSICION 3.2.6

Sea $\psi:\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ una función de clase $\mathbf{C}^{\infty}$ entre variedades y $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^{r}(\mathbf{M})$, $\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^{r}(\mathbf{N})$, entonces $\mathbb{X} \overset{\psi}{\sim} \mathbb{Y}$ sí y sólo si $\psi\circ\mathbf{F}^{X}_{t}= \mathbf{F}^{Y}_{t}\circ\psi$. Donde $\mathbf{F}^{X}_{t}$ y $\mathbf{F}^{Y}_{t}$ denotan el flujo de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ respectivamente.En particular si ψ es un difeomorfismo, entonces $\mathbb{Y}= \psi_{*}\mathbb{X}$ sí y sólo si $\mathbf{F}^{Y}_{t}= \psi\circ\mathbf{F}^{X}_{t}\circ\psi^{-1}$.

DEMOSTRACION.

($\Leftarrow$) para $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ se tiene la relación $(\psi\circ\mathbf{F}^{X}_{t})(\mathbf{m})= (\mathbf{F}^{Y}_{t}\circ\psi)(\mathbf{m})$; tomando la derivada con respecto a t en la relación anterior,

tenemos $\mathbf{T}\psi\left(\dfrac{\partial\mathbf{F}^{X}_{t}(\mathbf{m})}{\partial t}\right)= \dfrac{\partial\mathbf{F}^{Y}_{t}}{\partial t}(\psi(\mathbf{m}))$.

Por la regla de la cadena y la definición de flujo se sigue que

$$\mathbf{T}\psi\left(\frac{\partial\mathbf{F}^{X}_{t}(\mathbf{m})}{\partial t}\right)= \mathbf{T}\psi(\mathbb{X}(\mathbf{F}^{X}_{t}(\mathbf{m}))= (\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}\circ\mathbf{F}^{X}_{t})(\mathbf{m})$$

y $\dfrac{\partial\mathbf{F}^{Y}_{t}}{\partial t}(\psi(\mathbf{m}))= \mathbb{Y}(\mathbf{F}^{Y}_{t}(\psi(\mathbf{m}))= (\mathbb{Y}\circ\mathbf{F}^{Y}_{t}\circ\psi)(\mathbf{m})$ así que $(\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}\circ\mathbf{F}^{Y}_{t}\circ\psi)(\mathbf{m})= (\mathbb{Y}\circ\psi\circ\mathbf{F}^{X}_{t})(\mathbf{m})$ lo cual es equivalente a $\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}=\mathbb{Y}\circ\psi$ por lo que $\mathbb{X} \overset{\psi}{\sim} \mathbb{Y}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que se satisface la relación $\mathbf{T}\psi\circ\mathbb{X}= \mathbb{Y}\circ\psi$, sea $c(t)=$

(m) que denota la curva integral de $\mathbb{X}$ a través de $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, entonces

$$\frac{d(\psi\circ c)(t)}{dt} = T\psi\left(\frac{dc(t)}{dt}\right) = T\psi(\mathbb{X}(c(t))) = \mathbb{Y}((\psi\circ c)(t)).$$

emos decir que $\varphi\circ c$ es una curva integral de $\mathbb{Y}$ a través de $\psi(c(0))=$ m) entonces tenemos que $(\psi\circ F_t^X)(m)= (\psi\circ c)(t)= F_t^Y(\psi(m))$. ■

De lo anterior observamos que el flujo del push-forward de ampo vectorial, es el push-forward de este de este flujo.

Llamaremos a $\psi\circ \mathbf{F}_t\circ\psi^{-1}$ el push-forward de $\mathbf{F}_t$ por ψ, cuando es un difeomorfismo $\psi:\mathbf{M}\longrightarrow \mathbf{N}$. Ver la figura 3.6

figura 3.6

ACION

$\mathbf{L}(\mathbf{T}_m\mathbf{M},\mathbb{R})= \mathbf{T}_m^*\mathbf{M}$ es el espacio dual del espacio tangente para $\mathbf{m} \in$ nostros le llamaremos *espacio cotangente* de **M** en **m**. De la manera $\mathbf{L}(\mathbf{TM},\mathbb{R})= \mathbf{T}^*\mathbf{M}$ es el *haz cotangente* de **M**.

NICION 3.2.7

Sea $\mathbf{f}:\mathbf{M}\longrightarrow \mathbb{R}$, suave y $\mathbf{Tf}:\mathbf{TM}\longrightarrow \mathbf{T}\mathbb{R}= \mathbb{R}\mathrm{X}\mathbb{R}$. Llamaremos un ector tangente para $\mathbb{R}$ con base en el punto $\lambda \in \mathbb{R}$ al par (λ,μ), onde el punto μ es la parte principal. Así **Tf** actúa sobre un ector $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_m\mathbf{M}$ en la siguiente forma $\mathbf{Tf}(\mathbf{v})= (\mathbf{f}(\mathbf{m}),\mathbf{df}(\mathbf{m})\cdot(\mathbf{v}))= \mathbf{Tf}(\mathbf{m},\mathbf{v})$.

por lo tanto aquí definimos para cada elemento $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ el elemento $\mathbf{df(m)} \in T^{*}_{m}M$, **df** es una sección de $\mathbf{T^{*}M}$ y es llamado *campo covectorial* o una (1-forma).

DEFINICION 3.2.8

El campo covectorial $\mathbf{df:M \longrightarrow T^{*}M}$ es llamado *la diferencial* de **f**.

OBSERVACION 3.2.9

Si **f** es de clase C^{r} $r<\infty$, entonces **df** es de clase C^{r-1}.

CONSIDERACIONES LOCALES

Ahora trabajaremos con **df** en cartas locales para $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$, si $\varphi:\mathbf{U} \subset \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^{n}$ es una carta local para **M**, entonces la repre--sentación local de **f** es una función $\tilde{\mathbf{f}}:\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{\mathbf{f}}= \mathbf{f}\circ\varphi^{-1}$. La representación local de **Tf** es la función tangente para variedades locales $\mathbf{T\tilde{f}}(X,\mathbf{v})= (\tilde{\mathbf{f}}(X),\mathbf{D\tilde{f}}(X)\cdot\mathbf{v})$. Como podemos ver, la representación local de **df** es la derivada de la representación local de **f**, es decir $\mathbf{D\tilde{f}}$.

DEFINICION 3.2.10

Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ (M) y $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^{\infty}$ (M), se define *la derivada direccional o derivada de Lie de* **f** a lo largo de $\mathbb{X}$ por:

$$\mathbf{L_{\mathbb{X}}f(m)}= \mathbb{X}[\mathbf{f}](\mathbf{m})= \mathbf{df(m)}\cdot\mathbb{X}(\mathbf{m}) \quad \text{para } \mathbf{m} \in \mathbf{M}$$

denotaremos $\mathbb{X}[\mathbf{f}]= \mathbf{df}(\mathbb{X})$ la función $\mathbf{m} \longmapsto \mathbb{X}[\mathbf{f}](\mathbf{m}) \in \mathbb{R}$.

CONSIDERACIONES LOCALES

La representación local de $\mathbb{X}[\mathbf{f}]$ en una carta está dada por la función de valor real $X \longmapsto \mathbf{D\tilde{f}}(X)\cdot\tilde{\mathbb{X}}(X)$, donde $\tilde{\mathbf{f}}$,y $\tilde{\mathbb{X}}$ son las representaciones locales de **f** y $\mathbb{X}$.

Como es **M** de dimensión finita entonces se tiene

$$\mathbb{X}[\mathbf{f}]= \mathbf{L_{\mathbb{X}}f}= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^{i}}\mathbb{X}^{i}$$

PROPOSICION 3.2.11

(i) Supongamos $\psi:M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo entre variedades, entonces $L_{\mathbb{X}}$ es natural respecto al push-forward por ψ. esto es, para cada $f \in \mathcal{F}(M)$ $L_{\psi_*\mathbb{X}}(\psi_* f) = \psi_* L_{\mathbb{X}} f$, lo cual se ilustra en el siguiente

diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathcal{F}(N) \\ \Big\downarrow L_{\mathbb{X}} & & \Big\downarrow L_{\psi_*\mathbb{X}} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

(ii). $L_{\mathbb{X}}$ es natural con respecto a restricciones, esto es para $U \subset M$ abierto y $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene $L_{\mathbb{X}|u}(f|U) = (L_{\mathbb{X}} f)|U$ ó si $|U:\mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{|U} & \mathcal{F}(U) \\ \Big\downarrow L_{\mathbb{X}} & & \Big\downarrow L_{\mathbb{X}|u} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{|U} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

DEMOSTRACION.

(i). Si $n \in N$ entonces por definición de $L_{\mathbb{X}}$ y la regla de la cadena

cadena para d, se tiene que:

$$L_{\psi_*\mathbb{X}}(\psi_* f)(n) = d(f\circ\psi^{-1})(\psi_*\mathbb{X})(n) = d(f\circ\psi^{-1})(n)\cdot(T\psi\circ\mathbb{X}\circ\psi^{-1})(n) =$$
$$= df(\psi^{-1}(n))(\mathbb{X}\circ\psi^{-1})(n) = \psi_*(L_{\mathbb{X}} f)(n) \quad \forall\ n \in N.$$

(ii). Es directo del hecho de que $d(f|U) = (df)|U$ y esto es claro de la definición de d ∎

Puesto que $\psi^* = (\psi^{-1})_*$ la derivada de Lie es también natural con respecto al pull-back por ψ.

Ahora veremos que $L_{\mathbb{X}}$ satiface la regla de Leibnitz.

PROPOSICION 3.2.12

(i) La función $L_{\mathbb{X}}:\mathcal{F}^r(M)\longrightarrow \mathcal{F}^{r-1}(M)$ es una derivación, esto es para $f,g \in \mathcal{F}^r(M)$ se tiene $L_{\mathbb{X}}(f\cdot g)= gL_{\mathbb{X}}f+ fL_{\mathbb{X}}g$

(ii). Si C es una función constante , $L_{\mathbb{X}}C= 0$

DEMOSTRACION. (i). Se sigue de la definición de $L_{\mathbb{X}}f$ y la regla del producto para **df**.

(ii). Es directo de la definición. ∎

La conexión entre $L_{\mathbb{X}}f$, y el flujo de $\mathbb{X}$ es la siguiente.

PROPOSICION 3.2.13

Sea $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$ $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^{\infty}(M)$ y supongamos que F_t es el flujo definido por $\mathbb{X}$, entonces:

$$\frac{d}{dt}F_t^*f= F_t^*L_{\mathbb{X}}f$$

DEMOSTRACION. Por la regla de la cadana y la definición de la diferencial (Df) y el flujo de un campo vectorial por $m \in M$,

$$\frac{d}{dt}(F_t^*f)(m)= \frac{d}{dt}(f\circ F_t)(m)= df(F_t(m))\cdot\frac{dF_t(m)}{dt}= df(F_t(m))\cdot\mathbb{X}(F_t(m))=$$

$$=(L_{\mathbb{X}}f)(F_t(m))=(F_t^*L_{\mathbb{X}}f)(m)$$ ∎

OBSERVACION 3.2.14

En el caso particular en el que t= 0, $\frac{d}{dt}(F_t^*f)|_{t=0}= L_{\mathbb{X}}f$.

PROPOSICION 3.2.15

Sea **M** una variedad suave la colección de operadores $L_{\mathbb{X}}$ para $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^{\infty}(M)$, definidos sobre $C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$ y tomando valores en $C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$, forma un espacio vectorial real y también un $\mathcal{F}(M)$-módulo con $(fL_{\mathbb{X}})(g) = f(L_{\mathbb{X}}g)$, entonces se tiene que $L_{f\mathbb{X}}= fL_{\mathbb{X}}$.

DEMOSTRACION. Que es un espacio vectorial real es obvio pues, si $\mathbb{X},\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $f \in C^{r+1}(M,F)$ y $m \in M$, entonces

(i). $(L_{\mathbb{X}+\mathbb{Y}})f(m)= Df(m)(\mathbb{X}+\mathbb{Y})(m)= Df(m)\mathbb{X}(m)+ Df(m)\mathbb{Y}(m)=$

$$= (L_{\mathbb{X}}f+ L_{\mathbb{Y}}f)(m)= L_{\mathbb{X}}+ L_{\mathbb{Y}}$$

(ii). Sea $c \in \mathbb{R}$, entonces $L_{c\mathbb{X}}f(m) = Df(m)c\mathbb{X}(m) = cDf(m)\mathbb{X}(m) = (cL_{\mathbb{X}}f)(m)$ $= cL_{\mathbb{X}}$ por lo tanto el conjunto de todos los operadores $L_{\mathbb{X}}$ es un espacio vectorial real.

Ahora si $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $L_{f\mathbb{X}} = fL_{\mathbb{X}}$ ■

PROPOSICION 3.2.16

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $D:\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ una derivación cualesquiera, entonces existe un campo vectorial $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $L_{\mathbb{X}}f = Df$, $f \in \mathcal{F}(U)$.

DEMOSTRACION. Para demostrar la afirmación anterior mostraremos que para cualquier $a \in U$ y para cualquier $f \in \mathcal{F}(U)$ se cumple:

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_a g_i(a) \quad \text{para alguna } g_i \in \mathcal{F}(U)$$

En efecto, tomemos la expansión de Taylor de f en alguna vecindad V suficientemente pequeña de $a \in U$, esto es

$$f(X) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_a (X^i - a^i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\Big|_a (X^i - a^i)(X^j - a^j) + \cdots \quad \forall\, X \in V$$

así $Df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_a D(X^i)(a)$; si tomamos $g_i = D(X^i)$, entonces la proposición queda probada ■

DEFINICION 3.2.17 (CORCHETES DE LIE)

Sea M una variedad y $\mathbb{X},\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[\mathbb{X},\mathbb{Y}] = L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y}$ es el unico campo vectorial sobre M que satisface :

$[\mathbb{X},\mathbb{Y}][f] = \mathbb{X}[\mathbb{Y}[f]] - \mathbb{Y}[\mathbb{X}[f]]$ en la intersección de sus dominios $\forall\, f \in C^{\infty}(U,\mathbb{R})$ $U \subset M$ abierto.

$L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y}$ es llamada la derivada de Lie de $\mathbb{Y}$ con respecto a $\mathbb{X}$ ó el *corchete de Lie* de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

TEOREMA 3.2.18

Sea **M** una variedad suave y $\mathbb{X},\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. Si además $\mathbb{X}$ tiene un flujo F_t, entonces $\frac{d}{dt}(F_t^*\mathbb{Y}) = F_t^*(L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y})$ en los puntos donde F_t está definido.

