UNIVERSIDAD DE SONORA

Escuela de Altos Estudios

CÓMO RESOLVER DESIGUALDADES LINEALES Y EL PROBLEMA DEL JEEP

TESIS

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presenta

Germán Valdez Villegas

Hermosillo, Sonora, México 1975

A LA MEMORIA DE MI PADRE

MANUEL PAULINO VALDEZ LOPEZ

A MI MADRE,
CON TODO CARIÑO

CON TODO MI AMOR, A MI ESPOSA,

AGRADECIENDOLE SU PREOCUPACION

Y LA AYUDA QUE ME BRINDO EN TODO

MOMENTO.

A MI ADORADA HIJA,

LIRIO IVETTE

AL PROFESOR ENRIQUE VALLE FLORES:

COMO MUESTRA DE AGRADECIMIENTO, COMO MAESTRO DURANTE MI CARRERA PROFESIONAL, COMO ASESOR DEL PRESENTE TRABAJO Y POR SU CONSTANTE PREOCUPACION POR EL DESARROLLO DE LAS MATEMATICAS EN SONORA.

A MIS HERMANOS,

FAMILIARES y

AMIGOS

A LA UNIVERSIDAD DE SONORA

A LA ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

A TODAS LAS PERSONAS QUE DE UNA U OTRA FORMA, HICIERON POSIBLE LA CULMINACION DE MIS ESTUDIOS PROFESIONALES

CON AGRADECIMIENTO:

AL ING. IGNACIO AYALA ZAZUETA,
COORDINADOR EJECUTIVO DE LA ESCUELA
DE ALTOS ESTUDIOS, UNISON.

A LAS SRITAS. SECRETARIAS DE LA ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS , AGRADECIENDO LA AYUDA QUE ME BRINDARON:

ANA ALICIA VALENZUELA VELDERRAIN.

ANA DOLORES ATONDO ENCINAS.

MA. TERESA ESPINOZA PEREZ.

I N T R O D U C C I O N

En el año de 1935; cuando se pensó en no perder el entonces territorio de Baja California, como desgraciadamente se perdió Texas, hubo necesidad de crear un ferrocarril que fuese de Sonora a Baja California, por lo que tendría que atravesar el desierto de Altar. En la localización se perdieron el Ing. López Collada, su cadenero y el chofer.

La Historia narra que el Ing. López Collada y sus ayudantes perecieron en el desierto de Altar, a consecuencia de habérseles agotado el combustible. Esta tragedia nos hace pensar en la necesidad de una distribución adecuada de nuestros recursos disponibles, para obtener máximos beneficios; es por ello que el objetivo principal del presente trabajo,(sugerido y asesorado por el maestro Enrique Valle Flores) sea resolver en parte estos problemas.

El problema central, conocido en la literatura como"the Jeep problem", es tratado en el capítulo III. Para su solución(seguí principalmente las ideas de David Gale, Matemático Norteamericano, y Estefan Banach,Matemático Polaco), introducimos las herramientas necesarias en los primeros capítulos que tratan de la solución de sistema de ecuaciones, y desigualdades lineales. Por último en el Capítulo IV se hace una estimación del número de operaciones para llegar a la solución del problema.

I N D I C E

COMO RESOLVER ECUACIONES LINEALES

Y EL PROBLEMA DEL JEEP.

CAPITULO 1

Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Los métodos más usuales en la solución de ecuaciones lineales son, el de elimina - ción de una variable por suma o resta, por igulación, por sustitución etc.

Todos estos métodos consisten en efectuar una serie de operaciones apro- piadas al sistema, tendientes a eliminar(n-1) variables y llegar a la solución de- seada dee dicho sistema.

El mecanismo que aquí se propone para resolver dichos sistemas, utiliza - estas mismas eliminaciones(aqui les llamaremos sustituciones)para llegar a la so - lución deseada después de un número finito ,de pasos.

Para describir este peoceso, que llamaremos algoritmo de reemplazo, pri-- mero vamos a analizar el método Stándar para resolver sistemas de ecuaciones linea- les más generales y usando términos ligeramente diferentes de lo usual,

Problema 1.-Dada una mátriz A de orden mxn y una mátriz B de orden mxr, encuéntre- se una mátriz Y de orden nxr tal que A•Y=B.

Para introducirnos a lo que llamaremos algoritmo de reemplazo es conveni- ente que en vez de pensar en A y B como matrices, pensemos en ellas como el conjun to de m vectores; es decir: $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r\}$

La noción fundamental en el algoritmo de reemplazo es la siguiente;

Proposición 1.-Sea $S=\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m\}$ una base para el m-espacio y sea $B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r\}$ cualquier conjunto de m vectores. Entonces,

En notación matricial si nosotros pensamos en S y B como matrices con co- lumnas S_i y b_j ,entonces Y es simplemente la solución de la ecuación: $S \cdot Y = B$

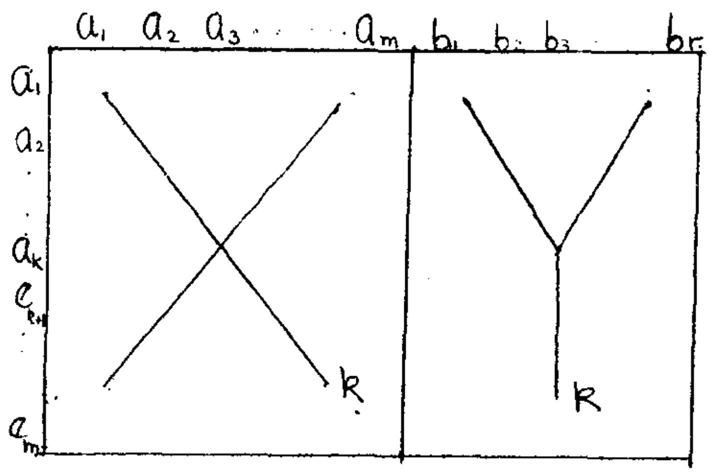
La tabla de B con respecto a S está dada por(Fig: 1)

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & & b_r \\
\hline
S_1 & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \cdots & & Y_{1r} \\
S_2 & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & & \cdots & Y_{2r} \\
S_3 & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & & \cdots & Y_{3r} \\
\vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
S_m & Y_{m,1} & Y_{m,2} & Y_{m,3} & & & Y_{m,r} \\
\hline
\end{array}$$

(Fig 1)

Descripción del proceso para construir una secuencia de bases.

