En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México siendo las 10:00 horas del día 4 de junio de 1993, se reunieron en el aula 9a-205 del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora los señores:

Pedro Flores Pérez
Francisco J. Tapia Moreno
Joaquín M. López Borbón

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último para efectuar el examen profesional de la carrera de:

Licenciado en Matemáticas

Acta No. 73
Foja No. 72
Libro No. 01
No. de Exp. 8322292-8

al señor: Claudio Alfredo López Miranda
Después de haber presentado su tesis intitulada:
"El método Simplex Aplicado al Problema de transporte y Algunas Relaciones con teoría de Gráficas".
la que previamente le fué aprobada por el Jurado, los señores sinodales replicaron al sustentante y después de deliberar entre sí, reservada y libremente lo declararon:

Aprobado por unanimidad.

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente y firman los que han intervenido.

Firma del sustentante

De manera muy especial dedico este trabajo al M. en C. **Pedro Flores Pérez** *por guardar siempre la fe en las personas. Por sus consejos y ayuda en muchos aspectos y por su gran labor al dirigir esta tesis....Gracias.*

A la generación de matemáticos 1983-1987 por los momentos especiales que compartimos de alguna u otra manera en el transcurso de los años.

De forma especial a mi Compañero y amigo L.M. **Francisco Javier Tapia Moreno** *por sus inumerables consejos de superación personal.*

Al comité revisor y a todas las personas que ayudaron a convertir este trabajo en una realidad.

A la UNIVERSIDAD DE SONORA infinitamente gracias

4 de Junio de 1993

CONTENIDO

INTRODUCCION

Existen situaciones que se dan en determinados problemas de tal forma que su definición difiera con la idea de transportar un producto de orígenes a destinos, pero que su formulación matemática encaja con la de un modelo de transporte. El primer capítulo de la tesis presenta dos ejemplos intuitivos que darán una idea general de como modelar un problema que no tenga nada que ver aparentemente con uno de transportar productos; si bien es cierto que el segundo ejemplo (distribución de fertilizantes) tiene un enfoque complicado, fue con la intención de no presentar ejemplos prototipos que no permitieran ilustrar el gran campo de aplicación que tiene la teoría de transporte. Así mismo, en este capítulo se muestra planteamiento general de un problema de transporte con respecto al costo, se da la definición y formulación matemática que tiene un modelo de trasporte para plantearse como un problema de programación lineal (PPL). Al final se presenta el teorema de factibilidad al problema de transporte que tiene gran importancia en todo el contenido de la tesis, pues nos dice que un Problema de Transporte (PT) bajo ciertas consideraciones, siempre tiene solución óptima.

En el capítulo II se presentan las propiedades más importantes que tiene la matriz de trasporte junto con sus demostraciones; Es de particular importancia el hecho de que **A** (la matriz de transporte) sea de rango m+n-1 y que posea la propiedad de Unimodularidad total, por que en ellas está basada la idea de aplicar el método simplex de forma más eficiente.

El capítulo III muestra la relación que existe entre el problema de transporte y la teoría de gráficas. Hablaremos indistintamente del tableau de transporte o tabla de transporte poniendo especial atención a la distribución de las variables básicas en las celdas de la matriz de flujos. Ignorando esta matriz se construye una gráfica de celdas y líneas que originan la gráfica de transporte en la forma de nodos y arcos. Para aplicar el algoritmo de transporte utilizaremos indistintamente la gráfica de celdas ó la gráfica de transporte (nodos y arcos). Con este nuevo enfoque se describe la manera de construir los circuitos que dan la representación para una celda no básica (i,j), asociado con el vector no básico $\mathbf{a}_{ij}$ sin necesidad de un Tableau Simplex. Esto es, para el cálculo de los Y_{ij} no es necesario resolver el sistema $BY_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$ que utiliza el simplex para actualizar las columnas del tableau. Por otro lado, utilizando el circuito asociado a cada celda no básica obtenemos un criterio de elección para la variable que entra a la base y otro para la variable que va de salida. Esto hace más práctica y sencilla la manera de encontrar la solución.

Dentro del capítulo IV se hace uso de las propiedades definidas en los capítulos II y III, para desarrollar el **ALGORITMO DE TRANSPORTE.** Este nuevo algoritmo requiere que se cumpla la condición de factibilidad $\Sigma\ \mathbf{a}_i = \Sigma\ \mathbf{b}_j$, por lo tanto se presenta aquí el procedimiento para balancear un problema de transporte. Requiere también de una solución inicial que se obtiene aplicando directamente sobre el tableau (costos y flujos) el método de aproximaciones de Vogel (MAV) presentado en la sección 4.4. Para desarrollar la teoría de este capítulo, se escoge un ejemplo sencillo con el fin de dar mayor claridad a los planteamientos. Al final se expone el caso degenerado y algunas conclusiones importantes.

Considero pertinente aclarar que el algoritmo aquí presentado no es el método "matemático" más eficiente y rápido desde el punto de vista de la teoría de gráficas, de hecho, no es un algoritmo de gráficas. Es un algoritmo de la programación lineal que resuelve el problema de transporte sin aplicar directamente el método simplex. La finalidad de la tesis, es mostrar cual es este nuevo algoritmo y como se justifican los pasos desde el punto de vista de la programación lineal.

CAPITULO I

ANTECEDENTES

La primera formulación y análisis de un modelo de transporte fue hecho pro Frank Hitchcock en 1941, quien en su trabajo traza de modo parcial la técnica del método simplex, sin aprovechar las propiedades del problema de transporte, excepto para encontrar soluciones iniciales. Posteriormente T.C. Koopmans, fue el primero en notar la relación entre las soluciones básicas del problema de transporte y la estructura de árbol de una gráfica. La formulación de programación lineal y el método sistemático para la solución fue expuesto por primera vez por G.B.Dantzig, adaptando su método simplex para resolver problemas de transporte. El procedimiento de cómputo es una adaptación del método simplex aplicado al sistema de ecuaciones, del problema de programación lineal asociado. Charnes y Cooper desarrollaron una presentación intuitiva del procedimiento de Dantzig mediante lo que se conoce como el método "Stepping Stone". Otro investigador que contribuyó al desarrollo de la programación lineal en esta dirección, fue E.Egerváry, en su trabajo consideró el problema de encontrar una permutación de ceros en una matriz compuesta de elementos cero ó unos. Basado en este trabajo H.W. Kuhn, en 1955 desarrolló un algoritmo eficiente para resolver el problema de asignación conocido como el método Húngaro. Lo cual condujo, el año siguiente al método primal-dual o algoritmo de Ford y Fulkerson para problemas lineales.

1.1 Introducción

El problema de transporte presenta una estructura especial que frecuentemente aparece en situaciones reales en diferentes contextos. Este tipo de problemas al igual que otros de la programación lineal pueden resolverse aplicando directamente el método Simplex. Sin embargo, aprovechando las carecterísticas que presentan los modelos, es posible desarrollar un algoritmo de solución más eficiente que el método simplex. Incluso la gran mayoría de los problemas reales de transporte requieren de un gran número de restricciones y variables. Por lo tanto, una aplicación directa del método simplex resulta casi imposible, desde el punto de vista de la computación.

Dependiendo del contexto los problemas que modelan situaciones de transporte se clasifican en: Problemas de transporte clásico, Problema de asignación, problemas de transbordo, estructuras de transporte con capacidad limitada y problemas de transporte generalizado. Cada estructura posee un mecanismo propio de solución, por lo tanto, se requiere un estudio detallado para cada una de ellas. Debido a lo extenso del tema, solo trataremos aquí la estructura de transporte clásico con ciertas variantes. Cabe aclarar que no es la estructura más importante, pero a travez de ella se explica claramente la formulación matemática de las otras, e incluso las ideas generales del mecanismo de solución.

El campo de aplicación del modelo de transporte es muy extenso, puede utilizarse en el transporte de mercancías,en la distribución óptima de recursos, en la planeación de la producción, ventas, programación de vuelos, etc. Esto coloca al problema de transporte como uno de los modelos lineales de mayor aplicación en problemas reales, Dicha importancia ha motivado a la creación de mejores algoritmos de solución que faciliten los cálculos del método simplex, como es el Algoritmo de Transporte utilizando el método de variables duales, ó bien, Los algoritmos propios de la teoría de gráficas. A continuación veremos algunos ejemplos

1.2 EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE

EJEMPLO 1.2.1 Supóngase que la Compañía de Aceros Nacionales produce mensualmente en cada una de sus tres plantas 50,000, 70,000, y 90,000 toneladas de acero. Esta empresa tiene cinco distribuidoras ubicadas en diferentes partes del pais, con una demanda mensual de 20,000, 60,000, 80,000, 40,000, y 10,000 toneladas de acero, respectivamente. El costo total del flete, por toneladas de acero que se transporta están dados en la tabla siguiente:

		DISTRIBUIDORAS					
		1	2	3	4	5	OFERTA a_i
FABRICAS	1	7	3	2	4	2	50000
	2	6	5	8	3	4	70000
	3	3	2	5	7	1	90000
DEMANDA	b_j	20000	60000	80000	40000	10000	

Se desea calcular un programa mensual de transporte que minimice los costos totales, agotando toda la oferta disponible y satisfaciendo la demanda total requerida.En este ejemplo se tiene que la oferta total es igual a la demanda total de 210,000 toneladas. Cuando los PT satisfacen que la suma de las demandas es igual a la suma de las ofertas, se dice entonces que el problema está balanceado.

Planteamiento Del Problema

Sea x_{ij} el número de unidades (por tonelada) que se transporta mensualmente de la fábrica i a la tienda distribuidora j. El problema consiste en saber que fábricas deben abastecer a que distribuidoras y con que cantidades de tal forma que se minimicen los costos totales de transporte. El planteamiento del problema como uno de programación lineal es el siguiente:

DEFINICION DE VARIABLES:

x_{ij} = No. de unidades mensuales en toneladas de acero transportadas del origen i al destino j.

c_{ij} = Costo por unidad de transporte del origen i al destino j

FUNCION OBJETIVO:

$$\text{Minimizar} \qquad Z = \sum c_{ij} \, x_{ij}$$

RESTRICCIONES DE OFERTA:

Debe cumplirse que el total de unidades que salen del origen i sea igual a la oferta total disponible en ese origen. Por lo tanto, las restricciones de oferta para los fábricas son:

Fábrica 1 $\qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 50{,}000$

Fábrica 2 $\qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 70{,}000$

Fábrica 3 $\qquad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 90{,}000$

RESTRICCIONES DE DEMANDA:

Por otro lado, el flujo total que entra a cada uno de los destinos debe ser igual a su demanda requerida. Es decir, el número de unidades que entran a un destino j, debe ser igual a la demanda requerida en el destino j. Así, las restricciones de demanda son de la forma:

Distribuidora 1 $\qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20{,}000$

Distribuidora 2 $\qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60{,}000$

Distribuidora 3 $\qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80{,}000$

Distribuidora 4 $\qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 40{,}000$

Distribuidora 5 $\qquad x_{15} + x_{25} + x_{35} = 10{,}000$

RESTRICCIONES DE NO NEGATIVIDAD:

$x_{ij} \geq 0$ para toda $i=1,2,3,\quad j=1,2,3,4,5.$

FORMULACION DEL PROBLEMA

Sea $C^T = \left[\, c_{11}\ c_{12} \ldots\ldots c_{35} \right]$ vector de costos

Sea $X^T = \left[\, x_{11}\ x_{12} \ldots\ldots x_{35} \right]$ las variables de solución

El problema consiste en

$$\text{Min} \quad Z = \sum c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,3,4,5$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i,j$$

Un problema de transporte general consistiría en

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i,j$$

A partir de ahora los problemas que al plantearse se reduzcan a la forma anterior los llamaremos *modelo de transporte.*

EJEMPLO 1.2.2.-

Siete áreas deirrigación A, B, C, D, E, F, y G requieren de fertilizantes. Supóngase que hay cuatro tipos de fertilizante X, Y, Z, y W. La oferta y el costo de fertilizante (ya incluido el flete de transporte a las zonas de consumo) es:

Fertilizante		Oferta Mensual	Precio por tonelada (flete)
1	X	7000	$ 1000 por ton.
2	Y	4000	4000
3	W	6000	2000
4	Z	5000	5000

Las siete áreas de irrigación requieren (indistintamente) de lo siguiente:

A R E A		TIPO DE FERTILIZANTE FACTIBLE	DEMANDA MENSUAL TOTAL (independientemente de la combinación de fer tilizante)
1	A	X,Z	2000 Ton
2	B	X,Y,W	3000 Ton
3	C	Y,W	1000 Ton
4	D	Z,X	2000 Ton
5	E	X,Y	3000 Ton
6	F	X,Y,Z	2000 Ton
7	G	W,Z	1000 Ton

Este problema puede modelarse como uno de programación lineal tal como se muestra en seguida. Luego daremos los ajustes necesarios para presentarlo como un problema de transporte origen--destino. Nótese que el planteamiento del problema no es de manera directa como uno de transporte.

Se desea encontrar un modelo de transporte para programar la entrega de fertilizantes a las zonas de irrigación que utilice el máximo de toneladas disponibles de fertilizante para satisfacer la demanda total requerida en cada área de irrigación de tal forma que el costo de distribución de fertilizante resulte lo más barato posible.(de manera práctica podemos suponer que en ninguna área de irrigación debe haber faltantes de fertilizante)

FORMULACION DEL PROBLEMA COMO UNO DE PROGRAMACION LINEAL

DEFINICION DE VARIABLES

x_{ij} = El número de toneladas de fertilizante tipo i distribuidas a la zona de irrigación j.

c_{ij} = El costo por tonelada de fertilizante tipo i distribuidas en la zona de irrigación j.

FUNCION OBJETIVO

Minimizar $Z = 7000(x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16}) + 4000(x_{22} + x_{23} + x_{25}$

$+ x_{26}) + 5000(x_{32} + x_{33} + x_{37}) + 6000(x_{41} + x_{44} + x_{46} + x_{47})$

RESTRICCIONES DE OFERTA

Se debe cumplir que el total de fertilizante tipo i distribuidos a las áreas donde es requerido no exeda al total de toneladas disponibles del fertilizante. Las restricciones de ofertan son de la forma:

$$
\begin{array}{lcccccccl}
1 & x_{11} & + x_{12} + & & + x_{14} & + x_{15} & + x_{16} & & \leq 7000 \\
2 & & x_{22} & + x_{23} & & + x_{25} & + x_{26} & & \leq 4000 \\
3 & & x_{32} & + x_{33} & & & & + x_{37} & \leq 6000 \\
4 & x_{41} & & & + x_{44} & & + x_{46} & + x_{47} & \leq 5000
\end{array}
$$

RESTRICCIONES DE DEMANDA

El total de toneladas de fertilizante asignadas al área de irrigación j, debe ser exactamente igual a la demanda requerida en esa área con el fin de que los terrenos esten a un buen nivel de fertilidad. Por lo tanto, las restricciones de demanda son de la forma:

AREA		ECUACION
1	A	$x_{11} + x_{41} = 2000$
2	B	$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3000$
3	C	$x_{23} + x_{33} = 1000$
4	D	$x_{14} + x_{44} = 2000$
5	E	$x_{15} + x_{25} = 3000$
6	F	$x_{16} + x_{26} + x_{46} = 2000$
7	G	$x_{37} + x_{47} = 1000$

FORMULACION COMO UN PROBLEMA DE TRANSPORTE

Para formular el PPL como uno de transporte, es necesario hacer algunas modificaciones convencionales al problema lineal. Las cuales cambian el planteamiento al principio en apariencia pero en el óptimo son iguales

Observación 1.-Se requiere transportar toneladas de fertilizante tipo i (origen i) a los destinos j (áreas de irrigación). El tipo de fertilizante son los orígenes y las zonas de irrigación los destinos.

