UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Aspectos analíticos del espacio de representaciones unitarias inducidas por acciones en espacios de probabilidad estándar

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Beatriz Ramonetti Valencia

Director de tesis: Dr. Jesús F. Espinoza

Hermosillo, Sonora, México   Diciembre de 2014

Sinodales

Dr. Agustín Brau Rojas
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

M.C. Rosalía Guadalupe Hernández Amador
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

A mis padres.
A mi hermano, gracias por volver.

Agradecimientos

Gracias a Dios por permitirme llegar a donde estoy hoy y por la familia que me has brindado, a la cual le agradezco infinitamente pues es lo más importante que tengo, por darme su apoyo incondicional, su comprensión y todo su amor en las buenas y en las malas, espero que se sientan orgullosos de mi.

Quiero agradecerle también a mi director, Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro, por su enseñanza, su paciencia y por haberme dedicado su tiempo, siempre con amabilidad y disposición. Es un gran honor trabajar con usted. Así como a M.C. Rosalía Guadalupe Hernández Amador, Dr. Agustín Brau Rojas, y Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa, quienes fueron integrantes del comité revisor de mi tesis, por el tiempo brindado para la corrección y comentarios.

Le doy las gracias a todos mis profesores y compañeros de la licenciatura por ayudarme a crecer personal y profesionalmente. Quiero agradecer a todos las personas que me han apoyado a lo largo de mi vida, por su compañía y amistad, no alcanzan las palabras para decir lo que significan para mi y lo feliz que soy de tenerlos en mi vida. Gracias por estar conmigo en todo momento.

Índice general

Introducción

La teoría de representaciones lineales de grupos ha tenido un importante impacto en diversas áreas de la matemática y las ciencias en general. En [12] puede encontrarse una excelente exposición sobre el desarrollo de esta teoría y las importantes aportaciones de sus fundadores.

Algunas aplicaciones a la ingeniería han sido estudiadas en [8], sobre construcciones con bielas y cables; así como en el diseño de redes telefónicas [5].

En la misma física-matemática hay bastante literatura de distintas aplicaciones de la teoría de representaciones. Por ejemplo en la *ecuación del calor* o la *ecuación de onda de Schrodinger*, [11]; en Mecánica se puede consultar [24], [18] y [28].

En cristalografía la teoría de representaciones encuentra un área muy rica en aplicaciones, debido a la rigidez de las transformaciones involucradas. Algunos artículos que se pueden consultar son [7] y [6], entre otros.

En teoría de nudos está [10], un área que recientemente ha sido utilizada para la modelación del ADN. Incluso en la hipótesis de Riemann, A. Connes mostró una aplicación de la teoría de representaciones, [9].

En este trabajo realizamos un análisis sobre la topología del espacio de representaciones unitarias de un grupo finito abeliano en un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. La motivación de este análisis radica en su relación con la construcción de ciertos espacios topológicos cuyas propiedades son importantes en topología algebraica, principalmente por el hecho de que el enfoque presentado en el último capítulo de este trabajo proporciona un enfoque alternativo a las técnicas tradicionalmente utilizadas en el estudio del espacio de representaciones unitarias para la construcción de espacios clasificantes (cf. [3] y [2]). El contenido de dicho capítulo se basa principalmente en [13] y [20].

A fin de establecer de una manera más precisa el resultado principal de [20], y que desarrollamos en el Capítulo 3, recordemos que si X es un conjunto y G es un grupo, se dice que G actúa sobre X si existe un homomorfismo entre el grupo G y el grupo de simetrías de X, esto es, el grupo (bajo la composición) de las funciones biyectivas $X \to X$. Luego, una representación lineal de un grupo G, sobre un espacio vectorial V, es un homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{Sim}(V) \\ g & \longmapsto & \rho_g \end{array}$$

donde $\mathrm{Aut}(V)$ denota el grupo de transformaciones lineales invertibles del espacio V en si mismo. Equivalentemente, una representación lineal consiste en una acción de G sobre V mediante transformaciones lineales e invertibles de V.

Cuando cada uno de los automorfismos $\rho_g : V \to V$ es un operador unitario, decimos que ρ es una representación unitaria.

Por otro lado, si (X, μ) es un espacio de probabilidad estándar, se dice que G actúa sobre X mediante automorfismos que preservan la medida, o bien, mediante μ-automorfismos si para cada $g \in G$ sucede que $X \xrightarrow{g} X$ es un automorfismo de Borel tal que $\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ para todo $g \in G$ y $A \subset X$ medible. Además, si (X, μ) es un espacio de probabilidad estándar, se define el siguiente espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita,

$$L_0^2(X,\mu) = \left\{ f \in L^2(X,\mu) : \int_X f \, d\mu = 0 \right\},$$

lo cual permite definir canónicamente el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(X,\mu) & \longrightarrow & \mathcal{U}(L_0^2(X,\mu)) \\ T & \longmapsto & U_T \end{array}$$

donde $T : X \to X$ es un μ-automorfismo de Borel y $U_T : L_0^2(X,\mu) \longrightarrow L_0^2(X,\mu)$ se define por $U_T(f) = f \circ T^{-1}$.

Si $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) := \{U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T^*T = TT^* = \mathrm{Id}\}$ es una representación unitaria sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, complejo, separable y de dimemsión infinita, diremos que ρ es *representable por una acción* si existe un espacio de probabilidad estándar (X, μ) y una acción $a : G \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tal que la representación inducida

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, dashed, "\kappa_0^a"] & \\ \mathrm{Aut}(X,\mu) \arrow[r, hook] & \mathcal{U}(L_0^2(X,\mu)) \end{tikzcd}$$

es unitariamente equivalente a ρ.

Originalmente, en [20, Prop. H.14], Alexander S. Kechris demuestra que si G es un grupo numerable y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces el conjunto de representaciones unitarias realizables por una acción de G en $\mathcal{H}$ es denso en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$. También demuestra que dicho conjunto es de primera categoría o residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, ya que es invariante bajo conjugación por elementos del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, y en el caso que G es un grupo abeliano libre de torsión entonces tal conjunto es de primera categoría.

En [20, Problem H.16], A. Kechris plantea el siguiente problema, aún abierto hasta el momento de la redacción de este trabajo:

Pregunta: Sean G un grupo infinito numerable y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita. ¿Es el conjunto de todas las representaciones unitarias de G, realizables por una acción, de primera categoría en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$?

Posteriormente, en [13], M. Doležal responde una variante de esta pregunta bajo la hipótesis de que G es un grupo abeliano y finito. El resultado obtenido por M. Doležal afirma de hecho, que tal subconjunto es residual, dando una respuesta negativa bajo las hipótesis mencionadas sobre el grupo.

Formalmente, el resultado obtenido por M. Doležal es el siguiente.

Teorema([13, Th. 2]). *Sea G un grupo abeliano finito y sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Entonces el conjunto*

$$\{\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \pi \textit{ es realizable por una acción}\}$$

es residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$.

De hecho, Doležal demuestra un resultado más fuerte, a saber que existe una representación $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ realizable por una acción, con una clase de equivalencia unitaria que es residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, i.e., el conjunto

$$[\pi] = \{\rho \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \pi \simeq \rho\}$$

es residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En el Capítulo 1 se introducen varios conceptos y resultados preliminares sobre topología y álgebra, que son usados en el resto del trabajo. En el Capítulo 2 presentamos una introducción a la teoría de representaciones lineales de grupos finitos y mostramos algunos ejemplos. Finalmente, en el Capítulo 3 se presenta el resultado principal antes mencionado y se concluye el capítulo con su demostración.

Capítulo 1

Preliminares de topología y álgebra

En este capítulo introducimos algunos conceptos y resultados que serán necesarios en los capítulos siguientes. El material aquí incluido puede consultarse con mayor detalle en [27] y [15].

1.1. Elementos de topología

Iniciaremos con alguna terminología estándar sobre espacios topológicos, topologías relativas, continuidad y topologías en espacios de funciones.

1.1.1. Espacios topológicos

Antes de introducir la definición de espacio topológico, recordemos que un **espacio métrico** es un conjunto S con una función $\rho : S \times S \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, llamada **métrica en** S, tal que para $s_1, s_2, s_3 \in S$ se cumple lo siguiente:

1) $\rho(s_1, s_2) = 0$ si y sólo si $s_1 = s_2$

2) $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$

3) $\rho(s_1, s_3) \leq \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$

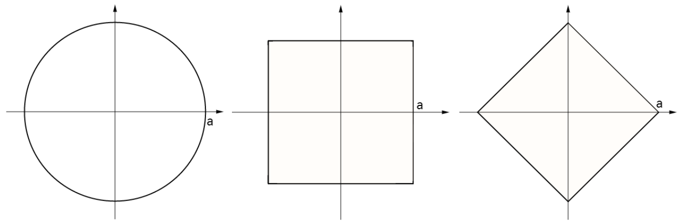
Si S es un espacio métrico, con métrica ρ, definimos para cada punto $s_0 \in S$ y $a \in \mathbb{R}^{+}$, la **bola de radio** a **centrada en** s_0, como el conjunto dado por:

$$\mathrm{B}_{s_0}(a) = \{s \in S \mid \rho(s, s_0) < a\}.$$

Ejemplo 1.1.1. Sea $S = \mathbb{R}^2$. Definimos tres métricas sobre S como sigue.
Para $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in S$,

$$\rho_1(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$\rho_2(P_1, P_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\},$$
$$\rho_3(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

La bola de radio a y centro en el origen depende de la métrica, como se muestra en la siguiente imagen. Note que la bola no tiene porque ser circular o tener una frontera suave.



$(1) : \rho_1(s,0) < a$ $(2) : \rho_2(s,0) < a$ $(3) : \rho_3(s,0) < a$

⧫

Las tres métricas le dan al plano tres distintas estructuras como espacio métrico. Por otro lado, la convergencia en el espacio es independiente de la métrica, esto es, de la forma de la bola, pero sí depende de que la bola sea *abierta*. Es justo esta propiedad sobre esta clase de subconjuntos la que motiva la definición de espacio topológico.

Definición 1.1.2. *Un **espacio topológico** es un conjunto S con una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de S ($\mathcal{T} \subseteq 2^S$) que satisface las siguientes condiciones:*

1) Vacío y total: $\varnothing, S \in \mathcal{T}$.

2) Intersección finita: Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

3) Unión arbitraria: Si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

*Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman **conjuntos abiertos** en S, y a $\mathcal{T}$ se le conoce como una **topología** en S.*

Por lo general se omite $\mathcal{T}$ y se menciona a S como un espacio topológico. Notemos que sobre todo conjunto S siempre es posible definir al menos dos topologías, las cuales son.

- Topología discreta: $\mathcal{T} = 2^S$
- Topología indiscreta: $\mathcal{T} = \{\varnothing, S\}$

Definición 1.1.3. *Sea $(S, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $A \subset S$ es **cerrado** si su complemento es un conjunto abierto, i.e., $S \backslash A \in \mathcal{T}$.*

La colección $\mathcal{C}$ que contiene a los conjuntos cerrados de S cumple las siguientes propiedades, que se derivan de las propiedades de los conjuntos abiertos:

1) *Vacío y total:* $\varnothing, S \in \mathcal{C}$.

2) *Unión finita:* Si $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$.

3) *Intersección arbitraria:* Si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}$ entonces $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}$.

Un topología se puede describir especificando la colección de conjuntos cerrados, o bien, la colección de conjuntos abiertos.