La base inicial S_0 consiste de les vectores unitarios $S_0=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ y cada base S en la secuedncia consiste de ciertos vectores unitarios y ciertos vectores a_j de A. Sea $S_k=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, e_{k+1}, \ldots e_m\}$; la tabla de AUB con respecto a S_k se muestra en la (fig:2), y denotamos la tabla de A y B con respecto a S_k por X_k y Y_k, respectivamente :



Aquí se nos presntan 2 casos: (Fig 2)

Caso 1.- Los últimos m -k renglones de X_k son ceros.

a)Si los últimos renglones de Y_k son también ceros , entonces Y_k es la solución del problema 1, dado que expresa a todos los b_j linealmente en términos de $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots, a_k$

b)Si $y_{ij} \neq 0$ para alguna $i > k$, entonces el problema no tiene solución ; es decir los b_j no pueden ser expresados como una combinación lineal de los a_j Notese que A_k, $A_k=\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$, es una base para A, pero b_j no es una combinación lineal de los a_j, dado que el término $y_{ij}e_i$ aparece en la expresión para b_j en términos de S_k

Caso 2.- $X_{ij}\neq 0$ para alguna $i>k$, digamos $i=k+1$; si S_{k+1} es la base que se obtiene al remplazar e_{k+1} por a_j en S_k, emtonces , $S_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots a_k, a_j, e_{k+2}, \ldots, e_m\}$ y asi susesivamente hasta encontrar :

$$b_j=\sum_{i=1}^{m} y_{ij}a_j \quad ; \quad j=1, \ldots, r$$

es decir , que b_j quede expresado linealmente en teérmino de las a_j

La prueba de que este algoritmo resuelve el problema 1 es casi inmediata:

Si el caso 1 sucede en alguna ocación esa es ya la solución.

Si el caso 1 nunca sucede, entonces, después de m remplazos habremos construido una base S_m de vectores a_j de A, y la tabla de B con respecto a esta base es la solución deseada.

Nótese que nuestro método siempre produce una solución básica; es decir, una solución Y , tal que $Y_{ij} \neq 0$ unicamente para la base $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ °Esto prueba que el siguiente hecho no puede ser inmediatamente obvio.

Teorema 1.-Si el problema tiene una solución, entonces tiene una solución en la cual al menos n-m renglones de Y son ceros :

La demostración de este teorema es inmediata, ya que si Y es solución del problema 1, entonces cada vector b_j para toda j de B puede ser expresado linealmente en términos de las a_j , es decir ;

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} Y_{ij} \;\; ; \;\; \forall \;\; j = 1, \ldots, r$$

Entonces, para que esto suceda , al menos n-m renglones de Y son ceros :

Teorema 2.-Sea $S=\{s_1, s_2, \ldots s_m\}$ una base y supóngase $y_{11} \neq$ igual a cero; entonces $S'=\{b_1, s_2, \ldots s_m\}$ es una base y Y esta dada por

$$Y_1' = \frac{Y_1}{Y_{11}} \;\; , \;\; Y'_{ij} = Y_{ij} - \left(\frac{Y_{i1}}{Y_{11}}\right) Y_{1j} \;\; ; \;\; \forall \;\; i \neq 1 \qquad (1)$$

Las (figs. 3y4) muestran las tablas correspondientes para las bases S y S'

	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_r
S_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	$\ldots$	Y_{1r}
S_2	Y_{21}	Y_{22}	$Y_{2,3}$	$\ldots$	Y_{2r}
S_3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}		Y_{3r}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_m	Y_{m1}	Y_{m2}	$Y_{m,3}$	$\ldots$	Y_{mr}

(Fig 3)

	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_r
b_1	1	Y'_{12}	Y'_{13}	$\ldots$	Y'_{1r}
S_1	0	Y'_{22}	Y'_{23}	$\ldots$	Y'_{2r}
S_2	0	Y'_{32}	$Y'_{3,3}$	$\ldots$	Y'_{3r}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_m	0	Y'_{m2}	Y'_{m3}	$\ldots$	$Y'_{m,r}$

(Fig 4)

Demostración: Supongamos que Y'satisface (1) entonces,

$$Y'_{1j} = \frac{y_{1j}}{y_{11}} \;\; ; \;\; Y'_{ij} = y_{ij} - \left(\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right) y_{1j} \;\; ; \;\; \forall \;\; i \neq 1$$

Por lo tanto si $j \neq$ a 1 tenemos :

$$y'_{1j} b_1 + \sum_{i=2}^{m} y'_{ij} \delta_i = \left(\frac{y_{1j}}{y_{11}}\right) b_1 + \sum_{i=2}^{m} \left(y_{ij} - \left(\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right) y_{1j}\right) \delta_i \quad \forall i \neq 1$$

$$= \left(\frac{y_{1j}}{y_{11}}\right) b_1 + \sum_{i=2}^{m} y_{ij} \delta_i - \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right) y_{1j} \delta_i$$

$$= \left(\frac{y_{1j}}{y_{11}}\right) b_1 + \sum_{i=2}^{m} y_{ij} \delta_i - \frac{y_{1j}}{y_{11}} \sum_{i=2}^{m} y_{i1} \delta_i$$

$$= \left(\frac{y_{1j}}{y_{11}}\right) \left\{ b_1 - \sum_{i=2}^{m} y_{i1} \delta_i \right\} + \sum_{i=2}^{m} y_{ij} \delta_i$$

$$= \left(\frac{y_{1j}}{y_{11}}\right) \left\{ \sum_{i=1}^{m} y_{i1} \delta_i - \sum_{i=2}^{m} y_{i1} \delta_i \right\} + \sum_{i=2}^{m} y_{ij} \delta_i$$

$$= \frac{y_{1j}}{y_{11}} + \sum_{i=2}^{m} y_{ij} \delta_i = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \delta_i = b_j$$

En la regla (1) se ve que cada paso de pivoteo requiere mxr multiplicaciones. Puesto que en la mátriz de la ecuación del problema 1 el número de columnas en la tabla es n+r (fig; 2), El problema se resuelve en m pivoteos a lol sumo, asi que el número de multiplicaciones requeridas en este algoritmo es a lo más $m^2(n+r)$.*

Pa mayor claridad del presente proceso de solución a continuación expongo un ejemplo.

Ejemplo 1.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$2X-4Y+6Z=26$

$3X+7Y+2Z=24$

$X+5Y-Z= \; 4$

Primero representemos el sistema en notación matricial .