DEMOSTRACION. Si t= 0 la formula se transforma en:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t^*\mathbb{Y} = L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Asumiendo (1)

$$\frac{d}{dt}(F_t^*\mathbb{Y}) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F_{t+s}^*\mathbb{Y} = F_t^*\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F_s^*\mathbb{Y} = F_t^* L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y}$$

Hasta aquí la fórmula en el teorema sigue siendo equivalente a (1), los dos lados de (1) son derivaciones vectoriales, entonces para probar ambos lados operaremos para una funcion arbitraria $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbf{M},\mathbb{R}^n)$, ahora

$$\frac{d}{dt}(F_t^*\mathbb{Y})[\mathbf{f}](\mathbf{m})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(df(m)\cdot(T_{F_t(m)}F_{-t}\circ\mathbb{Y}\circ F_t)(m)\Big) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t^*(\mathbb{Y}[F_{-t}^*\mathbf{f}])(\mathbf{m})$$

usando que $\frac{d}{dt}F_t^*\mathbf{f} = F_t^* L_{\mathbb{X}}\mathbf{f}$ y la regla de Leibnitz se tiene:

$\mathbb{X}[\mathbb{Y}[\mathbf{f}]](\mathbf{m}) - \mathbb{Y}[\mathbb{X}[\mathbf{f}]](\mathbf{m}) = [\mathbb{X},\mathbb{Y}][\mathbf{f}](\mathbf{m})$ ∎

Nótese que en el procedimiento de prueba anterior el siguiente dato es de gran utilidad, si $\varphi:\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ es un difeomorfismo y $\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ entonces para $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$ $(\varphi^*\mathbb{Y})[\mathbf{f}] = \varphi^*(\mathbb{Y}[\varphi_*\mathbf{f}])$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)

DEFINICION 3.2.19 (ALTERNATIVA DE CORCHETES DE LIE)

Sean $\mathbb{X},\mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbf{M})$, y F_t el flujo asociado a $\mathbb{X}$, El campo vectorial de clase C^∞ , $L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y} = [\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ sobre **M** definido por:

$[\mathbb{X},\mathbb{Y}] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(F_t^*\mathbb{Y})$ es llamada la derivada de Lie de $\mathbb{Y}$ con respecto a $\mathbb{X}$ ó *el corchete de Lie* de $\mathbb{X},\mathbb{Y}$.

Podemos ahora "derivar" las propiedades básicas de los corchetes de Lie.

PROPOSICION 3.2.20

El corchete $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ sobre $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$, junto con la estructura de espacio vectorial real de $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ forma una *álgebra de Lie* esto es:

(i). $[\ ,\ ]$ es bi-lineal es decir $[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2,\mathbb{Y}]=[\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}]+[\mathbb{X}_2,\mathbb{Y}]$. y

$[\mathbb{X},\mathbb{Y}_1+\mathbb{Y}_2]=[\mathbb{X},\mathbb{Y}_1]+[\mathbb{X},\mathbb{Y}_2]$

(ii). $[\mathbb{X},\mathbb{X}]=0\ \forall\ \mathbb{X}\in\mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

(iii). $[\mathbb{X},[\mathbb{Y},\mathbb{Z}]]+[\mathbb{Y},[\mathbb{Z},\mathbb{X}]]+[\mathbb{Z},[\mathbb{X},\mathbb{Y}]]=0\ \forall\ \mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{Z}\in\mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

(Identidad de Jacobi).

DEMOSTRACION. La prueba es directa aplicando el corchete a una función arbitraria. ∎

NOTA 3.2.21

Notemos que $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ sobre $\mathfrak{X}^r(\mathbf{M})$ con $r<\infty$ no es una álgebra de Lie, pués $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]\in\mathfrak{X}^{r-1}(\mathbf{M})$ para $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in\mathfrak{X}^r(\mathbf{M})$.

OBSERVACION 3.2.22

En la proposición anterior:

(i). implica $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]=-[\mathbb{Y},\mathbb{X}]$.

(ii). implica lo siguiente:

$$[\mathbb{X}+\mathbb{Y},\mathbb{X}+\mathbb{Y}]=0=[\mathbb{X},\mathbb{X}]+[\mathbb{X},\mathbb{Y}]+[\mathbb{Y},\mathbb{X}]+[\mathbb{Y},\mathbb{Y}]\Rightarrow$$

$$[\mathbb{X},\mathbb{Y}]+[\mathbb{Y},\mathbb{X}]=[\mathbb{X}+\mathbb{Y},\mathbb{X}+\mathbb{Y}]-[\mathbb{X},\mathbb{X}]-[\mathbb{Y},\mathbb{Y}].$$

tambien (iii). puede ser escrito como

$\mathbf{L}_{\mathbb{X}}[\mathbb{Y},\mathbb{Z}]=[\mathbf{L}_{\mathbb{X}}\mathbb{Y},\mathbb{Z}]+[\mathbb{Y},\mathbf{L}_{\mathbb{X}}\mathbb{Z}]$, es decir el corchete de Lie es una derivación.

PROPOSICION 3.2.23

(1). Si $\psi:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbf{N}$ es un difeomorfismo y $\mathbb{X}\in\mathfrak{X}(\mathbf{M})$, entonces $\mathbf{L}_{\mathbb{X}}:\mathfrak{X}(\mathbf{M})\longrightarrow\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ es natural con respecto al push-forward por ψ esto es, $\mathbf{L}_{\psi_*\mathbb{X}}\psi_*\mathbb{Y}=\psi_*\mathbf{L}_{\mathbb{X}}\mathbb{Y}$, o lo que es lo mismo, $[\psi_*\mathbb{X},\psi_*\mathbb{Y}]=\psi_*[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ y así el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "L_{\mathbb{X}}"] & \mathfrak{X}(\mathbf{N}) \arrow[d, "L\psi_*\mathbb{X}"] \\ \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \arrow[r, "\psi_*"] & \mathfrak{X}(\mathbf{N}) \end{tikzcd}$$

(ii). $L_{\mathbb{X}}$ es natural respecto a restricciones, esto es, para $\mathbf{U} \subset \mathbf{M}$ abierto se tiene $[\mathbb{X}|\mathbf{U},\mathbb{Y}|\mathbf{U}] = [\mathbb{X},\mathbb{Y}]|\mathbf{U}$ y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \arrow[r, "|\mathbf{U}"] \arrow[d, "L_{\mathbb{X}}"] & \mathfrak{X}(\mathbf{U}) \arrow[d, "L_{\mathbb{X}|\mathbf{u}}"] \\ \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \arrow[r, "|\mathbf{U}"] & \mathfrak{X}(\mathbf{U}) \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACION.

(i). Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{V})$, $\mathbf{V}$ abierto en $\mathbf{N}$, y $\psi(\mathbf{m}) = \mathbf{n} \in \mathbf{V}$. Por (2) para cualquier $\mathbb{Z} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ $((\psi_*\mathbb{Z})[\mathbf{f}])(\mathbf{n}) = \mathbb{Z}[\mathbf{f}\circ\psi](\mathbf{m})$ por lo que $(\psi_*[\mathbb{X},\mathbb{Y}])[\mathbf{f}](\mathbf{n}) =$ $[\mathbb{X},\mathbb{Y}][\mathbf{f}\circ\psi(\mathbf{m}) = \mathbb{X}[(\psi_*\mathbb{Y})[\mathbf{f}]\circ\psi](\mathbf{m}) - \mathbb{Y}[(\psi_*\mathbb{X})[\mathbf{f}]\circ\psi](\mathbf{m}) =$

$= (\psi_*\mathbb{X})[(\psi_*\mathbb{Y})[\mathbf{f}]](\mathbf{n}) - (\psi_*\mathbb{Y})[(\psi_*\mathbb{X})[\mathbf{f}]](\mathbf{n}) = [\psi_*\mathbb{X},\psi_*\mathbb{Y}][\mathbf{f}](\mathbf{n})$ luego $\psi_*[\mathbb{X},\mathbb{Y}] = [\psi_*\mathbb{X},\psi_*\mathbb{Y}]$.

(ii). Se sigue del hecho de que $\mathbf{d}(\mathbf{f}|\mathbf{U}) = (\mathbf{df})|\mathbf{U}$ ∎

REPRESENTACIONES LOCALES

Calculemos ahora la expresión local para $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$. Sea $\varphi:\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta sobre $\mathbf{M}$, y sean las representaciones locales de $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ dadas por $\tilde{\mathbb{X}},\tilde{\mathbb{Y}}$ respectivamente, así $\tilde{\mathbb{X}},\tilde{\mathbb{Y}}:\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y la representación local de $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ es $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]^{\sim}$, esto es

$$[\tilde{\mathbb{X}},\tilde{\mathbb{Y}}][\tilde{\mathbf{f}}](X) = \tilde{\mathbb{X}}[\tilde{\mathbb{Y}}[\tilde{\mathbf{f}}]](X) - \tilde{\mathbb{Y}}[\tilde{\mathbb{X}}[\tilde{\mathbf{f}}]](X) =$$

$$\mathbf{D}(\tilde{\mathbb{Y}}[\tilde{\mathbf{f}}])(X)\tilde{\mathbb{X}}(X) - \mathbf{D}(\tilde{\mathbb{X}}[\tilde{\mathbf{f}}])(X)\tilde{\mathbb{Y}}(X) =$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{f}})(X)\tilde{\mathbb{Y}}(X))\tilde{\mathbb{X}}(X) - \mathbf{D}(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{f}})(X)\tilde{\mathbb{X}}(X))\tilde{\mathbb{Y}}(X) =$$

$(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{f}})(X)\mathbf{D}\tilde{\mathbb{Y}}(X) + \tilde{\mathbb{Y}}(X)\mathbf{D}^2(\tilde{\mathbf{f}}(X)))\tilde{\mathbb{X}}(X) - (\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{f}})(X)\mathbf{D}\mathbb{X}(X) + \tilde{\mathbb{X}}(X)\mathbf{D}^2(\tilde{\mathbf{f}}(X)))\tilde{\mathbb{Y}}(X) =$ $\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}(X)(\mathbf{D}\tilde{\mathbb{Y}}(X)\tilde{\mathbb{X}}(X) - \mathbf{D}\tilde{\mathbb{X}}(X)\tilde{\mathbb{Y}}(X))$, y la representación local de $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ es

$$D\tilde{\mathbb{Y}}\tilde{\mathbb{X}}-D\tilde{\mathbb{X}}\tilde{\mathbb{Y}}.$$

Ahora si **M** es una variedad y la carta φ está dada por las coordenadas $(X^1,\dots,X^n)$, entonces los cálculos dados en los términos de las componentes de $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ son: $[\mathbb{X}\ \mathbb{Y}]^j=(L_{\mathbb{X}}L_{\mathbb{Y}}-L_{\mathbb{Y}}L_{\mathbb{X}})\mathbb{X}^j=$

$$L_{\mathbb{X}}(L_{\mathbb{Y}}[\mathbb{X}^j])-L_{\mathbb{Y}}(L_{\mathbb{X}}[\mathbb{X}^j])=$$

$$L_{\mathbb{X}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbb{X}^j}{\partial X^i}\mathbb{Y}^i\right)-L_{\mathbb{Y}}\left(\sum\frac{\partial\mathbb{X}^j}{\partial X^i}\mathbb{X}^i\right)=$$

$$=L_{\mathbb{X}}(\mathbb{Y}^j)-L_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X}^j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbb{Y}^j}{\partial X^i}\mathbb{X}^i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbb{X}^j}{\partial X^i}\mathbb{Y}^i\ \Rightarrow$$

$$[\mathbb{X},\mathbb{Y}]^j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathbb{Y}^j}{\partial X^i}\mathbb{X}^i-\frac{\partial\mathbb{X}^j}{\partial X^i}\mathbb{Y}^i\right)\ \Rightarrow$$

$$[\mathbb{X},\mathbb{Y}]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathbb{Y}^j}{\partial X^i}\mathbb{X}^i-\frac{\partial\mathbb{X}^j}{\partial X^i}\mathbb{Y}^i\right)\frac{\partial}{\partial X^i}\ .$$

PROPOSICION 3.2.24

Para todo $\mathbb{X}\in\mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $L_{\mathbb{X}}$ es una derivación sobre $(\mathfrak{F}(\mathbf{M}),\mathfrak{X}(\mathbf{M}))$ esto es, $L_{\mathbb{X}}$ es $\mathbb{R}$-lineal, y $L_{\mathbb{X}}(f\cdot\mathbb{Y})=(L_{\mathbb{X}}f)\mathbb{Y}+f(L_{\mathbb{X}}\mathbb{Y})$.

DEMOSTRACION. Para $g\in C^\infty(U,\mathbb{R})$ con $U\subset M$ abierto, tenemos

$$[\mathbb{X},f\mathbb{Y}][g]=L_{\mathbb{X}}(L_{f\mathbb{Y}}g)-L_{f\mathbb{Y}}L_{\mathbb{X}}g=L_{\mathbb{X}}(fL_{\mathbb{Y}}g)-fL_{\mathbb{Y}}L_{\mathbb{X}}g=$$

$=(L_{\mathbb{X}}f)L_{\mathbb{Y}}g+fL_{\mathbb{X}}L_{\mathbb{Y}}g-fL_{\mathbb{Y}}L_{\mathbb{X}}g$. Así $[\mathbb{X},f\mathbb{Y}]=(L_{\mathbb{X}}f)+f[\mathbb{X},\mathbb{Y}]$ ■

PROPOSICION 3.2.25

Sean $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in\mathfrak{X}^\infty(\mathbf{M})$ y sean F_t,G_t los flujos correspondientes a estos campos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i). $[\mathbb{X},\mathbb{Y}]=0$

(ii). $F_t^*\mathbb{Y}=\mathbb{Y}$

(iii). $G_t^*\mathbb{X}=\mathbb{X}$

(iv). $F_t\circ G_s=G_s\circ F_t$.

DEMOSTRACION. $F_t\circ G_s=G_s\circ F_t \iff G_s=F_t\circ G_s\circ F_t^{-1}$, pero esto es equivalente a $\mathbb{Y}=F_t^*\mathbb{Y}$ es decir (ii).$\iff$ (iv). y similarmente (iii). $\iff$

(iv). Ahora si $\mathbf{F}_t^*\mathbb{Y} = \mathbb{Y}$ entonces $[\mathbb{X},\mathbb{Y}] = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\big|_{t=0}\mathbf{F}_t^*\mathbb{Y} = 0 \Rightarrow [\mathbb{X},\mathbb{Y}] = \mathbf{L}_{\mathbb{X}}\mathbb{Y} = 0 \Rightarrow$

$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\mathbf{F}_t^*\mathbb{Y} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{ds}}\big|_{s=0}\mathbf{F}_{s+t}^*\mathbb{Y} = \mathbf{F}_t^*[\mathbb{X},\mathbb{Y}] = 0$, así que $\mathbf{F}_t^*\mathbb{Y}$ es constante en $t = 0 \Rightarrow$

$\mathbf{F}_t^*\mathbb{Y} = \mathbb{Y}$, así (i). $\Leftrightarrow$ (ii). análogamente (i). $\Leftrightarrow$ (iii) ∎

CAPITULO 4

FORMAS DIFERENCIALES

En este capítulo, se hará un estudio breve del álgebra exterior de tensores covariantes, lo cual es esencial para definir lo que es una forma diferencial y algunas propiedades de ellas. Este capítulo está dividido en dos secciones, la primera, puramente algebraica y la segunda se puede ver como un caso particular de la anterior ya que al trabajar con formas diferenciales estaremos trabajando con un tipo particular de tensores covariantes.

§ 4.1 ALGEBRA EXTERIOR DE LOS TENSORES COVARIANTES

En está sección se estudian algunas propiedades de los tensores covariantes, que son de gran importancia en la definición y estudio de las formas diferenciales.

