LA INTEGRAL DE BANACH
Y
EL PROBLEMA DE LA INTEGRAL

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

HUMBERTO VILLEGAS RODRIGUEZ

Hermosillo, Son., 1992

ESTA TESIS ESTA DEDICADA A:

Mi abuela y demás familiares.

Los rockeros de el Instituto de Matemáticas de La Universidad de Sonora y de la Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Al "Boli".

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de forma muy especial al Dr. Miguel Angel García A., quién sugirió y guió la presente tesis, y al M.C. Fernando Luque V. por su invaluable ayuda y dedicación en la elaboración del presente trabajo.

Al Comité Revisor de Tesis, integrado por: M.C. Fernando Luque V., M.C. Eduardo Tellechea A., M.C. Guillermo Dávila R. y Dr. Fernando Avila Murillo, por sus comentarios y sugerencias que dieron un acabado más satisfactorio a este trabajo.

Al Lic. Francisco Javier Palomares G., por sus comentarios sobre la redacción de esta tesis y Benjamín Urías D., por la realización de las distintas versiones del texto y diseño de algunos símbolos usados en este trabajo.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Históricamente fue Augustin Louis Cauchy el primero en dar una definición analítica de la integral de una función. Su punto de partida es una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$. El considera una partición $\mathbb{P}$ de $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

y la "suma de Cauchy" correspondiente

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Al límite de S, cuando las longitudes de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\mathbb{P}$ tienden a cero, el cual siempre existe, lo llama la integral definida de f sobre $[a, b]$ y lo denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Una vez que el problema de la definición analítica de la integral fué resuelto por Cauchy para las funciones continuas, las investigaciones se orientaron hacia la búsqueda de una definición analítica de la integral para funciones tan discontinuas como fuera posible. Cauchy, Lipschitz, y Dirichlet hicieron contribuciones en esta dirección mostrando que es posible definir la integral de una función cuando esta tiene como conjunto de discontinuidades un conjunto topológicamente pequeño; de manera más específica, lograron extender la definición de integral a todas las funciones que son continuas excepto en un conjunto de primera especie.

Cabe mencionar que para Cauchy, Lipschitz y Dirichlet la integral de una función discontinua no es definida como el límite de "sumas de Cauchy" como lo es para las funciones continuas. En el caso no continuo, la integral se define "aislando" primero las discontinuidades de la función y luego tomando un límite; por ejemplo, si una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua excepto en el punto $c \in (a, b)$, entonces su integral se define como el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$$

Un avance significativo en cuanto a la extensión de la integral se lo dió Riemann en 1854, en donde el problema de la definiión analítica de la integral de una función discontinua se enfoca e manera distinta a como lo hicieran Cauchy, Lipschitz y Dirichet. Para Riemann la integral de cualquier función acotada definia en un intervalo cerrado debe definirse escencialmente como lo izo Cauchy para las funciones continuas. De manera más especifica i f es una función acotada definida en un intervalo $[a, b]$, $\mathbb{P}$ es na partición de $[a, b]$ y $\bar{x}_i$ es un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$, e define la integral de Riemann de f sobre $[a, b]$ por

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

uando este límite existe, donde δ es el máximo de las longitudes δ_i de los subintervalos de la partición $\mathbb{P}$.

Podemos observar que cuando f es continua en $[a, b]$ y $\bar{x}_i = x_{i-1}$, la integral Riemann es la integral de Cauchy.

Una vez que Riemann establece que su definición se aplica a ualquier función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se plantea entonces el roblema de caracterizar a aquellas funciones para las cuales el ímite que define su integral existe. Logra dar dos criterios que aracterizan a estas funciones y, en base a ellos, exhibe funcioes cuyo conjunto de discontinuidades es denso en un intervalo (y or lo tanto no es de primera especie), pero integrables.

El cambio de enfoque dado por Riemann resultó muy fructífero y abrió un camino de investigación que desembocó en el teorema de Lebesgue, el cual establece que la integral de una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, en el sentido de Riemann, existe si y solo si el conjunto de discontinuidades de la función tiene medida cero, esto es, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, se puede cubrir el conjunto de discontinuidades de f mediante una colección numerable de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes sea menor que ε.

El teorema de Lebesgue cerraba un ciclo de investigación en cuanto a la teoría de integración se refiere. Sin embargo, debido a la existencia de funciones que no son R-integrables[1], el problema de extender el concepto de integral a una clase más amplia de funciones quedaba abierto.

---

1 Por ejemplo la función de Dirichlet definida en $[0, 1]$ por

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Henri Lebesgue da un paso significativo en esta dirección, al lograr extender el concepto de integral a una clase más amplia de funciones. Su integral permite reemplazar el intervalo $[a, b]$ por conjuntos mas generales y además obtiene importantes teoremas de convergencia, algunos de los cuales no son válidos para la integral de Riemann, por ejemplo, el Teorema de la Convergencia Acotada. Lo anterior hace a la integral de Lebesgue mas satisfactoria que la integral de Riemann desde el punto de vista del análisis. Sin embargo, no toda función resulta ser integrable en el sentido de Lebesgue. Esto nos plantea la siguiente cuestión: ¿ Es posible extender el concepto de integral a toda función ?

En este trabajo abordamos el problema anterior para funciones acotadas. Siguiendo a S. Banach mostraremos que es posible extender el concepto de integral de manera no única a partir de la integral de Riemann, pero veremos que no es posible la extensión si queremos que sea válido el Teorema de la Convergencia Acotada. Esto nos sugiere que la integral de Lebesgue es la extensión "buena" de la integral de Riemann.

El trabajo se divide de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se definen la integral de Riemann y la integral de Lebesgue, y se demuestran algunas de sus propiedades. Además se hace ver que la clase de funciones integrables en el sentido de Lebesgue contienen propiamente a la clase de funciones integrables en el sentido de Riemann. Finalmente se plantea el problema de la extensión de la integral de Riemann a todas las funciones acotadas.

El capítulo 2 es dedicado a la demostración de el teorema de Hanh-Banach; la versión que se presenta es un poco diferente a la que se ve en los textos de análisis funcional, ya que consideramos el teorema en un espacio lineal parcialmente ordenado y eso cambia un poco su presentación. Este teorema es una de los resultados importantes que usamos para la extensión de la integral de Riemann.

En el capítulo 3 definimos una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones acotadas de período uno; a las clases de equivalencia que se obtienen de esta relación las llamamos hiperfunciones. Probaremos que el conjunto de todas las hiperfunciones forma un espacio lineal parcialmente ordenado y por último aplica-nos la versión del teorema de Hanh-Banach del capítulo 2, para obtener un teorema de extensión de funcionales lineales no negativas sobre el conjunto de las hiperfunciones.

En el capítulo 4 definimos la integral de Banach y haciendo uso del teorema de Hanh-Banach, mostramos la existencia de integrales de Banach sobre el conjunto de las funciones acotadas de período uno. Expresamos el problema de la extensión de la integral de Riemann en términos de la integral de Banach y por último se presentan algunos resultados que nos muestran que la integral de Riemann se puede extender de manera no única a todas las funciones acotadas.

1 LA INTEGRAL DE RIEMANN. LA INTEGRAL DE LEBESGUE

El objetivo de este capítulo es desarrollar una parte de la teoría de la integral de Lebesgue para funciones acotadas. La parte que se desarrolla será la suficiente para demostrar que la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann y que el conjunto de las funciones L-integrables no agota el conjunto de las funciones acotadas. Por último planteamos el problema de la integral.

1.1 LA INTEGRAL DE RIEMANN

Veamos primero algunas definiciones y propiedades concernientes a la integral de Riemann.

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$, y sea $\mathbb{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Una **suma de Riemann** de f asociada con la partición $\mathbb{P}$ es una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

donde $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. La elección de x_i es arbitraria. La funcion f es **Riemann integrable** o **R-integrable** sobre $[a, b]$ si existe un número r con la siguiente propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|S - r| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann S asociada con una partición $\mathbb{P}$ que tiene norma$(\mathbb{P}) = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\} < \delta$.

El número r es la **integral de Riemann** de f sobre $[a, b]$ y lo denotamos por

$$(R)\int_a^b f.$$

La definición anterior de función Riemann integrable es la dada originalmente por Riemann. Existe una definición equivalente de integral dada en los siguientes términos:

Sea f una función acotada de valores reales definida sobre $[a, b]$. Para cada partición $\mathbb{P}$ de $[a, b]$ se definen las sumas

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \quad y \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

donde

$$M_i = \sup_{t_{i-1} \le x \le t_i} f(x) \quad y \quad m_i = \inf_{t_{i-1} \le x \le t_i} f(x).$$

Definimos ahora la integral superior de Riemann de f por

$$\overline{\int_a^b} f = \text{Inf } S,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles particiones de $[a, b]$.

Similarmente se define la integral inferior de Riemann de f por

$$\underline{\int_a^b} f = \text{Sup } s.$$

La integral inferior es siempre menor o igual que la integral superior. Si estos números son iguales decimos que f es integrable y llamamos a este valor común la integral de f. Denotamos este número por

$$\int_a^b f.$$

Dado que las dos definiciones anteriores son equivalentes se tiene que

$$\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Algunas de las propiedades de la integral de Riemann son las siguientes:

$i)$ $\int_a^b (c_1 f + c_2 g) = c_1\int_a^b f + c_2\int_a^b g.$

$ii)$ $\int_a^b f \ge 0$,si $f(x) \ge 0.$

$iii)$ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, donde $c \in (a, b).$

$iv)$ $\int_a^b c = c(b - a).$

En lo que sigue de este trabajo, denotaremos la integral de Riemann de f por $(R)\int_a^b f$, cuando haya algún peligro de confusión.

1. 2. CONJUNTOS MEDIBLES Y MEDIDA DE LEBESGUE

En esta sección se define el tipo de conjunto (conjunto medible) que consideraremos como dominio de las funciones para las cuales se define la integral de Lebesgue y veremos algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 1. 2. 1: Para cada conjunto $\mathbb{A}$ de números reales, definimos la **medida exterior** de $\mathbb{A}$, $m^*\mathbb{A}$, por

$$m^*\mathbb{A} = \inf_{\mathbb{A} \subset \cup \mathbb{I}_n} \sum l(\mathbb{I}_n)$$

donde $\langle \mathbb{I}_n \rangle$ es una colección de intervalos abiertos que cubren $\mathbb{A}$, esto es $\mathbb{A} \subset \bigcup \mathbb{I}_n$ y $l(\mathbb{I}_n)$ representa la longitud del intervalo $\mathbb{I}_n$.

Es fácil ver que si $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, entonces $m^*\mathbb{A} \le m^*\mathbb{B}$ y que $m^*\emptyset = 0$.

LEMA 1. 2. 2: La medida exterior de un intervalo es su longitud.

PRUEBA: Probaremos la proposición anterior primeramente para el caso en que el intervalo es cerrado, digamos $[a, b]$. Ya que $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ para cada ε positivo, tenemos que

$$m^*[a, b] \le l(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = b - a + 2\varepsilon.$$

Ya que $m^*[a, b] \le b - a + 2\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces $m^*[a, b] \le b - a$.

Probaremos ahora que $m^*[a, b] \ge b - a$. Sea $\langle \mathbb{I}_n \rangle$ cualquier colección numerable de intervalos abiertos que cubre $[a, b]$. Por el teorema de Heine-Borel se puede extraer una subcolección finita $\langle \mathbb{I}_{n_K} \rangle$ de $\langle \mathbb{I}_n \rangle$ que también cubre $[a, b]$. Ya que $a \in \bigcup \mathbb{I}_{n_K}$, entonces algún elemento de la colección contiene a a, denotemos este intervalo por (a_1, b_1). Se tiene que $a_1 < a < b_1$. Si $b_1 \le b$, entonces $b_1 \in [a, b]$, y ya que $b_1 \notin (a_1, b_1)$, existe un intervalo (a_2, b_2) en la colección $\langle \mathbb{I}_{n_K} \rangle$ tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$, esto es $a_2 < b_1 < b_2$. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de intervalos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_s, b_s)$ de la sucesión $\langle \mathbb{I}_{n_K} \rangle$ tal que $a_i < b_{i-1} < b_i$; ya que $\langle \mathbb{I}_{n_K} \rangle$ es una colección finita, el procedimiento debe terminar con algún intervalo (a_s, b_s). Pero esto termina solo si $b \in (a_s, b_s)$, esto es, si $a_s < b < b_s$.

Luego

$$\begin{aligned}\sum l\langle \mathbb{I}_{n_K} \rangle \ge \sum l(a_i, b_i) &= (b_s - a_s) + (b_{s-1} - a_{s-1}) + \ldots + (b_1 - a_1) \\ &= b_s - (a_s - b_{s-1}) - (a_{s-1} - b_{s-2}) - \ldots - (a - b_1) - a_1 \\ &> b_s - a_1\end{aligned}$$

a que $a_i < b_{i-1}$. Pero $b_s > b$ y $a_1 < a$ y así que $b_s - a_1 > b - a$, or lo tanto $\sum l(\mathbb{I}_k) \geq b - a$. Esto muestra que $m^*[a, b] \geq b - a$, sí que $m^*[a, b] = b - a$.

Sea ahora $\mathbb{I}$ un intervalo acotado cualquiera, entonces dado > 0, existe un intervalo cerrado $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ tal que $l(\mathbb{J}) > l(\mathbb{J}) - \varepsilon$. uego

$$l(\mathbb{J}) - \varepsilon < l(\mathbb{J}) = m^*\mathbb{J} \leq m^*\mathbb{I} \leq m^*\overline{\mathbb{I}} = l(\overline{\mathbb{I}}) = l(\mathbb{I}),$$

sí que para cada $\varepsilon > 0$

$$l(\mathbb{I}) - \varepsilon < m^*\mathbb{I} \leq l(\mathbb{I}),$$

or lo tanto $m^*\mathbb{I} = l(\mathbb{I})$.

Supongamos ahora que $\mathbb{I}$ es un intervalo infinito, entonces ado cualquier número real M, existe un intervalo cerrado $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ on $l(\mathbb{J}) = M$. Luego $m^*\mathbb{I} \geq m^*\mathbb{J} = l(\mathbb{J}) = M$, ya que $m^*\mathbb{I} \geq M$ para ca- a M, $m^*\mathbb{I} = \infty = l(\mathbb{I})$. ■

EMA 1. 2. 3: Sea $\langle \mathbb{A}_n \rangle$ una sucesión infinita numerable de conjun- os de números reales. Entonces

$$m^*\left(\bigcup_n \mathbb{A}_n \right) \leq \sum m^*\mathbb{A}_n .$$

RUEBA: Si uno de los conjuntos $\mathbb{A}_n$ tiene medida exterior infinita a desigualdad es clara. Si $m^*\mathbb{A}_n$ es finita, entonces dado $\varepsilon > 0$, xiste una colección numerable $\langle \mathbb{I}_{n,i} \rangle$ de intervalos abiertos tal ue $\mathbb{A}_n \subset \bigcup_i \mathbb{I}_{n,i}$ y $\sum l(\mathbb{I}_{n,i}) < m^*\mathbb{A}_n + 2^{-n}\varepsilon$. Ahora la colección $\mathbb{I}_{n,i} \rangle_{n,i} = \bigcup_n \langle \mathbb{I}_{n,i} \rangle$ es numerable y cubre $\bigcup \mathbb{A}_n$. Así

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n \right) \leq \sum_{n,i} l(\mathbb{I}_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i l(\mathbb{I}_{n,i})$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \left[m^*\mathbb{A}_n + 2^{-n}\varepsilon \right] = \sum_{n=1}^{\infty} m^*\mathbb{A}_n + \varepsilon .$$

a que $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$m^*\left(\bigcup_n \mathbb{A}_n \right) \leq \sum m^*\mathbb{A}_n . ■$$

EFINICIÓN 1. 2. 4: Un conjunto $\mathbb{E}$ se dice ser medible si para ca- a conjunto $\mathbb{A}$ se tiene que $m^*\mathbb{A} = m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}))$, onde $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los reales.

