nte u eel <sup>2</sup>cm –



tuas Octa No. 85 Exp. No. 9023204-8

En la ciudad de Kermasillo, Sonoro, Mex sundo las 18:00 horas del dea 17 de mayo de 1995 se suniexon en el aula 9 K-205 del Deportamente de matemáticas de la Universidad de Sonora, la unoses:

> Dr. Roben Flores Espinoza. MC Eduardo tellechea Armenta M.C Carlos A. Robles Corbala.

lajo la presidencia del primero g fungiendo como sustoxio el último pora efection il examen profisional de Toja No. 84 la cassesa de: Libro Vo. 01 Lucuiado en matemáticas

at As. Refuel Rabesto Raman Diquesoa

Despuée de haber presentado ser teril intitulada: "3-Voriedader, un aspecto en su clasificación: Las Espacios Lente h (p, 9), la gue surramente le fue aprobada por el Jurado, le señose sinodales replicason al sustendante y despuée de debatin entre si reservoda y l'élemente lo

la sustantinte

CARININAUO SOR OBABOSGA

acto continuo el cresidente del Quiado le hijo sales el sesultado de Luc examen y para constoxua se levorta la presente e domon la

## Universidad de Sonora Departamento de Matemáticas

## Tesis

3-Variedades, un aspecto en su clasificación: Los Espacios Lente L(p,q)

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Rafael Roberto Ramos Figueroa



EL SABER DE MIS HIJOS BIAHA MI GRANDEZA BIBLIOTECA DEPARTAMENTO D' MATEMATICAS

Hermosillo, Sonora, 17 de Mayo de 1995

# Contenido

# Introducción

| CAPITULO | I           |   |              |
|----------|-------------|---|--------------|
| Asnectos | Topológicos | v | Algebraicos. |

| 1.1.  | Espacios Topológicos                              |     |
|-------|---|-----|
| 1.2.  | Aplicaciones Continuas                            | 13  |
| 1.3.  | Topología Inducida                                | 19  |
| 1.4.  | Topología Producto                                | 25  |
| 1.5.  | Topología Cociente                                | 28  |
| 1.6.  | Preliminares Algebraicos                          | 41  |
| 1.7.  | Espacios Compactos (Más sobre Topología)          | 47  |
| 1.8.  | Espacios de Hausdorff                             | 51  |
| 1.9.  | Espacios Conexos                                  | 56  |
| 1.10. | Caminos y Espacios arco-conexos                   | 60  |
|       |   |     |
| CAPIT | CULO II   |     |
| n-var | iedades y la clasificación de las 2-variedades.   |     |
|       |   | . * |
| 2.1.  | n-variedades                                      | 67  |
| 2.2.  | Variedades orientables, no orientables            |     |
| •     | y compactas                                       | 68  |
| 2.3.  | Enunciado del Teorema de Clasificación para       |     |
|       | Superficies Compactas                             | 77  |
| 2.4.  | Clasificación de 2-variedades con borde conexas y |     |
|       | compactas   | 79  |
|       |   |     |

## CAPITULO III

Homotopía y el Grupo Fundamental Espacios Cubriente.



EL SAREN POLICIO (RELEA HA A EL CAPTO LA PROPERTI (SE C PERMINISTE (SE C PERMINISTE (SE C PERMINISTE (SE C)

1

| 3.1. Homotopías de Aplicaciones Co             | ontinuas             | 81  |
|--|----------------------|-----|
| 3.2. Multiplicación de Caminos                 |                      | 87  |
| 3.3. Construcción del Grupo Fundam             | mental               | 93  |
| 3.4. Espacios Cubriente                        |                      | 96  |
|  |                      |     |
|  |                      |     |
|  |                      |     |
| CAPITULO IV                                    |                      |     |
| Una definición por construcción de             | los espacios L(p,q). |     |
|  |                      |     |
| 4.1. S <sup>3</sup> como espacio lente         |                      | .05 |
| 4.2. Una definición por construcci             | .ón de L(p,q)        | 106 |
|  |                      |     |
|  | ·                    |     |
| CAPITULO V                                     |                      |     |
| Los Espacios Lente L(p,q).                     |                      |     |
|  |                      |     |
| 5.1. Definición y construcción de              | L(p,q)               | L12 |
| 5.2. Representación Toroidal de S <sup>3</sup> | 1                    | 15  |
| 5.3. Representación Toroidal induc             | ida de L(p,q)        | L19 |
| 6.1. El Espacio Fibra de Seifert               |                      | L25 |
|  |                      |     |
| Conclusiones                                   | 1                    | .27 |
|  |                      |     |
| Bibliografía                                   | 1                    | 28  |



EL SASER OF THE MEDICAL PROPERTY AND ADDRESS OF THE PARTY OF THE PARTY

#### INTRODUCCION

Ouizá el motivo más importante para el estudio de los espacios lente L(p,q) ha sido el problema de clasificación para 3-variedades espacios compactas. Aunque los lente introducidos primeramente por H. Tietze (1908) en su trabajo sobre los invariantes topológicos de variedades de dimensión más alta, un estudio detallado de tales espacios no apareció hasta los trabajos de Threlfall y Seifert (1930, 1932). Aquí los autores definieron los grupos esféricos de rotación G(p,q) 3-esfera S3. El problema de homeomorfismo para los espacios lente, el cual fue originalmente sugerido por Tietze (1908), fue entonces parcialmente contestado por Threlfall y Seifert (1932) cuando ellos obtuvieron una condición suficiente para que los espacios L(p,q) y L(p,q') fueran homeomorfos junto con una condición débil necesaria. Fue demostrado después que la condición suficiente es también necesaria (Reidemeister 1935).

El objetivo de este trabajo es dar dos caracterizaciones para los espacios lente y probar la equivalencia entre estas. Hemos hecho un esfuerzo para que este trabajo sea autosuficiente en el sentido de incluir las herramientas necesarias de topología que utilizamos para nuestro propósito. Así, el Capítulo I comienza con la definición y las propiedades de los espacios topológicos, aplicaciones continuas, topología inducida, topología producto y topología cociente. También en el Capítulo I se incluyen conceptos algebraicos, como los conceptos de acción de un grupo sobre un conjunto, resultados elementales de Teoría đе Grupos, conceptos de G-conjunto y G-espacio. Otros conceptos topológicos tales como espacios de Hausdorff, espacios conexos y arco-conexos también se incluyen en este capítulo. En el Capítulo II definimos el concepto de n-variedad poniendo particular atención a las 2-variedades y al Teorema de Clasificación de Superficies. Capítulo III trata los conceptos de homotopías de aplicaciones continuas hasta llegar a definir el cooncepto de Grupo fundamental

 $\Pi(X,x)$ . También en este capítulo incluímos los conceptos y resultados de espacios cubriente y elevaciones de funciones.

Los Capítulos IV y V contienen la "sustancia" del trabajo, en los cuales damos dos caracterizaciones para los espacios lente. La primera caracterización es la representación poliedral esférica) sugerida por Tietze (1908). A partir de ésta, obtenemos la representación de L(p,q) como el espacio que se obtiene al pegar la superficie frontera de dos toroides de manera adecuada (Threlfall y Seifert 1932); esto es el objeto del Capítulo IV y la parte primera del Capítulo V. En la segunda caracterización consideramos a S<sup>3</sup> como la 3-esfera unitaria en el plano bicomplejo C<sup>2</sup> y definimos L(p,q) como la región fundamental de un particular grupo de homeomorfismos G, definido sobre S3. Nuevamente obtenemos exactamente la misma representación toroidal para obteniendo primeramente una representación toroidal para S3 (S3 es el espacio lente L(1,0)) y usamos este hecho para obtener la representación toroidal de L(p,q). Como el grupo G está definido en términos de las coordenadas complejas de S3, la representación toroidal correspondiente a L(p,q), la obtenemos a partir de S3 apelando directamente a la definición (via acción) de L(p,q), lo cual es el objeto del Capítulo V. Como ambas definiciones tienen la misma representación toroidal concluímos que ambas definiciones son equivalentes.

#### CAPITULO I

## Aspectos Topológicos y Algebraicos.

## 1.1. Espacios Topológicos.

Una topología en un conjunto X, no es más que una familia de subconjuntos de X (que llamaremos conjuntos abiertos o elementos de la topología) que nos permiten decir cuando un punto  $x \in X$  está próximo o adherido a un subconjunto A de X.

## 1.1.1. Definición.

Sea X un conjunto y u una subcolección de subconjuntos de X que cumpla:  $X \in \mathcal{U}$ ,  $\emptyset \in \mathcal{U}$ , intersecciones finitas de elementos de u pertenecen a u, y unión arbitraria de elementos de u pertenecen a u, entonces tal colección u de subconjuntos de u se llama una topología en u y se denota por u al espacio topológico resultante, aunque a menudo escribiremos u o u. Los elementos de u se llaman puntos de u.

Como ejemplos más triviales de espacios topológicos tenemos los siguientes. El primero es cuando  $\mathcal{U}=\{\varnothing,\ X\}$ , llamada la topología burda de X. Otro es cuando  $\mathcal{U}$  es el conjunto de todos los subconjuntos de X; esto es P(X). Claramente  $\mathcal{U}$  es una topología en X llamamada la topología discreta en X.

Otro ejemplo de topología en un conjunto X es la llamada topología de los complementos finitos. Aquí  $\mathcal U$  se compone de  $\varnothing$ , y de aquellos subconjuntos de X cuyo complemento es finito.

Se deduce inmediatamente que todo espacio métrico da lugar a un espacio topológico. Se dice que el espacio resultante posee la topología métrica. Donde la topología métrica está dada por

 $\mathcal{U}_{\rm d} = \{ \ \varnothing \ \} \ \cup \ \{ \ {\rm E} \subseteq {\rm X}; \ {\rm E} \ {\rm es} \ {\rm union} \ {\rm de} \ {\rm bolas} \ {\rm abiertas} \ \}$  Y por una bola abierta de radio r y centro x entenderemos el Conjunto

$$B_{r}(x) = \{ y \in X; d(x,y) < r \}.$$

Si X es un espacio topológico metrizable entonces se cumple que para todo par a, b de puntos distintos de X existen conjuntos abiertos  $U_a$  y  $U_b$  disjuntos que contienen a y b respectivamente. En efecto, puesto que  $x \neq y$ ,  $d(x,y) = 2\varepsilon$  para algún  $\varepsilon$  donde d es la métrica en X que nos de la estructura de espacio topológico de X, los conjuntos  $B_{\varepsilon}(x) = \{ z \in X; d(x,z) < \varepsilon \}$  y  $B_{\varepsilon}(y)$  satisfacen entonces las condiciones requeridas.

De aquí que el recíproco no es cierto, esto es existen espacios topológicos que no se obtienen a partir de ningún espacio métrico, pues por ejemplo si X posee como mínimo dos puntos y está dotado de la topología burda, entonces X no es metrizable.

Existen condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea metrizable. (John L. Kelley 1967 pag.127).

Para cualquier subconjunto Y de un espacio topologíco X podemos considerar el mayor conjunto abierto contenido en Y y se llama el interior de Y. En otras palabras

donde  $\{U_j; j\in J\}$  es la familia de todos los conjuntos abiertos contenidos en Y. Obviamente, xeY si y sólo si existe un conjunto abierto  $U \subseteq Y$  tal que x  $\in U$ ; es decir Y es vecindad de X.

Por ejemplo, sea I<sup>n</sup> el subconjunto de R<sup>n</sup> siguiente:

 $I^n = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \le x_i \le 1, i = 1, 2, ..., n \}$ Si  $\mathbb{R}^n$  tiene la topología usual entonces el interior de  $I^n$  es

$$I^{n} = \{ x; 0 < x_{i} < 1, i = 1, 2, ..., n \}$$

Para verlo, sea  $x \in I^n$  y pongamos  $\varepsilon = \min\{1-x_i, x_i; i = 1, 2, ..., n\}$ . La bola abierta  $B_{\varepsilon}(x)$  de centro x y radio  $\varepsilon$  (esto es,

{  $y \in \mathbb{R}^n$ ;  $d(x,y) < \varepsilon$  }) está contenida en  $I^n$  y, por tanto,  $I^n$  es abierto. Por otra parte, si para algún i,  $x_i = 1$  o  $x_i = 0$ , cualquier bola  $B_r(x)$  de centro x y radio r contiene puntos que no son de  $I^n$ , independientemente del valor de r.

Un concepto que será más útil de ahora en adelante es el de entorno de un punto.

#### 1.1.2. Definición

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto  $N \subseteq X$  con  $x \in N$  se dice que es un entorno o vecindad de x si existe un conjunto abierto U tal que  $x \in U \subseteq N$ .

En particular, todo conjunto abierto es un entorno de cada uno de sus puntos. A continuación se dan algunas propiedades simples de los entornos.

Sea X un espacio topológico.

- i) Para cada punto  $x \in X$  existe por lo menos un entorno de x (el mismo X).
- ii) Si N es un entorno de x y N  $\leq$  M, M también es un entorno de x. iii) Si M y N son entornos de x, también lo es N  $\cap$  M.
  - iv) Para cada  $x \in X$  y cada entorno N de x, existe un entorno U de x tal que U  $\subseteq$  N y U es un entorno de cada uno de sus puntos. (Basta tomar U como el abierto que está contenido en N)

#### 1.1.3.Teorema.

 $A \in U \Leftrightarrow A = A$ .

#### Demostración.

La unión U de todos los subconjuntos abiertos de un conjunto A es claramente un subconjunto abierto de A. Si A contiene una vecindad de cada uno de sus puntos, entonces cada punto x de A pertenece a algún subconjunto abierto de A y de aquí que  $x \in U$  y por lo tanto A es abierto. Recíprocamente, si A es abierto contiene una vecindad (tomemos A) de cada uno de sus puntos.

El complemento de un conjunto abierto tiene un nombre especial.

#### 1.1.4. Definición

Un subconjunto C de un espacio topológico X se dice que es cerrado si y sólo si X-C es abierto.

Observemos que si X es un conjunto y V una familia de subconjuntos tal que  $\emptyset$ ,  $X \in V$ , la unión de dos elementos cualquiera de V pertenece a V y la intersección de una colección arbitraria de elementos de V pertenece a V; entonces  $\mathcal{U} = \{ X-V; V \in V \}$  es una topología en X.

## Ejemplos:

En un espacio topológico discreto todo subconjunto es abierto y cerrado a la vez.

Si un espacio topológico X consta de un número finito de puntos, cada uno de los cuales es un subconjunto cerrado, entonces la topología de X es La discreta.

Para cualquier subconjunto Y de un espacio topológico X podemos considerar el menor conjunto cerrado que contiene a Y; este conjunto se denota por  $\overline{Y}$  y se llama de adherencia de Y. En otras palabras

donde {  $F_j$ ; jeJ } es la familia de todos los subconjuntos cerrados que contienen a Y. Los puntos que pertenecen a  $\overline{Y}$  pero no a Y se llaman puntos límite de Y. El resultado siguiente da una descripción alternativa de Y.

#### 1.1.5. Lema

 $x \in \overline{Y}$  si y sólo si para todo conjunto abierto U que contiene a x,  $U \cap Y \neq \emptyset$ .

#### Demostración.

Sea  $x \in \overline{Y}$  y supongamos que existe un conjunto abierto U que contenga a x y tal que U  $\land$  Y =  $\emptyset$ . Asi pues X-U es cerrado y YSX-U; por tanto  $\overline{Y} \subseteq X$ -U. Pero  $x \in \overline{Y}$  y  $x \in U$ , lo cual es una contradicción.

Reciprocamente, supongamos que  $x \notin \overline{Y}$ , es decir  $x \in X-\overline{Y}$ . Pero  $X-\overline{Y}$  es abierto,  $Y(X-\overline{Y}) \cap \overline{Y} = \emptyset$ ; por tanto  $(X-\overline{Y}) \cap Y = \emptyset$ , que es una

contradicción.■

## Ejemplos:

Si consideramos  $\mathbb{R}$  con su topología usual, la adherencia de los conjuntos (a,b), [a,b), (a,b) y [a,b] es [a,b].

La adherencia del conjunto  $A = \{1,2,3,...\}$  es  $\overline{A} = \{1,2,3,...\}$ .

La adherencia del conjunto  $B = \{x; x \text{ es racional }\}$  es  $\overline{B} = \mathbb{R}$ .

La adherencia del conjunto  $C = \{ x; x \text{ es irracional } \} \text{ es } \overline{C} = \mathbb{R}.$ 

Un operador que aparece con bastante frecuencia como para justificar su definición es la frontera. La frontera de un subconjunto A de un espacio topológico X se define como el conjunto de todos los puntos x que no son interiores a A ni a X\A. Es decir  $Fr(A) = (X\backslash \mathring{A}) \cap (X\backslash (X-A)^\circ)$ . Una caracterización muy útil es la siguiente

 $x \in Fr(A) \iff \forall U \in \varepsilon(x)$  se cumple que  $U \cap A \neq \emptyset y U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$  y donde  $\varepsilon(x)$  es el conjunto de entornos de x.

Es claro que la frontera de A es idéntica con la frontera de  $X \setminus A$ .

Como ejemplos, si X es indiscreto y ni A ni X son vacíos, entonces la frontera de A es X, mientras que si X es discreto la frontera de todo subconjunto es vacío. La frontera de un intervalo de números reales, con la topología usual , es el conjunto cuyos únicos miembros son los puntos extremo del intervalo, sin importar que el intervalo sea abierto, cerrado o semiabierto. La frontera del conjunto de racionales, o el conjunto de irracionales, es el conjunto de todos los números reales.

Otras propiedades de la adherencia y frontera de un conjunto nos las da el siguiente teorema.

#### 1.1.6. Teorema.

- a) Si Y es un subconjunto de un espacio topológico X con Y  $\subseteq$  F  $\subseteq$  X Y F es cerrado, entonces  $\overline{Y}\subseteq$  F
- b) Y es cerrado si y sólo si Y =  $\overline{Y}$
- c)  $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$
- $d)\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \ \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

- $e) X-Y = \overline{(X-Y)}$
- $f)\overline{Y} = Y \cup \delta Y$ , donde  $\delta Y = \overline{Y} \cap \overline{(X-Y)}$  ( $\delta Y$  se llama la frontera de Y)
- g)Y es cerrado si y sólo si δY ⊆ Y
- h) $\delta Y = \emptyset$  si y sólo si Y es a la vez abierto y cerrado
- i) $\delta(\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}) = \delta(\{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}) = \{a,b\}$
- j)Y es la adherencia de algún conjunto abierto si y sólo si Y es la adherencia de su interior.

No es difícil descubrir las relaciones entre frontera, cerradura e interior. El siguiente teorema, cuya demostración omitimos relaciona estos conceptos.

## 1.1.7.Teorema.

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X y sea Fr(A) la frontera de A. Entonces  $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \backslash A)} = \overline{A} \backslash A$ ,

$$X\backslash Fr(A) = A \cup (X\backslash A)^{\circ}, \overline{A} = A \cup Fr(A) y A = A\backslash Fr(A).$$

Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera y es abierto si y sólo si es disjunto con su frontera.

## Bases y Sub-bases.

Cuando definimos la topología usual para el conjunto de los números reales por ejemplo, empezamos con una familia  $\mathcal B$  de intervalos abiertos, y a partir de ésta familia construimos la topología  $\mathcal U$ . El mismo método es de utilidad en otras situaciones y examinaremos la construcción en detalle. Una familia  $\mathcal B$  de conjuntos es una base para una topología  $\mathcal U$  si y sólo si  $\mathcal B$  es una subfamilia de  $\mathcal U$  y para cada punto x del espacio, y cada entorno  $\mathcal U$  de  $\mathcal X$ , hay un miembro  $\mathcal V$  de  $\mathcal B$  tal que  $\mathcal X$  e  $\mathcal V$  c  $\mathcal U$ . Así la familia de intervalos abiertos es una base para la topología usual de los números reales, apelando a la definición de topología usual y al hecho de que los intervalos abiertos son abiertos con esta topología.

Existe una simple caracterización para las bases la cual es usada frecuentemente como una definición: Una subfamilia  $\mathcal B$  de una topología  $\mathcal U$  es una base para  $\mathcal U$  si y sólo si cada miembro de  $\mathcal U$  es la unión de miembros de  $\mathcal B$ . Para probar esto, supongamos que  $\mathcal B$  es una base para la topología  $\mathcal U$  y que  $\mathcal U$   $\in$   $\mathcal U$ . Sea  $\mathcal V$  la unión de todos

los miembros de  $\mathcal{B}$  que son subconjuntos de  $\mathcal{U}$  y supongamos que  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  Entonces existe un  $\mathcal{W}$  en  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathbf{x} \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ , y consecuentemente  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ . De aquí que  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  y ya que  $\mathcal{V}$  es un subconjunto de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ . Para probar el recíproco, supongamos que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$  y cada miembro de  $\mathcal{U}$  es la unión de miembros de  $\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ , entonces  $\mathcal{U}$  es la unión de los miembros de una subfamilia de  $\mathcal{B}$ , y para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  existe  $\mathcal{V}$  en  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ . Consecuentemente  $\mathcal{B}$  es una base para  $\mathcal{U}$ .

Aunque este es un método muy conveniente para la construcción de topologías, es necesario un poco de precaución porque no toda familia de conjuntos es una base para una topología. Por ejemplo, sea  $X = \{ 0, 1, 2 \}$  y sea  $A = \{ 0, 1 \}$  y sea  $B = \{ 1, 2 \}$ . Si  $\mathcal F$  es la familia cuyos miembros son X, A, B y  $\emptyset$ , entonces  $\mathcal F$  no puede ser la base para una topología ya que: por cálculo directo, la unión de miembros de  $\mathcal F$  está en  $\mathcal F$ , así que si  $\mathcal F$  fuera la base de una topología, dicha topología debería ser  $\mathcal F$  mismo, pero  $\mathcal F$  no es una topología pues  $A \cap B \notin \mathcal F$ . La razón de esta situación es clara por el siguiente teorema.

## 1.1.8. Teorema.

Una familia  $\mathcal{B}$  de conjuntos es una base para alguna topología para el conjunto X = U { B: B  $\in \mathcal{B}$  } si y sólo si para cualesquier dos miembros U y V de  $\mathcal{B}$  y cada punto x en U  $\cap$  B existe un W en  $\mathcal{B}$  tal que  $x \in W$  y  $W \subset U \cap V$ .

#### Demostración.

Si  $\mathcal B$  es base para alguna topología, U y V son miembros de  $\mathcal B$  y  $x\in U\cap V$  entonces, como U  $\cap$  V es abierto, existe un miembro de  $\mathcal B$  al cual x pertenece y está contenido en U  $\cap$  V. Para mostrar el recíproco, sea  $\mathcal B$  una familia con la propiedad especificada en el teorema y sea  $\mathcal U$  la familia de todas las uniones de miembros de  $\mathcal B$ . Una unión de miembros de  $\mathcal U$  es asimisma una unión de miembros de  $\mathcal B$  y es por tanto un miembro de  $\mathcal U$ , y es solo necesario probar que la intersección de dos miembros U y V de  $\mathcal U$  es un miembro de  $\mathcal U$ . Si  $x\in U\cap V$ , entonces podemos elegir U' y V' en  $\mathcal B$  tal que  $x\in U'\subset U$  y  $x\in V'\subset V$ , y entonces un miembro W de  $\mathcal B$  tal que  $x\in U'\cap V'\subset U\cap V$ . Consecuentemente  $U\cap V$  es la unión de miembros de  $\mathcal B$ , y  $\mathcal U$  es una topología.

Hemos visto que una familia arbitraria de conjuntos puede fallar como base para alguna topología. Variamos un poco la pregunta y nos preguntamos si hay una única topología la cual es, en algún sentido, generada por  $\mathcal{F}$ . Tal topología debe ser una topología para el conjunto X la cual es la unión de los miembros de  $\mathcal{F}$ , y cada miembro de  $\mathcal{F}$  debe ser abierto en esa topología; esto es,  $\mathcal{F}$  debe ser una subfamilia de la topología. Esto plantea la pregunta: ¿Existe la más pequeña de todas las topologías en X la cual contiene a  $\mathcal{F}$ ? El siguiente simple resultado nos capacitará para exhibir esta topología.

#### 1.1.9. Teorema.

Si  $\mathcal{G}$  es una familia no vacía de conjuntos, la familia de todas las intersecciones finitas de miembros de  $\mathcal{G}$  es base para alguna topología en el conjunto  $X = U \{ S: S \in \mathcal{G} \}.$ 

#### Demostración.

Si  $\mathscr{F}$  es una familia de conjuntos sea  $\mathscr{B}$  la familia de intersecciones finitas de miembros de  $\mathscr{F}$ . Entonces la intersección de dos miembros de  $\mathscr{B}$  es nuevamente un miembro de  $\mathscr{B}$  y, aplicando el teorema anterior  $\mathscr{B}$  es la base para alguna topología.

Una familia  $\mathcal F$  de conjuntos es una subbase para una topología  $\mathcal U$  si y sólo si la familia de intersecciones finitas de miembros de  $\mathcal F$  es una base para  $\mathcal U$  (equivalentemente, si y sólo si cada miembro de  $\mathcal U$  es la unión de intersecciones finitas de miembros de  $\mathcal F$ ). En vista del teorema anterior toda familia  $\mathcal F$  no vacía es la subbase para alguna topología, y esta topología es, claro, únicamente determinada por  $\mathcal F$ . La cual es la más pequeña de todas las topologías que contienen a  $\mathcal F$  (esto es, es una topología que contiene a  $\mathcal F$ ).

Habrá muchas diferentes bases y subbases para una topología y la más apropiada elección puede depender del problema en consideración. Como ejemplo una natural subbase para la topología usual de los números reales es la familia de semi-infinitos intervalos abiertos; esto es, la familia de conjuntos de la forma

 $\{ x: x > a \} y \{ x: x < a \}$ . Cada intervalo abierto es la intersección de dos de tales conjuntos, y esta familia es consecuentemente una subbase.

## 1.2.Aplicaciones Continuas.

#### 1.2.1. Definición

Una aplicación  $f: X \longrightarrow Y$  entre dos espacios topológicos se dice que es continua si la imagen inversa  $f^{-1}(U)$  de todo conjunto abierto U de Y es abierto en X.

Obsérvese que la definición es una generalización de continuidad en espacios métricos.

Los ejemplos más obvios de aplicaciones continuas son la aplicación identidad  $1x:(X,\mathcal{U}) \longrightarrow (X,\mathcal{U})$  y la aplicación constante  $X \longrightarrow Y$  que aplica todo punto de X en un mismo punto prefijado de Y.

Si consideramos un espacio X con la topología discreta, toda aplicación  $f: X \longrightarrow Y$  de X en cualquier espacio Y es continua, puesto que la imagen inversa de cualquier subconjunto de Y es abierto en X.

Recíprocamente si X es un espacio topológico con la propiedad de que, para cualquier espacio topológico Y, toda aplicación  $f: X \longrightarrow Y$  es continua entonces X tiene la topología discreta, puesto que si tomamos Y = X, con la topología discreta y f = 1 todo subconjunto A de Y = X tiene como imagen inversa  $f^{-1}(A) = A$  y como f es continua A es un abierto en X, entonces X tiene la topología discreta.

Por otra parte si consideramos Y con la topología burda, toda aplicación f:X—Y de culquier espacio topológico X en Y es también continua, como es fácil de observar.

Recíprocamente, si Y es un espacio topológico con la propiedad de

que, para cualquier espacio topológico X, toda aplicación  $f: \to Y$  es continua entonces Y tiene la topología burda, para verlo basta tomar X = Y y ø son los únicos abiertos en X y además X =  $f^{-1}(Y)$ ,  $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$  entonces los únicos abiertos en Y son Y y Ø, por lo tanto Y tiene la topología burda.

Un ejemplo de una aplicación no continua es el siguiente. Sea  $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ , donde  $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$ y sea  $f: X \longrightarrow X$  dada por  $f(x) = x^2$ . La aplicación f no es continua ya que  $f^{-1}((-\infty, y^2)) = (-y, y)$  que no pertenece a  $\mathcal{U}$ .

Observemos que si X, Y, Z son espacios topológicos y  $f:X \longrightarrow Y$  y  $g:X \longrightarrow Y$  son aplicaciones continuas, la composición  $h = gf:X \longrightarrow Z$  también es continua.

Observemos también que si X es un conjunto arbitrario, u y u' dos topologías de X, la aplicación identidad id: $(X, u) \rightarrow (X, u')$  es continua si y sólo si  $u' \subseteq u$ .en efecto:

Supongamos que la aplicación identidad es continua.

Sea  $U \in U'$ ,  $id^{-1}(U) = U \in U$  por la continuidad, por tanto  $U' \subseteq U$ . Recíprocamente, supongamos que  $U' \subseteq U$  entonces si  $U \in U'$  tenemos que  $id^{-1}(U) = U \in U$ , por tanto id es continua.

#### 1.2.2. Teorema.

Si X y Y son espacios topológicos y f es una función de X a Y, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

- (a) La función f es continua.
- (b) f<sup>-1</sup>(C) es cerrado en X. Con C un cerrado en Y.
- (c) la imagen inversa de cada miembro de una sub-base para una topología para Y es abierto en X.
- (d) Para cada  $x \in X$  la imagen inversa de cada entorno f(x) es un entorno de x.
- (e) Para cada  $x \in X$  y cada entorno U de f(x) existe un entorno V de x tal que  $f[V] \subset U$ .
- (f) Para cada subconjunto A de X se tiene  $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$ .
- (h) Para cada subconjunto B de Y,  $f^{-1}[B] < f^{-1}[\overline{B}]$ .

Demostración.

Demostraremos únicamente (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (f)  $\Rightarrow$  (h)  $\Rightarrow$  (a).

 $(a) \Rightarrow (b)$ 

Supongamos que f es continua. Si C es cerrado, Y-C es abierto y, por tanto,  $f^{-1}(C)$  es cerrado.

 $(b) \Rightarrow (f)$ 

Sea  $A \subseteq X$ . Obsérvese que  $\overline{f[A]}$  es un conjunto cerrado en Y; como (b) es válido, se tiene que  $f^{-1}(\overline{f[A]})$  es un conjunto cerrado en X y claramente  $A \subseteq f^{-1}(\overline{f[A]})$  (pues  $f(A) \subseteq \overline{f[A]}$ ) como  $\overline{A}$  es el menor cerrado que contiene a A entonces  $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f[A]})$  y por tanto  $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$ .

 $(f) \Rightarrow (h)$ .

Sea  $B \subseteq Y$  y pongamos  $A = f^{-1}[B]$ . Como (d) es válido lo aplicamos a A y tenemos que  $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]} \subseteq \overline{f(f^{-1}[B])} \subseteq \overline{B}$ . Por tanto,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{B}$ , por lo que  $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$ ; es decir,  $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$ .

 $(h) \Rightarrow (a)$ 

Sea  $x \in X$  arbitrario y N un abierto en Y tal que  $f(x) \in N$ . Y-N = B es un cerrado en Y. Por (h)  $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B] = f^{-1}[B]$  pues B es un conjunto cerrado en Y. Así,  $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B]$  por lo que  $f^{-1}[B]$  es un conjunto cerrado en X de aquí que M = X -  $f^{-1}[B]$  es abierto en X y contiene a x ( puesto que si suponemos que  $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(Y-N) \Rightarrow f(x) \in Y-N$  lo que contradice el hecho de que  $f(x) \in N$ .)

y además  $f(M) = f(X-f^{-1}(B)) \subseteq Y -f(f^{-1}(B)) = Y -B= Y - (Y-N) = N$ . Por tanto f es continua en X.

Una aplicación que transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos se dice que es una aplicación abierta. Las aplicaciones abiertas no necesariamente son continuas. Por ejemplo, sea Y el conjunto formado por dos puntos  $\{a,b\}$  con la topología discreta y sea X la recta real con la métrica usual. La aplicación  $f:X\longrightarrow Y$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \ge 0 \\ b & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es abierta pero no es continua ya que f-1({a}) no es abierto en X. toda aplicación de un espacio topológico en un espacio topológico discreto es necesariamente abierta. Diremos que la aplicación f:X-Y es cerrada si la imagen de f de cualquier conjunto cerrado cerrado.Las aplicaciones cerradas no necesariamente continuas; de hecho, la aplicación abierta considerada en el último ejemplo es también cerrada. En general, una aplicación puede (i) no ser abierta ni cerrada, (ii) ser abierta pero no cerrada, (iii) ser cerrada pero no abierta, (iv) ser abierta y cerrada. Como ejemplos podemos considerar los siguientes: Para (i) sea X un conjunto A con la topología discreta, Y el mismo conjunto A con la topología burda y f la aplicación identidad> para X = { a,b } con con la topología consideremos  $Y = \{a,b\}$  con la topología  $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}\$ ; la aplicación constante a ∈ Y es abierta y continua pero no cerrada. Para (iii) tomemos  $X = \{a,b\}$  con la topología discreta e  $Y = \mathbb{R}$  con la topología usual; la aplicación  $f:X \rightarrow Y$  dada por f(a) = 0, f(b) = 1es continua y cerrada pero no abierta. Por último, para (iv) podemos tomar un espacio topológico arbitrario X = Y y como f la identidad.