Observación 2.-En un problema de transporte se requiere hablar de un solo tipo de producto. Para homogenizar esto como un solo producto, diremos que lo que se transporta son toneladas de fertilizante sin especificar el tipo, el cual está implícito por el origen específico. Por ejemplo, x_{26} representa las toneladas de fertilizante transportadas del origen 2 (fetilizante tipo Y) al destino 6 (área de irrigación F).

Observación 3.-Un fertilizante no requerido en una área, se interpreta de manera práctica que el origen en cuestión no puede surtir al destino específico. Por ejemplo, el origen 1 no debe surtir al destino 3, en otras palabras, el fertilizante X no es requerido en el área de irrigación C.

Observación 4.-Nótese que se desea minimizar el costo de transporte satisfaciendo las demandas de fertilizante en cantidad y no en tipo de fertilizante entre los requeridos en cada destino pues es indistinto la manera en que se combinan. (Además, las asignaciones básicas que se hagan tomarán en cuenta implícitamente el tipo de fertilizante).

Observación 5.-El costo de fertilizante por tonelada lleva incluido el costo del flete. Entonces, puede considerarse como el costo de transporte a las áreas de irrigación por toneladas de fertililzante.

Observación 6.-Se requiere que un determinado fertilizante tipo i no sea distribuido en un área de irrigación específica. Por ejemplo el fertilizante X (tipo 1) no debe distribuirse en el área C (área 3).Esto sucedería si la solución óptima mostrara $x_{13} = 0$. Lo cual se garantiza en el algoritmo de transporte si el costo c_{13} es un costo muy alto, para que x_{13} no aparezca nunca como varible básica. De la misma forma se asignarían costos muy altos (M) a todas las combinaciones (i,j) que no deban hacerse.

De esta manera el problema puede formularse como un modelo de transporte para programar la entrega de fertilizantes a zonas de irrigación a un costo mínimo. Nótese que el contexto del problema no es el de transportar productos de orígenes a destinos pero puede formularse como tal, por que la matriz del sistema de ecuaciones del PPL tiene las características de la matriz de transporte. Considerando que el costo de asignaciones no permitidas es un costo muy alto M, el algoritmo de transporte garantiza que estas asignaciones estaran siempre a nivel cero. El sistema resultante es ahora

SISTEMA DE ECUACIONES PARA MODELAR EL PROBLEMA COMO UNO DE TRANSPORTE

RESTRICCIONES DE OFERTA

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \leq 7000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \leq 4000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} \leq 6000$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 5000$$

RESTRICCIONES DE DEMANDA

AREA	
A	$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2000$
B	$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 3000$
C	$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1000$
D	$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 2000$
E	$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 3000$
F	$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} = 2000$
G	$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} = 1000$

$$\text{CON} \quad x_{ij} \geq 0$$

forma condensada del problema es de la siguiente manera

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{7} c_{ij}\, \alpha_{ij}$$

jeto a:

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} \leq a_i \qquad i=1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,3,4,5,6,7$$

La matriz de costos del problema es la siguiente

AREAS DE IRRIGACION

FERTILIZANTE	A	B	C	D	E	F	G	a_i
1	1000	1000	——	1000	1000	1000	——	7000
2	——	4000	4000	——	4000	4000	——	4000
3	——	2000	2000	——	——	——	2000	5000
4	5000	——	——	5000	——	5000	5000	6000
b_j	2000	3000	1000	2000	3000	2000	1000	

donde los costos que no aparecen se hacen **M** por corresponder ha asignaciones no permitidas.

SECCION 1.3

FORMULACION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE COMO UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

DEFINICION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

El problema de transporte clásico se presenta cuando se debe determinar un programa óptimo de envios que:

a) Se originan en fuentes (centros de distribución) donde se tienen disponibilidades de un producto.

b) Son enviados directamente a sus destinos finales (centros de demanda) donde se requieren varias cantidades fijas.

c) Cumple que la demanda total es igual a la oferta total.

d) El costo satisface una función objetivo lineal. Esto es, el costo de cada embarque es proporcional a las cantidades embarcadas y el costo total es igual a la suma de los costos individuales.

1.4 EL MODELO DE TRANSPORTE

Se supone que m orígenes tienen que surtir n centros de consumo de un cierto producto. La capacidad de oferta del origen i es a_i ($i=1,2,\ldots,m$), y la demanda en el centro de consumo j es b_j ($j=1,2,\ldots,n$). Sea c_{ij} el costo de enviar una unidad del producto i al destino j. c_{ij} es conocido para todas las combinaciones (i,j). El problema consiste en determinar el número de unidades del producto que deben enviarse del origen i ($i=1,2,\ldots,m$) al destino j ($j=1,2,\ldots,n$) de tal forma que se minimicen los costos totales de distribución, se satisfaga la demanda del destino j y no se exceda la capacidad de oferta del origen i. Sea x_{ij} el número de unidades del producto enviadas del origen i al destino j (x_{ij} es la variable de decisión). Entonces, la formulación del problema lineal es:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \text{ restricciones de origen}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n) \text{ restricciones de destino}$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (\text{para } i=1,2,\ldots,m \text{ y } j=1,2,\ldots,n)$$

La formulación anterior al problema del transporte es la más general dado que no es necesario agotar la totalidad de oferta para surtir a los n destinos y satisfacer el total de la demanda. Este hecho se muestra por que las restricciones son del tipo $\leq$ en los orígenes y $\geq$ en los destinos. En algunos ejemplos prácticos los problemas se plantean en términos de $\leq$ y $\geq$. La teoría del problema del transporte nos lleva a que agregando nodos (origen o destino) se pueden plantear las restricciones en la forma de igualdad estricta la cual permite una mejor técnica de solución. Con lo anterior podemos decir que todo problema de transporte puede plantearse de forma general como:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \text{ restricciones de origen}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n) \text{ restricciones de destino}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } j$$

Las restricciones del problema de transporte en la forma de igualdad indican que la cantidad utilizada en el origen i es igual a la cantidad total disponible en el mismo (restricción de origen). Por otro lado las restricciones de destino indican que la demanda del destino j se satisface sin tener excedente de mercancía.

LA FORMA GRAFICA PARA UN PROBLEMA DE TRANSPORTE ES

	ORIGENES		DESTINOS	
oferta				demanda
a_1	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	b_1
$\vdots$				$\vdots$
a_i	$\boxed{i}$		$\boxed{j}$	b_j
$\vdots$				$\vdots$
a_m	$\boxed{m}$		$\boxed{n}$	b_n

GRAFICA 1.4.1

SECCION 1.5

FORMULACION MATRICIAL DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

El sistema de ecuaciones en el modelo de transporte es :

ECUACION NUMERO

$$
\begin{array}{lll}
\text{Origenes} & & \\
1) & x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n} & = a_1 \\
2) & \qquad x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n} & = a_2 \\
3) & \qquad\qquad x_{31}+x_{32}+\dots+x_{3n} & = a_3 \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\
m) & \qquad\qquad\qquad x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn} & = a_m \\
\text{Destinos} & & \\
m+1) & x_{11} \quad +x_{21} \quad +x_{31} \ \dots\dots\dots +x_{m1} & = b_1 \\
m+2) & \quad +x_{12} \quad +x_{22} \quad +x_{32} \quad +x_{m2} & = b_2 \\
m+3) & \quad\quad +x_{13} \quad +x_{23} \quad +x_{33} \quad +x_{m3} & = b_3 \\
\vdots & & \\
m+n) & \quad\quad x_{1n} \quad +x_{2n} \quad +x_{3n} \quad +x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

SISTEMA DE ECUACIONES 1.5.0

La formulación del problema de transporte como un problema de programación lineal se plantea de la siguiente forma:

$$\text{Min } Z = CX$$

sujeto a

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

La matriz **A** es la matriz de coeficientes tecnológicos con 1's y 0's. **C** es el vector de costos, **X** es el vector de variables de decisión y **b** el vector de requerimientos, en seguida se muestra la estructura de cada uno para utilizarla mas adelante

$$X^T = (\, x_{11},\ x_{12}, \ldots, x_{1n},\ x_{21},\ x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots\ldots, x_{m1},\ x_{m2}, \ldots, x_{mn})$$

$$C = (\, c_{11},\ c_{12}, \ldots, c_{1n},\ c_{21},\ c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots\ldots, c_{m1},\ c_{m2}, \ldots, c_{mn})$$

$$b = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix}}\right\} \text{origenes} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}}\right\} \text{destinos} \end{array}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \mathbf{1} \\ I_n & I_n & I_n & I_n & \cdots\cdots & I_n \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ columnas}} \begin{array}{l} \text{m renglones} \\ \\ \\ \\ \text{n renglones} \end{array} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m + n \quad \text{renglones}$$

El vector **1** y el vector **0** son vectores renglón conteniendo respectivamente n unos y n ceros, tal como se muestra a continuación

$$\mathbf{1} = \underbrace{(\ 1\ 1\ 1\ \ldots\ldots\ 1\ )}_{n \text{ componentes}}$$

$$\mathbf{0} = \underbrace{(\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ )}_{n \text{ componentes}}$$

y

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ componentes}} \ n \text{ conponentes}$$

En forma desarrollada la matriz **A** tiene la siguiente estructura:

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c l}
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{array} & \text{RENGLON} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 1 & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ m+n
\end{array}
\end{array}
$$

Cada columna de **A** referente a la variable x_{ij} se define por a_{ij} con la forma siguiente

$$
a_{ij} = e_i + e_{m+j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \longrightarrow \text{posicion } i \\ \qquad + \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \longrightarrow \text{posicion } m+j \\ \\ \\ \end{array}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \rightarrow i \\ \\ \\ \rightarrow m+j \\ \\ \\ \end{array}
$$

1.6 FACTIBILIDAD DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Con el objeto de tener ecuaciones consistentes en el PT, se debe tener que la cantidad total de unidades del artículo ofertada debe ser igual a la cantidad total demandada, esto es

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = C$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

donde C es una cantidad fija.

Las restricciones de no negatividad en las variables ($x_{ij} \geq 0$) indican que el sentido del flujo del producto es de los orígenes a los destinos únicamente.

Cuando se cumple la condición $\sum a_i = \sum b_j = C$ se dice que el problema está **BALANCEADO.** En los problemas prácticos puede no cumplirse esta condición y diremos que el problema no está balanceado. De ahora en adelante cuando se hable del PT supondremos que está balanceado.

TEOREMA 1.6.1: El problema de transporte tiene una solución posible.

Demostración: Dada la condición de que el total de la oferta es igual al total de la demanda, tenemos la solución posible

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{C}$$

para toda (i,j), ademas $x_{ij} \geq 0$.

con este valor para x_{ij} se satisfacen todas las restricciones del Problema del transporte. A saber:

Restricciones de oferta

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{C} = \frac{a_i}{C} \sum_{j=1}^{m} b_j = \frac{a_i C}{C} = a_i \qquad \text{para } i=1,2,\ldots,m$$

Restricciones de demanda

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{C} = \frac{b_j}{C} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j C}{C} = b_j \qquad \text{para } i=1,2,\ldots,m$$

donde C es una cantidad fija.

Se tiene también que para cada vector factible **X**, cada componente x_{ij} está acotada como sigue: $0 \le x_{ij} \le \text{mín } \{a_i, b_j\}$. Recordando que un programa lineal acotado que tiene una solución factible posee una solución óptima, podemos decir que el problema de transporte siempre tiene una solución óptima.

En el siguiente capítulo se presentan las propiedades principales de la matriz **A** que dan al problema de transporte su estructura especial. Esta estructura especial permite simplificar el procedimiento del simplex (primal) hasta el punto que se puede aplicar directamente a la tabla o gráfica de transporte con un ahorro considerable en los cálculos.

CAPITULO II

PROPIEDADES DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Las propiedades de la matriz de transporte nos permiten encontrar características que no tienen los problemas lineales en general. Estas características especiales dan lugar al Algoritmo de Transporte presentado en el capítulo **IV** el cual está basado implícitamente en dichas propiedades.

La matriz **A** de coeficientes tecnológicos para el PT tiene las siguientes propiedades importantes

a) Los elementos de la matriz **A** son ceros o unos.

b) Del conjunto de m+n ecuaciones, cualesquiera de ellas puede exprezarce en función de las otras. Esta particularlidad se deriva del hecho de que la suma de los requerimientos es igual a la suma de las disponibilidades. En consecuencia debe eliminarse una de estas ecuaciones arbitrariamente, obteniendo un sistema de m+n-1 ecuaciones independientes en m x n variables. Como un ejemplo al PT considere un problema con 2orígenes y tres destinos con los siguientes datos :

EJEMPLO 2.0.1

origen		Destino 1	Destino 2	Destino 3	oferta a_i
	1	3	1	6	2
	2	2	4	3	7
Demanda b_j		3	4	8	

para este ejemplo

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \\
\mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \text{ecuación} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}
$$

Obsérvese que la ecuación E_1 puede escribirse como:

$$E_1=E_3+E_4+E_5-E_2.$$

2.1 EL RANGO DE LA MATRIZ A ES $m + n - 1$

La matriz **A** tiene m+n renglones y mn columnas, suponiendo que $m,n \geq 2$, entonces $m + n \leq mn$. Por lo tanto el rango (**A**) $\leq$ m+n. Pero el rango (**A**) $\neq$ m+n pues cualquier renglón de **A** puede exprezarce en término de los m+n-1 renglones restantes, en consecuencia los renglones de **A** son linealmente dependientes. Para demostrar que el rango (**A**) = m+n-1 es suficiente probar que **A** posee una submatriz cuadrada de orden m+n-1 *no singular.*

Demostración:

Ignorando el primer renglón de **A** y ademas solo consideremos la submatriz **B** de (m+n-1) x (m+n-1) con la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{array} \\
\mathbf{B} = & \left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & 1 & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} 2) \\ 3) \\ m) \end{array}\right\} m-1 \text{ renglones} \\
\left.\begin{array}{l} m+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ m+n) \end{array}\right\} n \text{ renglones}
\end{array}
\end{array}
$$

en forma condensada **B** puede escribirse

$$
\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c}
I_{m-1xm-1} & 0_{m-1xn} \\
\hline
\mathbf{1}_{1xm-1} & \\
\cline{1-1}
0_{n-1xm-1} & I_{nxn}
\end{array}\right]
$$

donde

0 es la matriz cero
$\mathbf{1}$ matriz renglón de 1's
I matriz identidad.

Cláramente **B** es una matriz triangular superior con 1's sobre la diagonal principal. Por lo tanto, **B** es no singular. Como **B** es de orden m+n-1 entonces el rango (**A**) = m+n-1.

Con el fin de ilustrar lo anterior considermos de nuevo la matriz **A** del ejemplo 1.0, eliminando el primer renglón de **A** tenemos la matriz $\mathbf{B}_{4x4}$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{21} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

llevando a cabo permutaciones en los renglones de **B** obtenemos

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{21} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por lo tanto **B** es no singular, como el orden (**B**) = rango (**A**), entonces rango (**A**) = 4. (m+n-1)

Observación: Sabiendo que el rango de **A** es m+n-1 existen dos opciones para seleccionar una base: Puede omitirse el primer renglón que deje m+n-1 restricciones linealmente independientes para los cuales existe una base, o bien, puede añadirse un vector artificial para una de las restricciones. Cuando se aplique el método simplex se seleccionará la segunda opción, por que el simplex trabaja siempre con bases completas, y aumentado **A** con una nueva variable artificial x_a con $\mathbf{e}_{m+n}$ como vector columna

SECCION 2.2 UNIMODULARIDAD DE LA MATRIZ A

La propiedad más importante que tiene la matriz de transporte es la de unimodularidad total. La matriz **A** es *totalmente unimodular* si cumple que:

PROPOSICION:

El determinante de cualquier submatriz cuadrada de **A** tiene un valor de -1, 0 ó +1.