Ya que siempre se tiene que

$$m^*\mathbb{A} \leq m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E})),$$

entonces para ver que un conjunto $\mathbb{E}$ es medible, solo verificaremos que $m^*\mathbb{A} \geq m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}))$ para cada conjunto $\mathbb{A}$.

Es claro que $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos medibles y que si $\mathbb{E}$ es medible entonces también $\mathbb{R} - \mathbb{E}$ lo es.

LEMA 1. 2. 5: Si $m^*\mathbb{E} = 0$, entonces $\mathbb{E}$ es medible.

PRUEBA: Sea $\mathbb{A}$ cualquier conjunto. Entonces $(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ y así $m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) \leq m^*(\mathbb{E}) = 0$. También $\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}) \subset \mathbb{A}$ y así

$$m^*\mathbb{A} \geq m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E})) + m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}).$$

y por lo tanto $\mathbb{E}$ es medible. ■

LEMA 1. 2. 6: Si $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ son medibles, entonces $\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2$ también lo es.

PRUEBA: Sea $\mathbb{A}$ cualquier conjunto. Ya que $\mathbb{E}_2$ es medible tenemos

$$m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1))$$
$$= m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1) \cap \mathbb{E}_2) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_2)),$$

y ya que $\mathbb{A} \cap (\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_1) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_2 \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1))$, tenemos que

$$m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2)) \leq m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_1) + m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_2 \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1)).$$

Así

$$m^*(\mathbb{A} \cap [\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2]) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_2))$$
$$\leq m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_1) + m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_2 \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_2))$$
$$= m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_1) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1)) = m^*\mathbb{A},$$

por la medibilidad de $\mathbb{E}_1$. Ya que

$$\mathbb{R} - (\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) = (\mathbb{R} - \mathbb{E}_1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_2)$$

entonces $\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2$ es medible. ■

DEFINICIÓN 1. 2. 7: Una colección $\mathfrak{a}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ es llamado una **álgebra** de conjuntos si:

i) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \in \mathfrak{a}$,si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathfrak{a}$,

ii) $\mathbb{R} - \mathbb{A} \in \mathfrak{a}$, si $\mathbb{A} \in \mathfrak{a}$.

FINICIÓN 1. 2. 8: Una álgebra $\mathfrak{a}$ de conjuntos es llamado una -álgebra, si cualquier unión numerable de conjuntos en $\mathfrak{a}$ está ambién en $\mathfrak{a}$.

ROLARIO 1. 2. 9: La familia $\mathfrak{m}$ de conjuntos medibles es una álebra de conjuntos.

MA 1. 2. 10: Sea $\mathbb{A}$ cualquier conjunto y $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \ldots, \mathbb{E}_n$ una suesión finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Entonces

$$m^*\left(\mathbb{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{E}_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_i).$$

RUEBA: Usaremos inducción. Es claro que el lema es válido para $= 1$. Supongamos que la expresión es válida para $n - 1$ conjuntos $_i$. Dado que los $\mathbb{E}_i$ son conjuntos disjuntos, tenemos

$$\mathbb{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{E}_i\right] \cap \mathbb{E}_n = \mathbb{A} \cap \mathbb{E}_n$$

$$\mathbb{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{E}_i\right] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}_n) = \mathbb{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}_i\right].$$

Dado que $\mathbb{E}_n$ es medible, se tiene

$$m^*\left(\mathbb{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{E}_i\right]\right) = m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_n) + m^*\left(\mathbb{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}_i\right]\right)$$

$$= m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_i),$$

or nuestra suposición del lema para $n - 1$ conjuntos. ■

Mostraremos ahora que la familia de los conjuntos medibles orman una σ-álgebra. Probamos antes un lema auxiliar.

EMA 1. 2. 11: Sea $\mathfrak{a}$ una álgebra de conjuntos en $\mathbb{R}$ y $\langle A_n \rangle$ una ucesión de conjuntos en $\mathfrak{a}$. Entonces existe una sucesión $\langle B_n \rangle$ de onjuntos en $\mathfrak{a}$ tal que $B_n \cap B_m = \emptyset$ para $n \neq m$ y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

PRUEBA: Sea $B_1 = A_1$ y para cada $n > 1$ definimos

$$B_n = A_n - [A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}]$$
$$= A_n \cap (\mathbb{R} - A_1) \cap (\mathbb{R} - A_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} - A_{n-1}).$$

Dado que $A_i \in \mathfrak{a}$, entonces $B_n \in \mathfrak{a}$. Podemos ver también que $B_n \in A_n$. Consideremos ahora B_n y B_m tal que $m < n$. Entonces $B_m \subset A_m$ y

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n$$
$$= A_m \cap A_n \cap (\mathbb{R} - A_1) \cap (\mathbb{R} - A_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} - A_{n-1})$$
$$= A_m \cap (\mathbb{R} - A_m) \cap A_n \cap \dots \cap (\mathbb{R} - A_{n-1})$$
$$= \emptyset.$$

Dado que $B_n \in A_n$, tenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sea ahora $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces $x \in A_i$ para algun i. Sea n el más pequeño valor de i tal que $x \in A_i$. Entonces $x \in B_n$ y así $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Es decir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \blacksquare$$

LEMA 1. 2. 12: La familia $\mathfrak{m}$ de conjuntos medibles es una σ-álgebra de conjuntos.

PRUEBA: Ya que $\mathfrak{m}$ es una álgebra de conjuntos, lo que tenemos que probar es que si $\mathbb{E}$ es una unión numerable de conjuntos medibles, entonces $\mathbb{E}$ es medible. Se sabe que $\mathbb{E}$ se puede escribir como la unión de una sucesión $\langle \mathbb{E}_n \rangle$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Sea $\mathbb{A}$ cualquier conjunto y $\mathbb{F}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i$. Entonces $\mathbb{F}_n$ es medible y $(\mathbb{R} - \mathbb{F}_n) \supset (\mathbb{R} - \mathbb{E})$. Luego

$$m^*\mathbb{A} = m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{F}_n) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{F}_n))$$
$$\geq m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{F}_n) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E})).$$

Por el lema 1. 2. 10

$$m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_i)$$

así

$$m^*\mathbb{A} \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_i) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E})).$$

a que el lado izquierdo no depende de n tenemos que

$$m^*\mathbb{A} \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}_i) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E}))$$

$$m^*\mathbb{A} \geq m^*(\mathbb{A} \cap \mathbb{E}) + m^*(\mathbb{A} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{E})),$$

e acuerdo a lema 1. 2. 3. ■

EMA 1. 2. 13: El intervalo (α, ∞) es medible.

RUEBA: Sea $\mathbb{A}$ cualquier conjunto, $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A} \cap (\alpha, \infty)$, $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A} \cap (-\infty, \alpha]$, entonces debemos probar que $m^*\mathbb{A}_1 + m^*\mathbb{A}_2 \leq m^*\mathbb{A}$. i $m^*\mathbb{A} = \infty$, entonces no hay nada que probar. Si $m^*\mathbb{A} < \infty$, entonces ado $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable $\{\mathbb{I}_n\}$ de intervalos a-iertos que cubren a $\mathbb{A}$ y para la cual

$$\sum l(\mathbb{I}_n) \leq m^*\mathbb{A} + \varepsilon.$$

ea $\mathbb{I}_n' = \mathbb{I}_n \cap (\alpha, \infty)$ y $\mathbb{I}_n'' = \mathbb{I}_n \cap (-\infty, \alpha]$, entonces $\mathbb{I}_n'$ y $\mathbb{I}_n''$ son ntervalos (o conjuntos vacíos) y

$$l(\mathbb{I}_n) = l(\mathbb{I}_n') + l(\mathbb{I}_n'') = m^*\mathbb{I}_n' + m^*\mathbb{I}_n''.$$

a que $\mathbb{A}_1 \subset \bigcup \mathbb{I}_n'$, tenemos que

$$m^*\mathbb{A}_1 \leq m^*(\bigcup \mathbb{I}_n') \leq \sum m^*\mathbb{I}_n',$$

ya que $\mathbb{A}_2 \subset \bigcup \mathbb{I}_n''$, tenemos que

$$m^*\mathbb{A}_2 \leq m^*(\bigcup \mathbb{I}_n'') \leq \sum m^*\mathbb{I}_n''.$$

ntonces

$$m^*\mathbb{A}_1 + m^*\mathbb{A}_2 \leq \sum (m^*\mathbb{I}_n' + m^*\mathbb{I}_n'') \leq \sum l(\mathbb{I}_n) \leq m^*\mathbb{A} + \varepsilon,$$

ero como ε es arbitrario

$$m^*\mathbb{A}_1 + m^*\mathbb{A}_2 \leq m^*\mathbb{A}. ■$$

DEFINICIÓN 1. 2. 14: La colección $\mathfrak{B}$ de conjuntos de Borel es la más pequeña σ-álgebra que contiene todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^1$. Es decir si $\mathfrak{B}_1$ es una σ-álgebra que contiene todos los con-

---

1 En H. L. Royden, Real Analysis, Pág. 16 se puede ver una prueba de existencia de este tipo de σ-álgebra.

untos abiertos de $\mathbb{R}$, entonces $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_1$.

COROLARIO 1. 2. 15: Cualquier conjunto de Borel es medible. En particular cada conjunto abierto y cada conjunto cerrado es medible.

PRUEBA: Dado que la colección $\mathfrak{m}$ de conjuntos medible es una σ-álgebra tenemos que $[-\infty, \alpha]$ es medible para cada α ya que $[-\infty, \alpha] = \mathbb{R} - (\alpha, \infty)$. Dado que $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, b - \frac{1}{n}\right]$, tenemos que $(-\infty, b)$ es medible. Por lo tanto cada intervalo abierto $(\alpha, b) = (-\infty, b) \cap (\alpha, \infty)$ es medible. Ahora como cada conjunto abierto es la unión numerable de intervalos abiertos este debe ser medible. Así $\mathfrak{m}$ es una σ-álgebra conteniendo los conjuntos abiertos y por lo tanto contiene a la familia $\mathfrak{B}$ de conjuntos de Borel, ya que $\mathfrak{B}$ es por definición la más pequeña σ-álgebra conteniendo los conjuntos abiertos. ■

DEFINICIÓN 1. 2. 16: Si $\mathbb{E}$ es un conjunto medible , definimos la **medida de Lebesgue**, $m\mathbb{E}$, como la medida exterior de $\mathbb{E}$.

LEMA 1. 2. 17: Sea $\langle \mathbb{E}_n \rangle$ una sucesión de conjuntos medibles, entonces

$$m(\bigcup \mathbb{E}_i) \leq \sum m\mathbb{E}_i.$$

Si los conjuntos $\mathbb{E}_n$ son disjuntos dos a dos entonces

$$m(\bigcup \mathbb{E}_i) = \sum m\mathbb{E}_i.$$

PRUEBA: La desigualdad ya quedo establecida en el lema 1. 2. 3.. Si $\langle \mathbb{E}_n \rangle$ es una sucesión finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos entonces el lema 1. 2. 10 con $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ implica que

$$m(\bigcup \mathbb{E}_n) = \sum m\mathbb{E}_n.$$

Sea $\langle \mathbb{E}_i \rangle$ una sucesión infinita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i .$$

sí que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mE_i .$$

a que el lado izquierdo no depende de n, tenemos

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} mE_i .$$

a desigualdad invertida también es válida, y por lo tanto

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_i . \blacksquare$$

EMA 1. 2. 18: Sea $\langle E_n \rangle$ una sucesión infinita decreciente de conjuntos medibles, esto es una sucesión con $E_{n+1} \subset E_n$ para cada n. Sea mE_1 finita, entonces

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n .$$

RUEBA: Sea $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ y sea $F_i = E_i - E_{i+1}$. Entonces

$$E_1 - E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i ,$$

los conjuntos F_i son disjuntos dos a dos. Luego

$$m(E_1 - E) = \sum_{n=1}^{\infty} mF_i = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_i - E_{i+1}) .$$

ero $mE_1 = mE + m(E_1 - E)$ y $mE_i = mE_{i+1} + m(E_i - E_{i+1})$, dado ue $E \subset E_1$ y $E_{i+1} \subset E_i$. Ya que $mE_i \leq mE_1 < \infty$, tenemos

$$m(E_1 - E) = mE_1 - mE \text{ y } m(E_i - E_{i+1}) = mE_i - mE_{i+1} .$$

sí

$$mE_1 - mE = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_i - E_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(E_i - E_{i+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (mE_i - mE_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} m(E_1 - E_n) = mE_1 - \lim_{n\to\infty} mE_n .$$

Dado que $mE_1 < \infty$ tenemos que

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n . \blacksquare$$

. 3 Funciones medibles

A las funciones que se les define la integral de Lebesgue se les denomina funciones medibles. Veremos ahora el concepto de función medible.

LEMA 1.3.1: Sea f una función de valores reales extendidos cuyo dominio es medible. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Para cada número real α el conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$ es medible.

ii) Para cada número real α el conjunto $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.

iii) Para cada número real α el conjunto $\{x : f(x) < \alpha\}$ es medible.

iv) Para cada número real α el conjunto $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.

Estas proposiciones implican:

v) Para cada número real extendido α el conjunto $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible.

PRUEBA: Sea $\mathcal{D}$ el dominio de f. Dado que

$$\{x : f(x) \leq \alpha\} = \mathcal{D} - \{x : f(x) > \alpha\}$$

entonces *i*) implica *iv*), ya que la diferencia de conjuntos medibles es medible. Similarmente *iv*) implica *i*) ; *ii*) implica *iii*) y *iii*) implica *ii*).

Ahora dado que

$$\{x : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\},$$

entonces *i*) implica *ii*), ya que la intersección de conjuntos medibles es medible. Similarmente *ii*) implica *i*), ya que

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$$

y la unión de una sucesión de conjuntos medibles es medible. Esto muestra que las primeras cuatro proposiciones son equivalentes.

Si α es un número real

$$\{x : f(x) = \alpha\} = \{x : f(x) \geq \alpha\} \cap \{x : f(x) \leq \alpha\}$$

luego *ii*) y *iv*) implica *v*).

Ahora

$$\{x : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq n\}$$

luego *ii*) implica *v*), si $\alpha = \infty$. Similarmente *iv*) implica *v*) para $\alpha = -\infty$, así que *ii*) y *iv*) implican *v*).■

DEFINICIÓN 1. 3. 2: Una función de valores reales extendidos f se dice que es **medible** si su dominio es medible y si satisface una de las primeras cuatro proposiciones de el lema 1. 3. 1.

TEOREMA 1. 3. 3: Sea c una constante y f y g dos funciones medibles de valores reales definidas sobre el mismo dominio. Entonces las funciones $f + c$, cf, $f + g$, $g - f$ y fg son también medibles.

PRUEBA: Dado que $\{x : f(x) + c < \alpha\} = \{x : f(x) < \alpha - c\}$, y de acuerdo a la condición *iii)* del lema 1. 3. 1. se tiene que $f(x) + c$ es medible. En forma similar se prueba que cf es medible.

si $f(x)$ y $g(x) < \alpha$, entonces $f(x) < \alpha - g(x)$. Se sabe que existe un racional r tal que $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Así

$$\{x : f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_r (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < \alpha - r\})$$

ya que los racionales son numerables se tiene que el conjunto $\{x : f(x) + g(x) < \alpha\}$ es medible y por lo tanto $f + g$ es medible. Ya que $-g = (-1)g$ es medible cuando g lo es, entonces $f - g$ es medible.