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix} \; ; \; A \cdot Y = B$$

Cambiaremos la forma de representar el problema :En vez de pensar en A en A y B como matrices, pensemos en ellas y en el conjunto de m vectores ; es decir: $A=\{(2,3,1),(-4,7,5),(6,2,-1)\}$, $B=\{(26,24,4)\}$. $Y=\{(x,y,z)\}$

Las tablas correspondientes para este problema son:

	a_1	a_2	a_3	b_1
a_1	2	-4	6	26
a_2	3	7	2	24
a_3	1	5	-1	4

(Fig 5)

	a_1	a_2	a_3	b_1
a_1	1	-2	3	13
a_2	0	13	-7	-15
a_3	0	7	-4	-9

(Fig 6)

	a_1	a_2	a_3	b_1
a_1	1	-2	3	13
a_2	0	1	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{15}{13}$
a_3	0	0	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{12}{13}$

(Fig 7)

	a_1	a_2	a_3	b_1
a_1	1	0	0	3
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	1	4

(Fig 8)

Solución $X=3$, $Y=1$, $Z=4$

* En el capítulo IV doy una introducción al problema de estimar el número de multiplicaciones que se efectúa en este proceso.

CAPITULO II

Solución de desigualdades lineales:

Problema II: Dada una matriz A de orden m x n y un n – Vector a, encuéntrese un m – vector Y tal que $Y \geqslant 0$ y $Y \circ A \geqslant a$; es decir, estamos considerando soluciones no negativas de las desigualdades. En el caso en el cual Y no tiene restricciones en el signo, entonces puede manejarse en una forma similar, pero involucra una ligera complicación técnica que preferimos evitar en esta exposición; es conveniente escribir el problema de esta otra manera:

Encuéntrese un m–Vector Y tal que:

$Y \cdot a_j \geq \delta_j$ para $j = 1, \ldots, n$

$Y \cdot e_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,

donde $\{e_i\}$ son los vectores unitarios del m–espacio . Ahora no hay dificultad en encontrar un proceso finito para resolver el problema II, puesto que esto se muestra fácilmente y resulta del proceso que explicamos enseguida.

Si el problema II tiene una solución entonces tiene una solución básica es decir, un vector Y tal que

$$y a_j = \delta_j$$
$$y e_i = 0$$

Para algún conjunto de m Vectores a_j y e_i, los cuales forman una base para el m – espacio , se pudieran considerar todas las bases entre los vectores a_j y e_i y para cada uno de ellas computar la solución Y para las m ecuaciones correspondientes, y entonces sustituir esta Y en el Problema II.

Eventualmente uno de estos vectores satisfará el sistema, a menos que no haya solución; por supuesto esto sería un proceso enormemente largo, dado que involucraría resolver posiblemente hasta $\binom{n+m}{m}$ sistemas de m ecuaciones con m incógnitos

DESCRIPCION DEL ALGORITMO DE REEMPLAZO

(para resolver el problema II)

Transformaremos el problema II a un problema homogéneo como se expresa a continuación.

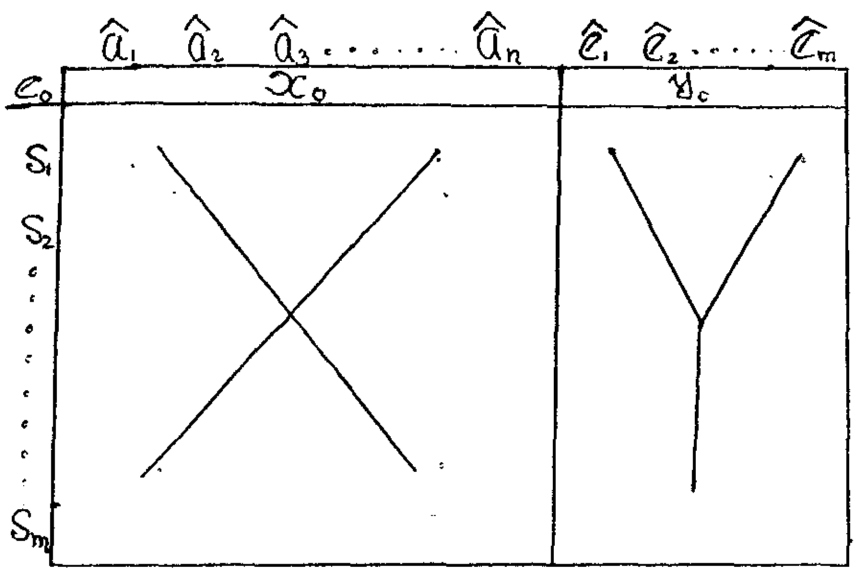
Sea $\hat{a}_j$ el $(m+1)$- vector $(-\delta_j,\ a_j)$ y $e_i=(0,\ e_i)$, para — — $i=1,\ .\ .\ .\ .,\ m$, y sea $e_c=(1,\ o,\ o,\ .\ .\ .\ o)$ tal que $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_m$ sean vectores - unitarios del $(m+1)$ - espacio y sean $\hat{Y}$ todos los vectores $(1,\ y)$, donde Y es cualquier m-vector:

Problema $\widehat{II}$: Encuéntrese Y en $\hat{Y}$ tal que ;

$Y\hat{a}_j \geqslant 0$ para toda j y $Y\hat{e}_k \geq 0$ para toda K.

Entonces, partiendo de las definiciones, los problemas II y $\widehat{II}$ son equivalentes.

Ahora, sea $S_c=\{e_o, S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ una base para el $(m+1)$- espacio, donde S_i es, un vector $\hat{a}_j$ ó $\hat{e}_k$, y escribimos la tabla con respecto a esta base, como se muestra la(Fig. 9).



(Fig. 9)

TEOREMA 3: Si X_0 y Y_0 son no negativos, entonces $(1, y_0)$ resuelve $\widehat{II}$ y y_0 resuelve II.

Prueba: Sea $\hat{Y}$ el (m+1)-vector que resuelve el sistema

$$y S_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$
$$y e_0 = 1$$

Este vector existe, puesto que S es una base:

A partir de la tabla tenemos que

$$\hat{e}_k = y_{0k} e_0 + \sum_{i=1}^{m} y_{ik} S_i$$ multiplicando por $\hat{Y}$, $\hat{Y}\hat{e}_k = y_{0k}(\hat{Y}\cdot e_0) + \sum_{i=1}^{m} y_{ik}(\hat{Y} S_i) = y_{0k}$, así que