#### 1.2.3. Teorema.

Sean X y Y espacios topológicos y  $f:X\longrightarrow Y$  una función biyectiva, son equivalentes:

- a) f<sup>-1</sup> es continua
- b) f es abierta
- c)f es cerrada

Demostración.

 $(a) \Rightarrow (b)$ 

Sea A un abierto en X, como  $f^{-1}: Y \longrightarrow X$  es continua y A es un abierto de X  $(f^{-1})^{-1}(A)$  es un abierto en Y, pero  $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$  pues f es biyectiva. Así f(A) es abierto en Y.

(b) ⇒ (c)

Como f es biyectiva f(X-E) = Y - f(E). Sea F un conjunto cerrado en X, entonces F = X-E con E un conjunto abierto de X. Luego f(F) = f(X-E) = Y - F(E), como (b) es válido y E es un conjunto abierto en X es tiene que f(E) es abierto en Y, por tanto, f(F) = Y - f(E) y por tanto f es cerrada.

## $(c) \Rightarrow (a)$

Sea F un subconjunto cerrado en X. Como f es biyectiva tenemos que  $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$  y como (c) es válido tenemos que  $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$  es cerrado en Y; por tanto,  $(f^{-1})^{-1}(F)$  es cerrado en Y y por tanto  $f^{-1}$  es continua:

La definición siguiente nos dice cuando dos espacios topológicos se consideran equivalentes. Usaremos la palabra homeomorfismo.

#### 1.2.4. Definición.

Sean X e Y espacios topológicos. Decimos que X e Y son homeomorfos si existen aplicaciones continuas  $f:X \longrightarrow Y$ ,  $g:Y \longrightarrow X$  inversas una de la otra (es decir si f y g son continuas y fg =  $1_y$ , gf =  $1_x$ ). Escribiremos X  $\cong$  Y y diremos que f y g son homeomorfismos entre X e Y.

Puede darse una definición equivalente para que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  sea un homeomorfismo requiriendo (i) que sea biyectiva, (ii) que sea continua y (iii) que su inversa  $f^{-1}$  sea también continua. Así, un homeomorfismo entre X e Y es una biyección entre los puntos y los conjuntos abiertos de X y Y.

Algunos ejemplos de homeomorfismos son los siguientes.

- a) Si X es el espacio topológico resultante de un espacio métrico Y con métrica d' dada por d'(x,y) = d(x,y)/(1 + d(x,y)), X e Y son homeomorfos. (Podemos tomar como homeomorfismo la función identidad).
- b)Si X =  $\mathbb{R}^n$  con la topología métrica usual e Y =  $\mathbb{R}^n$  con la topología obtenida a partir de la métrica  $d(x,y) = \max_i |x_i y_i|$ . De nuevo X e Y son homeomorfos.
- c)Si  $X = \mathbb{R}^n$  con la topología usual e  $Y = \mathbb{R}^n$  con la topología

discreta, X e Y no son homeomorfos.

Un ejemplo de dos espacios X e Y y de una biyección continua  $f:X \longrightarrow Y$  tal que  $f^{-1}$  no sea continua lo podemos obtener tomando a X como un conjunto con la topología discreta, Y = X con la topología burda y a f como la función identidad, de esta forma X  $\not\equiv$  Y.

Un corolario del teorema 1.2.3. es el siguiente:

#### 1.2.5. Corolario.

Sean X e Y espacios topológicos y  $f:X\longrightarrow Y$  continua y biyectiva ,son equivalentes:

- a)f es un homeomorfismo
- b)f es abierta
- c)f es cerrada

#### 1.2.6. Teorema.

Sea X un espacio topológico y denotemos por G(X) el conjunto de los homeomorfismos  $f:X\longrightarrow X$ . Para cada  $A\subseteq X$  sea

$$G_{A}(X) = \{ f \in G(X); f(a) = a \forall a \in A \}.$$

Entonces G(X) es un subgrupo de G(X).

Demostración.

El hecho de que G(X) es grupo es claro.

Demostraremos que  $G_{\lambda}(X)$  es subgrupo de G(X).

Sean  $f,g \in G_A(X)$ ; como  $g \in G(X)$  entonces existe  $g^{-1} \in G(X)$  tal que  $gg^{-1} = 1$  y además  $g^{-1}(a) = a$ , con  $a \in A$ , pues de lo contrario si  $g^{-1}(a) = b$ , con  $b \in X$  y  $b \neq a$  entonces  $g(g^{-1}(a)) = g(b)$  entonces a = g(b) entonces g(a) = g(g(b)) = g(b) lo cual es una contradicción pues g es una función biyectiva por tanto  $g^{-1}(a) = a$  luego,  $fg^{-1}(a) = f(g^{-1}(a)) = f(a) = a \, \forall \, a \in A$ ; por tanto  $G_A(X)$  es subgrupo de G(X).

La homeomorfía es una relación de equivalencia y la topología es el estudio de las clases de equivalencia. Las dos secciones siguientes describen métodos para construir, a partir de unos espacios dados, nuevos espacios topológicos.

## 1.3. Topología inducida.

Sea S un conjunto de un espacio topológico X. Podemos dotar a S de una topología a partir de X.

## 1.3.1. Definición.

La topología inducida en S por la topología de X es la familia de los conjuntos de la forma  $U \cap S$ , para todo conjunto abierto U de X.

En otras palabras, si u es la familia de los conjuntos abiertos de X, entonces  $u_{\rm S}$  = { U  $\cap$  S; U  $\in$  u } es la familia de los conjuntos abiertos de S. Es claro que  $u_{\rm c}$  es una topología en S.

A veces se habla de la topología inducida como de la topología relativa. Si el subconjunto S está dotado de la topología inducida se dice que S es subespacio de X.

Por ejemplo, si consideramos el subconjunto [a,b] de R (con la topología usual) y le dotamos de la topología inducida, los conjuntos

$$[a,c)$$
 a < c < b,

$$(d,b)$$
 a < d < b,

$$(d,c)$$
 a  $\leq$  d  $<$  c  $\leq$  b

son subconjuntos abiertos de [a,b]. Obsérvese que el que U sea abierto en [a,b] no implica que U sea abierto en  $\mathbb{R}$ . Obtenemos otro ejemplo si dotamos a la circunferencia unidad  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  de la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ . Los conjuntos abiertos de  $S^1$  son entonces uniones de "arcos abiertos" (es decir, arcos con los extremos excluídos). Más generalmente, podemos dotar a la n-esfera estándar

$$S^{n} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_{i}^{2} = 1 \}$$

de la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

En  $\mathbb{R}^{n+1}$  podemos considerar el subconjunto S definido por  $x_{n+1}=0$ . Si dotamos a S de la topología inducida (usando la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), S es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Es interesante considerar subespacios de  $\mathbb{R}^3$  e intentar descifrar cuáles son homeomorfos entre sí. Por ejemplo, los intervalos [a,b] y [c,d] de  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$  son homeomorfos.

puede darse el homeomorfismo mediante

$$f(x) = c + (d-c)(x-a)/(b-a)$$

No es difícil construir una inversa  $f^{-1}$  y demostrar que f y  $f^{-1}$  son continuas.

Intuitivamente, lo único que hacemos es estirar o encoger cada intervalo en otro.

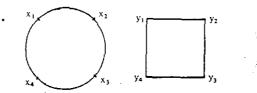
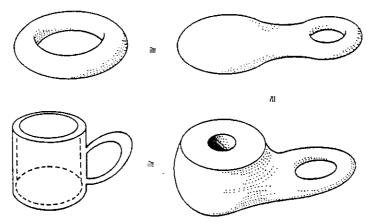


Figura 1.3.1

Para otro ejemplo, consideremos una circunferencia y un cuadrado, (por un cuadrado entendemos las aristas de una región cuadrada); véase la figura 1.3.1. La aplicación que mapea los intervalos con origen en  $x_i$  y final  $x_{i+1}$  de  $S^1$  en los intervalos de origen  $y_i$  y final  $y_{i+1}$  del cuadrado define un homeomorfismo de la circunferencia en el cuadrado. Si  $\{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$  es la circunferencia y  $\{(x,y); x = \pm 1, -1 \le y \le 1 \text{ o } -1 \le x \le 1, y = \pm 1\}$  es el cuadrado, podemos dar homeomorfismos explícitamente mediante:

donde m = max(|x|,|y|) y  $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$ . Intuitivamente no hacemos más que torcer o combar la circunferencia para formar un cuadrado. En general, intuitivamente, dos subespacios de  $\mathbb{R}^3$  (o de  $\mathbb{R}^2$ ) son homeomorfos si podemos torcer, combar, estirar o encoger uno de ellos hasta obtener el otro sin pegar puntos ni hacer ningun corte. Así por ejemplo, una rosquilla es homeomorfa a una taza de

té (con una asa); véase figura 1.3.2.



En la figura 1.3.3(a) y (d) se da otro ejemplo de espacios homeomorfos, mientras que en la figura 1.3.3(b) y (c) se ilustran espacios homeomorfos intermedios.

Figura 1.3.2

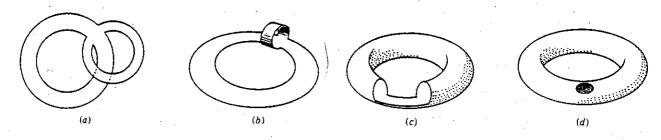


Figura 1.3.3

Si h:X $\rightarrow$ Y es un homeomorfismo, para todo punto x  $\in$  X los espacios X-{ x } e Y-{ h(x) } son homeomorfos. Esto nos proporciona algunas veces un camino para demostrar que ciertos espacios no son homeomorfos. Por ejemplo por lo menos intuitivamente a este nivel, los espacios [0,1] y (0,1) de R no son homeomorfos, ya que si suprimimos cualquier punto de (0,1) obtenemos (intuitivamente) dos piezas; con más precisión, el espacio que resulta es la unión disjunta de dos subconjuntos abiertos no vacíos. Ahora bien (intuitivamente), una pieza no puede ser homeomorfa a dos piezas (ello implicaría cortar, que no es un proceso continuo) y, por tanto, [0,1] no puede ser homeomorfo a (0,1).

La idea anterior puede extenderse al proceso de suprimir dos o más puntos.

Ejemplos intuitivos sobre homeomorfismos.

Si consideramos una circunferencia y una circunferencia anudada en

 $\mathbb{R}^3$  (véase la figura 1.3.5) puede construirse fácilmente un homeomorfismo entre ambas. La idea consiste en dividir cada una en

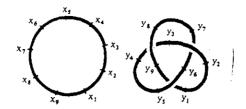


Figura 1.3.5

partes, nueve por ejemplo, y aplicar el intervalo de la circunferencia que va de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  sobre el intervalo de la circunferencia anudada que va de  $y_i$  a  $y_{i+1}$ .

si la circunferencia anudada está hecha de cordel fino, puede verse que no es posible obtener una circunferencia a partir de ella torciéndola y curvándola pero sin cortar ni pegar. embargo, si hacemos provisionalmente un corte en la circunferencia anudada, desanudamos y pegamos de nuevo. obtenemos circunferencia. Esto nos sugiere que podemos modificar nuestra noción intuitiva de homeomorfismo entre subespacios de permitiéndonos cortar temporalmente. La idea es que podemos cortar temporalmente, llevar a cabo algún homeomorfismo (torciendo, curvando, etc.) y después volver a pegar los puntos por los que habíamos cortado; los espacios inicial y final son, entonces, homeomorfos. Esta idea puede describirse de forma rigurosa usando el concepto de espacio cociente que introduciremos en la sección 1.5. (Véase en particular el teorema 1.5.8).

Ejemplo: los subespacios de  $\mathbb{R}^3$  de la figura 1.3.6 son homeomorfos. El primer subespacio se obtiene pegando tres tiras retorcidas de papel a dos discos circulares de papel. El segundo se obtiene pegando dos tiras largas de papel.

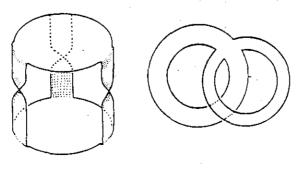


Figura 1.3.6.a)

se obtiene este homeomorfismo haciendo un corte en dos de las tiras retorcidas, despegando y volviendo a pegar de nuevo.

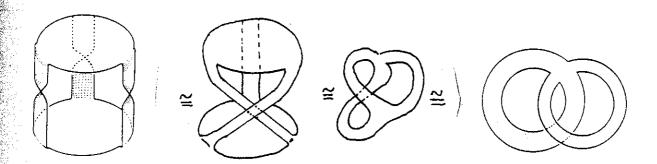


Figura 1.3.6.b)

Hemos mencionado ya que si S es un subespacio de X, los conjuntos abiertos de S no son necesariamente abiertos en X. Sin embargo, si S es abierto en X, los subconjuntos abiertos de S son abiertos en X.

Los lemas siguientes los enunciaremos sin demostración.

## 1.3.2. Lema

- (i)Si S es abierto en X,todo subconjunto abierto de S con la topología inducida es abierto en X.■
- (ii)Si S es cerrado en X, todo subconjunto cerrado de S con la topología inducida es cerrado en X.■

#### 1.3.3. Lema.

Si Y es un subespacio de X y Z un subespacio de Y, entonces Z es un subespacio de X.

## 1.3.4. Teorema.

Sea S un subespacio de X. Entonces la inclusión i:S-X es continua. Además S tiene la topología menos fina (es decir la que tiene menos conjuntos abiertos) para la cual la inclusión es continua.

## 🔑 Demostración.

Sea  $\mathtt{U} \in (u,\mathtt{X})$   $\mathtt{i}^{-1}(\mathtt{U}) = \mathtt{U} \cap \mathtt{S} \in (u_{\mathtt{S}},\mathtt{S})$  por tanto  $\mathtt{i}$  es una función continua.

Sea  $(\mathcal{U},S)$  otra topología que hace continua a la inclusión. para cada abierto  $V \in (\mathcal{U}_S,S)$  existe un abierto W en  $(\mathcal{U},S)$  tal que  $V = U \cap S \subseteq W$ ,  $U \in (\mathcal{U},X)$  (tomar  $W = U \cap S$ , pues  $i^{-1}(U) = U \cap S$ ) por tanto S tiene la topología menos fina que hace continua a la inclusión.

## 1.3.5. Teorema.

Sea X un espacio topológico, S un subconjunto e i:S $\rightarrow$ X la inclusión. Dotamos al conjunto S de una topología tal que para todo espacio Y y toda aplicación f:Y $\rightarrow$ S es continua si y sólo si f:Y $\rightarrow$ X es continua.

Entonces la topología de S es la topología inducida por X.

Demostración.

Tomemos f = i la inclusión y Y = S.

Entonces f:Y→S es continua pues la función identidad siempre es continua.

Como f:Y $\to$ X también es continua por hipótesis f<sup>-1</sup>(U) = U  $\cap$  S donde U  $\in$  (U,X) pero U  $\cap$  S  $\in$  (U<sub>S</sub>,S) que es la topología inducida por X.

#### 1.3.6. Teorema.

Sea Y un subespacio de X y A un subespacio de Y. Designemos por  $\operatorname{Cl}_{\chi}(A)$  la adherencia de A en X y por  $\operatorname{Cl}_{\chi}(A)$  la adherencia de A en Y. Entonces  $\operatorname{Cl}_{\chi}(A) \subseteq \operatorname{Cl}_{\chi}(A)$ . Además, en general,  $\operatorname{Cl}_{\chi}(A) \neq \operatorname{Cl}_{\chi}(A)$ .

Demostración.

Por definición tenemos que

$$Cl_{X}(A) = \bigcap \{ C \subseteq X; C \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subseteq C \}$$

$$Cl_{Y}(A) = \bigcap \{ C \cap Y; C \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subseteq C \cap Y \}$$

$$= \bigcap \{ C \cap Y; C \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subseteq C \}$$

$$Claramente \ Cl_{Y}(A) \subseteq Cl_{Y}(A).$$

Para ver que en general  $Cl_{Y}(A) \neq Cl_{X}(A)$  considérese  $X = \mathbb{R}$  con la topología usual, Y = [0,1), A = (0,1).

Tenemos que  $Cl_{y}(A) = [0,1)$ ,  $Cl_{x}(A) = [0,1]$ . Claramente  $Cl_{y}(A) \neq Cl_{y}(A)$ .

1.3.7. Teorema.

Sean X,Y espacios topológicos y S un subespacio de X. Si  $f:X\longrightarrow Y$  es una aplicación continua, también lo es  $f|S:S\longrightarrow f(S)$ .

Demostración.

Sea V abierto en f(S). Esto implica que existe un abierto en X tal que  $V = U \cap f(S)$ .

 $f^{-1}(U \cap f(S)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(U) \cap f(S)$  (pues el dominio de f|S es S) que es un abierto en S, por tanto, f|S:S $\rightarrow$ f(S) es continua.

Ejemplos de homeomorfismos.

(i) El subconjunto (a,b) de  $\mathbb{R}$  con la topología inducida es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

(Podemos verlo fácilmente usando la aplicación  $tan(\pi(cx+d))$  para c = 1/(a - b) y d = 1/2 - b/(a - b).

(ii) Los subespacios  $(1,\infty)$ , (0,1) de  $\mathbb{R}$  con la topología usual son homeomorfos. (Podemos verlo usando la aplicación  $x \longrightarrow 1/x$ .)

 $(iii)S^n-\{(0,0,...,0,1)\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual. Podemos verlo vía las funciones:

## 1.4. Topología Producto.

Un método para construir espacios nuevos a partir de espacios topológicos dados es mediante el producto directo. Recordemos que el producto directo  $X \times Y$  de dos conjuntos X, Y es el conjunto de pares ordenados (x,y) con  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Si X e Y son espacios topológicos, podemos usar las topologías en X e Y para dar una topología en  $X \times Y$ . En una primera aproximación podríamos pensar que los conjuntos abiertos de  $X \times Y$  deberían ser el producto de

conjuntos abiertos en X y en Y; sin embargo, esto no es suficiente como veremos en seguida.

## 1.4.1 Definición

Sean X e Y espacios topológicos. El producto (topológico) X×Y es el conjunto X×Y con la topología  $u_{\rm X×Y}$  formada por la familia de conjuntos que son uniones de productos de conjuntos abiertos de X e Y.

Un elemento típico de  $u_{x \times Y}$  es de la forma  $\bigcup U_j \times V_j$ , donde j es un conjunto de índices y para cada  $j \in J$ ,  $U_i y V_j$  son subconjuntos abiertos de X e Y respectivamente. No es difícil comprobar que  $u_{x \times Y}$  es una topología:  $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$  y  $X \times Y = X \times Y$ , con lo que la primera condición se satisface. Si W, W'  $\in u_{x \times Y}$ , entonces, para ciertos conjuntos de índices J, K se tiene  $W = \bigcup U_j \times V_j y W' = \bigcup U_k' \times V_k'$ 

donde  $U_j$ ,  $U_k'$  son abiertos en X,  $y \ V_j$ ,  $V_k'$  abiertos en Y. Puesto que  $W \cap W' = \bigcup_{j \in V_k'} (U_j \cap U_k') \times (V_j \cap V_j')$ 

resulta que se satisface la condición (ii) para una topología. La tercera condición es trivialmente cierta.

El concepto de producto topológico de X e Y puede extenderse al producto topológico de una familia finita de espacios topológicos de manera obvia.

#### 1.4.2. Teorema.

Sea  $X \times Y$  el producto de dos espacios topológicos. Un conjunto  $W \subseteq X \times Y$  es abierto si y sólo si, para todo  $w \in W$ , existen abiertos  $U_w V_w$  tales que  $U_w$  es abierto en X,  $V_w$  es abierto en Y,  $U_w \times V_w \subseteq W$   $Y W \in U_w \times V_w$ .

### Demostración.

Supongamos que W es abierto: entonces W =  $\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ , donde J es cierto conjunto de índices y  $U_j$ ,  $V_j$  son abiertos en X, Y y claramente coincide con W.

Existen proyecciones obvias  $\Pi_{\chi}: X \times Y \longrightarrow X$  y  $\Pi_{\gamma}: X \times Y \longrightarrow Y$  dadas por  $(x,y) \longrightarrow x$  y  $(x,y) \longrightarrow y$ . Se llaman las proyecciones producto. Puesto que  $\Pi_{\chi}^{-1}(U) = U \times Y$  y  $\Pi_{\gamma}^{-1}(V) = X \times V$ , es claro que  $\Pi_{\chi}$  y  $\Pi_{\gamma}$  son ambas

aplicaciones continuas.

## 1.4.3. Teorema.

para todo y  $\in$  Y el subespacio X×{ Y }  $\subseteq$  X×Y es homeomorfo a X.

#### Demostración.

Consideremos la aplicación  $f: X \times \{ y \} \longrightarrow X$  dada por  $(x,y) \longrightarrow x$ , que es claramente biyectiva. Podemos considerar f como la composición de la inclusión  $X \times \{ y \} \longrightarrow X \times Y$  y la proyección  $\Pi_{x}: X \times Y \longrightarrow X$ , ambas continuas. Supongamos ahora que W es un subconjunto abierto de  $X \times \{ y \}$ ; así,  $W = (\bigcup U_{j} \times V_{j}) \cap X \times \{ y \}$ , donde  $U_{j}$ ,  $V_{j}$  son abiertos en X, Y respectivamente. W puede reescribirse como  $\bigcup U_{j} \times \{ y \}$  donde  $J' = \{ j \in J; y \in V_{j} \}$ ; así pues  $f(W) = \bigcup U_{j}$ , que es un abierto en X. Esto prueba que f es también abierta f(W) por tanto es un homeomorfismo.

Si f:A $\rightarrow$ X y g:A $\rightarrow$ Y son aplicaciones entre espacios topológicos, podemos definir una aplicación h:A $\rightarrow$ X $\times$ Y mediante h(a) = (f(a),g(a)). Está claro que h es la única aplicación tal que  $\Pi_X$ h = f y  $\Pi_Y$ h = g. La relación existente entre la continuidad de h y la de f, g se llama la propiedad universal del producto.

## 1.4.4. Teorema.

Sean A, X e Y espacios topológicos. Para cualquier par de aplicaciones  $f:A\longrightarrow X$ ,  $g:A\longrightarrow Y$ , la aplicación  $h:A\longrightarrow X\times Y$  definida por h(a) = (f(a),g(a)) es continua si y sólo si f y g son continuas.

#### Demostración.

Si h es continua, también lo son  $\Pi_X h = f$  y  $\Pi_Y h = g$ . Recíprocamente, supongamos que f y g son continuas. Sean U, V subconjuntos abiertos de X, Y respectivamente. Entonces  $h^{-1}(U \times V) = \{ a; f(a) \in U, g(a) \in V \} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ , pero puesto que  $f^{-1}(U)$  y  $g^{-1}(V)$  son abiertos, también lo es  $h^{-1}(U \times V)$ . Consideremos ahora un subconjunto abierto W en  $X \times Y$ . Si  $X \in W$ , entonces  $X \in U \times V \subseteq W$ , donde U, V son abiertos en X, Y. Así pues,  $h^{-1}(X) \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq h^{-1}(W)$  y, por tanto,  $h^{-1}(W)$  es abierto.

## 1.5. Topología cociente.

En la sección 1.3 hemos considerado, escencialmente, un conjunto s, un espacio topológico X y una aplicación inyectiva de S en X. Obtuvimos así una topología en S: la topología inducida. En esta sección consideraremos un espacio topológico X, un conjunto Y y una aplicación sobre de X en Y. Esto nos dará lugar a una topología en Y: la llamada topología "cociente".

## 1.5.1. Definición.

Supongamos que  $f: X \longrightarrow Y$  es una aplicación sobre de un espacio topológico X en.un conjunto Y. La topología cociente en Y respecto a f es la familia  $\mathcal{U}_{\mathfrak{c}} = \{ \ \mathsf{U}; \ \mathsf{f}^{-1}(\mathsf{U}) \ \text{es abierto en X } \}.$ 

Es fácil comprobar que  $u_f$  satisface las condiciones para una topología: claramente  $\emptyset \in \mathcal{U}_f$  e  $Y \in \mathcal{U}_f$ , Y las otras condiciones se deducen de  $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1) = U f^{-1}(U_1)$ . Obsérvese que una vez que dotamos a Y de la topología cociente, la aplicación  $f: X \longrightarrow Y$  es continua.

## Ejemplos:

- 1) Sea  $\mathbb{RP}^n = \{ \{ x, \neg x \}; x \in S \}$  de ciertos pares no ordenados de puntos de  $S^n$ . Existe obviamente una aplicación sobre  $\Pi: S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$  dada por  $x \longrightarrow \{ x, \neg x \};$  donde  $\neg x$  es la antípoda de X. El conjunto  $\mathbb{RP}^n$  con la topología cociente respecto a la aplicación  $\Pi$  se llama el n-espacio proyectivo real.
- 2) Sea  $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + \ y^2 = 1, \ |z| \le 1 \ \}$  el espacio con la topología inducida. (C es un cilindro.) Sea M el conjunto de pares no ordenados de puntos de C de la forma  $\{ p,-p \};$  esto es,  $M = \{ \{ p,-p \}; p \in C \}$ . Puesto que tenemos una aplicación sobre natural de C en M podemos dotar a M de la topología cociente; el espacio resultante se llama la banda o cinta de Möbius (algunas veces Möbius se escribe Moebius).
- Consideremos la aplicación  $f: M \to \mathbb{R}^3$  dada por  $\{p,-p\} \to ((x^2-y^2)(2+xz), 2xy(2+xz), yz)$  donde  $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ . La función así definida es inyectiva.

En la figura 1.5.1 dibujamos la imagen  $f(M) \subseteq \mathbb{R}^3$  con la topología inducida: la continuidad de f se deduce del hecho de que  $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

 $F(x,y,z) = ((x^2-y^2)(2+xz),2xy(2+xz),yz)$  es continua y de la propiedad universal del cociente (Teorema 1.5.2) también  $f^{-1}$  es continua.

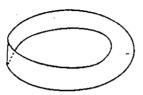


Figura 1.5.1.

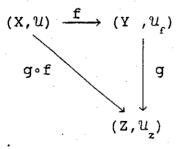
Estableceremos y demostraremos a continuación la propiedad universal del cociente.

#### 1.5.2. Teorema.

Si  $(Y, U_f)$  es la topología cociente en Y inducida por  $f: X \longrightarrow Y$  Y (X, U), entonces  $U_f$  es la mayor topología en Y que hace continua a f y es la única que satisface:

Para todo espacio topológico  $(Z, \mathcal{U}_z)$ ,  $g: Y \longrightarrow Z$  es continua si y sólo si  $g \circ f$  lo es.

O equivalentemente que el siguiente diagrama sea conmutativo.



Demostración.

Puesto que la aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua, si g es continua también lo es la composición gf. Recíprocamente, supongamos que gf es continua. Si V es abierto en Z,  $(gf)^{-1}(V)$  es abierto en X, o en otras palabras,  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  es abierto en X. Por definición de topología cociente en Y resulta que  $g^{-1}(V)$  es abierto en Y y, por tanto, g es continua.

para ver que  $u_f$  es la mayor topología que hace continua a la función f, supongamos que u' es una topología en Y que hace continua a f, entonces para todo  $A \in u'$   $f^{-1}(A) \in (X, U)$ , es decir,  $(Y, U') \subseteq (Y, U_c)$ .

probemos ahora que  $u_{\rm f}$  es la única topología en Y que satisface tal propiedad.

Supongamos que  $\mathcal{U}'$  es otra topología en Y que satisface la misma propiedad; entonces en particular tomando Z=Y,  $\mathcal{U}_z=\mathcal{U}_f$  se tiene que id:  $(Y,\mathcal{U}') \longrightarrow (Y,\mathcal{U}_f)$  es continua pues  $f=\mathrm{id}\circ f\colon (X,\mathcal{U}) \longrightarrow (Y,\mathcal{U}_f)$  lo es. Por tanto id:  $(Y,\mathcal{U}') \longrightarrow (Y,\mathcal{U}_f)$  es continua, es decir,  $A=\mathrm{id}^{-1}(A)\in \mathcal{U}'$   $\forall$   $A\in \mathcal{U}_f$ . Por tanto  $\mathcal{U}_f\subseteq \mathcal{U}'$ .

Por otro lado como

id:  $(Y, \mathcal{U}') \to (Y, \mathcal{U}')$  es continua y  $\mathcal{U}'$  satisface la misma propiedad que  $\mathcal{U}_{\mathbf{f}}$  se sigue que la composición  $(X, \mathcal{U}) \xrightarrow{\mathbf{f}} (Y, \mathcal{U}') \xrightarrow{\mathrm{id}} (Y, \mathcal{U}')$  idof es continua, esto es, f:  $(X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}')$  es continua, pero como probamos que  $\mathcal{U}_{\mathbf{f}}$  es la mayor topología que hace a la función f continua resulta que  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}_{\mathbf{f}}$ .

Por tanto,  $u' = u_r$  quedando demostrada así la unicidad.

Ahora daremos una generalización de éstos resultados.

#### 1.5.3. Definición.

Dada una familia de espacios topológicos  $\{(X_{\alpha}, u_{\alpha})\}_{\alpha \in I}$  y una familia de funciones  $\mathcal{F} = \{f_{\alpha} \colon X_{\alpha} \longrightarrow X\}_{\alpha \in I}$ . Donde X es un conjunto prefijado, definimos la topología  $u_{\mathcal{F}}$  o  $u_{\{f_{\alpha}\}}$  en X de la siguiente manera:

 $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \iff f_{\alpha}^{-1}(A) \in \mathcal{U}_{\alpha} \ \forall \ \alpha \in I, \text{ es decir},$   $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = \{ A \subseteq X; f_{\alpha}^{-1}(A) \in \mathcal{U}_{\alpha} \ \forall \ \alpha \in I \}.$ 

A la topología  $u_{\mathcal{F}}$  la llamaremos la topología fuerte o coinducida en X por la familia de espacios topológicos  $\{(X_{\alpha}, u_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathbf{I}}$  y la familia de funciones  $\mathcal{F} = \{f_{\alpha}: X_{\alpha} \longrightarrow X\}_{\alpha \in \mathbf{I}}$ .

De ésta definición se deduce el siguiente teorema.

1.5.4. Teorema.

- i)  $u_x$  es una topología en X.
- ii)  $f_{\alpha}: (X_{\alpha}, u_{\alpha}) \longrightarrow (X, u_{\mathcal{F}})$  es continua para cada  $\alpha \in I$  y  $u_{\mathcal{F}}$  es la mayor topología en X con esta propiedad.
- iii)  $u_g$  es la única topología en X que satisface:

  Para cualquier espacio topológico  $(Z, u_Z)$  y cualquier función  $g: (X, u_g) \longrightarrow (Z, u_Z)$  se cumple g es continua  $\Leftrightarrow g \circ f_{\alpha}$  es continua para cada  $\alpha \in I$ .

### Demostración.

i) Es fácil probar que  $u_{\mathbf{f}}$  es efectivamente una topología de Y. Por ejemplo, si A, B  $\in$   $u_{\mathbf{f}}$ , entonces  $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1}(A)$  y  $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1}(B)$  son abiertos en  $X_{\mathbf{i}}$  para cada  $\mathbf{i} \in I$  y, por tanto,  $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1}(A) \cap \mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1}(B) = \mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1}(A \cap B)$  es también abierto en  $X_{\mathbf{i}}$  para cada  $\mathbf{i} \in I$ , es decir, A  $\cap$  B  $\in$   $u_{\mathbf{f}}$ .  $\mathbf{i}$  i) Supongamos ahora que  $u_{\mathbf{f}}'$  es una topología de X tal que  $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1} \colon X_{\mathbf{i}} \to (X, u_{\mathbf{f}}')$  es continua para cada  $\mathbf{i} \in I$ . Esto implica que si  $\mathbf{v} \in u_{\mathbf{f}}$ , entonces  $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}^{-1}(\mathbf{v})$  es abierto en  $X_{\mathbf{i}}$  para cada  $\mathbf{i} \in I$ , es decir,  $\mathbf{v} \in u_{\mathbf{f}}$ . Por tanto,  $u_{\mathbf{f}}' \subseteq u_{\mathbf{f}}$  y  $u_{\mathbf{f}}$  es la máxima con la propiedad mencionada.

iii) La demostración de este inciso es análoga a la del Teorema 1.5.2

## Ejemplo.

Sea {  $(X_{\alpha}, u_{\alpha})$  }  $_{\alpha \in I}$  una familia de espacios topológicos y X =  $\bigcup$  X  $_{\alpha}$ . Podemos considerar en X la topología fuerte inducida por la familia de inclusiones  $\mathcal{F} = \{ j_{\alpha}: X_{\alpha} \to \bigcup$  X  $_{\alpha} : j_{\alpha}(x) = x \}_{\alpha \in I}$  y por los espacios topológicos  $\{ (X_{\alpha}, u_{\alpha}) \}_{\alpha \in I}$ . A la pareja  $(X, u_{\mathcal{F}})$  le llamaremos la topología suma de los espacios  $X_{\alpha}$  y a  $u_{\mathcal{F}}$  la topología suma. De esta manera, un subconjunto A en X, es abierto en X  $\leftrightarrow$  A  $\cap$  X  $_{\alpha} = j_{\alpha}^{-1}(A)$  es abierto en X  $_{\alpha}$   $\forall$   $\alpha \in I$ .