La función f^2 es medible, ya que

$$\{x : f^2(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

para $\alpha \geq 0$, y

$$\{x : f^2(x) > \alpha\} = \mathcal{D}$$

si $\alpha > 0$, donde $\mathcal{D}$ es el dominio de f. Luego

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f + g) - f^2 - g^2\right]$$

es medible. ∎

TEOREMA 1. 3. 4: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles (con el mismo dominio de definición). Entonces las funciones $\mathrm{Sup}\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\mathrm{Inf}\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\mathrm{Sup}_n f_n$, $\mathrm{Inf}_n f_n$, $\overline{\mathrm{Lim}}\, f_n$ y $\underline{\mathrm{Lim}}\, f$ son también medibles.

PRUEBA: Sea h definida por $h(x) = \mathrm{Sup}\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, entonces $\{x : h(x) > \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x : f_i(x) > \alpha\}$. Luego h es medible ya que

f_i es medible. Ahora si $g(x) = \operatorname{Sup}_n f_n(x)$, entonces $\{x : g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > \alpha\}$, entonces $\operatorname{Sup}_n f_n(x)$ es medible. En forma análoga se prueba para $\operatorname{Inf}_n f_n$. Dado que $\overline{\operatorname{Lim}}\, f_n = \operatorname{Inf}_n \operatorname{Sup}_{n \geq k} f_k$, se tiene que $\overline{\operatorname{Lim}}\, f_n$ es medible, análogamente se tiene que $\underline{\operatorname{Lim}}\, f_n$ es medible. ■

DEFINICIÓN 1.3.5: Una proposición se dice ser válida **casi donde quiera** (c.d.) si el conjunto de puntos donde no es válida tiene medida cero.

En particular decimos que $f = g$ c.d., si f y g tienen el mismo dominio y $m\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Similarmente decimos que f_n converge a g c.d. si existe un conjunto $\mathbb{E}$ de medida cero tal que $f_n \to f$ para cada $x \notin \mathbb{E}$.

LEMA 1.3.6: Si f es medible y $f = g$ c.d. entonces g es medible.

PRUEBA: Sea $\mathbb{E}$ el conjunto $\{x : g(x) \neq f(x)\}$. Por hipótesis $m\mathbb{E} = 0$. Ahora

$$\{x : g(x) > \alpha\}$$
$$= \{x : f(x) > \alpha\} \cup (\{x \in \mathbb{E} : g(x) > \alpha\} - \{x \in \mathbb{E} : g(x) \leq \alpha\})$$

Los conjuntos $\{x \in \mathbb{E} : g(x) > \alpha\}$ y $\{x \in \mathbb{E} : g(x) \leq \alpha\}$ son medibles ya que son subconjuntos de $\mathbb{E}$ y $\{x : f(x) > \alpha\}$ es medible ya que f es medible. Entonces $\{x : g(x) > \alpha\}$ es medible para cada α y por lo tanto g es medible. ■

Si $\mathbb{A}$ es cualquier conjunto definimos la **función característica** de el conjunto $\mathbb{A}$, $\mathcal{X}_{\mathbb{A}}$, por

$$\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{A} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{A}. \end{cases}$$

Es claro que $\mathcal{X}_{\mathbb{A}}$ es medible si y solo si $\mathbb{A}$ es medible. Una función φ de valores reales es llamada **simple** si es medible y toma solamente un número finito de valores. Si φ es una función simple y $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es el conjunto de valores no cero de entonces $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, donde $A_i = \{x : \varphi(x) = \alpha_i\}$. Esta representación para φ es la llamada **representación canónica**. Se puede ver que la suma, el producto y la diferencia de funciones simples es simple.

1.4 LA INTEGRAL DE LEBESGUE DE UNA FUNCIÓN ACOTADA SOBRE UN CONJUNTO ACOTADO.

Una vez definidos los conceptos de conjunto medible y función medible y haber visto algunas de sus propiedades estamos listos para definir la integral de Lebesgue.

DEFINICIÓN 1. 4. 1: Si φ es una función simple que es cero fuera de un conjunto de medida finita, entonces definimos la **integral de Lebesgue de φ**, $\int \varphi(x)dx$, por

$$\int \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i mA_i,$$

donde φ tiene la representación canónica $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.

También usaremos el símbolo $\int \varphi$ para la integral de Lebesgue de φ. Si E es cualquier conjunto medible definimos la **integral de Lebesgue de φ sobre E**, $\int_E \varphi$, por

$$\int_E \varphi = \int \varphi \chi_E.$$

LEMA 1. 4. 2: Sea $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$. supongamos que cada conjunto E_i es medible de medida finita. Entonces

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i mE_i.$$

PRUEBA: Tenemos que $A_a = \{x : \varphi(x) = a\} = \bigcup_{a_i = a} E_i$. Luego $amA_a = \sum_{a_i = a} a_i mE_i$ por la aditividad de m y por lo tanto

$$\int \varphi(x)dx = \sum amA_a = \sum a_i mE_i. \blacksquare$$

TEOREMA 1. 4. 3: Sean φ y ψ funciones simples las cuales son cero fuera de un conjunto de medida finita. Entonces

$$\int(a\varphi + b\psi) = a\int\varphi + b\int\psi.$$

Y si $\varphi \geq \psi$ c.d.

$$\int\varphi \geq \int\psi.$$

PRUEBA: Sean $\{\mathbb{A}_i\}$ y $\{\mathbb{B}_i\}$ los conjuntos en los cuales se obtiene la representación canónica de φ y ψ respectivamente. Sean $\mathbb{A}_0$ y $\mathbb{B}_0$ los conjuntos donde φ y ψ son cero. Entonces los conjuntos $\mathbb{E}_k$ obtenidos al tomar todas las intersecciones $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{B}_j$, $i = 0, 1, 2, \ldots, s$, $j = 0, 1, 2, \ldots, t$, forman una colección disjunta de conjuntos medibles y podemos escribir

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{k=1}^{N} b_k \chi_{E_k}.$$

Por lo tanto

$$a\varphi + b\psi = \sum (aa_k + bb_k)\chi_{E_k}.$$

Así que $\int(a\varphi + b\psi) = a\int\varphi + b\int\psi$ de acuerdo a el lema anterior.

Para la segunda proposición notamos que

$$\int\varphi - \int\psi = \int(\varphi - \psi) \geq 0,$$

ya que la integral de una función mayor o igual que cero es no negativa. ■

Nuestra intención ahora es definir la integral de Lebesgue para una función f acotada sobre un conjunto medible $\mathbb{E}$ acotado. Por analogía con la integral de Riemann consideramos para funciones simples φ y ψ los números

$$\operatorname*{Inf}_{\psi \geq f} \int_E \psi \quad \text{y} \quad \operatorname*{Sup}_{\varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

¿ Cuando estos dos números son iguales?. El siguiente lema nos da la respuesta.

LEMA 1. 4. 4: Sea f definida y acotada sobre un conjunto medible $\mathbb{E}$ acotado. Para que

$$\operatorname*{Inf}_{f \leq \psi} \int_E \psi(x)dx = \operatorname*{Sup}_{f \geq \varphi} \int_E \varphi(x)dx$$

para todas las funciones simples φ y ψ, es necesario y suficiente que f sea medible.

PRUEBA: Sea f acotada por M y supongase que f es medible. Entonces los conjuntos

$$\mathbb{E}_k = \left\{x : \frac{kM}{n} \geq f(x) > \frac{(k-1)M}{n}\right\}, \quad -n \leq k \leq n,$$

son medibles, disjuntos y su unión es $\mathbb{E}$. Entonces

$$\sum_{k=-n}^{n} m\mathbb{E}_k = m\mathbb{E}.$$

Las funciones simples definidas por

$$\psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{\mathbb{E}_k}(x) \quad \text{y} \quad \varphi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{\mathbb{E}_k}(x)$$

satisfacen

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x).$$

Entonces

$$\operatorname*{Inf}_{\psi \geq f} \int_{\mathbb{E}} \psi(x)dx \leq \int_{\mathbb{E}} \psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} kM\mathbb{E}_k,$$

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi \leq f} \int_{\mathbb{E}} \varphi(x)dx \geq \int_{\mathbb{E}} \varphi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)M\mathbb{E}_k.$$

De donde

$$0 \leq \operatorname{Inf} \int_{\mathbb{E}} \psi(x)dx - \operatorname{Sup} \int_{\mathbb{E}} \varphi(x)dx \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} M\mathbb{E}_k = \frac{M}{n} m\mathbb{E}.$$

Ya que n es arbitrario tenemos

$$\operatorname{Inf} \int_{\mathbb{E}} \psi(x)dx - \operatorname{Sup} \int_{\mathbb{E}} \varphi(x)dx = 0.$$

y la condición es suficiente.

Supongamos ahora que

$$\operatorname*{Inf}_{f \leq \psi} \int_{\mathbb{E}} \psi = \operatorname*{Sup}_{f \geq \varphi} \int_{\mathbb{E}} \varphi.$$

Entonces existen funciones simples ψ_n y φ_n tal que

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

y

$$\int \psi_n(x)dx - \int \varphi_n(x)dx < \frac{1}{n}.$$

Entonces las funciones

$$\psi^* = \operatorname*{Inf}_n \psi_n \quad \text{y} \quad \varphi^* = \operatorname*{Sup}_n \varphi_n$$

son medibles por el teorema 1. 3. 4 y

$$\varphi^*(x) \leq f(x) \leq \psi^*(x).$$

Se tiene que

$$\mathbb{A} = \{x : \varphi^*(x) < \psi^*(x)\} = \bigcup_t \mathbb{A}_t$$

donde

$$\mathbb{A}_t = \{x : \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{t}\}.$$

Pero cada $\mathbb{A}_t$ está contenido en el conjunto

$$\{x : \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{t}\}$$

y este conjunto tiene medida menor o igual que $\frac{t}{n}$. Ya que n es arbitrario se tiene que $m\mathbb{A}_t = 0$ y por lo tanto $m\mathbb{A} = 0$. Así $\varphi^* = \psi^*$ excepto en un conjunto de medida cero, es decir f es medible por el lema 1. 3. 6 y la condición es necesaria.■

Podemos definir ahora la integral de Lebesgue para funciones acotadas y medibles.

DEFINICIÓN 1. 4. 5: Si f es una función medible y acotada definida sobre un conjunto medible $\mathbb{E}$ acotado, definimos la **integral de Lebesgue** de f sobre $\mathbb{E}$, $\int_{\mathbb{E}} f(x)dx$[2], por

$$\int_{\mathbb{E}} f(x)dx = \text{Inf} \int_{\mathbb{E}} \psi(x)dx$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones simples $\psi \geq f$.

Si $\mathbb{E} = [a, b]$, escribiremos algunas veces $\int_a^b f$ en vez de $\int_{[a,b]} f$.

El siguiente teorema nos muestra que el conjunto de las funciones R-integrables es un subconjunto de las funciones L-integrables.

TEOREMA 1. 4. 6: Sea f una función acotada definida sobre $[a, b]$. Si f es R-integrable sobre $[a, b]$, entonces es medible y

---

[2] En lo que sigue de este trabajo, algunas veces denotaremos la integral de Lebesgue de f sobre $\mathbb{E}$, por

$$(L)\int_{\mathbb{E}} f.$$

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x).$$

PRUEBA: Ya que cualquier función escalonada es una función simple tenemos que

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \psi(x)dx \leq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x)dx \leq (R)\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

ya que f es R-integrable, las desigualdades son todas igualdades. f es medible de acuerdo a el lema 1. 4. 4.. ■

EJEMPLO 1. 4. 7: En la introducción mencionamos que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es Riemann integrable. Esto es fácil de ver ya que

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a \quad \text{y} \quad (R)\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0.$$

Pero esta función es Lebesgue integrable, dado que f es una función simple medible y como $m(\textit{los racionales}) = 0$, entonces

$$(L)\int_a^b f = (L)\int f\chi_{[a,b]} = 0.$$

Este ejemplo nos muestra que el conjunto de las funciones L-integrables es más amplio en sentido propio, que el de las funciones R-integrables.

LEMA 1. 4. 8: Si f y g son funciones medibles acotadas definidas sobre un conjunto $\mathbb{E}$ medible acotado, entonces

i) $\int_{\mathbb{E}}(af + bg) = a\int_{\mathbb{E}} f + b\int_{\mathbb{E}} g$.

ii) Si $f = g$ c.d., entonces

$$\int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} g.$$

iii) Si $f \leq g$ c.d., entonces

$$\int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} g.$$

iv) si $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, entonces

$$M_1 m\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq M_2 m\mathbb{E}.$$

v) Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son conjuntos medibles, disjuntos y acotados, entonces

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

PRUEBA: Si ψ es una función simple también lo es $\alpha\psi$, e inversamente (si $\alpha \neq 0$). Luego si $\alpha > 0$

$$\int_E \alpha f = \operatorname*{Inf}_{\psi \geq f} \int_E \alpha\psi = \alpha \operatorname*{Inf}_{\psi \geq f} \int_E \psi = \alpha \int_E f.$$

Si $\alpha < 0$

$$\int_E \alpha f = \operatorname*{Inf}_{\varphi \leq f} \int_E \alpha\varphi = \alpha \operatorname*{Sup}_{\varphi \leq f} \int_E \varphi = \alpha \operatorname*{Inf}_{\psi \geq f} \int_E \psi = \alpha \int_E f.$$

Si ψ_1 y ψ_2 son funciones simples tales que $\psi_1 \geq f$ y $\psi_2 \geq g$, entonces $f + g \leq \psi_1 + \psi_2$. Así

$$\int_E f + g \leq \int_E \psi_1 + \psi_2 = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2.$$

ya que el ínfimo de el lado derecho es $\int_E f + \int_E g$ tenemos

$$\int_E f + g \leq \int_E f + \int_E g.$$

Análogamente podemos obtener que

$$\int_E f + g \geq \int_E \psi_1 + \psi_2 = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2,$$

y como el supremo del lado derecho es $\int_E f + \int_E g$ tenemos

$$\int_E f + g \geq \int_E f + \int_E g,$$

de esta manera probamos *i*).

Para probar ahora *ii*) es suficiente mostrar que $\int_E f - g = 0$.

Dado que $f - g = 0$ c.d., se sigue que si ψ es una función simple tal que $\psi \geq f - g$, entonces $\psi > 0$ c.d. de esto se sigue que

$$\int_E \psi \geq 0.$$

De aquí que

$$\int_E f + g \geq 0.$$

Similarmente se tiene

$$\int_E f + g \leq 0$$

y por lo tanto *ii*). La prueba para *ii*) establece *iii*). Por *iii*) y el hecho de que

$$\int_E 1 = mE,$$

se tiene *iv*). Ya que $\mathcal{X}_{A\cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$ y por *i*) se tiene *v*). ■

El teorema 1. 4. 6, el ejemplo 1. 4. 7 y el lema 1. 4. 8, nos muestran que la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann. Mostramos ahora una importante propiedad de la integral de Lebesgue, no válida para la integral de Riemann.