DEMOSTRACION: Se procederá por inducción sobre k. Sea A_k cualquier submatriz cuadrada de **A**, la propiedad es válida para $k=1$, Como los elementos de la matriz de transporte son 0 ó +1, cada submatriz 1 x 1 tiene el valor de 0 ó +1. Además cualquier submatriz de (m+n) x (m+n) tiene un determinante de 0 puesto que el rango de **A** es m+n-1.

Nos faltaría probar que el determinante de cualquier submatriz A_k de **A** con $1 < k < m+n$ tiene un determinante de ±1 ó 0. procedamos por inducción sobre k de la siguiente forma: Se sabe que es cierto para $k=1$, entonces supongamos que vale par $k-1$ y demostremos que vale para k.

Al tomar la submatriz A_k de **A** ocurren tres posibilidades. A saber: Que todas las columnas de A_k contengan dos 1's. si este es el caso, uno de los 1's ocurre en un renglón origen y el otro en un renglón destino, como la suma de los renglones orígenes es igual a la suma de los renglones destinos, entonces el det $A_k=0$. En cualquier otro caso, ó A_k contiene al menos una columna de ceros y entonces el Det $A_k=0$, ó A_k contiene al menos una columna con un solo 1, desarrollando el det A_k sobre los cofactores de esa columna, tendríamos que

$$\text{Det } A_k = \text{Det } A_{k-1}$$

Pero, por hipótesis de inducción se sabe que el Det $A_{k-1} = \pm 1$ ó 0, por lo tanto la propiedad se cumple para A_k. Esto completa la demostración.

SECCION 2.3 TRIANGULARIDAD DE LA MATRIZ BASICA

En la propiedad anterior se dijo que el rango (A) es m+n-1 usando una matriz triangular superior con 1's sobre la diagonal principal. En general se tiene que toda base B del problema de transporte puede representarse como una matriz triangular. Entonces, el sistema **B Y = d** puede resolverse fácilmente en sustitución regresiva. Esta última observación es muy importante por que evita resolver el sistema usando la matriz inversa B^{-1} la cual requiere más cálculos.Demostraremos ahora esta nueva propiedad

PROPOSICION: Toda matriz básica del problema de transporte es una permutación de una matriz triangular.

PRUEBA:

Supongamos que **B** es una matriz básica de **A**, como **A** tiene la propiedad de **unimodularidad** total, se sabe que debe existir una columna de **B** que contenga un solo 1; de lo contrario **Det B = 0**. Permutando renglones y columnas en **B** de tal modo que el 1 quede en la primera posición de la matriz, la nueva matriz **B** es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q} \\ 0 & \mathbf{B}_{m+n-2} \end{bmatrix}$$

Considerando ahora $\mathbf{B}_{m+n-2}$, también debe contener al menos una columna con un solo 1 (de lo contrario **DetB=0**), permutando renglones y columnas en $\mathbf{B}_{m+n-2}$ se obtiene

$$\mathbf{B}_{m+n-2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{B}_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

tomando la matriz $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}$, **B** puede representarse como sigue:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

Al continuar con este procedimiento tendremos que **B** es, en efecto, equivalente a una matriz triangular superior.

Cuando se tiene una matriz básica **B** triangular superior, el sistema básico $\mathbf{BX_B} = \mathbf{b}$ puede resolverse fácilmente. Supongamos que en una matriz básica **B** se efectuan permutaciones de renglones y columnas tal que **B** se hace equivalente a una matriz triangular superior. Entoces **B** tiene un solo elemento en el último reglón y sobre la última columna (sin pérdida de generalidad supongamos que no hubo permutaciones en las columnas) usando la última ecuación se resuelve para $X_{B_{m+n-1}}$, luego, usando este valor resolvemos en la penúltima ecuación para $x_{B_{m+n-2}}$, y así sucesivamente se resuelve en sustitución regresiva hasta encontrar el valor de las m+n-1 variables básicas.

2.4 SOLUCIONES ENTERAS

Como **B** es es una permutación de una matriz triangular superior con 1's sobre la diagonal principal, las operaciones que se realizan de lado derecho al resolver el sistema son sólo sumas y restas, de modo que si a_i $(i=1,2,..,m)$ y b_j $(j=1,2,...,n)$ son todas enteras, se tendrán siempre soluciones enteras. Esta es una propiedad que no tienen los problemas lineales en general. El PT en muchos de los casos puede verse como un problema de programación entera (de hecho en esta tesis así se maneja) y entonces puede resolverse como tal. La ventaja de este modelo es su estructura especial (unimodularidad total) la cual permite un como uno de programación lineal.

Cuando se busca el óptimo, en cada etapa se cambia de un vértice de la región factible a otro adyacente, el cual, por naturaleza es de componentes enteras, y como el óptimo se encuentra en uno de ellos, también es entero.

Por ejemplo, cuando se demostró en el ejemplo 2.0.1 que el rango de **A** es m+n-1 se uso la matriz básica siguiente

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{21} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

llevando a cabo permutaciones de renglones en **B** resulta que el sistema básico puede escribirse:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{21} \end{array} \\
BX_B = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

resolviendo el sistema obtenemos

$$
\begin{aligned}
x_{21} &= 4 \\
x_{11} &= 8 - x_{21} = 4 \\
x_{12} &= 7 \\
x_{13} &= 3
\end{aligned}
$$

2.5 PROPIEDADES DE LOS VECTORES Y_{ij} EN EL TABLEAU SIMPLEX

Puesto que toda base **B** del problema de transporte consiste únicamente en ceros y unos y es triangular con 1's sobre la diagonal principal, entonces los elementos de B^{-1} son todos ±1 ó 0, esto puede verse fácilmente encontrando B^{-1} por medio de la matriz adjunta y tomando como base la propiedad de unimodularidad de la matriz **A**, cada elemento b_{ij} de **B** tendrá un cofactor $B_{ij}=\pm 1$ ó 0, como det $B=\pm 1$, todos los elementos de B^{-1} son 0's ó ±1's . Cada vector Y_{ij} en el tableau simplex se obtiene

$$BY_{ij} = a_{ij}$$

el cual es un sistema de ecuaciones de los elementos de Y_{ij}. Un método para resolver este sistema (aunque no es el que se usa) es la regla de Cramer, utilizando esta regla, el k-ésimo elemento desconocido de Y_{ij} está dado por

$$Y_{ij}k = \frac{\det B_k}{\det B}$$

en donde B_k se obtiene reemplazando de **B** la k-ésima columna por a_{ij}. Entonces B_k es una submatriz cuadrada de **A**, y como **A** es totalmente unimodular, entonces el det $B_k = \pm 1$ ó 0, se sigue que $Y_{ij}k = \pm 1$ ó 0.

Esto sisgnifica que una columna simplex actualizada y_{ij} consite de ±1 y 0's. También demuestra que cualquier vector a_{ij} puede obtenerse mediante una simple suma y resta de vectores básicos. Esta simplicidad sugiere que puede haber un método conveniente para obtener la representación única $By_{ij}=a_{ij}$, y obtenerse fácilmente el tableau simplex asociado con la solución básica. En particular, en la representación del vector no básico $a_{ij} = e_i + e_{m+j}$ en términos de los vectores básicos, debe haber un vector básico de la forma $a_{ik}=e_i + e_{m+k}$ con un +1 en la posición i. Luego debe existir un vector básico a_{lk} con un -1 en la posición m+k que tenga un +1 en la representación básica, pero luego, debe existir otro vector básico a_{ls} con un +1 en la posición l para eliminar el -1 en la posición l del vector a_{lk}, este proceso continua hasta llegar a que, debe existir un vector de la forma $a_{uj}=e_u + e_{m+j}$ con un coeficiente de +1 en la representación básica. Una representacion ilustrativa para culquier vector no básico a_{ij} puede ser:

$$a_{ij} = a_{ik} - a_{lk} + a_{ls} - a_{us} + a_{uj} \qquad \text{......ecuación 2.5.1}$$

$$= (e_i+e_{m+k})-(e_l+e_{m+k})+(e_l+e_{m+s})-(e_u+e_{m+s})+(e_u+e_{m+j})$$

$$= e_i+e_{m+j}.$$

otra forma de escribir esto es

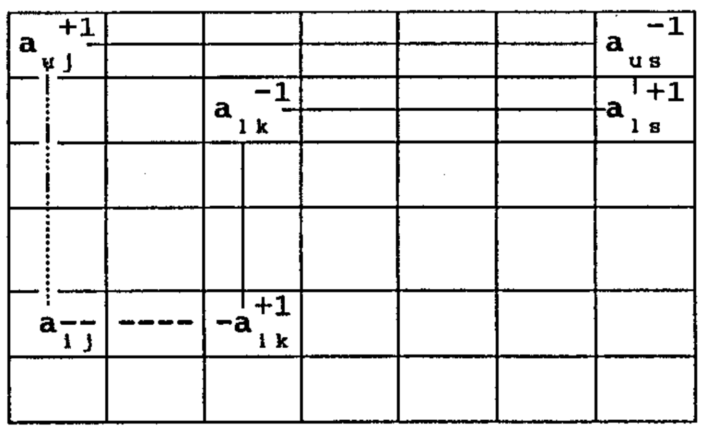
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m+n-1} \alpha_k \, B^k$$

en donde los B^k son los vectores de la base B. (recuerde que los vectores básicos B^k (k=1,2,....,m+n-1) son equivalentes a m+n-1 columnas a_{ij} de la matriz A). Esto último es pues,de acuerdo al simplex, la manera de representar un vector no básico en término de los vectores básicos.

La manera de representar estos vectores no básicos en el tableau del transporte en término de los vectores básicos se ilustra en la gráfica 2.5.1. Con esta gráfica se pueden hacer las siguientes observaciones importantes: La celda (i,j) junto con las celdas (i,k),(l,k),(l,s),(u,s),(u,j) forman un *ciclo* en la matriz (tableau del transporte). Es decir, es una gráfica cerrada. Las celdas (i,k),(l,k),(l,s),(u,s),(u,j) forman una *cadena* (impar) en la matriz entre la celda (i,k) y la celda (u,j). En la gráfica 2.5.1 se omiten todas las celdas básicas que no aparecen en la representación de a_{ij}. Nótese también, de manera importante que los signos de los coeficientes se alternan en la cadena. Esto sugiere que las ecuaciones del simplex en la representación básica de a_{ij} pueden escribirse

$$a_{ij} = \sum_{\alpha_k \neq 0} \alpha_k B^k \qquad \text{donde } \alpha_k = \pm 1$$

omitiendo aquellos $\alpha_k=0$ para los cuales el vector básico B^k no aparece en la representación de a_{ij}.



GRAFICA 2.5.1 Ilustración de la representación de a_{ij} en térmimo de los vectors básicos

En esta última tabla las entradas para cada celda (i,j) corresponde a una variable x_{ij} del problema, que a su vez está asociado con el vector a_{ij} de la matriz **A**. Cuando trabajemos con la celda (i,j) usaremos indistintamente x_{ij} ó a_{ij}.

CAPITULO III

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE Y SU RELACION CON TEORIA DE GRAFICA

En el tema anterior se vio como está caracterizada una base B en el tableau simplex y como puede obtenerse un vector no básico en términos de los vectores básicos. Este capítulo muestra como puede lograrse la representación usando la tabla de transporte, sin necesidad de manejar la tabla del simplex. Lo que sigue es ver que trabajar con el tableau de transporte es equivalente a trabajar con el tableau simplex. Aquí es donde encontraremos la relación del PT con la teoría de gráficas, en la presente tesis no pretendemos profundizar ampliamente en estas relaciones, solo usaremos resultados importantes y sencillos a la vez de la teoría de gráficas para desarrollar de forma más eficiente los pasos del método simplex. Además nos permitirá introducir e ilustrar conceptos básicos de la teoría de gráficas.

2.1.0 ELEMENTOS DE TEORIA DE GRAFICAS

A continuación se dan algunas definiciones de la teoría de gráficas que necesitaremos para presentar el PT desde el punto de vista de la teoría de gráficas

Una *Gráfica* es un conjunto de *Nodos* (puntos o vértices) y *Arcos* (líneas, segmentos, flechas) relacionados entre si, que son utilizados para representar ciertas situaciones. En esta tesis, cada arco que conecta al nodo i con el nodo j se representa por (i,j), al nodo i le llamaremos nodo origen y al j nodo destino. Una *cadena* del nodo i al nodo j es un conjunto de nodos y arcos conectados entre si que muestran un camino para llegar del nodo i al j; En una cadena los arcos no necesariamente estan dirigidos en una sola dirección. Una *trayectoria* es una cadena orientada en un solo sentido, siempre del nodo i al j. Un *Ciclo* es una cadena cerrada, es decir, es una cadena que empieza y termina en el mismo nodo. Un *Circuito* es una trayectoria cerrada. Una *Gráfica Conexa* es quella tal que para cada nodo de la gráfica existe al menos una cadena que lo conecta con el resto de los nodos, en otras palabras, una gráfica es conexa si para cada par de nodos en la gráfica existe al menos una cadena que los une. Un *Arbol* es una gráfica que no contiene ciclos y un *árbol de expansión* es un árbol que involucra a todos los nodos de la gráfica. Una *Terminal* es un nodo para el cual solo hay un arco que lo toca. Las siguientes figuras ilustran las definiciones anteriores

En la teoría de gráficas hay algunas propiedades interesantes que se dan en estructuras especiales, enumeramos a continuación algunas de ellas.

1. Una gráfica que no contiene ciclos de m nodos y m-1 arcos es un árbol.
2.- Si S es un árbol en una gráfica G, y si G contiene al menos dos nodos, entonces S contiene al menos dos terminales.
3.- Si en un árbol se elimina una de sus terminales y su arco inicidente, la gráfica resultante es otro árbol.
4.- Una gráfica conexa que no contiene ciclos es un solo árbol.
5.- Una gráfica conexa contiene al menos un árbol.
6.- En un árbol, dado dos nodos cualesquiera existe un único camino que los une (no hay ciclos).

Veamos ahora que propiedades tiene una base del PT sobre el tableau de transporte.

3.1 CARACTERIZACION DE UNA BASE EN EL TABLEAU DE TRANSPORTE

3.1.1 LAS BASES NO CONTIENEN CICLOS

Veamos primero que tipo especial de estructura forma una base sobre el tableau de transporte y que propiedades tiene para permitirnos cambiar los pasos y criterios que usa el método simplex de tal manera que la solución se obtenga sin resolver propiamente un sistema de ecuaciones.

Para esto consideremos el siguiente tableau de transporte (gráfica 3.1.0), cada celda (i,j) se asocia con una variable x_{ij} a su vez se asociada con el vector a_{ij} básico o no básico dependiendo de la naturaleza de la variable. Denotaremos con una $\mathbb{B}$ aquella celda que corresponda a una variable básica y dejaremos en blanco aquellas celdas correspondientes a variables no básicas. Debe tomarse en cuenta que cada $\mathbb{B}$ estará asociado con una variable básica x_{ij} y un vector a_{ij}, en ocasiones usaremos implícitamente esta relación. Diremos que una celda básica está conectada directamente con otra si y solo si pertenecen al mismo renglón o a la misma columna del tableau.

Al final del capítulo anterior (gráfica 2.5.1) se vió que una celda (vector, variable) no básica junto con un conjunto de celdas (vectores) básicas forman un ciclo en el tableau de transporte. Lo interesante de esto es que los vectores que aparecen en el ciclo nos dan la representación del vector no básico, ahorrándonos el trabajo de resolver el sistema $BY_{ij} = a_{ij}$. Lo anterior muestra una temprana ventaja al no aplicar directamente el simplex.