Un ejemplo mas concreto es el siguiente. Ejemplo.

Sea  $X_1 = \{ a,b,c \}$  con la topología  $\mathcal{U}_1 = \{ \varnothing, X_1, \{ a \}, \{ a,b \} \}$   $X_2 = \{ 0,1 \}$  con la topología  $\mathcal{U}_2 = \{ \varnothing, X_2, \{ 0 \} \}$  Entonces la topología suma para  $X = X_1 \cup X_2$  es  $\mathcal{U}_X = \{ \varnothing, X_1 \cup X_2, \{ a \}, \{ a,b \}, \{ 0 \}, \{ a,0 \}, \{ a,b,0 \}, \{ a,0,1 \}, \{ a,b,0,1 \}, \{ a,b,c,0 \} \}$ 

Ejemplo.

La aplicación  $f: \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$\{ x, -x \} \rightarrow (x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$$

además de ser inyectiva es continua pues la composición  $f\Pi: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $x \longrightarrow (x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$  es continua.

Una consecuencia inmediata de la definición de conjunto cerrado y del comportamiento de la imagen inversa del complemento de un conjunto es el siguiente:

## 1.5.5. Lema.

Si Y tiene la topología cociente respecto a  $f: X \longrightarrow Y$  entonces un subconjunto A de Y es cerrado si y sólo si  $f^{-1}(A)$  es cerrado en X.

Demostración.

X\A es un abierto en Y.

 $f^{-1}(X\setminus A) = X\setminus A$ es un abierto en X. Por tanto  $f^{-1}(A)$  es cerrado en X. Reciprocamente,  $f^{-1}(X/A) = X\setminus f^{-1}(A)$  es un abierto en X. Por tanto  $X\setminus A$  es un abierto en Y, por tanto, A es cerrado en Y.

#### 1.5.6. Teorema.

Sean X,Y,Z espacios topológicos y  $f:X \longrightarrow Y$ ,  $g:Y \longrightarrow Z$  aplicaciones sobres. Si las topologías de Y y de Z son las topologías cociente determinadas por f y g respectivamente, entonces la topología de Z es la topología cociente determinada por  $gf:X \longrightarrow Z$ .

Demostración.

Sea  $A \in (\mathcal{U}_Z, \mathbb{Z})$ .  $g^{-1}(A) \in (\mathcal{U}, \mathbb{Y})$ . Por definición se tiene que  $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (gf)^{-1}(A) \in (\mathcal{U}_{gf}, \mathbb{Z})$ . Por tanto  $A \in \mathcal{U}_{gf}$ . Recíprocamente, sea  $A \in (\mathcal{U}_{gf}, \mathbb{Z})$ . Por definición se tiene que  $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (gf)^{-1}(A)$  es un abierto en X. Por tanto g(A) es un abierto en Y y por tanto  $A \in \mathcal{U}_Z$ . Por tanto,  $\mathcal{U}_Z = \mathcal{U}_{gf}$ .

#### 1.5.7. Teorema.

Sea X un espacio topológico y f:X→Y una aplicación sobre.

pesignemos por  $u_{\rm f}$  la topología cociente en Y. Supongamos que u es una topología en Y tal que  $f:X{\longrightarrow}Y$  es continua respecto a esta topología.

Si f es una aplicación abierta o cerrada, entonces  $(Y, \mathcal{U})$  es homeomorfo a  $(Y, \mathcal{U}_c)$ .

Demostración.

Como f:X—Y es continua y  $u_f$  es la mayor topología que podemos construir en Y tal que f es continua, se debe cumplir que  $u_{_{\! Y}} \subseteq u_{_{\! f}}$ . Probemos ahora que  $u_{_{\! f}} \subseteq u_{_{\! Y}}$ , esto es si A  $\in u_{_{\! f}}$  entonces A  $\in u_{_{\! f}}$ . Supongamos primero que f es abierta; sea A  $\in u_{_{\! f}}$  entonces  $f^{-1}(A) \in u_{_{\! f}}$ .

Como f es abierta entonces  $f(f^{-1}(A))$  es abierto en Y respecto a la topología  $u_{y}$ . Pero f es suprayectiva, así que  $f(f^{-1}(A)) = A$ . Por tanto para  $A \in U_{x}$  entonces  $A \in U_{y}$ .

Supongamos ahora que f es cerrada y sea A  $\in \mathcal{U}_{\mathbf{f}}$ ; entonces  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{A}) \in \mathcal{U}_{\mathbf{X}}$  entonces  $\mathbf{X} \setminus \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{A})$  es cerrado en X respecto a la topología  $\mathcal{U}_{\mathbf{X}}$ . Como f es cerrada entonces  $\mathbf{f}(\mathbf{X} \setminus \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{A}))$  es cerrado en Y respecto a la

topología  $u_{\mathbf{y}}$ . Además claramente  $\mathbf{f}(\mathbf{X}\backslash\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{A})) = \mathbf{Y}\backslash\mathbf{A}$  por tanto  $\mathbf{A}$  es abierto en  $\mathbf{Y}$  respecto a la topología  $u_{\mathbf{y}}$ , es decir,  $\mathbf{A}\in u_{\mathbf{y}}$ . Por tanto si  $\mathbf{A}\in u_{\mathbf{y}}$  entonces  $\mathbf{A}\in u_{\mathbf{y}}$ .

Si quitamos la hipótesis de que f sea abierta o cerrada podemos tener  $(Y,U) \not\equiv (Y,U_f)$ . Por ejemplo:

Sea  $X = \mathbb{R}$  con la topología discreta. Sea  $Y = \mathbb{R}$  con la topología usual. i: $X \rightarrow Y$  la función identidad.

Claramente,  $i:X \longrightarrow Y$  es una función continua pues X tiene la topología discreta. Además i no es abierta ni cerrada.

 $(Y, U) \not\equiv (Y, U_f)$  pues por ejemplo, (0,1] es un abierto en  $(Y, U_f)$  pero no lo es en (Y, U).

Por lo tanto  $(Y, U) \not\equiv (Y, U_f)$ .

Un ejemplo del teorema anterior es el siguiente.

Sea  $f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$   $(S^1 \subseteq \mathbb{R}^2)$  definida mediante

 $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in \mathbb{R}^2$ 

demostraremos que la topología cociente  $u_{\rm f}$  determinada por f en S $^1$  coincide con la topología u inducida por la inclusión en  ${
m R}^2$  (es

decir, que  $(S^1, U_f) \cong (S^1, U)$ .

Demostración.

La topolgía inducida por la inclusión  $i:S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  hace continua a la función f(t), además f es una función abierta, y claramente es sobre. Así por el teorema anterior  $(S^1, \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}) \cong (S^1, \mathcal{U}).$ 

Un procedimiento para obtener aplicaciones sobres consiste en considerar las clases de equivalencia de una relación de equivalencia. Así si X es un espacio topológico y ~ es una relación de equivalencia en X, definimos  $f:X\to X/\sim$  por f(x)=[x], la clase de equivalencia que contiene a x  $(X/\sim$  designa el conjunto de las clases de equivalencia). Se dice a menudo que  $X/\sim$  con la topología cociente ha sido obtenida por identificación topológica. Por ejemplo, si ~ es la relación de equivalencia en  $S^n$  dada por  $x \sim y$  si y sólo si  $x = \pm y$ ,  $x \sim y$  desde luego por definición,  $x \sim y$  análogamente la misma relación en el cilindro  $x \sim y$  que es la banda de Möbius.

Si consideramos en  $\mathbb{R}^2$  el cuadrado unidad  $X = \{ (x,y); 0 \le x,y \le 1 \}$  con la topología inducida y definimos en X una relación de equivalencia ~ por (x,y) ~ (x',y')  $\Leftrightarrow$  (x,y) = (x',y')  $\circ$ 

 $\{x,x'\} = \{0,1\} \text{ e } y = y' \text{ entonces } X/\sim \text{ con la topología cociente}$  es homeomorfo al cilindro, lo cual es intuitivamente claro.

Representaremos X con su relación de equivalencia como en la figura 1.5.2(a) donde las flechas indican que puntos (y en que forma) están identificados.

Figura 1.5.2.



(a) Cilindro



(b) Banda de Möbius

Podríamos construir una banda de Möbius por un proceso similar; está representada por la Figura 1.5.2(b) y la relación en el cuadrado X es  $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \circ \{x,x'\} = \{0,1\} \text{ e } y = 1-y'.$  La Figura 1.5.3 muestra otros dos ejemplos obtenidos a partir de un cuadrado unidad por identificaciones topológicas.

Figura 1.5.3



Las relaciones no triviales en X dadas en la figura 1.5.3(b) son  $(0,y) \sim (1,y)$ ,  $(x,0) \sim (x,1)$ , mientras que las relaciones no triviales en X dadas en la Figura 1.5.3(b) son

$$(0,y) \sim (1,y), (x,0) \sim (1-x,1)$$

El toro (el espacio de la figura 5.3(a)) es homeomorfo al subespacio de  $\mathbb{R}^3$  definido por

 $(x,y) \rightarrow ((2+\cos(2\pi x))\cos(2\pi y), (2+\cos(2\pi x))\sin(2\pi y), \sin(2\pi x))$  Esto nos lleva a la tradicional representación de un toro como la superficie de una rosquilla. Véase la Figura 1.5.4

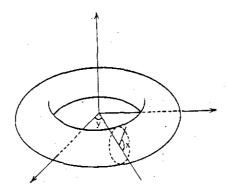


Figura 1.5.4

Intuitivamente, si con un material flexible de la forma de la Figura 1.5.3(a) realizamos las identificaciones apropiadas, obtenemos de nuevo este cuerpo. Véase la Figura 1.5.5.

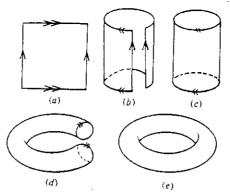


Figura 1.5.5

El proceso análogo para la botella de Klein es más difícil de realizar ya que la identificación debe realizarse en  $\mathbb{R}^4$ .

La primera identificación (Figura 1.5.6(c)) es fácil.

Para la segunda (Figura 1.5.6(c)) necesitamos cuatro dimensiones. Lo representamos gráficamente como en la Figura 1.5.6(d). La circunferencia de intersección que aparece no existe realmente; porque vivimos en un mundo de tres dimensiones.

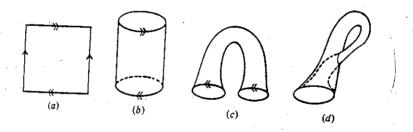
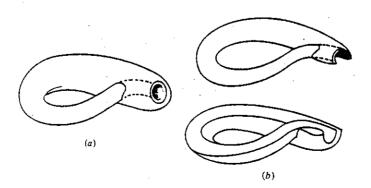
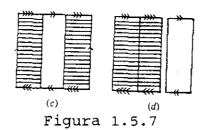


Figura 1.5.6

Cortando la figura 1.5.6(d) por un plano vemos (Figura 1.5.7(a), (b)) que una botella de Klein es exactamente la unión de dos bandas de Möbius a lo largo de su borde común, tal como está visualizado en la Figura 1.5.7.(c),(d).





Recordemos para su utilización posterior, que el plano proyectivo  $\mathbb{R}^2$  está definido como  $S^2/\sim$ , donde  $x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'$ .

En este caso el hemisferio norte está identificado con el hemisferio sur y, por tanto, podemos restringir nuestra atención al hemisferio norte que es homeomorfo al disco

$$D^2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 1 \}$$

vía la aplicación  $(x,y,z) \in S^2$  con  $z \ge 0$ . Así pues, podemos redescribir  $\mathbb{R}P^2$  como  $D^2/\sim$  donde  $x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$  o  $x, x' \in S^1 \subseteq D^2$  y = -x.

La Figura 1.5.8(b), o equivalentemente la Figura 1.5.8(c) da esta representacion. Desde luego, no hemos dado una demostración rigurosa.

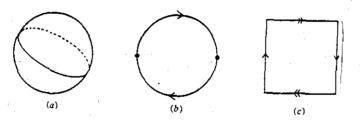


Figura 1.5.8

Si suprimimos en  $\mathbb{RP}^2$  una pequeña región (homeomorfa a  $\mathbb{D}^2$ ) obtenemos una banda de Möbius; véase la Figura 1.5.9. Así pues, el plano proyectivo puede pensarse como una banda de Möbius a la que le hemos cosido un disco.

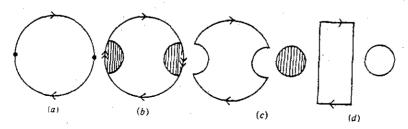


Figura 1.5.9

La esfera puede ser representada como un espacio cociente tal como lo indica la Figura 1.5.10(a) o (b).

Intuitivamente imaginamos los espacios como bolsas con cremallera. Cerrando la cremallera obtenemos una esfera.

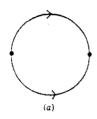


Figura 1.5.10.(a)

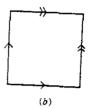


Figura 1.5.10.(b)

Los análogos en dimensión uno del disco y de la esfera son el intervalo y la circunferencia: si identificamos los extremos de un intervalo unidad obtenemos una circunferencia; intuitivamente es claro.

Para ver una demostración de la afirmación anterior sea  $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$  y ~ es la relación de equivalencia

$$x \sim x' \Leftrightarrow \{x,x'\} = \{0,1\} \circ x = x'.$$

Demostraremos que I/~ es homeomorfo a  $S^1 = \{ (x,y); x^2 + y^2 = 1 \}$ . Sea  $f:I/\sim \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  definida por  $[x] \to (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$  f está bien definida, es biyectiva abierta y continua; por tanto, I/~ es homeomorfo a  $S^1$ .

El resultado siguiente da condiciones suficientes que nos aseguran que los cocientes de espacios homeomorfos son homeomorfos.

### 1.5.8. Teorema.

Sea  $f: X \longrightarrow Y$  una aplicación entre los espacios topológicos X e Y. Supongamos que tenemos relaciones de equivalencia  $\sim x$  y  $\sim y$  en X e Y respectivamente tales que x  $\sim x$  x' si y sólo si f(x)  $\sim y$  f(x'). Si f es un homeomorfismo, los espacios  $X/\sim x$  y  $Y/\sim y$  son homeomorfos.

Demostración.

Definimos una aplicación  $F:X/\sim x \longrightarrow Y/\sim y$  por F[x] = [f(x)] donde los

corchetes indican clases de equivalencia. F está bien definida, ya que si [x] = [x'], entonces  $x \sim x'$ , de donde  $f(x) \sim y$  f(x') y [f(x)] = [f(x')]. Probemos que F es un homeomorfismo. Para ver que f es inyectiva supongamos que F[x] = F[x'], de donde [f(x)] = [f(x')], es decir  $f(x) \sim y$  f(x'); pero entonces  $x \sim x$  x' y, por tanto, [x] = [x']. El hecho de que F sea sobreyectiva es consecuencia de que f es un homeomorfismo. Para demostrar que F es continua consideremos las proyecciones naturales  $\Pi_x: X \longrightarrow X/\sim x$  y  $\Pi: Y \longrightarrow Y/\sim y$ , que son continuas.

Claramente  $F\Pi_x = \Pi_y f$  y, puesto que f es continua, deducimos que  $F\Pi_x$  es continua, de donde se sigue la continuidad de F por la propiedad universal del cociente. La demostración de la continuidad de  $F^{-1}$  es análoga ya que  $F^{-1}\Pi_y = \Pi_x f^{-1}$ .

Como ejemplo consideremos  $\mathbb{R}^+ = (0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$  con la relación de equivalencia  $x \sim x'$  si y sólo si existe un entero n tal que  $x'=3^nx$ . Consideremos también  $\mathbb{R}$  con la relación de equivalencia  $x \sim x'$  si y sólo si existe un entero n tal que x'=n+x. La aplicación  $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$  dada por  $f(x)=\log_3(x)$  es un homeomorfismo y  $x \sim x'$  si y sólo si  $f(x) \sim f(x')$ . En efecto, si  $x \sim x'$  entonces existe un entero n tal que  $x'=3^nx$ , pero

 $f(x') = \log_3(x') = \log_3(3^n x) = \log_3(3^n) + \log_3(x) = n\log_3(3) + \log_3(x)$ =  $n + \log_3(x) = n + f(x)$ . Por tanto  $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ .

Reciprocamente, si  $f(x) \sim f(x')$  entonces existe un entero n tal que f(x') = n + f(x) pero esto implica que  $\log_3(x') = n + \log_3(x)$   $\Rightarrow \log_3(x') = \log_3(3^n x) \Rightarrow x' \sim x$ . así pues, los espacios  $\mathbb{R}^+/\sim y$   $\mathbb{R}/\sim$  son homeomorfos, de hecho, ambos son homeomorfos a la circunferencia.

El teorema 1.5.8 rigoriza la idea intuitiva de "homeomorfismo" tal como es presentado en la sección anterior:

Partimos de un espacio W. Cortándolo obtenemos X y una relación que nos dice como debemos pegar de nuevo X para obtener W. Realizamos ahora un homeomorfismo f en X obteniendo Y con la relación de equivalencia ~y naturalmente queremos que

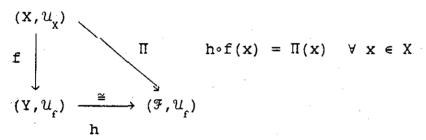
$$x \sim_x x' \Leftrightarrow f(x) \sim_y f(x')$$
.

Volviendo a pegar Y según la relación  $\sim_y$  obtenemos Z = Y/ $\sim_y$  en virtud del teorema 1.5.8 el espacio Z es homeomorfo a W = X/ $\sim_y$ .

El siguiente teorema es fundamental y nos muestra que todo espacio cociente es escencialmente un espacio partición, es decir, un espacio obtenido por identificación de ciertas clases de equivalencia.

# 1.5.9. Teorema.

Sea  $(X, \mathcal{U}_X)$  un espacio topológico. Si Y tiene la topología cociente inducida por una función suprayectiva  $f: X \longrightarrow Y$  (así f resulta continua), entonces existe un homeomorfismo h de Y en el espacio partición  $\mathcal{F} = \{ f^{-1}(y); y \in Y \}$  de X. Además  $h \circ f$  es igual a la proyección natural  $\Pi: X \longrightarrow \mathcal{F}$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta.



Demostración.

Demos explícitamente el homeomorfismo, el cual es completamente "natural":

Sea h:Y $\to$ F tal que h(y) = f<sup>-1</sup>(y). h así definida es tal que el diagrama conmuta, pues para cada x  $\in$  X (h $\circ$ f)(x) = f<sup>-1</sup>(f(x)) =  $\Pi(x)$  pues evidentemente x  $\in$  f<sup>-1</sup>(f(x)). Además como f es una función tenemos que para y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>  $\in$  Y, tales que y<sub>1</sub>  $\neq$  y<sub>2</sub> entonces f<sup>-1</sup>(y<sub>1</sub>)  $\neq$  f<sup>-1</sup>(y<sub>2</sub>), es decir, h(y<sub>1</sub>)  $\neq$  h(y<sub>2</sub>) si y<sub>1</sub>  $\neq$  y<sub>2</sub>. Por tanto h es una función inyectiva. Además claramente h es una función suprayectiva. Ahora bien tomemos B un subconjunto de F, entonces h<sup>-1</sup>(B) = A  $\in$  U<sub>f</sub>  $\Leftrightarrow$  f<sup>-1</sup>(A) = { f<sup>-1</sup>(y); y  $\in$  A } es un conjunto abierto en X  $\Leftrightarrow$  U { f<sup>-1</sup>(y) } = h(A) = B es abierto en F.

Así hemos probado que h es una función continua y también probamos que h es una función abierta. Por tanto h es un homeomorfismo.

# 1.6. Preliminares Algebraicos.

Un concepto que será de más utilidad en adelante es el de un grupo G que "actúa" sobre un conjunto X. Este concepto es muy fructífero y nos proporciona ejemplos de espacios con la topología cociente.

#### 1.6.1. Definición.

Sea X un conjunto y G un grupo. Decimos que G actúa (u opera) sobre X y que X es un G-conjunto si existe una aplicación de  $G \times X$  en X, que denotaremos por  $(g,x) \longrightarrow g \cdot x$ , tal que:

- (i)  $1 \cdot x = x$  para todo  $x \in X$ , donde 1 es el elemento identidad.
- (ii)  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$  para todo  $x \in X$  y todo  $g,h \in G$ .

# Ejemplos:

- 1) Sea G el grupo de los homeomorfismos de un espacio topológico X y definamos  $g \cdot x = g(x)$  para todo  $g \in G$ . Obtenemos así una acción de G sobre X puesto que, claramente  $1 \cdot x = 1(x) = x$  y  $g \cdot (h \cdot x) = g \cdot h(x) = g(h(x)) = (gh)(x) = (gh) \cdot x$ .
- 2) Sea  $G = \mathbb{Z}2 = \{ \pm 1 \}$ , el grupo de orden 2, y  $X = S^n$ . Se comprueba fácilmente que mediante  $\pm 1 \cdot x = \pm x$  obtenemos una acción de  $\mathbb{Z}2$  sobre  $S^n$ . Si tomamos  $G = \mathbb{Z}$  el grupo de los enteros y  $X = \mathbb{R}$ ,  $n \cdot x = n + x$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nos da una acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$ .

Este ejemplo puede generalizarse a una acción de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}^2$  mediante  $(m,n) \cdot (x,y) = (m+x,n+y)$ . En ambos casos se obtiene una acción en el sentido de la definición 1.6.1 Nuestro último ejemplo de momento, es una acción de  $\mathbb{Z}$  sobre la banda infinita

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; -1/2 \le y \le 1/2 \}$$

dada por

$$m \cdot (x, y) = (m+x, (-1)^m y)$$

Hablando con precisión, nuestra definición de G-acción es la de una G-acción por la izquierda. Existe también el concepto de G-acción por la derecha cuando tenemos una aplicación  $X\times G \to X$ , que denotaremos por  $(x,g)\to x\cdot g$  tal que  $x\cdot 1=x$  y  $(x\cdot g)\cdot h=x\cdot (gh)$ . Una G-acción significará siempre una G-acción por la izquierda.

Algunos resultados y definiciones importantes sobre acciones y grupos son los siguientes:

1.6.2. Teorema.

Sea X un G-conjunto por la derecha. Para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$  definimos  $g \cdot x = x \cdot (g^{-1})$  entonces obtenemos una acción (por la izquierda) de G sobre X.

1.6.3. Teorema.

Sea H un subgrupo de G. Para todo  $h \in H$  y todo  $g \in G$  definimos  $h \cdot g$  como hg. Entonces ésta es una acción de H sobre  $G.\blacksquare$ 

Otro ejemplo de acción es el siguiente.

Sea G un grupo y designemos por  $\mathcal{L}(G)$  el conjunto de .los subconjuntos de G. Entonces  $g \cdot U = gU = \{ gh; h \in U \}, g \in G, U \in \mathcal{L}(G)$  define una acción de G sobre  $\mathcal{L}(G)$ .

1.6.4. Definición.

Sea G un grupo que actúa sobre X.

Definimos el estabilizador de  $x \in X$  como el conjunto

$$G_{x} = \{ g \in G; g \cdot x = x \}$$

1.6.5. Teorema.

 $G_{x}$  es subgrupo de G.

Demostración.

Sean  $g,h \in G_x$ .

 $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ . Por tanto  $gh \in G$ .

 $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x$ . Por tanto  $g^{-1} \in G_{v}$ .

Por tanto, G es subgrupo de G.■

1.6.6. Definición.

Sea G un grupo que actúa sobre X.

Definimos la órbita de  $x \in X$  como el subconjunto de X

$$G \cdot x = \{ g \cdot x; g \in G \}$$

1.6.7. Teorema.

Dos órbitas G·x, G·y son disjuntas o coinciden.

Demostración.

supongamos que existen  $g_1$ ,  $g_2 \in G$ ,  $x,y \in X$ , tales que  $g_1 \cdot x \in G \cdot x$ ,  $g_2 \cdot y \in G \cdot y$  y tales que  $g_1 \cdot x = g_2 \cdot y$ .

$$\Rightarrow (g_2^{-1} g_1) \cdot x = y$$

$$\Rightarrow g \cdot y = g \cdot [g_2g_1] \cdot x = (gg_2g_1) \cdot x \in G \cdot x \quad \forall g \in G.$$

$$\Rightarrow$$
 g·y  $\in$  G·x  $\forall$  g  $\in$  G.

$$\Rightarrow$$
 G·Y  $\subset$  G·X.

Análogamente podemos obtener G·x < G·y.

Por tanto,  $G \cdot x = G \cdot y$ .

# Observacion:

Del teorema anterior se deduce que todo G-conjunto X se descompone en unión de subconjuntos disjuntos:

El siguiente teorema nos muestra que una consecuencia importante de la definición de G-conjunto X es que, de hecho, G actúa sobre X por biyecciones.

#### 1.6.8. Teorema.

Sea X un G-conjunto. Para todo geG la aplicación  $\theta_g: X \longrightarrow X$  definida por  $x \longrightarrow g \cdot x$  es biyectiva.

# Demostración.

De la definición de G-conjunto resulta  $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$  y  $\theta_1 = 1x$ ; así pues  $\theta_g\theta_g^{-1} = 1x = \theta_g^{-1}\theta_g$  y, por tanto,  $\theta_g$  es biyectiva.

#### 1.6.9. Definición

Si g actúa sobre X, podemos definir una relación de equivalencia ~ en X mediante

$$x \sim y \Rightarrow \text{ existe un } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$

o, en otras palabras,  $x \sim y$  si y sólo si  $y \in G \cdot x$  (Véase teorema 1.6.7). El conjunto de clases de equivalencia, que designaremos por X/G, se llama el conjunto cociente de X por G. Si X es un espacio topológico sobre el cual actúa G podemos dotar a X/G de la topología cociente. Al espacio X/G con la topología cociente le llamaremos el espacio cociente de X por G.

Por ejemplo, si  $\mathbb{Z}_2$  actúa sobre  $S^n$  por  $\pm 1 \cdot x = \pm x$ ,  $S^n/\mathbb{Z}_2$  que no es

otra cosa que  $\mathbb{R}P^n$ . Si  $\mathbb{Z}$  actúa sobre  $\mathbb{R}$  por  $n \cdot x = n + x$ ,  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es precisamente  $S^1$ .

# 1.6.10. Definición.

Sean X e Y G-conjuntos. Decimos que la aplicación  $f:X \longrightarrow Y$  es G-equivariante si  $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$  para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$ .

#### 1.6.11. Teorema.

Si X e Y son espacios topológicos y f es un homeomorfismo G-equivariante, (es decir, f es un homeomorfismo y es G-equivariante) entonces X/G e Y/G son homeomorfos.

# Demostración.

Sean  $x,y \in X$  tales que  $x \sim y$ , es decir,  $y = g \cdot x$  ( $y \in G \cdot x$ ).

 $f(y) = f(g \cdot x) = g \cdot f(x) \Rightarrow f(x) \sim f(y)$  en Y.

Reciprocamente, sean  $f(y) \sim f(x) \Rightarrow f(y) = g \cdot f(x) \Rightarrow f(y) = f(g \cdot x)$ 

y = g·x puesto que f es biyectiva.

Así por el teorema 1.5.8, X/G ≅ Y/G.■

#### Observación:

Si X e Y son espacios topológicos sobre los que opera G tales que  $X/G \cong Y/G$ , entonces X e Y no son necesariamente homeomorfos.

En los ejemplos que anteriormente hemos dado de acciones de un grupo sobre un espacio topológico, los grupos en cuestión actuaban con continuidad; estos espacios tienen un nombre especial.

# 1.6.12. Definición.

Sea X un espacio topológico y G un grupo; decimos que X es un G-espacio si G actua sobre X y si las aplicaciones  $\theta_g$  definidas por  $x \rightarrow g \cdot x$  son continuas para todo  $g \in G$ .

#### 1.6.13. Lema.

Sea X un G-espacio. Entonces para todo  $g \in G$  la aplicación  $\theta$  definida por  $x \rightarrow g \cdot x$  es un homeomorfismo de X en si mismo.

#### Demostración.

Como las aplicaciones  $\theta_{g}$  definidas por x $\rightarrow g \cdot x$  son continuas para

todo g  $\theta_g^{-1}$ también es continua, además  $\theta_g^{-1} = \theta_g^{-1} = 1_x$ . También  $\theta_g$ ,  $\theta_g^{-1}$  son biyectivas por el teorema 1.6.8. Por tanto,  $\theta_g^{-1}$  es un homeomorfismo de X en si mismo.

# 1.6.14. Corolario.

Con las hipótesis del lema anterior existe un homomorfismo de G en el grupo de homeomorfismos de X.

#### Demostración.

```
Sea \psi: G \longrightarrow G(X) = \{ f: X \longrightarrow X; f \text{ es homeomorfismo } \} \text{ dada por } \psi(g) = \theta_g. \psi(g_1g_1) = \theta_{g1g2} \theta_{g1}\theta_{g2} = \psi(g_1)\psi(g_2).\blacksquare
```

En virtud del corolario 1.6.14. y del lema 1.6.13 se dice a veces que G es un grupo de homeomorfismos de X si X es un G-espacio. Usando esto probaremos el próximo resultado.

#### 1.6.15. Teorema.

Supongamos que X es un G-espacio. Entonces, la proyección canónica  $\Pi: X \longrightarrow X/G$  es una aplicación abierta.

#### Demostración.

```
Sea U un conjunto abierto en X y consideremos \Pi^{-1}(\Pi(U)). \Pi^{-1}(\Pi(U)) = \{ x \in X; \ \Pi(x) \in \Pi(U) \}
= \{ x \in X; \ G \cdot x = G \cdot y \text{ para algún } y \in U \}
= \{ x \in X; \ x = g \cdot y \text{ para algún } y \in U \text{ y algún } g \in G \}
= \{ x \in X; \ x \in g \cdot U \text{ para algún } g \in G \}
= \bigcup_{g \in G} U
```

La acción de cada g de G es un homeomorfismo en virtud del lema 1.6.13 . por lo que si U es abierto también lo es  $\Pi^{-1}(\Pi(U))$  (pues g·U es abierto por ser  $\theta_G$  abierta por ser homeomorfismo, así, como g·U es abierto  $\forall$  g  $\in$  G, U g·U es un abierto) y como X/G tiene la topología cociente  $\Pi(U)$  es abierto en X/G.

El siguiente resultado es una extensión de la propiedad universal del cociente.

#### 1.6.16. Teorema.

Sea X un G-espacio y  $\Pi: X \longrightarrow X/G$  la proyección canónica. Supongamos que g es una aplicación de X/G en un espacio topológico Z. Entonces g es una aplicación abierta si y sólo si g $\Pi$  es abierta.

#### Demostración.

Por el teorema 1.6.15  $\Pi$  es una aplicación abierta, si g es abierta también lo es la composición g $\Pi$ .

Recíprocamente, supongamos que gN es abierta.

Sea U un abierto en X/G y consideremos  $\Pi^{-1}(U)$  que es un abierto en X.  $g\Pi(\Pi^{-1}(U))$  es un abierto en Z pero  $g\Pi(\Pi^{-1}(U)) = g(U)$ . Por tanto, q es una función abierta.

El siguiente resultado extiende el teorema 1.6.15 en un caso especial.

# 1.6.17. Teorema.

Sea X un G-espacio, con G finito. Entonces la proyección natural  $\Pi: X \longrightarrow X/G$  es una aplicación cerrada.

#### Demostración.

Sea U un conjunto cerrado en X.