TEOREMA 1. 4. 9 (Teorema de Convergencia Acotada): Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre un conjunto $\mathbb{E}$ medible acotado y supongamos que existe un número real M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo n y x. Si $f(x) = \text{Lim } f_n(x)$ para cada x en $\mathbb{E}$, entonces

$$\int_{\mathbb{E}} f = \text{Lim} \int_{\mathbb{E}} f_n.$$

PRUEBA: Estableceremos primeramente lo siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe un conjunto medible $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}$ con $m\mathbb{A} < \delta$ y un entero N tal que para todo $x \notin \mathbb{A}$ y todo $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sea

$$\mathbb{G}_n = \{x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

y el conjunto

$$\mathbb{E}_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} \mathbb{G}_n = \{x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{ para algun } n \geq N\}.$$

Es claro que $\mathbb{E}_{N+1} \subset \mathbb{E}_N$ y para cada $x \in \mathbb{E}$ existe algún $\mathbb{E}_N$ a el cual x no pertenece ya que $f_n(x) \to f(x)$. Así $\bigcap \mathbb{E}_N = \emptyset$ y de acuerdo a el lema 1. 2. 18, $\text{Lim } m\mathbb{E}_N = 0$. Por lo tanto dado $\delta > 0$ existe N tal que

$$m\mathbb{E}_N < \delta,$$

esto es

$$m\{x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{ para algun } n \geq N\} < \delta.$$

Si escribimos $\mathbb{A}$ para este $\mathbb{E}_N$, entonces $m\mathbb{A} < \delta$ y

$$\mathbb{R} - \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para algun } n \geq N\}.$$

Un caso especial de lo que establecimos es lo siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$ existe N y un conjunto medible $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}$, con $m\mathbb{A} < \frac{\varepsilon}{4M}$ tal que para $n \geq N$ y $x \in (\mathbb{E} - \mathbb{A})$ tenemos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2m\mathbb{E}}.$$

Así

$$\left|\int_{\mathbb{E}} f_n - \int_{\mathbb{E}} f\right| = \left|\int_{\mathbb{E}} f_n - f\right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f_n - f| = \int_{\mathbb{E}-\mathbb{A}} |f_n - f| + \int_{\mathbb{A}} |f_n - f|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Es decir

$$\int_E f_n \to \int_E f. \blacksquare$$

Mostraremos ahora que la integral de Lebesgue, no agota el conjunto de las funciones acotadas. Es decir mostraremos la existencia de una función que no es L-integrable. Por definición una función es L-integrable si es medible. Entonces mostraremos la existencia de una función no medible.

La función característica $\mathcal{X}_{\mathbb{P}}$ de $\mathbb{P}$, es medible, si y solo si $\mathbb{P}$ es medible. Luego si mostramos la existencia de un conjunto no medible $\mathbb{P}$, tendremos que $\mathcal{X}_{\mathbb{P}}$ es no medible. En lo que sigue mostraremos la existencia de un conjunto no medible.

Sean x y y números reales en $[0, 1)$, definimos la **suma módulo 1** de x y y por $x + y$, si $x + y < 1$ y $x + y - 1$ si $x + y \geq 1$. Denotaremos la suma módulo 1 de x y y por $x \mathbin{\mathring{+}} y$. Entonces $\mathring{+}$ es una operación conmutativa y asociativa de valores en $[0, 1)$.

Si $\mathbb{E}$ es un subconjunto de $[0, 1)$, definimos **el trasladado módulo 1** de $\mathbb{E}$ por el conjunto

$$\mathbb{E} \mathbin{\mathring{+}} y = \{Z : Z = x \mathbin{\mathring{+}} y, \text{ para algún } x \in \mathbb{E}\}$$

Mostraremos enseguida que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones módulo 1.

LEMA 1. 4. 10: Sea $\mathbb{E} \subset [0, 1)$ un conjunto medible. Entonces para cada $y \in [0, 1)$ el conjunto $\mathbb{E} \mathbin{\mathring{+}} y$ es medible y $m(\mathbb{E} \mathbin{\mathring{+}} y) = m\mathbb{E}$.

PRUEBA: Sea $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E} \cap [0, 1 - y)$ y $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E} \cap [1 - y, 1)$. Entonces $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ son conjuntos disjuntos medibles cuya unión es $\mathbb{E}$, luego

$$m\mathbb{E} = m\mathbb{E}_1 + m\mathbb{E}_2$$

Ahora $\mathbb{E}_1 \mathbin{\mathring{+}} y = \mathbb{E}_1 + y$, por lo tanto $\mathbb{E}_1 \mathbin{\mathring{+}} y$ es medible y $m(\mathbb{E}_1 \mathbin{\mathring{+}} y) = m\mathbb{E}_1$, ya que m es invariante bajo traslaciones. También $\mathbb{E}_2 \mathbin{\mathring{+}} y = \mathbb{E}_2 + y - 1$, así que $\mathbb{E}_2 \mathbin{\mathring{+}} y$ es medible y $m(\mathbb{E}_2 \mathbin{\mathring{+}} y) = m\mathbb{E}_2$. Pero $\mathbb{E} \mathbin{\mathring{+}} y = (\mathbb{E}_1 \mathbin{\mathring{+}} y) \cup (\mathbb{E}_2 \mathbin{\mathring{+}} y)$ y los conjuntos $\mathbb{E}_1 \mathbin{\mathring{+}} y$ y $\mathbb{E}_2 \mathbin{\mathring{+}} y$ son disjuntos medibles. Luego $\mathbb{E} \mathbin{\mathring{+}} y$ es medible y

$$m(\mathbb{E} \mathbin{\mathring{+}} y) = m(\mathbb{E}_1 \mathbin{\mathring{+}} y) + m(\mathbb{E}_2 \mathbin{\mathring{+}} y) = m\mathbb{E}_1 + m\mathbb{E}_2 = m\mathbb{E}. \blacksquare$$

DEFINICIÓN 1. 4. 11: Para x, y en $[0, 1)$, decimos que x es **equivalente** a y, $x \sim y$, si $x - y$ es un número racional.

Es fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia. Por lo tanto esta relación induce una partición de $[0, 1)$ en conjuntos ajenos dos a dos, llamados clases de equivalencia.

Estamos ahora en condiciones de definir un conjunto no medible.

LEMA 1. 4. 12: Si $\mathbb{P}$ es un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia de las inducidas por la definición 1. 4. 11, entonces $\mathbb{P}$ es no medible.

PRUEBA: $\mathbb{P}$ existe de acuerdo a el axioma de elección. Sea $\langle r_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ una enumeración de los racionales en $[0, 1)$ con $r_0 = 0$ y definimos $\mathbb{P}_n = \mathbb{P} \dotplus r_n$. Entonces $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$. Sea $x \in \mathbb{P}_i \cap \mathbb{P}_j$. Entonces $x = \rho_i + r_i = \rho_j + r_j$, con ρ_i, $\rho_j \in \mathbb{P}$. Pero $\rho_i - \rho_j = r_i - r_j$ es un número racional, luego $\rho_i \sim \rho_j$. Ya que $\mathbb{P}$ contiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia, entonces $\rho_i = \rho_j$. Esto significa que si $i \neq j$, entonces $\mathbb{P}_i \cap \mathbb{P}_j = \emptyset$, es decir $\langle \mathbb{P}_n \rangle$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. Sea ahora $x \in [0, 1)$, luego x pertenece a una clase de equivalencia, por lo tanto x es equivalente a algún y de $\mathbb{P}$. Pero si $x - y = r = r_n$, para algún n, entonces $x \in \mathbb{P}_n$. Luego $[0, 1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n$. Si $\mathbb{P}$ es medible, $\mathbb{P}_n$ es medible y tiene la misma medida de acuerdo a el lema 1. 4. 10.

Pero si este es el caso tenemos

$$m[0, 1) = m(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m\mathbb{P}_n = \sum_{n=0}^{\infty} m\mathbb{P}$$

y el lado derecho es cero o infinito, dependiendo si $m\mathbb{P}$ es cero o positivo.

Pero esto es imposible ya que $m[0, 1) = 1$. Por lo tanto $\mathbb{P}$ es no medible. ■

Así que $\mathcal{X}_{\mathbb{P}}$ es no medible, y por lo tanto no es L-integrable.

EL PROBLEMA DE LA INTEGRAL

Hemos mostrado hasta aquí que la integral de Lebesgue es una extensión de la integral de Riemann; y la existencia de una función que no es L-integrable. Esto nos plantea la siguiente cuestión:

¿Es posible asignar a cada función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, un número, que denotamos por $\int_a^b f$, que satisfaga las siguientes condiciones:

$i)$ $\int_a^b (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$,

$ii)$ $\int_a^b f \geq 0$,si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$,

$iii)$ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, donde $c \in (a, b)$,

$iv)$ $\int_a^b c = c(b - a)$,

$v)$ $\int_a^b f = (R)\int_a^b f$, si f es R-integrable.?

En la sección anterior vimos que la integral de Lebesgue extiende la integral de Riemann a funciones $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{E}$ es medible, y este no es necesariamente un intervalo. Podemos pues, ir mas lejos y plantearnos la cuestión de si es posible la extensión de la integral de Riemann a toda función $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ acotada, y donde la única restricción al conjunto $\mathbb{E}$, es que sea acotado.

Existe un problema con este planteamiento con la propiedad $iv)$, $\int_a^b c = c(b - a)$, es decir la integral de Riemann asigna a la función constante uno, sobre $[a, b]$, la longitud de $[a, b]$. si $\mathbb{E}$ no es un intervalo, ¿como expresamos $\int_{\mathbb{E}} 1$? Lo ideal sería tener que $\int_{\mathbb{E}} 1$ = *longitud de* $\mathbb{E}$, pero ¿como se define la *longitud de* $\mathbb{E}$, para cualquier conjunto acotado $\mathbb{E}$? Damos la vuelta a este problema observando que, $\int_a^b 1 = \int_c^d 1$, si solo si $b - a$ es igual a $d - c$. Una propiedad que tienen en común $[a, b]$ y $[c, d]$, es que son isométricos, es decir existe una isometría de $[a, b]$ en $[c, d]$. Esto nos permite expresar $iv)$ de la siguiente manera: si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{C}$ son isométricos, entonces $\int_{\mathbb{E}} 1 = \int_{\mathbb{C}} 1$. Expresamos entonces, el problema de la extensión de la integral de Riemann a toda función $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ como sigue:

¿Es posible asignar a cada conjunto acotado $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$ y cada función $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ acotada un número que satisfaga las siguientes condiciones:

$i)$ $\int_{\mathbb{E}}(af + bg) = a\int_{\mathbb{E}} f + b\int_{\mathbb{E}} g$,

$ii)$ $\int_{\mathbb{E}} f \geq 0$, si $f \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$,

$iii)$ $\int_{\mathbb{E}\cup\mathbb{C}} f = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{C}} f$, si $\mathbb{E} \cap \mathbb{C} = \emptyset$,

$iv)$ $\int_{\mathbb{E}} \mathcal{X}_{\mathbb{E}} = \int_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$, si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{C}$ son isométricos,

$v)$ $\int_{[a,b]} f = (R)\int_a^b f$, si f es R-integrable.?

A este problema lo llamaremos **el problema de la integral.**

En lo que resta de este trabajo, nos ocupamos del problema de la integral. Probaremos que el problema tiene solución no única. En el siguiente capítulo se presenta uno de los resultados básicos usados en el tratamiento de el problema, el teorema de Hanh-Banach.

2 EL TEOREMA DE HANH-BANACH EN UN ESPACIO VECTORIAL PARCIALMENTE ORDENADO

Este capítulo será dedicado a la prueba de el teorema de Hanh-Banach que será fundamental en el análisis de el problema de la integral. Empezamos con algunas definiciones que nos serán útiles.

2. 1 ORDEN Y LEMA DE ZORN.

DEFINICIÓN 2. 1. 1: Sean f_1 y f_2 funciones con dominios respectivos $\mathcal{D}f_1$ y $\mathcal{D}f_2$. Decimos que f_2 es una **extensión** de f_1, denotada por $f_1 \subset f_2$, si $\mathcal{D}f_1 \subset \mathcal{D}f_2$ y $f_1(x) = f_2(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}f_1$.

DEFINICIÓN 2. 1. 2: Una relación R en un conjunto $\mathbb{A}$ se llama **orden parcial** en $\mathbb{A}$ si:

$i)$ aRa para todo $a \in \mathbb{A}$.

$ii)$ aRb y bRa implican que $a = b$ para todo a, $b \in \mathbb{A}$.

$iii)$ aRb y bRc implican que aRc para todo a, b, $c \in \mathbb{A}$.

Un conjunto no vacío $\mathbb{A}$ con un orden parcial definido en él se llama **parcialmente ordenado** (únicamente en este capítulo usaremos el simbolo "$<$ " para simbolizar un orden parcial).

EJEMPLO 2. 1. 3: Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de todas las funciones f con dominio $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{X}$ e imagen $\mathcal{I}_f \subset \mathbb{Y}$. Si definimos en $\mathbb{A}$ la relación: f_2 es una extensión de f_1, para todo f_1, $f_2 \in \mathbb{A}$, entonces $\mathbb{A}$ es parcialmente ordenado.

Probaremos que la extensión define un orden parcial en $\mathbb{A}$

$i)$ Para todo $f \in \mathbb{A}$, $f \subset f$. (Claro).

$ii)$ Si $f_1 \subset f_2$ y $f_2 \subset f_1$, entonces $\mathcal{D}f_1 \subset \mathcal{D}f_2$ y $\mathcal{D}f_2 \subset \mathcal{D}f_1$ esto es $\mathcal{D}f_1 = \mathcal{D}f_2$, y $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}f_1 = \mathcal{D}f_2$, esto es $f_1 = f_2$.

$iii)$ Si $f_1 \subset f_2$ y $f_2 \subset f_3$, entonces $\mathcal{D}f_1 \subset \mathcal{D}f_2$ y $f_1(x) = f_2(x)$ si $x \in \mathcal{D}f_1$ y además $\mathcal{D}f_2 \subset \mathcal{D}f_3$ y $f_2(x) = f_3(x)$ si $x \in \mathcal{D}f_2$. Así que $\mathcal{D}f_1 \subset \mathcal{D}f_3$ y $f_1(x) = f_3(x)$ si $x \in \mathcal{D}f_1$.

Esto prueba que $\mathbb{A}$ es parcialmente ordenado por extensión.

DEFINICIÓN 2.1.4: Dos elementos a y b de un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{A}$ son **comparables** si aRb o si bRa.

DEFINICIÓN 2.1.5: Se dice que un conjunto parcialmente ordenado es **ordenado** si cada pareja de elementos del conjunto son comparables entre sí.

DEFINICIÓN 2.1.6: Si $\mathbb{B}$ es un subconjunto de un conjunto, parcialmente ordenado $\mathbb{A}$, entonces un elemento c de $\mathbb{A}$ se llama **cota superior** de $\mathbb{B}$ si $b < c$ para todo $b \in \mathbb{B}$.

DEFINICIÓN 2.1.7: Se dice que un elemento c de un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{A}$ es la **mínima cota superior** de un subconjunto $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ si:

i) c es una cota superior de $\mathbb{B}$

ii) Si d es una cota superior de $\mathbb{B}$, entonces $c < d$.

DEFINICIÓN 2.1.8: Se dice que un elemento a_o del conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{A}$ es un **elemento maximal** de $\mathbb{A}$ si las condiciones $a \in \mathbb{A}$ y $a_o < a$ implican que $a = a_o$.

LEMA DE ZORN: Si $\mathbb{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada subconjunto ordenado posee una cota superior, entonces $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal.

2.2 TEOREMA DE HANH-BANACH

En esta sección estudiaremos una versión del teorema de Hanh-Banach para espacios vectoriales parcialmente ordenados.

DEFINICIÓN 2.2.1: Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial real parcialmente ordenado y consideremos la función $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ con las propiedades:

i) Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1f(x_1) + c_2f(x_2).$$

ii) Si $x \in \mathbb{E}$ y $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

A una función con estas propidades la llamaremos **funcional lineal no negativa**

LEMA 2.2.2: Sea $\mathbb{X}$ un subespacio propio del espacio vectorial parcialmente ordenado $\mathbb{E}$ y sea $x_0 \in \mathbb{E} - \mathbb{X}$ tal que existan $y_1, y_2 \in \mathbb{X}$ tales que $y_1 > x_0 > y_2$. Consideremos el subespacio generado por $\mathbb{X}$ y $\{x_0\}$; esto es, consideramos

$$\mathbb{N} = \left[\mathbb{X} \cup \{x_0\}\right],$$

y supongamos que f es una funcional lineal y no negativa definida en $\mathbb{E}$. Entonces existe una funcional F lineal y no negativa definida en $\mathbb{N}$ tal que

$$F(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{E}$$

PRUEBA: Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathbb{A} = \{f(x) : x \in \mathbb{X} \text{ y } x > x_0\}.$$

$\mathbb{A}$ es acotado inferiormente por $f(y_2)$, y es no vacío ya que $f(y_1) \in \mathbb{A}$. Luego $\mathbb{A}$ tiene un ínfimo, sea $\alpha = \operatorname{Inf}\mathbb{A}$.