El conjunto de celdas que forman el ciclo (la no básica y la básicas) forman una *cadena* par, además los signos de los coeficientes se alternan en la cadena y nos indican entre otras cosas si la variable aumenta (+) o disminuye su valor (-) a medida que la variable no básica aumenta.

Al conjunto de celdas utilizadas para representar las variables x_{ij} le llamaremos TABLEAU DE TRANSPORTE (casillero o matriz) Veamos que características tiene una base sobre el tableau de transporte, para luego permitirnos (basados en sus propiedades) reemplazar el tableau simplex por el de transporte.

Tomenos de referencia la gráfica 3.1.1, supongamos que las celdas (p,q),(r,q),(r,s),(u,s),(u,v),(p,v), las cuales forman un ciclo, son básicas. Este ciclo genera la siguiente combinación lineal (por construcción)

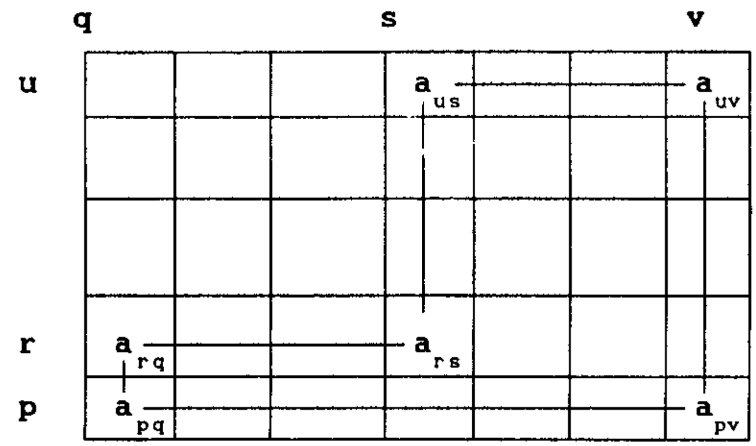
$$a_{pq} - a_{rq} + a_{rs} - a_{us} + a_{uv} - a_{pv} =$$

$$= (e_p + e_{m+q}) - (e_r + e_{m+q}) + (e_r + e_{m+s}) +$$

$$(e_u + e_{m+s}) + (e_u + e_{m+v}) - (e_p + e_{m+v}) = 0$$

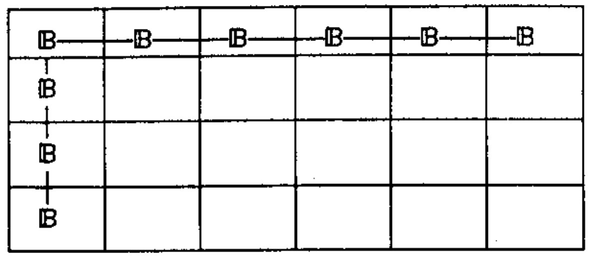
Esta ecuación muestra que los vectores a_{pq}, a_{rq}, a_{rs}, a_{us}, a_{uv},y a_{pv} son linealmente dependientes y por lo tanto no prodrían ser una base. Se ha demostrado así que una base representada como un conjunto de celdas en el tableau de transporte no puede contener un ciclo.

GRAFICA 3.1.1. Una base no puede contener un ciclo.



3.1.2 LA GRAFICA DE LA BASE ES UN ARBOL DE EXPANSION CONEXO

Debe deducirse a partir del tableau de transporte que el rango de la matriz **A** es m+n-1.(*en el tableau de transporte no se muestra la variable artificial usada para completar el rango m+n*). También deduciremos que la gráfica de la base vista sobre el tableau de transporte es un árbol de expansión conexo (suponiendo que el vector artificial esté presente). Demostremos ahora esta afirmación. Se acaba de probar que una base no puede contener ciclos, por lo tanto la gráfica de la base es un árbol o varios árboles. Necesariamente este árbol (o árboles) debe ser de expansión (ver figura 3.1.2) pues si la gráfica de la base no contiene una celda en el reglón i, entonces el i-ésimo renglón de la matriz **B** asociada consiste únicamente de ceros y descalificaría a **B** para ser una base; en otras palabras, en la base **B** no existe ningún vector de la forma $\mathbf{a}_{ij}$ con $j=1,2,\ldots,n$. por lo tanto ningún vector de la base contendrá un 1 en la posición i. El mismo argumento se aplica si la base no contuviera una celda sobre la columna j, en este caso el renglón de ceros será el m+j. Prácticamente diríamos que nos es utilizada la capacidad de oferta del origen i (fábrica i) implicando que la solución no sea factible.



Gráfica 3.1.2 Representación de una base
como un árbol de expansión.

Completaremos la demostración probando que la gráfica de la base es conexa y en consecuencia es un solo árbol. Supongamos que dos celdas básicas cualesquiera, por ejemplo (i,j) y (k,l) son básicas, debe probarse que estan conectadas mediante una cadena de celdas básicas. Si la celda (k,j) es básica las celdas (i,j) y (k,l) estan conectadas mediante la cadena básica $(i,j),(k,j),(k,l)$. Por otro lado, si suponemos que la celda (k,j) no es básica debe tenerse que el vector $\mathbf{a}_{kj}$ puede representarse en término de los vectores básicos de la siguiente manera

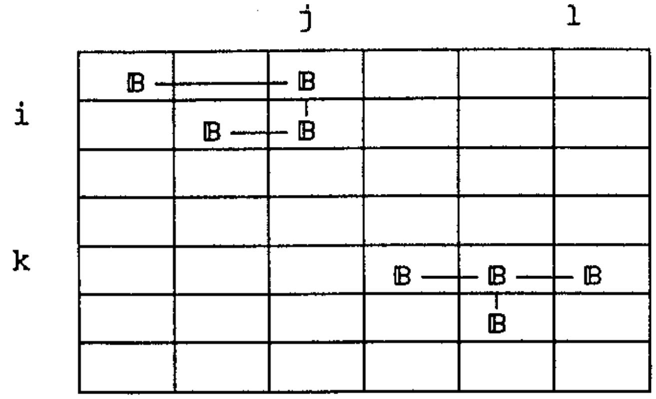
$$\mathbf{a}_{kj} = \mathbf{a}_{rj} - \mathbf{a}_{rs} + \mathbf{a}_{ts} - \ldots\ldots\ldots + \mathbf{a}_{uv} - \mathbf{a}_{up} + \mathbf{a}_{kp}$$

En este caso las celdas básicas (i,j) y (k,l) estan conectadas por la cadena básica

$$\left\{(i,j),(r,j),(r,s),(t,s),\ldots\ldots,(u,v),(u,p),(k,p),(k,l)\right\}$$

Esto prueba que la gráfica de la base es conexa y por lo tanto es un solo árbol. Los argumentos anteriores demuestran la siguiente

PROPOSICION: La representación gráfica de una base en el tableau de transporte es un árbol de expansión conexo. Es decir, todo base en el tableau simplex puede manejarse como un árbol en el tableau de transporte.

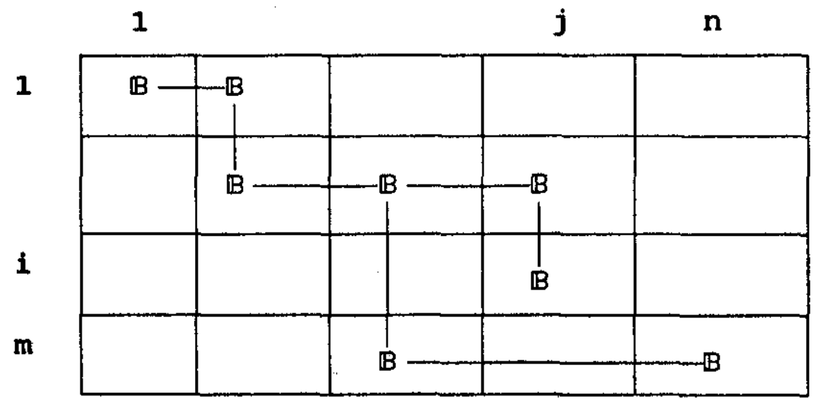


Gráfica 3.1.3 Ejemplo de una estructura que no es un árbol simple

Recuérdese que la intención de mostrar estas equivalencias lleva como fin aplicar los pasos del método simplex directamente del tableau de transporte, para ello, antes debemos probar el recíproco de la proposición anterior a saber: Todo árbol de expansión conexo sobre el tableau de transporte junto con un vector artificial, representa una base en el tableau simplex.

3.2 UN ARBOL DE EXPANSION ES UNA BASE PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Es suficiente probar que la matriz asociada con un árbol de expansión tiene una submatriz triangular superior de orden m+n-1 con 1's sobre la diagonal principal. Nótese que en primer lugar que todo árbol de expansión contiene al menos una terminal, es decir, una celda que tiene a lo más una línea que lo toca, de no tener al menos una se tendría un árbol que contiene ciclos, lo cual es imposible. En la gráfica 3.2.1 se da un ejemplo de un árbol que tiene dos terminales, (1,1) y (m,n). Una terminal puede ilustrarse también como una celda básica única en un renglón o en una columna específica. Si suponemos que la *terminal* es la única celda en un renglón particular, en la gráfica 3.2.1 se ve que la celda (i,j) es la única celda en el renglón i, por lo tanto, es una terminal. En este caso el vector $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{m+j}$ es el único vector del árbol con un elemento distinto de cero en el renglón i. (de haber dos la celda (i,j) no sería una terminal)

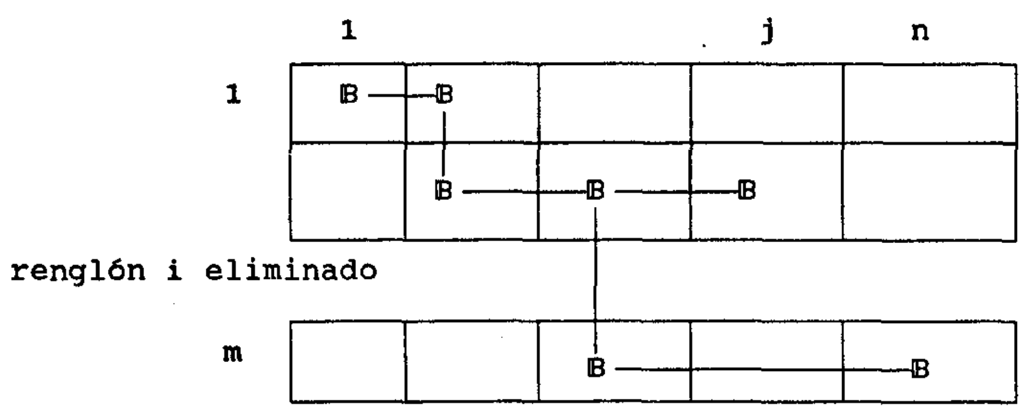


GRAFICA 3.2.1

Sea Q la matriz (m+n) x (m+n-1) vectores del árbol, si efectuamos permutaciones de renglones y columnas de tal forma que el elemento distinto de cero del renglón i esté en el último renglón y última columna de la matriz, entonces Q toma la forma

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_1 & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

en donde Q_1 es la matriz asociada con los vectores del árbol cuando se elimina el renglón i y el vector a_{ij}. Esto equivale a eliminar el renglón i correspondiente a la terminal de la tabla y a la línea que lo toca, al hacerlo se genera un nuevo árbol conexo con la siguiente estructura



GRAFICA 3.2.2

Ahora, considerando la terminal en la celda (k,l), única celda en la columna l, de manera que $a_{kl} = e_k + e_{m+l}$ es el único vector con un elemento distinto de cero en la posición $m+l$. Efectuando de nuevo permutaciones de renglones y columnas en la matriz Q_1 se obtine:

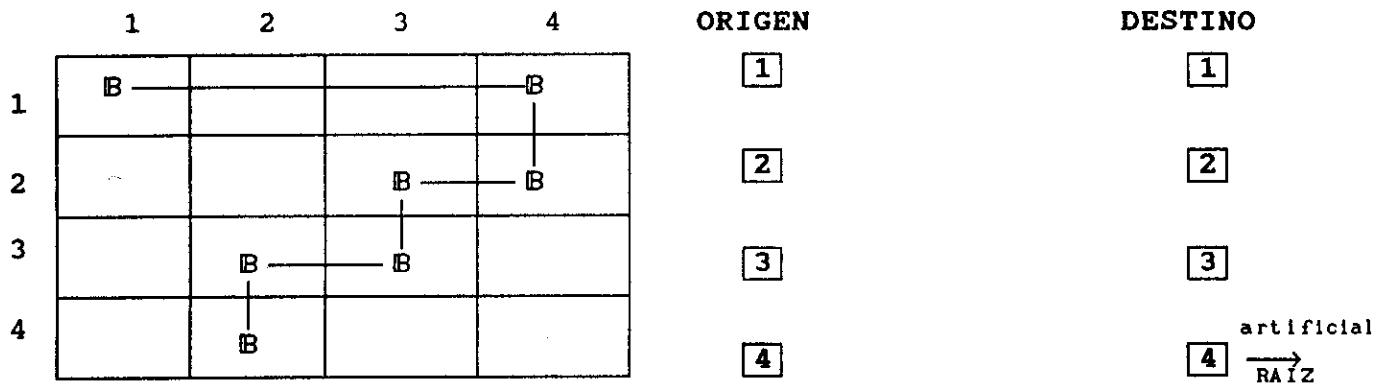
$$Q_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} Q_2 & p & p_2 \\ \hline 0 & 1 & p_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Repitiendo el procedimiento obtendremos una matriz triangular superior (m+n-1) x (m+n-1) con 1's sobre la diagonal principal además de un renglón adicional con m+n-1 elementos. Esto demuestra que el rango de **Q** es m+n-1, y entonces **Q** junto con el vector artificial forma una base para **A**. Ahora veamos la relación que existe entre la distribución de celdas y la red de transporte.

3.3 REPRESENTACION DE LA BASE EN LA RED DE TRANSPORTE

Hasta el momento se sabe que toda base del PT representa un árbol de expansión conexo en el tableau de transporte mas un vector artificial y viceversa. Por otro lado, cada árbol de expansión según las últimas consideraciones corresponde en forma única a un árbol sobre la red de transporte. En particular, cada celda básica (i,j) corresponde a un arco básico en la red, cada línea que conecta dos celdas básicas en el tableau corresponde al nodo origen-destino que conecta los arcos asociados en la gráfica.

La gráfica 3.3.1 muestra a) una base sobre el tableau de transporte y b) La Red de transporte correspondiente con sus nodos y arcos.



GRAFICA 3.3.1

a) una base sobre el tableau de trasporte

b) una base representada en la red de transporte

En adelante resolver el problema de transporte se hará directamente del tableau sobre entendiendo que se llega a la misma solución si los cálculos se hacen sobre la red de transporte y/o sobre el tlableau simplex.

El vector artificial e_{m+n} se representa en la gráfica mediante un arco que sale del nodo n (4) y que no termina en ninguna parte (puede escogerse cualquier otro nodo). La estructura de la red b) se llama un árbol de expansión con raíz, en donde la raíz denota la variable artificial x_a.

SECCION 3.4 REPRESENTACION DE UN VECTOR NO BASICO EN TERMINO DE LOS VECTORES BASICOS.