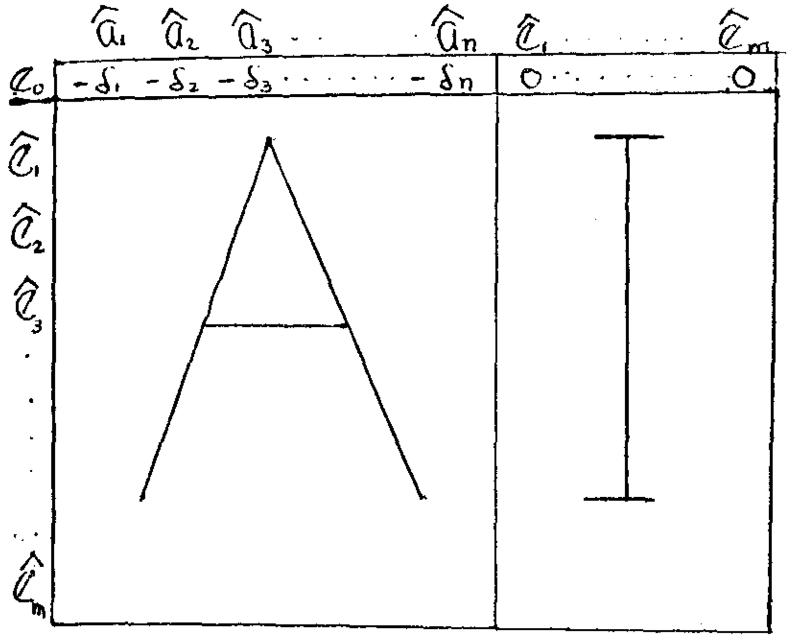
$Y = (1, y_0)$ Y por hipótesis $y_0 \geq 0$. Finalmente, $\hat{a}_j = x_{0j} e_0 + \sum_{i=1}^{m} x_{ij} S_i$; multiplicando por $\hat{Y}$

$$\hat{Y}\cdot \hat{a}_j = x_{0j}(\hat{Y}\cdot e_0) + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}(S_i \hat{Y}) = x_{0j} \geq 0$$

por hipótesis, y por lo tanto $Y = (1, y_0)$ resuelve $\widehat{II}$ como se propuso, y y_0 resuelve II.

Entonces el problema de la desigualdad se ha convertido ahora en el problema de encontrar una base S tal que la tabla de la (Fig. 9) tenga su primer renglón no negativo, si es que tal base existe. Deseamos llegar a esta base por una sucesión de reemplazos empezando con la base inicial S_0, que consiste de los vectores unitarios:

(la tabla con respecto a esta base S_0 se da a continuación)



(Fig. 10)

Ahora, supóngase que hemos llegado a la tabla de la(Fig.9) mediante una serie de - reemplazos , y que (x_0, y_0) es no positiva; así que $x_{0j} < 0$ ó $y_{0k} < 0$, entonces trayendo $\hat{a}_j$ ó $\hat{e}_k$ a la siguiente base S' podemos estar seguros que en - la siguiente tabla el lugar correspondiente para x'_{0j} ó y'_{0k} será cero, lo cual da paso inicial en la dirección correcta; falta un criterio para decidir cuál es el vector s_i en S que debería ser reemplazado por a_j o a_k y el éxito depende de un ingenioso criterio para hacer tal decisión la cual a continuación describimos:

DEFINICION 1: Un m- vector x se llama l-positivo, ó lexicográficamente positivo si su primera coordenada, distinta del cero, a partir de la izquierda, es positiva, y la - escribimos $(x > 0)$ $x \succ 0$.

Si un vector x es lexicográficamente mayor que Y, escribimos $x \succ y$ si - $x - y \succ 0$; es claro que para cualquier $x \neq 0$, $x \succ 0$ ó $-x \succ 0$.

DEFINICION 2: Una matriz Y es 1- positiva si todos sus renglones son 1- positivos.

DEFINICION 3: La base S se llamará 1- factible si la matriz Y (Fig. 9) es 1-positiva.

Nótese que la base inicial (Fig. 10) S_0 es 1- factible dado que en este caso le matríz Y es la matriz identidad, esta última definición es la básica para nuestro algoritmo. Ahora vamos a completar la descripción del algoritmo de reemplazo.

Supóngase en la (Fig. 9) que, por ejemplo, Xo_1 es negativo (el argumento sería el mismo si $Y_{c1} < 0$).

Existen dos casos:

Caso 1: la primera columna de X es no positiva.

Entonces tenemos:

$$\hat{a}_1 = x_{01} e_0 + \sum_{i=1}^{m} x_{i1} s_i \qquad (2)$$

; en este caso,

el próblema $\widehat{II}$ no tiene solución, puesto que $\hat{Y}$ resuelve el problema II; entonces, $\hat{y} \cdot s_i \geq 0 \quad \forall i$

Pero el producto escalar de (2) con y nos da $\hat{y}\,\hat{a}_1 = x_{01}$

$\hat{y}\,\hat{a}_1 = x_{01} < 0$; por lo tanto, $\hat{y}\,\hat{a}_1 = x_{01} < 0$ por hipótesis; entonces $\hat{Y}$ no resuelve $\widehat{II}$, ya que $\hat{y}\,\hat{a}_1 < 0$ y debería ser $\hat{y}\,\hat{a}_1 \geq 0$

CASO II: Si $x_{ij} > 0$ para alguna i sea entonces $I_1 = \{ i \mid x_{i1} > 0 \}$ y calcúlese $\frac{y_i}{x_{i1}}$, para $i \in I_1$ y escójase i en I_1 tal que $\frac{y_i}{x_{i1}}$ sea l- mínima.

Obténgase ahora la nueva base S^1 reemplazando S_i por $\hat{a}_1$ (es decir pivoteo en x_{i01}).

La prueba de que este algoritmo termina depende del siguiente lema:

LEMA 2: la nueva base S^1 es también l-factible y el vector Y_0^1 de la nueva tabla **es lexicográficamente mayor que Y_0 .**

PRUEBA: A partir de Y $y_1' = \frac{y_1}{y_{11}}$, $y_i' = y_i - \left(\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right) y_1$

$y_0' = y_0 - \left(\frac{x_{01}}{x_{i01}}\right) y_{i0}$, y puesto que X_{01} es negativo, X_{i01} es positivo, y y_{i0} es l-positivo tenemos $y_0' \succ y_0$ como se propuso:

Para más claridad en la página siguiente, desarrollo un ejemplo.