Dado que $x_0 \notin \mathbb{X}$ podemos escribir cualquier $x \in \mathbb{N}$ como

$$x = y + cx_0, \text{ donde } c \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{X} \tag{1}$$

y esta representación para x es única. Esto nos permite definir la función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por

$$F(y + cx_0) = f(y) + c\alpha.$$

Mostramos ahora que F es una funcional lineal. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $x_3 = ax_1 + bx_2$. Por (1) se tiene que

$$x_1 = y_1 + c_1x_0, \quad x_2 = y_2 + c_2x_0, \quad x_3 = y_3 + c_3x_0,$$

donde

$$y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{X} \quad \text{y} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Podemos ver que

$$y_3 = ay_1 + by_2 \qquad \text{y} \qquad c_3 = ac_1 + bc_2.$$

En efecto, dado que

$$\begin{aligned} x_3 = ax_1 + bx_2 &= a(y_1 + c_1x_0) + b(y_2 + c_2x_0) \\ &= (ay_1 + by_2) + (ac_1 + bc_2)x_0 = y_3 + c_3x_0, \end{aligned}$$

se tiene el resultado, ya que la representación para x_3 en la forma (1) es única.

Así

$$\begin{aligned} F(ax_1 + bx_2) &= F(x_3) = F(y_3 + c_3x_0) = f(y_3) + c_3\alpha \\ &= f(ay_1 + by_2) + (ac_1 + bc_2)\alpha = af(y_1) + bf(y_2) + ac_1\alpha + bc_2\alpha \end{aligned}$$

$) = \alpha[f(y_1) + c_1\alpha] + b[f(y_2) + c_2\alpha) = aF(x_1) + bF(x_2).$

Es decir F es lineal. Resta probar que F es no negativa, esto es

$$F(x) \geq 0, \text{ para todo } x \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{N}.$$

Para mostrar lo anterior escojamos $x \in \mathbb{N}$ arbitrario, se tiene $x = y + cx_0$. Existen tres posibilidades para c:

$i)$ $c = 0$. En este caso $F(y + cx_0) = f(y) \geq 0$, ya que f es no negativa

$ii)$ $c > 0$. En este caso $x_0 \geq -\frac{1}{c}\, y$, luego para todo $x' \in \mathbb{X}$, tal que $x' > x_0$,

$$x' > -\frac{1}{c}\, y \text{ , es decir } x' + \frac{1}{c}\, y > 0,$$

así

$$f\left[x' + \frac{1}{c}\, y\right] = f(x') + \frac{1}{c}\, f(y) \geq 0,$$

y por la definición de α tenemos que

$$\alpha + \frac{1}{c}\, f(y) \geq 0.$$

Esto es

$$f(y) + c\alpha = F(x) \geq 0.$$

$iii)$ $c < 0$. En este último caso tenemos que $-c > 0$, luego

$$-\frac{1}{c}\, y - x_0 \geq 0, \text{ es decir } -\frac{1}{c}\, y \geq x_0.$$

Ya que $x_0 \notin \mathbb{X}$, $-\frac{1}{c}\, y > x_0$ y por la definición de α

$$f(-\frac{1}{c}\, y) = -\frac{1}{c}\, f(y) \geq \alpha.$$

Así que $-\frac{1}{c}\, f(y) - \alpha \geq 0$. Por lo tanto

$$f(y) + c\alpha = F(x) \geq 0.$$

$i)$, $ii)$ y $iii)$ prueban que F es no negativa. esto completa la prueba. ■

TEOREMA 2. 2. 3 (TEOREMA DE HANH-BANACH): Sea $\mathbb{X}$ un subespacio vectorial del espacio vectorial parcialmente ordenado $\mathbb{E}$, tal que para todo $x_0 \in \mathbb{E} - \mathbb{X}$, existe y_1, $y_2 \in \mathbb{X}$, tales que $y_1 > x_0 > y_2$. Si existe una funcional lineal no negativa f definida en $\mathbb{X}$, entonces existe una funcional lineal no negativa F, definida en $\mathbb{E}$ tal que

$$F(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

PRUEBA: Sea $\mathbb{S} = \langle\hat{f}\rangle$ el conjunto formado por todas las funcionales lineales y no negativas que extienden a f. Es claro que $\mathbb{S}$ es no vacío, ya que $f \in \mathbb{S}$, y de acuerdo a el ejemplo 2. 1. 3, $\mathbb{S}$ es parcialmente ordenado por extensión.

Sea $\mathbb{T} = \{\hat{f}_\alpha\}$ un subconjunto ordenado cualquiera de $\mathbb{S}$. Mostraremos que $\mathbb{T}$ tiene una cota superior en $\mathbb{S}$. Para ver esto consideramos la función $\hat{f}$ con dominio $\bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$. Si $x \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$, entonces para algún α, $x \in \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$. Luego podemos definir

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_\alpha(x), \text{ donde } x \in \mathcal{D}\hat{f}_\alpha. \qquad (1)$$

Mostraremos ahora que $\hat{f}$ está bien definida. Supongamos que

$$x \in \mathcal{D}\hat{f}_\alpha \text{ y } x \in \mathcal{D}\hat{f}_\beta,$$

para algún α y β. Por (1)

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_\alpha(x) \text{ y } \hat{f}(x) = \hat{f}_\beta(x).$$

Como $\mathbb{T}$ es ordenado

$$\mathcal{D}\hat{f}_\alpha \subset \mathcal{D}\hat{f}_\beta \text{ ó } \mathcal{D}\hat{f}_\beta \subset \mathcal{D}\hat{f}_\alpha,$$

y en cada caso tenemos que

$$\hat{f}_\alpha(x) = \hat{f}_\beta(x).$$

Esto prueba que $\hat{f}$ está bien definida.

Mostramos ahora que $\bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$ es un subespacio de $\mathbb{E}$. Si $x \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$, entonces para algún α, $x \in \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$. Dado que $\mathcal{D}\hat{f}_\alpha$ es un subespacio de $\mathbb{E}$, entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$, $cx \in \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$, por lo tanto

$$cx \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha. \qquad (2)$$

Sean ahora $x, y \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$, esto implica que existen α_1 y α_2 tal que

$$x \in \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_1} \text{ y } y \in \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2}.$$

Como $\mathbb{T}$ es ordenado se tiene que

$$\mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_1} \subset \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2} \text{ ó } \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2} \subset \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_1}.$$

Si $\mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_1} \subset \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2}$, entonces $x, y \in \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2}$. Así que $x + y \in \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2}$. Por lo tanto

$$x + y \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha. \qquad (3)$$

El caso $\mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_2} \subset \mathcal{D}\hat{f}_{\alpha_1}$ es análogo. (2) y (3) muestran que $\bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$

es un subespacio de $\mathbb{E}$. Vemos ahora que $\hat{f}$ es una funcional lineal. Sean x_1, $x_2 \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$ y a, $b \in \mathbb{R}$, entonces para algún α, $ax_1 + bx_2 \in \mathcal{D}_\alpha\hat{f}_\alpha$. Luego

$$\hat{f}(ax_1 + bx_2) = \hat{f}_\alpha(ax_1 + bx_2) = a\hat{f}_\alpha(x_1) + b\hat{f}_\alpha(x_2)$$
$$= a\hat{f}(x_1) + b\hat{f}(x_2).$$

Es decir $\hat{f}$ es una funcional lineal. Por último si $x \in \bigcup_\alpha \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$ y $x \geq 0$, entonces para algún α, $x \in \mathcal{D}\hat{f}_\alpha$ luego

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_\alpha(x) \geq 0,$$

Esto es $\hat{f}$ es no negativa. Hemos mostrado que $\hat{f}$ es una funcional lineal no negativa y es claro que para todo $\hat{f}_\alpha \in \mathbb{T}$, se tiene que $\hat{f}_\alpha \subset \hat{f}$.

Es decir $\hat{f}$ es una cota superior para $\mathbb{T}$. Por el Lema de Zorn, $\mathbb{S}$ tiene un elemento maximal, digamos F. Ya que $F \in \mathbb{S}$, F es una funcional lineal no negativa que extiende a f. Probaremos que $\mathcal{D}_F = \mathbb{E}$.

Supongamos que no es así, esto es que existe $x_0 \in \mathbb{E} - \mathcal{D}_F$. Por hipótesis existen y_1, $y_2 \in \mathbb{X}$ tal que $y_1 > x_0 > y_2$. Aplicando el lema 2. 2. 2, existe una funcional lineal F', que extiende a F definida en el subespacio $\left[\mathcal{D}F \cup \langle x_0 \rangle\right]$. Así que $F' \in \mathbb{S}$, lo cual contradice el hecho de que F es maximal de $\mathbb{S}$. Por tanto $\mathcal{D}_F = \mathbb{E}$, y con esto probamos el teorema. ∎

3 EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS HIPERFUNCIONES

La intención de este capítulo es mostrar que el conjunto de todas las funciones acotadas de período 1 se pueden dividir en clases de equivalencia, de tal manera que dichas clases forman un espacio vectorial parcialmente ordenado. En este capítulo todas las funciones consideradas serán acotadas de período 1 definidas en todo $\mathbb{R}$ es decir funciones f tal que $f(x) = f(x+1)$ para todo x.

3.1 FUNCIONES EQUIVALENTES A CERO.

DEFINICIÓN 3.1.1: Diremos que una función f es **equivalente a cero**, $f \sim 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión finita de números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tal que

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon \text{ para todo } x.$$

EJEMPLO 3.1.2: Si f es la función constante cero, es claro que $f \sim 0$.

EJEMPLO 3.1.3: Sea f definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \in [0,1) \\ 0 & \text{si } x \in [0,1) - \{x_0\} \end{cases}$$

entonces $f \sim 0$.

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ una sucesión de números reales tales que $\alpha_i \in (0, 1)$. Luego para cualquier x existe a lo mas un α_j, tal que $x + \alpha_j = x_0 + m$, donde m es un entero. En efecto supongamos que existe otro α_i tal que $x + \alpha_i = x_0 + m'$, entonces $x = x_0 + m - \alpha_j$ y $x = x_0 + m' - \alpha_i$, esto es $m - \alpha_j = m' - \alpha_i$ o sea $m - m' = \alpha_j - \alpha_i$, pero esto es una contradicción.

Ahora dado $\varepsilon > 0$, existe n, natural, tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, luego para todo x

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i) < \varepsilon.$$

Esto es $f \sim 0$.

EJEMPLO 3. 1. 4: Sea f definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un racional de } [0, 1) \\ 0 & \text{si } x \text{ es un irracional de } [0, 1) \end{cases}$$

entonces $f \sim 0$.

Si $\alpha_i = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Entonces para cualquier x, existe a lo más un α_i tal que $x + \alpha_i$ es racional. En efecto, sean α_i, α_j dos números tales que $x + \alpha_i = r_1$, $x + \alpha_j = r_2$, donde r_1, r_2 son racionales. Entonces $r_1 - \alpha_i = r_2 - \alpha_j$, es decir que $r_1 - r_2 = \alpha_j - \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(j - i)$, pero esto es una contradicción a menos que $j = i$.

Ahora dado $\varepsilon > 0$, existe n, tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, luego para todo x

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} f(x + \frac{i}{\sqrt{2}}) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \frac{i}{\sqrt{2}}) < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

es decir $f \sim 0$.

EJEMPLO 3. 1. 5: Si f es tal que $f(x) \geq c > 0$ entonces f no es equivalente a cero.

Para cualquier sucesión finita α_1, α_2, $\ldots$, α_n de números reales se tiene

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) \right| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c = c,$$

es decir f no es equivalente a cero.

TEOREMA 3. 1. 6: Si $f \sim 0$ y $g \sim 0$, entonces

$i)$ $f + g \sim 0$.

$ii)$ $cf \sim 0$, $c \in \mathbb{R}$.

$iii)$ $f(x + c) \sim 0$, $c \in \mathbb{R}$.

PRUEBA: Dado $\varepsilon > 0$, existen 2 sucesiones finitas de números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, tales que para todo x

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r}\left|\sum_{j=1}^{r} f(x+\beta_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i+\beta_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ j = 1, 2, \ldots, r,$$

y

$$\frac{1}{r}\left|\sum_{j=1}^{r} f(x+\alpha_i+\beta_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

Sumando las desigualdades sobre j e i respectivamente se tiene

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i+\beta_j)\right| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i+\beta_j)\right| < \frac{r\varepsilon}{2},$$

y

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r}\left|\sum_{j=1}^{r} g(x+\alpha_i+\beta_j)\right| = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{r} g(x+\alpha_i+\beta_j)\right| < \frac{n\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{1}{nr}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\Big[f(x+\alpha_i+\beta_j) + g(x+\alpha_i+\beta_j)\Big]\right| =$$

$$\frac{1}{nr}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} f(x+\alpha_i+\beta_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} g(x+\alpha_i+\beta_j)\right| \leq$$

$$\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{r} f(x+\alpha_i+\beta_j)\right| + \frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{r} g(x+\alpha_i+\beta_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Se ha probado que dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión finita de números reales $\alpha_i + \beta_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, r$ tal que

$$\frac{1}{nr}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(f+g)(x+\alpha_j+\beta_j)\right| < \varepsilon,$$

entonces por definición $f + g \sim 0$. Esto prueba i).

Si c es una constante no cero , entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Así que

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} cf(x+\alpha_i)\right| = \frac{|c|}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon,$$

por tanto $cf \sim 0$. Si $c = 0$, es claro que $cf \sim 0$. Esto prueba *ii*).

Por último, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x.$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x+c+\alpha_i)\right| < \varepsilon$$

es decir, $f(x+c) \sim 0$. Esto prueba *iii*). ■

COROLARIO 3. 1. 7: Si f es cero, excepto en un número finito de puntos, entonces $f \sim 0$.

Esto es una consecuencia de *i*) y *ii*) y del ejemplo 3. 1. 3.

3. 2. FUNCIONES EQUIVALENTES.

DEFINICIÓN 3. 2. 1: Decimos que f es **equivalente** a g, $f \sim g$, si $f - g \sim 0$.

Probaremos en el siguiente lema que la relación "$\sim$" es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las funciones acotadas de período uno.

LEMA 3. 2. 2: Para todo f, g y h

i) $f \sim f$.

ii) Si $f \sim g$ entonces $g \sim f$.

iii) Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

PRUEBA: El inciso *i*) es claro. Ahora si $f \sim g$, entonces $f - g \sim 0$. Pero por teorema 3. 1. 6 (*ii*), $g - f \sim 0$, es decir, $g \sim f$. Esto prueba *ii*). Por último, tenemos que $f - g \sim 0$ y

$g - h \sim 0$, entonces por el teorema 3. 1. 6(*i*), $f - h \sim 0$, esto es $f \sim h$. Esto prueba *iii*). ■

LEMA 3. 2. 3: Para cualquier constante real c,

$$f(x + c) \sim f(x).$$

PRUEBA: Debemos probar que $f(x + c) - f(x) \sim 0$. Sea $\alpha_i = (i - 1)c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, luego

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[f(x + c + \alpha_i) - f(x + \alpha_i)\right]\right| =$$

$$\frac{1}{n}\left|\left[f(x + c) - f(x)\right] + \left[f(x + 2c) - f(x + c)\right] + \ldots\right.$$

$$\left. + \left[f(x + nc) - f(x + (n - 1)c)\right]\right| = \frac{1}{n}\left| f(x + nc) - f(x)\right|.$$

Ya que f es acotada existe M tal que $|f(x)| \leq M$ para toda x. Así que

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[f(x + c + \alpha_i) - f(x + \alpha_i)\right]\right| \leq$$

$$\frac{1}{n}\left|f(x + nc)\right| + \frac{1}{n}\left|f(x)\right| \leq \frac{2M}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que $\frac{2M}{n} < \varepsilon$. Esto prueba que $f(x + c) \sim f(x)$. ■

3.3 FUNCIONES SUPERIORES A CERO E INFERIORES A CERO.

DEFINICIÓN 3. 3. 1: Decimos que f es superior a cero, $f \succ 0$, si existe un número $c > 0$ y una sucesión finita de números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que para todo x

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) \geq c.$$

Es claro que si f es tal que $f(x) \geq c > 0$, entonces $f \succ 0$.