Como vimos en el teorema 5.12,  $\Pi^{-1}(\Pi(U)) = U g \cdot U$ 

la acción de cada g de G es un homeomorfismo, por lo que si U es cerrado, también lo es U g U (por ser unión finita), así  $\Pi^{-1}(\Pi(U))$  es cerrado, por tanto,  $\Pi(U)$  es cerrado. (La topología cociente también se puede definir via conjuntos cerrados).

Más sobre topología.

# 1.7. Espacios compactos.

En esta sección daremos algunas definicines y resultados de los llamados conjuntos compactos de un espacio topológico que nos serán de utilidad más adelante.

# 1.7.1 Definición.

Un recubrimiento de un subconjunto S de un conjunto X es una colección de subconjuntos  $\{U_j;j\in J\}$  de X tal que  $S\subseteq U$   $U_j$ . Si el conjunto de índices es finito, se dice que  $\{U_j;j\in J\}$  es un recubrimiento finito.

## 1.7.2 Definición.

Supongamos que {  $U_j$ ;  $j \in J$  } y {  $V_k$ ;  $k \in K$  } son recubrimientos del subconjunto S de X. Si para todo  $j \in J$  existe un  $k \in K$  tal que  $U_j = V_k$ , decimos que {  $U_j$ ;  $j \in J$  } es un subrecubrimiento del recubrimiento {  $V_k$ ;  $k \in K$  }.

### 1.7.3 Definición.

Supongamos que X es un espacio topológico y S es un subconjunto de X. Decimos que el recubrimiento {  $U_j$ ;  $j \in J$  } es un recubrimiento abierto de S si cada  $U_i$ ;  $j \in J$  es un subconjunto abierto de X.

# 1.7.4 Definición.

Un subconjunto S de un espacio topológico es compacto si todo recubrimiento abierto de S posee un subrecubrimiento finito.

A continuación daremos dos teoremas los cuales enunciamos sin demostración.

#### 1.7.5. Teorema.

Un subconjunto S de X es compacto si y sólo si es compacto como espacio dotado de la topología inducida.

# 1.7.6. Teorema.

Sea  $f: X \longrightarrow Y$  una aplicación continua. Si  $S \subseteq X$  es un subespacio compacto, f(S) es compacto.

### 1.7.7. Teorema.

A ⊆ R<sup>n</sup> es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado. ■

#### 1.7.8. Teorema.

Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

### Demostración.

Sea {  $U_j$ ;  $j \in J$  } un recubrimiento abierto del subconjunto  $S \subseteq X$ , donde cada  $U_j$  es un subconjunto abierto de X. Puesto que U  $U_j \supseteq S$ , {  $U_j$ ;  $j \in J$  }  $\cup$  { X-S } es un recubrimiento abierto de X Y como X es compacto admite un subrecubrimiento finito que será de la forma {  $U_k$ ;  $k \in K$  }  $\cup$  { X-S }, donde K es finito. Por tanto, {  $U_k$ ;  $k \in K$  } es un subrecubrimiento finito de {  $U_i$ ;  $j \in J$  }, que recubre S.

# 1.7.9. Teorema. (Número de lebesgue).

Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. Si  $\{U_j; j \in J\}$  es un recubrimiento abierto de X, existe un número real  $\rho>0$  (llamado número de lebesgue de  $\{U_j; j \in J\}$ ) tal que todo subconjunto de X de diámetro menor que  $\rho$  está contenido en algún  $U_j$ ,  $j \in J$ .

# Demostración.

Para cada  $x \in X$ , elegimos r(x) > 0 tal que B(x,r(x)) está

contenido en algún  $U_{\alpha}$ ; y de la cubierta abierta  $\{B(x,r(x)/2); x \in X\}$  extraemos una subcubierta finita:  $\{B(x_i,r(x_i)/2); i=1,\ldots,n\}$ . Sea  $\rho=\min[r(x_i)/2,\ldots,r(x_n)/2]$ ; entonces  $\rho>0$  es el número de lebesgue. Pues dado  $B(x,\rho)$ , tenemos que  $x \in B(x_i,r(x_i)/2)$  para algún i y tal que para algún  $z \in B(x,\rho)$   $d(z,x_i) \leq d(z,x) + d(x,x_i) < \rho + r(x_i)/2 \leq r(x_i)$ .

1.7.10. Teorema. (Compactificación por un punto).

Sea X un espacio topológico no compacto y definamos  $X^{\infty}$  como  $X \cup \{\infty\}$ , donde  $\infty$  es un elemento no contenido en X. Si  $\mathcal U$  es la topología de X, definimos  $\mathcal U^{\infty}$  como  $\mathcal U$  junto con todos los subconjuntos de la forma  $V \cup \{\infty\}$ , donde  $V \subseteq X$  y X-V es cerrado y compacto en X. Entonces:

- a)  $u^{\infty}$  es una topología en  $x^{\infty}$ .
- b) X es un subespacio de  $X^{\infty}$  y  $X^{\infty}$  es compacto ( $X^{\infty}$  se llama la compactificación por un punto de X).

Demostración.

a)  $\emptyset \in \mathcal{U}^{\infty}$ , ya que  $\emptyset \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{\infty}$ 

 $X^{\infty} \in \mathcal{U}^{\infty}$  ya que X-X = ø es compacto en X y cerrado, luego  $X^{\infty} = X \cup \{\infty\} \in \mathcal{U}^{\infty}.$ 

·Sean  $A_1$ ,  $A_2 \in \mathcal{U}^{\infty}$  demostraremos que  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}^{\infty}$ .

Si A,  $A_3 \in \mathcal{U}$  entonces  $A_1 \cap A_3 \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{\infty}$ .

Si  $A_1 \in \mathcal{U}$ ,  $A_2 = V \cup \{ \infty \}$  donde X-V es cerrado y compacto, entonces

 $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (V \cup \{ \infty \})$ . Como  $\{ \infty \} \notin X A_1 \cap (V \cup \{ \infty \})$ =  $A_1 \cap V \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{\infty}$  (Por ser V abierto en X).

Si  $A_1$ ,  $A_2$  son de la forma  $A_1$  = U  $\cup$  {  $\infty$  },  $A_2$  = V  $\cup$  {  $\infty$  } donde X-U, X-V son cerrados y compactos en X entonces

 $A_1 \cap A_2 = (U \cup \{ \infty \}) \cap (V \cup \{ \infty \}) = (U \cap V) \cup \{ \infty \}$  Luego  $V \cap U \in \mathcal{U}$  por lo que  $X-(V \cap U)$  es cerrado en X; además tenemos que  $X-(V \cap U) = X \setminus V \cup X \setminus U$ es compacto pues es la unión finita de compactos, luego entonces  $X-(V \cap U)$  es cerrado y compacto; por lo tanto,  $(V \cap U) \cup \{ \infty \} \in \mathcal{U}^{\infty}$ .

Sea  $\{A_i^{}\}_{i \in I}$   $A_i^{} \in \mathcal{U}^{\infty}$  demostraremos que  $\bigcup_{i \in I} A_i^{} \in \mathcal{U}^{\infty}$  donde algunos de

los  $A_i$  pueden ser de la forma  $A_i = U_i \cup \{ \infty \}$  donde  $X \setminus U_i$  escerrado y compacto en X. (El caso en que todos los  $A_i \in \mathcal{U}$  es claro). 
Consideremos  $X \setminus U = A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$  donde  $X \setminus A_i$  es cerrado en  $X \vee i \in I$  y también  $\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \subseteq X \setminus V$  para algún V que es cerrado y compacto (tomamos  $V = U_j$  para alguna j tal que  $X \setminus U_j = X \setminus A_j$  es cerrado y compacto), luego como intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y como  $\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$  es un cerrado contenido en un conjunto compacto se tiene que  $\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$  es cerrado y compacto; por tanto se concluye que  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}^\infty$ .

b) X es un subespacio de  $X^{\infty}$  y  $X^{\infty}$  es compacto.  $(X^{\infty}$  se llama compactificación por un punto de X) X es subespacio de  $X^{\infty}$  pues  $X \neq \emptyset$ ,  $X \subseteq X^{\infty}$ , y  $X^{\infty}$  es una topología; además, si  $A \in (\mathcal{U}, X)$  entonces por definición  $A \in (\mathcal{U}^{\infty}, X^{\infty})$  y A se puede escribir como  $A = A \cap X \in (\mathcal{U}^{\infty}, X)$ . Si  $A \in (\mathcal{U}^{\infty}, X)$  entonces  $A = (U \cup \{\infty\}) \cap X$  donde  $X \setminus U$  es cerrado y compacto en X, pero  $A = (U \cup \{\infty\}) \cap X = U \cap X = U$  que es un abierto en X.

# ·X es compacto.

Sea {  $A_i$ ;  $i \in I$  } una cubierta abierta arbitraria para  $X^{\infty}$ ; como  $X-V \subseteq X^{\infty}$  (donde V es cerrado y compacto) entonces {  $A_i$ ;  $i \in I$  } también es una cubierta abierta para  $X \setminus V$  y como  $X \setminus V$  es compacto existe una subcubierta finita {  $A_1, \ldots, A_n$  } que cubre a  $X \setminus V$ . Luego {  $A_1, \ldots, A_n$  }  $\cup$  {  $V \cup \{ \infty \}$  } es una subcubierta finita de {  $A_i$ ;  $i \in I$  } que cubre a  $X^{\infty}$ .

Por lo tanto X es compacto.



# Espacios de Hausdorff.

### 1.8.1 Definición.

Un espacio topológico es de Hausdorff si para todo par de puntos distintos x, y existen conjuntos abiertos  $U_x$ ,  $U_y$ , que contienen a x e y respectivamente, tales que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

Así pues todos los espacios metrizables son de Hausdorff; en particular  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual y cualquier espacio con la topología discreta es de Haudorff. Un espacio con la topología burda no es de Haussdorf si tiene más de un punto.

### 1.8.2. Teorema

En un espacio de Hausdorff todo punto es un conjunto cerrado. =

De hecho se tiene un resultado mucho más general.

#### 1.8.3. Teorema.

Todo subconjunto compacto A de un espacio de Hausdorff X es cerrado.

# Demostración.

Podemos suponer que  $A \neq \emptyset$  y  $A \neq X$  pues de lo contrario A es ya cerrado y no hay nada que demostrar. Elijamos un punto  $x \in X-A$ . Para cada  $a \in A$  existe un par de conjuntos abiertos disjuntos  $U_a$ ,  $V_a$  con  $x \in U_a$  y  $a \in V_a$ . El conjunto  $\{V_a; a \in A\}$  recubre A y, puesto que A es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$\{ V_{a(1)}, V_{a(2)}, \dots, V_{a(n)} \}$$

que recubre a A. El conjunto  $U=U_{a(1)}\cap U_{a(2)}\cap\ldots\cap U_{a(n)}$  es un conjunto abierto que contiene a x y que mo intersecta a ningún  $V_{a(1)}$ ; así pues  $U\subseteq X$  - A. Resulta que para cada punto  $x\in X$  - A existe un conjunto abierto que lo contiene y que está contenido en X - A. Esto significa que X - A es abierto Y, por tanto A es cerrado.

El teorema 1.8.3. nos permite demostrar el siguiente importante resultado.

## 1.8.4. Teorema.

Supongamos que  $f:X \longrightarrow Y$  es una aplicación continua de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y. Luego f es un homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva.

#### Demostración.

Obviamente si f es un homeomorfismo es biyectiva. El recíproco es el caso más interesante. Supongamos, pues, que f es biyectiva, por le que existe  $f^{-1}$ .  $f^{-1}$  es continua si y sólo si, para todo conjunto cerrado V de X,  $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$  es cerrado. Ahora bien, si V es cerrado en X, V es compacto por 1.7.8, de donde f(V) es compacto por 1.7.6 y por tanto f(v) es cerrado en virtud de 1.8.3, lo que demuestra la continuidad de  $f^{-1}$ .

En el resultado anterior necesitamos las dos condiciones, de compacidad y de Hausdorff. Por ejemplo, si X es el conjunto de los números reales con la topología discreta (por tanto no es compacto) y si Y es R con la topología usual(que es de Hausdorff), la identidad  $X \rightarrow Y$  es continua y biyectiva pero no es homeomorfismo. Por otra parte, si  $X = \{x,y\}$  con la topología discreta (que es compacto) e  $Y = \{x,y\}$  con la topología  $\{\emptyset,Y,\{x\}\}$  (por tanto no es de Hausdorff), la identidad es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo.

Usando el teorema anterior pueden demostrarse fácilmente muchos de los homeomorfismos de la sección 1.5. Por ejemplo, la imagen f(X) de un espacio compacto X en un espacio de Haudorff por una aplicación continua e inyectiva es homeomorfa a X.

Vamos a estudiar ahora la conservación de la propiedad de Hausdorff en subespacios, productos topológicos y espacios cocientes.

## 1.8.5. Teorema.

Todo subespacio S de un espacio de Hausdorff X es de Hausdorff.

1.8.6. Teorema.

Sean X e Y espacios topológicos. X×Y es de Hausdorff si y sólo si X e Y lo son. ■ (C. Kosniowski. 1986, pag. 59)

Así pues espacios tales como  $S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$  son de Hausdorff.

A pesar de que los subespacios de Hausdorff son de Hausdorff y los productos de espacios de Hausdorff también lo son, no es cierto en general que un espacio cociente de uno de Haudorff sea de Hausdorff. En efecto, sea X un espacio de Hausdorff y A un subespacio de X que no sea cerrado (por ejemplo,  $X = \mathbb{R}$ , A = (0,1)) Sea  $Y = X/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia de X dada por  $x \sim x'$  si y sólo si x = x'o  $\{x,x'\} \subseteq A$  (intuitivamente, Y es X con A colapsado a un punto; al espacio  $Y = X/\sim$  lo designaremos por X/A). Si dotamos a Y de la topología cociente respecto a la proyección natural  $g:X\longrightarrow Y$ , la preimagen del punto  $[x_0] \in Y$  (donde  $x_0 \in A$ ) es A, que no es cerrado en X. Así pues, el, punto  $[x_0]$  no es cerrado en Y y, por tanto, Y no es de Hausdorff.

Para asegurar que todo espacio cociente Y de un espacio de Hausdorff X es de Hausdorff necesitamos imponer algunas restricciones a X. Como ejemplo incluimos el siguiente resultado.

# 1.8.7. Teorema.

Sea Y el espacio cociente del espacio topológico X determinado por la aplicación sobreyectiva  $f: X \longrightarrow Y$ . Si X es compacto de Haussdorff y f es cerrada, entonces Y es (compacto) de Hausdorff.

#### Demostración.

Como f es continua, por el teorema 1.7.6 Y es compacto. Vamos a probar que Y es de Hausdorff.

Puesto que los puntos de X son cerrados, los puntos de Y, que son imágenes de puntos de X, son también cerrados. Sean  $y_1$  e  $y_2$  dos puntos distintos de Y. Los conjuntos  $f^{-1}(y_1)$  y  $f^{-1}(y_2)$  son subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada punto  $x \in f^{-1}(y_1)$  y cada punto  $a \in f^{-1}(y_2)$  existe un par de conjuntos abiertos disjuntos  $U_{x,a}$  y  $V_{x,a}$ , tales que  $x \in U_{x,a}$  y  $u \in V_{x,a}$ . Puesto que  $u \in V_{x,a}$  es cerrado, es también compacto, y, por tanto, como  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  es un subrecubrimiento de  $u \in V_{x,a}$  existe un subrecubrimiento finito  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  existe un subrecubrimiento finito  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  existe un subrecubrimiento finito  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  existe un subrecubrimiento finito  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  existe un subrecubrimiento finito  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  a  $u \in V_{x,a}$  existe un subconjunto

finito de  $f^{-1}(y_2)$ . En particular, existen conjuntos abiertos disjuntos  $U_x$  y  $V_x$  con  $x \in U_y$  y  $f^{-1}(y_2) \subseteq V_x$ ; dichos conjuntos están dados por

$$U_{x} = \bigcap_{a \in A} U_{x,a}, \quad V_{x} = \bigcup_{a \in A} V_{x,a}.$$

 $U_x \cap V_{x,a} = \emptyset$  pues de no ser así, existiría un  $a_i \in A$  tal que  $U_{x,a_i} \cap V_{x,a} \neq \emptyset$  para toda  $a \in A$ .

Ahora bien,  $\{U_x; x \in f^{-1}(y_1)\}$  es un recubrimiento de  $f^{-1}(y_1)$ , que es un compacto; por tanto, existe un subrecubrimiento finito  $\{U_x; x \in B\}$ , donde B es un subconjunto finito de  $f^{-1}(y_1)$ . Así pues, los conjuntos

$$U = \bigcup_{x \in B} U_x, \qquad V = \bigcap_{x \in B} V_x$$

son conjuntos abiertos disjuntos pues de lo contrario existiría un  $x \in B$  tal que  $V_x \cap U_x \neq \emptyset$  para toda  $x \in B$ . Además V sigue cubriendo a  $f^{-1}(Y_2)$  pues para cada  $x \in f^{-1}(Y_1)$ ,  $V_x$  cubre a  $f^{-1}(Y_2)$ . Por tanto U Y V son conjuntos abiertos disjuntos tales que  $f^{-1}(Y_1) \subseteq U$  Y  $f^{-1}(Y_2) \subseteq V$ .

Puesto que f es cerrada, por hipótesis, f(X - U) y f(X - V) son subconjuntos cerradosde Y, por lo que  $W_1 = Y - f(X - U)$  y  $W_2 = Y - f(X - V)$  son subconjuntos abiertos de Y tales que  $Y_1 \in W_1$  y  $Y_2 \in W_2$ . Finalmente hemos de comprobar que  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ . Supongamos pues que  $Y \in W_1 \cap W_2$ ; entonces  $Y \notin f(X - U)$  y  $Y \notin f(X - V)$ . Por tanto,  $f^{-1}(Y) \subseteq U \cap V = \emptyset$  y, por tanto,  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .

Como corolario obtenemos el resultado siguiente.

#### 1.8.8. Corolario.

Si X es un G-espacio compacto de Hausdorff con G finito, X/G también es un espacio compacto de Haussdorff.

Demostración.

Sea C un subconjunto cerrado de X. Entonces

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup g \cdot C$$

donde  $\pi: X \longrightarrow X/G$  es la proyección natural. Puesto que la acción de  $g \in G$  sobre X es un homeomorfismo,  $g \cdot C$  es cerrado para todo  $g \in G$ .

Así pues,  $\pi^{-1}(\pi(C))$  es cerrado y, por tanto,  $\pi(C)$  también lo es, lo que demuestra que  $\pi$  es una aplicación cerrada.

Así, por ejemplo, RP<sup>n</sup> es un espacio compacto de Hausdorff.

Se puede obtener otro corolario del Teorema 1.8.7 considerando un espacio X con un subconjunto  $A \subseteq X$ . Recordemos que X/A denota X/~, donde ~ es la relación de equivalencia en X dada por.

 $x \sim x'$  si y sólo si x = x' o  $x, x' \in A$ 

# 1.8.9. Corolario.

Si X es un espacio de Hausdorff y A es un subconjunto cerrado de X entonces X/A es un espacio compacto de Hausdorff.

# 1.9. Espacios conexos.

Intuitivamente un espacio X es conexo si es de una sóla "pieza"; pero, ¿cómo hay que interpretar topológicamente el término "pieza"? Parece razonable exigir que los conjuntos abiertos y los cerrados en una "pieza" sean abiertos o cerrados, respectivamente, en el espacio total X. En virtud del lema 4.4, una "pieza" deberá ser un subconjunto de X abierto y cerrado. Esto nos lleva a la definición siguiente.

#### 1.9.1 Definición.

Un espacio topológico X es conexo si los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados a la vez son  $\emptyset$  Y X. Un subconjunto de X es conexo si es conexo como espacio con la topología inducida.

El siguiente teorema nos da caracterizaciones de los espacios conexos.

#### 1.9.2. Teorema.

Las siguientes proposiciones son equivalentes.

- a)  $(X, \mathcal{U})$  es conexo.
- b) X no es la unión de de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X.
- c) no existen conjuntos cerrados no vacíos A y B de X tales que A  $\cap$  B =  $\emptyset$ , X = A  $\cup$  B.
- d)no existen dos subconjuntos no vacíos A y B de X tales que  $X = A \cup B$  y  $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$ .

# Demostración.

Probaremos únicamente a)  $\Leftrightarrow$  b).

Sea X conexo y supongamos que  $X = X_1 \cup X_2$ , donde  $X_1 y X_2$  son subconjuntos abiertos disjuntos de X. Entonces  $X - X_1 = X_2 y$ , por tanto,  $X_1$  es a la vez abierto y cerrado, lo que significa que  $X_1 = \emptyset$  o  $X y X_2 = X$  o vacío respectivamente. En ningún caso X es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X.

Reciprocamente, supongamos que X no es la unión de dos

subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X y sea  $U \subseteq X$ . Si U es a la vez abierto y cerrado, entonces X - U es también abierto y cerrado. Así pues, X sería la unión disjunta de dos conjuntos abiertos U y X - U, por lo que uno de ellos debe ser vacío; esto es, U =  $\emptyset$  o U = X.

Por ejemplo el subconjunto  $S^0 = \{\pm 1\}$  de  $\mathbb R$  no es conexo, ya que  $\{\pm 1\}$  es a la vez un subconjunto abierto y cerrado de  $S^0$ ; o, equivalentemente, porque  $S^0$  es la unión disjunta de los subconjuntos abiertos  $\{\pm 1\}$  y  $\{\pm 1\}$  de  $S^0$ . Un ejemplo de un subconjunto conexo de  $\mathbb R$  lo constituye [a,b], pero esto es un teorema. Antes de demostrarlo veamos algunos ejemplos más. Los ejemplos nos muestran que debemos tener cuidado con nuestra intuición.

Sea X el conjunto de los números reales con la topología  $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(\neg \infty, \mathsf{x}); \ \mathsf{x} \in \mathbb{R}\};$  entonces, todo subconjunto de X es conexo. Para demostrarlo, sea S un subconjunto arbitrario de X. Supongamos que F es un subconjunto no vacío de S a la vez abierto y cerrado en S. Podemos, pues, escribir F como U  $\cap$  S = C  $\cap$  S, donde U es un abierto en X y C es cerrado en X; esto es, U =  $(\neg \infty, b)$  para algún b y C =  $[a, \infty)$  para algún a. Puesto que F = U  $\cap$  S = C  $\cap$  S, resulta que si x  $\in$  S entonces x < b y x  $\ge$  a (si existe un x  $\ge$  b entonces C  $\cap$  S  $\ne$  U  $\cap$  S; análogamente, si existe un x < a entonces U  $\cap$  S  $\ne$  C  $\cap$  S). Así pues, S  $\le$  [a,b) y F = S lo que significa que S es conexo.

Sea ahora X el conjunto de los números reales con la topología  $\mathcal{F}$  definida por:  $S \in \mathcal{F}$  si y sólo si para cada  $s \in S$  existe un t > s tal que  $[s,t) \subseteq S$ . En este caso los únicos subconjuntos conexos no vacíos de X son los formados por un sólo punto. Para demostrarlo, supongamos que que T es un subconjunto conexo no vacío de X y sea x un punto de T. El subconjunto  $[x,x+\varepsilon)$  de X es a la vez abierto y cerrado para todo  $\varepsilon > 0$ . Así pues  $[x,x+\varepsilon) \cap T$  es un subconjunto abierto y cerrado de T. Puesto que T es conexo y  $[x,x+\varepsilon) \cap T \neq \emptyset$ , resulta que  $[x,x+\varepsilon) \cap T = T$  para todo  $\varepsilon > 0$  Pero esto es sólo posible si  $T = \{x\}$ . Claramente los puntos son conjuntos conexos y así los únicos subconjuntos conexos no vacíos de X son los formados por un punto.

Llegamos ahora a la demostración de que el subconjunto [a,b] de

R (con la topología usual) es conexo.

## 1.9.3. Teorema.

El intervalo  $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$  es conexo.

## Demostración.

Supongamos que [a,b] es la unión disjunta de dos conjuntos abiertos U, V de [a,b]. Supongamos también que a  $\in$  U. Obsérvese que U y V son también cerrados en [a,b] y, por tanto, puesto que [a,b] es cerrado en  $\mathbb{R}$ , también son cerrados en  $\mathbb{R}$ . Sea h la mínima cota superior del conjunto

 $\{ u \in U; u < v \text{ para todo } v \in V \}$ 

(este conjunto no es vacío puesto que contiene al punto a). Puesto que U es cerrado,  $h \in U$ . Ahora bien,  $(h - \varepsilon, h + \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $\varepsilon > 0$  (de lo contrario h no sería una cota superior) y en virtud del lema 1.7,  $h \in \overline{V}$ , y desde luego,  $h \in U \cap V$ , obteniendo una contradicción, que nos prueba que [a,b] es conexo.

## 1.9.4. Teorema.

La imagen de un espacio conexo por una aplicación continua es conexa.

## Demostración.

Supongamos que X es conexo y que f:X o Y es una aplicación continua sobre. Si U es abierto y cerrado en Y, entonces  $f^{-1}(U)$  es abierto y cerrado en X, lo que significa que  $f^{-1}(U) = \emptyset$  o Xy por tanto  $U = \emptyset$  o Y. Así pues, Y es conexo.

#### 1.9.5 Corolario.

Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, X es conexo si y sólo si Y lo es.■

Del Teorema 1.9.4 deducimos que la circunferencia  $S^1$  es conexa puesto que existe una aplicación continua exhautiva  $f:[0,1] \to S^1$  definida por  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Para probar que los intervalos de la forma [a,), (a,b] y (a,b) son conexos hacemos uso del siguiente resultado.

#### 1.9.6 Teorema.

Supongamos que  $\{Y_j; j \in J\}$  es una colección de subconjuntos conexos de un espacio X. Si  $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ , entonces  $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$  es conexo.

### Demostración.

Supongamos que U es un subconjunto abierto y cerrado no vacío de Y. Entonces, para algún i, U  $\cap$  Y<sub>i</sub>  $\neq$  Ø, Y U  $\cap$  Y<sub>i</sub> es a la vez abierto y cerrado en Y<sub>i</sub>; pero, puesto que Y<sub>i</sub> es conexo, U  $\cap$  Y<sub>i</sub> = Y<sub>i</sub> y, por tanto, Y<sub>i</sub>  $\subseteq$  U. El conjunto Y<sub>i</sub> intersecta a todos los otros Y<sub>j</sub>, j  $\in$  J y, por tanto, U intersecta también a todos los Y<sub>j</sub>, j  $\in$  J. Repitiendo este razonamiento deducimos que Y<sub>j</sub>  $\subseteq$  U para todo j  $\in$  J y, por tanto, U = Y.

El hecho de que los subconjuntos [a,b), (a,b] y (a,b) de  $\mathbb R$  sean conexos resulta del Teorema 1.9.3, del corolario 1.9.5 y de

$$[a,b) = U [a,b - (b - a)/2^n]$$

etc. De manera análoga se deduce que el propio  $\mathbb R$  y los intervalos de la forma  $[a,\infty)$ ,  $(-\infty,b]$ ,  $(-\infty,b)$ ,  $(a,\infty)$  son conexos.

El último resultado que demostraremos se refiere al producto de espacios conexos.

## 1.9.7 Teorema.

Sean X e Y espacios topológicos.  $X \times Y$  es conexo si y sólo si X e Y son ambos conexos.

## Demostración.

Supongamos que X e Y son conexos. Puesto que X  $\cong$  X×{y} e Y  $\cong$  {x}×Y, para todo x  $\in$  X, y  $\in$  Y, resulta que X×{y} y {x}×Y son conexos. Ahora bien, (X×{y})  $\cap$  ({x}×Y) = {(x,y)}  $\neq$   $\emptyset$  y, por tanto, (X×{y})  $\cup$  ({x}×Y) es conexo por el Teorema 9.6. Podemos escribir X×Y de la forma

$$X \times Y = U ((X \times \{Y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

para algún y  $\in$  Y fijo. Puesto que  $\cap$  ((X×{y})  $\cup$  ({x}×Y))  $\neq$  Ø, deducimos que X×Y es conexo.

Reciprocamente, supongamos que X×Y es conexo. Del Teorema 1.9.4 Y del hecho de que  $\pi_{\chi}: X \times Y \longrightarrow X$  y  $\pi_{\gamma}: X \times Y \longrightarrow Y$  son aplicaciones continuas sobreyectivas, resulta que X e Y son conexos.

De los resultados anteriores se deduce que  $\mathbb{R}^n$  es conexo.

# 1.10. Caminos y Espacios arco-conexos.

Antes de definir lo que son los espacios arco-conexos necesitamos el concepto de "camino". Un camino en X es una aplicación continua  $f: [0,1] \to X$ . El punto f(0) se llama orígen del camino y el punto f(1) el final. Decimos que f une f(0) y f(1) y que f es un camino de f(0) a f(1).(Alguas veces se usa el término arco en lugar de camino.)

Obsérvese que el camino es la aplicación f y no la imágen f([0,1]); la imagen se llama una curva de X.

Normalmente pensaremos en el parámetro  $t \in [0,1]$  como el tiempo, con lo que f(t) es nuestra posición en el instante t.

El ejemplo más sencillo de camino es el camino constante  $\varepsilon_x$ :  $[0,1] \longrightarrow X$ , definido por  $\varepsilon_x(t) = x$  para todo  $t \in [0,1]$ , donde x es un punto de X. En este camino pasamos todo nuestro tiempo en el mismo punto  $x \in X$ .

Existen dos métodos sencillos, pero importantes, para obtener nuevos caminos a partir de unos obtenidos anteriormente. Los daremos en el próximo lema. El primer método asocia a cada camino f un camino  $\overline{f}$  que escencilmente recorre a f en sentido contrario. El segundo, une dos caminos f, g (cuando sea posible, es decir, con la condición de que f(1) = g(0)) para dar otro camino f\*g.

# 1.10.1. Lema.

- (a) Si f es un camino de X y  $\overline{f}$  está definido por  $\overline{f}(t) = f(1-t)$ , entonces  $\overline{f}$  es también un camino de X.
- (b) Si f y g son dos caminos de X tales que el punto final de f coincide con el origen de g, la función f\*g:  $[0,1] \longrightarrow X$  definida por

$$(f*g)(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{array} \right.$$

es un camino de X.

decir, E es convexo si con cada dos puntos contiene el segmento de linea recta que los une.

En particular, todo intervalo de  $\mathbb{R}^1$  es arco-conexo. Los resultados 1.10.4 - 1.10.7 que damos a continuación son análogos a los resultados 1.9.4 -1.9.7.

#### 1.10.4. Teorema.

La imagen de un espacio arco-conexo por una aplicación continua es arco-conexa.

### Demostración.

Supongamos que X es arco-conexo y que g:  $X \rightarrow Y$  es una aplicación continua y sobre. Si a, b son dos puntos de Y, entonces existen dos puntos a', b' de X tales que g(a') = a y g(a') = b. Puesto que X es arco-conexo existe un camino f de a' a b'. Pero entonces gf es un camino de a a b, lo cual demuestra que Y es arco-conexo.

# 1.10.5. Corolario.

Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, X es arco-conexo si y sólo si Y lo es.

Del teorema se deduce que  $S^1$  es arco-conexo. Podemos entonces demostrar que  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 },  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$  son arco-conexos para  $n \ge 1$  (para  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 }, ya que todo par de puntos de  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 } está en alguna circunferencia que no pasa por { 0 }; para  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$ , ya que son imágenes continuas de  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 }).

#### 1.10.6. Teorema.

Supongamos que {  $Y_j$ ;  $j \in J$  } es una colección de subconjuntos arco-conexos de un espacio X. Si  $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ , entonces  $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$  es arco-conexo.

#### Demostración.

Supongamos que a, b  $\in$  Y; entonces, a  $\in$  Y<sub>k</sub> y b  $\in$  Y<sub>1</sub> para ciertos k, l  $\in$  J. Sea c un punto arbitrario de  $\bigcap$  Y<sub>2</sub>. Puesto que Y<sub>k</sub> es arco-conexo y a, c  $\in$  Y<sub>k</sub> existe un camino f de a a c.

decir, E es convexo si con cada dos puntos contiene el segmento de linea recta que los une.

En particular, todo intervalo de  $\mathbb{R}^1$  es arco-conexo. Los resultados 1.10.4 - 1.10.7 que damos a continuación son análogos a los resultados 1.9.4 -1.9.7.

#### 1.10.4. Teorema.

La imagen de un espacio arco-conexo por una aplicación continua es arco-conexa.

## Demostración.

Supongamos que X es arco-conexo y que g:  $X \to Y$  es una aplicación continua y sobre. Si a, b son dos puntos de Y, entonces existen dos puntos a', b' de X tales que g(a') = a y g(a') = b. Puesto que X es arco-conexo existe un camino f de a' a b'. Pero entonces gf es un camino de a a b, lo cual demuestra que Y es arco-conexo.