Definición 1.1.4. *Sea S un espacio topológico y sea $A \subset S$. Un punto $s \in S$ es un **punto límite** de A si para cada subconjunto abierto $U \subset S$, tal que $s \in U$, se tiene que*

$$(U - \{s\}) \cap A \neq \varnothing.$$

La **cerradura** de un conjunto es definida por

$$\overline{A} = A \cup \{s \in S \mid s \text{ es un punto límite de } A\}.$$

Proposición 1.1.5. *La cerradura $\overline{A}$ de un conjunto A es un conjunto cerrado.*

Demostración. Probaremos que el complemento de $\overline{A}$ es abierto. Sea $s \in X\backslash\overline{A}$. Entonces s no es punto límite de A, por lo que existe un conjunto abierto U_s tal que $s \in U_s$ y $(U_s - \{s\}) \cap A = \varnothing$. Además, $s \notin A$ porque $s \notin \overline{A}$ y por lo tanto

$$U_s \cap A = \varnothing.$$

Se sigue que U_s no contiene puntos límites de A y $U_s \cap X\backslash\overline{A} = \varnothing$, i.e.,

$$U_s \subset X\backslash\overline{A} \quad \forall s \in X\backslash\overline{A}.$$

Por otro lado como $s \in U_s$, $X\backslash\overline{A} \subset \bigcup_{s\in X\backslash\overline{A}} U_s$, y como $U_s \subseteq X\backslash\overline{A}$, $\bigcup_{s\in X\backslash\overline{A}} U_s \subset X\backslash\overline{A}$. Entonces

$$X\backslash\overline{A} = \bigcup_{s\in X\backslash\overline{A}} U_s$$

es unión de conjuntos abiertos, por lo tanto es un abierto.
■

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es **denso** en X si y sólo si $\overline{A} = X$. Luego, si X es un espacio topológico y $A \subset X$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) A es denso en X.

ii) $A \subset B$ y B es cerrado, entonces $B = X$.

iii) Para todo subconjunto abierto $V \subset X$ se tiene que si $A \cap V = \varnothing$ entonces $V = \varnothing$.

iv) $(X\backslash A)^\circ = \varnothing$.

La prueba de estos enunciados se puede encontrar en [14].

Un espacio topológico es **separable** si contiene un subconjunto que sea denso y numerable.

Un conjunto $\mathcal{B} \subset 2^S$ es una **base** para una topología de S si satisface las siguientes condiciones:

1) $\varnothing \in \mathcal{B}$.

2) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = S$.

3) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_0} B$ para algún $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.

Proposición 1.1.6. *Sea S un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para la topología en S. Entonces*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \in 2^S \mid U \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}\},$$

es una topología en S, la ***topología generada*** *por $\mathcal{B}$.*

Demostración. Por definición de base, tenemos que $\varnothing, S \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, que es la primera condición para ser una topología.
Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, entonces

$$V_1 \cap V_2 = \left(\bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_{V_1}} B_1 \right) \bigcap \left(\bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_{V_2}} B_2 \right) = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_{V_1}, B_2 \in \mathcal{B}_{V_2}} B_1 \cap B_2,$$

donde $\mathcal{B}_{V_1}, \mathcal{B}_{V_2} \subset \mathcal{B}$ para V_1, V_2 respectivamente y donde $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, por ser elementos de la base, que es la segunda condición para ser una topología.
Sea $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, entonces

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_V} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B,$$

donde $\mathcal{B}_V \subset \mathcal{B}$ para cada $V \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_0 = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{B}_V \subset \mathcal{B}$, que es la tercera condición para ser una topología. ■

En particular, si (S, ρ) es un espacio métrico, se puede demostrar que

$$\{B_s(a) \mid s \in S \text{ y } a \text{ es un real no negativo}\},$$

es una base para la **topología inducida por la métrica**.

De modo que todo espacio métrico tiene la estructura de espacio topológico donde los conjuntos abiertos son uniones de bolas.

Definición 1.1.7. *Sean S un conjunto y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases para topologías en S. Entonces $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes si generan la misma topología, i.e., si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$.*

Proposición 1.1.8. *Sean S un conjunto, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases para topologías en S. Entonces $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes si y sólo si:*

i) Para cada $s \in S$ y $B_1 \in \mathcal{B}_1$ con $s \in B_1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $s \in B_2 \subset B_1$, y

ii) Para cada $s \in S$ y $B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $s \in B_2$, existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $s \in B_1 \subset B_2$.

Demostración. Suponemos que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes y sea $s \in B_1 \in \mathcal{B}_1$. Entonces $B_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$, y

$$B_1 = \bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_{2_0}} B_2$$

para algún $\mathcal{B}_{2_0} \subset \mathcal{B}_2$. Por lo tanto, $s \in B_2 \subset B_1$ para algún $B_2 \in \mathcal{B}_{2_0} \subset \mathcal{B}_2$, lo cual prueba (i) y (ii) se prueba de manera análoga.
Recíprocamente, suponemos que se cumplen (i), (ii). Sea $B \in \mathcal{B}_1$, por (i), para cada $s \in B$ existe $B_s \in \mathcal{B}_2$ tal que $s \in B_s \subset B$. Ahora $B \subset \bigcup_{s \in B} B_s \subset B$, entonces

$$B = \bigcup_{s \in B} B_s \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2},$$

por lo que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}.$$

La otra contención se prueba de manera análoga usando (ii), y así $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$. ■

De lo anterior, se puede observar que las métricas ρ_1, ρ_2, ρ_3 del plano $\mathbb{R}^2$, descritas en el Ejemplo 1.1.1, determinan la misma topología en S.

Definición 1.1.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, una subfamilia $\mathcal{SB}$ de conjuntos abiertos en X es llamada **subbase** de X para la topología $\mathcal{T}$ si la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{SB}$ es una base de X para $\mathcal{T}$, o bien, una subbase para $(X, \mathcal{T})$.*

Los elementos de una subbase generalmente son llamados **elementos básicos**. Es importante ver que una subbase no puede generar dos topologías distintas, ya que $\mathcal{SB}$ genera una base única de $\mathcal{T}$ para X y dicha base genera una topología única $\mathcal{T}$ en X, como ya se vio anteriormente. Por el contrario, se pueden encontrar espacios topológicos con más de una subbase.

Ejemplo 1.1.10. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual, una subbase para este espacio es la familia de semi-rectas o rayos de $\mathbb{R}$, es decir:

$$\mathcal{SB} = \{\{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \{x \in \mathbb{R} : x > a\} : a \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora, sea $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, una subbase para este espacio es la siguiente familia:

$$\mathcal{SB} = \{\mathbb{R} \times (a, b),\ (a, b) \times \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

♦

Proposición 1.1.11. *Sea X un espacio topológico, sea $\mathcal{SB}$ una subbase de X y sea un subconjunto $A \subset X$. Entonces A es un conjunto abierto de X si y sólo si para cada $x \in A$ existe $S \in \mathcal{SB}$ tal que $x \in \mathcal{SB} \subset A$.*

Demostración. Suponemos que A es un conjunto abierto en X, como $\mathcal{SB}$ es una subbase de X entonces la familia $\mathcal{B}$ de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{SB}$ es una base de X. Esto es, existe $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Como $x \in A$ entonces $x \in \mathcal{B}_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$ donde $B_{i_0} = \bigcap_{j \in J} S_j$ con J finito y $S_j \in \mathcal{SB}$. Así, $x \in S_j \subseteq A$.
Recíprocamente, supongamos que para cada $x \in A$ existe $S_x \in \mathcal{SB}$ tal que $x \in S_x \subseteq A$, entonces

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} S_x \subseteq A.$$

Es decir, $A = \bigcup_{x \in A} S_x$ y como $\mathcal{SB}$ es subbase de X, entonces A es un conjunto abierto en X. ∎

1.1.2. Topología relativa

Si S es un espacio topológico y $A \subset S$, entonces la familia de subconjuntos

$$\{A \cap U : U \text{ es abierto en } S\}$$

es una topología en A, y se llama la **topología relativa en** A; en efecto,

- $A \cap \varnothing = \varnothing$ y $A \cap S = A$.
- $\bigcap_{i=1}^{n} (A \cap U_i) = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)$

- $\bigcup_{i\in I}(A\cap U_i) = A\cap(\bigcup_{i\in I}U_i)$

Cuando se trata de subespacios, se debe tener cuidado con especificar las topologías que se usan, porque se puede tener que un conjunto es abierto en una topología y no en otra.

Ejemplo 1.1.12. Sean $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros un subconjunto de $\mathbb{R}$. Consideremos en $\mathbb{Z}$ la topología relativa a la usual de $\mathbb{R}$, que coincide con la topología discreta en $\mathbb{Z}$.

♦

Proposición 1.1.13. *Sean S un espacio topológico y $A\subset S$. Si A es abierto en S, entonces todo conjunto abierto de A es abierto en S. Si A es cerrado en S, entonces todo conjunto cerrado de A es cerrado en S.*

Demostración. Si A es abierto en S y B es abierto en A, entonces $B = U\cap A$ para algún U abierto en S. Como A y U son abiertos en S, se sigue que B es abierto en S.
Ahora, si A es cerrado en S y B es cerrado en A, entonces $A\backslash B$ es abierto en A. Por lo que $A\backslash B = A\cap U$ para algún abierto U en S. Así,

$$B = A\backslash(A\backslash B) = A\backslash(A\cap U) = A\cap(S\backslash U).$$

Como A y $S\backslash U$ son cerrados en S, B es cerrado en S. ■

Proposición 1.1.14. *Sean S un espacio topológico, $Q\subset S$ con la topología relativa, y $P\subset Q$. Entonces la topología relativa $\mathcal{T}_1$ en P considerado como subconjunto de Q es la misma que la topología relativa $\mathcal{T}_2$ en P considerado como subconjunto de S.*

Demostración. Sea $A\subset P$. Entonces

$$\begin{aligned}
A\in\mathcal{T}_1 &\Leftrightarrow A = P\cap U && \text{para algún abierto } U\subset Q\\
&\Leftrightarrow A = P\cap(Q\cap U_0) && \text{para algún abierto } U_0\subset S\\
&\Leftrightarrow A = P\cap U_0 && \text{para algún abierto } U_0\subset S \text{ (pues } P\subset Q)\\
&\Leftrightarrow A\in\mathcal{T}_2.
\end{aligned}$$

■

1.1.3. Conexidad y compacidad

Un espacio topológico S se dice ser **conexo** si los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados son $\varnothing$ y S.

Proposición 1.1.15. *Un espacio topológico S es conexo si y sólo si no es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos.*

Demostración. Suponemos que S es conexo, y suponemos que $S = V_1\cup V_2$ con V_1, V_2 conjuntos abiertos tal que $V_1\cap V_2 = \varnothing$. Entonces $V_1 = S\backslash V_2$ y así V_1 es tanto abierto como cerrado. Como S es conexo, $V_1 = \varnothing$ ó $V_1 = S$. Si $V_1 = \varnothing$ entonces $V_2 = S$, y si $V_2 = \varnothing$ entonces $V_1 = S$.
Inversamente, suponemos que S no es unión de dos conjuntos disjuntos no vacíos. Sea $V\subset S$ un subconjunto abierto y cerrado. Entonces $S\backslash V$ es abierto y cerrado también, y S es la unión de conjuntos abiertos disjuntos V y V'. Entonces $V = \varnothing$ ó $V' = \varnothing$, y así, $V = \varnothing$ ó $V = S$, por lo que S es conexo. ■

Ejemplo 1.1.16. Los siguientes espacios son conexos:

1) Los intervalos en $\mathbb{R}$.

2) El espacio real $\mathbb{R}^n$ de dimensión n.

3) Cualquier bola en $\mathbb{R}^n$.

4) La esfera de dimensión n, para $n \geq 1$.

5) El toro de dimensión n, $T^n = S^1 \times \dots S^1$.

♦

Un subconjunto de un espacio topológico es conexo si es conexo con la topología relativa.