Como el método simplex en el proceso de actulización de la base requiere conocer cual es la representación de un vector no básico en término de los básicos, aprovecharemos la herramienta de la teoría de gráficas introducida en este capítulo para lograr tal representación. Podemos decidir si obtenemos la representación directamente del tableau o de la red de transporte. Si escogemos el tableau, el ciclo único asociado con cada celda no básica (entiéndase variable o vector) se obtiene omitiendo aquellas celdas básicas que no contengan otra celda básica en su mismo renglón o columna, por que una celda aparecerá en el ciclo únicamente si nos permite movernos sobre el renglón o la columna para seleccionar otra variable básica. Por otro lado, si la representación deseamos obtenerla de la red de transporte, solo necesitamos localizar el ciclo único asociado con el arco no básico, sin desechar ninguno puesto que la red de transporte ya se encuentra depurada.

Nuestra intención es usar el tableau para resolver el PT y de ahí obtendremos el ciclo. Sin embargo, el problema que puede presentarse (igualmente en la red) en un momento dado, es no contar con una representación visual del ciclo por falta de espacio cuando el número de celdas es muy elevado. El siguiente procedimiento nos dice como encontrar en tales circunstancias la cadena única en la representación de una celda no básica y además como desechar implícitamente todas aquellas celdas que no se requieren en la representación.

SECCION 3.5

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR EL CICLO UNICO PARA UNA VARIABLE NO BASICA EN EL TABLEAU DE TRANSPORTE

Supongamos que la celda no básica que deseamos representar es la celda (i,j). Entonces se empieza tachando todas aquellas columnas de la tabla, las cuales tienen una única celda básica, excepto la columna correspondiente a la celda no básica (i,j). Omitiendo las columnas eliminadas, se usa la nueva tabla para tachar todos aquellos renglones que contengan una única celda básica (excepto el renglón i). El proceso continua· tachando columnas y renglones hasta lograr una tabla que no contengan ningún renglón y ninguna columna con una sola celda. En este caso, las celdas que aparecen en la tabla final forman el ciclo y son las que dan la representación de la celda (i,j). Recuérdese que en la representación siempre se van alternando los signos sin importar el sentido en que se recorra el ciclo.

Con el siguiente ejemplo veremos como obtener el ciclo para representar una celda no básica apartir del tableau y a partir de la red de transporte. Supongamos que tenemos el siguiente árbol de variables básicas en un tableau de transporte y que deseamos representar a_{32} en término de los vectores básicos.

GRAFICA 3.5.1 REPRESENTACION DE UNA BASE EN EL TABLEAU

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2	B				
3	B		B	B	B
4			B		

La red de transporte correspondiente a esta base es la siguiente:

ORIGEN	DESTINOS
1	1
2	2
3	3
4	4
	5

GRAFICA 3.5.2

Usando esta gráfica tenemos que el ciclo único para la celda (3,2) es (3,2), (1,2), (1,1), (3,1). Omitiendo el arco no básico (3,2) resulta la cadena básica única (1,2), (1,1), (3,1). Además, estas arcos tienen alternados signos +1 y -1 cada vez. La representación así obtenida es:

$$a_{32} = a_{12} - a_{11} + a_{31}$$

Lo anterior puede verificarse mediante

$$e_3 + e_{4+2} = (e_1 + e_{4+2}) - (e_1 + e_{4+1}) + (e_3 + e_{4+1})$$

Para localizar la representación de a_{32} directamente del tableau de transporte , observamos que el ciclo correspondiente a la celda (3,2) está formado por (3,2), (1,2), (1,1), (2,1), (3,1). Omitiendo la celda no básica (3,2) resulta la cadena única. Finalmente deben omitirse todas aquellas celdas básicas que no contengan otra celda básica en el mismo renglón y en la misma columna. Por lo tanto deberá omitirse la celda (2,1). Así, las celdas (1,2), (1,1), y (3,1) forman la cadena válida que da la representación para el vector a_{32}. Esta cadena es la misma que la obtenida anteriormente

$$a_{32} = a_{21} - a_{11} + a_{31}$$

GRAFICA 3.5.3 Representación del vector a_{32} usando el tableau de transporte

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2	B				
3	B	$\square$	B	B	B
4			B		

El ciclo correspondiente al vector a_{32} es

$$
\begin{tikzcd}
a_{11}^{+} \arrow[r] & a_{12}^{-} \arrow[d] \\
a_{31}^{-} \arrow[u] & \boxed{a_{32}}^{+} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Por otro parte, utilizando el procedimiento de tachar columnas y renglones, el ciclo para a_{32} se obtiene de la siguiente manera:

PRIMER PASO: Tachar la columna 4 y 5. La tabla resultantes es

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2	B				
3	B	$\square$	B		
4			B		

GRAFICA 3.5.4

SEGUNDO PASO.- Tachar aquellos renglones que contengan una sola celda básica. En este caso, debe tacharse el renglón 2 y el renglón 4. La nueva tabla es ahora:

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2					
3	B	□	B		
4					

GRAFICA 3.5.5

TERCER PASO: Por último se tacha la columna 3, es la única columna en la tabla que contiene una celda única. La tabla resultante es:

	1	2	3	4	5
1	B +	B −			
2					
3	B −	□ +			
4					

GRAFICA 3.5.6

Como no existe ningún renglón y ninguna columna con una sola celda básica (a excepción de los correspondientes a la celda (3,2)) las celdas que aparecen en la tabla forman el ciclo para la representación del vector $a_{32} = a_{12} - a_{11} + a_{31}$

$$\begin{tikzcd} a_{11}^{+} \arrow[r] & a_{12}^{-} \arrow[d] \\ a_{31}^{-} \arrow[u] & \boxed{a_{32}}^{+} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Veamos ahora un segundo ejemplo para obtener la resentación directamente del tableau del vector no básico a_{42} ciado con la celda no básica (4,2), utilizando el método de ar columnas y renglones.

PASO.- En la tabla 3.5.1 tachar las columnas que contengan sola celda básica (a excepción a la que corresponde la celda). Por lo tanto, deben tacharse las columnas 4 y 5. La tabla obtenida es la siguiente

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2	B				
3	B	□	B		
4			B		

GRAFICA 3.5.7

En el segundo paso tachamos el renglón 2. Como no exite n reglón o columna que contenga una celda única (excepto la orresponde a la celda no básica). Las celdas que aparecen en bleau forman el ciclo que da la representación para el vector ciclo correspondiente es :

	1	2	3	4	5
1	B +	B −			
2					
3	B −		B +		
4		□ +	B −		

GRAFICA 3.5.8

resentación para el vector es $a_{42} = a_{43} - a_{33} + a_{31} - a_{11} + a_{12}$

R15 1999

EL PAPEL DE LA VARIABLE ARTIFICIAL EN EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Cuando un problema de programación lineal se resuelve aplicando el método simplex es necesario empezar con una maatriz de restricciones de rango total. Como la matriz de transporte **A** es de rango m+n-1 se require agregar una variable artificial x_a para completar el rango m+n, obteniendo la matriz aumentada $(\mathbf{A},\mathbf{e}_{m+n})$. Cualquier solución básica contendrá m+n columna linealmente independiente, por lo tanto la variable artificial siempre permanecerá en la solución, además, como en la representación de un vector no básico siempre aparecen únicamente vectores básicos asociados a la cadena única de celdas, entonces el vector artificial nunca aparece en esta representación. Por lo tanto, el valor de la variable artificial siempre estará a nivel cero, cuando apliquemos el método simplex al PT sobre el tableau, podemos precindir de la variable artificial.

CAPITULO IV

EL ALGORITMO DE TRANSPORTE

Este es uno de los capítulos central de la tesis en donde se define cada uno de los detalles para resolver un problema de transporte hasta encontrar el óptimo. Primeramente se muestra como balancear un PT agregando orígenes y destinos ficticios con el fin de que se cumpla la condición de factibilidad que nos permite resolver el problema. Luego, se describe el Método de aproximaciones de Vogel utilizado para obtener una solución básica factible al PT aplicado a un ejemplo prototipo. La parte final comprende la aplicación del algoritmo de transporte utilizando los resultados de teoría de gráficas del capítulo III y los criterios del método simplex del apéndice A.

El problema que se quiere resolver es:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para } i=1,2,\dots,m \qquad j=1,2,\dots,n$$

donde a_i y b_j son enteros positivos. Para ilustrar todos los elementos involucrados se acostumbra hacer una tabla de costos y otra de flujos a la que llamaremos tabla de transporte o tableau de transporte (indistintamente) tal como se muestra a continuación:

C O S T O S

	1	2	....	n	
1	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}	a_2
⋮	⋮			⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	....	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	....	b_n	

F L U J O S

	1	2	....	n	
1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	a_2
⋮	⋮			⋮	⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	....	x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	....	b_n	

Tabla 4.1.1

El tableau o tabla de transporte permite desarrollar un mecanismo de solución más fácil de seguir que el de presentar el problema de transporte en forma de modelo de restricciones, el algoritmo que se presenta en este capítulo nos dirá como encontrar el óptimo sin necesidad de usar el tableau del simplex.

SECCION 4.4 EL DUAL DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

De acuerdo al sistema de ecuaciones 1.5.0, capítulo I, sección 1.5, página 21, del problema **PRIMAL** para el PT, designando las variables duales u_i para los orígenes y v_j para los destinos, el problema **DUAL** es el siguiente:

PROBLEMA DUAL

$$\text{Maximizar} \quad Z = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m + b_1v_1 + \ldots\ldots + b_nv_n$$

sujeto a

$$\left.\begin{array}{llll}
u_1 & + v_1 & & \le c_{11} \\
u_1 & & + v_2 & \le c_{12} \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
u_1 & & + v_n & \le c_{1n} \\
u_2 & + v_1 & & \le c_{21} \\
u_2 & & + v_2 & \le c_{22} \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
u_2 & & + v_n & \le c_{2n} \\
\ddots & & & \vdots \\
\ldots u_m & + v_1 & & \le c_{m1} \\
 & & + v_2 & \le c_{m2} \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & + v_n & \le c_{mn}
\end{array}\right\} \quad \ldots(4.4.1)$$

u_i **y** v_j **no restringidas en signo**

Dado que cualquier restricción del problema primal es redundante, a cualquier variable dual del sistema (4.4.1) se le puede asignar un valor arbitrario. Se tiene un sistema con m.n ecuaciones y m+n variables duales. Esto es, para acada variable básica en el primal se tiene una restricción en el dual. Ya que la matriz de coeficientes para las restricciones del sistema (4.4.1) es la traspuesta de la base correspondiente al sistema original, la base para el problema dual también es triangular. Entonces si se tiene una solución actual al problema de transporte:

1) Se puede escoger el valor de cualquier variable dual (ya sea una u_i ó v_j).

2) Se puede calcular el valor de las demás variables en virtud de la triangularidad de la base. Se resolverán ecuaciones de la forma $u_i + v_j = c_{ij}$ para cada variable no básica.

3) El valor de los costos reducidos para cada variable no básica se calculará por la fórmula

$$c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

4) Puede también verificarse la optimalidad de la solución básica. Si la solución es óptima todos los costos reducidos para las variables no básicas serán positivos o cero (para el caso de minimización).

$$c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$$

si se tienen algunos costos reducido negativos, entonces la variable con el costo reducido más negativo debe entrar a la base

Tenemos ahora la posibilidad de desarrollar un nuevo algorimo para resolver el problema de transporte basados directamente en el tableau de transporte. En adelante al aplicar el nuevo algoritmo supondremos que nos es difícil para el lector ver la equivalencia de pasos con el método simplex.

En el caso de que la oferta total sea diferente a la demanda total, esto es, $\sum a_i \neq \sum b_j$, el problema está desbalanceado y deberá añadirse ya sea un origen ó un destino ficticio, con tal de satisfacer esa diferencia. Una vez balanceado se satisface la condición necesaria y suficiente para que el problema tenga solución. El procedimento para balancear un PT es el siguiente :

4.1 BALANCEO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Un problema de transporte inicialmente puede no estar balanceado, es decir, la oferta total puede ser diferente a la demanda total. Si la demanda excede a la oferta, se agrega un origen ficticio que suministrará la cantidad de $\sum b_j - \sum a_i$. Si existe un exceso de oferta se añade un destino ficticio que absorverá el excedente $\sum a_i - \sum b_j$. Los costos de "transporte" por unidad del producto desde un origen ficticio a todos los destinos son ceros, ya que esto equivale a no transportar desde el origen ficticio. De forma semejante los costos de "transporte" por unidad desde todas las fuentes a un destino ficticio son cero. Físicamente las cantidades enviadas desde un origen ficticio pueden interpretarse como escasez de la demanda, mientras que los asignados a un destino ficticio pueden interpretarse como capacidades no utilizadas en los orígenes.

Si el problema tiene significado físico y la condición de factibilidad no se cumple $\sum a_i \neq \sum b_j$ por lo común significa que a_i, o bien b_j, representan una cota en lugar de un requerimiento exacto. Si este es el caso se introduce un "origen" o un "destino" ficticio para captar la holgura con el fin de convertir las desigualdades en igualdades y satisfacer la condición de factibilidad.

Ya que la oferta de un origen ficticio representa escasez en destinos, puede ser deseable asignar costos de penalización (en lugar de ceros) a las entradas de un origen ficticio para reflejar el fracaso del abastecedor para satisfacer las demandas requeridas. Una idea similar puede usarse en costos de penalización a las cantidades asignadas a un destino ficticio que representa tener sobreproducción originando gastos de almacenaje o de otro tipo. Cuando existe sobreproducción indica que los centros demandadores no tienen capacidad para distribuir el total del producto. Dependiendo del contexto del problema podrá interpretarse el significado de un origen o destino ficticio.

4.2 METODO SIMPLEX APLICADO AL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Una vez balanceado el problema de transporte el siguiente paso es encontrar una solución básica factible inicial. Para esto existen varios métodos que pueden usarse, algunos de los más conocidos son:

1)Método de la Esquina Noroeste
2)Método de Costo Mínimo
3)Método de Aproximaciones de Vogel (MAV)
4)Método de Russel

En el desarrollo de la tesis usaremos el Método de Aproximaciones de vogel (MAV) por ser el más usado en la teoría de transporte, y por que generalmente da una solución inicial mas "cercana" al óptimo que otros métodos.

Después de tener la solución básica inicial al PT, debe verificarse si esta solución es óptima, o bien, si debe elegirse una variable no básica que entre a la base, así sucesivamente continuar con las iteraciones hasta encontrar el óptimo. En esto último es donde entra el algoritmo del transporte basado en el tableau de transporte directamente simplificando los pasos del método simplex. Existen diversos algoritmos para resolver el PT, dos de los algoritmos de programación lineal para esto son :

1) Método de Multiplicadores Duales (Variable Dual)
2) Método del Banquillo (Stepping-Stone)

Usaremos en esta tesis el primer método basado en las variables duales ya que es más simple que el segundo, además de ilustrar claramente como el algoritmo de el transporte está basado en el método simplex (es decir, este método muestra que, aplicar el algoritmo de transporte es equivalente a aplicar el Método Simplex de manera mas eficiente)

4.3 UN EJEMPLO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE

El siguiente problema de transporte servirá para explicar el método de aproximacion de Vogel (MAV) que da la solución inicial y también para explicar el algoritmo completo de transporte que nos lleva a la solución óptima. La razón de elegir un ejemplo algo complicado para el trabajo de tesis, es con el fin de ser más extensos en el enfoque.

EJEMPLO 4.3.1 Supóngase que cierta empresa nacional tiene dos fábricas y tres centros de ventas. La empresa está planeado la calendarización de su producción para los próximos dos meses. La oferta para los meses 1 y 2 es respectivamente 4000 y 5500 toneladas de producto para la planta 1, 7500 y 10,500 toneladas para la planta 2. De la misma manera se han pronosticado las ventas para los períodos 1 y 2 en cada uno de sus tres centros de consumo. Para el primer centro serán de 5000 y 4000 toneladas; para el segundo centro serán de 8000 y 6000 toneladas, y para el último serán 1000 y 10,000 toneladas. El costo unitario de transporte (en miles de pesos) por toneladas de producto de cada fábrica a los centros de consumo se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 4.3.1 Costos de Transporte

		DESTINOS 1	2	3
ORIGENES	1	5	6	8
	2	10	4	2

El problema que se quiere resolver es encotrar un programa que indique a la compañía como debe transportar su producto de sus dos fábricas a sus tres centros de consumo de tal forma que se use la mayor parte de la oferta y se satisfaga la mayor parte posible de la demanda total requerida minimizando los costos totales de transporte.