EJEMPLO:

Resolver el siguiente sistema de desigualdades lineales.

$$2x + y \geq 1$$
$$x \geq 1$$
$$-y \geq -1$$

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$
e_0	-1	-1	1	0	0
$\hat{e}_1$	2	1	0	1	0
$\hat{e}_2$	1	0	-1	0	1

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$
e_0	0	-1	0	0	1
$\hat{e}_1$	0	1	2	1	-2
$\hat{a}_1$	1	0	-1	0	1

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$
a_0	0	0	2	1	-1
$\hat{a}_2$	0	1	2	1	-2
$\hat{a}_1$	1	0	-1	0	1

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$
a_0	1	0	1	1	0
$\hat{a}_2$	2	1	0	1	0
$\hat{a}_2$	1	0	-1	0	1

Sol $x = 1$; $y = 0$

CAPITULO III

"El Problema del Jeep"

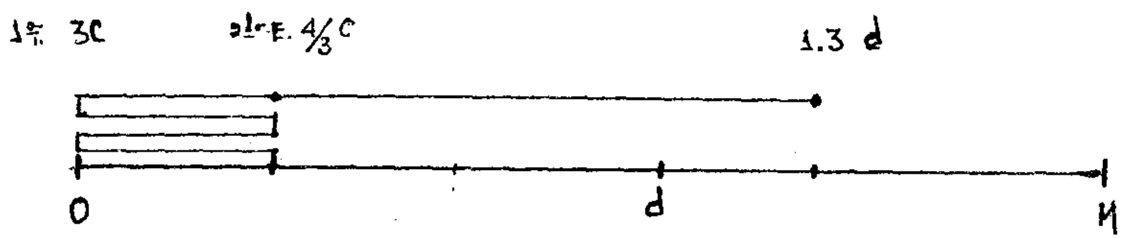
En 1947; N.J. Fine resolvió el ahora famoso problema del jeep. El problema trata de un jeep que es capaz de llevar suficiente combustible para viajar una distancia d. Pero se necesita cruzar un desierto cuya distancia M es mayor que d ($M > d$); es decir, el proceso adecuado para hacer esto será llevando combustible desde su base, y establecer estaciones de combustible en varios puntos a lo largo de su trayectoria, de manera que pueda abastecerse a medida que avanza.

Se quiere que cruce el desierto con la menor cantidad de combustible posible.* Para hacer ver que este problema no es tan obvio como parece, presentemos el problema como sigue:

Presentación del problema: Suponamos que queremos cruzar un desierto de longitud M, en un jeep, cuya capacidad del tanque nos permite viajar una distancia d, menor que M. Veamos dos procedimientos para ver qué tan lejos puede llegar con 3 cargas de combustible:

a) unidad de capacidad, máxima carga del jeep.

b) unidad de distancia; la máxima distancia que sea posible viajar con carga.

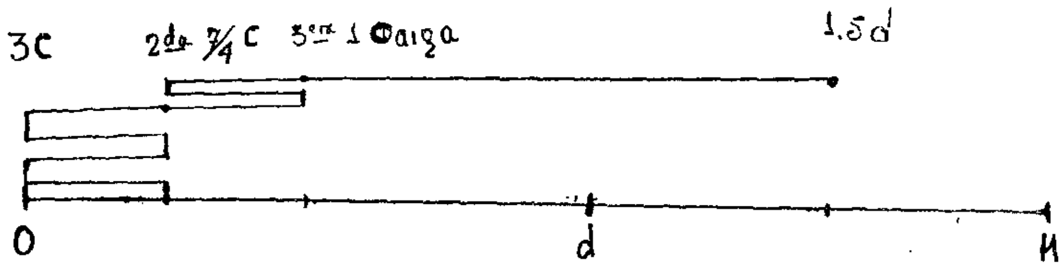


(Fig. 11)

OM= longitud del desierto; od = máxima longitud que puede viajar con 1 carga. Disponemos de 3 cargas de combustible; es claro que si se carga el jeep de combustible completamente, lo más lejos que puede llegar es al punto d, ya que únicamente se le permite llevar una carga; en este caso, el jeep se quedaría en d sin poder regresar a la base, teniendo dos cargas disponibles en la base. Entonces debemos de establecer estaciones de combustible a lo largo del rerrorido para irse abasteciendo a medida que avanza. Siguiendo este procedimiento, hacemos lo siguiente:

Trayectoria 1: Cargamos el jeep; recorremos $\frac{1}{3}$ de d, y dejamos $\frac{1}{3}$ de la carga, y nos regresamos a la base. En este recorrido gastamos $\frac{2}{3}$ de carga y dejamos $\frac{1}{3}$; - repetimos esto hasta agotar las cargas disponibles; en la nueva estación de combus tible formada porla trayectoria descrite anteriormente, tenemos $\frac{4}{3}$ de carga; si cargamos nuevamente el tanque del jeep, vemos claramente poder llegar a 1.3, dejando sin utilizar $\frac{1}{3}$ de carga.

Trayectoria 2: Siguiendo el procedimiento anterior, y si en vez de hacerlo a $\frac{1}{3}$ de d, hacemos la primera estación a $\frac{1}{4}$ de d; vemos si podemos llegar más lejos o no.



(Fig. 12)

vemos que en la primera estación hay la cantidad de $\frac{7}{4}$ de carga. Si establecemos una 2da. estación de 1 carga, cargamos el jeep y vemos claramente que podemos llegar a una distancia 1.5 d.

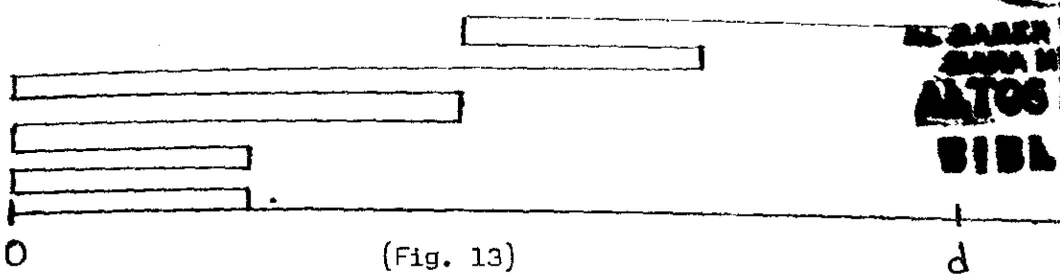
¿Será ésta la trayectoria óptima?; es decir, ¿será éste el punto más distante - del origen que podemos alcanzar?

Como se ve en estas dos presentaciones, no es tan fácil encontrar la trayectoria que nos permita alcanzar el punto más lejano con mínimo consumo de combustible. Entonces nos planteamos el siguiente problema:

Problema 2: Determinar un modelo algebraico que nos permita calcular la distancia mayor que podemos alcanzar con f cargas de combustible disponibles. Donde f es entero.