Proposición 1.1.17. *Sea S un espacio topológico, y sean $T_0, \{T_w\}_{w\in W}$ subconjuntos conexos de S. Suponemos que $T_0 \cap T_w \neq \varnothing$ para cada $w \in W$. Entonces $T_0 \cup (\bigcup_{w\in W} T_w)$ es conexo.*

Demostración. Sea $T := T_0 \cup (\bigcup_{w\in W} T_w)$. Suponemos que $T = V_1 \cup V_2$ para V_1, V_2 conjuntos abiertos disjuntos en T. Entonces para cada w, $V_1 \cap T_w$ y $V_2 \cap T_w$ son conjuntos abiertos disjuntos en T_w, y la unión es T_w. Como T_w es conexo, $V_1 \cap T_w = \varnothing$ ó $V_2 \cap T_w = \varnothing$. Del mismo modo, $V_1 \cap T_0 = \varnothing$ ó $V_2 \cap T_0 = \varnothing$.
Si $V_2 \cap T_0 = \varnothing$ entonces $V_1 \cap T_0 = T_0$. Así, $T_0 \subset V_1$, y como $T_0 \cap T_w \neq \varnothing$, $V_1 \cap T_w \neq \varnothing$ para cada $w \in W$. Entonces $V_2 \cap T_w = \varnothing$ para cada $w \in W$ y $V_1 \cap T_w = T_w$, y así, $T_w \subset V_1$ para toda $w \in W$. Por lo tanto, $V_1 = T_0 \cup (\bigcup_{w\in W} T_w)$ y $V_2 = \varnothing$. ■

La proposición anterior se puede usar para probar que $\mathbb{R}^n$ es conexo, dado que las líneas en $\mathbb{R}^n$ son conexas. En efecto, sean $T_0 = \{0\}$ y $\{T_w\}_{w\in W}$ el conjunto de líneas que pasan por el 0. Entonces $\mathbb{R}^n = T_0 \cup (\bigcup_{w\in W} T_w)$.

Definición 1.1.18. *Un espacio topológico S es* ***compacto*** *si cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita; esto es, si por cada cubierta abierta $\mathcal{V}$ existe un número finito de conjuntos $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{V}$ tal que $S = \bigcup_{j=1}^k V_j$.*

Ejemplo 1.1.19.

1) $\mathbb{R}^n$ no es compacto.

2) Los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, con la topología usual, son los subconjuntos cerrados y acotados. (Teorema de Heine-Borel).

♦

Sean X un espacio topológico y A una familia de subconjuntos de X. Decimos que A tiene la **propiedad de intersección finita** si para cada colección finita no vacía $\mathcal{F} \subset A$ se tiene que

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing.$$

Proposición 1.1.20. *Sea S un espacio topológico. Entonces S es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en S que tiene la propiedad de intersección finita, cumple con*

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \varnothing.$$

Demostración. Suponemos que S es compacto. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de S tal que

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \varnothing.$$

Por lo que

$$S = S\backslash\left(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(S\backslash F_\alpha).$$

Así, $\{S\backslash F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ define una cubierta abierta de S, pero como S es compacto existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in I$ tales que

$$S = \bigcup_{j=1}^{k}(S\backslash F_{\alpha_j}),$$

i.e., $\bigcap_{j=1}^{k} F_{\alpha_j} = \varnothing$. Entonces la familia $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de cerrados no puede tener la propiedad de intersección finita.
Inversamente, sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de S, entonces

$$\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha = S \quad \text{si y sólo si} \quad \bigcap_{\alpha\in I} S\backslash F_\alpha = \varnothing.$$

Como F_α es cerrado, $S\backslash F_\alpha$ es abierto para cada $\alpha \in I$. Suponiendo que la familia $\{S\backslash F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ no tiene la propiedad de intersección finita, exiten $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in I$ tales que

$$\bigcap_{j=i}^{k} S\backslash F_{\alpha_j} = \varnothing,$$

i.e., $\bigcup_{j=i}^{k} F_{\alpha_j} = S$. Por lo tanto, S es compacto. ■

Proposición 1.1.21. *Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto en su topología relativa.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de un espacio compacto S. Probaremos que A tiene la propiedad de la intersección finita, así, sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos cerrados de A que satisface la propiedad de intersección finita. Como A es cerrado y cada $F \in \mathcal{F}$ es cerrado en A, cada $F \in \mathcal{F}$ es cerrado en S.
Entonces $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos cerrados en S que satisfacen la propiedad de intersección finita. Como S es compacto, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing$. Pero $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \subset A$, i.e., A tiene la propiedad de la intersección finita. ■

Proposición 1.1.22. *Sea S un espacio topológico compacto. Entonces cada subconjunto infinito de S tiene un punto límite.*

Demostración. Probaremos que si $A \subset S$ no tiene un punto límite, entonces A es finito. Observemos primero los siguientes hechos:

i) Suponemos que $a \in A$. Como a no es un punto límite de A, existe un conjunto abierto $U_a \subset S$ tal que $a \in U_a$ y que $(U_a - \{a\}) \cap A = \varnothing$; esto es que $U_a \cap A = \{a\}$. Entonces cada $\{a\}$ es un conjunto abierto en la topología relativa de A y por lo tanto, A es un espacio con la topología discreta.

ii) Como A no tiene puntos límites entonces $A = \overline{A}$, i.e., A es cerrado. Por la Proposición 1.1.21, A es compacto.

iii) Sea $U_a = \{a\}$ para cada $a \in A$. Entonces por (i), $\{U_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A. Luego, por (ii), existe una subcubierta finita $\{U_1, \ldots, U_k\}$. Por lo tanto,

$$A = \bigcup_{j=1}^{k} U_{a_j} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

es finito.

■

1.1.4. Funciones continuas

Una clase particularmente importante de funciones entre espacios topológicos son aquellas que son compatibles, en cierto sentido, con las estructuras topológicas. Esta clase de funciones son llamadas *funciones continuas* y generalizan el concepto usual de continuidad en espacios métricos.

Definición 1.1.23. *Sean S y T espacios topológicos. Una función $f : S \to T$ es* ***continua*** *si la imagen inversa de un conjunto abierto es abierto; esto es, para cada conjunto abierto $U \subset T$, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en S.*

Proposición 1.1.24. *Sean S y T espacios topológicos. Sean $\mathcal{B}_S$ y $\mathcal{B}_T$ bases para las topologías de S y T respectivamente. Entonces $f : S \to T$ es continua si y sólo si para cada $s \in S$ y cada $V \in \mathcal{B}_T$ con $f(s) \in V$, existe un $U \in \mathcal{B}_S$ tal que $s \in U$ y $f(U) \subset V$.*

Demostración. Suponemos que f es continua. Si $s \in S$ y $f(s) \in V \in \mathcal{B}_T$, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en S y por lo tanto es unión de elementos de $\mathcal{B}_S$. Como $s \in f^{-1}(V)$, entonces s debe estar en uno de los elementos básicos, llamémoslo $U \in \mathcal{B}_S$. Entonces $U \subset f^{-1}(V)$, así, $f(U) \subset V$.
Recíprocamente, sea V_0 un abierto en T. Vamos a probar que $f^{-1}(V_0)$ es abierto en S. Sea $s \in f^{-1}(V_0)$, entonces $f(s) \in V_0$, y así $f(s)$ está en un básico $V_s \in \mathcal{B}_T$ con $V_s \subset V_0$. Por lo tanto, por hipótesis, existe un elemento básico $U_s \in \mathcal{B}_S$ tal que $s \in U_s$ y $f(U_s) \subset V_s \subset V_0$; esto es, $U_s \subset f^{-1}(V_0)$. Entonces

$$f^{-1}(V_0) = \bigcup_{s \in f^{-1}(V_0)} U_s$$

es abierto en S. ■

Proposición 1.1.25. *Sean S y T espacios topológicos. Sean $\mathcal{SB}_S$ y $\mathcal{SB}_T$ subbases para las topologías de S y T respectivamente. Entonces $f : S \to T$ es continua si y sólo si para cada $s \in S$ y cada $V \in \mathcal{SB}_T$ con $f(s) \in V$, existe un $U \in \mathcal{SB}_S$ tal que $s \in U$ y $f(U) \subset V$.*

La prueba de esta proposición se puede encontrar en [23].

Para espacios métricos, la Proposición 1.1.24 muestra que la definición de continuidad es equivalente a la definición usual con ε y δ.

De la definición de continuidad se sigue que si $g : R \to S$ y $f : S \to T$ son funciones continuas, entonces $f \circ g : R \to T$ es continua.

Proposición 1.1.26. *Sean S y T espacios topológicos y $f : S \to T$ una función continua y sobreyectiva. Si S es conexo, entonces T es conexo.*

Demostración. Suponemos que V_1, V_2 son conjuntos abiertos disjuntos en T con $V_1 \cup V_2 = T$. Entonces $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)$ son conjuntos abiertos disjuntos en S con $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = S$. Como S es conexo, $f^{-1}(V_1)$ ó $f^{-1}(V_2)$ es vacío. Pero como f es sobre, $f^{-1}(V_j) = \varnothing$ para $j = 1, 2$ implica que $V_j = \varnothing$. Entonces T es conexo. ■

En particular, del resultado anterior se sigue que si $f : S \to T$ es continua y S es conexo, entonces $f(S)$ es conexo.

Ejemplo 1.1.27. El resultado anterior nos sirve para probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real continua definida en el intervalo cerrado de a a b, con $f(x_1) > 0$ para algún $x_1 \in [a, b]$, y $f(x_2) < 0$ para algún $x_2 \in [a, b]$, entonces $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$.
En efecto, sea $T = f([a, b])$. Como $[a, b]$ es conexo, también lo es T. Pero si $0 \notin T$, entonces $T = (\mathbb{R}^- \cap T) \cup (\mathbb{R}^+ \cap T)$ es la unión de conjuntos abiertos disjuntos no vacíos. Por lo tanto $0 \in T$; esto es, $0 = f(x_0)$ para algún x_0.

♦

Ejemplo 1.1.28. Sea S^n la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$; esto es,

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}.$$

Entonces S^n es conexo para $n > 0$. En efecto, sea $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$ definida por

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum x_j^2}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{\sqrt{\sum x_j^2}} \right).$$

Luego, como $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, con $n > 1$, es conexo y f es continua y sobreyectiva, se sigue que S^n es conexo.

♦

Ejemplo 1.1.29. Sean $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ los conjuntos de matrices de tamaño $n \times n$, no singulares (invertibles) con entradas reales y complejas, respectivamente. Entonces, si se concatenan las filas de cada matriz en un sólo renglón, entonces $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se puede considerar como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$, por lo que es un espacio topológico como subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$ con su topología relativa. De manera similar, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es un espacio topológico. Note que $\mathbb{C}^{n^2}$ tiene la topología producto de $\mathbb{R}^2$, n^2–veces.
Ahora, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ no es conexo porque tomando

$$\Delta : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R} - \{0\},$$

la función determinante, Δ es continua y sobreyectiva. Como $\mathbb{R}-\{0\}$ no es conexo, tampoco lo es $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, por la Proposición 1.1.26.
Note que este argumento no se cumple con $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Como $\mathbb{C}-\{0\}=\mathbb{R}^2-\{0\}$ es conexo, no se puede utilizar la Proposición 1.1.26.

♦

Proposición 1.1.30. *Sean S y T espacios topológicos, y sea $f: S \to T$ una función continua y sobreyectiva. Si S es compacto, entonces T es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de T. Entonces $\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta de S. Como S es compacto, existe una subcubierta finita

$$\{f^{-1}(V_1),\ldots,f^{-1}(V_k)\}.$$

Como f es sobreyectiva, $f(f^{-1}(V_j)) = V_j$ para $j = 1,\ldots,k$. Como $\bigcup_{j=1}^k f^{-1}(V_j) = S$, entonces $\bigcup_{j=1}^k V_j = T$. Por lo tanto, T es compacto. ■

Del resultado anterior, se deduce en particular que si $f: S \to T$ es continua y S es compacto, entonces $f(S)$ es compacto.