El problema de transporte así planteado no puede formularse de modo general como un problema único para ambos períodos. Es necesario formular por separado un problema de transporte para cada período de venta, ya que si se intenta resolver conjuntamente crea la dificultad de manejar para cada período una fábrica distinta y un destino distinto, lo cual trae complicaciones de tiempo y de cálculo, además habría demasiadas combinaciones de origen-destino que no podrían hacerse por estar en diferente período. Por esta razón formularemos un problema de transporte para el primer período de manera separada, más adelante resolveremos el problema para el segundo período. La tabla de transporte (costos) en el primer período es la siguiente:

TABLA 4.3.2 Tabla de costos para el primer perído

		DESTINOS 1	2	3	OFERTA a_i
ORIGENES	1	5	6	8	4000
	2	10	4	2	7500
DEMANDA b_j		5000	8000	1000	

En este caso la demanda total de 14,000 toneladas excede a la oferta total de 11,500 toneladas. Por lo tanto debe agregarse un origen ficticio que surta el excedente de la demanda en los destinos. Los costos de transporte se hacen cero para todas las asignaciones que se hagan del origen ficticio a cualquiera de los destinos.

La siguiente tabla muestra un PT balanceado donde el tercer origen es un origen ficticio.

TABLA 4.3.3 Problema de transporte balanceado

ORIGENES		DESTINO 1	2	3	OFERTA a_i
	1	5	6	8	4000
	2	10	4	2	7500
ficticio →	3	0	0	0	2500
DEMANDA b_j		5000	8000	1000	

Encontremos ahora una solución básica inicial aplicando el Método de aproximaciones de Vogel descrito anteriormente.

SECCION 4.4

4.41 ALGORITMO PARA ENCONTRAR UNA SOLUCION INICIAL AL PROBLEMA DE TRANSPORTE USANDO EL METODO DE APROXIMACIONES DE VOGEL (MAV) (METODO DE PENALIZACIONES)

Dentro de los algoritmos para obtener una solución inicial al problema de transporte, el método más usado es el MAV conocido también como el método de penalizaciones. La ventaja de usar este método es obtener la mayoría de las veces una solución "más cercana" al óptimo que los otros El MAV se basa en una comparación con los elementos de costos de tal forma que las asignaciones en determinadas variables incurrirán en una penalización en el costo total, el efecto de esta penalización es elevar el costo de transporte por cada unidad de asignación que se haga en la variable de costo inmediato superior, de ahí que este método empiece haciendo asignaciones a las variables que tengan la penalización mayor (y de costo mínimo). El procedimiento es el siguiente:

METODO DE APROXIMACIONES DE VOGEL

PASO 1.- Constrúyase una matriz de costos y de flujos asociados al problema balanceado y váyase al paso 3.

PASO 2.- Utilísece el remanente de costos y de flujos una vez que se hayan actualizado.

PASO 3.- Calcular las penalizaciones para cada renglón y columna restando el elemento de costo mínimo de cada renglón y columna al elemento de costo inmediato superior.

PASO 4.- Seleccionar el renglón o columna con la penalización mayor.

PASO 5.- Asignar tanto como sea posible a la variable de costo mínimo del renglón o columna seleccionado en el paso 4. Hágase $x_{ij} = \text{Min}(a_i, b_j)$ donde x_{ij} es la variable de costo mínimo seleccionada. La oferta en el origen i es ahora $\hat{a}_i = a_i - x_{ij}$ y la demanda en el destino j es ahora $\hat{b}_j = b_j - x_{ij}$. Si $a_i - x_{ij} = 0$, llénese el renglón i de la matriz de flujos con ceros, a excepción de la posición (i,j) y de las asignaciones básicas existentes hasta el momento. Elimínese ese renglón en el cálculo de penalizaciones futuras. Si $b_j - x_{ij} = 0$, llénese la columna j de la matriz de flujos con ceros, a excepción de la posición (i,j) y de las asignaciones básicas existentes en esa columna. Elimínese esa columna de cualquier consideración futura. Si un reglón o columna se satisface simultáneamente solo uno de ellos deberá ser tachado (los empates se rompen arbitrariamente) y el reglón (columna) restante se le asigna una oferta (demanda) cero. Cualquier renglón o columna con oferta o demanda cero no deberán ser considerados al calcular penalizaciones futuras. En el caso en el que $\hat{a}_i = \hat{b}_j$ produce degeneración y se analizará posteriormente. por el momento se supondrá que la igualdad nunca ocurre.

REGLA DE DETENCION

a) Si exáctamente un renglón o columna permanece sin estar tachado, pare (las penalizaciones).

b) Si exáctamente un renglón (columna) con oferta (demanda) positiva permanece sin estar tachado, determine las asignaciones para las variables básicas por el método de costo mínimo, pare.

c) Si todos los renglones y columnas no tachados tienen oferta y demanda cero, determine las variables básicas (degeneradas) por el método de costo mínimo, pare.

d) En cualquier otro caso deben calcularse las penalizaciones para los renglones y columnas no tachados y regresar al paso 2.

Cuando un reglón o columna se satisfacen simultáneamente al final producirá variables básicas al nivel cero dando una solución degenerada al problema de transporte, pero esto no crea ningún problema como ocurre en el método simplex ya que las variables básiscas ceros se tratan igual que las cantidades positivas.

4.42 SOLUCION INICIAL DEL EJEMPLO PROTOTIPO

Apliquemos ahora el MAV al ejemplo prototipo usando la tabla 4.3.3 del problema balanceado

TABLA 4.4.1

ORIGENES		DESTINO 1	2	3	OFERTA a_i
	1	5	6	8	4000
	2	10	4	2	7500
ficticio →	3	0	0	0	2500
DEMANDA b_j		5000	8000	1000	

Paso 2.- Cálculo de las diferencias de filas y columnas

TABLA 4.4.2

	1	2	3	penalizacion por renglon
1	5	6	8	1
2	10	4	2	2
3	0	0	0	0
penalizacion por columnas	$\boxed{5}$	4	2	

se encierra en un rectángulo aquella penalización que resultó mayor, en este caso corrresponde a la primera columna.

Paso 4.- Se selecciona la columna 1 por tener la penalización mayor (5).

Paso 5.- La variable de costo mínimo en la columna 1 es x_{31} con c_{31}= 0 encerrado en un círculo, hacemos entonces

$$x_{31} = \text{mín} \{ a_3 , b_1 \} = \text{mín} \{ 2500, 5000 \} = 2500$$

la oferta del tercer origen y la demanda en el primer destino es ahora

$$\hat{a}_3 = 2500 - x_{31} = 2500 - 2500 = 0$$

$$\hat{b}_1 = 5000 - x_{31} = 5000 - 2500 = 2500$$

como $\hat{a}_3 = 0$, todos los elementos de la matriz de flujos de renglón 3 se hacen cero, a excepción de x_{31}. Se elimina el renglón 3 de cualquier consideración futura.

Como todavía existen renglones y columnas con oferta y demanda positiva, debe continuarse el algoritmo. Al regresar al paso 2, la matriz de costos y flujos a utilizar son las siguientes:

TABLA 4.4.3 MATRIZ DE COSTOS

	1	2	3	a_i
1	5	6	8	4000
2	10	4	2	7500
ficticio 3	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~2500~~
b_j	5000	8000	1000	

TABLA 4.4.4 MATRIZ DE FLUJOS

	1	2	3	a_i
1				4000
2				7500
ficticio 3	2500	0	0	0
b_j	2500	8000	1000	

SEGUNDA ITERACION:

Paso 3.- Cálculo de penalizaciones a la matriz de costos

TABLA 4.4.5 Matriz de costos tachando la columna 3

	1	2	3	penalizacion por renglon
1	5	6	8	1
2	10	4	2	2
3				
penalizacion por columnas	5	2	$\boxed{6}$	

Paso 4.- Seleccionamos la tercera columna por tener la penalización mayor $\boxed{6}$.

Paso 5.- En la columna 3 el costo mas pequeño corresponde a c_{23} =2. Por lo tanto la variable que debe asignarse es x_{23} = min { a_2,b_3 } x_{23} = min { 7500, 1000 } = 1000. Ajustando de nuevo la oferta y la demanda obtenemos

$$\hat{a}_2 = 7500 - x_{23} = 7500 - 1000 = 6500$$

$$\hat{b}_3 = 1000 - x_{23} = 1000 - 1000 = 0$$

como $\hat{b}_3 = 0$, todos los elementos del tercer destino deberán hacerse cero, a excepción de la posición x_{23}. Se elimina la tercera columna de cualquier consideración futura.

Paso 6.- Al regresar al paso 2, la matariz de costos y la de flujos estan dadas por:

TABLA 4.4.6 MATRIZ DE COSTOS

	1	2	3	a_i
1	5	6		4000
2	10	4		6500
ficticio 3				0
b_j	2500	8000	0	

TABLA 4.4.7 MATRIZ DE FLUJOS

	1	2	3	a_i
1			0	4000
2			1000	6500
ficticio 3	2500	0	0	0
b_j	2500	8000	0	

Aplicando sucesivamente el MAV, las tablas de costo y flujo para iteraciones subsiguientes vienen dadas por :

TERCERA ITERACION

TABLA 4.4.8 PENALIZACIONES

	1	2	3	pemalizacion por renglon
1	5	6		1
2	~~10~~	~~4~~		$\boxed{6}$
3				
penalizacion por columnas	5	2		

TABLA 4.4.9 MATRIZ DE COSTOS

		1	2	3	a_i
	1	5	6		4000
	2	10	4		0
ficticio	3				0
	b_j	2500	8000	0	

TABLA 4.4.10 MATRIZ DE FLUJOS

		1	2	3	a_i
	1			0	4000
	2	0	6500	1000	6500
ficticio	3	2500	0	0	0
	b_j	2500	8000	0	

ITERACION 4.- Solamente queda un renglón sin tachar, en este caso el renglón 1. El paso 6 del algoritmo del MAV indica que las asignaciones deben hacerse por el método de costo mínimo. La matriz de costos en la iteracion 4 tiene la forma:

TABLA 4.4.11 MATRIZ DE COSTOS

		1	2	3	a_i
	1	$\boxed{5}$	6		4000
	2				0
ficticio	3				0
	b_j	2500	1500	0	

Por lo tanto, debe asignarse primeramente x_{11} = min { a_1, b_1}= min{4000 , 2500 } = 2500. Finalmente hacemos x_{21} = 1500. La solución inicial así obtenida se presenta en la siguiente tabla

TABLA 4.4.12 MATRIZ DE FLUJOS

SOLUCION INICIAL

		1	2	3	a_i
	1	2500	1500	0	4000
	2	0	6500	1000	7500
ficticio	3	2500	0	0	2500
	b_j	5000	8000	1000	

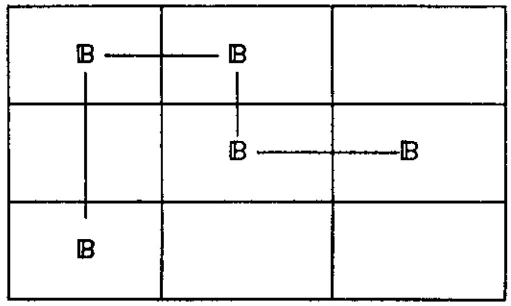
Esta solución es básica y factible pues contiene $m+n-1=3 + 3 -1 =5$ variables básicas positivas, además se satisface la oferta disponible en cada origen y la demanda total requerida en los destinos.

Para efectos prácticos escribimos la solución básica factible inicial sobre la tabla de transporte indicando únicamente las variables básicas y omitiendo aquellas para las cuales el flujo es nulo (en este caso variables NO básicas).

TABLA 4.4.13 MATRIZ DE FLUJOS

		1	2	3	a_i
	1	2500	1500		4000
	2		6500	1000	7500
ficticio	3	2500			2500
	b_j	5000	8000	1000	

Representación de la base en el tableau de transporte
(Arbol de expansión conexo)



GRAFICA 4.1

El costo total de transporte asociado a la solución inicial

$$Z = 5(2500) + 6\ (1500) + 4\ (6500) + 2\ (1000) + 0\ (2500)$$
$$Z = 12500 + 9000 + 26000 + 2000$$
$$Z = 49{,}500.$$

La red de transporte asociada con la solución inicial tien forma:

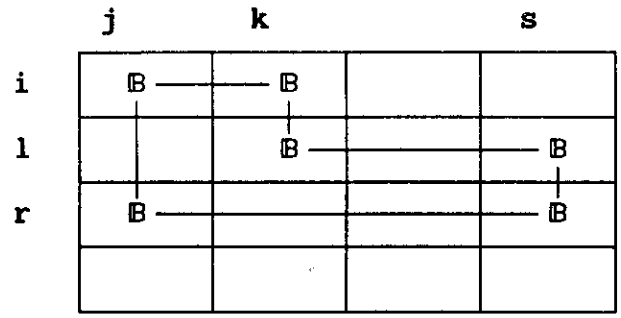
OFERTA a_i	**ORIGEN**	**DESTINO**	**DEMANDA b_j**
4000	1	1	**5000**
7500	2	2	**8000**
2500	3	3	**1000**

Todos los flujos (arcos) que salen del origen (nodo) fic 3 a cualquiera de los destinos, en la práctica se interpretan asignaciones que no se hacen. Por lo tanto, el flujo x_{31} insatisfecho el centro de consumo 1 en 2500 unidades (pc momento).

4.43 EL MAV PROPORCIONA UNA SOLUCION INICIAL BASICA FACTIBLE

En el ejemplo anterior el MAV proporcionó una solución inicial básica factible con m+n-1 variables básicas positivas como se requiere en el PT. En general, el algoritmo del MAV siempre proporciona una solución inicial básica factible al PT. Analicemos esto en la solución obtenida, tómese de referencia la gráfica 4.1. Es claro que la estructura que forman las celdas es una gráfica de expansión conexa, Para demostrar que la gráfica es un árbol de espansión, y por lo tanto una base, solo falta probar que no contiene ciclos.Es obvio que la gráfica de la tabla 4.1 no contiene ciclos, en general, cuando se está llevando a cabo el algoritmo del MAV (en la ausencia de degeneración producirá m+n-1 variables x_{ij} positivas. Cada vez que se asigna a un x_{ij} un valor positivo, se satisface una restricción, cuando se han asignado valores a m+n-1 variables entonces se han satisfecho m+n-1 restricciones, pero como una de las restricciones en el PT es redundante, se tiene que todas las restricciones se satisfacen. Nota: si se presenta el caso degenerado, asignar un valor a x_{ij} no necesariamente se satisface una nueva restricción, en el MAV esto se presenta hasta el final del algoritmo)

Por otro lado, supongamos que la gráfica de la solución contiene un circuito de la forma (i,j) —> (i,k) —> (l,k) —> (l,s) —> —> (r,s) —> (r,j) —> (i,j). Donde las flechas indican el orden en que fueron asignadas. Nótese que al asignar en primer lugar la variable x_{ij} , automáticamente la columna j se satisface. Suponiendo que todas las variables que aparecen en el ciclo son positivas y recordando que el MAV al hacer una asiagnación positiva satisface una restricción, Por lo tanto, asignar un valor positivo a x_{rj} contradice el hecho de que la primera asignación x_{ij} había dejado satisfecha la columna j. Por otro lado, si la asignación para x_{rj} es cero !y básica! contradice el hecho de que al satisfacer la columna j con x_{ij} inicialmente, el resto de las variables báicas a nivel cero en esa columna eran no básicas. Por lo tanto, se ha demostrado que la gráfica de la solución inicialproporcionada por el MAV no contiene ciclos, la cual forma entonces una base para el problema de transporte.