LEMA 3. 3. 2: Si $f > 0$ y $g > 0$ entonces

i) $f + g > 0$.

ii) $f(x + c) > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

La prueba de *i)* y *ii)* es análoga a la prueba dada en el teorema 3. 1. 6 incisos *i)* y *ii)*.

DEFINICIÓN 3. 3. 3: Decimos que f es inferior a cero, $f < 0$, si $-f > 0$.

Es claro que si $f < 0$ y $g < 0$, entonces $f + g < 0$. También es fácil ver que $f(x + c) < 0$.

LEMA 3. 3. 4: Si f es tal que $f(x) \geq 0$ para todo x, entonces no puede ocurrir que $f < 0$.

PRUEBA: Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ una sucesión cualquiera finita de números reales, entonces para todo x

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) \geq 0,$$

por tanto

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1) f(x + \alpha_i) \leq 0, \text{ para todo } x.$$

Esto significa que no puede ocurrir que $-f > 0$, y por tanto no es cierto que $f < 0$. ■

Si f es tal que $f \sim 0$, ¿Puede ocurrir que $f > 0$? ¿O que $f < 0$?. La respuesta a esta y otras preguntas relacionadas está dada en el siguiente teorema.

TEOREMA 3. 3. 5: Las relaciones, $f > 0$, $f \sim 0$, $f < 0$, son excluyentes dos a dos.

PRUEBA: Si $f > 0$, entonces existe un número $c > 0$ y una sucesión finita de números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) \geq c. \tag{1}$$

Si $f \sim 0$, entonces $f(x + \alpha_i) \sim 0$, y de acuerdo al teorema 3. 1. 6(i)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) \sim 0.$$

Pero de acuerdo al ejemplo 3. 1. 5 esto es una contradicción.

Supongamos ahora que $f > 0$ y $f < 0$. En este caso, de acuerdo a el teorema 3. 3. 2(ii)

$$f(x + \alpha_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Y por el teorema 3. 3. 2(i) se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) < 0. \qquad [2]$$

Pero por el teorema 3. 3. 4, 1) y 2) son incompatibles.

Consideraremos por último el caso $f \sim 0$ y $f < 0$. Si $f < 0$, entonces $-f > 0$ y si $f \sim 0$, entonces $-f \sim 0$. Pero este caso $-f > 0$ y $-f \sim 0$ y ya se probó que no ocurren simultáneamente. ■

LEMA 3. 3. 6: Si $f > 0$ y $g \sim 0$, entonces $f + g > 0$.

PRUEBA: Por hipótesis, existe un número $c > 0$ y dos sucesiones finitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ tales que para todo x

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i) \geq c \quad \text{y} \quad -\frac{c}{2} < \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} g(x + \beta_j) < \frac{c}{2}.$$

por tanto

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i + \beta_j) \geq c, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

y

$$\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} g(x + \alpha_i + \beta_j) \geq -\frac{c}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sumando las desigualdades se tiene

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i + \beta_j) \geq cr \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} g(x + \alpha_i + \beta_j) \geq -\frac{cn}{2}.$$

Así que

$$\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\left[f(x+\alpha_i+\beta_j)+g(x+\alpha_i+\beta_j)\right] =$$

$$\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}f(x+\alpha_i+\beta_j) + \frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}g(x+\alpha_i+\beta_j) \geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}.$$

Con esto probamos que $f + g \succ 0$. ■

DEFINICIÓN 3. 3. 7: Decimos que f es **superior** a g, $f \succ g$, si $f - g \succ 0$. Análogamente f es **inferior** a g si $f - g \prec 0$.

TEOREMA 3. 3. 8: Si $f \succ g$ y $g \succ h$, entonces $f \succ h$.

PRUEBA: Por hipótesis $f - g \succ 0$ y $g - h \succ 0$ y por teorema 3. 1. 6(i), $(f - g) + (g - h) = f - h \succ 0$, esto es $f \succ g$. ■

El teorema análogo también es cierto para la relación $\prec$.

LEMA 3. 3. 9: Si $f \succ g$, $f_1 \sim f$, $g \sim g_1$, entonces $f_1 \succ g_1$.

PRUEBA: Por definición tenemos que $f - g \succ 0$, $f_1 - f \sim 0$ y $g - g_1 \succ 0$ y de acuerdo a el lema 3. 3. 6, $f_1 - g_1 \succ 0$. ■

Los ejemplos 3. 1. 2, 3. 1. 3, 3. 1. 4 nos muestran tres funciones equivalentes a cero. Con alguno de los teoremas que hemos probado podemos obtener algunos ejemplos más. El siguiente teorema nos da una gran variedad de funciones equivalentes a cero.

TEOREMA 3. 3. 10: Toda función f R-integrable satisface la relación

$$f \sim c, \text{ donde } c = (R)\int_0^1 f.$$

PRUEBA: Sea $\mathbb{P}_n = \langle 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\rangle$ una partición de $[0, 1]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(x + \frac{i}{n}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i, \text{ para todo } x$$

donde

$$m_i = \operatorname*{Inf}_{\frac{i-1}{n}\le t\le \frac{i}{n}} f(t) \quad y \quad M_i = \operatorname*{Sup}_{\frac{i-1}{n}\le t\le \frac{i}{n}} f(t).$$

Esto es claro ya que cada $f(x + \frac{i}{n})$ es un elemento de $\{f(t) : \frac{j-1}{n} \le t \le \frac{j}{n}\}$ para algún j.

Por lo tanto

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{1}{n} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x + \frac{i}{n}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{1}{n} = S, \text{ para todo } x. \quad (1)$$

Como f es R-integrable, se tiene que

$$s \le \int_0^1 f \le S \quad (2)$$

y dado $\varepsilon > 0$ existe, existe una partición $\mathbb{P}_N$ de $[0,1]$, tal que,

$$S - s < \varepsilon. \quad (3)$$

Pero entonces por 1), 2) y 3)

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x + \frac{i}{n}) - \int_0^1 f \right| < \varepsilon, \text{ si } n > N.$$

Esto prueba que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x + \frac{i}{n})$ converge uniformemente a $\int_0^1 f$.

Por lo tanto

$$\left| \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x + \frac{i}{n}) - c\right] \right| < \varepsilon, \text{ si } n > N$$

Esto demuestra que $f - c \sim 0$, de donde $f \sim c$. ■

3. 4 El espacio vectorial de las hiperfunciones.

En esta sección definimos el concepto de hiperfunción y probaremos posteriormente que el conjunto de todas las hiperfunciones forma un espacio vectorial parcialmente ordenado.

Denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones acotadas de período uno definidas en todo $\mathbb{R}$.

En la sección 3. 2 se mostró que la relación $\sim$, definida para f, g en $\mathcal{F}$ por $f \sim g$ si $f - g \sim 0$, es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{F}$. Sabemos que esta relación induce una partición de $\mathcal{F}$ en conjuntos ajenos llamados clases de equivalencia.

DEFINICIÓN 3. 4. 1: Llamaremos **hiperfunciones** las clases de equivalencia de $\mathscr{F}$ y denotaremos por $[f]$ a la clase de equivalencia a la que pertenece f.

Denotaremos por $\mathscr{H}$ el conjunto de todas las hiperfunciones.

Enseguida se definen las operaciones que darán estructura de espacios vectorial a $\mathscr{H}$.

DEFINICIÓN 3. 4. 2: Si $[f] \in \mathscr{H}$ y c es una constante real, definimos

$$c[f] = [cf].$$

Veamos que este producto está bien definido. Si $f_1 \in [f]$, entonces $f_1 - f \sim 0$, y por teorema 3. 1. 6(*ii*), $cf - cf_1 \sim 0$. Así que $cf \sim cf_1$, esto es $cf_1 \in [cf]$.

DEFINICIÓN 3. 4. 3: Si $[f]$ y $[g]$ son elementos de $\mathscr{H}$, definimos

$$[f] + [g] = [f + g].$$

Esta operación está bien definida, ya que si $f_1 \in [f]$ y $g_1 \in [g]$ entonces $f_1 - f \sim 0$ y $g_1 - g \sim 0$. Y por teorema 3. 1. 6(*i*), $(f_1 - f) + (g_1 - g) \sim 0$. Así que $(f_1 + g_1) - (f + g) \sim 0$, por lo tanto tenemos que $(f_1 + g_1) \in [f + g]$.

TEOREMA 3. 4. 4: $\mathscr{H}$ forma un espacio vectorial real con las operaciones dadas en las definiciones 3. 4. 2 y 3. 4. 3.

Obtenemos la prueba de este resultado, aplicando las definiciones 3. 4. 2 y 3. 4. 3 y usando el hecho de que $\mathscr{F}$ es un espacio vectorial.

Nuestro siguiente paso es definir un orden parcial en $\mathscr{H}$.

DEFINICIÓN 3. 4. 5: Para $[f]$, $[g] \in \mathscr{H}$, se define la relación

$$[f] > [g]$$

si $f \succ g$.

Verifiquemos que la relación es bién definida. Si $f_1 \in [f]$ y $g_1 \in [g]$ entonces $f_1 \sim f$ y $g_1 \sim g$. Y de acuerdo al lema 3. 3. 9, $f_1 > g_1$.

Decimos también que $[f] \geq [g]$ si $f > g$ o $f = g$.

TEOREMA 3. 4. 6: El conjunto $\mathcal{H}$ es parcialmente ordenado por la relación, $[f] \geq [g]$.

PRUEBA:

$i)$ Es claro que para todo $[f] \in \mathcal{H}$, $[f] \geq [f]$.

$ii)$ Supongamos que $[f] \geq [g]$ y $[g] \geq [f]$, donde $[f]$, $[g] \in \mathcal{H}$. Entonces $f > g$ ó $f = g$ y $g > f$ ó $f = g$. Dado que las relaciones, $f > g$ y $g > f$ son excluyentes se tiene que $f = g$. Es decir $[f] = [g]$.

$iii)$ Si $[f] \geq [g]$ y $[g] \geq [h]$, donde $[f]$, $[g]$, $[h] \in \mathcal{H}$. Entonces $f > g$ ó $f = g$ y $g > h$ ó $g = h$.

Si $f > g$ y $g > h$, por el teorema 3. 3. 8 se tiene que $f > h$. Por lo tanto $[f] \geq [g]$.

Para los casos en que $f = g$ ó $g = h$, es claro que $[f] \geq [g]$.

$i)$, $ii)$ y $iii)$ muestran el teorema. ■

Hemos mostrado que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado. Probaremos ahora que el teorema de Hanh-Banach se puede aplicar en $\mathcal{H}$, pidiendo solamente que el subespacio T de $\mathcal{H}$ contenga la hiperfunción $[1]$. Veamos antes un lema auxiliar.

LEMA 3. 4. 7: Existe, para toda hiperfunción $[f] \in \mathcal{H}$ dos hiperfunciones $[c_1]$ y $[c_2]$ tales que

$$[c_1] > [f] > [c_2].$$

Entendemos que $[c_1]$ y $[c_2]$ son las hiperfunciones que contienen las funciones constantes c_1 y c_2 respectivamente.

PRUEBA: Dado $\varepsilon > 0$, existe un número real c_1, tal que

$$f(x) < c_1 - \varepsilon, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

c_1 existe ya que f es acotada. Así que $c_1 - f(x) > \varepsilon > 0$ para todo

$\mathscr{H}$. Y de acuerdo a la definición 3. 3. 1 tenemos que $c_1 - f > 0$. Es decir, $c_1 > f$ y por lo tanto $[c_1] > [f]$. La prueba para el caso $[f] > [c_2]$ es análoga. ■

TEOREMA 3. 4. 8 (Teorema de Hanh-Banach en $\mathscr{H}$): Sea T un subespacio de $\mathscr{H}$, que contiene la hiperfunción $[1]$. Si existe una funcional lineal no negativa A, definida en T, entonces existe una funcional lineal no negativa $\bar{A}$ definida en $\mathscr{H}$ tal que

$$\bar{A}([f]) = A([f]), \text{ para todo } [f] \in T.$$

PRUEBA: Para aplicar el teorema 2. 2. 3 tenemos que ver que para todo $[f] \in \mathscr{H} - T$ existen $[f_1]$ y $[f_2]$ en T tales que $[f_1] > [f] > [f_2]$. Sea pues $[f] \in \mathscr{H} - T$, luego existen $[c_1]$, $[c_2]$ tal que $[c_1] > [f] > [c_2]$ de acuerdo al lema 3. 4. 7.

Como $[1] \in T$ entonces $c[1] = [c] \in T$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Luego se cumplen las hipótesis del teorema 2. 2. 3. ■

Definimos ahora dos subespacios que serán de gran importancia en el capítulo siguiente.

DEFINICIÓN 3. 4. 9: Definimos el subconjunto $\Omega(R)$ de $\mathscr{H}$ por

$$\Omega(R) = \{[f] \in \mathscr{H} : f \text{ es R-integrable en } [0, 1]\}.$$

Es claro que $\Omega(R)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{H}$.

Análogamente definimos el subconjunto $\Omega(\mathbb{L})$ de $\mathscr{H}$ por

$$\Omega(\mathbb{L}) = \{[f] \in \mathscr{H} : f \text{ es L-integrable en } [0, 1]\}.$$

También en este caso tenemos que $\Omega(\mathbb{L})$ es un subespacio de $\mathscr{H}$.

4 LA INTEGRAL DE BANACH Y EL PROBLEMA DE LA INTEGRAL

En este capítulo nos ocupamos del problema de la integral. Empezamos definiendo el concepto de integral de Banach y expresamos el problema en términos de esta integral.

4.1 LA INTEGRAL DE BANACH

DEFINICIÓN 4.1.1: A una funcional $\int : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

$i)$ $\int(af + bg) = a\int f + b\int g$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}$.

$ii)$ $\int f(x) \geq 0$, si $f(x) \geq 0$.

$iii)$ $\int c = c$, $\quad c \in \mathbb{R}$.

$iv)$ $\int f(\pm x + \alpha) = \int f(x)$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

la llamaremos **integral de Banach.**

En los teoremas que siguen probaremos la existencia de integrales de Banach, dado que la definición no nos permite garantizar su existencia.

Probaremos antes que la integral de Banach coincide con la integral de Riemann para las funciones R-integrables.

LEMA 4.1.2: Si $\int$ es una integral de Banach, entonces

$$\int f = (R) \int_0^1 f \text{ , si } f \text{ es R-integrable.}$$

PRUEBA: Probaremos primero que si $f \sim g$ entonces $\int f = \int g$. Pero esto es equivalente a probar que si $f \sim 0$ entonces $\int f = 0$.