### 1.10.5. Corolario.

Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, X es arco-conexo si y sólo si Y lo es.

Del teorema se deduce que  $S^1$  es arco-conexo. Podemos entonces demostrar que  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 },  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$  son arco-conexos para  $n \ge 1$  (para  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 }, ya que todo par de puntos de  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 } está en alguna circunferencia que no pasa por { 0 }; para  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$ , ya que son imágenes continuas de  $\mathbb{R}^{n+1}-$  { 0 }).

#### 1.10.6. Teorema.

Supongamos que {  $Y_j$ ;  $j \in J$  } es una colección de subconjuntos arco-conexos de un espacio X. Si  $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ , entonces  $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$  es arco-conexo.

# Demostración.

Supongamos que a, b  $\in$  Y; entonces, a  $\in$  Y<sub>k</sub> y b  $\in$  Y<sub>1</sub> para ciertos k, l  $\in$  J. Sea c un punto arbitrario de  $\bigcap_{j \in J}$  Y. Puesto que Y<sub>k</sub> es arco-conexo y a, c  $\in$  Y<sub>k</sub> existe un camino f de a a c.

Análogamente existe un camino g de c a b. Entonces, el camino h = f\*g dado por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2, \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

es un camino de a a b.

El resultado anterior nos proporciona una forma alternativa de demostrar que  $\mathbb{R}^{n+1}$ - { 0 } (y, por tanto,  $S^ny$   $\mathbb{R}P^n$ ) es arco-conexo para  $n \ge 1$ .

#### 1.10.7. Teorema.

Sean X e Y espacios topológicos. XxY es arco-conexo si y sólo si X e Y lo son.

Demostración.

Es idéntica a la del Teorema 1.9.7, sólo hay que reemplazar la palabra conexo por arco-conexo.

Los resultados anteriores no nos deben hacer pensar que no hay diferencia entre conexión y conexión por arcos. El teorema siguiente nos muestra que si la hay.

#### 1.10.8. Teorema.

Todo espacio arco-conexo es conexo. No todo espacio conexo es arco-conexo.

#### Demostración.

Supongamos que X es un espacio arco-conexo. Vamos a probar que X es conexo. Para ello sea  $X = U \cup V$  con U, V abiertos no vacíos. Puesto que X es arco-conexo Y U, V son no vacíos, existe un camino  $f: [0,1] \longrightarrow X$  con  $f(0) \in U$ ,  $f(1) \in V$ . Puesto que [0,1] es conexo, también lo es f([0,1]), por tanto,  $U \cap f([0,1])$ ,  $V \cap f([0,1])$  no pueden ser disjuntos. Así pues, U, V no pueden ser disjuntos, de donde X es conexo.

Para demostrar que no todos los espacios conexos son arco-conexos daremos un ejemplo conocido con el nombre de el peine

y la pulga a(véase la figura 1.10.1). Consideremos el subconjunto  $x \in C$  dado por  $X = A \cup B$  con

 $A = \{ i \} (la pulga),$  $B = [0,1] \cup \{ (1/n) + yi; n \in N, 0 \le y \le 1 \} (el peine)$ 

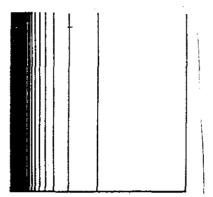


Figura .1.10.1. El peine y la pulga.

Afirmamos que X es conexo pero no arco-conexo. Para probar que X es conexo observemos primero que B es arco-conexo (aplicando el Teorema 1.10.6 a  $B_n = [0,1] \cup \{ (1/n) + yi; 0 \le y \le 1 \}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , el cual es arco-conexo para toda n y después a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$  que es no vacío,). De ahí, B es conexo. Supongamos que U es un subconjunto abierto y cerrado de X. Podemos suponer que  $A \subseteq U$  (de lo contrario el complementario de U sería un subconjunto abierto y cerrado de X que contendría a A). Puesto que U es abierto e  $i \in U$ , existe un  $E \in U$ 0 tal que

$$\{x; || i-x || < \epsilon \} \cap X \subseteq U.$$

Sea n un entero tal que  $(1/n) + i \in U$ ; (pues la sucesión  $\{(1/n)+i\}$  converge a i cuando  $n \to \infty$ ) en particular,  $U \cap B \neq \emptyset$ . Pero b es conexo y  $U \cap B$  es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de B; así pues,  $U \cap B = B$ , es decir  $B \subseteq U$ . Pero, puesto que  $X = A \cup B$  y  $A \subseteq U$ , resulta que U = X, si observemos que si escogemos  $X \to U$  entonces estamos escogiendo el vacío, por lo que los únicos conjuntos cerrados y abiertos a la vez son  $\emptyset$  y X; por lo que X es conexo.

Para demostrar que X no es arcoconexo, vamos a ver que el único camino de X con orígen  $i \in X$  es el camino constante. Sea f un camino de X que empiece en  $i \in X$ . Puesto que i es cerrado en X,  $f^{-1}(i)$  es cerrado en [0,1]; además  $f^{-1}(i) \neq \emptyset$  ya que  $0 \in f^{-1}(i)$ .

Sea U el subconjunto abierto de X dado por

$$U = X \cap \{ z \in \mathbb{C}; |z-i| < 1/2 \}$$

Si  $t_0 \in f^{-1}(i)$ , la continuidad de f implica la existencia de un  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(t) \subseteq U$  siempre que  $|t-t_0| < \varepsilon$ . Vamos a ver que  $f((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]) = i$ . En efecto, supongamos que  $|t_1 - t_0| < \varepsilon$  y  $f(t_1) \in B$ . Puesto que U  $\cap$  B es la unión de intervalos disjuntos, el intervalo que contiene a  $f(t_1)$  es a la vez abierto y cerrado en U (abierto ya que U es abierto, y cerrado ya que el intervalo es de la forma  $\{(1/n) + yi; 0 \le y \le 1\} \cap U$  para algún  $n \in N$ ). Pero esto contradice el hecho de que  $f((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1])$  sea conexo. Así pues,

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \wedge [0,1] \subseteq f^{-1}(i)$$
.

Hemos pues demostrado que si  $t_0 \in f^{-1}(i)$  entonces

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \le f^{-1}(i),$$

lo que significa que  $f^{-1}(i)$  es abierto. Puesto que  $f^{-1}(i)$  es también cerrado y [0,1] es conexo, resulta que  $f^{-1}(i) = [0,1]$ , o, en otras palabras f([0,1]) = i. No existe por tanto ningún camino entre  $i \in X$  y cualquier otro punto  $B \subseteq X$ , por lo que X no es un espacio arco-conexo, como queríamos demostrar.

El siguiete resultado da condiciones necesarias y suficientes en  $\mathbb{R}^n$  para la equivalencia de subconjuntos conexos y arco-conexos.

### 1.10.9 Teorema.

Todo subconjunto conexo abierto no vacío E de  $\mathbb{R}^n$  es arco-conexo.

## Demostración.

Sean  $p \in E$  y F el subconjunto de E formado por los puntos de E que pueden unirse a p por un camino de E. Afirmamos que F es abierto. Para probarlo sea  $q \in F \subseteq E$ . Puesto que E es abierto, existe un n-disco abierto  $D \subseteq E$  con centro q, esto es

$$q \in D = \{ x; \parallel q - x \parallel < \varepsilon \} \subseteq E$$

para un  $\varepsilon > 0$  conveniente. El n-disco abierto D es arco-conexo (ya que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ) y, por tanto, cualquier punto de D puede unirse a q por un camino de E, y por tanto, cualquier punto de D puede unirse a p (usando composición de caminos), de donde  $q \in D \subseteq F$ . Así pues, F es abierto.

Afirmamos también que F es cerrado. Para verlo consideremos G =

E - F; G consta pues de aquellos puntos de E que no pueden unirse a p por un camino de E. Por un razonamiento similar al anterior podemos demostrar que G es abierto:

para probarlo sea  $q' \in G \subseteq E$ . Puesto que E es abierto, existe un n-disco abierto  $D' \subseteq E$  con centro q', esto es

$$q' \in D' = \{ x; || q' - x || < \epsilon' \} \subseteq E$$

para un  $\varepsilon'>0$  conveniente. El n-disco abierto D' es arco-conexo pero ningún punto de D' puede unirse a p por un camino de E, pues de existir algún x  $\varepsilon$  D' con dicha propiedad, por ser D' arco-conexo, existiría un camino de q' a x y usando composición de caminos tendríamos que existe un camino de q' a p, lo cual implica que q'  $\varepsilon$  F que es una contradicción. Por tanto q  $\varepsilon$  D'  $\varepsilon$  G, y así, G es abierto; y, por tanto, F es cerrado.

El subconjunto F es no vacío, abierto y cerrado; puesto que E es conexo F = E y, por tanto, E es arco-conexo.

#### 1.10.10. Definición.

Se dice que un espacio X es localmente arco-conexo si para todo  $x \in X$  todo entorno abierto de x contiene un entorno abierto arco-conexo de x.

Ası pues, si X es localmente arco-conexo y  $U \subseteq X$  es abierto en X entonces U es localmente arco-conexo, puesto que todo abierto en U es abierto en X.

# CAPITULO II

n-variedades y la clasificación de las 2-variedades

# 2.1. n-variedades.

# 2.1.1. Definición.

Sea n un entero positivo. Una n-variedad n-dimensional es un espacio de Hausdorff tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n-dimensional ( $U^n = \{ x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1 \}$ ) Por brevedad, la llamaremos usualmente "n-variedad".

# Ejemplos.

1.El espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  es obviamente una variedad n-dimensional. Podemos mostrar fácilmente que la esfera unidad de dimensión n

$$S^{n} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1 \}$$

es una n-variedad. En efecto, para el punto  $x=(1,0,\ldots,0)$ , el conjunto  $(x_1,\ldots,x_{n+1})\in S^n\colon x_1>0$  es un entorno abierto con las propiedades exigidas, como puede verse por proyección ortogonal sobre el hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por  $x_1=0$ . Para cualquier otro punto  $x\in S^n$ , existe una rotación que transforma x en el punto  $(1,0,\ldots,0)$ . Dicha rotación es un homeomorfismo de  $S^n$  sobre si mismo; por lo tanto x tiene también un entorno del tipo deseado.

- 2. Si  $M^n$  es una variedad n-dimensional, cualquier abierto de  $M^n$  es también una variedad n-dimensional. La demostración es inmediata de la definición.
- 3.Si M es una variedad m-dimensional y N una variedad n-dimensional, el espacio producto M×N es una variedad (m+n)-dimensional. Esto se sigue del hecho de que  $U^m \times U^n$  es homeomorfo a  $U^{m+n}$ . Para demostrarlo observemos que, si k es un entero positivo cualquiera,  $U^k$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^k$ , y  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  es

2.2. Variedades orientables, no orientables y compactas.

Las variedades conexas de dimensión n, n > 1, están divididas en dos clases: orientables y no orientables. Trataremos de aclarar bien la diferencia sin esforzarnos en una precisión matemática.

Consideremos, primero, el caso n=2. Podemos dotar de una orientación al plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  y, en general, a una pequeña región del plano, de varias maneras. Por ejemplo, podemos fijar cuál de las dos clases de sistemas de coordenadas del plano será considerada positiva y cuál como negativa. Otra manera sería fijar el sentido de rotación en el plano, alrededor de un punto, que se considera como positivo y el que se considera como negativo. Imaginemos un microbio o algún ser de dimensión 2, inteligente, sujeto a moverse en un plano; una vez que que él ha decidido la elección de una orientación en cualquier punto del plano, puede llevar esta elección consigo al desplazarse. Si dos de estos seres coinciden en orientación en un punto dado del plano, y uno de ellos hace un largo viaje a otro punto distante del plano y eventualmente vuelve al punto de partida, ambos seres coincidiran aún en la elección de la orientación.

Consideraciones análogas se pueden aplicar a cualquier variedad conexa de dimensión 2, ya que cualquier punto tiene un entorno homeomorfo a un entorno de un punto del plano. Aquí nuestros dos seres hipotéticos coinciden en la elección de la orientación de un punto. Sin embargo, es posible que, tras el regreso de uno de ellos de un largo viaje a algún punto distante de la variedad, se encuentren con que sus orientaciones ya no coinciden. Este fenómeno puede suceder incluso suponiendo que ambos han tenido cuidado extremo en ir manteniendo una comprobación precisa de la orientación positiva.

El ejemplo más simple de variedad 2-dimensional que presenta este fenómeno es la famosa banda de Möbius. Como sabemos podemos construir una bande de Möbius tomando una tira rectangular de papel, larga y estrecha, y pegando los extremos en sentidos

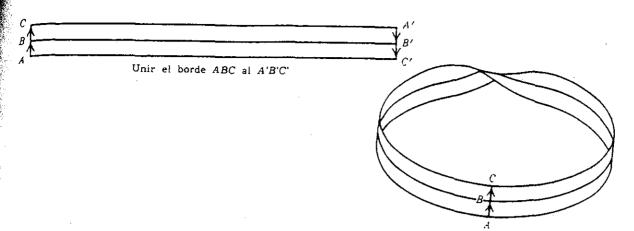


Figura 2.1.1

es un espacio topológico que podemos definirlo como sigue. Designemos por X el siguiente rectángulo del plano:

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \le x \le +10, -1 < y < +1 \}$$

Formemos entonces el espacio cociente de X obtenido al identificar los puntos (10,y) y (-10,-y) para -1 < y < +1. Obsérvese que los dos bordes del rectángulo se omiten. Esta omisión es escencial; en caso contrario el resultado no sería una variedad (sería una variedad con borde, concepto que estudiaremos más tarde, en esta misma sección). Podríamos definirla también mediante un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que fuera homeomorfo al espacio cociente que acabamos de describir.

Como quiera que definamos la banda de Möbius, la línea central de la tira rectangular pasa a ser un círculo tras la unión o identificación de los dos extremos. Si nuestro ser imaginario partiera de cualquier punto de esta circunferencia con una determinada orientación y diera una vuelta a la circunferencia llevando consigo esta orientación, al volver al punto inicial su orientación original estaría invertida. De un camino tal en una variedad diremos que invierte la orientación. De un camino que no tenga esta propiedad diremos que conserva la orientación. Por ejemplo cualquier camino cerrado del plano conserva la orientación.

Por definición, una variedad 2-dimensional conexa es orientable si todo camino cerrado conserva la orientación; una variedad 2-dimensional conexa es no orientable si existe al menos un camino que invierte la orientación.

Consideremos ahora la orientabilidad en variedades de dimensión 3. Podemos dotar de una orientación al 3-espacio euclídeo, o a una pequeña región del mismo, fijando la clase de sistemas de coordenadas considerada como positiva y la clase considerada como negativa. Otra manera sería fijar el tipo de hélice, o rosca de tornillo, que se considera que avanza en sentido directo, y el que lo hace en sentido inverso. Podemos ahora decir que un camino cerrado de un 3-variedad invierte o conserva la orientación según que un viajero que recorra el camino vuelva o no al punto inicial sentidos directo e inverso, que se inicialmente cambiados. Si nuestro universo no fuera orientable, un austronauta que hiciera un viaje a lo largo de un camino que invirtiera la orientación, volvería a la tierra con los lados derecho e izquierdo de su cuerpo cambiados: Su corazón no estaría ya en su costado izquierdo, etc.

Existe una generalización de la banda de Möbius para dimensión 3, que nos proporciona un ejemplo sencillo de 3-variedad no orientable. Sea

 $X = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon -10 \le x \le +10, -1 < y < +1, -1 < z < +1 \}$  Formemos un espacio cociente de X por identificación de los puntos (10,y,z) y (-10,-y,z) para -1 < y < +1 y -1 < z < +1. Este espacio puede ser considerado también como producto de la banda de Möbius ordinaria por el intervalo  $\{ z \in \mathbb{R} \colon -1 < z < +1 \}$ . En todo caso, el segmento  $-10 \le x \le +10$  del eje x, pasa a ser un círculo después de la identificación, este círculo es un camino que invierte la orientación de la 3-variedad resultante.

Para poder dar definiciones análogas en el caso de n-variedades, tenemos primero que distinguir entre dos clases de sistemas de coordenadas en un n-espacio euclídeo. Esta distinción puede hacerse como sigue. Si tenemos dos sistemas de coordenadas, cualquier punto x tiene coordenadas  $(x_1, \ldots, x_n)$  y  $(x_1', \ldots, x_n')$  en los dos sistemas, y estas coordenadas están relacionadas por ecuaciones del siguiente tipo:

$$x'_{i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} + b_{i},$$
  $i = 1, 2, ..., n.$ 

Las  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  que aparecen, son números reales que no dependen del punto x escogido. Además es un hecho conocido que el determinante de las  $a_{ij}$ 

 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 

es distinto de cero. Decimos que estos dos sistemas de coordenadas son de la misma·clase si este determinante es > 0. De las propiedades clásicas del determinante de un sistema de ecuaciones lineales tal como el anterior, se sigue que la relación "ser de la misma clase" es una relación de equivalencia entre sistemas de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ , y que hay exactamente dos clases de equivalencia. Elegir una orientación de  $\mathbb{R}^n$  es elegir una de estas dos clases de equivalencia de sistemas de coordenadas como clase distinguida. Podemos designar a un tal sistema de coordenadas con algún adjetivo como "positivo" o "directo".

Una vez que se ha escogido la clase de sistema de coordenadas distinguida, un camino que invierta o conserve la orientación en una n-variedad conexa se define, escencialmente, del mismo modo que para variedades de dimensión 2 y 3. La única diferencia es que tenemos escasa intuición geométrica para guiarnos en los casos de dimensión superior. En el desarrollo completo de este tema es necesario entrar en muchos más detalles para conseguir un rigor matemático.

En cualquier caso, es posible definir el concepto de orientabilidad y no orientabilidad para las n-variedades conexas. El espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  y la esfera  $S^n$  son ejemplos de n-variedades orientables. Podemos definir sin dificultad una generalización para dimensión n de la banda de Möbius, que es una n-variedad no orientable. Consiste en el producto de una banda de Möbius ordinaria y una bola abierta de de dimensión n-2,  $U^{n-2}$ .

En el resto de esta sección nos referiremos principalmente a variedades 2-dimensionales; por tanto, no insistiremos más en estas cuestiones.

Ejemplos de 2-variedades conexas compactas.

Para ahorrar palabras, de ahora en adelante nos referiremos a una 2-variedad conexa como una superficie. El ejemplo más sencillo de superficie compacta es la esfera S<sup>2</sup>; otro ejemplo importante es el toro. De una manera imprecisa, un toro puede describirse como cualquier superficie homeomorfa a la superficie de una rosquilla o de un anillo sólido. Con más precisión puede definirse así:

- (a) Cualquier espacio topológico homeomorfo al producto de dos circunferencias,  $S^1 \times S^1$ .
- (b) Cualquier espacio topológico homeomorfo al siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ :

{ 
$$(x,y,z) \in R^3$$
:  $[(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1$  }

[Este conjunto se obtiene por rotación del círculo  $(x-2)^2 + z^2 = 1$  del plano xz, alrededor del eje z].

(c) Sea X el cuadrado unidad en el plano R<sup>2</sup>:

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \}.$$

Entonces un toro es cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de X obtenido por identificación de los lados opuestos del cuadrado X según las siguientes reglas: Se identifican los puntos (0,y) y (1,y) para  $0 \le y \le 1$ , y los puntos (x,0) y (x,1) para  $0 \le x \le 1$ .

Consideraremos conveniente indicar simbólicamente cómo se lleva a cabo la identificación, mediante un diagrama como el de la figura 2.1.2. Los lados que se identifican están indicados con la misma letra del alfabeto, y las identificaciones deben hacerse de forma que las direcciones indicadas por las flechas coincidan.

Otro ejemplo de superficie compacta es el plano proyectivo real (al que , por brevedad designaremos como plano proyectivo). Debido a que no es homeomorfo a ningún subconjunto del plano euclídeo R<sup>3</sup>, el plano proyectivo es mucho más difícil de visualizar que la esfera o el toro.

Recordemos la definición:

Llamamos plano proyectivo al espacio cociente de la esfera  $S^2$  obtenido por identificación de cada par de puntos diametralmente opuestos. Cualquier espacio homeomorfo a este cociente también lo llamaremos plano proyectivo.

Para qui en hava estudiado Geometria proyectiva, explicaremos porque superficie 1a llama plano proyectivo real. estudio Geometria Proyectiva plana, un punto tiene homogeneas coordenadas (x<sub>0</sub>, x<sub>2</sub>) ×α, son numeros ×, a 1 uno ellos distinto menos es de cero. termino "homogeneas" significa que ×, (x', x', representan punto mismo si solo existe λ un numero (necesariamente ≠0) tal que

$$x_{i} = \lambda x'_{i}$$
  $i = 0, 1, 2.$ 

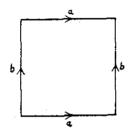


Fig. 2.1.2 Construcción de un toro

Si interpretamos (x<sub>0</sub>, como coordenadas euclideas ordinarias de punto de un que (x<sub>0</sub>, x\_) ×,, x',) (x', representan el mismo punto del plano proyectivo si sobre recta una que pase por el origen. Asi podemos pues, reinterpretar un punto del plano proyectivo como una recta pase cuestion por el origen. La inmediata como dotar topologia al con junto de todas rectas pasan R<sup>3</sup>? por Quizas manera observar es que cada recta què pasa el origen corta la unidad un de puntos diametralmente opuestos. Esto conduce a la definicion anterior.

Sea  $H = \{ (x,y,z) \in S^2 \colon z \ge 0 \}$  el hemisferio superior cerrado de  $S^2$ . Es evidente que, cada par de puntos de  $S^2$  diametralmente opuestos, al menos uno se encuentra en H. Si los dos puntos se encuentran en H entonces están sobre el ecuador, que es el borde de H. Así, pues, podemos definir también el plano proyectivo como el espacio cociente de H obtenido por identificación de puntos diametralmente opuestos del borde de H. puesto que H es obviamente homeomorfo al disco unidad cerrado  $E^2$  del plano,

$$E^2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \},$$

el espacio cociente de E<sup>2</sup> obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde es un plano proyectivo. pero E<sup>2</sup> puede sustituirse por cualquier espacio homeomorfo, en particular un cuadrado. Así pues, un plano proyectivo se obtiene identificando los lados opuestos de un cuadrado tal como se indica en la figura 2.1.3.

Se ve fácilmente que el plano proyectivo no es orientable; de hecho, contiene un subconjunto homeomorfo a una banda de Möbius.

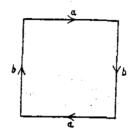


Fig.2.1.3

Construcción de un plano proyectivo a partir de un cuadrado.

Indicaremos ahora cómo se pueden dar muchos más ejemplos de superficies compactas formando lo que se llaman sumas conexas. Sean S, y S, dos superficies disjuntas. Su suma conexa, designada por  $S_1$  #  $S_2$ , está formada practicando un pequeño agujero circular en cada superficie y pegando entonces ambas superficies a lo largo del borde de estos agujeros. Para ser precisos, escojamos subconjuntos  $D_1 \subset S_1 Y D_2 \subset S_2$  tales que  $D_1 Y D_2$  sean discos cerrados (es decir, homeomorfos a  $E^2$ ). Sea  $S_1^\prime$  el complementario del interior de  $D_i$  en  $S_i$ , i = 1, 2. Escojamos un homeomorfismo h del círculo borde de  $\mathbf{D}_{\mathbf{1}}$  sobre el círculo borde de  $\mathbf{D}_{\mathbf{2}}$ . Entonces  $S_1 \# S_2$  es el espacio cociente de  $S_1' \cup S_2'$  obtenido identificando los puntos x y h(x), para todo x del borde de  $D_1$ . Está claro que S<sub>1</sub> # S<sub>2</sub> es una superficie. Parece natural, y puede ser demostrado rigurosamente, que el tipo topológico de S<sub>1</sub> # S<sub>2</sub> no depende de la elección de los discos  $D_1$  y  $D_2$ , ni de la elección del homeomorfismo h.

Ejemplos.

1. Si  $S_1$  es una 2-esfera, entonces  $S_1$  #  $S_2$  es homeomorfo a  $S_1$ .

- 2. Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos toros, entonces  $S_1$  #  $S_2$  es homeomorfo a la superficie de un bloque que tenga dos agujeros que lo perforen. (Se supone desde luego, que los agujeros no estás tan juntos que sus bordes se toquen o intersecten.)
- 3. Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos planos proyectivos,  $S_1$  #  $S_2$  es una "botella de Klein", esto es, homeomorfo a la superficie obtenida por identificación de los lados opuestos de un cuadrado como muestra la figura 1.4. Podemos probar esto por la técnica "cortar y pegar", como sigue. Si  $S_i$  es un plano proyectivo,  $D_i$  c  $S_i$  es un disco cerrado, entonces  $S_{i}^{\prime}$ , complementario del interior de  $D_{i}$ , es homeomorfo a una banda de Möbius (incluido el borde). En efecto, consideramos S, como el espacio obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde del disco unidad E2 en R<sup>2</sup>, podemos elegir D, como la imagen del {  $(x,y) \in E^2$ :  $|y| \ge 1/2$  } por la identificación, y entonces queda clara la veracidad de la afirmación. De aquí se deduce que  $S_1$  #  $S_2$ se obtiene pegando dos bandas de Möbius a lo largo de sus bordes. Por otra parte, la figura 2.1.5 nos muestra cómo corta cómo cortar una botella de Klein para obtener dos bandas de Möbius. Cortamos a lo largo de las líneas AB' y BA'; tras la identificación, este corte pasa a ser un círculo.

Consideremos ahora algunas propiedades de esta operación de formar sumas conexas.

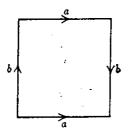


Figura.2.1.4

Construcción de una botella de Klein a partir de un cuadrado.

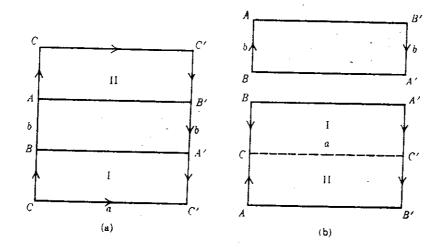


Figura.2.1.5

La botella de Klein es la unión de dos bandas de Möbius.

De nuestras definiciónes resulta claro que no hay distinción entre  $S_1$  #  $S_2$ ; es decir, la operación es conmutativa. No existen dificultades en ver que las variedades  $(S_1$  #  $S_2)$  #  $S_3$  Y  $S_1$  #  $(S_2$  #  $S_3)$  son homeomorfas. Así pues, vemos que la suma conexa es una operación conmutativa y asociativa en el conjunto de clases de homeomorfía de superficies compactas. Aún más, el ejemplo 4.1 muestra que la esfera es un elemento identidad o neutro, de esta operación. No debemos apresurarnos a concluir que el conjunto de clases de homeomorfía de superficies compactas es un grupo con esta operación: No existen inversos. Sólo forma lo que se llama un semigrupo.

La suma conexa de dos variedades orientables es a su vez orientable. Por otra parte, si  $S_1$  o  $S_2$  no es orientable, tampoco lo es  $S_1$  #  $S_2$ .

# 2.3. Enunciado del teorema de clasificación para superficies compactas

En la sección anterior hemos visto cómo podían construirse ejemplos de superficies compactas formando sumas conexas de varios toros y/o planos proyectivos. Nuestro teorema principal asegura que estos ejemplos agotan todas las posibilidades. De hecho, es incluso un poco más fuerte, pues no necesitamos considerar superficies que sean sumas conexas de toros y planos proyectivos a la vez.

#### Teorema 2.3.1

Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.[2] (Massey. 1967. pag 10).

variedades con borde

El concepto de variedad con borde es una ligera generalización del de variedad.

# 2.3.2. Definición.

Una variedad n-dimensional con borde es un espacio de Hausdorff tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo al disco abierto  $\textbf{U}^{\textbf{n}}$  o bien al espacio

$$\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n : x_1 \ge 0 \}$$

El conjunto de de todos los puntos que tienen un entorno abierto homeomorfo a  $U^n$  se llama el interior de la variedad, y el conjunto de puntos p que tienen un entorno abierto V tal que existe un homeomorfismo h de V sobre  $\{x \in U^n \colon x_1 \ge 0\}$  con  $h(p) = (0,0,\ldots,0)$  se llama el borde de la variedad.

# Ejemplos.

1 El disco cerrado o bola  $E^n = \{ x \in R^n : |x| \le 1 \}$  es una variedad n-dimensional con borde. La esfera  $S^{n-1}$  es su borde y el disco abierto  $U^n$  su interior.

- 2 Otro ejemplo es el "semiespacio", {  $x \in R^n : x_1 \ge 0$  }.
- 3 La banda de Möbius, tal como se define normalmente, es una variedad 2-dimensional con borde.

4 Otros ejemplos de variedades 2-dimensionales con borde pueden obtenerse recortando una colección de pequeños discos abiertos de una variedad 2-dimensional.

Es bastante razonable, y puede probarse rigurosamente, que el conjunto de puntos del Borde y el conjunto de puntos interiores son mutuamente disjuntos. Se ve fácilmente que el conjunto de puntos interiores es un subconjunto abierto denso; por tanto, el conjunto de puntos del borde es un conjunto cerrado. El conjunto de puntos del borde es una variedad (n-1)-dimensional. El interior es una variedad no compacta.

El lector observará que los términos "interior" y "borde" se han empleado en los párrafos precedentes en un sentido distinto del que usualmente tienen en la topología conjuntista. Sin embargo, el empleo de éstos términos raramente lleva a confusión.

Hay ejemplos que demuestran que una variedad con borde puede ser compacta o no compacta, conexa o no conexa. Una variedad con borde no compacta puede o no tener una base numerable de abiertos. En cualquier caso es siempre localmente compacta. Observemos que el borde de una variedad conexa puede ser no conexo; igualmente el borde de una variedad no compacta puede ser compacto.

Los conceptos de orientabilidad y no orientabilidad se aplican a las variedades con borde exactamente como en el caso de las variedades. Por ejemplo, una banda de Möbius es una variedad con borde no orientable, mientras que el cilindro

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1 \}$$

es una variedad con borde orientable.

La orientabilidad de una variedad con borde depende escencialmente de de la orientabilidad de su interior considerado como una variedad no compacta. Hagamos notar que cada componente del borde de una n-variedad es una (n-1)-variedad que puede ser orientable o no. De hecho pueden darse los dos casos. Sin embargo,

puede demostrarse que toda componente del borde de una variedad orientable debe ser orientable. Por otra parte, una variedad no orientable puede tener componentes del borde orientables y componentes no orientables. Por ejemplo, si indicamos por  $P^2$  el plano proyectivo y por I el intervalo unidad cerrado, entonces  $P^2 \times I$  es una 3-variedad con borde no orientable. El borde consta de dos componentes,  $P^2 \times \{0\}$  y  $P^2 \times \{1\}$ . Si quitamos un pequeño disco abierto 3-dimensional del interior de  $P^2 \times I$ , obtenemos entonces una variedad con borde, cuyo borde tiene 3-componentes:  $P^2 \times \{0\}$ ,  $P^2 \times \{1\}$ , y una 2-esfera que es el borde del disco suprimido. Así pues dos de las componentes son no orientables, y la otra es orientable.

Nota sobre la terminología: Según nuestras definiciones, toda n-variedad (tal como la definimosen la sección 1) es una n-variedad con borde (tal como lo hemos definido en esta sección). Por comodidad, a partir de ahora, utilizaremos el siguiente convenio: Cuando hablemos de una variedad con borde, querremos expresar que su borde no es vacío; de lo contrario usaremos simplemente la palabra "variedad". A una variedad 2-dimensional con borde (no vacío) conexa le, llamaremos una superficie con borde. La palabra "superficie" sola continuará significando una superficie sin borde.

# 2.4. Clasificación de 2-variedades con borde conexas y compactas

Hemos aludido al hecho de que, si en una superficie compacta, seleccionamos un número finito de discos cerrados disjuntos y quitamos sus interiores, obtenemos una superficie con borde. El número de componentes del borde es igual al número de discos escogidos.

Recíprocamente, supongamos que M es una superficie con borde compacta, cuyo borde tenga k componentes,  $k \ge 1$ . Cada componente del borde es una 1-variedad conexa compacta, esto es, una circunferencia. Si tomamos k discos cerrados y pegamos el borde del i-ésimo disco a la i-ésima componente del borde de M, obtenemos claramente una superficie compacta  $M^*$ . El tipo topológico de la superficie resultante  $M^*$  depende obviamente sólo

del tipo topológico de M. Lo que no es tan obvio es que se verifique una especie de recíproco: El tipo topológico de la superficie con borde M, depende sólo del número de componentes de su borde y del tipo topológico de la superficie M obtenida al pegar un disco sobre cada componente del borde.