DEFINICION 4.1.1

Sea **V** un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ Y sea $\mathfrak{J}^s_r$ el conjunto:
$\mathfrak{J}^s_r(\mathbf{V})= \mathbf{L}^{s+r}(\mathbf{V}^*,\ldots,\mathbf{V}^*,\mathbf{V},\ldots,\mathbf{V};\mathbb{R})$ (r-copias de $\mathbf{V}^*$ y s-copias de **V**). los elementos de $\mathfrak{J}^s_r(\mathbf{V})$ son llamados *tensores en* **V** *contravariantes de orden* r y *covariantes de orden* s ó simplemente del tipo $\binom{r}{s}$.

En nuestro caso, trabajaremos solamente con tensores covariantes, es decir, del tipo $\binom{0}{k}$ pues son de gran importancia para el estudio de las formas diferenciales y el cálculo sobre estas. sólo mensionaremos k-tensores ó tensores de orden k, diciendo con ello que se está trabajando con tensores covariantes.

NOTACION

El conjunto de todos los tensores (covariantes) de orden k en **V** se denotará por $\mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$. Si $\mathbf{T} \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$, por definición se tiene que **T** es una función multilineal $\mathbf{T}:\mathbf{V}^k \longrightarrow \mathbb{R}$.

DEFINICION 4.1.2 (SUMA Y PRODUCTO TENSORIAL)

Para $S,T \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$ y $a \in \mathbb{R}$ definamos:

(1). $(S+T)(v_1,\ldots,v_k)= S(v_1,\ldots,v_k)+ T(v_1,\ldots,v_k) \in \mathbb{R}$.

$(aS)(v_1,\ldots,v_k)= aS(v_1,\ldots,v_k) \in \mathbb{R}$.

(2). Si $S \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$ y $T \in \mathfrak{J}^l(\mathbf{V})$ se define el *producto* tensorial $S\otimes T \in \mathfrak{J}^{k+l}(\mathbf{V})$ por:

$S\otimes T(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_{k+l})= S(v_1,\ldots,v_k)\cdot T(v_{k+1},\ldots,v_{k+l}) \in \mathbb{R}$.

OBSERVACION 4.1.3

$\mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLOS

(1). El producto interior $<\ ,\ >$ es un tensor de orden k, es decir $<\ ,\ > \in \mathfrak{J}^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Algo no menos importante, el tensor determinante en $\mathfrak{J}^n(\mathbb{R}^n)$. Al intentar generalizar esta función, se debe recordar que al cambiar dos columnas de una matriz, cambia el signo del determinante.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO TENSORIAL

(i). $(S_1+ S_2)\otimes T= S_1\otimes T+ S_2\otimes T$

(ii). $S\otimes(T_1+ T_2)= S\otimes T_1+ S\otimes T_2$

(iii). $(aS)\otimes T= S\otimes(aT)= a(S\otimes T)$ $a \in \mathbb{R}$

(iv). $(S\otimes T)\otimes T_1= S\otimes(T\otimes T_1)$

DEMOSTRACION

(i). Sean S_1, $S_2 \in \mathfrak{I}^k(V)$, y $T \in \mathfrak{I}^m(V)$, entonces

$$(S_1 + S_2)\otimes T = (S_1 + S_2)\otimes T(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_{k+m}) =$$
$$=(S_1 + S_2)(v_1,\ldots,v_{k+m})T(v_1,\ldots,v_{k+m}) =$$

$$= [S_1(v_1,\ldots,v_{k+m}) + S_2(v_1,\ldots,v_{k+m})]\cdot T(v_1,\ldots,v_{k+m}) =$$
$$= S_1(v_1,\ldots,v_{k+m})\cdot T(v_1,\ldots,v_{k+m}) + S_2(v_1,\ldots,v_{k+m})\cdot T(v_1,\ldots,v_{k+m}) =$$
$$= S_1\otimes T + S_2\otimes T$$

(ii). (iii). (iv). se demuestran de forma análoga, es decir, directamente siguiendo la definición. ■

NOTACION

Los productos $(S\otimes T)\otimes T_1$ y $S\otimes(T\otimes T_1)$ se designan simplemente por $S\otimes T\otimes T_1$ y los productos de orden superior $T_1\otimes\cdots\otimes T_r$ se denotan de forma análoga.

OBSERVACION 4.1.4

$\mathfrak{I}^1(V)$ es el espacio vectorial dual V^*, es decir, $S \in \mathfrak{I}^1(V) \Rightarrow S: V \longrightarrow \mathbb{R}$.

TEOREMA 4.1.5

Sea $v_1,\ldots,v_n$ una base para V y sea $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ la base dual, con $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$. Entonces el conjunto de todos los productos tensoriales de k-factores $\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}$ $1 \le i_1,\ldots,i_k \le n$, es una base para $\mathfrak{I}^k(V)$ y además tiene dimensión n^k.

DEMOSTRACION. Se tiene que

$$\varphi_{ik}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}(v_{j_1},\ldots,v_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1}\cdots\delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j_1 = i_1,\ldots,j_k = i_k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ahora si $w_1,\ldots,w_k$, son k vectores con

$w_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot v_j$ y $T \in \mathfrak{I}^k(V)$, entonces

$$T(w_1,\ldots,w_k)=\sum_{j1,\ldots,jk=1}^{n} a_{1j1}\cdots a_{kjk}T(v_{j1},\ldots,v_{jk})=$$

$$=\sum_{i1,\ldots ik=1}^{n} T(v_{i1},\ldots,v_{ik})\cdot\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}(w_1,\ldots,w_k)$$

así $T=\sum_{i1,\ldots,ik=1}^{n} T(v_{i1},\ldots,v_{ik})\cdot\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}$ por consiguiente

$\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}$ generan a $\mathfrak{I}^k(V)$. Supóngase ahora que existen números

$$a_{i1},\ldots,a_{ik} \text{ tales que } \sum_{i1,\ldots,ik=1}^{n} a_{i1,\ldots,ik}\cdot\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}=0$$

aplicando ambos miembros de esta igualdad a $(v_{i1},\ldots,v_{ik})$ se obtiene $a_{j1},\ldots,a_{jk}=0$ por lo tanto $\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}$ son linealmente independientes ■

DEFINICION 4.1.6

Si $f:V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal se define la siguiente aplicación lineal : $f^*:\mathfrak{I}^k(W) \longrightarrow \mathfrak{I}^k(V)$ por

$f^*T(v_1,\ldots,v_k)= T(f(v_1),\ldots,f(v_k))$ donde

$T \in \mathfrak{I}^k(W)$ y $v_1,\ldots,v_k \in V$.

OBSERVACION 4.1.7

Se puede probar que $f^*(S\otimes T)= f^*S\otimes f^*T$.

TEOREMA 4.1.8

Si T es un producto interior en V, entonces existe una base $v_1,\ldots,v_n$ para V tal que $T(v_i,v_j)=\delta_{ij}$ (Tal base se denomina ortomormal respecto a T), además existe un isomorfismo $f:\mathbb{R}^n:\longrightarrow V$ tal que $T(f(X),f(Y))= \langle X,Y\rangle$ para $X,Y \in \mathbb{R}^n$. es decir $f^*T= \langle\ ,\ \rangle$.

DEMOSTRACION. Sea $w_1,\ldots,w_n$ una base para V se define (proceso de Gram-Schmidt).

$$w_1'= w_1$$

$$w_2'= w_2- \frac{T(w'_1,w_2)}{T(w_1',w_1')}\cdot w_1'$$

$$w_3'= w_3- \frac{T(w_1',w_3)}{T(w_1',w_1')}\cdot w_1'- \frac{T(w'_2,w_3)}{T(w_2',w_2')}\cdot w_2'$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Es fácil ver que $T(w_i',w_j')= 0$ si $i \neq j$ y si $w_i'\neq 0$ entonces $T(w_i',w_j')> 0$.

Definamos $v_i= \dfrac{w'_i}{\sqrt{T(w_i',w_i')}}$. El isomorfismo f queda definido por

$f(e_i)= v_i$ ∎

DEFINICION 4.1.9

Un tensor de orden k, $\mathbf{W} \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$ se llama *alternado* si: $\mathbf{W}(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = - \mathbf{W}(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$ para todo $v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k \in \mathbf{V}$.

NOTACION

El conjunto de todos los tensores de orden k alternados se denotara por $\Lambda^k(\mathbf{V})$, y por construcción es un subespacio de $\mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$.

DEFINICION 4.1.10

Si $\mathbf{T} \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$ se define Alt(T) por:

$$\mathrm{Alt}(\mathbf{T})(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}\sigma\cdot\mathbf{T}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})$$

donde $\mathbf{S}_k$ es el grupo de todas las permutaciones de los números $\{1,\dots,k\}$.

TEOREMA 4.1.11

(1). Si $\mathbf{T} \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$, entonces $\mathrm{Alt}(\mathbf{T}) \in \Lambda^k(\mathbf{V})$.

(2). Si $\mathbf{W} \in \Lambda^k(\mathbf{V})$, entonces, $\mathrm{Alt}(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$

(3). Si $\mathbf{T} \in \mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$, entonces $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\mathbf{T})) = \mathrm{Alt}(\mathbf{T})$

DEMOSTRACION.

(1). Sea (i,j) la permutación que cambia entre sí i,j (trasposición) y deja a todos los otros números fijos.

Si $\sigma \in \mathbf{S}_k$ Sea $\sigma' = \sigma(i.j)$, entonces

$$\mathrm{Atl}(\mathbf{T})(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k) =$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}\sigma\cdot\mathbf{T}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(j)},\dots,v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(k)}) =$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}\sigma\cdot\mathbf{T}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(j)},\dots,v_{\sigma(k)}) =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma'\in S_k} -\mathrm{sgn}\sigma'\cdot T(v_{\sigma'(1)},\ldots,v_{\sigma'(k)}) = -\mathrm{Alt}(T)(v_1,\ldots,v_k)$$

■

(2). Si $W \in \Lambda^k(V)$ y $\sigma = (i,j)$, entonces

$$W(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}\sigma\cdot W(v_1,\ldots,v_k)$$

puesto que cada σ es un producto de permutaciones de la forma (i,j), esta igualdad se verifica para toda σ, por lo tanto:

$$\mathrm{Alt}(W)(v_1,\ldots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}\sigma\cdot W(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}) =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}\sigma\cdot W(v_1,\ldots,v_k) = W(v_1,\ldots,v_k)$$ ■

(3). Es condición inmediata de (1) y (2), pues si $T \in \mathfrak{J}^k(V)$, entonces $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$ por (1), y $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$ por (2).■

DEFINICION 4.1.12

El *producto exterior* $W\wedge S \in \Lambda^{k+l}(V)$ por:

$$W\wedge S = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\mathrm{Alt}(W\otimes S)$$

PROPIEDADES

Sea $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}(1).\ (W_1 + W_2)\wedge\eta = W_1\wedge\eta + W_2\wedge\eta \\ (2).\ W\wedge(\eta_1 + \eta_2) = W\wedge\eta_1 + W\wedge\eta_2\end{array}\right\}\text{ bilinealidad}$$

(3). $aW\wedge\eta = W\wedge a\eta = a(W\wedge\eta)$

(4). $W\wedge\eta = (-1)^{kl}\eta\wedge W$ anti-conmutatividad

(5). $f^*(W\wedge\eta) = f^*(W)\wedge f^*(\eta)$

TEOREMA 4.1.13

Si $S \in \mathfrak{J}^k(V)$, $T \in \mathfrak{J}^l(V)$ y $\mathrm{Alt}(S) = 0$, entonces:

$$\mathrm{Alt}(S\otimes T) = \mathrm{Alt}(T\otimes S) = 0$$

DEMOSTRACION. $(k+l)!\,\mathrm{Alt}(S\otimes T)(v_1,\ldots,v_{k+l}) =$

$$= \sum_{\sigma\in S_{k+L}}\mathrm{sgn}\sigma\cdot S(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\,T(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})$$

Si $G \subset S_{k+1}$ está formada por todas las σ que dejan K+1,... k+1 fijos entonces:

$$\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn}\sigma \cdot S(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+1)}) =$$

$$= \left[\sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot S(v_{\sigma'(1)},\dots,v_{\sigma'(k)}) \right] \cdot T(v_{k+1},\dots,v_{k+1}) = 0$$

Supongamos ahora que $\sigma_0 \notin G$, sea $G \cdot \sigma_0 = \{ \sigma\sigma_0 : \sigma \in G \}$ y sea $v_{\sigma_0(1)},\dots,v_{\sigma_0(k+1)} = w_1,\dots,w_{k+1}$, se sigue que

$$\sum_{\sigma \in G \cdot \sigma_0} \operatorname{sgn}\sigma \cdot S(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+1)}) =$$

$$= \left[\operatorname{sgn}\sigma \cdot \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot S(w_{\sigma'(1)},\dots,w_{\sigma'(k)}) \right] T(w_{k+1},\dots,w_{k+1}) = 0$$

Observemos que $G \cap G \cdot \sigma_0 = \emptyset$ pués si $\sigma \in G \cap G \cdot \sigma_0$, entonces $\sigma = \sigma' \cdot \sigma_0$ para alguna $\sigma' \in G$ y $\sigma_0 = \sigma(\sigma')^{-1} \in G$, que es una contradicción.

Se puede continuar de esta forma descomponiendo S_{k+1} en subconjuntos ajenos, la suma extendida a cada subconjunto es 0, de manera que la suma extendida a S_{k+1} es 0. La relación $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$ se demuestra de manera similar ■

TEOREMA 4.1.14

$$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(W \otimes S) \otimes T) = \operatorname{Alt}(W \otimes S \otimes T) = \operatorname{Alt}(W \otimes \operatorname{Alt}(S \otimes T)).$$

DEMOSTRACION. Se tiene $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(S \otimes T) - S \otimes T) = \operatorname{Alt}(S \otimes T) - \operatorname{Alt}(S \otimes T) = 0$,y en virtud del teorema anterior se tiene:

$$0 = \operatorname{Alt}(W \otimes [\operatorname{Alt}(S \otimes T) - S \otimes T]) = \operatorname{Alt}(W \otimes \operatorname{Alt}(S \otimes T)) - (W \otimes S \otimes T).$$

La otra igualdad se prueba de forma análoga. ■

TEOREMA 4.1.15

Si $W \in \Lambda^k(V)$, $S \in \Lambda^l(V)$ y $T \in \Lambda^m(V)$, entonces:

$$(W \wedge S) \wedge T = W \wedge (S \wedge T) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} \operatorname{Alt}(W \otimes S \otimes T).$$

DEMOSTRACION. $(W\wedge S)\wedge T=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\mathrm{Alt}((W\wedge S)\otimes T)=$

$=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(W\otimes S\otimes T)$. La otra igualdad es análoga. ∎

NOTACION

Tanto $(W\wedge S)\wedge T$ como $W\wedge(S\wedge T)$ se indicará simplemente por $W\wedge S\wedge T$ y el producto de orden superior $W_1\wedge\ldots\wedge W_r$ se define de forma análoga.

Si $v_1,\ldots,v_n$ es una base para V y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ es la base dual entonces podemos construir una base para $\Lambda^k(V)$.