Si $g \sim 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que para todo x es válida la desigualdad

$$-\varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x + \alpha_i) < \varepsilon. \tag{1}$$

Dado que $\int$ es una integral de Banach se tiene

$$\int\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x+\alpha_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int g(x+\alpha_i) = \int g(x)$$

y por 1) tenemos

$$-\varepsilon < \int g < \varepsilon.$$

Es decir $\int g = 0$

Ahora si f es R-integrable por el teorema 3. 3. 10

$$f \sim c = (R)\int_0^1 f.$$

Es decir

$$\int f = \int c = (R)\int_0^1 f \;. \blacksquare$$

El siguiente teorema nos muestra la existencia de una integral de Banach en $\mathcal{F}$ y que además coincide con la integral de Lebesgue.

TEOREMA 4. 1. 3: Existe una integral de Banach definida sobre $\mathcal{F}$ tal que si f es L-integrable en $[0, 1]$, entonces:

$$\int f = (L)\int_0^1 f.$$

PRUEBA: Consideremos el espacio vectorial $\Omega(\mathbb{L})$. Definimos la operación $\Theta : \Omega(\mathbb{L}) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\Theta([f]) = (L)\int_0^1 f\, dx, \quad [f] \in \Omega(\mathbb{L}).$$

Probaremos que Θ es una operación bien definida. Esto es si $[f] \in \Omega(\mathbb{L})$ y $g \in [f]$, g L-integrable en $[0, 1]$, entonces debemos tener que

$$(L)\int_0^1 f = (L)\int_0^1 g.$$

Esto es equivalente a probar que si $[f] \in \Omega(\mathbb{L})$ y $f \sim 0$, entonces

$$(L)\int_0^1 f = 0.$$

Supongamos entonces que $f \sim 0$. Luego dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon, \text{ por tanto, } (L)\int_0^1\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon.$$

Y entonces

$$\left|(L)\int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon.$$

Ahora

$$(L)\int_0^1 f(x) = (L)\int_0^1 f(x+\alpha_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L)\int_0^1 f(x+\alpha_i),$$

por tanto

$$\left|(L)\int_0^1 f(x)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L)\int_0^1 f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon.$$

Ya que ε es un número positivo arbitrario

$$(L)\int_0^1 f = 0. \tag{1}$$

Esto muestra que Θ es bien definida.

Probaremos ahora que Θ es lineal y no negativa. Sea $[f] \geq [0]$, y $[f]$ $\Omega(\mathbb{L})$.

Si $[f] = [0]$, entonces $f \sim 0$. Por (1) tenemos

$$\Theta([f]) = (L)\textstyle\int_0^1 f = 0. \tag{2}$$

Si $[f] > [0]$, entonces $f > 0$, en este caso existe una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y un número $c > 0$, tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i) > c.$$

Por tanto

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L)\int_0^1 f(x+\alpha_i) > c.$$

Dado que f es acotada de período 1

$$(L)\int_0^1 f > c, \text{ esto es } \Theta([f]) > c > 0. \tag{3}$$

(2) y (3) muestran que Θ es no negativa.

Sea ahora $a[f] + b[g]$, donde $[f], [g] \in \Omega(\mathbb{L})$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Luego

$$\Theta(a[f] + b[g]) = \Theta([af + bg]) = (L)\int_0^1 (af + bg)$$

$$= a(\mathrm{L})\int_0^1 f + b(\mathrm{L})\int_0^1 g = a\Theta[f] + b\Theta[g].$$

Es decir Θ es lineal.

Como $\Omega(\mathbb{L})$ contiene la hiperfunción [1], invocamos el teorema 3. 4. 8, y entonces tenemos una funcional $\bar{\Theta}$ lineal y no negativa definida en $\mathcal{H}$ tal que $\bar{\Theta}([f]) = \Theta([f])$ para todo $[f] \in \Omega(\mathbb{L})$.

Definimos ahora una operación $\Psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\Psi(f) = \bar{\Theta}([f]), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Ψ está bien definida, ya que f pertenece a una sola hiperfunción.

Mostraremos que Ψ tiene las siguientes propiedades:

$i)$ $\Psi(af + bg) = a\Psi(f) + b\Psi(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$ii)$ $\Psi(f) \geq 0$, si $f \geq 0$.

$iii)$ $\Psi(f(x)) = \Psi(f(x + c))$, $c \in \mathbb{R}$.

$iii)$ $\Psi(f) = (\mathrm{L})\int_0^1 f$, si f es L-integrable en $[0, 1]$.

Por la definición de Ψ y el hecho de que $\bar{\Theta}$ es lineal se tiene

$$\begin{aligned}\Psi(af + bg) &= \bar{\Theta}([af + bg]) = \bar{\Theta}(a[f] + b[g]) = a\bar{\Theta}([f]) + b\bar{\Theta}([g]) \\ &= a\Psi(f) + b\Psi(g).\end{aligned}$$

Esto prueba $i)$. Sea $f \in \mathcal{F}$ y $f(x) \geq 0$ para todo x, y consideremos la función g definida por

$$g(x) = c + f(x),$$

donde $c > 0$. Luego $g(x) \geq c$ para todo x, y por lo tanto $g > 0$. Así que $[g] > [0]$ y entonces $\bar{\Theta}([g]) \geq 0$ por la no negatividad de $\bar{\Theta}$. Luego $\Psi(g) \geq 0$ y por lo tanto

$$\Psi(g) = \Psi(c + f) = \Psi(c) + \Psi(f) \geq 0.$$

Dado que $\Psi(c) = c$, se tiene que

$$\Psi(f) \geq -c.$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier $c > 0$, entonces $\Psi(f) \geq 0$. Esto prueba $ii)$. Dado que $f(x + c) \sim f(x)$, entonces $\Psi(f(x + c)) = \Psi(f(x))$. Esto prueba $iii)$. Por último si f es L-integrable en $[0, 1]$, entonces

$$\Psi(f) = \bar{\Theta}([f]) = \Theta([f]) = (\mathrm{L})\int_0^1 f.$$

Definimos ahora la funcional $\int : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\int f(x) = \frac{1}{2}\Psi(f(x)) + \frac{1}{2}\Psi(f(-x)).$$

Probaremos que $\int$ es una integral de Banach.

Sean f_1, $f_2 \in \mathcal{F}$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))$$

$$= \frac{1}{2}\Psi(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) + \frac{1}{2}\Psi(c_1 f_1(-x) + c_2 f_2(-x))$$

$$= \frac{1}{2}c_1\Psi(f_1(x)) + \frac{1}{2}c_2\Psi(f_2(x)) + \frac{1}{2}c_1\Psi(f_1(-x)) + \frac{1}{2}c_2\Psi(f_2(-x))$$

$$= \frac{1}{2}c_1(\Psi f_1(x) + \Psi f_1(-x)) + \frac{1}{2}c_2(\Psi f_2(x) + \Psi f_2(-x))$$

$$= c_1\int f_1(x) + c_2\int f_2(x).$$

Esto prueba $i)$ de la definición 4. 1. 1.

Sea $f \in \mathcal{F}$, donde $f(x) \geq 0$ para todo x, entonces $f(-x) \geq 0$. Luego $\Psi(f(x)) \geq 0$ y $\Psi(f(-x)) \geq 0$, ya que Ψ es no negativa, por tanto $\int f(x) \geq 0$. Esto prueba de $ii)$ de la definición 4. 1. 1.

Sea $f \in \mathcal{F}$, tal que $f(x) = c$ para todo x, luego

$$\int f(x) = \frac{1}{2}\Psi(f(x)) + \frac{1}{2}\Psi(f(-x)) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c.$$

Esto prueba $iii)$ de la definición 4. 1. 1.

Sea $f \in \mathcal{F}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, luego

$$\int f(\pm x + \alpha) = \frac{1}{2}\Psi(f(\pm x + \alpha)) + \frac{1}{2}\Psi(f(\mp x - \alpha))$$

$$= \frac{1}{2}\Psi(f(\pm x)) + \frac{1}{2}\Psi(f(\mp x)) = \int f(x).$$

Y con esto probamos que $\int$ es una integral de Banach. Por último mostramos que $\int$ coincide con la integral de Lebesgue. Sea ahora $f \in \mathcal{F}$, donde f es L-integrable, entonces

$$\int f(x) = \frac{1}{2}\Psi(f(x)) + \frac{1}{2}\Psi(f(-x)) = \frac{1}{2}\Psi(f(x)) + \frac{1}{2}\Psi(f(1 - x))$$

$$= \frac{1}{2}(L)\int_0^1 f(x) + \frac{1}{2}(L)\int_0^1 f(1 - x) = (L)\int_0^1 f(x). \blacksquare$$

Probaremos ahora la existencia de una integral de Banach en $\mathcal{F}$ que no coincide con la integral de Lebesgue, pero antes veremos un lema auxiliar.

LEMA 4. 1. 4: Existe una función acotada φ, tal que

$$(L)\int_0^1 \varphi = 0.$$

Y si f es una función R-integrable en $[0, 1]$, tal que $f > \varphi$, entonces

$$(R)\int_0^1 f > 1.$$

PRUEBA: Consideremos la circunferencia $\mathscr{C}$ de radio $\frac{1}{2\pi}$ y centro en el origen, y definamos la función $T : \mathscr{C} \to [0, 1)$, por

$$T(P) = x \ , \ P \in \mathscr{C}$$

donde x es la longitud de arco de la circunferencia que va de el punto $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ a P.

Sea $\mathbb{E}_1$ un subconjunto de $\mathscr{C}$ tal que su complemento es de primera categoría y donde $T(\mathbb{E}_1) = \mathbb{E}$ tiene medida cero[1].

Sea φ la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{E} \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1) - \mathbb{E}. \end{cases}$$

Claramente satisface que

$$(L)\int_0^1 \varphi = 0.$$

Sea ahora f una función R-integrable que satisface la relación $f > \varphi$, luego existe una sucesión finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[f(x + \alpha_i) - \varphi(x + \alpha_i)\Big] > \varepsilon, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Así que para todo k natural y todo x se tiene la desigualdad

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x + \alpha_i + \frac{j}{k}) - \varphi(x + \alpha_i + \frac{j}{k})\right]\right\} > \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}f(x + \alpha_i + \frac{j}{k})\right\} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\varphi(x + \alpha_i + \frac{j}{k})\right]\right\} > \varepsilon. \quad (1)$$

Por el mismo argumento usado para el teorema 3. 3. 10 se sabe que existe M natural, tal que

---

1 En el apéndice se muestra un conjunto con estas características.

$$-\varepsilon + (R)\int_0^1 f < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f(x + \alpha_i + \frac{j}{k})\right\} < \varepsilon + (R)\int_0^1 f, \quad (2)$$

siempre que $k > M$.

Probaremos ahora que existe un número x_1 tal que la segunda sumatoria de (1) es igual a 1.

Designemos por $\mathbb{E}_1(\alpha_i + \frac{j}{k})$ el conjunto que se obtiene al girar el conjunto $\mathbb{E}_1$ un ángulo $-2\pi(\alpha_i + \frac{j}{k})$ alrededor del centro (0, 0) de $\mathscr{C}$. Cada conjunto $\mathscr{C} - \left[\mathbb{E}_1(\alpha_i + \frac{j}{k})\right]$ es de primera categoría.

Afirmamos ahora que $\bigcap_{i,j} \mathbb{E}_1(\alpha_i + \frac{j}{k}) \neq \emptyset$, ya que de lo contrario tendríamos que

$$\mathscr{C} = \bigcup_{i,j}\left[\mathscr{C} - \left[\mathbb{E}_1(\alpha_i + \frac{j}{k})\right]\right],$$

esto es $\mathscr{C}$ es de primera categoría. Pero esto es una contradicción, ya que $\mathscr{C}$ es un espacio métrico completo y por lo tanto de segunda categoría [2]. Luego existe un punto

$$P \in \bigcap_{i,j} \mathbb{E}_1(\alpha_i + \frac{j}{k}).$$

Si x_1 es la longitud de arco que va de $(0, \frac{1}{2\pi})$ a P, podemos decir que

$$x_1 = x_{i,j} - \alpha_i - \frac{j}{k}, \text{ donde } x_{i,j} \in \mathbb{E}.$$

Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\varphi(x_1 + \alpha_i + \frac{j}{k})\right\} = 1. \quad (3)$$

Luego de acuerdo a (1), (2), (3)

$$(R)\int_0^1 f + \varepsilon - 1 > \varepsilon$$

y con esto probamos el teorema. ■

OBSERVACION 1: Es claro que la máxima cota inferior de el conjunto

$$\{(R)\int_0^1 f \ : \ f \text{ es integrable en } [0, 1] \text{ y } f > \varphi\}$$

es uno, ya que $f(x) = 1 + \varepsilon$ pertenece al conjunto para todo $\varepsilon > 0$.

---

2 Ver por ejemplo H. L. Royden, Real Analysis, Pag. 139.

OBSERVACIÓN 2: La función φ no es equivalente a una función R- integrable en $[0, 1]$. Supongamos que sí, esto es

$$\varphi(x) \sim f(x), \text{ donde } f \text{ es R-integrable}$$

ahora, si $c = \int_0^1 f(x)dx$, entonces de acuerdo a el teorema 3. 3. 10

$$\varphi(x) \sim c, \; \varphi(x) - c \sim 0,$$

por lo tanto para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tal que

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x + \alpha_i) - c\right]\right| < \varepsilon, \text{ para todo } x. \tag{4}$$

Por otra parte, existen puntos para los que la expresión

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x + \alpha_i)$$

toma el valor uno y puntos para los cuales toma el valor cero. Esto hace que la desigualdad (4) sea imposible.

TEOREMA 4. 1. 5: Existe una integral de Banach definida sobre $\mathcal{F}$, que no coincide con la integral de Lebesgue.

PRUEBA: Consideremos el subespacio $\Omega(R)$ y la función φ definida en lema 4. 1. 4.

Definimos la operación $\Theta : \Omega(R) \to \mathbb{R}$ por

$$\Theta([f]) = (R)\int_0^1 f, \text{ donde } [f] \in \Omega(R).$$

Θ es una funcional lineal y no negativa. Ya que $[\varphi] \notin \Omega(R)$, podemos aplicar los argumentos del lema 2. 2. 2 para obtener una funcional lineal y no negativa $\Theta_1 : \left[\Omega(R) \cup \langle[\varphi]\rangle\right] \to \mathbb{R}$ definida por

$\Theta_1([f]) = \Theta([g]) + c$, donde $[f] = [g] + c[\varphi] \in \left[\Omega(R) \cup \langle[\varphi]\rangle\right]$, $[g] \in \Omega(R)$ y c es una constante real. Nótese que para obtener esta expresión para Θ, usamos la observación 1.

En particular se tiene que $\Theta_1([f]) = \Theta([f])$, si $[f] \in \Omega(\mathbb{R})$.

Aplicamos ahora el teorema 3. 4. 8 y concluímos que existe una funcional lineal y no negativa $\bar{\Theta} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, tal que $\bar{\Theta}([f]) = \Theta_1([f])$, para $[f] \in \left[\Omega(R) \cup \langle[\varphi]\rangle\right]$.

En particular tenemos que

$$\bar{\Theta}([\varphi]) = \Theta_1([\varphi]) \geq \frac{1}{2}.$$

Definimos ahora Ψ y $\int$ como en el teorema 4. 1. 3 y entonces $\int$ es una integral de Banach y además

$$\int \varphi(x) \geq \frac{1}{2}$$

pero $(L)\int_0^1 \varphi(x) = 0$. Queda probado el teorema. ■

Hemos mostrado que una integral de Banach en $\mathscr{F}$ no siempre coincide con la integral de Lebesgue.

4.2 Solución al problema de la integral.

En la sección 1. 4 se planteó el problema de la integral, es decir, el problema de extender la integral de Riemann a todas las funciones acotadas. Estamos en condiciones de dar una solución a este problema y ver algunos hechos relacionados con el.