Definición 1.1.31. *Sean S y T espacios topológicos. Una función $f: S \to T$ es llamada* ***homeomorfismo*** *si f es una función biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas. En este caso, lo denotamos por $S \cong T$.*

El hecho de que, f sea homeomorfismo, no sólo significa que f manda puntos de S a puntos de T de forma uno a uno, sino que f manda conjuntos abiertos de S en conjuntos abiertos de T de forma uno a uno. Esto nos dice que S y T son topológicamente equivalentes; esto es, cualquier propiedad topológica que tenga S, también la tiene T, y viceversa. Entonces si $f: S \to T$ es un homeomorfismo, S es conexo si y sólo si T es conexo; y S es compacto si y sólo si T es compacto.

1.1.5. Topologías en espacios de funciones

Con base a la notación y resultados de [14], denotaremos por $C(X,Y)$ el conjunto de las funciones continuas $f: X \to Y$. Aunque, en general, no podemos asignarle una métrica, sí podemos hacerlo si consideramos al subconjunto de $C(X,Y)$ de funciones acotadas sobre un espacio métrico (Y,d).

Ejemplo 1.1.32. Considere la función continua $f: X \to Y$, donde X es compacto y (Y,d) un espacio métrico. Como $f(X)$ es compacto, y con el Ejemplo 1.1.19 (2), se tiene que $f(X)$ es **acotado** en Y, esto es, existen $y_0 \in Y$ y $M > 0$ tales que

$$d'(f(x),y_0) < M$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto, se tiene que f es una función acotada.

♦

Definición 1.1.33. *Sea X un espacio topológico y sea (Y,d) un espacio métrico. Definimos el conjunto $C_A(X,Y)$ como el conjunto de funciones continuas y acotadas de X a Y.*

Notemos que si X es compacto, entonces $C_A(X,Y) = C(X,Y)$, como se puede observar en el Ejemplo 1.1.32.

1.1.5.1. La topología de la norma

Proposición 1.1.34. *El conjunto $C_A(X,Y)$ se puede metrizar a través de la* ***métrica uniforme****, que se define como*

$$d_u(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)).$$

Demostración. En primer lugar, se tiene que la función d_u está bien definida, ya que si f y g son dos funciones acotadas, entonces existen y_0, y_0' en Y, y $M, M' > 0$ tales que $d(f(x),y_0) < M$ y $d(g(x),y_0') < M'$ para todo $x \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(x),g(x)) &\leq d(f(x),y_0) + d(y_0,y_0') + d(g(x),y_0') \\ &< M + d(y_0,y_0') + M' = \overline{M} < \infty \end{aligned}$$

Ahora, verificamos que d_u es una métrica:

i) Como d es una métrica, entonces $d(f(x),g(x)) \geq 0$ para todo $x \in X$, por lo que entonces, si $f,g \in C_A(X,Y)$, $d_u(f,g) \geq 0$.
Además, si $f \neq g$, existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, y por lo tanto

$$d_u(f,g) \geq d(f(x_0),g(x_0)) > 0.$$

ii) $d_u(f,g) = d_u(g,f)$ es fácil de verificar ya que

$$d(f(x),g(x)) = d(g(x),f(x))$$

para todo $x \in X$.

iii) Si $f,g,h \in C_A(X,Y)$, entonces, para cada $x_0 \in X$,

$$d(f(x_0),g(x_0)) \leq d(f(x_0),h(x_0)) + d(h(x_0),g(x_0)),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} d(f(x_0),g(x_0)) &\leq \sup_{x\in X} d(f(x),h(x)) + \sup_{x\in X} d(h(x),g(x)) \\ &= d_u(f,h) + d_u(h,g) \end{aligned}$$

como $x_0 \in X$ es arbitrario,

$$d_u(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) \leq d_u(f,h) + d_u(h,g).$$

■

Un **espacio normado** es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X sobre $\mathbb{C}$ y una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, llamada **norma**, que cumple las siguientes propiedades para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

donde $|\cdot|$ denota el módulo complejo. Si no se exige la condición (2), la aplicación $||\cdot||$ se llama **seminorma**.

Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, si definimos la aplicación

$$d(x, y) := ||x - y||,$$

entonces (X, d) es un espacio métrico, de modo que todo espacio normado es un espacio métrico, sin embargo, no toda métrica se puede obtener de alguna norma. El siguiente resultado nos da condiciones para obtener una norma de una métrica.

Proposición 1.1.35. *Sea (X, d) es un espacio métrico, donde X es espacio vectorial. Si para todos $x, y, z \in X$, se cumple que:*

i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$

ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$

entonces se puede definir una norma en X, $||x|| = d(0, x)$. Además,

$$||x - y|| = d(0, x - y) = d(y, x) = d(x, y).$$

Demostración.

i) $||x|| = d(0, x) \geq 0$.

ii) $||x|| = 0$ si y sólo si $d(0, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

iii) $||\lambda x|| = d(0, \lambda x) = d(\lambda 0, \lambda x) = |\lambda| \cdot d(0, x) = |\lambda| \cdot ||x||$, donde se ha usado la Propiedad (ii).

iv)
$$\begin{aligned} ||x + y|| &= d(0, x + y) \\ &\leq d(0, x) + d(x, x + y) \\ &= d(0, x) + d(0, y) \\ &= ||x|| + ||y||, \text{ donde usamos } (i). \end{aligned}$$

■

De la Proposición 1.1.35 se sigue que el espacio métrico $(C_A(X, Y), d_u)$ es un espacio normado. En efecto, se sabe que para $f, g, h \in C_A(X, Y)$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} i) \quad d_u(f + h, g + h) &= \sup_{x \in X} d(f(x) + h(x), g(x) + h(x)) \\ &= \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \\ &= d_u(f, g) \\ ii) \quad d_u(\lambda f, \lambda g) &= \sup_{x \in X} d(\lambda f(x), \lambda g(x)) \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \\ &= |\lambda| \cdot d_u(f, g) \end{aligned}$$

Entonces podemos definir

$$||f|| = d_u(0, f).$$

Definición 1.1.36. *A la topología en $C_A(X,Y)$ inducida por la métrica d_u, se le conoce como* ***topología de la norma****.*

1.1.5.2. La topología compacto-abierto

Por otro lado, si X es un conjunto y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia de subconjuntos de X, donde cada A_α tiene una topología, entonces para cada $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$, se tiene:

1) La topología de A_α y A_β concuerda con la de $A_\alpha\cap A_\beta$.

2) Ya sea que $A_\alpha\cap A_\beta$ es abierto en A_α y en A_β, o bien $A_\alpha\cap A_\beta$ es cerrado en A_α y en A_β.

La topología débil en X determinada (o inducida) por $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se define por:

$$U \text{ es abierto en } X \text{ si y sólo si } U\cap A_\alpha \text{ es abierto en } A_\alpha \text{ para todo } \alpha\in\mathcal{A}.$$

Definición 1.1.37. *Sean X,Y espacios topológicos. Para cada par de conjuntos $K\subset X, A\subset Y$, definimos*

$$V_{K,A}=\{f\in C(X,Y): f(K)\subset A\}.$$

La topología ***compacto-abierto*** *en $C(X,Y)$ es la que tiene como subbase a todos los conjuntos $V_{K,A}$, donde $K\subset X$ es compacto y $A\subset Y$ es abierto.*

Se puede ver que $C(X,Y)$ es un espacio topológico invariante de X y Y; esto es, si $X\cong L$ y $Y\cong M$ entonces $C(X,Y)\cong C(L,M)$.

Como los conjuntos abiertos básicos en $C(X,Y)$ son intersecciones finitas de subbásicos, es útil observar que:

i) $\bigcap_{i=1}^n V_{K_i,A}=V_{\bigcup_{i=1}^n K_i,A}$.

ii) $\bigcap_{i=1}^n V_{K,A_i}=V_{K,\bigcap_{i=1}^n A_i}$.

iii) $\bigcap_{i=1}^n V_{K_i,A_i}\subset V_{\bigcup_{i=1}^n K_i,\bigcup_{i=1}^n A_i}$.

Sean X,Y,Z espacios topológicos. Para $f\in C(X,Y)$ y $g\in C(Y,Z)$, la composición $g\circ f\in C(X,Z)$ define una aplicación $C(X,Y)\times C(Y,Z)\to C(X,Z)$.

Para cada función $f:X\to Y$ fija y continua, la función $C(Y,Z)\to C(X,Z)$ tal que $g\mapsto g\circ f$ se llama **función inducida por** f. De manera similar, cada $g:Y\to Z$ induce la función $C(X,Y)\to C(X,Z)$ tal que $f\mapsto g\circ f$.

Proposición 1.1.38. *La aplicación $C(X,Y)\times C(Y,Z)\to C(X,Z)$ es continua, en la topología compacto-abierto, en cada argumento, esto es,*

i) $C(Y,Z)\to C(X,Z)$ tal que $g\mapsto g\circ f_1$, es continua para cada $f_1\in C(X,Y)$.

ii) $C(X,Y)\to C(X,Z)$ tal que $f\mapsto g_1\circ f$, es continua para cada $g_1\in C(Y,Z)$.

Demostración. Usaremos la caracterización de continuidad en términos de subbases.

i) Sea $g \in C(Y,Z)$ y sea $V_{K,A}$ un subbásico de $C(X,Z)$ que contiene a $g \circ f_1$. Notemos que $g \circ f_1 \in V_{K,A}$ si y sólo si $g \in V_{f_1(K),A}$. Como $f_1(K)$ es compacto, $V_{f_1(K),A}$ es un subbásico que contiene a g. Sea $h \in V_{f_1(A),V}$ entonces $h(f_1(A)) \subset V$. Como $h(f_1(A)) = (h \circ f_1)(A) \subset V$ entonces $h \circ f_1 \in V_{K,A}$.

ii) Se prueba de manera similar, viendo que $g_1 \circ f \in V_{K,A}$ es equivalente a $f \in V_{K,g_1^{-1}(A)}$.

■

Proposición 1.1.39. *Sean X, Z espacios topológicos y sea Y un espacio compacto. Entonces la función $C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$ es continua.*

Demostración. Sean $f_1 \in C(X,Y), g_1 \in C(Y,Z)$ y sea $V_{K,A}$ un subbásico de $C(X,Z)$ que contiene a $g_1 \circ f_1$. Como $g_1^{-1}(A) \subset Y$ es abierto y $f_1(K) \subset g_1^{-1}(A)$ es compacto, existe un abierto U tal que $f_1(K) \subset U \subset \overline{U} \subset g_1^{-1}(A)$.
Por lo que se tienen los siguientes abiertos $V_{K,U}, V_{\overline{U},A}$ que contienen a f_1, g_1, respectivamente. Además, sean $h_1 \in V_{K,U}$ y $h_2 \in V_{\overline{U},A}$ entonces $(h_1, h_2) \mapsto h_2 \circ h_1 \in V_{K,A}$. ■

La función $\omega : C(Y,Z) \times Y \to Z$ definido por $(f,y) \mapsto f(y)$ es llamada la **función evaluación** de $C(Y,Z)$.

Proposición 1.1.40.

i) Para cada $y_0 \in Y$ fijo, la función $\omega_{y_0} : C(Y,Z) \to Z$ tal que $f \mapsto \omega(f,y_0) = f(y_0)$, es continua.

ii) Si Y es compacto, entonces $\omega : C(Y,Z) \times Y \to Z$ es continua.

Demostración. Como ω se puede ver como la función composición $C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$ con X como un conjunto puntual; el resultado se obtiene de las Proposiciones 1.1.38 y 1.1.39. ■

Sean X, Y, Z espacios topológicos y sea $\alpha : X \times Y \to Z$ una aplicación continua en y para cada x fijo; así

$$(\widehat{\alpha}(x))(y) := \alpha(x,y) \tag{1.1}$$

define una aplicación $\widehat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$ tal que $x \mapsto \widehat{\alpha}(x)$.
Recíprocamente, dada $\widehat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$, la ecuación 1.1 define una aplicación $\alpha : X \times Y \to Z$ continua en y para cada x fija.
Las dos funciones, α y $\widehat{\alpha}$, relacionadas por (1.1), se llaman **asociadas**, y satisfacen las siguientes propiedades:

i) Si $\alpha : X \times Y \to Z$ es continua, entonces $\widehat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$ es continua.

ii) Si $\widehat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$ es continua y Y es compacto, entonces $\alpha : X \times Y \to Z$ es continua.