Podemos enunciar esto mismo de otra manera: Si partimos de una superficie compacta y construimos una superficie con borde quitando los interiores de k discos cerrados, que sean dos a dos disjuntos, entonces la situación de los discos que hemos quitado es indiferente. La variedad con borde resultante será topológicamente la misma, independientemente de la posición de los discos elegidos. Establecemos formalmente este resultado de la siguiente manera:

#### Teorema 2.4.1.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies con borde compactas; supongamos que sus bordes tienen el mismo número de componentes. Entonces  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfas si y sólo si lo son las superficies  $M_1^*$  y  $M_2^*$  (obtenidas pegando un disco a cada componente del borde).

Para ver más sobre variedades y las demostraciones de estos teoremas se puede consultar el libro: "Introducción a la topología algebraica" (William S. Massey).

#### CAPITULO III

Homotopía y el Grupo Fundamental. Espacios Cubriente.

# 3.1. Homotopías de aplicaciones continuas.

# 3.1.1. Definición.

Sean X e Y espacios topológicos, I = [0,1] el intervalo unitario de la recta real  $\mathbb{R}$ . Decimos que dos aplicaciones continuas  $f_0$ ,  $f_1$ : X  $\rightarrow$  Y son homotópicas si existe una aplicación continua  $f_1$ : X×I  $\rightarrow$  Y tal que  $f(x,0) = f_0(x)$  y  $f(x,1) = f_1(x)$ .

En la figura 3.1.2 vemos un ejemplo en el que se ilustra esta definición.

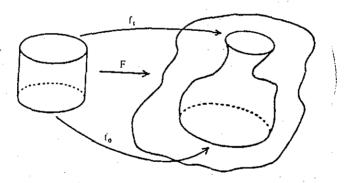


figura 3.1.2

A la relación F se le llama homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ . La relación de homotopía la denotaremos por  $f_0 \simeq f_1$  o por F:  $f_0 \simeq f_1$  si deseamos especificar la homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ .

Si f: I  $\rightarrow$  Y es un camino cualquiera, podemos ver fácilmente que f es homotópico al camino constante  $\mathcal{E}_{f(0)}$ , para ello definimos la homotopía F: I×I  $\rightarrow$  Y por F(x,t) = f((1-t)x). Así tenemos que:

$$F(x,0) = f(x)$$

$$F(x,1) = f(0) = \mathcal{E}_{f(0)}$$

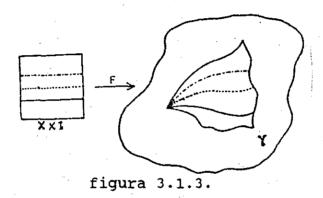
Con el fin de excluir este tipo de situaciones introducimos un concepto más general de homotopía, el de homotopía relativa a un

subconjunto A, en la que es necesario que  $f_0|A = f_1|A$ , es decir, la homotopía deja fijo a todo punto de A.

# 3.1.2. Definición.

Sea A subconjunto de X y  $f_0$ ,  $f_1$  dos aplicaciones continuas de X en Y. Se dice que  $f_0$  es homotópica a  $f_1$  relativamente a A si existe una homotopía F:  $X \times I \longrightarrow Y$  entre  $f_0$  y  $f_1$  tal que para toda a  $\in$  A, F(a,t) no dependa de t, esto es,  $F(a,t) = f_0(a)$  para toda a  $\in$  A y para toda t  $\in$  I.

Diremos entonces que la homotopía F es una homotopía relativa a A y denotaremos la relación de homotopía relativa a A por  $f_0 \simeq f_1(\text{relA})$  o por F:  $f_0 \simeq f_1$  si queremos especificar la homotopía relativa a A entre  $f_0$  y  $f_1$ . Veamos por ejemplo la figura 3.1.3 en la que X = I y A = { 0 }  $\in$  X.



En la figura 3.1.4 se muestra otro ejemplo donde X = I, A = {0,1} y Y es un anillo en  $\mathbb{R}^2$ . En este caso particularmente las aplicaciones  $f_0$ ,  $f_1$  no son homotópicas relativamente a A aún cuando son homotópicas; ya que F:  $I \times I \longrightarrow Y$  dada por  $F(x,t) = f_0((1-t)x)$  es una homotopía tal que F:  $f_0 \approx \mathcal{E}_{f_0(0)}$  y G:  $I \times I \longrightarrow Y$  dada por  $G(x,t) = f_1((1-t)x)$  es una homotopía tal que G:  $f_1 \approx \mathcal{E}_{f_1(0)}$ , así pues definamos H:  $I \times I \longrightarrow Y$  como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2-2t) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

la continuidad de H nos la garantiza el lema 1.10.2, y haciendo los cálculos correspondientes obtenemos que  $H(x,0) = f_0(x)$  y

 $H(x,1) = f_1(x)$ ; por tanto  $f_0 \approx f_1$ . Sin embargo, no podemos encontrar una homotopía que manteniendo fijos a { 0,1 } deforme continuamente a  $f_0$  en  $f_1$  debido a que se interpone el agujero.

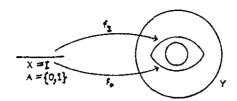


fig. 3.1.4

Es claro que si A = Ø entonces una homotopía relativa a A no es más que una homotopía. El siguiente resultado muestra que la homotopía relativa a A es una relación de equivalencia.

# lema 3.1.3

La relación en definida en el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y es una relación de equivalencia.

## Demostración.

La relación es reflexiva, ya que F(x,t)=f(x) es una homotopía relativa a A entre f y ella misma. Es simétrica ya que si  $F\colon X\times I \to Y$  es tal que  $F\colon f \simeq_{\text{relA}} g$  donde  $F\colon X\times I \to Y$ , entonces  $G\colon X\times I \to Y$  donde G(x,t)=F(x,1-t) es la homotopía que deforma continuamente a g en f dejando fijo atodo punto de A. Para ver que es transitiva supongamos que  $f\simeq_{\text{relA}} g$  y  $g\simeq_{\text{relA}} h$ , sean F y G las homotopías que realizan las respectivas equivalencias. Tenemos que exhibir una homotopía H tal que realize la equivalencia  $f\simeq_{\text{relA}} h$ ; para ello construyamos H utilizando a F y G de tal manera que realicen las equivalencias correspondientes en la mitad del tiempo original, así pues

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

La continuidad de H se sigue del Lema 1.10.2; efectuando algunos cálculos tenemos que H(x,0) = f(t) y H(x,1) = h(t); de la definición y dado que f y g mantienen fijo a A resulta que H también lo mantiene fijo. Por lo que H es la homotopía deseada.

Utilizando el concepto de aplicaciones homotópicas podemos definir también una relación de equivalencia entre espacios topológicos en el siguiente sentido.

#### Definición 3.1.4

Se dice que dos espacios X y Y son del mismo tipo de homotopía si existen aplicaciónes continuas f:  $X \to Y$ , g:  $Y \to X$  tales que

gf 
$$\simeq$$
 1: X  $\longrightarrow$  X, fg  $\simeq$  1: Y  $\longrightarrow$  Y

A las aplicaciones f y g se les llama equivalencias homotópicas; en tal caso diremos también que X y Y son homotópicamente equivalentes.

La noción del tipo de homotopía generaliza a la del tipo topológico (correspondiente a la relación de homeomorfismo). Pues, una consecuencia inmediata de la definición anterior es que dos espacios homeomorfos son del mismo tipo de homotopía. Pero el recíproco no es cierto. Veamos el siguiente ejemplo: si n > 0, el n-disco  $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  no es homeomorfo a un punto { y }  $\subseteq \mathbb{D}^n$ , a pesar de ser del mismo tipo de homotopía que un punto. Verifiquemos que efectivamente son homotópicamente equivalentes; consideremos para ello la inclusión f: { y }  $\to$   $\mathbb{D}^n$  (dada por f(y) = y) y la aplicación constante g:  $\mathbb{D}^n \to$  { y }. Claramente gf = 1: {y}  $\to$  {y}, ahora sólo falta ver que fg  $\cong$  1:  $\mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ , pero dicha equivalencia está dada por la homotopía F:  $\mathbb{D}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{D}^n$ , definida por F(x,t) = tx + (1-t)y, ya que F(x,0) = y y F(x,t) = x donde ambas igualdades se cumplen para todo  $x \in \mathbb{D}^n$ ; que es lo que deseabamos tener.

Los espacios que son homotópicamente equivalentes a un punto reciben un nombre especial.

## Definición 3.1.5

Se dice que X es un espacio contraible si es homotópicamente equivalente a un punto.

Por tanto,  $\mathbb{D}^n$  es contraible. En general, todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es contraible, la justificación a esta afirmación es la siguiente: supongamos que  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo y sea  $\{y\} \subseteq \mathbb{A}$ , para

ver que son del mismo tipo de homotopía consideremos la inclusión  $f\colon \{y\} \to A$  y la aplicación constante  $g\colon A \to \{y\}$ . Es claro  $gf=1\colon \{y\} \to \{y\}$ , en seguida veamos que que  $fg\simeq 1\colon A \to A$ , como A es convexo entonces para todo x,  $y\in A$  el conjunto  $\{tx+(1-t)y;\ 0\le t\le 1\}$  está contenido en A por lo que tiene sentido definir la homotopía F(x,t)=tx+(1-t)y, la cual realiza la equivalencia deseada ya que F(x,0)=y y F(x,1)=x.

Intuitivamente, un espacio es contraible cuando puede deformarse en sí mismo a un punto. Por ejemplo una circunferencia no puede deformarse en sí misma a un punto.

En seguida, considerando el cilindro C y la circunferencia  $S^1$  obtenemos otro ejemplo de un par de espacios homotópicamente equivalentes. Para verlo, vamos a expresar a C y  $S^1$  como

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, -1 \le z \le 1 \}$$
  
 $S^1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0 \}$ 

Consideremos i:  $S^1 \to C$  la inclusión y r:  $C \to S^1$  dada por r(x,y,z) = (x,y,0). Claramente ri = 1:  $S^1 \to S^1$ , por otro lado para ver que ir  $\simeq$  1:  $C \to C$  tenemos que dar una homotopía que realize la equivalencia. Sea F:  $C \times I \to C$  dada por

F((x,y,z),t)=(x,y,(1-t)z) comprobemos que esta es la homotopía deseada

$$F((x,y,z),0) = (x,y,z) = 1: C \rightarrow C$$
  
 $F((x,y,z),1) = (x,y,0) = ir(x,y,z).$ 

Este ejemplo da pie a las siguientes definiciones.

# Definición 3.1.6

Sea X un espacio topológico. Diremos que  $A \subseteq X$  es un retracto de X si existe una aplicación continua  $r:X \to A$  tal que ri = 1:  $A \to A$  (es decir, si r|A = 1), donde i:  $A \to X$  es la inclusión. A la aplicación r se la llama retracción.

# Definición 3.1.7

Sea A  $\subseteq$  X, diremos que A es un retracto de deformación de X si existe una retracción r: X  $\rightarrow$  A tal que ir  $\simeq$  1: X  $\rightarrow$  X, donde i: A  $\rightarrow$  X es la inclusión.

Esto es, A es un retracto de deformación de X si es posible encontrar una homotopía  $F\colon X\times I \to X$  tal que F(x,0)=x para todo  $x\in X$  y  $F(x,1)\in A$  para todo  $x\in X$ . De las definiciones anteriores tenemos que la circunferencia es un retracto de deformación del cilindro; además de las mismas se concluye que si A es un retracto de deformación de X, entonces A y X son homotópicamente equivalentes. Es más, en el ejemplo de la circunferencia y el cilindro, la aplicación ir es homotópica a la identidad relativamente a la circunferencia; lo que da pie a otra definición.

# Definición 3.1.8

Se dice que un subconjunto A de X es un retracto de deformación fuerte si existe una retracción r:  $X \to A$  tal que ir  $\simeq_{rela} 1: X \to X$ 

Así tenemos que A es un retracto de deformación fuerte de X, si existe una homotopía  $F\colon X\times I \to X$  tal que F(x,0)=x para todo  $x\in X$ , F(a,t)=a para todo  $a\in A$ ,  $t\in I$  y  $F(x,1)\in A$  para todo  $x\in X$ . Considerando las dos últimas definiciones tenemos que un retracto de deformación fuerte es también un retracto de deformación. De manera intuitiva, podemos considerar que A es un retracto de deformación fuerte de X, si X puede deformarse en sí mismo a A, dejando fijo a A.

Veamos ahora un ejemplo más en el que se involucra el concepto de retracto de deformación fuerte de X,. Sea Y =  $C_1$   $\cup$   $C_2$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$C_1 = \{ x = (x_1, x_2) : (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1 \}$$
  
 $C_2 = \{ x = (x_1, x_2) : (x_1+1)^2 + x_2^2 = 1 \}$ 

Por lo que Y es una "figura de 8"; es decir , un par de circunferencias unidas por un punto. Consideremos  $X = Y - \{(2,0),(-2,0)\}$ ; veamos que el punto  $x_0 = (0,0)$  es un retracto de deformación fuerte de X. Para ello, denotemos por  $i:\{x_0\} \to X$  y r:  $X \to \{x_0\}$ , las aplicaciones inclusión y constante respectivamente. Claramente  $ri = 1:\{x_0\} \to \{x_0\}$ ; por otro lado la equivalencia ir  $= 1_X(rel\{x_0\})$  se obtiene de la siguiente homotopía. Sea F:  $X \times I \to X$  dada por

$$F(x,s) = (1-s)x/||(1-s)x_1 + (-1)^i, (1-s)x_2|| para x \in C_i, i = 1,2.$$

Primeramente observemos que  $((1-s)x_1 + (-1)^1, (1-s)x_2) \neq (0,0)$  con i = 1,2 y para  $x \in X$ . Por lo que F es continua, pues es cociente de dos funciones continuas. Puesto que F(x,0) = x para toda  $x \in X$ ,  $F(x_0,t) = x_0$  para toda  $t \in I$  y  $F(x,1) = x_0$ , donde  $x_0 = (0,0)$ , resulta entonces que ir  $x_0 = x_0$  de lo que concluimos que  $x_0 = x_0$  es un retracto de deformación fuerte de  $x_0 = x_0$ 

# 3.2. Multiplicación de caminos.

Si f y g son dos caminos de X tales que f(1) = g(0), entonces definimos el producto de f y g como el camino f\*g dado por

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Ahora nos dedicaremos a analizar detalladamente la "multiplicación" de caminos; de hecho, consideraremos la multiplicación de caminos salvo homotopías relativas a { 0,1 } para evitar situaciones como la que se mencionó al introducir este concepto y, precisamente bajo que condiciones dicha multiplicación satisface los axiomas de grupo.

#### Definición 3.2.1

Diremos que dos caminos f y g de X son equivalentes si f y g son homotópicos relativamente a  $\{0,1\}$ . Y denotaremos esta equivalencia por f ~ g.

En términos de la definición anterior deducimos que los caminos  $f_0$  y  $f_1$  de X son equivalentes si existe una aplicación continua F:  $I \times I \longrightarrow X$  tal que

$$F(t,0) = f_0(t)$$
 y  $F(t,1) = f_1(t)$  para  $t \in I$ ,  
 $F(0,s) = f_0(0)$  y  $F(1,s) = f_1(1)$  para  $s \in I$ .

Como se muestra en la figura 3.2.1. También podemos escribir F:  $f_0$  ~  $f_1$ , cuando se quiera especificar la homotopía que "liga" a  $f_0$  Y  $f_1$ .

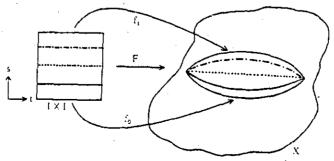


fig. 3.2.1

Ya se demostró en el lema 3.1.3 que  $_{\text{relA}}^{2}$  es una relación de equivalencia en el conjunto de los caminos de X, en particular tomando A = { 0,1 }, tenemos que ~ es una relación de equivalencia en los mismos términos. Esto da lugar a una partición del conjunto antes mencionado en clases de equivalencia; es decir, [f] = { g; g es camino y g ~ f }. Denotaremos primeramente que el producto de clases de equivalencia de caminos dado por

$$[f][g] = [f*g]$$

está bien definido. En otras palabras, la "multiplicación" de caminos es compatible con la relación de equivalencia dada anteriormente, en el siguiente sentido.

#### Lema 3.2.2

Supongamos que  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $g_0$ ,  $g_1$  son caminos de X tales que  $f_0(1) = g_0(0)$  y  $f_1(1) = g_1(0)$ . Si  $f_0 - f_1$  y  $g_0 - g_1$ , entonces  $f_0 * g_0 - f_1 * g_1$ .

Demostración.

Sean F:  $f_0 \sim f_1$  y G:  $g_1 \sim g_0$  las homotopías relativas a { 0,1 } requeridas. De la figura 3.2.2 se deduce la construcción de la homotopía H:  $I \times I \longrightarrow X$  dada por

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,s) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

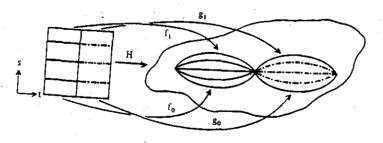


fig. 3.2.2

Dado que  $F(1,s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0,s)$ , H es continua (como afirma el Lema 1.10.2). Ahora verificaremos que H es una homotopía

relativa al { 0,1 } entre  $f_0 * g_0 y f_1 * g_1$ , para ello hagamos los cálculos necesarios

$$H(t,0) = \left\{ \begin{array}{ll} F(2t,0) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,0) & 1/2 \le t \le 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} f_0(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g_0(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{array} \right.$$
 así  $H(t,0) = (f_0 * g_0)(t)$ ,

$$\begin{array}{lll} H(t,1) \ = \ \left\{ \begin{array}{ll} F(2t,1) & 0 \le t \le 1/2 \\ & & \\ G(2t-1,1) & 1/2 \le t \le 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} f_1(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ & & \\ g_1(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{array} \right. \\ asi \ H(t,1) \ = \ (f_1 * g_1)(t) \,, \end{array}$$

$$H(0,s) = F(0,s) = f_0(0) = (f_0 * g_0)(t) y$$
  
 $H(1,s) = G(1,s) = g_0(1) = (f_0 * g_0)(1).$ 

Lo cual comprueba que H es la homotopía deseada.

La compatibilidad expresada en el Lema 3.2.2 muestra que el producto definido así, no depende del representante.

El siguiente resultado nos dice que la multiplicación de clases de equivalencia de caminos es asociativa; esto es

$$([f][g])[h] = [f]([g][h])$$

siempre y cuando este producto tenga sentido (es decir, si f(1) = g(0) y g(1) = h(0)). Obsérvese que puede darse  $(f*g)*h \neq f*(g*h)$ .

# Lema 3.2.3

Supongamos que f, g, h son tres caminos de X tales que f(1) = g(0) y g(1) = h(0), entonces  $(f*g)*h \sim f*(g*h)$ .

#### Demostración.

Primeramente obtengamos una expresión para (f\*g)\*h y f\*(g\*h), para ello consideremos los siguientes diagramas en los cuales se encuentran representados

Así por ejemplo, para obtener ((f\*g)\*h(t)) en el intervalo  $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$  se usa g y se compone con el homeomorfismo lineal que transforme el intervalo  $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$  en [0,1] y conserve la orientación, la cual es t  $\rightarrow$  4t-1. De esta forma, obtenemos g variando t en el intervalo  $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$  (aún más, se puede utilizar cualquier aplicación continua de  $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$  a [0,1] que aplique  $\frac{1}{4}$  en 0 y  $\frac{1}{2}$  en 1, sólo que al escogerla lineal los cálculos se facilitan).

1) 
$$((f*g)*h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \le t \le 1/4 \\ g(4t-1) & 1/4 \le t \le 1/2 \\ h(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

2) 
$$(f*(g*h))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(4t-2) & 1/4 \le t \le 3/4 \\ h(4t-3) & 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

Para construir una homotopía entre (f\*g)\*h y f\*(g\*h) consideramos la figura 3.2.3. La idea de la homotopía es sencilla, consiste en expandir o comprimir linealmente los intervalos de definición de f, g, h, de tal forma que pasemos de (f\*g)\*h a f\*(g\*h). Para ver en qué intervalo debemos definir f en la homotopía, procedemos de la siguiente manera: encontramos la ecuación de la recta que expande el intervalo  $[0,\frac{1}{4}]$  al  $[0,\frac{1}{2}]$  que son los dominios de definición de f, dicha ecuación es s=4t-1; por lo que para un valor fijo de s tomamos f en el intervalo  $[0,\frac{(s+1)}{4}]$ , g en el intervalo  $[\frac{(s+1)}{4},\frac{(s+2)}{4}]$  y h en el intervalo  $[\frac{(s+1)}{4},1]$ .

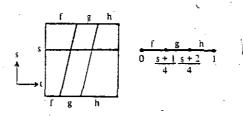


figura 3.2.3

Así, utilizando el método descrito arriba definimos F:  $I \times I \longrightarrow X$  por

$$F(t,s) = \begin{cases} f((4t/(1+s)) & 0 \le t \le (s+1)/4 \\ g(4t-s-1) & (s+1)/4 \le t \le (s+2)/4 \\ h((4t-s-2)/(2-s)) & (s+2)/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

La función F es continua y

$$F(t,0) = ((f*g)*h)(t)$$
  $F(t,1) = (f*(g*h))(t)$ 

$$F(0,s) = f(0) = ((f*g)*h)(0)$$
  $F(1,s) = h(1) = ((f*g)*h))$ 

por lo que F es la homotopía que realiza las equivalencias.■

Si  $x \in X$ , definimos  $\mathcal{E}_x$ : I  $\longrightarrow X$  como el camino constante, es decir  $\mathcal{E}_x$ , para t  $\in$  [0,1]. Los caminos que pertenecen a la clase de equivalencia del camino constante se comportan como un elemento unidad (por la izquierda o por la derecha), esto es

$$[\mathcal{E}_{x}][f] = [f][\mathcal{E}_{y}]$$

Lema 3.2.4

Sea f un camino en X con origen en x y final en y, entonces  $\mathcal{E}_{x} * f \sim f$  y  $f * \mathcal{E}_{v} \sim f$ .

Demostración.

Mostraremos únicamente que  $\mathcal{E}_x * f - f$ ; ya que mostrar  $f * \mathcal{E}_y - f$  es análogo. Primeramente observemos que

$$(\mathcal{E}_{x} * f) (t) = \begin{cases} x & 0 \le t \le 1/2 \\ f(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Ahora tomando la idea expuesta en la figura 3.2.4 y siguiendo el procedimiento descrito en la demostración del Lema 3.2.3 definamos  $F: I \times I \longrightarrow X$ 

$$F(t,s) = \begin{cases} x & 0 \le t \le (1-s)/2 \\ f((2t-1+s)/(1+s)) & (1-s)/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

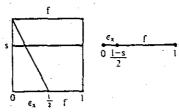


figura 3.2.4

Efectuando algunos cálculos tenemos que

Por lo que F es la homotopía deseada.

Por último veremos como se pueden invertir caminos (salvo homotopías). Dado un camino  $f:I \to X$ , el camino  $\overline{f}\colon I \to X$  dado por  $\overline{f}(t) = f(1-t)$ ,  $0 \le t \le 1$ , recorre a f en sentido opuesto.

Observación. El camino  $\bar{f}(t)$  así definido es compatible con ~; es decir,  $\bar{f}$  ~  $\bar{g}$  si y sólo si f ~ g. Para verlo supongamos primero que f ~ g, lo cual implica que existe F:  $I \times I \longrightarrow X$  tal que

$$F(t,0) = f(t)$$
  $Y$   $F(0,s) = f(0) = g(0)$   
 $F(t,1) = g(t)$   $Y$   $F(1,s) = f(1) = g(1)$ 

Definimos entonces, G:  $I \times I \longrightarrow X$  por G(t,s) = F(1-t,s) y, efectuando los cálculos correspondientes obtenemos

$$G(t,0) = \vec{f}(t)$$
  $g(0,s) = \vec{f}(0) = \vec{g}(0)$   
 $G(t,1) = \vec{g}(t)$   $g(1,s) = \vec{f}(1) = \vec{g}(1)$ 

De donde f ~ q. La demostración en el sentido opuesto es similar.■

El siguiente lema enuncia que la clase de  $\bar{f}$  actúa como un inverso de la clase de equivalencia de f, es decir

$$[f][\vec{f}] = [\varepsilon_{x}] = [\vec{f}][f] = [\varepsilon_{y}]$$

para todo camino en X con origen en x y final en y.

Lema 3.2.5

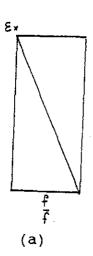
Si f es un camino en X con origen en x y final en y, entonces  $f*\bar{f}\sim\mathcal{E}$  y  $\bar{f}*f\sim\mathcal{E}$ .

Demostración.

Se probará únicamente  $f*\bar{f} \sim \mathcal{E}_{\chi}$ . El demostrar  $f*\bar{f} \sim \mathcal{E}_{\chi}$  es análogo. Veamos como podemos representar el camino  $f*\bar{f}$ , para ello debemos considerar que primero viajamos a lo largo de f, de x a y, y de nuevo a lo largo de f pero en dirección opuesta, esto es de y a x. Para lograr que  $f*\bar{f}$  quede definido en el intervalo [0,1] viajemos pues al doble de la velocidad normal. Interpretando lo anterior,  $f*\bar{f}$  queda determinado por

$$(f*\vec{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ f(2-2t) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Para construir la homotopía entre f\* $\bar{f} \sim \varepsilon_{_{\mbox{\scriptsize X}}}$  consideramos la figura 3.2.5.



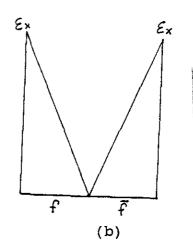


figura 3.2.5

En la figura 3.2.5(a) tenemos que f y  $\bar{f}$  están "sobrepuestas", puesto que  $\bar{f}$  recorre en sentido contrario a f; y la recta que une a los puntos  $(\frac{1}{2},0)$  y (0,1) y deforma a f\* $\bar{f}$  en  $\mathcal{E}_{\chi}$ , tiene por ecuación s = 1-2t. "Desdoblando" 3.2.5(a) obtenemos 3.2.5(b) donde la idea es viajar a lo largo de f durante la primera (1-s)/2-parte de nuestro tiempo, y llegar al punto f(1-s), esperamos en él, mientras t se mueve en el intervalo [(1-s)/2,(1+s)/2] y finalmente retornamos a lo largo de f durante la última (1-s)/2 parte de nuestro tiempo.

Tomando en cuenta lo anterior definimos  $F : I \times I \longrightarrow X$  por

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le (1-s)/2 \\ f(1-s) & (1-s)/2 \le t \le (1+s)/2 \\ f(2-2t) & (1+s)/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Así, cuando s = 0 obtenemos  $f*\bar{f}$ , y cuando s = 1 permanecemos en x para toda t  $\in$  [0,1], es decir obtenemos  $\mathcal{E}_{\chi}$ . Por lo que, F es la homotopía que realiza la equivalencia.

# 3.3 Construcción del grupo fundamental.

Hasta aquí se ha demostrado que el conjunto de las clases de equivalencia de caminos de un espacio X, prácticamente tiene una estructura de grupo, pero se presenta el inconveniente de que la multiplicación no siempre está definida y, además de la necesidad de definir dos elementos que se comporten como la identidad (uno por la derecha y otro por la izquierda).

En el afán de solucionar este tipo de problemas introduciremos

el concepto de camino cerrado.

3.3.1. Definición.

Decimos que un camino f es cerrado si f(0) = f(1). Si f(0) = f(1) = x, diremos que f es un camino con punto base x.

Frecuentemente a este tipo de caminos se les llama "lazo". Una consecuencia inmediata es que elproducto f\*g está definido para todo par de lazos con punto base en algún  $x \in X$ . Denotaremos por  $\Pi(X,x)$  al conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en  $x \in X$ . Dicho conjunto posee un producto definido por [f][g]=[f\*g] donde [f],  $[g] \in \Pi(X,x)$  y el cual está bien definido, en virtud del lema 3.2.2. En seguida demostraremos que la multiplicación inducida en  $\Pi(X,x)$  por el producto de lazos define en él una estructura de grupo.

3.3.2. Teorema.

 $\Pi(X,x)$  es un grupo.

Demostración.

El enunciado de este teorema es consecuencia de la sección "Multiplicación de caminos". Ya observamos que el producto de lazos esta siempre definido. El elemento  $[\mathcal{E}_{x}]$  desempeña el papel del elemento identidad, en vista del lema 3.2.4. Si  $[f] \in \Pi(X,x)$  el lema 3.2.5 demuestra que  $[f]^{-1} = [\overline{f}]$ . Y por último la asociatividad se deduce del lema 3.2.3.

Observación. Como consecuencia de la asociatividad del producto de clases de equivalencia de lazos es indistinto escribir [f\*g\*h] en lugar de [(f\*g)\*h]. Sin embargo, no podemos escribir f\*g\*h en lugar de (f\*g)\*h; por ejemplo, tomando en cuenta las expresiones para los productos en la demostración del lema 2.2.3, tenemos que  $((f*g)*h)(\frac{1}{4}) = f(1)$  mientras que  $(f*(g*h))(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2})$ . Por tanto, en general no son iguales.

A  $\Pi(X,x)$ , con la estructura de grupo que acabamos de señalar, se le conoce como Grupo Fundamental o Primer Grupo de Homotopía del espacio X (relativo al punto base  $x \in X$ ). H. Poincaré fue el

que introdujo el Grupo Fundamental por lo que a veces es llamado el Grupo de Poincaré del espacio X.

3.4. Espacios cubriente.

Sea p:  $\tilde{X} \to X$  una aplicación continua. Decimos que el subconjunto abierto  $U \subseteq X$  está propiamente recubierto por p si  $p^{-1}(U)$  es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\tilde{X}$  cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre U. Se dice que la aplicación continua p:  $\tilde{X} \to X$  es una aplicación recubridora si todo punto  $x \in X$  es un recubrimiento,  $\tilde{X}$  es el espacio recubridor de X Y X es el espacio base de la aplicación recubridora p:  $\tilde{X} \to X$  En otras palabras,

# 3.4.1. Definición.

- p:  $\tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento si:
  - i) p es continua, sobreyectiva, y
- ii) para todo  $x \in X$  existe un entorno abierto U de x tal que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$  para una cierta colección  $\{U_j; j \in J\}$  de subconjuntos de  $\widetilde{X}$  tales que  $U_j \cap U_k = \emptyset$  para  $j \neq k$  y  $p|U_j: U_j \longrightarrow U$  es un homeomorfismo para cada  $j \in J$ .

# Ejemplos.

- 1) Obviamente, todo homeomorfismo h:  $X \longrightarrow X$  es una aplicación recubridora.
- 2) Otro ejemplo trivial de recubrimiento p:  $\tilde{X} \to X$  consiste en tomar  $\tilde{X}$  como  $X \times Y$ , donde Y es un espacio discreto y p es la proyección canónica.

Algunos G-espacios dan lugar a espacios recubridores.

# 3.4.2. Definición.

Sea X un G-conjunto. Decimos que G opera libremente sobre X (o que la acción de G es libre) si  $g \cdot x \neq x$  para todo  $x \in X$  y  $g \in G$ ,  $g \neq 1$ .

# 3.4.3. Definición.

Sea X un G-espacio. Decimos que la acción de G sobre X es propiamente discontinua si para cada x $\in$ X existe un entorno abierto V de x tal que  $g \cdot V \cap g' \cdot V = \emptyset$  para todo  $g, g' \in G$  con  $g \neq g'$ .

Obsérvese que si la acción es propiamente discontinua,  $g \cdot x \neq x$ 

para todo  $g \in G$ ,  $g \neq 1$  y todo  $x \in X$ , ya que si  $x \in V$ , entonces  $g \cdot x \in g \cdot V$ . Antes de dar algunos ejemplos demostraremos un teorema que justifica la introducción de acciones propiamente discontinuas.

#### 3.4.4. Teorema.

Sea X un G-espacio. Si la acción de G sobre X es propiamente discontinua entonces p:  $X \longrightarrow X/G$  es un recubrimiento.

#### Demostración.

Observemos en primer lugar que p:  $X \longrightarrow X/G$  es una aplicación continua y sobreyectiva. En virtud del Teorema 1.6.15, p también es una aplicación abierta.