DEFINICIÓN 4. 2. 1: Si $\int : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ es una integral de Banach, entonces para cada función f acotada sobre $\mathbb{E} \subset [0, 1)$ defininimos **la integral de f sobre $\mathbb{E}$**, denotada $\int_{\mathbb{E}} f$, por

$$\int_{\mathbb{E}} f = \int f_{\mathbb{E}},$$

donde $f_{\mathbb{E}}(x) = f_{\mathbb{E}}(x + 1)$ y

$$f_{\mathbb{E}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathbb{E} \\ 0 \quad, & \text{si } x \in [0, 1) - \mathbb{E}. \end{cases}$$

Obsérvese que $f_{\mathbb{E}} \in \mathscr{F}$ y por lo tanto toda función acotada sobre $\mathbb{E} \subset [0, 1)$ es integrable en el sentido de la definición 4. 2. 1.

EJEMPLO 4. 2. 2: Sea $\int$ una integral de Banach. Si f es R-integrable sobre $[\alpha, b] \subset [0, 1)$, entonces la integral de f sobre $[\alpha, b]$ está dada por

$$\int_{[\alpha, b]} f = \int f_{[\alpha,b]} = (R) \int_0^1 f_{[\alpha,b]} = (R) \int_\alpha^b f$$

Es decir la integral de f sobre $[\alpha, b]$ coincide con la integral de Riemann sobre $[\alpha, b]$.

LEMA 4. 2. 3: Si $\int$ es una integral de Banach definida sobre el espacio vectorial $\mathcal{F}$ entonces $\int_{\mathbb{E}} f$ tiene las siguientes propiedades:

$i)$ $\int_{\mathbb{E}}(af + bg) = a\int_{\mathbb{E}} f + b\int_{\mathbb{E}} g$,

$ii)$ $\int_{\mathbb{E}} f(x) \geq 0$, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$,

$iii)$ $\int_{\mathbb{A}\cup\mathbb{C}} f = \int_{\mathbb{A}} f + \int_{\mathbb{C}} f$, si $\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \emptyset$,

$iv)$ $\int_{\mathbb{A}} \mathcal{X}_{\mathbb{A}} = \int_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$, si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{C}$ son isométricos,

$v)$ $\int_{[a,b]} f = (R)\int_a^b f$, si f es R-integrable.

PRUEBA: $i)$ y $ii)$ es claro. Obtenemos $iii)$ observando que $f_{\mathbb{A}\cup\mathbb{C}} = f_{\mathbb{A}} + f_{\mathbb{C}}$ y aplicando $i)$. Dado que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{C}$ son isométricos existe una isometría ψ de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{C}$. Se sabe que ψ puede tener únicamente las siguientes formas $\psi_1(x) = x + \alpha$ y $\psi_2(x) = -x + \alpha$ así que podemos escribir

$$\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\pm x + \alpha)$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{A}} \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(x) = \int \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(x) = \int \mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\pm x + \alpha) = \int_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_{\mathbb{C}}(x)$$

y esto prueba $iv)$. $v)$ se obtiene de el ejemplo anterior. ∎

El teorema anterior nos muestra que la integral de f es una solución "parcial" al problema de la integral, debido a que esta es aplicable solo a funciones definidas sobre conjuntos del intervalo $[0, 1)$.

Definimos ahora la integral de f sobre $\mathbb{E}$, donde $\mathbb{E}$ es un conjunto cualquiera.

DEFINICIÓN 4. 2. 4: Si f es una función acotada sobre un conjunto acotado $\mathbb{E}$, definimos la integral de f sobre $\mathbb{E}$, $\int_{\mathbb{E}} f$, por

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sum_{i=-n}^{n} \int_{\mathbb{E}_i} g_i$$

donde

$\mathbb{E}_i = \{x \in (0, 1] : x+i \in \mathbb{E} \cap [i, i+1],\ i = -n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$,

$$\mathbb{E} \subset [-n, n], \quad g_i(x) = \begin{cases} f(x + i), & \text{si } x \in \mathbb{E}_i \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1) \overset{i}{-} \mathbb{E}_i \end{cases}$$

y

$$g_i(x) = g_i(x + 1),$$

$\int_{\mathbb{E}_i} g_i$ es la integral de g_i sobre $\mathbb{E}_i$. Convenimos además que

$$\int_{\mathbb{E}_i} g_i = 0, \text{ si } \mathbb{E}_i = \emptyset.$$

Es decir expresamos la integral de f sobre $\mathbb{E}$, en términos de integrales de funciones sobre conjuntos $\mathbb{E}_i \subset [0, 1)$.

La definición anterior y el lema 4. 2. 3 nos lleva al siguiente resultado.

TEOREMA 4. 2. 5: Si f y g son funciones acotadas sobre un conjunto $\mathbb{E}$ acotado entonces

$i)$ $\int_{\mathbb{E}}(af + bg) = a\int_{\mathbb{E}} f + b\int_{\mathbb{E}} g$,

$ii)$ $\int_{\mathbb{E}} f(x) \geq 0$, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$,

$iii)$ $\int_{\mathbb{A}\cup\mathbb{C}} f = \int_{\mathbb{A}} f + \int_{\mathbb{C}} f$, si $\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \emptyset$,

$iv)$ $\int_{\mathbb{A}} \mathcal{X}_{\mathbb{A}} = \int_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$, si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{C}$ son isométricos,

$v)$ $\int_{[a,b]} f = (R)\int_a^b f$, si f es R-integrable.

PRUEBA: Obtenemos la demostración a partir de la definición 4. 2. 4 y el lema 4. 2. 3. ■

Este teorema nos muestra que el problema de la integral tiene solución, es decir la integral de Riemann se puede extender a todas las funciones acotadas. De acuerdo a los teorema 4. 1. 3 y 4. 1. 5 hay una extensión que coincide con la integral de Lebesgue y otra que no, es decir la extensión no es única.

En el capítulo 1 mostramos algunas propiedades de la integral de Lebesgue, entre ellas el Teorema de la Convergencia Acotada (T. C. A.). Un hecho interesante es que este teorema no es válido para una extensión de la integral de Riemann a todas las funciones acotadas.

LEMA 4. 2. 6: El Teorema de la Convergencia Acotada no es válido para la integral.

PRUEBA: Supongamos que el T.C.A. es válido, y consideremos la sucesión $\{f_n\}$, donde

$$f_n = \mathcal{X}_{\mathbb{P}_0} + \mathcal{X}_{\mathbb{P}_1} + \ldots + \mathcal{X}_{\mathbb{P}_n},$$

y $\{\mathbb{P}_n\}$ es la sucesión de conjuntos tal que $[0,\ 1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n$, obtenidos en la prueba del lema 1. 4. 12. Es claro que $f_n \to \mathcal{X}_{[0,1)}$. Luego aplicando el teorema de la convergencia acotada,

$$\int_{[0,1)} \mathcal{X}_{[0,1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1)} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1)} (\mathcal{X}_{\mathbb{P}_0} + \mathcal{X}_{\mathbb{P}_1} + \ldots + \mathcal{X}_{\mathbb{P}_n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_{[0,1)} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{[0,1)} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i}.$$

Ya que $([0,\ 1) - \mathbb{P}_i) \cap \mathbb{P}_i = \emptyset$ y $([0,\ 1) - \mathbb{P}_i) \cup \mathbb{P}_i = [0,\ 1)$, por la propiedad *iii*) de la integral se tiene

$$\int_{[0,1)} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i} = \int_{[0,1)-\mathbb{P}_i} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i} + \int_{\mathbb{P}_i} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i}.$$

Pero

$$\int_{[0,1)-\mathbb{P}_i} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i} = 0$$

ya que $\mathcal{X}_{\mathbb{P}_i}(x) = 0$ si $x \in [0,\ 1) - \mathbb{P}_i$.

De esta manera obtenemos que

$$\int_{[0,1)} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i} = \int_{\mathbb{P}_i} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i},$$

y por lo tanto

$$\int_{[0,1)} \mathcal{X}_{[0,1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{P}_i} \mathcal{X}_{\mathbb{P}_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{P}_i} 1.$$

Pero esto es una contradicción, ya que la parte derecha es 0 o infinito y la parte izquierda es 1. ■

Una consecuencia de este teorema, es que el problema de la integral no tiene solución si pedimos como condición adicional el Teorema de la Convergencia Acotada. Esto a su vez implica, que la integral de Lebesgue no puede ser extendida a todas las funciones acotadas.

CONCLUSIONES

En la presente tesis nos planteamos el problema de extender la integral de Riemann a todas las funciones acotadas (El problema de la integral). Los resultados importantes de este trabajo pueden resumirse en los siguientes puntos:

1) La integral de Riemann se puede extender a todas las funciones acotadas de manera no única.

2) La integral de Riemann se puede extender a todas las funciones, de tal manera que coincida con la integral de Lebesgue.

3) La integral de Riemann se puede extender de tal manera que no coincida con la integral de Lebesgue.

4) El problema de la integral no tiene solución si se agrega como condición adicional que satisfaga el teorema de la convergencia acotada.

APENDICE

A) CONJUNTOS DENSOS , CONJUNTOS DE PRIMERA CATEGORIA

La prueba que se dió del lema 4. 1. 4 se basa en el supuesto de que existe un conjunto $\mathbb{E}_1$ en la circunferencia $\mathscr{C}$ de radio $\frac{1}{2\pi}$, tal que $\mathscr{C} - \mathbb{E}_1$ es de primera categoria y $T(\mathbb{E}_1)$ tiene medida cero, donde $T : \mathscr{C} \to [0, 1)$ es la función de que asigna a cada $P \in \mathscr{C}$, la longitud de arco que va de $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ a P. En este apéndice mostraremos que tal conjunto $\mathbb{E}_1$ existe.

DEFINICIÓN 1: Si $\mathbb{E}$ es un subconjunto de el espacio métrico $(\mathscr{X}, d)$, se dice que $\mathbb{E}$ es **denso** si, $\overline{\mathbb{E}} = \mathscr{X}$ y que $\mathbb{E}$ es **nunca denso**, si $\mathscr{X} - \overline{\mathbb{E}}$ es denso. $\overline{\mathbb{E}}$ denota la cerradura de $\mathbb{E}$.

DEFINICIÓN 2: Si $\mathbb{E}$ es subconjunto del espacio métrico $(\mathscr{X}, d)$ se dice que es de **primera categoria** si, es la unión numerable de conjuntos nunca densos.

DEFINICIÓN 3: A una función biyectiva y continua f del espacio métrico $\mathscr{X}$ en el espacio métrico $\mathscr{Y}$, se dice que es un homeomorfismo si su función inversa f^{-1} es continua en $\mathscr{Y}$.

Se puede ver que si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es un homeomorfismo, entonces para cada conjunto $\mathbb{A} \subset \mathscr{X}$, $f(\overline{\mathbb{A}}) = \overline{f(\mathbb{A})}$.

En lo que sigue mostraremos que a partir de un conjunto de primera categoría en un espacio métrico $\mathscr{X}$, podemos obtener otro conjunto de primera categoría en el espacio métrico $\mathscr{Y}$, si entre $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ existe un homeomorfismo. Empezamos con unos lemas.

LEMA : Sea $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un homeomorfismo y $\mathbb{E}$ un subconjunto de $\mathscr{X}$

i) Si $\mathbb{E}$ es denso, $f(\mathbb{E})$ es denso.

ii) Si $\mathbb{E}$ es nunca denso, $f(\mathbb{E})$ es nunca denso.

PRUEBA : Si $\mathbb{E}$ es denso entonces $\overline{\mathbb{E}} = \mathscr{X}$. Dado que $f(\overline{\mathbb{E}}) = \overline{f(\mathbb{E})}$, $\overline{f(\mathbb{E})} = f(\overline{\mathbb{E}})$ $f(\mathscr{X}) = \mathscr{Y}$, es decir $f(\mathbb{E})$ es denso. Esto prueba *i*). Si $\mathbb{E}$ es nunca denso, entonces $\mathscr{X} - \overline{\mathbb{E}}$ es denso, y dado que f es biyectiva y el hecho de que, $f(\overline{\mathbb{E}}) = \overline{f(\mathbb{E})}$, se tiene

$$f(\mathscr{X} - \overline{\mathbb{E}}) = \mathscr{Y} - f(\overline{\mathbb{E}}) = \mathscr{Y} - \overline{f(\mathbb{E})},$$

es decir $f(\mathbb{E})$ es nunca denso. ■

TEOREMA : Si $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es un homeomorfismo y $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ es de primera categoría, entonces $f(\mathbb{E})$ es de primera categoría.

PRUEBA : Dado que $\mathbb{E}$ es de primera categoría entonces

$$\mathbb{E} = \bigcup_n \mathbb{E}_n, \text{ donde } \mathbb{E}_n \text{ es nunca denso,}$$

luego

$$f(\mathbb{E}) = \bigcup_n f(\mathbb{E}_n).$$

Por *ii)* del lema anterior se tiene que $f(\mathbb{E}_n)$ es nunca denso. Por lo tanto $f(\mathbb{E})$es de primera categoría. ■

Aplicaremos ahora este teorema para obtener un conjunto de primera categoría en la circunferencia de radio $\frac{1}{2\pi}$.

Existe[1] un conjunto $\mathbb{E} \subset [0, 1]$ de medida cero tal que su complemento es de primera categoría. Si $\mathbb{E}$ contiene los puntos $x = 0, 1$, los quitamos para obtener un conjunto $\mathbb{E} \subset (0, 1)$ de medida cero tal que su complemento es de primera categoría.

Consideremos ahora la función $f : (0, 1) \to \mathbb{Y}$, definida por

$$f(t) = (\frac{1}{2\pi} \cos t, \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} t), \quad t \in (0, 1),$$

donde $\mathbb{Y}$ es la circunferencia de centro en el orígen y radio $\frac{1}{2\pi}$. $\mathbb{Y}$ no incluye el punto $(\frac{1}{2\pi}, 0)$. Se puede ver que f es un homeomorfismo.

Dado que $\mathbb{E} \subset (0, 1)$ es tal que su complemento es de primera categoría, entonces el conjunto

$$f((0, 1) - \mathbb{E}) = \mathbb{Y} - f(\mathbb{E}),$$

es de primera categoría. Si hacemos $\mathbb{E}_1 = f(\mathbb{E})$, tenemos por lo tanto un conjunto $\mathbb{E}_1$ en $\mathbb{Y}$ tal que su complemento es de primera categoría. Además si $T = f^{-1}$ es la función inversa de f tenemos que

$$T(\mathbb{E}_1) = \mathbb{E}$$

tiene medida cero. Observese que la función T asigna a cada punto P de $\mathbb{Y}$ la longitud de arco que va de $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ a P.

Por último consideramos a $\mathbb{E}_1$ en la circunferencia completa, es decir incluyendo al punto $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ y obtenemos un conjunto en

---

1 Ver M. A. García, Matemáticas, Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, N°. 21, Dic. 1990, Pag 2-8.

la circunferencia de radio $\frac{1}{2\pi}$ y centro en el origen tal que su complemento es de primera categoría y $T(\mathbb{E}_1)$ tiene medida cero.

BIBLIOGRAFIA

1. H.L. Royden, *Real analysis*. The Macmillan Company, 1978.

2. Norman B. Hasser, Joseph A. Sullivan, *Analisis Real*. Trillas, 1978

3. A. N. Kolmogórov, S. V. Fomín, *Elementos de la Teoría de funciones y del análisis funcional*. MIR, 1975.

4. Kenneth A. Ross, *Elementary Analisis: The Theory of Calculus*. Spriger-Verlag, 1980.

5. Ignacio L. Iribaren, *Topología de Espacios Métricos*. LIMUSA- Wiley, 1973.

6. A. M. A. García, *Matemáticas*. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. N°. 21, Dic. 1990, Pag. 2-8.

7. Stefan Banach, *Sur le probleme de la mesure*.