TEOREMA 4.1.16

El conjunto de todos los productos $\varphi_{i1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{ik}$ $1\le i_1<\ldots<i_k\le n$ es una base para $\Lambda^k(V)$ que tiene dimensión $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (En particular $\Lambda^k(V)=\{0\}$ para $k>n$).

DEMOSTRACION. Si $W\in\Lambda^k(V)\subset\mathfrak{J}^k(V)$, entonces podemos expresar a W como $W=\sum_{i1,\ldots,ik}a_{i1\ldots ik}\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}$, así

$$W=\mathrm{Alt}(W)=\sum_{i1,\ldots,ik}a_{i1\ldots ik}\mathrm{Alt}(\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}).$$

Puesto que cada $\mathrm{Alt}(\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik})$ es el producto de una constante (0 ó $\pm1/k!$) por una de las $\varphi_{i1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{ik}$, estos elementos generan a $\Lambda^k(V)$. Ahora supongamos que existen $a_{i1},\ldots,a_{ik}$ tales que

$\sum_{i1,\ldots,ik}a_{i1}\ldots a_{ik}\cdot\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}=0$, aplicando a ambos miembros $(v_{i1},\ldots,v_{ik})$ se obtiene que $a_{i1\ldots ik}=0$, entonces $\varphi_{i1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{ik}$ son linealmente independientes y por lo tanto $\varphi_{i1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{ik}$ son linealmente independientes., ∎

OBSERVACION 4.1.17

Si V tiene dimensión n se deduce del teorema anterior que $\Lambda^n(V)$ tiene dimensión 1.

TEOREMA 4.1.18

Sea $v_1,\dots,v_n$ una base para **V** y sea $\mathbf{W} \in \Lambda^n(\mathbf{V})$ Si $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i$ $i=1,\dots,n$ son n vectores en **V**, entonces:

$$\mathbf{W}(w_1,\dots,w_n) = \det(a_{ij})\cdot\mathbf{W}(v_1,\dots,v_n).$$

DEMOSTRACION. Se define $\mathbf{T} \in \mathfrak{J}^n(\mathbb{R}^n)$ por:

$\mathbf{T}((a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,(a_{n1},\dots,a_{nn})) = \mathbf{W}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1} v_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{jn} v_j\right) \Rightarrow \mathbf{T} \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{T} = \lambda\det$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda = \mathbf{T}(e_1,\dots,e_n) = \mathbf{W}(v_1,\dots,v_n)$ ∎

El teorema anterior muestra que un tensor **W** antisimétrico, no nulo, separa el conjunto de las bases de **V** en dos subconjuntos ajenos, aquellos con $\mathbf{W}(v_1,\dots,v_n) > 0$ y aquellos para las cuales $\mathbf{W}(v_1,\dots,v_n) < 0$. Si $v_1,\dots,v_n$ y $w_1,\dots,w_n$ son dos bases y $\mathbf{A} = (a_{ij})$ esta definido por $w_i = \sum a_{ij} v_j$, entonces $v_1,\dots,v_n$ y $w_1,\dots,w_n$ están en el mismo subconjunto si y sólo si $\det(\mathbf{A}) > 0$.

Este criterio es independiente de **W** y puede utilizarse siempre para dividir las bases de **V** en dos subconjuntos ajenos.

DEFINICION 4.1.19

Cada uno de los subconjuntos de los que se habla anteriormente es una *orientación* para **V**, la orientación a la que pertenecen $v_1,\dots,v_n$ se indicará por $[v_1\dots,v_n]$ y la otra orientación se indicara por $-[v_1,\dots,v_n]$, o bien por μ_v y $-\mu_v$ respectivamente.

En $\mathbb{R}^n$ se define la *orientación usual* por $[e_1,\dots,e_n]$.

El hecho de que $\dim\Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$ no es nuevo puesto que det, se define como el único elemento $\mathbf{W} \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{W}(e_1,\dots,e_n) = 1$. Para un espacio vectorial **V** en general no existe un criterio de esta clase para distinguir un particular $\mathbf{W} \in \Lambda^n(\mathbf{V})$.

Supóngase, sin embargo, que se ha dado un producto interior **T** para **V**. Si $v_1,\dots,v_n$ y $w_1,\dots,w_n$ son dos bases para **V** que son ortonormales con respecto a **T** y la matriz $\mathbf{A}=(a_{ij})$ esta definida por $w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j$, entonces $\delta_{ij}=\mathbf{T}(w_i,w_j)=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij}a_{jl}\mathbf{T}(v_k,v_l)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$.

En otras palabras si $\mathbf{A}^t$ designa la matriz transpuesta de **A**, entonces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t=I$ de manera que $\det(\mathbf{A})=\pm 1$.

Además se sigue del teorema anterior que si $\mathbf{W}\in\Lambda^n(\mathbf{V})$ satisface $\mathbf{W}(v_1,\ldots,v_n)=\pm 1$, entonces $\mathbf{W}(w_1,\ldots,w_n)=\pm 1$.

Si se ha dado una orientación μ_v para **V** se deduce que existe un único $\mathbf{W}\in\Lambda^n(\mathbf{V})$ tal que $\mathbf{W}(v_1,\ldots,v_n)=1$ siempre que $v_1,\ldots,v_n$ sea una base ortonormal tal que $[v_1,\ldots,v_n]=\mu_v$. Esta única μ_v se denomina elemento de *volumen* de **V**, determinado por el producto interior **T** y la orientación μ.

OBSERVACION 4.1.20

Obsérvese que det, es el elemento de volumen de $\mathbb{R}^n$ determinado por el producto interior usual y la orientación usual, y que $|\det(v_1,\ldots,v_n)|$, es el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $v_1,\ldots,v_n$.

§ 4.2 FORMAS DIFERENCIALES

En esta sección denotaremos por $\mathbb{R}^n_p$ al conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ con origen en el punto **p** $\in \mathbb{R}^n$, o bien el conjunto de todos los pares $(\mathbf{p},v)$ con $v \in \mathbb{R}^n$ (vectores $v \in \mathbb{R}^n$ trasladados a **p** sin perder longitud ni dirección), ver la figura 4.1

figura 4.1

Podemos trasladar la base de $\mathbb{R}^n$ al punto **p** $\in \mathbb{R}^n$ y así $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n_p$ son naturalmente isomorfos.

Por similitud con el espacio $\mathbb{R}^n$ definamos en $\mathbb{R}^n_p$ las siguientes operaciones:

i). Sean $(\mathbf{p},v)$ y $(\mathbf{p},w) \in \mathbb{R}^n_p$ definimos la suma por:

$$(\mathbf{p},v)+ (\mathbf{p},w)= (\mathbf{p},v+w) \in \mathbb{R}^n_p.$$

ii). Sea $(\mathbf{p},v) \in \mathbb{R}^n_p$ y $a \in \mathbb{R}$, definimos el producto por escalares en $\mathbb{R}^n_p$ por:

$$a(\mathbf{p},v)= (\mathbf{p},av).$$

Así $\mathbb{R}^n_p$ resulta ser un espacio vectorial, el cual a su vez resulta ser el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en el punto **p** $(T_p\mathbb{R}^n)$.

OBSERVACION 4.2.1

Obsérvese que si elegimos un vector en cada $\mathbb{R}^n_p$ obtenemos un campo vectorial.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n_p$ está intimamente relacionado con el espacio $\mathbb{R}^n$, y muchas de las propiedades de $\mathbb{R}^n$, tienen sus equivalentes en $\mathbb{R}^n_p$; en particular podemos definir el *producto interior usual* para $\mathbb{R}^n_p$, $< \, , >_p$ que se define por:

$<v_p, w_p>_p = <v,w>$ donde $v_p = (P,v)$ para facilitar la notación.

Ademas la *orientación usual* para $\mathbb{R}^n_p$ es $[(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p]$.

DEFINICION 4.2.2

Consideremos una función $\omega(P) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$. A está función se le llama *forma de orden k*.

NOTA

A la función definida anteriormente también se la conoce como *k-forma* o *forma diferencial de orden k*.

Ahora si $\{\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)\}$ es la base dual de $\{(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p\}$ $(\varphi_i(e_j)(p) = \delta_{ij})$, entonces:

$$\omega(P) = \sum_{i1<\ldots<ik} W_{i1,\ldots,ik}(P)\cdot[\varphi_{i1}(p)\wedge\cdots\wedge\varphi_{ik}(p)].$$

para ciertas funciones $W_{i1}, \ldots, W_{ik}$. La forma W se llama continuamente diferenciable, si estas funciones lo son.

NOTACION

El conjunto de todas las formas diferenciales de orden k en un espacio vectorial V lo denotaremos por $\Lambda^k(V)$.

En este trabajo supóndremos siempre que las formas y los campos vectoriales son de clase C^∞.

OBSERVACION 4.2.3

(1). La suma $\omega + \eta$, el producto $\omega \cdot \eta$, y el producto exterior $\omega\wedge\eta$, se heredan de la estructura de subespacio de $\Lambda^k(\mathbf{V})$ del espacio $\mathfrak{J}^k(\mathbf{V})$.

(2). Una función **f** se considera una forma de orden 0, luego entonces $f\cdot\omega$ se escribe tambien como $f\wedge\omega$, (Aquí $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n_p \longrightarrow \mathbb{R}$).

(3). Sea $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable, entonces $\mathbf{Df(p)} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Así, podemos obtener una 1-forma **df**, definida por:

$$\mathbf{df(p)}(v_p) = \mathbf{Df(p)}(v)$$

Como caso particular considérese la 1-forma $d\pi^i$. Se acostumbra indicar la función π^i por x^i.

OBSERVACION 4.2.4

De lo anterior observamos que:

$$dx^i(\mathbf{p})(v_p) = d\pi^i(\mathbf{p})(v_p) = \mathbf{D}\pi^i(\mathbf{p})(v) = v^i$$

Además se observa que $\{ dx^1(\mathbf{p}),\dots,dx^n(\mathbf{p}) \}$ es la base dual de $\{ (\mathbf{e}_1)_p,\dots,(\mathbf{e}_n)_p \}$, así cada k-forma se puede escribir como

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k}^{n} W_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

TEOREMA 4.2.5

Si $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces:

$$\mathbf{df} = \mathbf{D_1f}\cdot dx^1+\dots+\mathbf{D_nf}\cdot dx^n$$ ó con la notación clasica

$$\mathbf{df} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^1}dx^1+\dots+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^n}dx^n$$

DEMOSTRACION. $\mathbf{df(p)}(v_p) = \mathbf{Df(p)}(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i\cdot\mathbf{D_if(p)} = \sum_{i=1}^{n} dx^i(\mathbf{p})(v_p)\cdot\mathbf{D_if(p)}$

entonces $\mathbf{df} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D_if}\cdot dx^i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i}dx^i$. ∎

4.2.6 COMPORTAMIENTO BAJO FUNCIONES

Sea $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, entonces se tiene una transformación lineal $\mathbf{Df(P)}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Así de una manera natural podemos obtener una transformación lineal $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n_p \longrightarrow \mathbb{R}^m_{f(p)}$ definida por:

$$\mathbf{f}_*(v_p) = (\mathbf{Df(p)}(v))_{f(p)}$$

Esta aplicación lineal induce otra aplicación lineal

$$f^{*}:\Lambda^{k}(\mathbb{R}^{m}_{f(P)}) \longrightarrow \Lambda^{k}(\mathbb{R}^{n}_{P}).$$

Si ω es una k-forma en $\mathbb{R}^{m}$, se puede definir una k-forma $f^{*}\omega$ en $\mathbb{R}^{n}$ por $(f^{*}\omega)(P)= f^{*}(\omega(P))$. Esto significa que si $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^{n}_{P}$, se tiene $f^{*}\omega(P)(v_1,\ldots,v_k)= \omega(f(P))(f_{*}(v_1),\ldots,f_{*}(v_k))$. Ver la figura 4.2

figura 4.2

TEOREMA 4.2.7

Sea $f:\mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ diferenciable, entonces:

(i). $f^{*}(dx^{i})= \sum_{j=1}^{n} D_j f^{i}\cdot dx^{j}= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^{i}}{\partial x^{j}}\cdot dx^{j}$

(ii). $f^{*}(\omega_1+ \omega_2)= f^{*}(\omega_1)+ f^{*}(\omega_2)$

(iii). $f^{*}(g\cdot\omega)= (f\circ g)\cdot f^{*}\omega$

(iv). $f^{*}(\omega\wedge\eta)= f^{*}(\omega)\wedge f^{*}(\eta)$.

DEMOSTRACION.

(i). $f^{*}(dx^{i})(P)(v_p)= dx^{i}(f(P)(f_{*}v_p)=$

$= dx^{i}(f(P))\left(\sum_{j=1}^{n} v^{j}\cdot D_j f^{1}(P),\ldots, \sum_{j=1}^{n} v^{j}\cdot D_j f^{m}(P)\right)_{f(P)}= \sum_{j=1}^{n} v^{j}\cdot D_j f^{i}(P)=$

$= \sum D_j f^{i}(P)\cdot dx^{j}(P)(v_p)$.

(ii). y (iii). se siguen directamente de la definición. (iv) es consecuencia directa del producto exterior tensorial. ■

OBSERVACION 4.2.8

Observemos que si aplicamos el teorema anterior se obtiene:

$$f^*(Pdx^1\wedge dx^2+ Qdx^2\wedge dx^3)=$$

$$=(P\circ f)[f^*(dx^1)\wedge f^*(dx^2)]+ (Q\circ f)[f^*(dx^2)\wedge f^*(dx^3)].$$

TEOREMA 4.2.9

Si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, entonces:

$$f^*(hdx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)= (h\circ f)f^*(\det f')\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$$

DEMOSTRACION.

Por la parte (iii). del teorema anterior se tiene que

$$f^*(hdx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)= (h\circ f)f^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)$$

por lo cual basta probar que:

$$f^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)= (\det f')\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$$

Sea $P \in \mathbb{R}^n$ y sea $A= (a_{i,j})$ la matriz de $f'(P)$, entonces:

$$f^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)(e_1,\ldots,e_n)= dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n(f_*e_1,\ldots,f_*e_n)=$$

$$dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n\left(\sum_{i=1}^{n}a_{1i}e_i,\ldots,\sum_{i=1}^{n}a_{ni}e_i\right)=$$

$$= \det(a_{ij})\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n(e_1,\ldots,e_n). \qquad \blacksquare$$

CAPITULO 5

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EXTERIOR

Este capitulo se ha dividido en tres secciones. En la primera se define un operador muy importante para el estudio de formas, este es el operador derivada exterior, para después en la segunda sección, con la ayuda de este operador caracterizar geométricamente a los espacios y esto lo haremos atraves del lema de Poincaré. En la tercera y última sección definiremos la integración de formas sobre cadenas y estableceremos un resultado clásico del cálculo integral, el " Teorema de Stokes ".

§ 5.1 DIFERENCIAL EXTERIOR

En esta sección definiremos y estudiaremos algunas propiedades importantes de un operador, al cual le llamaremos "la diferencial exterior de una forma diferencial".

Este operador aumenta el orden en una unidad a una forma diferencial y aparecerá en la definición de la integral de formas diferenciales sobre cadenas.