Presentación formal del problema:

Supongamos que el jeep empieza desde el principio y se mueve a lo largo del eje x positivo; escojamos para la unidad del combustible la máxima cantidad que el jeep puede llevar y nos referimos a esta unidad como carga. La unidad de distancia será la distancia que el jeep puede viajar con una carga:



(Fig. 13)

(Representación esquemática de una jornada del jeep)

a trayectoria está tendida enteramente en el eje x. Se ha extendido verticalmente ara hacerla más visibles; igual a la cantidad de combustible consumido; debido a - as unidades que tomamos anteriormente.

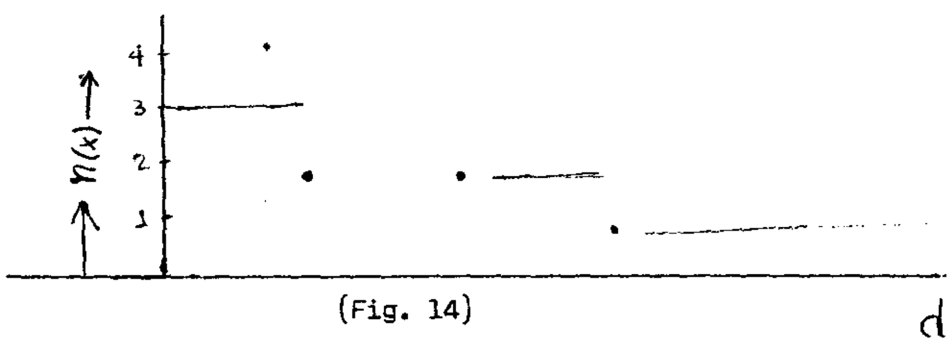
efinición 1: Una trayectoria es una función con dominio M y contra-dominio una fami ia de subconjuntos de $M(F_{SM})$, es decir $T: M \longrightarrow F_{SM}$

Entonces el problema requiere de la obtención de una función $d(f)$, que nos dé l punto más lejano posible de alcanzar, con f cargas de combustible disponibles:

Para determinar esta función $d(f)$, vamos a hacer uso de la fórmula de Banach; ara determinar la longitud de la trayectoria de una curva en un espacio uni-dimen- ional.

(Demostración de la Fórmula de Banach)

efinición 2: Para cada $x \in [0,d]$; definimos $n(x)$ como el número de veces que duran te una jornada el jeep está en el punto x; en la Fig. 14 se muestra la gráfica de - $n(x)$ correspondiente a la jornada del jeep en la Fig. 13.



(Fig. 14)

La fórmula de Banach establece que la longitud total de la trayectoria = $\int_0^d n(x)dx$; por supuesto que Banach no tenía nada qué ver con el problema del jeep: él consideró una función continua.

Definición 3: Una trayectoria es razonable para un jeep si contiene un número finito de puntos en las cuales el jeep cambia de dirección:

Demostración de la fórmula de Banach.
Dividamos el intervalo $[0,d]$ en conjuntos X_1, X_2, X_3, ..., donde $X_k=\{x \mid n(x)=k\}$; como estamos tomando trayectorias razonables en el intervalo $[0,d]$, hay una cantidad finita de X_k no vacíos y cada uno de éstos es la unión de intervalos separados.

Sobre cada intervalo de X_k existen exactamente k intervalos de la trayectoria del jeep. Entonces tenemos longitud total de la trayectoria = $\sum_{k=1}^{\infty} k$ (longitud X_k).

El término de la derecha es precisamente la definición de integral

$$L_T = \sum_{k=1}^{\infty} k(\text{longitud de } X_k) = \int_0^d n(x)dx.$$

Teorema: Cada uno de los X_k es la unión de intervalos separados.
Demostración: Por definición, tenemos $X_k = \{x \mid n(x) = k\}$.
Supongamos que $X_0 \in X_k \cap X_{k+1}$, con X_k, X_{k+1} no ajenos.

$$X_0 \in X_k \cap X_{k+1} \Rightarrow X_0 \in X_k \text{ y } X_0 \in X_{k+1}$$

$n(X_0) = k$ por definición,

$n(X_0) = k+1$ por definición

Contradicción: X_k y X_{k+1} son ajenos.

Definición 4: Para cualquier viaje del jeep, definimos la secuencia de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_f$ en el intervalo $[0,d]$; donde $x_0 = d$; $x_f = 0$ (f entero), y en general X_k es el punto tal que la longitud total de la trayectoria a la derecha de X_k es exactamente k unidades:

Nótese que esta secuencia así definida es estrictamente decreciente, y habrá exactamente una unidad de longitud entre X_{k+1} y X_k. La observación básica que necesitamos es la siguiente:

Lema 1: si $x < X_k \Rightarrow n(x) \geq 2k+1$

Demostración: Puesto que X está a la izquierda de X_k, el jeep deberá consumir más de k cargas de combustible a la derecha de X. Puesto que el jeep sólo puede llevar una carga de combustible, debe necesariamente cruzar el punto X, al menos k + 1 veces - desde la izquierda; pero para cualesquiera dos cruces por la izquierda; debe haber - un cruce por la derecha, y entonces el jeep deberá llegar k veces por la derecha. - Así, el jeep deberá llegar al punto x, 2k + 1 veces, que es lo que queríamos demostrar. (2k + 1 veces, a lo sumo).

Aplicando la fórmula de Banach para calcular la longitud de la trayectoria en el intervalo $[X_{k+1}, X_k]$, tenemos:

1 = (longitud de la trayectoria entre (X_{k+1}, X_k); sumando de 0 a f - 1

$$1 = \int_0^d n(x)\,dx \geq (2k+1)(X_k - X_{k+1})$$

$$(X_k - X_{k+1}) \leq \frac{1}{2k+1} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{f-1} (X_k - X_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{f-1} \frac{1}{2k+1}$$

$$(X_0 - X_f) \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f-1}$$

$$d(f) \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f-1}$$

lo cual da una cota superior de d(f); entonces hay que demostrar que esta cota superior se puede determinar, y esto puede ser efectuado por inducción. Para f = 1 ; - d(f) = 1 es correcto. Supongamos ahora que es correcto para $d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2f+1}$, y supongamos que se nos permiten f + 1 cargas; entonces podemos llegar - hasta el punto $\frac{1}{2f+1}$, de acuerdo con la hipótesis de inducción.

$d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2f+1}$ es válido desde este punto en adelante.

La serie $d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2f-1}$ es divergente.

Demostración:

Sumas Parciales

$$S_1 = 1 \qquad\qquad S_{f+1} - S_f = \frac{1}{2f+1} > 0$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$S_f = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f-1} \qquad\qquad S_{f+1} > S_f$$

$$S_{f+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{2f+1} \qquad\qquad \therefore d(f) \text{ diverge}$$

Como $d(f)$ diverge, esto nos muestra que un desierto de cualquier tamaño puede ser cruzado.