GRAFICA 4.2

la solucion proporcionada por el MAV no contiene ciclos

El siguiente paso del algoritmo del simplex es determinar si esta solución es óptima, es decir, debe calcularse los costos reducidos $z_{ij} - c_{ij}$ para cada variable no básica. Utilizando las propiedades de la matriz de transporte se presenta en seguida los pasos del **"Algoritmo De Transporte"** basado en el tableau que facilita los cálculos del método simplex.

4.5 EL ALGORITMO DE TRANSPORTE

PASO 1.- Balancear el problema de transporte para satisfacer la condición necesaria y suficiente para obtener una solución óptima, es decir, $\sum a_i = \sum b_j = C$.

PASO 2.- Encontrar una solución inicial aplicando el algoritmo del **MAV** o cualquier otro método.

PASO 3.- Construir una nueva matriz de costos tomando en cuenta únicamente los **m + n - 1** variables básicas. Hágase

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} \qquad \text{si } x_{ij} \text{ es básica}$$

$$\hat{c}_{ij} = 0 \qquad \text{si } x_{ij} \text{ es no básica}$$

$\hat{c}_{ij}$ es el costo asociado a la variable x_{ij} en la nueva matriz de costos.

PASO 4.- Calcular los valores de las variables duales utilizando la fórmula:

$$u_i + v_j = \hat{c}_{ij} \qquad (4.5.1)$$

resolviendo el sistema de m+n variables con m+n-1 ecuaciones. Por lo tanto se tiene un grado de libertad con lo cual se puede asignar a cualquier variable u_i ó v_j un valor arbitrario. Así, queda por resolver un sistema de m+n-1 ecuaciones con m+n-1 incógnitas. (De preferencia se asigna un valor arbitrario de cero a la variable u_i que más veces aparece en las ecuaciones).

<u>OBSERVACION:</u> La facilidad de resolver ecuaciones del tipo (4.5.1) estas nos permiten obtener también directamente del tableau las u_i y v_j sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones para las variables duales. (a la hora de aplicar el Algoritmo de Transporte al ejemplo "prototipo" se explicará como calcular el valor para estas variables).

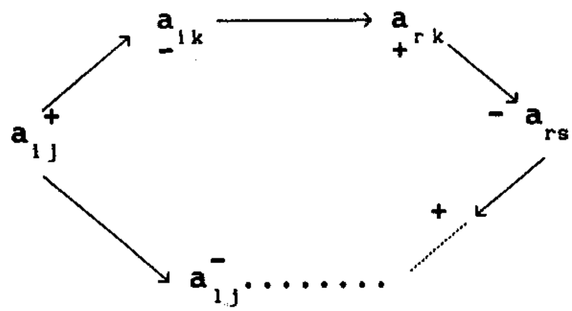
PASO 5.- Se calculan los valores de $z_{ij} - c_{ij}$ para cada variable no básica x_{ij}. Con el objeto de mantener los criterios utilizados en la programación lineal (caso de maximización) se calculan los costos reducidos con la fórmula $z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Si todos los $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$ la solución actual es óptima. En caso contrario se introduce a la base la variable correspondiente al- $c_{ij} - z_{ij}$ más negativo.

PASO 6.- Determinación de la variable que sale

Una vez elegida la variable que entra x_{ij} en el paso 5, debe determinarse la variable que sale cuidando de que el valor asignado a la variable entrante x_{ij} no desequilibre la oferta y la demanda en el origen i y en el destino j para mantener una solución factible. El modo de lograr esto es encontrar la representación del vector a_{ij} en término de los vectores básicos, los cuales forman un circuito en el tableau de transporte en la forma:

$$a_{ij} = a_{ik} - a_{rk} + a_{rs} - \ldots\ldots + a_{lj}$$

gráficamente se ilustraría así :



GRAFICA 4.3. Representación de un ciclo para
una variable no básica

Por lo tanto cada variable con un signo - en la representación de a_{ij}, disminuirá su valor en una unidad, por cada unidad asignada a la variable entrante x_{ij}. Por otro lado, cada variable con un signo + en la representación, aumentará su valor en una unidad por cada unidad asisgnada a x_{ij}.

Por ejemplo, si x_{ij} entra a la base con un cierto valor positivo β, la oferta a_i y la demanda b_j se desequilibrarán en un valor de $\pm\ \beta$ el cual debe de compensarse. La representación básica de x_{ij}. se logra utilizando el circuito que proporciona el tableau, comenzando con la variable no básica x_{ij} y conectándola con las variables básicas de la solución. De tal forma que el circuito inicie y termine en la variable x_{ij} , alternando signos + y - dependiendo si la variable básica aumenta o disminuye su valor a medida que x_{ij} (la variable que entra) aumenta. Dado que cada componente de Y_{ij} es +1, -1 ó 0, entonces, la regla usada para determinar el pivote nos dice que

$$\beta = \text{Min} \left\{ x_{ij} \ / \ \text{la celda (i,j) tiene un -1 en la representación de la celca no básica} \right\}$$

o bien

$$\beta = \text{Min} \left\{ x_{ij} \ / \ x_{ij} \text{ disminuye su valor a medida que } \beta \text{ aumenta} \right\}$$

el paso 6 puede resumirse como sigue

a) Constrúyase el circuito único que contiene a la variable x_{ij} que entra a la base usando el tableau de transporte.

b) $x_{ij} = \beta$, donde β es el mínimo de todos los valores básicos en el circuito que disminuyen su valor a medida que β aumenta. (estas variables se identifican con un -1 en la representación). Dado β se procede a ajustar los valores de las variables a lo largo del ciclo, de acuerdo con el signo del coeficiente. Con esta nueva solución regresar al paso 3.

4.5.1 EL ALGORITMO DE TRANSPORTE APLICADO AL EJEMPLO PROTOTIPO

Tomando en cuenta todo lo dicho hasta el momento apliquemos el **ALGORITMO DE TRANSPORTE** al ejemplo prototipo, usando la tabla 4.4.12 de la solución inicial proporcionada pr el MAV

PRIMERA ITERACION

TALBA 4.5.1 MATRIZ DE COSTOS

D E S T I N O

ORIGENES		1	2	3	OFERTA a_i
	1	5	6	8	4000
	2	10	4	2	7500
ficticio →	3	0	0	0	2500
DEMANDA b_j		5000	8000	1000	

TABLA 4.5.2 MATRIZ DE FLUJOS

		1	2	3	a_i
	1	2500	1500		4000
	2		6500	1000	7500
ficticio	3	2500			2500
	b_j	5000	8000	1000	

PASO 3.- TABLA 4.5.3 NUEVA MATRIZ DE COSTOS

DESTINO

ORIGENES		1	2	3
	1	5	6	
	2		4	2
ficticio →	3	0		

PASO 4.- Las ecuaciones para el problema dual asociado son:

$$u_1 + v_1 = 5$$
$$u_1 + v_2 = 6$$
$$u_2 + v_2 = 4$$
$$u_2 + v_3 = 2$$
$$u_3 + v_1 = 0$$

Haciendo $u_1 = 0$ (arbitrario), la solución del sistema es:

$$v_1 = 5 - u_1 = 5$$
$$v_2 = 6 - u_1 = 6$$
$$u_2 = 4 - v_2 = 4 - 6 = -2 \quad \text{.........(4.5.2)}$$
$$v_3 = 2 - u_2 = 2 + 2 = 4$$
$$u_3 = 0 - v_1 = -5$$

Como el cálculo de los u_i y v_j es bastante sencillo estos pueden calcularse directamente del tableau actual, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones 4.5.2. Haciendo $u_1 = 0$ y recordando que $u_i + v_j = c_{ij}$. Cada intersección de renglón y columna en la tabla de costos relaciona una variable u_i con una variable v_j, cada costo c_{ij} nos define el valor de dos variables (una u_i y una v_j). Se comienza con el renglón de la variable u_i a la cual se le asignó un valor de cero (arbitrario), encontrando todas las v_j que tengan intersección con el renglón i, se procede a buscar intersecciones con las columnas de las variables v_j encontradas. Así sucesivamente hasta obtener el valor de las m+n variables duales.

El procedimiento anterior tiene la ventaja de que podemos encontrar las u_i y v_j rápidamente sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones duales, dando como resultado un ahorro de tiempo y cálculos considerable. Es
ta es la finalidad que se busca
al sustituir el método simplex por el **ALGORITMO DE TRANSPORTE.**

Los valores para las variables u_i y v_j se presentan directamente en el tableau siguiente

TABLA 4.5.4

D E S T I N O

ORIGENES		1	2	3	
	1	5	6		$u_1 = 0$ (arbitrario)
	2		4	2	$u_2 = -2$
ficticio →	3	0			$u_3 = -5$
		$v_1=5$	$v_2=6$	$v_3=4$	

Paso 5.- Cálculo de los costos reducidos para cada variable no básica utilizando la fórmula

$$\boxed{c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)} \qquad (4.5.3)$$

$$x_{13} \longrightarrow \quad c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 + 4) = 4$$

$$x_{21} \longrightarrow \quad c_{21} - (u_2 + v_1) = 10 - (-2 + 5) = 7$$

$$x_{32} \longrightarrow \quad c_{32} - (u_3 + v_2) = 0 - (-5 + 6) = \boxed{-1}$$

$$x_{33} \longrightarrow \quad c_{33} - (u_3 + v_3) = 0 - (-5 + 4) = 1$$

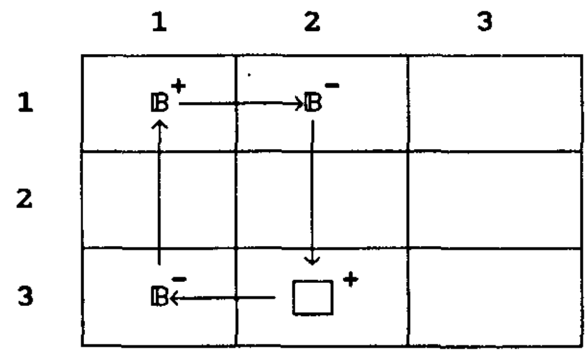
SISTEMA 4.5.4

como el costo reducido para x_{32} es negativo la solución actual no es óptima; en este caso la variable que entra es x_{32} correspondiente al c_{ij}-z_{ij} más negativo.

OBSERVACION : Los costos reducidos c_{ij}-z_{ij} pueden obtenerse (al igual que las variables duales) directamente a partir del tableau sin necesidad de resolver explícitamente el sistema de ecuaciones **4.5.4.** En la siguiente tabla se mustran los valores calculados de los c_{ij} - z_{ij}para cada casilla (celda) no básica La forma de obtener estos valores es la siguiente: Tomando en cuenta las intersecciones de renglones y columnas que relacionan a las variables duales u_i y v_j con sus valores mostrados en la tabla, encontramos los valores para los c_{ij}-z_{ij} realizando mentalmente las operaciones de suma y resta en la ecuación 4.5.3. Los costos c_{ij} utilizados en esta ecuación son los costos originales para las variables no básicas.

Con este nuevo procedimiento no tenemos que resolver las ecuacioes del tipo 4.5.3 para cada variable no básica, resultando un procedimiento más rápido y sencillo, lo cual da al **ALGORITMO DE TRANSPORTE** una ventaja todavía mayor sobre el método simplex; Esto lo hace ser más eficiente.

Segundo paso.- Tachar el único renglón que contiene una sola celda, en este caso el renglón 2.



GRAFICA 4.6

como no existe otro renglón o columna con celda únicas; las variables que aparecen en la tabla forman el circuito único para la celda (3,2) asociado con la variable x_{32} para darnos la representación del vector $\mathbf{a}_{32}$.

Este circuito también pudo obtenerse a partir de la gráfica de trasporte tal como se ilustra a continuación:

De acuerdo al circuito obtenido (gráfica 4.6), el valor con el que x_{32} entra a la base viene dado por

$$x_{32} = \text{Min}\left\{ \text{variables que disminuyen su valor} \right\}$$

$$x_{32} = \text{Min}\left\{ x_{31}\ ,\ x_{12} \right\} = x_{12}$$

$$x_{32} = \text{Min}\left\{ 2500\ ,\ 1500 \right\} = 1500$$

$$x_{32} = 1500$$

Por lo tanto, la variable que sale es x_{13}. Al ajustar las variables del circuito la nueva solución básica factible es:

$$x_{31} = 2500 - x_{32} = 2500 - 1500 = 1000$$

$$x_{11} = 2500 + x_{32} = 2500 + 1500 = 4000$$

$$x_{12} = 1500 - x_{32} = 1500 - 1500 = 0 \text{ (sale de la base)}$$

La tabla correspondiente a esta nueva solución es la siguiente

TABLA 4.5.6 MATRIZ DE FLUJOS
(SEGUNDA SOLUCION)

	1	2	3	a_i
1	4000			4000
2		6500	1000	7500
ficticio 3	1000	1500		2500
b_j	5000	8000	1000	

Al regresar al paso 3 la nueva matriz de costos a utilizar es la siguiente

SEGUNDA ITERACION

PASO 3.- TABLA 4.5.7 NUEVA MATRIZ DE COSTOS

DESTINO

ORIGENES	1	2	3
1	5		
2		4	2
ficticio → 3	0	0	

Paso 4.- Utilizando la nueva matriz de costos, los valores de las variables duales son los siguientes:

TABLA 4.5.8

D E S T I N O

ORIGENES		1	2	3	
	1	5			$u_1 = 1$
	2		4	2	$u_2 = 0$ (arbitrario)
ficticio →	3	0	0		$u_3 = -4$
		$v_1 = 4$	$v_2 = 4$	$v_3 = 2$	

Paso 5.- Calculando ahora los costos reducidos $c_{ij}-z_{ij}$ directamente desde la tabla y encerrándolos en un cuadro para distinguirlos se tiene

TABLA 4.5.9

D E S T I N O

ORIGENES		1	2	3	
	1	5	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$u_1 = 1$
	2	$\boxed{6}$	4	2	$u_2 = 0$ (arbitrario)
ficticio →	3	0	0	$\boxed{2}$	$u_3 = -4$
		$v_1 = 4$	$v_2 = 4$	$v_3 = 2$	

como todos los $c_{ij}-z_{ij} \geq 0$ para todas las variables no básicas, la solución actual es óptima. La Red de trasporte para esta solución es la siguiente:

OFERTA a_i	ORIGEN	DESTINO	DEMANDA b_j
4000	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	5000
7500	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	8000
2500	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	1000

El costo de transporte generado por esta solución es

$$\begin{aligned} \text{COSTO} = \quad Z &= 5(4000) + 4(6500)\ )2\ (1000) + 0(1000) + 0(1500) \\ &= 20000 + \ 26000 + 2000 \\ &= 48\ 000 \quad \text{(MILES)} \end{aligned}$$

O bien, utilizando el efecto del costo reducido actual para la última variable entrante:

$$Z = 49500 - \boxed{1}\ (1500) = 48000$$

El ejemplo prototipo plantea un problema con una oferta total de 11,500 unidades y una demanda total de 14,000 unidades. Por lo tanto se tiene una demanda insatisfecha. La manera óptima de no satisfacer estas demandas, es dejando insatisfecho el primer centro de consumo (flujo x_{31}) en 1000 unidades, y el centro de consumo 2 (flujo x_{32}) en 1500 unidades. Como estos flujos provienen del origen ficticio 3, realmente no se hacen.