DEFINICION 5.1.1 (DIFERENCIAL EXTERIOR)

Llamaremos *diferencial exterior* al operador $\mathbf{d}:\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ el cual actúa de la siguiente manera:

Si $\omega = \sum_{i_1 \ldots < i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ es una k-forma, entonces la diferencial de ω esta dada por:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) \cdot dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

TEOREMA 5.1.2

(i). $\mathbf{d}(\omega + \eta) = \mathbf{d}\omega + \mathbf{d}\eta$

(ii). Si ω es una k-forma y η es una *l*-forma, entonces:

$$\mathbf{d}(\omega\wedge\eta) = \mathbf{d}\omega\wedge\eta + (-1)^{kl}\omega\wedge\mathbf{d}\eta$$

(iii). $\mathbf{d}(\mathbf{d}\omega) = 0$, abreviadamente $\mathbf{d}^2 = 0$

(iv). Si ω es una k-forma en $\mathbb{R}^m$ $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ y $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función difenciable, entonces $\mathbf{f}^*(\mathbf{d}\omega) = \mathbf{d}(\mathbf{f}^*\omega)$.

DEMOSTRACION.

(i). Es directo de la definición.

(ii). La igualdad es cierta si $\omega = dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ y $\eta = dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$, puesto que todos los términos se anulan. La igualdad se comprueba fácilmente cuando ω es una 0-forma. la igualdad en general, se puede deducir de (i) y de las observaciones.

(iii). Puesto que $\mathbf{d}\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{D}_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\, dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$,

se tiene que

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}\omega) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\, dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

En estas sumas los términos

$$D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\, dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

$$\text{y } \mathbf{D}_{\beta,\alpha}(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\, dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

Y estas se anulan por parejas.

(iv). La prueba se hace por inducción en k:

Supóngase, que (iv) es cierto cuando ω es una k-forma. Basta probar (iv) para una (k+1)-forma del tipo $\omega\wedge dx^i$. Entonces se tiene:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{d}(\omega\wedge \mathbf{d}x^i)) = \mathbf{f}^*(\mathbf{d}\omega\wedge \mathbf{d}x^i + (-1)^k\omega\wedge\mathbf{d}(\mathbf{d}x^i)) =$$

$$= \mathbf{f}^*(\mathbf{d}\omega\wedge dx^i) = \mathbf{f}^*(\mathbf{d}\omega)\wedge\mathbf{f}^*(dx^i) = \mathbf{d}(\mathbf{f}^*\omega\wedge\mathbf{f}^*(dx^i)) = \mathbf{d}(\mathbf{f}^*(\omega\wedge dx^i)) \quad \blacksquare$$

DEFINICION 5.1.3

Una forma ω se llama *cerrada* si $d\omega= 0$

Una forma ω se llama *exacta* si existe una (k-1)-forma η tal que $\omega= d\eta$.

OBSERVACION 5.1.4

El teorema anterior muestra que toda forma exacta es cerrada.

Resulta natural preguntarse si toda forma cerrada es exacta ó bajo qué condiciones esto sucede.

Si ω está definida sólo en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, puede ocurrir que no exista una función **f** tal que $df= \omega$. Un ejemplo clásico es el siguiente que muestra que no toda forma cerrada es exacta.

EJEMPLO.

Sea ω la siguiente 1-forma, definida en $\mathbb{R}^2-\{0\}$.

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

la idea es demostrar que una forma cerrada no es, necesariamente exacta.

La 1-forma ω es usualmente denotada por $d\theta$, para:
$\theta(x,y)= \pi+ \arctan(y/x)$ con dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x,y) \neq 0 \}$ pero como podemos observar, $\omega = d\theta$ solamente en $\mathbb{R}^2-\{0\}$. Esto es mostrado en la figura 5.1

figura 5.1

Así, ω no es igual a **df** para cualquier función **f** de clase C^1 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. En verdad, si $\omega = \mathbf{df}$, entonces $\mathbf{df} = \mathbf{d}\theta$ sobre $\mathbb{R}^2-\{0\}$ así $\mathbf{d}(\mathbf{f}-\theta) = 0$ en $\mathbb{R}^2-\{0\}$ lo cual implica que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ y $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y}$ y esto es imposible puesto que $\mathbf{f} = \theta + \text{cte}$ en $\mathbb{R}^2-\{0\}$. Sin embargo $\mathbf{d}\omega = 0$ (pués $\mathbf{d}(\mathbf{d}\theta) = 0$ en $\mathbb{R}^2-\{0\}$). Así ω es cerrada pero no exacta. Claramente ω no es exacta en cualquier vecindad que del 0.

OBSERVACION 5.1.5

Como hemos visto en este ejemplo, el que una forma cerrada sea sea exacta depende de la forma geometrica de la región.

§ 5.2 LEMA DE POINCARE

En esta sección veremos cuando una forma cerrada es exacta. Para ello caracterizaremos algunos conjuntos sobre los cuales toda forma cerrada es exacta; estos conjuntos son de gran importancia en la formulación del objetivo de esta sección que es establecer y demostrar el Lema de Poincaré.

Supóngase que $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot dx^i$ es una 1-forma en $\mathbb{R}^n$, y además ω resulta ser igual a $\mathbf{df} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i\mathbf{f} \cdot dx^i$. Se puede suponer que $\mathbf{f}(0) = 0$.

Entonces se tiene $\mathbf{f}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\mathbf{f}(tx)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i\mathbf{f}(tx) \cdot x^i dt =$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i dt.$$

Esto sugiere que para encontrar **f**, dada ω, se considere la función I_ω definida por:

$$I_\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i dt$$

Obsérvese que la función I_ω, tiene sentido si ω está definida sólo en un conjunto abierto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$, con la propiedad de que siempre que $X \in \mathbf{A}$, el segmento de recta de 0 a X esté contenido en **A**.

DEFINICION 5.2.1

Un conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$, es *estrellado* respecto a 0 si para todo $X \in \mathbf{A}$ el segmento de recta que une a X con 0 está siempre contenido en **A**, ver la figura 5.2

figura 5.2

TEOREMA 5.2.2 (LEMA DE POINCARE)

Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto estrellado respecto de 0, entonces toda forma cerrada en **A** es exacta.

DEMOSTRACION.

Se define una función I, en la que a cada l-forma le corresponde una $(l-1)$-forma (para cada l), tal que $I(0) = 0$ y $\omega = I(\mathbf{d}\omega) + \mathbf{d}(I_\omega)$ para cada forma ω. Se deduce que $\omega = \mathbf{d}(I_\omega)$ si $\mathbf{d}\omega = 0$. Sea $\omega = \sum\limits_{i_1<\dots<i_l} \omega_{i_1,\dots,i_l}\, dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_l}$; como **A** es estrellado se puede definir:

$$I_\omega(x) = \sum_{i_1\dots<i_l} \sum_{\alpha=1} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\dots,i_l}(tx)\, dt \right) x^{i_\alpha}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}$$

La demostración de que $\omega = I(\mathbf{d}\omega) + \mathbf{d}(I_\omega)$ se hara usando cálculo: Tenemos que

$$d(I_\omega) = l \sum_{i_1<\dots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\dots,i_l}(tx)\,dt\right) dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l} +$$

$$+\sum_{i_1<\dots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)\,dt\right) x^{i_\alpha}\, dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge$$

$$\dots\wedge dx^{i_l}.$$

se tiene también:

$$d\omega = \sum_{i_1<\dots<i_l}\sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})\, dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l}.$$

Aplicando I a la $(l+1)$-forma $d\omega$ se tiene que

$$I(d\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)\,dt\right) x^j\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l} - \dots$$

$$-\sum_{i_1<\dots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)\,dt\right) x^{i_\alpha}\, dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots$$

$$\dots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\dots\wedge dx^{i_l}.$$

Sumando se eliminan las sumas triples, y se obtiene:

$$d(I_\omega) + I(d\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_l} l \left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\dots,i_l}(tx)\,dt\right) dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l} + \dots$$

$$+\sum_{i_1<\dots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^l x^j D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)\,dtk)\right) dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_l}\left(\int_0^1 \frac{d}{dt}[t^l\omega_{i_1,\dots,i_l}(tx)]\,dt\right) dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_l} \omega_{i_1,\dots,i_l}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_l} = \omega. \qquad \blacksquare$$

§ 5.3 INTEGRACION EN CADENAS (TEOREMA DE STOKES)

En esta sección definiremos algunos conceptos que serán de gran importancia, como lo son las cadenas, los cubos y sus caras los cuales nos permitirán generalizar la definición de integral múltiple de Riemann a la integral de formas sobre cadenas, para después establecer el teorema de Stokes.

NOTACION

Denotaremos por $[a,b]^n$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, el producto de factores $[a,b]\text{X}\ldots\text{X}[a,b]$; $[a,b]^n \subset \mathbb{R}^n$.

DEFINICION 5.3.1

Un *cubo singular* n-dimensional o *n-cubo* en $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$, es una función continua $\mathbf{c}:[0,1]^n \longrightarrow \mathbf{A}$.

Adoptaremos la convención de representar $[0,1]^0 = \{0\}$, o bien por $\mathbb{R}^0$. Y un 0-cubo singular en **A** es una función $\mathbf{f}:\{0\} \longrightarrow \mathbf{A}$ (un punto en **A**).

OBSERVACION 5.3.2

Un 1-cubo singular en **A** es una curva.

DEFINICION 5.3.3

El *n-cubo normal o típico* en $\mathbb{R}^n$ es la función continua $\mathbf{I}^n:[0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{I}^n(X) = X$ para toda $X \in [0,1]^n$.

Será preciso considerar sumas formales de n-cubos singulares en **A**, es decir, expresiones de la forma:

$$6\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3$$

donde $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$ son n-cubos singulares en **A**.

DEFINICION 5.3.4

Una *n-cadena singular* en **A** es una suma $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{c}_i$ donde $a_i \in \mathbb{Z}$, no necesariamente todas distintas, y cada $\mathbf{c}_i$ es un n-cubo singular en **A**.

Para cada n-cadena singular **c** en **A**. Se definirá una (n-1)-cadena en **A**, llamada la frontera de **c** y la denotaremos por $\partial\mathbf{c}$.

para la definición precisa de $\partial\mathbf{I}^n$ se requieren algunos conceptos que definiremos a continuación.

DEFINICION 5.3.5

Para cada i, $1 \le i \le n$, se definen dos (n-1)-cubos singulares $\mathbf{I}^n_{(i,0)}$, $\mathbf{I}^n_{(i,1)} : [0,1]^{n-1} \longrightarrow [0,1]^n$ llamados (i,0) e (i,1)-*caras* de $\mathbf{I}^n$ respectivamente por

$$\mathbf{I}^n_{(i,0)}(X) = \mathbf{I}^n(x^1,\dots,x^{i-1},0,x^i,\dots,x^{n-1}) = $$
$$= (x^1,\dots,x^{i-1},0,x^i,\dots,x^{n-1})$$
$$\mathbf{I}^n_{(i,1)}(X) = \mathbf{I}^n(x^1,\dots,x^{i-1},1,x^i,\dots,x^{n-1}) = $$
$$= (x^1,\dots,x^{i-1},1,x^i,\dots,x^{n-1})$$

EJEMPLO

Observemos las caras de las siguientes figuras, $[0,1]^2$ y $[0,1]$.

ver figura 5.3

figura 5.3

DEFINICION 5.3.6

Definamos ∂I^n la *frontera* de I^n por:

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+1} I^n_{(i,\alpha)}$$

DEFINICION 5.3.7

Para un n-cubo singular $\mathbf{c}:[0,1]^n \longrightarrow \mathbf{A}$ se define la

(i,α)-cara, $\mathbf{c}_{(i,\alpha)}:[0,1]^{n-1} \longrightarrow \mathbf{A}$ por:

$$\mathbf{c}_{(i,\alpha)} = \mathbf{c} \circ (I^n_{(i,\alpha)})$$

y despues:

$$\partial \mathbf{c} = \sum_{i=n}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \mathbf{c}_{(i,\alpha)}$$

Finalmente definiremos la frontera de una n-cadena $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{c}_i$ por:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{c}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial(\mathbf{c}_i)$$

TEOREMA 5.3.8

Si $\mathbf{c}$ es una n-cadena en $\mathbf{A}$, entonces $\partial(\partial \mathbf{c}) = 0$ lo cual abreviamos por $\partial^2 = 0$.

DEMOSTRACION.

Sea $i \le j$ y considérese $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$, si $X \in [0,1]^{n-2}$ entonces por la definición de la (j,β)-cara se tiene:

$$\begin{aligned}(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(X) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(X)) = \\ &= I^n_{(i,\alpha)}(x^1,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-1}) = \\ &= I^n(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-2}).\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}(X) &= I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(X)) = \\ &= I^n_{(j+1,\beta)}(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{n-2}) = \\ &= I^n(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-2})\end{aligned}$$

Así, $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ para $i \le j$ y se deduce fácilmente de la misma forma, para cada n-cubo singular **c**, que $(\mathbf{c}_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (\mathbf{c}_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ cuando $i\leq j$. Ahora:

$$\partial(\partial\mathbf{c}) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha}\mathbf{c}_{(i,\alpha)} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1} \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0,1} (-1)^{i+\alpha+j+\beta}(\mathbf{c}_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}.$$

En estas sumatorias $(\mathbf{c}_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ y $(\mathbf{c}_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ aparecen con signos opuestos, así todos los términos se cancelan por parejas, por lo que $\partial(\partial c) = 0$. Como el teorema es cierto para cada n-cubo singular, entonces tambien es válido para n-cadenas singulares pues una cadena es una suma formal de n-cubos. ∎

El hecho de que $\mathbf{d}^2 = 0$ y $\partial^2 = 0$ suguiere una conexión entre cadenas y formas. Esta conexión se establece por *integración* de las formas sobre cadenas.

En lo sucesivo sólo se considerarán n-cubos *diferenciables* en conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ (un cubo c diferenciable, significa que la función c es de clase $\mathbf{C}^\infty$).

DEFINICION 5.3.9

Sea ω una k-forma en un abierto **U** que contiene a $[0,1]^k$, con $\omega = \mathbf{f}\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$ para una única función **f**, definida en **U**. Se define la integral de ω en $[0,1]^k$ como

$$\int_{[0,1]^k}\omega = \int_{[0,1]^k}\mathbf{f}$$

Lo que tambien se puede escribir así:

$$\int_{[0,1]^k}\mathbf{f}dx^1\wedge,\ldots,\wedge dx^k = \int_{[0,1]^k}\mathbf{f}(x^1,\ldots,x^k)\,dx^1dx^2,\ldots,dx^k$$

DEFINICION 5.3.10

Si ω es una k-forma en **A** y **c** es un k-cubo singular en **A**, se define:

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \int_{[0,1]^k} \mathbf{c}^* \omega$$

En particular:

$$\int_{I^k} f dx^1 \wedge, \ldots, \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} (I^k)^* (f dx^1 \wedge, \ldots, \wedge dx^k) = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k) dx^1, \ldots, dx^k$$

Para k = 0, se tiene un caso especial, una 0-forma ω es una función continua. Si $\mathbf{c}:\{0\} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un 0-cubo singular en **A** se tiene

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \omega(\mathbf{c}(0)).$$

Ahora, la integral de ω, sobre una k-cadena $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{c}_i$ se define por:

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\mathbf{c}i} \omega$$

EJEMPLO

OBSERVACION 5.3.11

Podemos observar que la integral de una 1-forma sobre una 1-cadena, es lo que en cálculo vectorial se le conoce como *integral de línea.*

Además la integral de una 2-forma sobre un 2-cubo singular es lo que en cálculo integral se le conoce como la *integral de superficie.*

TEOREMA 5.3.12

Sea $\mathbf{c}:[0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un n-cubo singular bijectivo con $\det c'>0$, sobre $[0,1]^n$. Sea ω una n-forma en algún conjunto abierto que contiene $\mathbf{c}([0,1]^n)$. Si escribimos $\omega = \mathbf{f}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, entonces:

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}([0,1]^n)} \mathbf{f}$$

DEMOSTRACION.