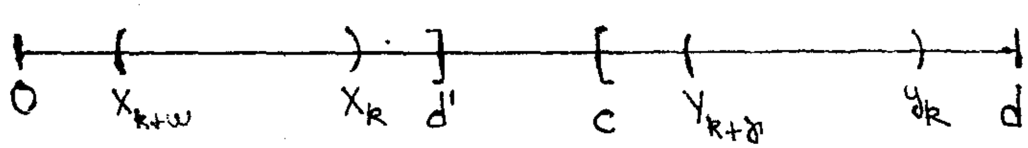
El problema 1: en su forma más general.

Vamos a generalizar el problema, introduciendo una segunda variable;es claro que obteniendo la función $d(f,\beta)$ dependiendo de f* cargas de combustible, y β cantidad de cargas de agua, esto puede extenderse para más de dos variables (donde f y β son independientes).

Problema 2:Encontrar la función $d(f,\beta)$ que nos permita calcular el punto más lejano posible de alcanzar con f cargas de combustible y β cargas de agua (f, β, son independientes).

Para cualquier viaje del jeep, definimos en el intervalo $[0,d]$, las las secuencias de puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_f \in [0,d']$, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\beta \in [c,d]$ tal que $[0,d'], [c,d]$; son ajenos y $x_0 = d'$, $x_f = 0$, $y_0 = d$, $y_\beta = c$

y en general, X_k y Y_k ; es el punto tal que la distancia total de la trayectoria a la derecha de estos es exactamante K unidades. Es claro que los puntos de esta secuencia forman una secuencia decreciente;



γ = (longitud total de la trayectoria entre los puntos $(y_{k+\gamma}, y_k)$

ω = (longitud total de la trayectoria entre los puntos $(X_{k+\omega}, X_k)$

Aplicando la fórmula de Banach, tenemos:

$$\gamma = \int_{y_{k+\gamma}}^{y_k} n(x)dx \geq (2k+1)(y_k - y_{k+\gamma}) \qquad (2)$$

$$\omega = \int_{X_{k+\omega}}^{X_k} n(x)dx \geq (2k+1)(X_k - X_{k+\omega}) \qquad (3)$$

De las expresiones (2) y (3) tenemos,

$$(y_k - y_{k+\gamma}) \leq \frac{\gamma}{2k+1} \quad ; \quad (X_k - X_{k+\omega}) \leq \frac{\omega}{2k+1}$$

Sumando obtuvimos

De la ecuación (2), resulta

$$\sum_{k=0}^{\beta-\gamma} (y_k - y_{k+\gamma}) \leq \sum_{k=0}^{\beta-\gamma} \frac{\gamma}{2k+1} = \gamma + \frac{\gamma}{3} + \cdots + \frac{\gamma}{2\beta-2\gamma+1} \leq$$

$$(y_0 - y_\beta) \leq \gamma\left\{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2\beta-1}\right\} \leq \gamma d(\beta)$$

$$\sum_{k=0}^{f-\omega} (X_k - X_{k+\omega}) \leq \sum_{k=0}^{f-\omega} \frac{\omega}{2k+1} \leq \omega + \frac{\omega}{3} + \cdots + \frac{\omega}{2f-2\omega+1}$$

$$(X_0 - X_f) \leq \omega\left\{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2f-1}\right\} \leq \omega d(f)$$

$$(y_0 - y_\beta) + (X_0 - X_f) \leq \gamma d(\beta) + \omega d(f)$$

$$\boxed{d(f_0 \beta) \leq \gamma d(\beta) + \omega d(f)}$$

Falta por demostrar que la cota de

$$d(f, \beta) \leq \gamma d(\beta) + \omega d(f)$$

puede ser obtenida y lo haremos por inducción

para $f = 1$, $\beta = 1$ la cota existe

y supongamos que existe para f y β , veamos

para $f = k + 1$, $\beta = t + 1$,

$$d(f, \beta) = \gamma d(\beta) + \omega d(f)$$

$$d(k+1, t+1) = \frac{\gamma}{2k+1} + \frac{\omega}{2t+1}$$

de acuerdo con la hipótesis de inducción, la fórmula es válida desde este punto en adelante, por lo tanto

$$d(f, \beta) = \gamma d(\beta) + \omega d(f)$$

La divergencia de esta serie nos muestra que un desierto de cualquir magnitud - puede ser cruzado.

CAPITULO 1V

Estimacion del número de operaciones en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

La solución de ecuaciones simultaneas puede expresarse por medio de determinantes, sin embargo este método es extremadamente laborioso para conjuntos de diez o más ecuaciones: Por ejemplo, para diez ecuaciones con diez incognitas el método por determinantes requiere alrededor de 70,000 multiplicaciones en el caso más general.

Esta cantidad de multiplicaciones merece ser comparada con un número relativamente bajo de multiplicaciones por otros métodos que a continuación expongo.

Hasta hace pocos años la cantidad de trabajo requerida en la solución de un número grande de ecuaciones, digamos cuarenta o más, era extremadamente laborioso; el advenimiento de las calculadoras electronicas automaticas ha hecho factible la solución de estos problemas. Sin embargo no solo debe considerarse el número de multiplicaciones, divisiones y sumas en cualquier método, sino que, debido a la gran cantidad de operaciones que se efectuan, la acumulación de errores de redondeo es un problema serio

Las ecuaciones lineales simultaneas de orden superior aparecen en muchos campos de las matematicas aplicadas; por ejemplo, en estadisticas.

Considerese el conjunto de n-ecuaciones lineales con n-incognitas.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Si el determinante es distinto de cero, entonces la solución de las - ecuaciones esta dada por; $X_1 = \frac{D_1}{\Delta}$, $X_2 = \frac{D_2}{\Delta}$, ... , $X_n = \frac{D_n}{\Delta}$

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1,s-1} & b_1 & a_{1,s+1} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2,s-1} & b_2 & a_{2,s+1} & \cdots a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n,2} & a_{n,3} \cdots & a_{n,s-1} & b_n & a_{n,s+1} & \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Esta solución por métodos de determinantes requiere de la evaluación - de $(n+1)$ determinantes de orden n cada uno y cada uno de estos en su cálculo requiere, en general, $\lambda n!$ multiplicación, si su desarrollo es por menores: siendo - en este caso; $1 \leq \lambda < e-1$