La demostración se puede encontrar en [14, p. 261].

Definición 1.1.41. *Un espacio de Hausdorff X se dice **compactamente generado** (o bien, $k-$espacio) si todo subespacio $A \subset X$ es cerrado en X si y sólo si, $A \cap K$ es cerrado en K para todo $K \subset X$ compacto.*

Corolario 1.1.42. *Si $\widehat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$ es continua y $X \times Y$ es un $k-$espacio, entonces $\alpha : X \times Y \to Z$ es continua.*

Demostración. Se puede probar que α es continua en todos los conjuntos $X \times B$, donde $B \subset Y$ es compacto. Usemos la función continua $i^+ : C(Y,Z) \to C(B,Z)$ inducida por la inclusión $i : B \to Y$, cada función en la secuencia

$$X \times B \xrightarrow{\widehat{\alpha}\times \mathrm{Id}} C(Y,Z) \times B \xrightarrow{i^+ \times \mathrm{Id}} C(B,Z) \times B \xrightarrow{\omega} Z$$

es continua. Ahora, α es continua en cada subconjunto compacto $C \subset X \times Y$, porque si $p : X \times Y \to Y$ es la proyección, entonces $p(C)$ es compacto y $C \subset X \times p(C)$. ■

1.1.6. Topología en espacios de Hilbert

Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}$ en X se dice que es **convergente** a $x \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

En este caso el punto x, necesariamente único, se dice que es el **límite** de la sucesión y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Definición 1.1.43. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es **de Cauchy** si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$, en otras palabras,*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Observemos que toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\geq 1}$ está acotada, ya que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < 1$, luego, si

$$r > \max\{1, d(x_N, x_i) \mid 1 \leq i \leq N-1\},$$

entonces $d(x_N, x_n) < r$ para todo $n \geq N$.

Por otro lado, toda sucesión convergente es de Cauchy, ya que si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x_0 en (X,d) entonces dado $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$, por lo que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $n, m \geq N$.

Un espacio métrico (X,d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en (X,d) es convergente.

Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado, tal que con la métrica inducida $d(x,y) = \|x-y\|$ es completo, esto quiere decir que es un espacio vectorial X sobre el campo $\mathbb{C}$ con una norma $\|\cdot\|$ tal que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Un **pre-espacio de Hilbert** es un espacio vectorial X sobre el campo $\mathbb{C}$, en el que está definida una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$, llamada **producto interior**, que cumple lo siguiente para todo $x, y, z \in X$:

1) $\langle x,x\rangle \geq 0$, y además $\langle x,x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

2) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$

3) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

4) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

Todo pre-espacio de Hilbert $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es normado con

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

y por lo tanto es también un espacio métrico.

Definición 1.1.44. *Un pre-espacio de Hilbert* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un* ***espacio de Hilbert*** *si el espacio métrico* (X,d) *es completo, donde*

$$d(x,y) = \|x-y\|,$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Ejemplo 1.1.45. Se tiene que ℓ^2 es un espacio de Hilbert, que se define como el siguiente espacio de funciones

$$\ell^2 := \mathrm{L}^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_1,x_2,\ldots) : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\},$$

y con el producto interior

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} |x_n \overline{y_n}|^2 .$$

♦

Si $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un pre-espacio de Hilbert, dos elementos $x,y \in X$ se dicen ser **ortogonales** cuando

$$\langle x,y\rangle = 0.$$

Lema 1.1.46. *Sea* $\{e_i\}_{i\in I}$ *un subconjunto ortonormal de un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Entonces la combinación lineal finita de elementos de* $\{e_i\}_{i\in I}$ *es denso en* $\mathcal{H}$.

Demostración. Sea $x = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j \in \mathcal{H}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\|x\|^2 = \sum_{j\in J} |\alpha_j|^2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j\geq N} |\alpha_j|^2 < \varepsilon$. Entonces

$$\left\| x - \sum_{j\leq N} \alpha_j e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j>N} \alpha_j e_j \right\|^2 = \sum_{j>N} |\alpha_j|^2 < \varepsilon,$$

por lo que son combinaciones lineales finitas de elementos de $\{e_i\}_{i\in I}$, que son densos en $\mathcal{H}$. ∎

Proposición 1.1.47. *Las siguientes condiciones en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *son equivalentes:*

i) $\mathcal{H}$ es separable.

ii) $\mathcal{H}$ admite una base ortonormal numerable.

Demostración. Suponemos que D es un subconjunto denso y numerable de $\mathcal{H}$ y suponemos que $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$. Así, si $i \neq j$ entonces $\|e_i - e_j\|^2 = 2$. Como D es denso en $\mathcal{H}$, para cada $i \in I$ se puede encontrar un vector $x_i \in D$ tal que $\|x_i - e_i\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por la propiedad de los elementos de la base, se tiene que la función $I \to D$ tal que $i \mapsto x_i$ es inyectiva; como D es numerable, se concluye que I también es numerable. Recíprocamente, si I es un conjunto numerable y si $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, sea D un conjunto cuyos elementos típicos son de la forma $\sum_{j\in J} \alpha_j e_j$, donde J es un subconjunto finito de I y los α_j son complejos cuyas partes reales e imaginarias son racionales; por lo que D es un subconjunto denso y numerable de $\mathcal{H}$. ∎

Dos espacios con producto interior E y F son linealmente isométricos si existe una función $A : E \to F$ tal que para todo $u, v \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cumple que:

1) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

2) $\|Au\| = \|u\|$.

El operador A se llama **isometría lineal**.

Proposición 1.1.48. *Cualquiera dos espacios de Hilbert separables de dimensión infinita (sobre $\mathbb{C}$) son linealmente isométricos.*

Demostración. Suponemos que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert separables de dimensión infinita con bases ortonormales $\{e_i\}_{i\in I}$ y $\{f_j\}_{j\in J}$ respectivamente. Para cada $h \in \mathcal{H}_1$ se define

$$Ah = \sum_k \langle h, e_k\rangle f_k.$$

La serie converge por que en [19] se prueba que al tener una base ortonormal, se cumple la igualdad de Parseval, la cual es

$$\|h\|^2 = \sum_k |\langle h, e_k\rangle|^2,$$

y por lo tanto se tiene que

$$\|Ah\|^2 = \sum_k |\langle h, e_k\rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Finalmente, $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, por lo que si $\widehat{h} \in \mathcal{H}_2$, entonces

$$\widehat{h} = \sum_k \langle \widehat{h}, f_k\rangle f_k = A\left(\sum_k \langle \widehat{h}, f_k\rangle e_k\right).$$

La misma prueba muestra que cada espacio de Hilbert de dimensión n (sobre $\mathbb{C}$) es linealmente isométrico a $\mathbb{C}^n$. Por lo que cada subespacio finito dimensionl de un espacio de Hilbert es cerrado. ∎

1.2. Elementos de álgebra

Introducimos a continuación algunos resultados y definiciones relacionados con la parte algebraica de este trabajo, tales como el concepto de grupo, homomorfismos, subgrupos y concluímos con el concepto de grupo topológico.

1.2.1. Definiciones y ejemplos

Sea G un conjunto no vacío. Una operación binaria $*$ en G es una función como la siguiente:

$$\begin{aligned} *: G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

La operación binaria $*$ es asociativa si para todo $a, b, c \in G$ tenemos

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Si $*$ es una operación binaria en G, decimos que $a, b \in G$ conmutan si

$$a * b = b * a$$

Decimos que la operación $*$, o bien G, es conmutativo si para todo $a, b \in G$, $a * b = b * a$.

Ejemplo 1.2.1.

1) En $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, la suma y multiplicación usual $(+, \times)$ son operaciones binarias conmutativas.

2) En $\mathbb{Z}$, la resta usual $(-)$ es una operación binaria no conmutativa pues $a - b \neq b - a$ para algún $a, b \in \mathbb{Z}$, por ejemplo $3 - 5 \neq 5 - 3$.

3) En $\mathbb{Z}^{+}, \mathbb{Q}^{+}, \mathbb{R}^{+}$, la resta usual $(-)$ no es una operación binaria.

4) El producto cruz de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es una operación binaria que no es asociativa ni conmutativa.

♦

Supongamos que $*$ es una operación binaria en el conjunto G y sea H un subconjunto de G. Si $*$ también es una operación binaria en H, se dice que H **es cerrado bajo** $*$. Observe que si $*$ es asociativa (respectivamente conmutativa) en G, y H es cerrado bajo $*$, entonces $*$ es asociativa (respectivamente conmutativa) en H.

Definición 1.2.2. *Si G es un conjunto no vacío y $* : G \times G \to G$ es una operación binaria, decimos que $(G, *)$ es un **grupo** si satisface las siguientes propiedades:*

1) *Asociatividad: Para todo a, b, $c \in G$ tenemos que $a * (b * c) = (a * b) * c$.*

2) *Elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$, para todo $g \in G$.*

3) *Existencia de inversos: Para cada $g \in G$, existe $h \in G$ tal que $g * h = h * g = e$. Por la propiedad que cumple h, se le denota por g^{-1}.*

Decimos que $(G, *)$ es abeliano o conmutativo si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.

Si tenemos al grupo $(G, *)$, podemos decir G es grupo bajo $*$, o bien que G es grupo cuando se entiende que la operación es $*$. Además, cuando G es finito, se dice que G **es un grupo finito**.

Ejemplo 1.2.3.

1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son grupos bajo $+$ con $e = 0$ y $g^{-1} = -g$, para todo $g \in G$.

2) $\mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{C} - \{0\}, \mathbb{Q}^{+}, \mathbb{R}^{+}$ son grupos bajo $\times$ con $e = 1$ y $g^{-1} = \frac{1}{g}$, para todo $g \in G$.

3) Los axiomas que cumplen los espacios vectoriales, los convierten en grupos abelianos con la suma. Así, $\mathbb{R}^n$ es un grupo aditivo.

4) Para $n \in \mathbb{Z}^{+}$, tenemos que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano bajo $+$, donde la operación es la adición de clases de *mod* n.

5) Para $n \in \mathbb{Z}^{+}$, tenemos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ es un grupo abeliano bajo $\times$, donde la operación es la multiplicación de clases de *mod* n.

6) Si $(A, *)$ y $(B, \star)$ son grupos, podemos formar un nuevo grupo $A \times B$ llamado **producto directo** y se define como el producto cartesiano de A y B con la siguiente operación:
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) := (a_1 * a_2, b_1 \star b_2),$$
el ejemplo más claro, sería tomar $A = B = \mathbb{R}$, ambos con $+$, para crear $\mathbb{R}^2$.