Sea U un entorno abierto de x  $\in$  X que satisfaga la condición de discontinuidad propia. Puesto que p es una aplicación abierta, p(U) es un entorno abierto de  $G \cdot x = p(x)$  y  $p^{-1}(p(U)) = U g \cdot U g \in G$  (Teorema 1.6.15), donde {  $g \cdot U$ ;  $g \in G$  } es una colección de subconjuntos abiertos disjuntos (por ser la acción propiamente discontinua) de X. Además  $p(g \cdot U) : g \cdot U \to p(U)$  es una aplicación continua, abierta y también biyectiva ya que para  $G \cdot x \in p(U)$  se tiene que  $(p(g \cdot U)^{-1}(G \cdot x) = G \cdot x \land g \cdot U = \{ g \cdot x \} \in g \cdot U \text{ (pues } G \cdot x \land g \cdot U \subseteq G \cdot U \land g \cdot U \text{ y } U \text{ es un entorno de } x \text{ que satisface la condición de discontinuidad propia); por lo tanto, <math>p(g \cdot U) : g \cdot U \to p(U)$  es un homeomorfismo, y por tanto p es un recubrimiento.

# Ejemplos.

La acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  dada por  $x \to x + n$  es propiamente discontinua, ya que si  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon < 1/2$ , entonces  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  es un entorno abierto de x que cumple la condición requerida. Puesto que esta acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  convierte a  $\mathbb{R}$  en un  $\mathbb{Z}$ -espacio, resulta por el Teorema 3.4.4 que p:  $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es una aplicación recubridora.

El ejemplo siguiente nos muestra que la aplicación natural  $S^n \to \mathbb{R}P^n$ , es decir, la que a cada  $x \in S^n$  le asocia el par  $\{x, -x\}$  es una aplicación recubridora. Consideremos el  $\mathbb{Z}_2$ -espacio  $S^n$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa como  $\pm 1 \cdot x = \pm x$ . Para cada  $x \in S^n$ , el conjunto

$$\{ y \in S^n; \| y - x \| < 1/2 \}$$

es un entorno abierto de x que cumple con la condición de discontinuidad propia. Alternativamente, puesto que  $x \neq -x$  y  $S^n$  es de Hausdorff, existen entornos abiertos disjuntos V, W de x y -x respectivamente. El entorno V  $\cap$  (-W) de x cumple con la condición de discontinuidad propia. Este ejemplo puede generalizarse:

# 3.4.5. Teorema.

Si G es un grupo finito que opera libremente sobre un espacio de Hausdorff X, la acción de G sobre X es propiamente discontinua.

# Demostración.

Sea G = { 1 =  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,...,  $g_n$  }. Puesto que X es Hausdorff, existen entornos abiertos  $U_0$ ,  $U_1$ ,...,  $U_n$  de  $g_0$ ·x,  $g_1$ ·x,...,  $g_n$ ·x, respectivamente, tales que  $U_0$   $\cap$   $U_j$  =  $\emptyset$  para j = 1, 2,..., n. Sea U la intersección  $\bigcap_{j=0}^{n} g_j^{-1} \cdot U_j$ ; como

$$g_i \cdot x \in U_i \ \forall \ i = 1, 2, ..., n$$
 $\Rightarrow g_i \cdot x = y \text{ para algún } y \in U_i$ 
 $\Rightarrow x = g_i^{-1} \cdot y \text{ para algún } y \in U_i$ 
 $\Rightarrow x \in g_i^{-1} \cdot U_i \text{ para cada } i$ 
 $\Rightarrow x \in \bigcap_{j=0}^{n} g_j^{-1} \cdot U_j$ 

Además cada  $g_j^{-1} \cdot U_j$  es un abierto en X por ser  $\theta_g$  un homeomorfismo; por tanto,  $\bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j$  es un entorno abierto de X. Ahora bien, como  $U_i = g_i \cdot (g_i^{-1} \cdot U_i) \ge \bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j$  y como  $\theta_g$  es biyectiva se tiene que

 $g_{i} \cdot U = g_{i} \cdot \bigcap_{j=0}^{n} (g_{j}^{-1} \cdot U_{j}) = \bigcap_{j=0}^{n} g_{i} \cdot (g_{j}^{-1} \cdot U_{j}) \subseteq U_{i} \quad \text{donde } j \neq 1$ por otra parte,

$$\begin{aligned} g_i \cdot U & \cap g_j \cdot U &= (g_j \cdot g_j^{-1} g_i \cdot U) \ \cap (g_j \cdot U) \\ &= g_j \cdot [(g_j^{-1} \cdot g_i \cdot U) \cap U] \quad \text{por ser } \theta_g \text{ biyectiva} \\ &= g_j \cdot (g_k \cdot U \cap U) \qquad \qquad (\text{para alguna } k) \\ &= \emptyset \qquad \qquad \text{ya que } g_k \cdot U \subseteq U_k, \ U \subseteq U_0 \\ &\qquad \qquad (\text{pues } U_0 = g_0^{-1} \cdot U_0 \supseteq \bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j = U) \\ &\qquad \qquad \qquad Y \quad U_k \quad \cap U_0 \text{ son disjuntos} \end{aligned}$$

Así pues la acción de G sobre X es propiamente discontinua.

3.4.6. Teorema.

Sea p:  $\tilde{X} \longrightarrow X$  una aplicación recubridora. Entonces

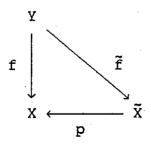
- i) p es una aplicación abierta
- ii) X tiene la topología cociente respecto a p.

#### Demostración.

- i) Sea U un subconjunto abierto de  $\tilde{X}$  y sea  $x \in p(U)$ . Puesto que p es una aplicación recubridora, existe un entorno abierto V de x propiamente recubierto. Sea  $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap U$ ; puesto que  $\tilde{x} \in p^{-1}(V) = \bigcup V_j$ , existe algún conjunto abierto  $V_j$  de  $\tilde{X}$  tal que  $\tilde{x} \in V_j$ . Puesto que  $V_j \cap U$  es un abierto en  $V_j$  y p $|V_j|$  es un homeomorfismo de  $V_j$  sobre  $V_j$  resulta que p $(V_j \cap U)$  es un subconjunto abierto de  $V_j$ . Pero al ser  $V_j$  abierto en  $V_j$  p $|V_j|$  es también abierto en  $V_j$ . Puesto que  $v_j$  abierto en  $v_j$  p $|V_j|$  resulta que p $|V_j|$  es abierto, por lo que p es una aplicación abierta.
- ii) Sea U un subconjunto de X tal que  $p^{-1}(U)$  es abierto en  $\tilde{X}$ . Ya que p es una aplicación abierta  $p(p^{-1}(U)) = U$  es un abierto en X, y como la topología cociente es la mayor topología que hace continua a p, entonces X tiene la topología cociente respecto a p. (Teorema 1.5.7)

# 3.4.7. Definición.

Si p:  $\tilde{X} \longrightarrow X$  es un recubrimiento y f: Y  $\longrightarrow X$  es una aplicación continua, una elevación de f: Y  $\longrightarrow X$  es una aplicación continua  $\tilde{f}$ : Y  $\longrightarrow \tilde{X}$  tal que  $p\tilde{f}$ : = f.



El resultado siguiente demuestra que si existe una elevación, ésta es escencialmente única.

3.4.8. Lema.

Sean p:  $\tilde{X} \to X$  un recubrimiento y  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{f}$ :  $Y \to \tilde{X}$  dos elevaciones de f: Y  $\rightarrow$  X. Si Y es conexo y  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(y_0)$  para algun  $y_0 \in Y$ , entonces  $\tilde{f} = \tilde{f}$ .

Demostración.

Sea Y' el conjunto {  $y \in Y$ ;  $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(y)$  } que es no vacío ya que  $y_0 \in Y'$  por hipótesis. Demostraremos que Y' es abierto y cerrado a la vez. Sea y ∈ Y; existe entonces un entorno abierto V de f(y) que está propiamente recubierto por p; es decir, p<sup>-1</sup>(V) es la unión disjunta de {  $V_i$ ; j  $\in$  J } y  $p|V_i$ :  $V_i \rightarrow V$  es un homeomorfismo para cada j  $\in$  J. Si y  $\in$  Y', entonces  $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(y) \in V_{\nu} \text{ para algún } k \in J \text{ y } \tilde{f}^{-1}(V_{\nu}) \text{ } \cap \text{ } \tilde{f}^{-1}(V_{\nu}) \text{ es un}$ entorno abierto de y contenido en Y'. Para ver esto último, sea  $x \in \tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{f}^{-1}(V_k)$  entonces  $\tilde{f}(x) \in V_k$   $y \in \tilde{f}(x) \in V_k$ , pero también  $p\tilde{f}(x) = p\tilde{f}(x) = f(x)$ . Puesto que  $p|V_k$  es un homeomorfismo, (por tanto biyectiva) resulta que  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$ . Así pues, todo punto de Y' tiene un entorno abierto contenido en Y' y, por tanto, Y' es abierto. Por otra parte, si y  $\notin$  Y', entonces  $\tilde{f}(y) \in V_{\nu}$  y  $\tilde{f}(y) \in V_{\nu}$ para ciertos k y l con k  $\neq$  l (pues si suponemos que  $\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}(y)$  y  $\tilde{f}(y) \subseteq V$ ,  $y \tilde{f}(y) \subseteq V$ , entonces  $p(\tilde{f}(y)) \neq p(\tilde{f}(y))$  puesto que p es localmente un homeomorfismo, pero esto contradice el hecho de que  $\tilde{f}$  y  $\tilde{f}$  son elevaciones). Resulta pues que  $\tilde{f}^{-1}(V_{k}) \cap \tilde{f}^{-1}(V_{k}) \neq \emptyset$ , pues al menos  $y \in f^{-1}(V_{\nu}) \cap f^{-1}(V_{\nu})$  y además es un entorno abierto de y contenido en el complementario de Y'. El razonamiento es parecido al del caso anterior, tomemos  $x \in \tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{f}^{-1}(V_l)$  entonces  $\tilde{f}(x) \in V_k$ ,  $\tilde{f}(x) \in V_l$  con  $k \neq l$  pero entonces  $V_k \cap V_l = \emptyset$ , por tanto,  $\tilde{f}(x) \neq \tilde{f}(x)$ . Así pues, Y' es

cerrado. Puesto que Y es conexo, resulta que Y = Y' y por tanto **f** = **f**.■

Un interesante corolario es:

#### 3.4.9. Corolario.

Supongamos que  $\tilde{X}$  es un espacio arco conexo y  $\varphi\colon\thinspace X\,\longrightarrow\, \tilde{X}$  es una aplicación continua tal que  $p\varphi = p$ . Si  $\varphi(x) = x$  para algún  $x \in \tilde{X}$ , entonces  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in \tilde{X}$  (es decir  $\varphi$  es la



aplicación identidad)

Demostración.

Sea x un punto arbitrario de  $\tilde{X}$  y  $\alpha$ :  $I \to \tilde{X}$  un camino de  $x_1$  a x. Puesto que  $\varphi(x_1) = x_1$ , los caminos  $\alpha$  y  $\varphi_{\alpha}$  tienen ambos por orígen a  $x_1$ . Además,  $p\alpha = p\varphi_{\alpha}$ , por lo que  $\alpha$  y  $\varphi_{\alpha}$  son elevaciones del camino  $p\alpha$ :  $I \to X$ . En virtud del lema anterior  $\alpha = \varphi_{\alpha}$  y, en particular, los puntos finales de  $\alpha$  y  $\varphi_{\alpha}$  coinciden; es decir,  $\varphi(x) = x.$ 

El resultado siguiente es conocido como el teorema de elevación de homotopías de caminos.

3.4.10. Teorema.

Sea p:  $\tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento.

- i) Dado un camino f: I  $\rightarrow$  X y un punto a  $\in \tilde{X}$  tal que p(a) = f(0), existe un *unico* camino  $\tilde{f}$ : I  $\rightarrow \tilde{X}$  tal que p $\tilde{f}$  = f y  $\tilde{f}$ (0) = a.
- ii) Dada una aplicación continua  $F: I \times I \longrightarrow X$  y un punto  $a \in \widetilde{X}$  tal que p(a) = F(0,0), existe una única aplicación continua  $\widetilde{F}: I \times I \longrightarrow \widetilde{X}$  tal que  $p\widetilde{F} = F$  y  $\widetilde{F}(0,0) = a$ .

# Demostración.

- i) Para cada  $x \in X$  sea  $U_x$  un entorno abierto de x tal que  $p^{-1}(U_x)$  sea la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\widetilde{X}$  cada uno de los cuales se aplica por p homeomórficamente sobre  $U_x$ . El conjunto  $\{f^{-1}(U_x); x \in X\}$  puede expresarse en la forma
- $\{(x_j,y_j) \cap I; j \in J\}$  que es un recubrimiento abierto de I. Puesto que I es compacto, existe un subrecubrimiento finito de la forma:

$$[0, t_1 + \varepsilon_1), (t_2 - \varepsilon_2, t_2 + \varepsilon_2), \dots, (t_n - \varepsilon_n]$$

Con  $t_i + \varepsilon_i > t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}$  para i = 1, 2, ..., n-1. Elijamos ahora  $a_i \in (t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, t_i + \varepsilon_i)$  para i = 1, 2, ..., n-1, de manera que  $0 = a_0 < a_i < a_2 < ... < a_n = 1$ 

Obviamente  $f([a_i, a_{i+1}]) \subseteq X$ , pero aún más:  $f([a_i, a_{i+1}])$  está contenido en un subconjunto abierto  $X_i$  de X tal que  $p^{-1}(X_i)$  es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\tilde{X}$ , cada uno de los cuales se aplica por p homeomórficamente sobre  $S_i$ .

Definiremos elevaciones  $\tilde{f}_k$  inductivamente sobre  $[0,a_k]$  para  $k=0,\ 1,\ldots,$  n de manera que  $\tilde{f}_k(0)=a$ , para k=0, es trivial:  $\tilde{f}_0(0)=a$ ; no hay otra elección. supongamos que hemos definido  $\tilde{f}\colon [0,a_k]\to \tilde{X}$  de manera única. Recordemos que  $f([a_k,a_{k+1}])\subseteq X_k$  y que  $p^{-1}(X_k)$  es la unión disjunta de  $\{W_j;\ j\in J\}$  donde  $p|W_j\colon W_j\to X_k$  es un homeomorfismo para cada  $j\in J$ . Ahora bien, existe un único miembro W de  $\{W_j;\ j\in J\}$  tal que  $\tilde{f}_k(a_k)\in W$  (es claro que  $\tilde{f}_k(a_k)$  no puede pertenecer a dos  $W_j$ 's pues estos son disjuntos).

Cualquier extensión  $\tilde{f}_{k+1}$  debe aplicar  $[a_k, a_{k+1}]$  en W ya que  $[0, a_{k+1}]$  es arcoconexo (por tanto conexo) y  $f_{k+1}$  es continua. Pueto que la restricción p|W: W  $\rightarrow$  X<sub>k</sub> es un homeomorfismo, existe una única aplicación  $\rho\colon [a_k, a_{k+1}] \rightarrow$  W tal que p $\rho = f|[a_k, a_{k+1}]$  dada por  $\rho = (p|W)^{-1}f$  ( la cual por cierto está bien definida por ser p|W: W  $\rightarrow$  X<sub>k</sub> un homeomorfismo). Definimos entonces:

$$\tilde{f}_{k+1}(s) = \begin{cases} \tilde{f}(s) & 0 \le s \le a \\ \rho(s) & a_k \le s \le a \end{cases}$$

 $p\tilde{f}(a_k) = p\rho(a_k)$ ; como  $\tilde{f}(a_k)$ ,  $\rho(a_k) \in W$  y p|W| es biyectiva se tiene que  $\tilde{f}(a_k) = \rho(a_k)$ , luego entonces por el lema 1.10.2  $\tilde{f}_{k+1}$  es continua, y además es única por construcción.

En conclusión, vimos que  $\tilde{f}_k(a_k)$  se puede definir de manera única para k=0 como  $\tilde{f}_0(0)=a$ , supusimos que  $f_k([0,a_k])$  se puede definir de manera única y probamos que esto implica que tenemos que definir  $f_{k+1}([0,a_{k+1}])$  de manera única. Hemos probado por inducción que  $\tilde{f}\colon [0,a_k]\to \tilde{X}$  está bien definida de manera única para  $k=0,1,\ldots,n$ ; por tanto  $f\colon [0,1]\to \tilde{X}$  está bien definida de manera única.

ii) Este inciso se demuestra de manera análoga al anterior.

Para cada  $x \in X$  sea  $U_x$  un entorno abierto como el del inciso anterior. El conjunto  $\{F^{-1}(U_x); x \in X\}$  es un recubrimiento abierto de  $I^2$  y dado que este es compacto podemos encontrar:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$$
  
 $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = 1$ 

Denotemos por R<sub>i,j</sub> el rectangulo

 $R_{i,j} = \{ (t,s) \in I^2; \ a_i \le t \le a_{i+1}, \ b_j \le s \le b_{j+1} \}$  para  $i=1,2,\ldots,$  n-1 y  $j=1,2,\ldots,$  m-1. Claramente,  $F(R_{i,j}) \subseteq X, \text{ pero más aún, } F(R_{i,j}) \text{ está contenido en un conjunto abierto } X_{i,j} \text{ de } X \text{ para el cual } p^{-1}(X_{i,j}) \text{ es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de } \widetilde{X}, \text{ cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre } X_{i,j}.$ 

Definiremos elevaciones  $\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{k},\,\mathbf{l}}$  inductivamente sobre los rectángulos

 $R_{k,1}' = \{ \ (t,s) \in I^2; \ 0 \le t \le a_k, \ 0 \le s \le b_k \ \}$  para  $k = 0, 1, 2, \ldots, n$  y  $l = 0, 1, 2, \ldots, m$ ; de manera que  $\tilde{F}_{k,1}(0,0) = a$ . Para k = 1 = 0 tenemos que  $\tilde{F}_{0,0}(0,0) = x_0 y$  no hay otra elección. Supongamos que hemos definido  $\tilde{F}_{k,1} \colon R_{k,1}' \to X$  de manera única. Recordemos que  $F(R_{k,1}) \le X_{k,1}$  y que  $p^{-1}(X_{k,1})$  es la unión disjunta de  $\{ W_{\alpha}; \ \alpha \in A \ \}$  donde  $p|W_{\alpha} \colon W_{\alpha} \to S_{k,1}$  es un homeomorfismo para cada  $\alpha \in A$ . Así pues, existe un único  $W \in \{ W_{\alpha}; \ \alpha \in A \ \}$  tal que  $\tilde{F}_{k,1}((a_k,b_1)) \in W$  por lo que cualquie extensión  $\tilde{F}_{k+1,1+1}$  debe aplicar  $R_{k,1}$  en W dado que  $R_{k,1}$  es c.p.c. Puesto que la restricción  $p|W \colon W \to S_{k,1}$  es un homeomorfismo, entonces la aplicación  $\rho \colon R_{k,1} \to W$  dada por  $\rho = (p|W)^{-1}F|R_{k,1}$  está bien definida. Por lo que podemos definir

$$\tilde{F}_{k+1, l+1} = \begin{cases} \tilde{F}_{k}(s) & s \in R'_{k, l} \\ \rho(s) & s \in R_{k, l} \end{cases}$$

si  $(a_k,b_1) \in R'_{k,1} \cap R_{k,1}$  entonces  $p\rho((a_k,b_1)) = p\tilde{F}((a_k,b_1))$ ; como  $p((a_k,b_1))$ ,  $\tilde{F}((a_k,b_1)) \in W$ , la función p|W es biyectiva y por tanto  $\rho((a_k,b_1)) = \tilde{F}((a_k,b_1))$ . Luego por el lema 12.2  $\tilde{F}_{k+1,l+1}$  es continua y además es única por construcción. Por tanto, obtenemos  $\tilde{F}$  mediante inducción. (En forma similar al inciso anterior).

Como corolario obtenemos el llamado teorema de monodromía.

## 3.4.11. Corolario.

Supongamos que  $f_0$  y  $f_1$  son caminos equivalentes de X. Si  $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ , entonces  $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ .

Demostración.

Por hipótesis  $f_0$  y  $f_1$  son homótopos relativamente a { 0,1 }. Sea F la homotopía rel{ 0,1 } entre  $f_0$  y  $f_1$ . Es decir,

$$F(t,0) = f_0(t),$$
  $F(t,1) = f_1(t)$  para  $t \in I$   
 $F(0,s) = f_0(0),$   $F(1,s) = f_0(1)$  para  $s \in I$ 

Por el teorema anterior inciso ii) podemos elevarlo de manera única a  $\tilde{\mathbf{F}}\colon \mathbf{I}^2 \to \mathbf{X}$  con  $\tilde{\mathbf{F}}(0,0) = \tilde{\mathbf{f}}_0(0) = \tilde{\mathbf{f}}_1(0)$  (escogemos  $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{f}}_0(0) = \tilde{\mathbf{f}}_1(0)$ , puesto que  $\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{f}}_0(0)) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{f}}_1(0)) = \mathbf{f}(0) = \mathbf{F}(0,0)$  Puesto que  $\mathbf{F}(t,0) = \tilde{\mathbf{f}}_0(t)$  y  $\mathbf{F}(t,1) = \mathbf{f}_1(t)$ , resulta que  $\tilde{\mathbf{F}}(t,0) = \tilde{\mathbf{f}}_0(t)$  y  $\tilde{\mathbf{F}}(t,1) = \tilde{\mathbf{f}}_1(t)$  ya que la elevación es única. Además,  $\tilde{\mathbf{F}}(1,t)$  es un camino de  $\tilde{\mathbf{f}}_0(1)$  a  $\tilde{\mathbf{f}}_1(1)$  puesto que  $\mathbf{F}(1,t) = \mathbf{f}_0(1) \doteq \mathbf{f}_1(1)$ . Pero  $\tilde{\mathbf{F}}(1,t) \in \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{f}_0(1))$ , que es la unión disjunta de puntos en  $\tilde{\mathbf{X}}$ ; lo cual implica que  $\tilde{\mathbf{F}}(1,t)$  es constante y, por tanto,  $\tilde{\mathbf{f}}_0(1) = \tilde{\mathbf{f}}_1(1)$  que completa la demostración. Obsérvese que de hecho  $\tilde{\mathbf{F}}$  es una homotopía relativa a { 0,1 } entre  $\tilde{\mathbf{f}}_0$  y  $\tilde{\mathbf{f}}_1$ .

#### CAPITULO IV

Una definición por construcción de los espacios L(p,q).

4.1. S<sup>3</sup> como espacio lente.

Sea S<sup>3</sup> la esfera unitaria en el plano bicomplejo:

$$S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$$

una parametrización para S3 está dada por:

P: 
$$A/\sim \mathbb{C}^2$$

P(u,v,w) =

( (cosw cosv cosu) + i(cosw cosv senu) , (cosw senv) + i(senw) )

donde  $0 \le u \le 2\pi$ 

$$-\pi/2 \le V \le \pi/2$$

$$-\pi/2 \leq w \leq \pi/2,$$

donde A c  $\mathbb{R}^3$  es igual al producto cartesiano de tales conjuntos, y A/~ es el espacio cociente obtenido vía la función proyección p:A  $\rightarrow$  A/~ cuya relación de equivalencia ~ obtendremos por construcción como sigue.

La parametrización que hemos dado vista como una función de A en  $\mathbb{R}^3$  es una función bien definida y biyectiva pero solo en los puntos interiores de A, por lo que debemos analizar el mapeo en la frontera de A y proceder a identificar los puntos adecuadamente.

Así, fijamos una componente y dejamos las demás libres

$$W = -\pi/2 \Rightarrow (0+0i, 0-i) = P_2$$

$$W = \pi/2 \Rightarrow (0+0i, 0+i) = P_1$$

$$v = -\pi/2 \Rightarrow (0+0i, -\cos w + i \sin w) = C_1$$

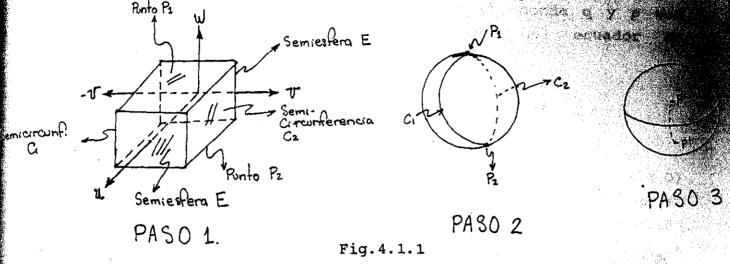
$$v = \pi/2 \Rightarrow (0+0i, cosw+isenw) = C_2$$

$$u = 0 \Rightarrow ((\cos w \cos v) + i0, (\cos w \sin v) + i(\sin w)) = E$$

$$u = 2\pi \Rightarrow ((\cos w \cos v) + i0, (\cos w \sin v) + i(\sin w)) = E$$

tenemos entonces que en la figura 4.1.1 las caras inferior y superior del cubo A son identificadas a los puntos (0+0i, 0-i) y

(0+0i, 0+i) respectivamente, las caras laterales son identificadas a una circunferencia y las caras frontal y posteriors son identificadas a una semiesfera, es decir, las caras frontal y posterior son identificadas entre sí.



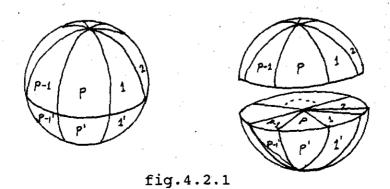
Luego entonces tenemos el siguiente

# 4.1.1. Teorema

La 3-esfera  $S^3$  es el espacio que se obtiene al "pegar" las superficies del hemisferio superior e inferior de una bola  $B^3$ , sin torcer los hemisferios, de tal modo que la identificación es la identidad en el ecuador.

# 4.2. Una definición por construcción de L(p,q).

Consideremos una bola con su superficie dividida en dos hemisferios a lo largo del ecuador. ¿Qué ocurre cuando pegamos la superficie del hemisferio superior con la del hemisferio inferior?



Como vimos anteriormente, si pegamos sin ningún torcimiento, de tal modo que la identificación es la identidad en el ecuador, la variedad resultante es  $\mathbf{s}^3$ .

Por otra parte, si los hemisferios son pegados con q/p de revolución en sentido contrario al del reloj, donde q y p son primos relativos, cada punto a lo largo del ecuador es identificado con otros p-1 puntos.

Modelo Geométrico para un Espacio Lente.

Consideremos la bola unitaria  $B^3$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Entonces identificamos cada punto de la mitad superior  $(z \ge 0)$  de  $\delta B^3$  con su imagen bajo la rotación de un ángulo  $2\pi q/p$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj y eje de rotación el eje z, seguido por una reflexión en el plano xy, como en la figura 4.2.2.

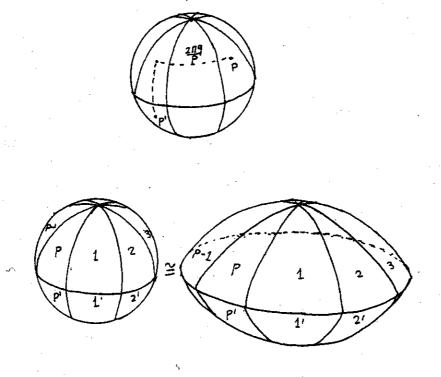


Fig.4.2.2

Ahora removemos una tajada vertical de la figura y dibujamos líneas verticales igualmente espaciadas sobre él, conectando los extremos de los sectores.(fig.4.2.3)

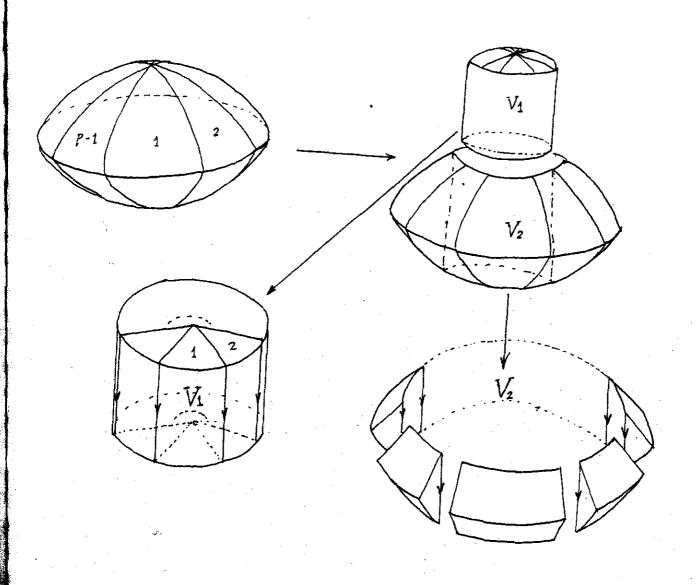
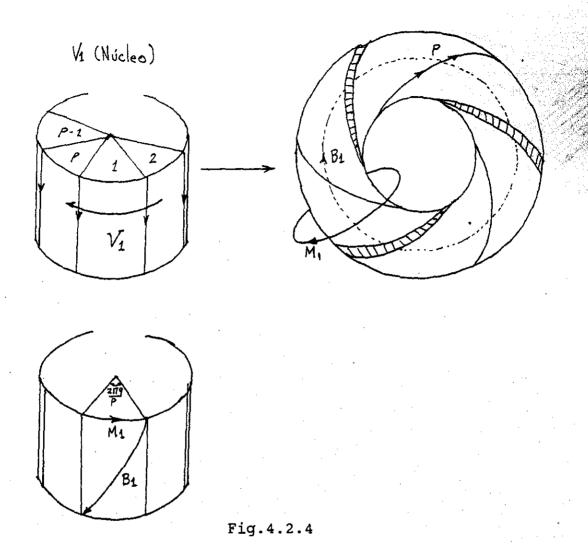


Figura 4.2.3

Después identificamos las caras superior e inferior, cuyas rectas verticales se unen para formar una curva toroidal (p,q).



lo que queda del Espacio Lente se divide en cortes verticales de ángulo  $2\pi/p$ . Cuando las regiones numeradas 1, 2, ..., m de la figura son identificadas el resultado es un cilindro con la curva meridional p como la orilla de cada cara. las marcas del corte siguen el mismo ciclo  $x_1$ ,  $x_{1-q}$ , ... (donde los índices son tomados módulo p) en ambas caras (Fig 4.2.5), así, cuando los cortes son reunidos obtenemos un toro sólido con "p" como una curva meridional. (Fig 4.2.6)

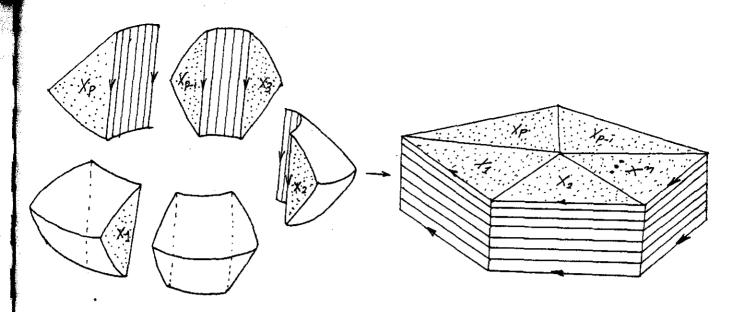


Figura 4.2.5

Así hemos descompuesto el Espacio Lente como la unión de dos toros sólidos con una curva-nudo (p,q) sobre él, la cual contiene la información del torcimiento y del proceso de "pegadura".

Las curvas longitudinal y meridional  $M_1$  y  $B_1$  de la figura 4.2.4 forman un sistema fundamental de curvas en el sentido de que toda curva en  $V_1$  es una combinación lineal de estas dos curvas. Lo mismo para p y  $B_2$ . (para una discusión detallada de estas curvas ver la sección última 5.4). Si reetiquetamos a la curva p por  $M_2$ , podemos decir que el espacio lente L(p,q) es el espacio que se obtiene "pegando" las superficies frontera de dos toroides  $V_1$  y  $V_2$  con curvas meridional  $M_1$ ,  $M_2$  y longitudinal  $B_1$ , de tal forma que

 $M_2 \sim pB_1 + qM_1$ 

en la superficie fontera de los toroides. El símbolo ~ denota "homólogo a". Esto lo enunciaremos formalmente como un teorema:

#### 4.2.1. Teorema.

El espacio lente L(p,q) es el espacio obtenido "pegando" las superficies frontera de dos toroides  $V_1$  y  $V_2$  con curvas meridional  $M_1$ ,  $M_2$  y longitudinal  $B_1$ ,  $B_2$  de tal forma que

$$M_2 \sim pB_1 + qM_1$$

donde la superficie frontera de  $V_1$  sea igual a la superficie frontera de  $V_2$ .