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \int_{[0,1]^n} \mathbf{c}^*\omega = \int_{[0,1]^n} (\mathbf{f}\circ\mathbf{c})(\det \mathbf{c}')dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n =$$

$$= \int_{[0,1]^n} (\mathbf{f}\circ\mathbf{c})|\det \mathbf{c}'|dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \int_{[0,1]^n} (\mathbf{f}\circ\mathbf{c})|\det \mathbf{c}'| = \int_{\mathbf{c}([0,1]^n)} \mathbf{f} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 5.3.13 (TEOREMA DE STOKES)

Si ω es una (k-1)-forma en **A** y **c** es una k-cadena en **A**, entonces:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d}\omega = \int_{\partial\mathbf{c}} \omega$$

DEMOSTRACION.

Supóngase, en primer lugar que $\mathbf{c} = \mathbf{I}^k$ y ω es una (k-1)-forma en $[0,1]^k$, entonces ω es la suma de (k-1)-formas del tipo: $\mathbf{f}dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k$. Así, es suficiente probar el teorema para una de estas (k-1)-formas pues estos son elementos típicos de una (k-1)-forma diferencial. Obsérvese que:

$$\int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(j,\alpha)}(f dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq i \\ \int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,\alpha,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k & j=i \end{cases}$$

por tanto, sustituyendo la fórmula para ∂I^k y usando la definición de integración sobre una cadena se obtiene:

$$\int_{\partial I^k} f dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}\int I^{k\,*}_{(j,\alpha)}(f dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k) =$$

$$= (-1)^{i+1}\int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,1,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k +$$

$$+ (-1)^{i}\int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,0,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k$$

Por otra parte :

$$\int_{I^k} d(f dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k) = \int D_i f dx^i\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k} D_i f\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k = (-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k} D_i f \;.$$

En virtud del teorema de Fubini y del teorema fundamental de cálculo se tiene:

$$\int_{I^k} d(f dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k) =$$

$$= (-1)^{i-1}\int_0^1\ldots\left(\int_0^1 D_i f(x^1,\ldots,x^k)\,dx^i\right)dx^1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1}\int_0^1\ldots\int_0^1 [f(x^1,\ldots,1,\ldots x^k) - f(x^1,\ldots,0,\ldots,x^k)]\,dx^1\ldots \widehat{dx^i}\ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,1,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k +$$

$$+(-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,0,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k = \int_{\partial I^k} f\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_{I^k} \mathbf{d}\omega = \int_{\partial I^k}\omega$.

Ahora si c es un k-cubo singular arbitrario, se tiene:

$$\int_{\partial \mathbf{c}} \omega = \int_{\partial I^k} \mathbf{c}^*\omega$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d}\omega = \int_{I^k} \mathbf{c}^*(\mathbf{d}\omega) = \int_{I^k} \mathbf{d}(\mathbf{c}^*\omega) = \int_{\partial I^k} \mathbf{c}^*\omega = \int_{\partial \mathbf{c}}\omega$

Finalmente, si c es una k-cadena $\sum_{i=1}^{k} a_i c_i$ se tiene:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d}\omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\mathbf{c}_i} \mathbf{d}\omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\partial \mathbf{c}_i} \omega = \int_{\partial \mathbf{c}} \omega \qquad \blacksquare$$

CASOS PARTICULARES DEL TEOREMA DE STOKES

A). Supongamos que en el teorema de Stokes tomamos $k = 1$, $n = 1$ ($\mathbb{R}$) así se una tiene 1-cadena $\mathbf{c}:[0,1] \longrightarrow [a,b] \in \mathbb{R}$; aquí ∂c es un 0-cubo, $\partial c = \{b\} - \{a\}$ y ω es una 0-forma es decir $\omega = \mathbf{f}$ para alguna función diferenciable $\mathbf{f}$ entonces $\mathbf{d}\omega = \mathbf{f}'$.Aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d}\omega = \int_{\partial \mathbf{c}} \omega$$

tenemos: $$\int_{[a,b]} \mathbf{f}' = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$$

Que es el *Teorema Fundamental del Cálculo* para una variable.

B). Supongamos $k = 2$ $n = 2$. Así se tiene una 1-forma en $\mathbb{R}^2$ $\omega = \mathbf{P}(x^1,x^2)dx^1 + \mathbf{Q}(x^1,x^2)dx^2$ y una 2-cadena en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}:[0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Ahora

$$\mathbf{d}\omega = \mathbf{d}(\mathbf{P}(x^1,x^2))dx^1 + \mathbf{P}(x^1,x^2)d(dx^1) + d(\mathbf{Q}(x^1,x^2))dx^2 + \mathbf{Q}(x^1,x^2)d(dx^2)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}^1}dx^1 + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}^2}dx^2\right)dx^1 + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}^1}dx^1 + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}^2}dx^2\right)dx^2 =$$

$= \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)dx^1 \wedge dx^2$. Aplicando el Teorema de Stokes a lo anterior obtenemos el teorema de Green:

$$\iint_{\mathbf{c}} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial \mathbf{c}} (\mathbf{P}dx^1 + \mathbf{Q}dx^2)$$

"El teorema de Green nos relaciona la integral de superficie sobre el interior de una región en $\mathbb{R}^2$, con la integral de linea a lo largo de la frontera de dicha región."

C). Supongamos $k = 2$, $n = 3$. Así, se tiene una 2-cadena $c:[0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; ∂c es la frontera de esta superficie orientada y sea $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ un vector normal a la superficie en $\mathbb{R}^3$.

Sea ω la 1-forma

$$\omega = \mathbf{P}(x^1,x^2,x^3)\,dx^1 + \mathbf{Q}(x^1,x^2,x^3)\,dx^2 + \mathbf{R}(x^1,x^2,x^3)\,dx^3$$

entonces:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d}\omega = \iint_{\mathbf{c}} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)\eta_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}^3} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}^1}\right)\eta_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\eta_3 \right) dS =$$

$$= \int_{\partial \mathbf{c}} \mathbf{P}dx^1 + \mathbf{Q}dx^2 + \mathbf{R}dx^3$$

"Este es el clásico *Teorema de Stokes* que nos relaciona la integral de una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$ con la integral de línea sobre la frontera de la superficie en $\mathbb{R}^3$".

CAPITULO 6: CALCULO INTEGRAL EN VARIEDADES

En este capítulo estableceremos lo que es una partición de la unidad, además aseguraremos la existencia de particiones de la unidad subordinadas a un atlas de una variedad. También se introducirá el concepto de forma diferencial sobre una variedad diferenciable **M**, para después pasar a la parte central del capítulo que es la integración de formas sobre variedades. Además daremos el resultado más importante del cálculo integral sobre variedades, a saber, el conocido teorema de Stokes, el cual, se tornará sencillo al definir la integral de una forma diferencial sobre una cadena.

§ 6.1 FORMAS DIFERENCIALES SOBRE VARIEDADES, ORIENTACION Y PARTICIONES DE LA UNIDAD.

En esta sección se introduciran conceptos de gran importancia, como el de una partición de la unidad, y además aseguraremos la existencia de ella, subordinada a un atlas de una variedad diferenciable. También definiremos conceptos como, forma diferencial sobre una variedad teniendo siempre en mente la definición de la misma sobre el espacio tangente a un espacio euclideano.

DEFINICION 6.1.1

Sea $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$, el *soporte* de $\mathbf{g}$ ($\mathrm{supp}\,\mathbf{g}$) es la cerradura del conjunto: $\{ \mathbf{m} \in \mathbf{M} : \mathbf{g}(\mathbf{m}) \neq 0 \}$.

DEFINICION 6.1.2

Una colección $\{ C_\alpha \}$ de subconjuntos de una variedad **M** es llamada *localmente finita*, si para cada $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, existe una vecindad **U** de **m**, tal que $\mathbf{U} \cap C_\alpha = \varnothing$ excepto para un número finito de indices α, es decir, el conjunto:

$\{ C \in \{ C_\alpha \}: C \cap \mathbf{U} \neq \varnothing \}$ es un conjunto finito para cada **U** abierto de M.

DEFINICION 6.1.3

Una *partición de la unidad* sobre una variedad **M**, es una colección { (U_i, g_i) } donde:

(i). { U_i } es una cubierta abierta de **M**, localmente finita.

(ii). $g_i \in \mathcal{F}(M)$, $g_i(m) \geq 0$ $\forall$ $m \in M$ y $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ $\forall$ i.

(iii). Para cada $m \in M$, $\sum_i g_i(m) = 1$ (por (i) esta suma es finita)

DEFINICION 6.1.4

Sea $\mathfrak{A}$ = { $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ } un atlas sobre **M**. Una *partición de la unidad subordinada* a $\mathfrak{A}$ es una partición de la unidad { (U_i, g_i) }, tal que cada conjunto abierto U_i es un subconjunto del dominio de alguna carta $V_{\alpha(i)}$.

Si para cualquier atlas $\mathfrak{A}$, existe una partición de la unidad subordinada a éste, entonces diremos que **M** *admite* particiones de la unidad.

NOTA 6.1.5

En paticular si **M** es Hausdorff y segundo numerable, siempre admite particiones de la unidad. Esto se prueba en el teorema **A**3 del apéndice **A**, al final de este trabajo.

DEFINICION 6.1.6

Sean **U** y **V** abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \longrightarrow V$ un difeomorfismo, Diremos que φ *preserva la orientación* si el determinante Jacobiano $\det(\varphi) > 0$ para cada $X \in U$. Si $\det(\varphi) < 0$ diremos que φ *invierte* la orientación.

DEFINICION 6.1.7

Si **M** es una variedad, y { (U_i, φ_i) } es una atlas, diremos que este atlas *está orientado*, si todas las funciones de cambios de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ preservan la orientación.

DEFINICION 6.1.8

Dos atlas $\{ (U_i,\varphi_i) \}$ y $\{ (V_j,\psi_j) \}$ definen la *misma orientación* o son de *orientación equivalente* si su unión es un atlas orientado.

También podemos hablar localmente de una carta (V,ψ) *compatible* con la orientación del atlas $\{ (U_i,\varphi_i) \}$, si agregando la carta (V,ψ) al atlas, éste sigue siendo orientado. Es decir, si $\varphi_i \circ \psi^{-1}$ preserva la orientación cuando $U_i \cap V \neq \emptyset$.

DEFINICION 6.1.9

La relación entre dos atlas de definir la misma orientación es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia de atlas orientados define una *orientación* μ para la variedad M, o se dice que M esta orientada y esto lo denotaremos por (M,μ).

OBSERVACION 6.1.10

También existen variedades no orientadas: Por ejemplo la banda de Möbius M, es una 2-variedad en la cuál podemos ver que sobre el subconjunto $S \subset M$, $S = \{ (2\cos\theta, 2\mathrm{sen}\theta, 0) : \theta \in [0,2\pi] \}$ hay un vector v_p variando cuando θ varía, pero es imposible elegir de entre los vectores $w_p = f_*((0,1)_{(\theta,0)})$ y sus negativos. Si tenemos una orientación μ_p para $p \in S$, entonces podemos elegir w_p si $[v_p,w_p] = \mu_p$ y $-\mu_p$ en otro caso. Esto lo muestra la figura 6.1

figura 6.1

DEFINICION 6.1.11

Si **M** es una variedad orientable, con orientación μ, diremos que $\partial\mu$ es la orientación para ∂**M** y la llamaremos *la orientación inducida* para ∂**M**.

ORIENTACION INDUCIDA PARA ∂M

Si **M** es una variedad con frontera, y **p** $\in \partial$**M**, entonces, pueden ser distinguidos ciertos vectores **v** $\in$ $\mathbf{T_pM}$, por el hecho de que para cualquier sistema de coordenadas φ:**U**$\subset$**M** $\longrightarrow \mathbb{H}^n$ alrededor de **p**, el vector **T**φ(**v**) es exterior en el sentido de la figura 6.2

figura 6.2

Llamaremos a tales vectores **v** $\in$ $\mathbf{T_pM}$, **p** $\in \partial$**M** *exteriores* a **M** .

Si **M** tiene una orientación μ, definiremos la *orientación inducida* $\partial\mu$ para ∂**M** por la condición de que $[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1}] \in (\partial\mu)_p$ sí y sólo si $[\mathbf{w},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1}] \in \mu_p$ para todo vector exterior **w** $\in$ $\mathbf{T_pM}$.

Si μ es la orientación usual de $\mathbb{H}^n$, entonces, para **p** = (**a**,0) $\in$

$\mathbb{H}^n$ tenemos:

$$\mu_p = [\ (e_1)_p,\dots,(e_n)_p] = (-1)^{n-1}[\ (e_n)_p,\ (e_1)_p,\dots,(e_{n-1})_p] =$$
$$= (-1)^n[\ (-e_n)_p,\ (e_1)_p,\dots,(e_{n-1})_p].$$

Puesto que $(-e_n)_p$ es un vector exterior, esto muestra que la orientación inducida sobre $\mathbb{R}^{n-1}X\{0\} = \partial\mathbb{H}^n$ es $(-1)^n$ veces la orientación usual.

COMPORTAMIENTO DE LA ORIENTACION.

DEFINICION 6.1.12

Si $\varphi:\mathbf{U} \subset \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta (sistema de coordenadas), tal que:

$$[\varphi^*((e_1)_a),\dots,\varphi^*((e_n)_a)] = \mu_{\varphi^*(a)}$$

para cada $a \in \mathbf{M}$, entonces se dice que φ *conserva la orientación.*

Si **c** es n-cubo singular en $(\mathbf{M},\mu)$, que conserva la orientación, tal que:

$\partial\mathbf{M} \cap \mathbf{c}([0,1]^n) = \mathbf{c}_{(n,0)}([0,1]^{n-1})$ entonces:

DEFINICION 6.1.13

En caso de tener una variedad **M** diferenciable y un p-cubo singular en **M**, puede ocurrir que exista un conjunto **W** en $\mathbb{R}^n$ tal que $[0,1]^p \subset \mathbf{W}$, y un sistema de coordenadas $\varphi:\mathbf{U} \subset \mathbf{M} \longrightarrow \varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{c}(X) = \varphi^*(X)\ \forall\ X \in [0,1]^p$. En este trabajo un p-cubo en **M** se entenderá siempre de este tipo. Si **M** es orientada, el p-cubo singular **c** se dice que *conserva* la orientación si φ la conserva.