♦

Proposición 1.2.4. *Si G es un grupo bajo la operación $*$, entonces:*

i) *El elemento neutro de G es único.*

ii) *Para cada $g \in G$, existe un único inverso g^{-1}.*

iii) $(g^{-1})^{-1} = g$ *para todo* $g \in G$.

iv) $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ *para todo* $g, h \in G$.

v) *Para $g_1, \ldots, g_n \in G$, el valor de $g_1 * \ldots * g_n$ es independiente de como se encuentren asociados los elementos por paréntesis. Es la llamada **ley asociativa generalizada**.*

Demostración.

i) Si e_1 y e_2 son neutros de G, por (2) de la Definición 1.2.2 tenemos que $e_1 * e_2 = e_1$ y que $e_1 * e_2 = e_2$. Por lo que $e_1 = e_2$.

ii) Sea e el neutro de G y sean a y b inversos de $g \in G$. Por (3) de la Definición 1.2.2, $a * g = e$ y $g * b = e$. Así

$$\begin{aligned} a &= a * e \\ &= a * (g * b) \\ &= (a * g) * b \\ &= e * b \\ &= b \end{aligned}$$

iii) Debemos probar que $(g^{-1})^{-1} = g$ es decir que g es el inverso de g^{-1}. Como $g * g^{-1} = e$, si cambiamos g por g^{-1} tenemos que $g^{-1} * (g^{-1})^{-1} = e$. Pero sabemos que el inverso es único, por lo que $(g^{-1})^{-1} = g$.

iv) Sea $a = (g * h)^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} (g * h) * a = e &\Leftrightarrow g * (h * a) = e \\ &\Rightarrow g^{-1} * (g * (h * a)) = g^{-1} * e \\ &\Leftrightarrow (g^{-1} * g) * (h * a) = g^{-1} \\ &\Leftrightarrow e * (h * a) = g^{-1} \\ &\Leftrightarrow h * a = g^{-1} \\ &\Rightarrow h^{-1} * (h * a) = h^{-1} * g^{-1} \\ &\Leftrightarrow (h^{-1} * h) * a = h^{-1} * g^{-1} \\ &\Leftrightarrow e * a = h^{-1} * g^{-1} \\ &\Leftrightarrow a = h^{-1} * g^{-1} \end{aligned}$$

v) Para probar esto, utilizamos inducción sobre los subíndices de los elementos de G. Para $n = 1, 2$ se puede ver que sí se cumple la propiedad; para $n = 3$ se cumple por tratar con una operación binaria asociativa.
Luego, suponemos que para $n = k$, se cumple que el valor de $g_1 * \ldots * g_k$ es independiente de como se encuentren asociados los elementos por paréntesis.
Ahora, para $n = k + 1$, tenemos que ambos componentes del producto

$$(g_1 * \ldots * g_k) * (g_{k+1})$$

cumplen la proposición, gracias a la base y a la hipótesis de inducción. Por lo que se puede decir que

$$g_1 * \ldots * g_k * g_{k+1}$$

es independiente de como se encuentren asociados los elementos por paréntesis.

■

Cuando se tiene un grupo G en abstracto, es decir que no se especifica los elementos pero se hacen cálculos con ellos, se puede escribir ab en lugar de $a * b$, o también se puede escribir $a \cdot b$. Del mismo modo, al trabajar con tres elementos, no se necesita colocar los paréntesis, se escribe simplemente abc. Continuando con notación, podemos establecer que $e = 1$.

De la misma manera, al tener un producto $xx \cdots x$ (n−veces) con $x \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se puede escribir x^n. Igualmente para $x^{-1}x^{-1} \cdots x^{-1}$ (n−veces) es x^{-n}. Se tiene que $x^0 = 1$.

Ahora, si G es aditivo, la suma $x + x + \cdots + x$ (n−veces) con $x \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ se escribe nx. Igualmente para $x^{-1} + x^{-1} + \cdots + x^{-1}$ (n−veces) es $-nx$. Se tiene que $0x = 0$.

Proposición 1.2.5. *Sean G un grupo y $a, b \in G$. Las ecuaciones $ax = b$ y $ya = b$ tienen una única solución para $x, y \in G$. En particular, las leyes de cancelación por la derecha y por la izquierda se cumplen en G, i.e.,*

i) Si $au = av$ entonces $u = v$.

ii) Si $ub = vb$ entonces $u = v$.

Demostración. Podemos resolver $ax = b$ al multiplicar por la izquierda en ambos lados por a^{-1}, así $x = a^{-1}b$. Como a^{-1} es único, tenemos que x es único. De manera similar con $ya = b$, obtenemos $y = ba^{-1}$.
Ahora, con este procedimiento:

i) Si $au = av$, multiplicamos ambos lados en la izquierda por a^{-1}, y obtenemos $u = v$.

ii) De manera similar si $ub = vb$, multiplicamos ambos lados en la derecha por b^{-1}, y obtenemos $u = v$.

■

Para un grupo G y $x \in G$ se define el **orden** de x como el entero positivo n más pequeño tal que $x^n = 1$, y se denota $|x|$. En este caso, x es de orden n. Si x no tiene una potencia positiva que lo haga el elemento neutro, se dice que x es de orden infinito.

Es importante no confundir el símbolo de *orden* con el símbolo de *valor absoluto*.

Ejemplo 1.2.6.

1) Un elemento del grupo tiene orden 1 si y sólo si es el elemento neutro.

2) En los grupos aditivos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, los elementos distintos del neutro tienen orden infinito.

3) En los grupos multiplicativos $\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{Q} - \{0\}$, el -1 tiene orden 2 y los demás elementos distintos del neutro tiene orden infinito.

4) En el grupo aditivo $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, el elemento $\bar{6}$ es de orden 3, pues

$$\begin{aligned} \bar{6} &\neq \bar{0}, \\ \bar{6} + \bar{6} = \overline{12} = \bar{3} &\neq \bar{0}, \\ \bar{6} + \bar{6} + \bar{6} = \overline{18} &= \bar{0} \end{aligned}$$

5) En el grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$, los elementos $\bar{2}$ y $\bar{4}$ tienen orden 3,

$$\begin{aligned} \bar{2} \times \bar{2} \times \bar{2} = \bar{8} = \bar{1}, \\ \bar{4} \times \bar{4} \times \bar{4} = \overline{64} = \bar{1}, \end{aligned}$$

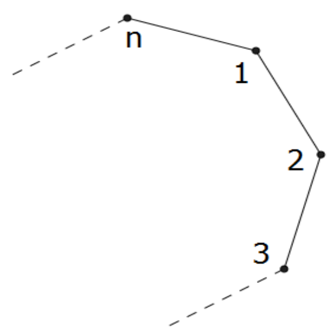
♦

El grupo diédrico

Una familia importante de ejemplos de grupos es la clase de grupos cuyos elementos son simetrías de objetos geométricos. La subclase más simple es cuando los objetos geométricos son figuras planas regulares.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 3$, sea D_{2n} el conjunto de simetrías de un $n-$ágono regular, donde una simetría es un movimiento rígido del $n-$ágono.

Más precisamente, podemos describir las simetrías eligiendo nombres para los n vértices, como en la siguiente imagen.



Luego, cada simetría s puede describirse únicamente por la permutación correspondiente σ de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ donde la simetría s manda el vértice i a donde estaba el vértice j, i.e., σ manda el i al j.

Se puede decir que si s es una rotación de $\frac{2\pi}{n}$ radianes con sentido de las manecillas del reloj sobre el centro del $n-$ágono, entonces σ es un permutación que manda el i al $i+1$, donde $1 \leq i \leq n-1$ y $\sigma(n) = 1$.

Ahora, D_{2n} es un grupo definiendo la operación st tomando $s, t \in \mathrm{D}_{2n}$ para crear la simetría que es aplicar primero t y después s al $n-$ágono. Si s, t describen a σ, τ respectivamente, aplicar st es aplicar $\sigma \circ \tau$ a los vértices del $n-$ágono.

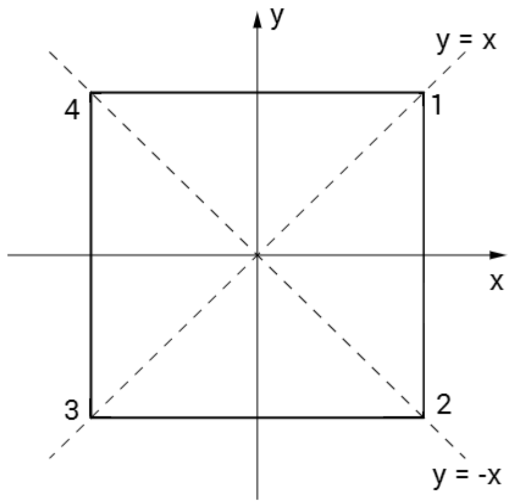
La operación binaria en D_{2n} es asociativa pues la composición de funciones es asociativa. El elemento neutro de D_{2n} es la simetría identidad que deja fijos los vértices, se denota por 1. El elemento inverso de $s \in \mathrm{D}_{2n}$ es la simetría que regresa lo que hizo s, i.e., s^{-1} que describe a σ^{-1}.

Al grupo D_{2n} se le llama el **grupo diédrico** de orden $2n$. En algunos textos se denota D_n, y podemos ver que el subíndice nos dirá el orden del grupo. Para verificar que el orden del grupo es $2n$, observemos que dado cualquier vértice i existe una simetría que lleva el vértice 1 al vértice i, como el vértice 2 sigue al vértice 1 es enviado al vértice $i+1$ o $i-1$.

Por lo que existen $2n$ posiciones para ordenar el par de vértices $1, 2$, ya que las simetrías son moviemientos rígidos. Tomemos en cuenta que $n+1 = 1$ y $1-1 = n$, i.e., los enteros que nombran los vértices se leean en $mod n$.

De las $2n$ simetrías, tenemos n rotaciones sobre el centro cada $\frac{2\pi i}{n}$ radianes, con $0 \leq i \leq n-1$. También tenemos n reflecciones sobre las n líneas de simetría. Si n es impar, cada línea de simetría pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto, si n es par, hay $n/2$ líneas de simetría que pasan por 2 vértices opuestos y $\frac{n}{2}$ que pasan perpendicularmente por 2 lados opuestos.

Ejemplo 1.2.7. Si tomamos $n = 4$, podemos dibujar un cuadrado centrado en el origen del plano xy. Las líneas de simetría serían los ejes x, y y las rectas $y = x, y = -x$.



♦

Fijemos al n−ágono regular centrado en el origen del plano xy y nombremos los vértices del 1 al n con el sentido de las manecillas del reloj. Sea r la rotación sobre el origen por $\frac{2\pi}{n}$ radianes, con el sentido de las manecillas del reloj. Sea s la reflección sobre la línea de simetría que pasa por el vértice 1 al origen.

Ejemplo 1.2.8.

1) $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ son distintas, y $r^n = 1$, por lo que $|r| = n$.

2) $|s| = 2$.

3) $s \neq r^i$, para cualquier i.

4) $sr^i \neq sr^j$, para toda $0 \leq i \neq j \leq n-1$, así

$$\mathrm{D}_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

i.e., cada elemento se puede escribir de manera única como $s^k r^i$, con $k \in \{0, 1\}$ y $0 \leq i \leq n-1$.

5) $rs = sr^{-1}$, lo cual indica que D_{2n} no es abeliano.

6) $r^i s = sr^{-i}$, lo cual indica como conmuta s con las potencias de r.

♦

Teniendo estos resultados, se puede tener completa la tabla de multiplicación del grupo D_{2n} en términos de r y s, ya que cada elemento tiene una representación única en base de potencias de r y s, y de su producto.

Un subconjunto S de un grupo G con la propiedad de que cada elemento de G se puede escribir como el producto finito de elementos de S se dice ser **conjunto de generadores de** G. Se denota $G = \langle S \rangle$ para indicar que G es generado por S o que S genera a G.

Ejemplo 1.2.9.

1) Decimos que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ pues cada entero es suma de +1's ó −1's.

2) En D_{2n}, r y s son los generadores, esto es $\mathrm{D}_{2n} = \langle r, s \rangle$.

♦

Cualquier ecuación en un grupo G que cumplan los generadores, se llaman **relaciones**. Por lo que se denota al grupo de la siguiente manera:

$$G = \langle S \mid R_1, R_2, \ldots, R_m \rangle$$

donde S genera a G y $R_1, R_2, \ldots, R_m$ son las relaciones en G. Cuando se tiene a G descrita de esta manera, se le conoce como una **presentación del grupo** G.