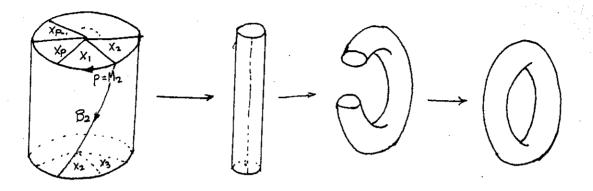


Fig 4.2.6

#### CAPITULO V

## Los Espacios Lente L(p,q)

# 5.1. Definición y construcción de L(p,q)

Sea S<sup>3</sup> la esfera unitaria en el plano bicomplejo:  $S^{3} = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2}; |z|^{2} + |w|^{2} = 1 \}$ Para primos relativos p y q, con p>0, sea  $h:S^3 \longrightarrow S^3$  el mapeo definido por  $h(z,w) = (\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi qi/p)w)$ Nótese que efectivamente h es una función de S3 en S3 puesto que  $si(z_0, w_0) \in S^3$  $(x_0, y_0) = h(z_0, w_0) = (\exp(2\pi i/p)z_0, \exp(2\pi iq/p)w_0)$ =  $((\cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p))z_0, (\cos(2\pi q/p) + i\sin(2\pi q/p))w_0)$ De aquí que  $|xo| = |(\cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p))||z_0|$  $|y_0| = |(\cos(2\pi q/p) + i\sin(2\pi q/p))||w_0|$ por tanto,  $|x_0|^2 + |y_0|^2 = |z_0|^2 + |w_0|^2 = 1$ y por tanto  $h(z_0, w_0) \in S^3$  siempre que  $(z_0, w_0) \in S^3$ . ·h es un homeomorfismo. h es continua con inversa  $h^{-1}:S^3 \longrightarrow S^3$  dada por =  $(\exp(-2\pi i/p)x$ ,  $\exp(-2\pi iq/p)$ ) que es  $(x,y) \in S^3$ . Así pues tenemos  $hh^{-1}(x_ky) = (x_ky)$  $h^{-1}h(z,w) = (z,w)$ por tanto h es un homeomorfismo de S3 con periodo p (hP=I y ht=I para 0<t<p). Obsérvese que G definido como  $G = \{I, h, h^2, ..., h^{p-1}\}$ es un grupo cíclico con la operación composición y que además cada sus elementos es un homeomorfismo de S3 (pues composición de homeomorfismos es un homeomorfismo). está definido como espacio cociente L(p,q) la region

fundamental de la acción en  $S^3$  del grupo  $G = \{ I, h, h^2, ..., h^{p-1} \}$  de homeomorfismos de  $S^3$  (L(p,q) es el espacio cociente de

S³ obtenido por la relación de equivalencia ~ definida por  $(z,w)\sim(z',w')$  si y sólo si  $(z,w)=h^t(z',w')$  para algún elemento  $h^t$  de G; es decir, L(p,q) es un G-espacio. (Spanier 1966. p.88). Nótese que la acción es libre puesto que  $h^t(z,w)\neq(z,w)$  para  $h^t\neq I$  y  $\forall$   $(z,w)\in S^3$ , como  $S^3$  es de Hausdorff, y G es un grupo finito que actua en  $S^3$  de manera continua, por el teorema 3.4.5 la acción es propiamente discontinua, luego entonces por el teorema 3.4.4 la aplicación p:  $S^3 \longrightarrow S^3/G$  es una aplicación recubridora.

Una definición por por construccion de L(p,q) (Hilton y Wile 1962. p.223) es de utilidad para determinar las propiedades de L(p,q) y será incluida aquí, la cual es sólo una ligerísima variante de la definición que dimos en el capítulo anterior, además probaremos la equivalencia de esta definición con la que dimos al principio de este capítulo. Sea P una pirámide doble sólida en el 3-espacio euclideano  $\mathbb{R}^3$ , obtenida a partir de un polígono regular en  $\mathbb{R}^2$  de p-lados con vértices {  $a_0^0$   $a_1^0$  .,  $a_{p-1}^0$ } adjuntando dos puntos  $a_0^2$  y a<sup>2</sup> en ambos lados del polígono (Fig.5.1.1). La frontera de P está cubierta por los triángulos  $a_i^0$   $a_{i+1}^0$   $a_i^0$ ,  $0 \le i \le p$ , j = 0,q, y L(p,q)se define entonces como la 3-variedad compacta obtenida de P identificando los triángulos frontera  $a_i^0$   $a_{i+1}^0$   $a_0^0$  y  $a_{i+q}^0$   $a_{i+q+1}^0$ obsérvese que los subíndices de a pueden tomarse módulo p. (es decir, si r es un subíndice entonces r=mp+i para algún meZ). De esta definición alterna se observa que L(p,q) y L(p,p+q) son homeomorfos ya que las identificaciónes de P son idénticas. También, L(p,q) y L(p,-q) son homeomorfos ya corresponden a identificaciones de P por medio de los ángulos  $2\pi q/p$  y  $2\pi(-q)/p$  respectivamente. De aquí que no hay restricción en la definición de L(p,q) al suponer que p y q satisfacen

$$0 \le q \le p/2 \tag{5.1.2}$$

Como ejemplos de espacios L(p,q) tenemos los siguientes:

1) Volviendo a la definición original de L(p,q) se ve fácilmente que  $S^3$  es el espacio lente L(1,0), (el cual estudiaremos con más detalle después) para este caso (p=1, q=0),  $h(z,w) = (exp(2\pi i/1)z, exp(0)w) = (z,w)$ , donde h es el homeomorfismo identidad y la región fundamental de la acción de

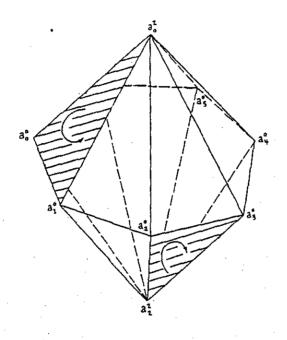


Fig.5.1.1 Representación Poliedral de L(7,2). (Las áreas sombreadas son identificadas.)

```
G = \{ h=I \}  sobre S^3 es precisamente S^3.
```

2) También observemos que L(2,1) no es otro que  $\mathbb{RP}^3$ ; puesto que  $G = \{I,h\}$  tenemos:

```
G·(z,w) = \{ (z,w), (\exp(2\pi i/2)z, \exp(2\pi i(1)/2)w) \}
= \{ (z,w), (\exp(\pi i)z, \exp(\pi i)w) \}
= \{ (z,w), (-z,-w) \}
```

Es decir, cada punto  $(z,w) \in S^3$  es identificado con su punto antipodal, por tanto efectivamente  $L(2,1) = S^3/G$  es  $\mathbb{R}P^3$ .

A través del siguiente capítulo estaremos interesados en obtener la representación equivalente de L(p,q) (Threlfall y Seifert 1932, p.554) como una variedad toroidal (Ver teorema 5.3.1 de este capítulo para el resultado).

La representación toroidal del espacio lente  $S^3 = L(1,0)$  será obtenida primeramente, después la definición de L(p,q) como la región fundamental de la acción de G sobre  $S^3$  será aplicada para obtener la representación toroidal deseada de L(p,q).

# 5.2. Representación toroidal de S3

Un toroide V es el producto topológico de un 2-disco euclideano D con frontera  $\delta D$  y una curva cerrada simple, la frontera de V está dada por  $\Pi = \delta D \times C$ . Por una curva meridional de V entenderemos que es una curva cerrada M en  $\Pi$  la cual está libre de puntos dobles, nulhomotópica con V, pero no nulhomotópica con  $\Pi$ , la elección de M siendo única con respecto a orientación y deformación continua en  $\Pi$ . Una curva longitudinal de V es definida entonces como una curva cerrada B en  $\Pi$  la cual está libre de puntos dobles y la cual intersecta a M exactamente una vez. Ver definición 5.4 para una discusión detallada de M y B). Con las definiciones básicas anteriores podemos proceder a la representación toroidal de  $S^3$ .

Como antes, sea  $S^3$  la esfera unitaria en el plano Dicompleto  $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1$ 

A través de la discusión siguiente suguione.

subespacios de S<sup>3</sup> tendrán la topologia inspecie
los subespacios de S<sup>3</sup> definidos por

 $T_1 = \{ (z, w) \in S^3; |z| \le |w| \} y T_2 = \{ (z, w) \}$ 

Si  $S_0^3$  es el espacio topológico obtenido  $S(C_0^3)$   $T_1 \vee T_2$  obtenida identificando el subespació  $C_0^3$   $T_1 \cap T_2 = \{ (z,w) \in S^3; |z|=|w| \}$  en la forma native topología coinducida por  $T_1 \vee T_2$ , -en este suma- (es decir

Sea  $(z,w) \in T_1$ . Entonces por (5.2.3) y (5.2.4),  $1 = |z|^2 + |w|^2 \le 2|w|^2$ , así que  $1/\sqrt{2} \le |w| \le 1$  y  $0 \le |z| \le 1/\sqrt{2}$ . Si  $z_0 = \zeta_0 \exp(i\phi_0)$ , donde  $0 \le \zeta_0 \le 1/\sqrt{2}$  y  $0 \le \phi_0 < 2\pi$ , estimate modulo fijo en el z-plano, entonces la w-coordenada de cada punto  $(z_0,w) \in T_1$  tiene módulo  $|w| = \sqrt{1-\zeta_0^2}$ , así que

 $w = \sqrt{1-\zeta_0^2} \exp(i\lambda), 0 \le \lambda < 2\pi.$ 

De aquí que el subespacio  $H(z_0) = \{ (z_0, w) \in T_1 \}$  es una curva cerrada simple en  $T_1$  y será llamada la  $T_1$ -fibra sobre  $z_0$  (fig.5.2.1).

Además, como H(z)  $\cap$  H(z') = ø para z $\neq$ z' y ya que cada (z,w)  $\in$  T<sub>1</sub> está contenido en la T<sub>1</sub>-fibra sobre z, entonces la descomposición T<sub>1</sub> = U H(z) donde  $0 \le \zeta \le 1/\sqrt{2}$  y  $0 \le \phi < 2\pi$ , de T<sub>1</sub> es una posible  $z = \zeta e^{i\phi}$ 

fibración de  $T_1$ . (Ver sección 5.4 para la definición de fibra). Si  $V_1$  es el cilindro circular recto en el 3-espacio Euclideano cuyas áreas circulares superior e inferior son identificadas (sin torcer)

 $V_1 = \{ (\zeta', \phi', \lambda'); 0 \le \zeta' < 1/\sqrt{2}, 0 \le \phi', \lambda' < 2\pi, \lambda \text{ tomada mod } 2\pi \}$ 

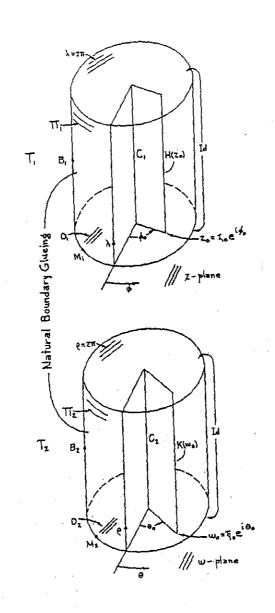


Fig.5.2.1 Representación Toroidal de S3.

entonces el mapeo  $\psi:T_1 \longrightarrow V_1$  definido por

 $\psi(\zeta \exp(i\phi), \sqrt{1-\zeta} \exp(i\lambda)) = (\zeta, \phi, \lambda)$ 

es un homeomorfismo el cual mapea la  $T_1$  fibra dada por  $z_0 = \zeta_0 \exp(i\phi_0)$  en la curva "paralela al eje":

 $\{ (\zeta,\phi,\lambda) \in V_1, 0 \le \lambda < 2\pi \}$ 

En la terminología de Seifert (Ver sección 5.4),  $T_1$  es entonces un toroide fibrado con fibras {  $H(z): 0 \le |z| \le 1/\sqrt{2}$  }. Sin hacer caso a su estructura de fibra,  $T_1$  es el producto topológico del 2-disco Euclideano  $D_1 = \{ z; 0 \le |z| \le 1/\sqrt{2} \}$  en el z-plano y la curva cerrada simple  $C_1 = \{ (z, w) \in T_1; |z| = 0 \}$  y es por tanto un toroide. (fig.5.2.1).

Un argumento similar puede aplicarse al subespacio  $T_2 \subseteq S^3$ . Si  $(z,w) \in T_2$ , entonces nuevamente por (5.2.3) y (5.2.4),  $1 = |z|^2 + |w|^2 \le 2|z|^2$ , así que  $1/\sqrt{2} \le |z| \le 1$  y  $0 \le |w| \le 1/\sqrt{2}$  Si  $w_0 = \xi_0 \exp(i\phi_0)$ , donde  $0 \le \xi_0 \le 1/\sqrt{2}$  y  $0 \le \theta_0 < 2\pi$  se mantienen fijos en el w-plano, entonces la z-coordenada de cada punto  $(z,w_0) \in T_2$  tiene módulo  $|z| = \sqrt{1-\xi_0^2}$ , así que  $z = \sqrt{1-\xi_0^2} \exp(i\rho)$  para  $0 \le \rho < 2\pi$ . Como antes, el subespacio  $K(w_0) = \{ (z,w_0) \in T_2 \}$  (la  $T_2$  fibra sobre  $w_0$ ) es una curva cerrada simple en  $T_2$ , y  $T_2$  es el producto topológico del 2-disco Euclideano  $D_2 = \{ w; 0 \le |w| \le 1/\sqrt{2} \}$  en el w-plano y la curva cerrada simple  $C_2 = \{ (z,w) \in T_2; |w| = 0 \}$ . (fig.5.2.1).

Considérese el subespacio  $T_1 \cap T_2 = \{ (z,w) \in S^3; |z| = |w| \}$ . Si  $(z,w) \in T_1 \cap T_2$ , entonces de (5.2.3)  $|z| = |w| = 1/\sqrt{2}$ , así que las superficies frontera  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , de los toroides  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente, cada una se identifica con el subespacio  $T_1 \cap T_2$ . De aquí, cada  $(z,w) \in T_1 \cap T_2$  tiene las representaciones  $(z,w) = (1/\sqrt{2} \exp(i\phi), 1/\sqrt{2} \exp(i\theta))$  como un punto en  $\Pi_1$  y  $(z,w) = (1/\sqrt{2} \exp(i\rho), 1/\sqrt{2} \exp(i\lambda))$  como un punto en  $\Pi_2$ . De esto se sigue que  $\phi \equiv \rho (\text{mod } 2\pi)$  y  $\lambda \equiv \theta (\text{mod } 2\pi)$  en las superficies frontera  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ . Escogiendo la curva meridional

 $M_1 = \{ |z| = 1/\sqrt{2}, \lambda = 0 \} = \{ (1/\sqrt{2} \exp(i\phi), 1/\sqrt{2}) \}$  y la curva longitudinal

 y la curva longitudinal

 $B_2 = \{ \theta = 0, |w| = 1/\sqrt{2} \} = \{ (1/\sqrt{2} \exp(i\rho), 1/\sqrt{2}) \}, \\ \text{de } T_2, \text{ y orientando esas curvas apropiadamente (fig. 5.24.1)} \\ \text{forma natural de "pegar" } \Pi_1 \text{ y } \Pi_2 \text{ satisface}$ 

 $\{ (1/\sqrt{2} \exp(i\phi), 1/\sqrt{2}) \} \sim \{ (1/\sqrt{2} \exp(i\phi), 1/\sqrt{2}) \}$   $\{ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \exp(i\theta)) \} \sim \{ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \exp(i\theta)) \}$  es decir,  $M_1 \sim B_2$  y  $M_2 \sim B_1$  (en  $\Pi_1 = \Pi_2$ ) (en Lo Su es símbolo ~ siempre significará "es homólogo a" ). Así obtenemos el siguiente

#### Lema 5.2.1

La 3-esfera  $S^3$  es el espacio obtenido al "pegar" las superficies frontera  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  de dos toroides  $T_1$  y  $T_2$  con las curvas meridional y longitudinal  $M_1$ ,  $B_1$  y  $M_2$ ,  $B_2$  respectivamente en forma tal que  $M_1$  -  $M_2$  y  $M_2$  -  $M_3$  (en  $M_1$  =  $M_2$ )

# 5.3 Representación toroidal inducida de L(p,q).

Considérese el efecto de definir el homeomorfismo h:S<sup>3</sup>  $\rightarrow$  S<sup>3</sup>, definido por (5.1..1), en los toroides  $T_1$  y  $T_2$  de la sección 5.2. Para cada  $(z,w) \in T_1$ ,  $(z,w) = (\zeta \exp(i\phi), \sqrt{1-\zeta^2} \exp(i\lambda))$ , donde  $0 \le \zeta \le 1/\sqrt{2}$  y  $0 \le \phi$ ,  $\lambda < 2\pi$ . De aquí

 $(z',w') = h(z,w) = (\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi qi/p)w)$ 

 $= (\ \zeta\ \text{exp}((\phi + 2\pi/p)i),\ \sqrt{1-\zeta^2}\ \text{exp}((\lambda + 2\pi q/p)i)\ ),$  as tenemos que  $|z'| = \zeta = |z|$ , y por lo tanto h mapea cada punto  $(z,w) \in T_1$  a un punto (z',w') el cual yace en el mismo cilindro concéntrico  $\{\ \zeta = \text{constante}\ \}$  de  $T_1$  al igual que (z,w). De esto observamos que el mapeo  $h|_{T_1}:T_1 \to T_1$  (la restricción de h a  $T_1$ ) es un homeomorfismo de  $T_1$  el cual rota cada cilindro concéntrico  $\{\ \zeta = \text{constante}\colon 0 < \zeta \le 1/\sqrt{2}\ \}$  un ángulo  $2\pi/p$  en la  $\phi$ -dirección y un ángulo  $2\pi/p$  en la dirección  $\chi$ , y la curva cerrada  $\chi$ 0 (El cilindro eje de  $\chi$ 1) un ángulo  $\chi$ 1 a curva cerrada  $\chi$ 2 (El cilindro eje de  $\chi$ 3) un ángulo  $\chi$ 4 a curva cerrada  $\chi$ 5 (Fig. 5.3.1). Similarmente, para cada  $\chi$ 6 en la  $\chi$ 7 dirección.



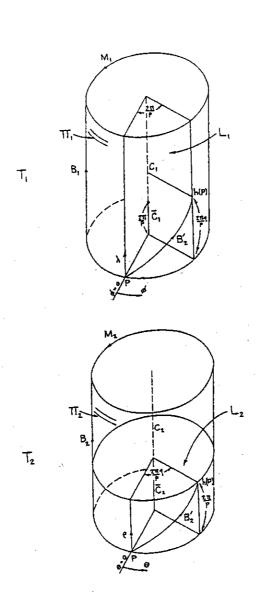
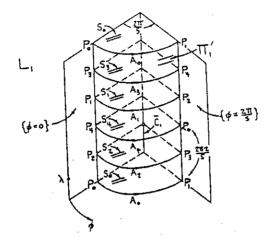


Fig.5.3.1. Acción de h sobre los Toroides de S<sup>3</sup>.

 $(z,w)=(\sqrt{1-\xi^2}\exp((\rho+2\pi/p)i),\ \xi\exp((\theta+2\pi q/p)i))$ . Como antes,  $h|_{T_2}$  es un homeomorfismo de  $T_2$  el cual rota cada cilindro concéntrico  $\{\ \xi=\text{constante}\colon\ 0<\xi\le 1/\sqrt{2}\ \}$  de  $T_2$  un ángulo  $2\pi q/p$  en la  $\theta$ -dirección, un ángulo  $2\pi/p$  en la  $\rho$ -dirección, y el cilindro-eje  $C_2=\{\ \xi=0\ \}$  de  $T_2$  un ángulo  $2\pi/p$  en la  $\rho$ -dirección. (Fig 5.3.1).

Sean  $L_1$  Y  $L_2$  las regiones fundamentales de la acción de  $G=\{I,\ h,\ h^2,\dots,\ h^{p-1}\}$  sobre los toroides  $T_1$  Y  $T_2$  respectivamente. Eligiendo apropiadas representaciones para  $L_1$  Y  $L_2$  en  $T_1$  Y  $T_2$ , la representación toroidal para L(p,q) es sugerida en la fig.(5.3.1). Considérense los toroides  $T_1$  Y  $T_2$  en la forma de cilindros circulares rectos como antes. Como h rota los puntos de  $T_1$  un ángulo  $2\pi/p$  en la  $\phi$ -dirección, elegimos como un representante para  $L_1$  el sector de  $T_1$  dado por  $\overline{L}_1$  U  $\overline{C}_1$ , donde  $\overline{L}_1=\{\ (\zeta,\phi,\lambda)\in T_1\colon 0<\zeta\le 1/\sqrt{2},\ 0\le\phi<2\pi/p\ \}$  Y  $\overline{C}_1=\{\ (\zeta,\phi,\lambda)\in T_1\colon \zeta=0,\ 0\le\lambda<2\pi/p\ \}$  (fig.5.3.2). Bajo las identificaciones inducidas en  $L_1$  (P es identificado con h(P),  $h^2(P),\dots$ ,  $h^{p-1}(P)$  },  $\lambda$  tomada módulo  $2\pi$  para  $\overline{L}_1$  Y módulo  $2\pi/p$  para  $\overline{C}_1$ ), las fronteras planas  $\{\phi=0\}$  Y  $\{\phi=2\pi/p\}$  son identificadas por un ángulo  $2\pi q/p$  en la  $\lambda$ -dirección y las áreas superior e inferior de  $L_1$  son identificadas sin torcer.

Sea  $S_k$  el sector circular de ángulo  $2\pi/p$  dado por la intersección de  $L_1$  con el disco {  $\lambda \equiv -\frac{2\pi q}{p}$  k (mod  $2\pi$ ) } para  $k=0,1,\ldots,p-1$ . Entonces por las identificaciones inducidas en  $L_1$ ,  $\overline{D}_1=\bigcup_{k=0}^{p-1}S_k$  es homeomorfo a un 2-disco euclideano, así que  $L_1=\overline{D}_1\times C_1$  y es por tanto un toroide con superficie frontera  $\Pi_1'=\Pi_1\cap L_1$  (Fig.5.3.2). Además  $\overline{D}_1$  es el disco  $D_1=\{\lambda=0\}$  de  $T_1$  tomado módulo el subespacio  $L_1$ , así que si  $A_k$  es el arco circular del sector circular  $S_k$  para todo  $k=0,1,\ldots,p-1$ , entonces la curva cerrada  $M_1'$  de  $L_1$  definida por  $A_0A_1\ldots A_{p-1}$  ( $M_1'$  es la curva cerrada  $P_0P_1P_2P_3P_4P_0$  de la Fig.5.3.2), es la curva meridional  $M_1=\{\zeta=1/\sqrt{2},\lambda=0\}$  de  $T_1$  módulo el subespacio  $L_1$ . La curva cerrada  $M_1'$  en la superficie frontera  $\Pi_1'$  de  $L_1$  está libre de puntos dobles y no es nulhomotópica en  $\Pi_1'$ , ya que de otro modo  $M_1$  sería



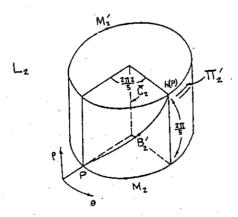


Fig.5.3.2. Regiones Fundamentales  $L_1$  y  $L_2$  para p = 5, q = 2

nulhomotópica en  $\Pi_1$  ý como tal no podría ser una curva meridional para  $T_1$ . Además, cada arco circular es deformable con  $L_1$  al punto  $\lambda \equiv -\frac{2\pi q}{p}$  k (mod  $2\pi$ ) sobre el eje  $C_1$  del toroide  $T_1$ , y todos los puntos que cumplen tal condición son identificados en el proceso de obtención del eje  $\tilde{C}_1$  del toroide  $L_1$  ( $C_1$  es identificado módulo  $2\pi/p$  para obtener  $C_1$ ). Por lo tanto la curva cerrada  $M_1 \equiv M_1 \pmod{L_1}$  es una elección adecuada de curva meridional para el toroide  $L_1$ .

Ya que h rota los puntos de  $T_2$  un ángulo  $2\pi/p$  en la  $\rho$ -dirección elegimos como un representante para  $L_2$  la sección de  $T_2$  dada por  $\{\ (\xi,\theta,\rho)\ \in\ T_2;\ 0\ \le\ \rho\ \le\ 2\pi/p\ \}\ (\text{Fig.5.3.2})$ . Bajo las identificaciones inducidas en  $L_2$  (P es identificado con h(p)), las áreas circulares  $\{\ \rho\ =\ 0\ \}$  y  $\{\ \rho\ =\ 2\pi/p\ \}$  de  $L_2$  son identificadas rotándolas un ángulo  $2\pi q/p$  en la  $\phi$ -dirección). Si  $\overline{C}_2$  es la curva cerrada a partir del eje toroidal de  $T_2$  por medio de la identificación inducida de  $\rho$  módulo  $2\pi/p$  y  $D_2$  es el 2-disco euclideano de  $T_2$  con superficie frontera  $T_2'=T_2\cap L_2$  (Fig.5.3.2) La curva cerrada  $M_2'=-M_2$  sobre  $T_2'$  es una elección adecuada de curva meridional para  $T_2$ . Sea  $T_2'$  la curva sobre  $T_2'$  que  $T_2'$  es una curva meridional para  $T_2'$ . Sea  $T_2'$  la curva sobre  $T_2'$  que va desde  $T_2'$   $T_2'$ 

 $pB_2' \sim B_2 + qM_2$  (sobre  $\Pi_2$ ) (5.3.1)

Donde B<sub>2</sub> es la curva longitudinal {  $\theta=0$ ,  $\xi=1/\sqrt{2}$  } de T<sub>2</sub> (Fig.5.3.2). Entonces por la identificación natural de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , la cual aparece en el Lema 1, B<sub>2</sub> ~ M<sub>1</sub> (en  $\Pi_1=\Pi_2$ ) así que por la relación de homología de (5.3.1) tenemos que

 $pB_2 \sim M_1 + qM_2 \quad (en \ \Pi_1 = \Pi_2). \qquad (5.3.2)$  Ahora, ya que  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  son las restricciones de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  a los subespacios  $L_1$  y  $L_2$ ,  $M_2 = -M_2$  es una curva meridional para  $L_2$ , y  $B_2$  es una curva cerrada en  $\Pi_2$  la cual está libre de puntos dobles y corta a  $M_2$  exactamente una vez, entonces de la relación de

homología (5.3.2) anterior,  $M_1 \sim pB_2' + qM_2' \quad (en \Pi_1' = \Pi_2'),$  (5.3.3)

dode  $B_2'$  es una curva longitudinal para  $L_2$ . Pero fue determinado anteriormente que la curva cerrada  $M_1' = M_1 \pmod{L_1}$  es una elección adecuada de curva meridional para  $L_1$ . Por tanto  $M_1$  (en  $\Pi_1'$ ) es idéntica a  $M_1'$  y así tenemos la siguiente representación toroidal

para L(p,q).

Teorema 5.3.1

El espacio lente L(p,q) es el espacio obtenido "pegando" las superficies frontera  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  de dos toroides  $T_1$  y  $T_2$  con curvas meridional y longitudinal  $M_1$ ,  $B_1$  y  $M_2$ ,  $B_2$  respectivamente en forma tal que

$$M_2 \sim pB_1 + qM_1 \quad (en \Pi_1 = \Pi_2).$$

Este teorema muestra también la equivalencia entre la definición para L(p,q) en éste capítulo y la definición del capítulo anterior, puesto que sus representaciones toroidales son exactamente las mismas.

## 5.4 El espacio fibra F de Seifert

Un espacio fibra de Seifert, (de aquí en adelante nos referiremes él símplemente como un espacio fibra), es una 3-variedad M conexa por caminos, en la cual un sistema S = { H } de curvas cerradas ha sido dibujado satisfaciendo; (a) para cada punto x e M existe exactamente una  $H \in S$  tal que  $x \in H$ , y (b) para cada  $H \in S$  existe un subconjunto  $\Omega_u \subseteq S$  tal que  $H \in \Omega_u$  y  $\Omega_u$  puede ser mapeado "fibra-verdadera" en un "Toroide fibrado" V. donde H es mapeado a la "fibra central" de V. M siempre será considerada compacta. Las curvas cerradas de S representan las fibras de M, y el subconjunto fibra vecindad de H. llamado una será espacios fibra significará fibra-verdadero entre dos homeomorfismo el cual mapea fibras en fibras, la caracterización medio de espacios fibra será hecha por de fibra-verdadero. Un toroide fibrado V es un cilindro circular recto en el espacio 3-Euclideano de altura 1 cuyas fibras son dibujadas paralelas al eje del cilindro, (la fibra central de V), y cuyas áreas circulares superior e inferior son identificadas a través de un ángulo  $2\pi\nu/\mu$ , donde  $\nu$  y  $\mu$  son enteros primos relativos (fig.6.1.1). No hay restricción al suponer que  $\mu$  > 0 y  $0 < \nu \le 1/2\mu$ , o si  $\mu$  es reemplazado por  $-\mu$ , y  $\nu$  por  $-\nu$  o  $\nu$  +  $k\mu$ (k es un entero), se ve fácilmente que el toroide fibrado resultante es fibra-verdadero con el original. El caso en que  $\mu$  = 1, el toroide fibrado V es llamado regular. En la sección anterior definimos una curva meridional para un toroide (no fibrado) V con superficie frontera II sin puntos dobles el cual es nulhomotópico con V pero no nulhomotópico en II, y una curva longitudinal para V como alguna curva cerrada B en II sin puntos dobles la cual intersecta a M exactamente una vez (fig.6.1.1). Las curvas M y B forman un un sistema fundamental de curvas en II en el sentido de que toda curva cerrada en II es homóloga a una combinación lineal de M y B con coeficientes enteros. El sistema fundamental de curvas se denota por {M, B}, una orientación de la superficie II es determinada siempre que asignemos orientaciones

(direcciones) a las curvas M y B. Además, si M' y B' curvas meridional y longitudinal para V arbitrariamente elegidas, entonces

$$M' \sim \pm M$$
 y  $B' \sim \pm B + xM$  (en  $\Pi$ ),

para x un entero. Las infinitas elecciones no homólogas para la curva longitudinal B' ocurren puesto que la definición de dicha curva no restringe el número de veces que B' se tuerce meridionalmente alrededor de V.

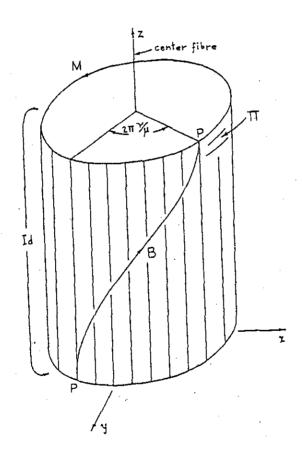


Fig. 6.1.1. Toroide Fibrado.

#### CONCLUSIONES

Hemos dado dos caracterizaciones para los espacios lente L(p,q), una por construcción y otra por medio de la acción de un particular grupo de homeomorfismos G actuando sobre  $s^3$ . Luego, a partir de estas caracterizaciones hemos obtenido otra representación para L(p,q), como el espacio que se obtiene al "pegar" dos toroides de manera adecuada. Estos resultados sirven como herramienta para obtener otros resultados que no hemos incluído en este trabajo pero que nos conducen a la clasificación topológica y homotópica de los espacios L(p,q). Algunos de dichos resultados son los siguientes:

- 1)  $\Pi_1(L(p,q)) = \mathbb{Z}_p$ . Es decir, el primer grupo de homotopía de L(p,q) es  $\mathbb{Z}_p$ .
- 2) El espacio cubriente universal de L(p,q) es S3.
- 3) Teorema de Clasificación Topológica.  $L(p,q) \approx L(p,q') \text{ si y sólo si } qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}.$  [Whitehend 1941].
- 4) Teorema de Clasificación del Tipo de Homotopía.  $L(p,q) \simeq L(p,q')$  si y sólo si  $qq' \equiv \pm b^2 \pmod{p}$  para algún  $b \in \mathbb{Z}$ .

### Bibliografía.

- [1] Andablo Reyes Gloria G.
  Tesis de Licenciatura:
  Algebra y Topología: Teorema de Seifert y Van Kampen.
  Universidad de Sonora, 1993.
- [2] Dudunji James.

  Topology.

  MacGraw Hill, Inc., 1966.
- [3] García Maynes Alberto. Topología General. Ed. Porrua, 1988.
- [4] Kelley John L. General Topology. The University Series in Higher Mathematics, 1955.
- [5] Kosniowski Czes.
  Topología Algebraica.
  Ed. Reverté, S.A, 1986.
- [6] Massey William. S.
  Introducción a la Topología Algebraica.
  Ed. Reverté, S.A, 1982.
- [7] Narvarte John Antony.
  Tesis Doctoral:
   Lens Spaces with Special Complex Coordinates.
  The University of Arizona, 1970.