DEFINICION 6.1.14

Una función ω que asigna $\omega(m) \in \Lambda^p(T_m M)$ de manera única a cada $m \in M$, se llama *p-forma* en **M**, esta función actúa de la siguiente manera:

Sea $\varphi: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas con $m = \varphi^{-1}(a)$ $a \in \mathbb{R}^n$, y $v_1, \ldots, v_p \in T_p M$. Entonces existen $w_1, \ldots, w_p \in \mathbb{R}^n_a$ tales que: $\varphi^*(w_i) = v_i$ ($\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ y se tiene $(\varphi^{-1})_*(w_i)_a = (D\varphi^{-1}(a)(v_i))_m$) y se define $\omega(m)(v_1, \ldots, v_p) = (\varphi_* \omega)(a)(w_1, \ldots, w_p)$. (Figura 6.3)

figura 6.3

LOCALMENTE.

Si $\varphi: U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta (sistema de coordenadas), entonces $(\varphi^{-1})^* \omega = \varphi_* \omega$ es una p-forma en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, Se dice que ω es diferenciable, si $\varphi_* \omega$ lo es.

NOTACION

Una p-forma ω en **M** se puede escribir como:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

Aquí las funciones $\omega_{i_1, \ldots, i_p}$ estan definidas sobre **M**.

La definición de $d\omega$ dada anteriormente no tiene sentido aquí puesto que $D_j(\omega_{i_1, \ldots, i_p})$ no tiene significado alguno. No obstante exite una via razonable para definir $d\omega$.

TEOREMA 6.1.15

Si **M** es una variedad diferenciable, (U,φ) un sistema de coordenadas y ω es una k-forma en **M**, entonces

$$\varphi_*(d\omega) = d(\varphi_*\omega)$$

DEMOSTRACION.

Para $p \in M$, sea (U,φ) un sistema de coordenadas alrededor de **p**. Supongamos $\omega = g dx^{i1}\wedge\ldots\wedge dx^{ik}$. Usaremos inducción sobre k. Para k = 0 tenemos $\varphi_*(dg) = d(g\circ\varphi_*)$, asumiendo la igualdad para k-1, se tiene

$$d(\varphi_*\omega) = d((\varphi_* g dx^{i1}\wedge\ldots\wedge dx^{ik-1})\wedge\varphi_* dx^{ik}) =$$

$$= d(\varphi_*(g dx^{i1}\wedge\ldots\wedge dx^{ik-1}))\wedge\varphi_* dx^{ik} + 0 \text{ puesto que } d\varphi_* dx^{ik} = 0$$

$$= \varphi_*(d(g dx^{i1}\wedge\ldots\wedge dx^{ik-1}))\wedge\varphi_* dx^{ik} \text{ y por la hipotesis inductiva}$$

$$= \varphi_*(dg\wedge dx^{i1}\wedge\ldots\wedge dx^{ik-1}))\wedge\varphi_* dx^{ik} = \varphi_*(dg\wedge dx^{i1}\wedge\ldots\wedge dx^{ik-1}\wedge dx^{ik}) =$$

$$= \varphi_*(d\omega) \qquad \blacksquare$$

EL COMPORTAMIENTO DE UNA FORMA DIFERENCIAL BAJO FUNCIONES

Sea $f: M \longrightarrow N$ una función diferenciable de una variedad diferenciable **M** en una variedad diferenciable **N**, y sea ω una k-forma diferenciable en **N**. Entonces una k-forma en **M** es denotada por $f^*\omega$ y es definida por

$$(f^*\omega)(v^1,\ldots,v^k) = \omega(f_*v^1,\ldots,f_*v^k)$$

Para cualesquiera vectores $v^1,\ldots,v^k \in T_m M$, f_* es la diferencial de la función **f**. En otras palabras el valor de la forma $f^*\omega$ sobre los vectores $v^1,\ldots,v^k$ es igual al valor de ω sobre la imagen de estos vectores como lo ilustra la figura 6.4

figura 6.4

§ 6.2 INTEGRACION EN VARIEDADES

DEFINICION 6.2.1

Si ω es una p-forma en una variedad con frontera **M** de dimensión k, y c es un p-cubo singular en **M**, se define:

$$\int_{c} \omega = \int_{[0,1]^p} c^{*}\omega$$

OBSERVACION 6.2.2

La integral sobre p-cadenas se define de forma natural, es decir, la integral de una p-forma ω sobre una p-cadena $c = \sum_{i=1}^{p} a_i c_i$ está definida por:

$$\int_{c} \omega = \sum_{i=1}^{p} a_i \int_{c_i} \omega = \sum_{i=1}^{p} \int_{[0,1]^p} c_i^{*}\omega$$

TEOREMA 6.2.3

Si c_1, $c_2 : [0,1]^k \longrightarrow \mathbf{M}$ son dos k-cubos singulares que conservan la orientación en la variedad k-dimensional **M** y ω es una k-forma en **M**, tal que $\omega = 0$ en el exterior de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$, entonces:

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

DEMOSTRACION.

Se tiene que $\displaystyle\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^* \omega = \int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega)$

(Aquí $c_2^{-1} \circ c_1$, esta definido sólo en un subconjunto de $[0,1]^k$, y la segunda igualdad se da por la hipótesis $\omega = 0$ en el exterior de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$). Entonces basta probar:

$$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int_{c_2} \omega$$

Si $c_2^*(\omega) = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ y $c_2^{-1} \circ c_1$ se denota por **g**, entonces del teorema anterior, se tiene:

$$(c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \mathbf{g}^*(\mathbf{f} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \cdot \det \mathbf{g}' dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$= (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) |\det \mathbf{g}'| \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ puesto que $\det \mathbf{g}' = \det(c_2^{-1} \circ c_1)' > 0$.

Ahora el resultado se obtiene del teorema de cambio de variable, es decir:

$$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) |\det \mathbf{g}'| dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{c_2} \omega \qquad \blacksquare$$

DEFINICION 6.2.4

Sea ω una k-forma en una variedad k-dimensional orientada M. Si existe un k-cubo singular que conserve la orientación , tal que $\omega = 0$ en el exterior de $c([0,1]^k)$, se define:

$$\int_M \omega = \int_c \omega$$

OBSERVACION 6.2.5

El teorema inmediato anterior nos muestra que $\int_M \omega$, no depende de la elección de c.

DEFINICION 6.2.6

Un subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$ tiene *medida de Lebesgue cero*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{ \mathbf{U}_i \}_{i=1}^{\infty}$ de **A** por "rectángulos abiertos" tal que $\sum_{i=1}^{\infty} v(\mathbf{U}_i) < \varepsilon$ ($v(\mathbf{U}_i)$ = volumen de $\mathbf{U}_i$).

TEOREMA 6.2.7

Sea **A** un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f}:\mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, sea $D_f = \{ X : \mathbf{f}$ no es continua en $X \}$. Entonces **f** es integrable en el sentido de Riemann, sí y sólo si D_f es un conjunto de medida cero.

(véase [3]).

TEOREMA 6.2.8

(1). Si **A** es acotado, $\mathbf{f}:\mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y D_f es de medida cero entonces la suma:

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot \mathbf{f} \quad \text{converge.}$$

Donde Φ es una partición de la unidad subordinada por algún recubrimiento $\mathbb{O}$ de **A**.

(2). Si $\mathbb{O}'$ es otra cubierta y Ψ es una partición de la unidad subordinada a $\mathbb{O}'$, entonces:

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot\mathbf{f} = \sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot\mathbf{f}$$

DEMOSTRACION.

(1). Supongamos que **A** está contenido en algún rectángulo cerrad **B**, y $|\mathbf{f}(X)| \le \mathbf{k}$ para alguna constante M y $\forall$ X $\in$ **A**. Entonces:

$$\int_A |\varphi\cdot\mathbf{f}| \le \mathbf{k}\int_A \varphi$$

Por lo tanto si $\mathbf{F} \subset \Phi$ es cualquier subconjunto finito de Φ, se tiene que:

$$\sum_{\varphi\in F}\left|\int_A \varphi\cdot\mathbf{f}\right| \le \sum_{\varphi\in F}\mathbf{k}\int_A\varphi = \mathbf{k}\int_A \sum_{\varphi\in F}\varphi$$

En **B** se tiene $\sum_{\varphi\in F}\varphi \le \sum_{\varphi\in\Phi}\varphi \le 1$, por lo tanto:

$\sum_{\varphi\in F}\left|\int_A \varphi\cdot\mathbf{f}\right| \le \mathbf{k}v(\mathbf{B})$ así $\sum_{\varphi\in\Phi}\left|\int_A \varphi\cdot\mathbf{f}\right|$ y así $\sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot\mathbf{f}$ converge. ■

(2) Si Ψ es otra partición de la unidad, la colección de todos los $\{\varphi, \Psi\}$ para $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in \Psi$ es una partición de la unidad, pero $\varphi\cdot\mathbf{f} = 0$ excepto en cierto conjunto compacto **C**, y hay sólo un número finito de ψ que no son cero en **C**, entonces:

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot\mathbf{f} = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\sum_{\psi\in\Psi}\psi\cdot\varphi\cdot\mathbf{f} = \sum_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \psi\in\Psi}}\int_A \psi\cdot\varphi\cdot\mathbf{f}$$

Y $\sum_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \psi\in\Psi}}\int_A \psi\cdot\varphi\cdot\mathbf{f}$ es igual a $\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot\mathbf{f}$ en virtud del mismo razonamiento. ■

DEFINICION 6.2.9

Sea ω es una k-forma arbitraria en **M** existe un recubrimiento $\mathbb{O}$ de **M** tal que para cada $U \subset \mathbb{O}$, existe un k-cubo singular **c** que conserva la orientación en $U \subset c([0,1]^k)$. Sea Φ una partición de la unidad para **M** subordinada por $\mathbb{O}$. Se define:

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

Por el teorema anterior la serie converge si **M** es compacta y $\int_M \omega$ no depende del recubrimiento $\mathbb{O}$ o de Φ.

Todas las definiciones podian haberse dado para una variedad **M**, k-dimensional con frontera y orientación μ. En ∂**M** está la orientación inducida, $\partial\mu$.

Sea **c** un k-cubo que conserva la orientación en **M**, tal que $\mathbf{c}_{(k,0)}$ está en ∂**M**, y es la única cara que tiene todo punto interior en ∂**M**.

$\mathbf{c}_{(k,0)}$ conserva la orientación si k es par, pero no la conserva si k es impar pues teníamos que:

$$\partial \mathbf{c} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \mathbf{c}_{(i,\alpha)} \text{ donde } \mathbf{c}_{(i,\alpha)} = \mathbf{c} \circ (I^k_{(i,\alpha)}).$$

DEFINICION 6.2.10

Si ω es una (k-1)-forma en **M** que es 0 en el exterior de $\mathbf{c}([0,1]^k)$ se tiene:

$$\int_{\mathbf{c}_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega$$

Como $\mathbf{c}_{(k,0)}$ aparece con coeficientes $(-1)^k$ en ∂c se tiene:

$$\int_{\partial \mathbf{c}} \omega = \int_{(-1)^k \mathbf{c}_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\mathbf{c}_{(k,0)}} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

§ 6.3 TEOREMA DE STOKES

En esta sección se demostrará un teorema clásico del cálculo integral, a saber, el teorema de Stokes, el cual resulta sencillo demostrar con la definición que se tiene de integración de formas diferenciales sobre varidades.

TEOREMA 6.3.1 (TEOREMA DE STOKES EN VARIEDADES)

Si **M** es una variedad con frontera, orientada, compacta, de dimensión k , y ω es una (k-1)-forma en **M**, entonces:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Aquí se da a ∂**M** la orientación que se induce por **M**.

DEMOSTRACION.

(i). Supongamos en primer lugar, que existe un k-cubo singular que conserva la orientación en **M**-∂**M** tal que $\omega = 0$ en el exterior de $c([0,1]^k)$. En vitud del teorema de Stokes en $\mathbb{R}^n$ y la definición de $d\omega$, se tiene:

$$\int_{\mathbf{c}} d\omega = \int_{[0,1]^k} \mathbf{c}^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} \mathbf{d}(\mathbf{c}^*\omega) = \int_{\partial I^k} \mathbf{c}^*\omega = \int_{\partial \mathbf{c}} \omega$$

Entonces:

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbf{c}} d\omega = \int_{\partial \mathbf{c}} \omega = 0 \text{ pués } \omega = 0 \text{ en } \partial\mathbf{c}.$$

Por otra parte $\int_{\partial M} \omega = 0$ puesto que $\omega = 0$ en ∂**M**.

en este caso:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0$$

(ii). Supóngase ahora que existe un k-cubo singular en **M** que conserva la orientación tal que $c_{(k,0)}$ es la única cara en ∂**M** y la forma $\omega = 0$ en el exterior de $\mathbf{c}([0,1]^k)$, entonces:

$$\int_{\mathbf{M}} \mathbf{d}\omega = \int_{\mathbf{C}} \mathbf{d}\omega = \int_{\partial \mathbf{C}} \omega = \int_{\partial \mathbf{M}} \omega$$

(iii). Consideremos el caso general. Existe un recubrimiento $\mathbb{O}$ de $\mathbf{M}$ y una partición de la unidad Φ para $\mathbf{M}$, subordinada a $\mathbb{O}$, tal que para cada $\varphi \in \Phi$ la forma $\varphi \cdot \omega$ es una de los tipos ya considerados anteriormente, se tiene:

$$0 = \mathbf{d}(1) = \mathbf{d}\Big(\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi \Big) = \sum_{\varphi\in\Phi} \mathbf{d}\varphi \text{ de manera que } \sum_{\varphi\in\Phi} \mathbf{d}\varphi\wedge\omega = 0 \ ,$$

Puesto que $\mathbf{M}$ es compacta, ésta es una suma finita y se tiene:

$$\int_{\mathbf{M}} \sum_{\varphi\in\Phi} \mathbf{d}\varphi\wedge\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\mathbf{M}} \mathbf{d}\varphi\wedge\omega \text{ por lo tanto:}$$

$$\int_{\mathbf{M}} \mathbf{d}\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\mathbf{M}} \varphi \cdot \mathbf{d}\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\mathbf{M}} \mathbf{d}\varphi\wedge\omega + \varphi \cdot \mathbf{d}\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\mathbf{M}} \mathbf{d}(\varphi \cdot \omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\partial \mathbf{M}} \varphi \cdot \omega = \int_{\partial \mathbf{M}} \omega \qquad \blacksquare$$

OBSERVACION 7.2.2

Si llamamos f_i^k al operador dado por:

$f_i^k(\sigma_j^p) = \delta_{i,j}$, donde σ_j^p es el j-ésimo símplejo de K de dimensión p con $1 \le p \le k$, observemos que los elementos de C^k están dados por:

$$f^k = \sum g_i f_i^p$$

En analogía con el operador frontera ∂, sobre cadenas daremos la siguiente definición.

DEFINICION 7.2.3

Definiremos un operador cofrontera δ, que envia k-cocadenas en (k+1)-cocadenas. Para f^k en C^k asignaremos δf^k en C^{k+1}, y una especificación de la acción de δf^k sobre (k+1)-cadenas es como sigue:

$$\delta f^k(c_{k+1}) = f^k(\partial c_{k+1})$$

LEMA 7.2.4

El operador:

$$C^{k-1}(K,G) \xrightarrow{\delta} C^k(K,G) \xrightarrow{\delta} C^{k+1}(K,G)$$

Satisface $\delta \circ \delta = \delta^2 = 0$.