Ejemplo 1.2.10. En D_{2n} tenemos las siguientes relaciones:

$$r^n = 1 \quad , \quad s^2 = 1 \quad , \quad rs = sr^{-1}$$

Además, estas relaciones tienen una propiedad adicional, que cualquier otra relación entre elementos del grupo es derivada de alguna de estas tres.
Por lo que una presentación de D_{2n} es:

$$\mathrm{D}_{2n} = \langle r, s \mid r^n = 1,\ s^2 = 1,\ rs = sr^{-1} \rangle$$

♦

El grupo simétrico

Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathrm{Sim}(X)$ el conjunto de todas las biyecciones de X a sí mismo, i.e., el conjunto de todas las **permutaciones de** X.

El conjunto $\mathrm{Sim}(X)$ es un grupo bajo la composición de funciones, y es llamado el **grupo simétrico del conjunto** X. Veamos que efectivamente tiene una estructura de grupo: Primero observemos que el ser composición de funciones biyectivas nuevamente es una biyección, la operación es cerrada en $\mathrm{Sim}(X)$.

Luego si $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathrm{Sim}(X)$ y $x \in X$, entonces

1. *Asociatividad:*
$$\begin{aligned} (\Phi_1 \circ (\Phi_2 \circ \Phi_3))(x) &= \Phi_1((\Phi_2 \circ \Phi_3)(x)) \\ &= \Phi_1(\Phi_2(\Phi_3(x))) \\ &= (\Phi_1 \circ \Phi_2)(\Phi_3(x)) \\ &= ((\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ \Phi_3)(x) \end{aligned}$$
Así, $\Phi_1 \circ (\Phi_2 \circ \Phi_3) = (\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ \Phi_3$

2. *Elemento neutro:* Existe la simetría $\mathrm{Id} := \Phi_e(x) = x$.

3. *Existencia de inversos:* Como se vio anteriormente, se tiene la existencia de inversos para cada elemento de $\mathrm{Sim}(X)$ gracias a la existencia de inversos para cada elemento de G. Así,
$$\Phi_g^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$$

Es importante ver que los elementos de $\mathrm{Sim}(X)$ son permutaciones de X, no elementos de X.

Ejemplo 1.2.11. Cuando X es el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, se suele denotar $\mathrm{Sim}(X)$ por S_n. Veamos que el orden de S_n es $n!$. Como X es finito, nos podemos fijar solamente en las funciones inyectivas de X en sí mismo.
Una función inyectiva σ puede enviar al 1 a cualquiera de los n elemenos de X. Luego, $\sigma(2) \in \{1, \dots, n\} - \{\sigma(1)\}$, i.e., puede ser cualquiera de los $n-1$ elementos restantes. Después, $\sigma(3)$ puede ser cualquiera de los $n-2$ elementos restantes. Y así continúa, por lo que existen $n!$ funciones inyectivas posibles de X en sí mismo.

♦

Vamos a describir una notación más conveniente al momento de calcular permutaciones, así los elementos de S_n quedarán expresados por su **descomposición en ciclos**.

Definición 1.2.12. *Un **ciclo** es una cadena de enteros que representan los elementos de S_n, los enteros permutan cíclicamente y fijan a los que no se encuentran en la cadena.*

Ejemplo 1.2.13. El ciclo $(a_1\ a_2\ \dots\ a_m)$ representa la permutación que envía el a_i al a_{i+1} con $1 \le i \le m-1$ y el a_m al a_1. Por ejemplo el ciclo $(2\ 1\ 3)$ es la permutación que envía $2 \mapsto 1$, $1 \mapsto 3$ y $3 \mapsto 2$.

♦

En general, para cada $\sigma \in \mathrm{S}_n$, los números del 1 al n serán reorganizados y agrupados en k ciclos de la siguiente forma:

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_{m_1})(a_{m_1+1}\ a_{m_1+2}\ \dots\ a_{m_2})\dots(a_{m_{k-1}+1}\ a_{m_{k-1}+2}\ \dots\ a_{m_k})$$

a partir de la cual la acción de σ en los número del 1 al n se puede leer fácilmente. El producto de estos ciclos es la llamada **descomposición en ciclos de** σ.

Ejemplo 1.2.14. Sea $n = 13$ y sea $\sigma \in \mathrm{S}_{13}$ definida por

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma(1) = 12 & , & \sigma(2) = 13 & , & \sigma(3) = 3 & , & \sigma(4) = 1 & , & \sigma(5) = 11 \\ \sigma(6) = 9 & , & \sigma(7) = 5 & , & \sigma(8) = 10 & , & \sigma(9) = 6 & , & \sigma(10) = 4 \\ \sigma(11) = 7 & , & \sigma(12) = 8 & , & \sigma(13) = 2 & & & & \end{array}$$

Por lo que su descomposición en ciclos es la siguiente:

$$(1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$$

♦

La **longitud** de un ciclo es el número de enteros que están en él, un ciclo de longitud k es un $k-$ciclo. Además, dos ciclos se llaman **disjuntos** si no tienen ningún entero en común.

Se considera que los $1-$ciclos no se escriben, así se facilita aún más la escritura y lectura de las permutaciones. Por lo que la identidad en S_n se escribe como 1, pues la permutación es $(1)(2)\dots(n)$.

Ejemplo 1.2.15. Veamos los 6 elementos de S_3 y sus descomposiciones en ciclos.

$$\begin{array}{llllll}
\sigma_1(1)=1, & \sigma_1(2)=2, & \sigma_1(3)=3 & \Leftrightarrow & \sigma_1 = 1 \\
\sigma_2(1)=1, & \sigma_2(2)=3, & \sigma_2(3)=2 & \Leftrightarrow & \sigma_2 = (2\ 3) \\
\sigma_3(1)=3, & \sigma_3(2)=2, & \sigma_3(3)=1 & \Leftrightarrow & \sigma_3 = (1\ 3) \\
\sigma_4(1)=2, & \sigma_4(2)=1, & \sigma_4(3)=3 & \Leftrightarrow & \sigma_4 = (1\ 2) \\
\sigma_5(1)=2, & \sigma_5(2)=3, & \sigma_5(3)=1 & \Leftrightarrow & \sigma_5 = (1\ 2\ 3) \\
\sigma_6(1)=3, & \sigma_6(2)=1, & \sigma_6(3)=2 & \Leftrightarrow & \sigma_6 = (1\ 3\ 2)
\end{array}$$

♦

Para cualquier $\sigma \in S_n$, la descomposición en ciclos de σ^{-1} se obtiene escribiendo cada ciclo de la descomposición en ciclos de σ pero en el orden inverso.

Ejemplo 1.2.16. Si $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$ es un elemento de S_{13}, se tiene

$$\sigma^{-1} = (4\ 10\ 8\ 12\ 1)(13\ 2)(7\ 11\ 5)(9\ 6).$$

♦

Otro detalle que debemos mantener en mente es que el producto de permutaciones (o composición de ellas) se debe leer de derecha a izquierda.

Ejemplo 1.2.17. Sea el producto de las permutaciones $\sigma = (1\ 2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2)(3\ 4)$. Por lo que en $\sigma \circ \tau = (1\ 2\ 3) \circ (1\ 2)(3\ 4)$ se ve que τ manda el 1 al 2 y σ manda el 2 al 3, por lo que $\sigma \circ \tau$ manda el 1 al 3. Siguiendo con los demás números, llegamos a que

$$\sigma \circ \tau = (1\ 3\ 4).$$

♦

Ejemplo 1.2.18. Sean $\sigma = (1\ 2)$ y $\tau = (1\ 3)$. Entonces:

$$(1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 3\ 2) \quad \text{y} \quad (1\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 2\ 3)$$

Lo que muestra que S_n no es un grupo abeliano para todo $n \geq 3$.

♦

La descomposición en ciclos de las permutaciones es única, siempre y cuando se tratan de ciclos ajenos. Por otro lado, un mismo ciclo puede escribirse de diferentes maneras, ya que los enteros permutan cíclicamente:

$$\begin{aligned}
(a_1\ a_2\ \ldots\ a_m) &= (a_2\ a_3\ \ldots\ a_m\ a_1) \\
&= (a_3\ a_4\ \ldots\ a_m\ a_1\ a_2) \\
&= \ldots \\
&= (a_m\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{m-1})
\end{aligned}$$

Pero por convención, se escribe el entero más pequeño al principio.

1.2.2. Homomorfismos de grupos

En el contexto de teoría de grupos, la clase particularmente importante de aplicaciones entre dos grupos, es aquella de las aplicaciones compatibles con la estructura algebraica, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 1.2.19. *Sean $(G,*)$ y $(H,\star)$ grupos. Una función $\varphi : G \to H$ tal que*

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \star \varphi(y) \quad \text{para toda } x, y \in G$$

*se llama **homomorfismo**.*

Cuando los grupos G y H no tienen una operación explícita, se puede escribir

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pero se debe tener claro que xy representa el producto en G y $\varphi(x)\varphi(y)$ el producto en H.

Definición 1.2.20. *Una función $\varphi : G \to H$ es llamada **isomorfismo** si*

1) φ es homomorfismo, y

2) φ es biyectivo.

En cuyo caso, G y H se dicen ser isomorfos, i.e., $G \cong H$.

Intuitivamente, los grupos G y H que son isomorfos, son el mismo grupo, excepto que los elementos y las operaciones se escriben de distinta manera. Entonces cada propiedad que tiene G depende sólo en la estructura de grupo de G, y se cumple en H.

Ejemplo 1.2.21.

1) Para todo grupo G, $G \cong G$. La función identidad nos da un isomorfismo, pero no necesariamente es el único.

2) La función exponencial $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definido por $x \mapsto e^x$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathbb{R}^+, \times)$.

3) Se prueba que el isomorfismo entre grupos simétricos sólo depende de la cardinalidad del conjunto a permutar. Se va a probar para el caso finito:
Sean X y Y conjuntos no vacíos. Probaremos primero que S_X y S_Y son isomorfos si $|X| = |Y|$. En efecto, podemos ver que si $|X| = |Y|$, entonces existe una biyección θ de X en Y. El cual envía $x \in X$ a $\theta(x) \in Y$.
Para obtener la función $\varphi : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_Y$, sea $\sigma \in \mathrm{S}_X$ una permutación de X y sea $\varphi(\sigma)$ una permutación en Y, así, si $\sigma(x_1) = x_2$ con $x_1, x_2 \in X$ entonces $\varphi(\sigma)(\theta(x_1)) = \theta(x_2)$.
También se tiene que si $\mathrm{S}_X \cong \mathrm{S}_Y$, entonces $|X| = |Y|$. Como $\mathrm{S}_X \cong \mathrm{S}_Y$ entonces $|\mathrm{S}_X| = |\mathrm{S}_Y|$. Si $|\mathrm{S}_X| = n!$ y $|\mathrm{S}_Y| = m!$ entonces $n! = m!$, i.e., $n = m$ y así $|X| = |Y|$.

♦

Para determinar qué propiedades de una estructura se conservan bajo isomorfismos se usan los **teoremas de clasificación**. Se puede determinar cuáles objetos matemáticos (grupos) son isomorfos sin tener una función explícita.

Generalmente es difícil determinar cuando dos grupos son isomorfos. Hay ocasiones donde es más fácil determinar cuándo dos grupos no son isomorfos.

Ejemplo 1.2.22. Si $\varphi : G \to H$ es un isomorfismo, entonces en particular se tiene lo siguiente:

1) G y H tienen la misma cardinalidad, i.e., $|G| = |H|$.

2) G es abeliano si y sólo si H es abeliano.

3) x y $\varphi(x)$ tienen el mismo orden, i.e., $|x| = |\varphi(x)|$, para toda $x \in G$.

♦

Sea G un grupo finito de orden n y con $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ un conjunto de generadores de G. Sea H otro grupo y sean $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ elementos de H. Suponga que cada relación que se satisface en G por s_i también se satisface en H cuando cada s_i se reemplaza por r_i.

Entonces hay un único homomorfismo $\varphi : G \to H$ que evía $s_i \mapsto r_i$. Si tenemos una presentación de G, sólo necesitamos verificar las relaciones de G y verificar que cumplan en H al hacer la sustitución.