Prueba: Sea $G(n)$ el número de multiplicaciones necesarias para desarrollar un determinante de oeden n, por menores. Puesto que tal desarrollo implica la multiplicación de n elementos por sus menores y hay n menores cada uno de los cuales requiere $G(n-1)$ multiplicaciones: Entonces

$$G(n) = n + n\,G(n-1)$$
$$G(n-1) = (n-1) + (n-1)\,G(n-2)$$
$$G(n-2) = (n-2) + (n-2)\,G(n-3)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$G(n) = n + n\{(n-1) + (n-1)\,G(n-2)$$
$$G(n) = n + n(n-1) + n(n-1)\{(n-2) + (n-2)\,G(n-3)\}$$
$$G(n) = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n!$$

$$G(n) = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots\cdots + n!$$

$$= \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-3)!} + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!} + \cdots + n!$$

$$= n!\left\{\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} + \cdots + \frac{1}{(n-k)!} + \cdots + 1\right\}$$

$$= n!\left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right\} + \cdots\cdots$$

$$= n!\left\{2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right\} + \cdots\cdots$$

$$= n!\left\{e - \lambda(n) - 1\right\} \quad ; \quad \lambda = e - \lambda(n) - 1$$

$$1 \leq \lambda < e - 1$$

$$= \lambda n!$$

$$\therefore \; G(n) = \lambda n!$$

Entonces el desarrollo de un determinante por menores requiere multiplicaciones.

Si se desarrolla un determinante como una suma de productos formados, tomando un un elemento de cada renglón y de cada columna, el número de multiplicaciones re— queridas es $n!\cdot(n-1)$, esto puede verse por lo siguiente:

Hay n elementos de los cuáles se selecciona uno en la primera columna- por tanto quedan (n−1) en la segunda columna, (n−2) en la tercera etc. Por lo - tanto hay n productos de n factores cada uno, o sea $n!(n-1)$ multiplicaciones. Por esta razón es preferible el desarrollo por menores: Todos estos cálculos se- hacen en el supuesto de que todos los elementos del determinante reduce el núme- mero de multiplicaciones: Por lo tanto;

La solución requiere (n−1) multiplicaciones

Método de Chio para evaluar determinantes; $\lambda n!$ multiplicaciones requeri- das para evaluar un determinante de orden n , pueden reducirse en una proporción considerable , usando un método debido a F. Chio.

Considerese el determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

Supongase que algún elemento , digamos C_4 es igual a 1.
Si no hay unos en el determinante, siempre podemos dividir un renglón (o columna) dado entre uno de sus elementos y sacar ese elemento del determinante. Sin embargo suponemos por el momento y en este ejemplo que $C_4 = 1$

Habiendo escogido a C_4, como elemento pivote, igualamos todos los - - (elementos), (miembros de la 4ªA.columna) en ese renglón a cero, multiplicando to- dos los miembros de la cuarta columna por C_1 y restando los números que resultan a a los que de la primera columna (por una propiedad de los determinantes estas ope- raciones no cambian de valor); multiplicamos a continuación la misma cuarta colum- na por C_2 y restamos los resultados a la segunda columna y asi sucesivamente; has- ta terminar con todas las columnas .

Puesto que $C_4 = 1$ el resultado es :

$$
D = \begin{vmatrix}
a_1 - c_1 a_4 & a_2 - c_2 a_4 & a_3 - c_3 a_4 & a_4 & a_5 - c_5 a_4 \\
b_1 - c_1 b_4 & b_2 - c_2 b_4 & b_3 - c_3 b_4 & b_4 & b_5 - c_5 b_4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
d_1 - c_1 d_4 & d_2 - c_2 d_4 & d_3 - c_3 d_4 & d_4 & d_5 - c_5 d_5 \\
e_1 - c_1 e_4 & e_2 - c_2 e_4 & e_3 - c_3 e_4 & e_4 & e_5 - c_5 e_4
\end{vmatrix}
$$

Desarrollando por menores en función de los elementos del tercer renglón.

$$
D = \begin{vmatrix}
a_1 - c_1 a_4 & a_2 - c_2 a_4 & a_3 - c_3 a_4 & a_5 - c_5 a_4 \\
b_1 - c_1 b_4 & b_2 - c_2 b_4 & b_3 - c_3 b_4 & b_5 - c_5 b_4 \\
d_1 - c_1 d_4 & d_2 - c_2 d_4 & d_3 - c_3 d_4 & d_5 - c_5 d_5 \\
e_1 - c_1 e_4 & e_2 - c_2 e_4 & e_3 - c_3 e_4 & e_5 - c_5 e_4
\end{vmatrix}
$$

Es decir es un determinante de orden 5 se redujo a uno de orden 4 ; esta es la regla de Chio que se puede aplicar eventualmente repetidas veces para reducir cualquier determinante.

No podemos sin embargo, contar de antemano con la existencia de un elemento pivote antes de sacar como factor algún número de algunos de los (factores) renglones. Esto involucra (n-1) divisiones y después una multiplicación por el — valor del elemento pivote. Por lo tanto, la reducir de Chio requiere $(n-1)^2+1$ multiplicaciones.

Evaluación de un determinante de orden 2 requiere 1^2+1 multiplicación- en general la redu̧ción de un determinante de orden (n-1) requiere similarmente- $(n-2)^2+1$ multiplicaciones y asi consecutivamente; por lo tanto el número total de multiplicaciones es:

$$\sum_{s=1}^{n-1}(s^2+1)=\frac{(n-1)(2n^2-n+6)}{6}$$

Para valores grandes de n y suponiendo que el tiempo para efectuar una división es solo un poco mayor que el requerido para una multiplicación, el tiempo requerido para evaluar un determinante por el método de Chio es aproximadamente - multiplicaciones. $\frac{n^3}{3}$

Por lo tanto la solución de un sistema de n ecuaciones con n-incognitas por determinante puede efectuarse aproximadamente $\frac{n^4}{3}$ multiplicaciones.

Para $n=10$; $\frac{n^4}{3}$ es alrededor de 3,000 multiplicaciones contra - - 70,000, si no se usa el método de Chio.

Queda por comparar otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones - lineales de orden superior y estimar el número de multiplicaciones y hacer comparaciones con los anteriormente expuestos:

Esto queda como un tema abierto para trabajos posteriores:

EL DESARROLLO DEL PRESENTE TRABAJO SE LLEVO A
CABO SIGUIENDO LAS IDEAS DE LOS SEÑORES

MATEMATICO NORTEAMERICANO DAVID GALE
MATEMATICO POLACO STEFAN BANACH.

R. S. T 451

B I B L I O G R A F I A

1. Matematical Monthly (1970)

2. Matematical Monthly (1969)

3. Linear Numerical Analisis

   Capítulo 10

   Autor: Kunz.