DEMOSTRACION.

La prueba es directa como consecuencia del lema (7.1.7). ∎

DEFINICION 7.2.5

Definamos los *cociclos* (z^k) y las *cofronteras* de la siguiente manera:

$$Z^k = \ker\delta : C^k \longrightarrow C^{k+1} \text{ (grupo de cociclos } Z^k(K,G) \text{)}$$

$$B^k = \operatorname{im}\delta : C^{k-1} \longrightarrow C^k \text{ (grupo de cofronteras } B^k(K,G) \text{)}$$

donde $\delta : C^k \longrightarrow C^{k+1}$.

DEFINICION 7.2.6

El p-ésimo *grupo de cohomología* del complejo símplicial K ($0 \le p \le \dim K$), con coeficientes en el grupo Abeliano G, es el grupo cociente:

$$H^p(K,G) = \frac{Z^p(K,G)}{B^p(K,G)}$$

CAPITULO 8: COHOMOLOGIA DE RHAM

En este capitulo estudiaremos la llamada "cohomología de De Rham". La cual se definira como el grupo cociente de las formas diferenciales cerradas por las formas diferenciales exactas, en una variedad triangulable **M**. Después enunciaremos el "Teorema de De Rham" que nos relaciona el grupo de cohomología símplicial, con el grupo de cohomología de Rham, mediante un isomorfismo.

§ 8.1 COHOMOLOGIA DE DE RHAM

Recordemos que una forma diferencial, o una *l*-forma diferencial es una función, que asigna $\omega(\mathbf{m}) \in \Lambda^{l}(T_{m}M)$ de manera a cada $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$. Y ademas ésta se puede escribir asi:

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l} W_{i_1,\ldots,i_l} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l}$$

Donde las funciones $W_{i_1,\ldots,i_l}$ estan definidas sobre **M**.

Denotaremos con $Z^{l}(\mathbf{M},\mathbf{d})$ la clase de todas las formas difenciales cerradas respecto al operador diferencial exterior **d**, o *l*-formas diferenciales cerradas, sobre la variedad triangulable **M**. Y con $B^{l}(\mathbf{M},\mathbf{d})$ las l-formas diferenciales exactas sobre la variedad **M** respecto al operador **d**. Es decir:

$$Z^{l} = \ker d : \Lambda^{l}(M) \longrightarrow \Lambda^{l+1}(M)$$

$$B^{l} = \operatorname{Im} d : \Lambda^{l-1}(M) \longrightarrow \Lambda^{l}(M)$$

Donde **d** es la derivada exterior

DEFINICION 8.1.1

Sea **M** una variedad triángulable, $(\mathbf{M},\mathbf{K},\mathbf{h})$, donde K ės un complejo símplicial sobre el cual **M** es triángulada, Entonces el *l*-ésimo *grupo de cohomología de De Rham* de **M** con coeficientes en $\mathbb{R}$, es el grupo cociente:

$$H^l_R(\mathbf{M},\mathbf{d}) = \frac{Z^l(\mathbf{M},\mathbf{d})}{B^l(\mathbf{M},\mathbf{d})}$$

Donde **d** es la diferencial exterior, con la cual se tiene:

$$\ldots\Lambda^l(\mathbf{M}) \xrightarrow{\mathbf{d}} \Lambda^{l+1}(\mathbf{M})\ldots$$

Aquí dos l-formas cerradas son equivalentes si su diferencia es una l-forma exacta. Por análogia con la cohomología símplicial, una l-forma cerrada puede ser mirada como un l-cociclo y una l-forma exacta puede ser vista, como una l-cofrontera.

OBSERVACION 8.1.2

Observemos que el operador **d** (diferencial exterior), aplicado al conjunto de formas diferenciales, sobre una variedad **M**, describe la "sucesión exacta" que nos muestra la figura 8.1

figura 8.1

§ 8.2 TEOREMA DE RHAM

NOTACION

Denotaremos con $C^l(\mathbf{M},\mathbf{d})$ el conjunto de todas las l-formas diferenciales sobre **M**.

Dada una variedad triángulable $(\mathbf{M},K,\mathbf{h})$, deseamos definir para cada l, un isomorfismo de $H^l(\mathbf{M},\mathbf{d})$ sobre $H^l(K)$. Note que los homeomorfismo $\tilde{\mathbf{f}}_l:H^l(\mathbf{M},\mathbf{d}) \longrightarrow H^l(K)$ se tienen, cuando existe una secuencia de funciones lineales:

$\mathbf{f}_l:\Lambda^l(\mathbf{M}) \longrightarrow C^l(K)$ tales que: $\delta\circ\mathbf{f}_l = \mathbf{f}_{l+1}\circ\mathbf{d}$ para toda l.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \Lambda^l(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \Lambda^{l+1}(\mathbf{M}) & \longrightarrow \cdots \\ & \Big\downarrow \mathbf{f}_l & & \Big\downarrow \mathbf{f}_{l+1} & \\ \cdots \longrightarrow & C^l(K) & \longrightarrow & C^{l+1}(K) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Entonces $\mathbf{f}_l(\ Z^l(\mathbf{M},\mathbf{d})\ ) \subset Z^l(K)$, a causa de que $\mathbf{d}\omega = 0$, $(\ \omega \in C^l(\mathbf{M},\mathbf{d})\ )$ implica que:

$$\delta^*(\mathbf{f}_l(\omega)) = \mathbf{f}_{l+1}(\mathbf{d}\omega) = \mathbf{f}_{l+1}(0) = 0$$

También $\mathbf{f}_l(\ B^l(\mathbf{M},\mathbf{d})\ ) \subset B^l(K)$, a causa de que $\omega = \mathbf{d}\eta$ $(\ \eta \in C^{l-1}(\mathbf{M},\mathbf{d})\ )$ lo cuál implica que:

$$\mathbf{f}_l(\omega) = \mathbf{f}_l(\mathbf{d}\eta) = \delta(\mathbf{f}_{l-1}\eta) \in \mathrm{Im}\delta$$

hasta aquí $\mathbf{f}_l$ induce:

$$\tilde{\mathbf{f}}_l:H^l(\mathbf{M},\mathbf{d}) = \frac{Z^l(\mathbf{M},\mathbf{d})}{B^l(\mathbf{M},\mathbf{d})} \longrightarrow \frac{Z^l(K)}{B^l(K)} = H^l(K)$$

Al grupo $\dfrac{Z^l(\mathbf{M},\mathbf{d})}{B^l(\mathbf{M},\mathbf{d})}$ se le llama el *l*-ésimo grupo de cohomología de De Rham.

Ahora veremos si efectivamente podemos obtener tal secuencia de aplicaciones lineales:

$$\int_l :\Lambda^l(\mathbf{M}) \longrightarrow C^l(K)$$

Para $\omega \in \Lambda^l(\mathbf{M})$, $\displaystyle\int_l(\omega)$ debe ser una funcional lineal sobre $C_l(K)$, aquí es suficiente especificar los valores de $\displaystyle\int_l(\omega)$ sobre la base de los elementos de $C_l(K)$, esto es, sobre símplejos σ

orientados.

Consideremos la función suave h_σ: $U \longrightarrow M$ (h_σ es la triángulaci restringida a una vecindad U abierta del "plano" donde σ es triángulado). Entonces $h_\sigma^*(\omega)$ es una l-forma suave sobre U, es decir en el espacio Euclidiano l-dimensional, definamos $\int_l (\omega)(\sigma)$ la integral de la l-forma ω sobre el símplejo σ:

$$\int_l (\omega)(\sigma) = \int_\sigma h_\sigma^*(\omega)$$

En otras palabras, sean $(r_1,\ldots,r_l)$ las coordenadas en el "plano" de σ ($[\sigma]$) consistente con la orientación de σ; Así si $\sigma = [v_0,\ldots,v_l]$, sean $(r_1,\ldots,r_l)$ las coordenadas relativas a la base ordenada $\{v_1-v_0,\ldots, v_l-v_0\}$, entonces:

$$h_\sigma^*(\omega) = g dr_1\wedge\ldots\wedge dr_l$$

para alguna función continua g sobre U, y

$$\int_l (\omega)(\sigma) = \int_\sigma g dr_1\wedge\ldots\wedge dr_l$$

donde esta última integral es en sentido de Riemann.

Note que esta integral es independiente del homeomorfismo h, depende solamente de los puntos del conjunto $h([\sigma])$ y la orientación. Entonces por el teorema de cambios de variables para integrales:

$$\delta\circ\int_l = \int_{l+1}\circ d$$

Esto es justamente el teorema de Stokes, para cualquier l-forma diferencial ω y un $(l+1)$-símplejo orientado σ. Se tiene

$$\left[\int_{l+1}\circ d(\omega)\right](\sigma) = \int_\sigma (h_\sigma)^*(d\omega) = \int_\sigma d(h_\sigma^*(\omega)) = \int_{\partial\sigma} h_\sigma^*(\omega) \quad \text{(teorema de Stokes)}$$

$$= \int_l (\omega)(\partial\sigma) = \left[\delta \circ \int_l (\omega) \right](\sigma)$$

Hasta aquí $\int_l$ induce un homeomorfismo:

$$\tilde{\int_l} : H^l(\mathbf{M},\mathbf{d}) \longrightarrow H^l(K).$$

TEOREMA 8.2.1 (TEOREMA DE DE RHAM)

Sea $(\mathbf{M},K,\mathbf{h})$ una variedad triángulable, entonces:

$$\tilde{\int_l} : H^l(\mathbf{M},\mathbf{d}) \longrightarrow H^l(K)$$

es un isomorfismo para cada l ($0 \le l \le \dim\mathbf{M}$)

(para la demostración véase [8])

La demostración no se da aquí pués se aparta un poco del objetivo de esta tesis. una detallada se encuentra en la referencia bibliografica.

§ APENDICE A

LEMA A1

Se X en espacio topológico, el cuál es localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable, entonces X es paracompacto. de hecho cada cubierta abierta para X tiene un refinamiento localmente finito y númerable consistente de conjuntos abiertos con cerradura compacta.

DEMOSTRACION

Para probar esto se construira una cubierta númerable $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ de abiertos tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

$$\overline{G}_i \text{ es compacto } \forall\ i \in \mathbb{N}$$

$$\overline{G}_i \subset G_{i+1}$$

Como X es segundo númerable, tomese una base $\{V_i\}$ númerable para la topología de X, tal que los abiertos de esta base tengan cerradura compacta: Tomese una base númerable cualesquiera de X y escojase la subcolección que consista de básicos con cerradura compacta. Esta subcolección es una base, pués si $x \in X$ existen V_i, V_j de la colección original tal que $x \in V_k \subset V_i \cap V_j$ y tomamos un básico V_k con $x \in V_k$, $x \in V_k \subset \overline{V}_k \subset V_k$. Si $x \in V_i \cap V_j$ donde V_i, V_j son dos de esos básicos y estos forman parte de la colección original, entonces existe V_k con $V_k \subset V_i \cap V_j$, $x \in V_k$ tomemos ahora una V con $x \in V \subset V_k$ y $\overline{V} \subset V_k$.

Entonces hemos probado que la subcolección de básicos con cerradura compacta es una base para la topología de X. Sea pués $\{V_i\}_{i \in N}$ una base númerable de X donde los V_i tienen cerradura compacta, reetiquetemos y definamos $G_1 = V_1$ y supongamos que;

$$G_k = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{j_k}$$

Sea j_{k+1} el entero positivo más pequeño mayor que j_k tal que $\overline{G}_k \subset \cup_{i=1}^{jk+1} V_i$ entonces definamos $G_{k+1} = \cup_{i=1}^{jk+1} V_i$, entonces hemos definido inductivamente una sucesión que satisface las tres condiciones planteadas al comienzo de esta prueba

?

compacto, pués $\overline{G}_i$ lo es, además $\overline{G}_i - G_{i-1} \subset G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}$ (este último es abierto); $\{V_\alpha \cap (G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}) : \alpha \in A\}$ cubre a $\overline{G}_i - G_{i-1}$ para cada $i \geq 3$, escojamos de esta una subcubierta finita, pués existe ya que $\overline{G}_i - G_{i-1}$ es compacto. Escojase una subcubierta finita de la cubierta $\{V_\alpha \cap G_3 : \alpha \in A\}$ que cubre al compacto $\overline{G}_2$. Como $\{G_i\}$ es númerable tendremos una colección númerable de estos abiertos que se escojieron. Estos abiertos forman un refinamiento localmente finito de la cubierta $\{V_\alpha\}$: refinamiento porque los $\{G_i\}$ cubren a X y los abiertos que escojimos cubren a $\overline{G}_i - G_{i-1}$ y $\overline{G}_{i-1} - G_{i-2}$ ya estaba cubierta, así que estos abiertos cubren a X ($\overline{G}_i - G_{i-1}$, cubren a X). Tomemos un punto $x_0 \in X$, $x_0 \in G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}$ para algún i, además existe V_α tal que $x_0 \in V_\alpha$ y V_α intersecta a un número finito de esos abieros, por construcción. ■

LEMA A2

$(G_{i_p+2}-\overline{G}_{i_p})$, además con la condición de que $\mathcal{T}(V)$ contenga al cubo cerrado $\overline{C(2)}$. Definase:

$$\Psi_p = \begin{cases} F\circ\mathcal{T} \text{ en } V \\ 0 \text{ en otra parte} \end{cases}$$

donde F es la función del lema A2 , Ψ_p es C^∞ y ademas toma el valor 1 en alguna vecindad de p

El soporte de ψ_p esta contenido en V, $\text{supp}\psi_p = \overline{\Psi_p^{-1}(\mathbb{R}^n-\{0\})}$ por lo tanto es compacto. Para cada i ≥1 tomamos un conjunto finito de puntos $p \in M$ cuyas vecindades correspondientes W_p cubran a $\overline{G}_i-G_{i-1}$, ordenamos las correspondientes funciones Ψ_p en una sucesión Ψ_j j=1,2... los soportes de las Ψ_j forman una familia localmente finita por lo tanto $\Psi = \sum\Psi_j$ esta bien definida pués Ψ_j es distinta de cero en una cantidad finita de indices j, Ψ es C^∞ pués las Ψ_j lo son y $\Psi(p)>0$ para cada $p \in M$; para cada i definimos $\varphi_i = \frac{\Psi_j}{\Psi}$ es claro que $\sum\varphi_i = 1$ φ_i es no negativa para cada i y es de clase C^∞ y además el $\text{supp}\varphi_i$ es compacto. ∎

§ BIBLIOGRAFIA

[1]. Ralph Abraham \ J. E. Marsden \ T. Ratiu
Manifolds, Tensor Analysis, and Applications;
Eddison-Wesley, Publishing Company, Inc.
Massachusetts 1983.

[2]. Michael Spivak
Differential Geometry Vol I;
Publish or Perish, Inc.
Berkeley 1979.

[3]. Michael Spivak
Cálculo en Variedades
Benjamin Inc. New York 1988