EL TABLEAU SIMPLEX ASOCIADO CON UN TABLEAU DE TRANSPORTE

Una vez proporcionada la solución actual al PT, se cuenta con todos los elementos necesarios para construir el tableau simplex asociado a un tableau de transporte actual. Los vectores columna Y_{ij} y los costos reducidos $c_{ij}-z_{ij}$ pueden obtenerse a partir de la tabla usando los procedimientos mencionados en el algoritmo del transporte, además el tableau proporciona las variables básicas actuales. Como ejemplo, consideremos el ejemplo prototipo del problema del transporte

La matriz de costos inicial es la siguiente:

D E S T I N O

ORIGENES		1	2	3	OFERTA a_i
	1	5	6	8	4000
	2	10	4	2	7500
ficticio →	3	0	0	0	2500
DEMANDA b_j		5000	8000	1000	

TABLA 4.5.10

La solución inicial que obtuvimos con el MAV juntos con los costos reducidos se resumen en la siguiente tabla

D E S T I N O

ORIGENES		1	2	3	
	1	2500 +	1500 −	$\boxed{4}$	$u_1 = 0$ (arbitrario)
	2	$\boxed{7}$	6500	1000	$u_2 = -2$
ficticio →	3	2500 −	$\boxed{-1}$ +	$\boxed{1}$	$u_3 = -5$
		$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	

TABLA 4.5.11

El tableau simplex asociado con el tableau de transporte anterior es

Z	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_a	L D
1	**0**	**0**	**-4**	**-7**	**0**	**0**	**0**	$\boxed{+1}$	**-1**	**0**	**49500**
0	1	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	2500
0	0	1	1	-1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	1500
0	0	0	-1	1	1	0	0	0	-1	0	6500
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1000
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2500
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

La verificación de los Y_{ij} puede hacerse al construir los circuitos correspondientes a las variables no básicas usando la tabla 4.5.11, el cálculo de los $c_{ij}-z_{ij}$ se obtuvo cuando se aplicó el algoritmo del MAV para encontrar la solución inicial.

Tanto el tableau del simplex como el tableau de transporte muestran que x_{31} es la variable que entra a la base (coeficiente de +1 en la función objetivo) y x_{12} la variable que sale de la base.

APENDICE A

EL METODO SIMPLEX

Este apéndice tiene como finalidad presentar los pasos que utiliza el método simplex y cuales son las modificaciones que deben hacerse para aplicar directamente del tableau el algoritmo de transporte visto en capítulo IV.

Cualquier columna de la matriz **A** de transporte, designada por $\mathbf{a}_{ij}$ es de la forma

$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longrightarrow \text{posicion } i \\ \\ \\ \longrightarrow \text{posicion } m+j \\ \\ \\ \end{array} \qquad \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{m+j}$$

Como el rango de **A** = m+n-1, cualquier base **B** del problema de transporte será de orden m+n-1 (ó m+n si se elige el vector artificial). Sea esta base **B** la siguiente

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}^1\ \mathbf{B}^2\ \ldots\ldots\mathbf{B}^{m+n-1} \right] \quad \text{ó} \quad \mathbf{B} = \left[\mathbf{B}^1\ \mathbf{B}^2\ldots\mathbf{B}^{m+n-1}\ \mathbf{B}^{m+n} \right]$$

si agregamos el vector artificial donde $\mathbf{B}^{m+n} = \mathbf{e}_{m+n}$

donde $\mathbf{B}^k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ son m+n-1 columnas linealmente independientes de **A** de la forma $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{m+j}$. Cualquier vector $\mathbf{a}_{ij}$ que no esté en la base **B**, puede escribirse como una combinación lineal de los $\mathbf{B}^k$, es decir

$$\mathbf{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{m+n} Y_{ij}^k\ \mathbf{B}^k$$

En el capítulo II, seccióm 2.5 se dijo que los Y_{ij} son 0 ó ±1. En forma matricial se tiene

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{B}\ \mathbf{Y}_{ij}$$

donde

$$\mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} Y^1_{ij} \\ Y^2_{ij} \\ \vdots \\ Y^{m+n}_{ij} \end{bmatrix}$$

ACTUALIZACION DE LA SOLUCION BASICA X_B

sea X_B una solución básica factible del PT

$$X_B = \begin{bmatrix} X_B{}^1 \\ X_B{}^2 \\ \vdots \\ X_B{}^{m+n} \end{bmatrix}$$

sea $\mathbf{a}_{pq}$ el vector que va entrar a la base, y sea B^r el vector que va a salir de **B**. La nueva solución básica $\hat{X}_B$ es:

$$\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B{}^1 \\ \hat{X}_B{}^2 \\ \vdots \\ \hat{X}_B{}^{m+n} \end{bmatrix}$$

donde

$$\hat{X}_B = X_B{}^k - \frac{Y^k_{pq}\ X_B{}^r}{Y^r_{pq}} \qquad \text{si } k \neq r$$

$$\hat{X}_B{}^r = \frac{X_B{}^r}{Y^r_{pq}} \qquad \text{si } k = r$$

Como $\hat{X}_B$ es factible y todas la Y^k_{ij} son 0 ó ± 1, se concluye que Y^r_{pq} es igual a +1. (en la regla que se utiliza para determinar el vector de salida el pivote siempre debe ser positivo). Por lo tanto

$$\hat{X}_{B^k} = X_{B^k} \pm X_{B^r} \quad \text{con } k \neq r \quad (\text{para } Y^k_{pq} \neq 0) \ldots\ldots 4.1.1$$

$$\hat{X}_{B^r} = X_{B^r}$$

Tomando en cuenta la ecuación 4.1.1 y si todas la ofertas a_i y todas las demandas b_j son enteras, entonces concluimos que X_B es entero. Por otra parte, se tiene ademas que cualquier vector a_{ij} que no está en la base puede escribirse como

$$a_{ij} = \sum_{k \in L} \pm B^k \qquad \text{donde } L = \left\{ k \;/\; Y^k_{ij} \neq 0 \right\}$$

En la parte final del capítulo III, sección 3.4 se dijo que la representación para a_{ij} puede obtenerse diréctamente del tableau de transporte, encontrando el ciclo único de celdas básicas asociadas con la celda no básica (i,j).

DETERMINACION DE LA VARIABLE QUE SALE DE LA BASE

Haciendo un resumen de todo lo anterior podemos decir que dada una solución factible X_B la nueva solución $\hat{X}_B$ puede obtenerse fácilmente si conocemos los Y_{ij} para cada vector no básico, los cuales son ±1 ó 0. Además estos valores se obtienen de forma sencilla usando la tabla de transporte. La ventaja principal es obtener la nueva solución como una simple suma o resta de la solución anterior, esto es, $\hat{X}_{B^k} = X_{B^k} \pm X_{B^r}$ con $k \neq r$ que son enteras siempre que a_i y b_j lo sean. Se sabe también que $\hat{X}_{B^r} = X_{B^r}$ en donde X_{B^r} se obtuvo como la variable que sale usando el criterio de la razón mínima tal como de muestra a continuación.

$$\underset{1 \leq k \leq m+n}{\text{Mín}} \left\{ \frac{X_{B^k}}{Y^k_{pq}} \right\} \qquad \ldots\ldots\ldots 4.2.1$$

como Y^k_{pq} es el pivote, entonces $Y^k_{pq} = +1$. Por lo tanto, obtener el mínimo en la ecuación 2.0, se convierte en

$$\underset{k \in M}{\text{Mín}} \left\{ X_{B^k} \right\} \qquad \text{donde } M = \left\{ k \;/\; Y^k_{ij} = +1 \right\}$$

Es decir, la variable que sale es la de valor mínimo en la representación de a_{pq}. Siempre y cuando X_B^k tenga un +1 en la representación.

CRITERIO DE ELECCION PARA LA VARIABLE QUE ENTRA

Lo que sigue es determinar si la solución básica actual es óptima, esto según el simplex es calcular los costos reducidos $z_{ij} - c_{ij}$ para cada celda no básica. Si la solución no es óptima <u>deberá elegirse una variable de entrada como aquella que tenga el costo reducido mas positivo.</u>

CALCULO DE LOS COSTOS REDUCIDOS $Z_{ij} - C_{ij}$.
(vía sistemas de ecuaciones)

El cálculo de los z_{ij} y el de los costos reducidos están determinados por lo siguiente: Para cada a_{ij} se define z_{ij} así

$$z_{ij} = C_B Y_{ij} \qquad \text{donde} \quad C_B = (c_B{}^1 \;\; c_B{}^2 \; \ldots\ldots \; c_B{}^{m+n})$$

donde C_B es el vector de costos básicos.

y

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} Y^1_{ij} \\ Y^2_{ij} \\ \vdots \\ Y^{m+n}_{ij} \end{bmatrix}$$

entonces

$$z_{ik} - c_{ij} = (c_B{}^1 Y^1_{ij} \;\; c_B{}^2 \; Y^2_{ij} \ldots\ldots c_B{}^{m+n} \; Y^{m+n}_{ij})$$

$$= C_B Y_{ij} - c_{ij} = C_B B^{-1} a_{ij} - c_{ij}$$

Como todos los Y^{k}_{ij} son ±1 ó 0, también $C_B Y_{ij}$ se calcula sumando y restando los costos de algunas variables básicas. Por ejemplo:

$$z_{ij} = C_B Y_{ij} = c_B^{l} - c_B^{r} + \ldots\ldots + c_B^{s}$$

El criterio de optimalidad para el PT es el siguiente: Si todos los $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ (o bien $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$) la solución actual es óptima. (en el presente trabajo se usará el criterio de $z_{ij} - c_{ij} \geq 0$ por ser el más usado en la teoría de programación lineal). Una celda dada (k,l) es un candidato para entrar a la base si $c_{kl} - z_{kl} \leq 0$ Luego entonces, para determinar si la solución actual es óptima debemos de calcular los costos reducidos $c_{kl} - z_{kl}$ para cada variable no básica. Por ejemplo, usando los datos de la siguiente tabla obtenemos:

$\boxed{8}$ B	$\boxed{6}$ 2	$\boxed{5}$ B
$\boxed{4}$ -1	$\boxed{1}$ B	$\boxed{2}$ B

$$c_{12} - z_{12} = 6 - (5 - 2 + 1) = 6 - 4 = 2$$

$$c_{21} - z_{21} = 4 - (2 - 5 + 8) = 4 - 5 = -1$$

se ve que x_{21} es un candidato para entrar a la base por que su costo reducido es negativo.

El procedimiento anterior para calclular $c_{ij} - z_{ij}$ utiliza la fórmula

$$c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - (c_B^{l} - c_B^{r} + \ldots\ldots + c_B^{s})$$

Por la forma en que son obtenidos los Y_{ij}, el método anterior se conoce como el *Método del Ciclo* o el Método *Stepping-Stone*. Existe otro método alternativo para el cálculo de los $c_{ij} - z_{ij}$ tal como se muestra a continuación:

$$c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} a_{ij}$$

haciendo $W = C_B B^{-1}$ obtenemos

$$c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - c_{ij} - W.a_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4.3.2$$

donde W es el vector $W = (u_1 \; u_2 \; \ldots . u_m \; v_1 \; v_2 \ldots . . v_n)$. Según el tableau simplex al tener una base actual B, los valores de las variables duales están dados por $C_B B^{-1}$

TABLEAU SIMPEX

1	$C_B B^{-1} A - C$	$C_B B^{-1}$	$C_B B^{-1} b$
0	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

variables duales

Por lo tanto W es el vector de variables duales. donde u_i $(i=1,2\ldots,m)$ son las variables para los orígenes y v_j $(j=1,2,\ldots,n)$ para los destinos.

$$\text{Puesto que} \quad a_{ij} = e_i + e_{m+j} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow \text{posicion } i \\ \\ \longrightarrow \text{posicion } m+j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\text{y} \quad W = (u_1 \; u_2 \ldots u_m \; v_1 \; v_2 \ldots . . v_n)$$

tenemos $$W\, a_{ij} = W\,(e_i + e_{m+j}) = We_i + We_{m+j} = u_i + v_j$$

La ecuación 4.3.2 adquiere la forma

$$c_{ij}-z_{ij} = c_{ij} - \mathbf{W}a_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j) \quad ....4.3.3$$

La simplicidad de esta última ecuación nos dice como evaluar los $c_{ij}-z_{ij}$ para todos los vectors $\mathbf{a}_{ij}$ que no esten en **B**, partiendo del supuesto de que todos los $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{v}_j$ son conocidos. En otras palabras, para encontrar los $c_{ij}-z_{ij}$ es necesario conocer el valor de las variables duales $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{v}_j$. Como $\mathbf{W} = C_B\mathbf{B}^{-1}$ entonces **W** es solución del sistema $\mathbf{WB} = C_B$. Pero **B** es triangular superior lo que implica que el sistema puede resolverse fácilmente en sustitución regresiva.

Por ejemplo:

$$\text{Sea } \mathbf{B} = \left[\ \mathbf{a}_{pq}.....\mathbf{a}_{rs},\ \mathbf{e}_{m+n}\ \right] \text{ una base para el PT}$$

y
$$C_B = \left[\ c_{pq}.......c_{rs},\ c_a\ \right] \text{ el vector de costos}$$

donde c_a es el costo asociado a la variable artificial que por definición es cero. Luego, como $\mathbf{a}_{ij}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{m+j}$ el sistema $\mathbf{WB} = C_B$ es equivalente al sistema

$$\begin{array}{l} u_p + v_q = c_{pq} \\ \quad\vdots \\ u_r + v_s = c_{rs} \\ \qquad v_n = 0 \end{array} \qquad .... \ \mathbf{(4.3.4)}$$

sustituyendo el valor de $\mathbf{v}_n = 0$ en cada una de las ecuaciones que aparece, se resuelve para alguna (s) variable(s) **u**. Con este nuevo valor de **u** se sustituye para encontrar una nueva variable **v** y así sucesivamente hasta encontrar el valor de las m+n variables.

NOTA: En el caso que no se use el vector artificial e_{m+n}, la base **B** será de orden m+n-1 y el sistema (4.3.4) **WB** = C_B será

$$\begin{aligned} u_p + v_q &= c_{pq} \\ &\vdots \\ u_r + v_s &= c_{rs} \end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

un sistema de m+n-1 ecuaciones con m+n variables. Por lo cual se tiene un grado de libertad. Asignado el valor de $u_i=0$ ó $v_j=0$ para alguna $i=1,2,\ldots,m$ ó $j=1,2,\ldots,n$ (de preferencia la variable u_i que más veces aparece en las ecuaciones) el sistema (4.3.5) se resuelve por sustitución regresiva.

Observación: El valor de $u_i=0$ ó $v_j=0$ se escoge por convenciencia, cualquier otro valor arbitrario distinto de cero producirá los mismos resultados para los costos reducidos $c_{ij}-z_{ij}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A Taha Hamdy "Investigación de operaciones (una introducción)"

[2] E.Barsov "Que es la programación lineal"

[3] Calvillo Vives Gilberto "Métodos de la programación lineal"

[4] Gass Saul "Programación Lineal"

[5] Hernández H. Héctor y Ruiz M. Ricardo "Tesis: Método Simplex aplicado a problemas de dietas con variables acotadas"

[6] Hiller Frederick y J. Lieberman "Introducción a la investigación de operaciones".

[7] Martínez O. Efraín, Mejía T. Juan y Tapia R. Horacio "Elementos de programción lineal".

[8] Mokhtar Bazaraa y John J. Jarvis "Programación Lineal y flujo en redes"

[9] Prawda Juan "Métodos y modelos de la investigación de operaciones"