Si H es generado por $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, φ es sobreyectivo. Si además H tiene el mismo orden que G, entonces φ es inyectivo. Así, tenemos un isomorfismo, i.e., $G \cong H$.

Ejemplo 1.2.23.

1) Recordemos a $\mathrm{D}_{2n} = \langle r, s \mid r^n = 1,\ s^2 = 1,\ sr = r^{-1}s\rangle$. Suponga que H es un grupo que contiene a los elementos a y b con $a^n = 1$, $b^2 = 1$ y $ba = a^{-1}b$. Entonces existe un homomorfismo de D_{2n} a H que manda $r \mapsto a$ y $s \mapsto b$. Daremos un homomorfismo explícitamente.
Tomando $k \in \mathbb{Z}$ tal que divide a n y $k \geq 3$, sea $\mathrm{D}_{2k} = \langle r_1, s_1 \mid r_1^n = s_1^2 = 1,\ s_1 r_1 = r_1^{-1} s_1\rangle$. Definiendo
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{D}_{2n} & \to & \mathrm{D}_{2k} \\ & r & \mapsto & r_1 \\ & s & \mapsto & s_1 \end{array}$$
Como k divide a n, escribimos $n = km$ y como $r_1^k = 1$, entonces $r_1^n = (r_1^k)^m = 1$. Así, φ se extiende de manera única de D_{2n} a D_{2k}. Luego, como $\{r_1, s_1\}$ generan a D_{2k}, φ es sobreyectivo. Este homomorfismo no es isomorfismo si $k < n$.

2) Sea $G = \mathrm{D}_6$ como se presenta en el ejemplo anterior. Si $H = \mathrm{S}_3$, los elementos $a = (1\ 2\ 3)$ y $b = (1\ 2)$ satisfacen las siguientes relaciones:
$$a^3 = 1, \quad b^2 = 1, \quad ba = a^{-1}b$$
Entonces existe un homomorfismo de D_6 a S_3 que manda $r \mapsto a$ y $s \mapsto b$. Además, a y b generan a S_3 pues
$$\begin{array}{rclcl} b & = & (1\ 2) & & \\ a & = & (1\ 2\ 3) & & \\ b^2 & = & (1\ 2) & = & 1 \\ a^2 & = & (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) & = & (1\ 3\ 2) \\ ab & = & (1\ 2\ 3)(1\ 2) & = & (1\ 3) \\ ba & = & (1\ 2)(1\ 2\ 3) & = & (2\ 3) \end{array}$$

Entonces el homomorfismo es sobreyectivo. Además como D_6 y S_3 son de orden 6, el homomorfismo es isomorfismo, i.e., $\mathrm{D}_6 \cong \mathrm{S}_3$.

♦

Se mencionó anteriormente la noción de **isomorfismo**, el cual es un homomorfismo biyectivo. Se tiene también los siguientes homomorfismos particulares:

1) Un **monomorfismo** es un homomorfismo inyectivo.

2) Un **epimorfismo** es un homomorfismo sobreyectivo.

3) Un **endomorfismo** es un homomorfismo sobre el mismo grupo.

4) Un **automorfismo** es un endomorfismo biyectivo.

1.2.3. Subgrupos

Sea G un grupo y sea H un subconjunto de G. Diremos que H es un **subgrupo** de G si H es no vacío y H es cerrado bajo el producto e inversos, i.e., si $x, y \in H$ entonces $x^{-1} \in H$ y además $xy \in H$. Usamos la notación $H \leq G$ para establecer que H es un subgrupo de G.

Los subgrupos de G son simplemente subconjuntos de G que también son grupos con la operación de G, por lo que se le denota a la operación con el mismo símbolo. Además si $H \leq G$ y $H \neq G$, se puede escribir $H < G$.

Si $H \leq G$ entonces las leyes de cancelación de G implican que el elemento neutro de H es el mismo que el de G, y que el inverso de un elemento $x \in H$ es el mismo elemento inverso en G.

Ejemplo 1.2.24.

1) Todo grupo G tiene 2 subgrupos: $H = G$ y $H = \{e\}$. El segundo se llama **subgrupo trivial**.

2) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ con la operación $+$.

3) Si $G = \mathrm{D}_{2n}$, sea $H = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ el conjunto de rotaciones de G. Como el producto de dos rotaciones es una rotación y el inverso de una rotación también es una rotación, se tiene $H \leq G$.

4) El conjunto de los enteros pares es un subgrupo del grupo $\mathbb{Z}$ bajo la suma.

5) La propiedad de ser subgrupo es transitiva, i.e., si $H \leq G$ y $K \leq H$ entonces $K \leq G$.

6) Algunos conjuntos que no son subgrupos, son los siguientes:

a) $\mathbb{Q} - \{0\}$ bajo la multiplicación no es subgrupo de $\mathbb{R}$ bajo la suma. Aunque ambos sean grupos y $\mathbb{Q} - \{0\} \subset \mathbb{R}$, la operación de $\mathbb{Q} - \{0\}$ no es restricción de la operación de $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{Z}^+$ no es subgrupo de $\mathbb{Z}$. Aunque $\mathbb{Z}^+$ es cerrado bajo +, no contiene al elemento neutro de $\mathbb{Z}$ ni a ningún elemento inverso de sus elementos.

c) De manera análoga, $(\mathbb{Z} - \{0\}, \times)$ no es subgrupo de $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$.

d) D_6 no es subgrupo de D_8 pues $\mathrm{D}_6 \not\subset \mathrm{D}_8$.

♦

1.2.4. Grupos topológicos

Un **grupo topológico** es un conjunto con una topología y una estructura algebraica, las cuales coexisten de manera compatible. Formalmente, un grupo topológico consiste de un grupo G con una topología, tal que las aplicaciones

$$i)\quad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array} \qquad\qquad ii)\quad \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array}$$

son continuas.

En [1] y [22] pueden consultarse una gran cantidad de resultados acerca de grupos topológicos.

Primero, si $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert complejo y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una transformación lineal, decimos que T es unitario si $TT^* = \mathrm{Id} = T^*T$, donde $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es el operador adjunto de T, i.e.,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

Notemos que si $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, T corresponde a una matriz con $T^* \equiv \overline{T^t}$, esto es, T corresponde a una matriz unitaria de $n \times n$.

Nos interesa particularmente trabajar con espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita. Denotaremos

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) := \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid TT^* = T^*T = \mathrm{Id}\}$$

para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita y separable.

Notemos primero que $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es un grupo. En efecto,

1) Sean $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ entonces $T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3$ pues para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

2) Existe $\mathrm{Id} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Id} \circ T = T \circ \mathrm{Id}$, para todo $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

3) Para cada $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, existe $T^* \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $TT^* = T^*T = \mathrm{Id}$.

Por otro lado, sea $(\mathcal{U}(\mathcal{H}), \| \cdot \|)$ entonces $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ preserva producto interior, i.e., $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$. Por lo tanto también preserva normas.

El objetivo de esta sección es demostrar que el grupo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, con $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita, tiene una estructura de grupo topológico, ya que este hecho será utilizado en el Capítulo 3 de este trabajo.

Por otro lado, sobre el grupo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es posible definir varias topologías de manera natural. La topología más usual es dada por la topología de la norma, inducida por la norma en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$; con esta estructura, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es lo que se conoce como un modelo de espacio de Lie de Banach, algo mucho más fuerte que sólo un grupo topológico. En [21] pueden consultarse tanto este hecho, como algunos resultados interesantes en su topología.

Otras topologías que también hacen de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ un grupo topológico son la topología fuerte, la topología débil y la topología compacto-abierto, entre otras. En [16] se demuestra dicho resultado y además que $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es de hecho un grupo Polaco.

En esta sección presentamos la prueba de que $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es un grupo topológico en la topología fuerte, ya que es esta la topología utilizada en el Capítulo 3.

Recordemos que en la topología fuerte, una base de vecindades para un operador $T_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, es dada por:

$$V(T_0, \varepsilon, x) = \{T \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : |(T - T_0)x| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{H}\}$$

con $\varepsilon > 0$, y la topología generada por la colección de estos básicos es la **la topología fuerte**.

Proposición 1.2.25 (cf. [25])**.** $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ *es un grupo topológico con la topología fuerte.*

Demostración. Primero, sean $S, T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Se busca probar que $(S, T) \mapsto ST$ es continua. Así, tomamos $S_0, T_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ fijos y un básico que contiene a S_0T_0, esto es,

$$V_0(S_0T_0, \varepsilon, x) = \{R \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : |(R - S_0T_0)x| < \varepsilon\}.$$

Debemos probar que existe un abierto W_0 con $(S_0, T_0) \in W_0$. Sea

$$W_0((S,T), \varepsilon, x) := \{(S,T) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) : |(S - S_0)T_0x| < \frac{\varepsilon}{2}, |(T - T_0)x| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Además, si $(S, T) \in W_0$ entonces $ST \in V_0(S_0T_0, \varepsilon, x)$ ya que

$$\begin{aligned} |(ST - S_0T_0)x| &= |(ST - ST_0 + ST_0 - S_0T_0)x| \\ &\leq |(ST - ST_0)x| + |(ST_0 - S_0T_0)x| \\ &\leq |S(T - T_0)x| + |(S - S_0)T_0x| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Probaremos ahora que $T \mapsto T^{-1}$ es continua. Por lo que tomamos $T_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ para definir

$$V_0(T_0^{-1}, \varepsilon, x) = \{S \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : |(S - T_0^{-1})x| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{H}\},$$

una vecindad de T_0^{-1}.
Además, sea

$$W_0(T_0, \varepsilon, y) = \{T \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : |(T - T_0)y| < \varepsilon \quad \forall y \in \mathcal{H}\}$$

un vecindad de T_0. Entonces sea $x \in \mathcal{H}$ y tomando $y = T_0^{-1}x$

$$\begin{aligned} |(T^{-1} - T_0^{-1})x| &= |T^{-1}x - T_0^{-1}x| \\ &= |T^{-1}T_0T_0^{-1}x - T_0^{-1}x| \\ &= |T^{-1}T_0y - y| \\ &= |TT^{-1}T_0y - Ty| \\ &= |Toy - Ty| < \varepsilon. \end{aligned}$$

De modo que $(W_0)^{-1} \subset V_0$. ■

Capítulo 2

Representaciones lineales

Como comentábamos en la introducción de este trabajo, la teoría de representaciones lineales es un área con una amplia gama de aplicaciones y es nuestro objetivo analizar algunos aspectos analíticos del espacio de representaciones lineales de un grupo, bajo ciertas condiciones sobre éste. A fin de darle a este trabajo una presentación más autocontenida incluímos en este capítulo una introducción a la teoría de representaciones lineales de grupos finitos y mostramos algunos ejemplos.

2.1. Acciones de grupos

Iniciaremos con algunos resultados generales sobre acciones de grupos y posteriormente, en la siguiente sección, nos restringiremos a acciones lineales sobre espacios vectoriales.

Definición 2.1.1. *Si G es un grupo y X es un conjunto, decimos que G actúa sobre X si existe una función, llamada acción*

$$\Phi : G \times X \to X$$

tal que, para cada $g, h \in G$ y para cada $x \in X$, se satisface lo siguiente:

i) $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$.

ii) $\Phi(e, x) = x$, *con $e \in G$ como el neutro en G.*

Con el fin de simplificar un poco la notación, escribiremos $g \cdot x$ en lugar de $\Phi(g, x)$. Con esta notación, los axiomas que definen una acción se pueden escribir como:

i) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

ii) $e \cdot x = x$, con $e \in G$ como el neutro en G.

Observemos que para $g \in G$ fijo, tenemos una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_g := \Phi(g, -) : X & \to & X \\ x & \mapsto & \Phi(g, x) \end{array}$$

Y de los axiomas anteriores, se sigue que, para todo $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g(x) & = & \Phi_{g^{-1}}(\Phi(g,x)) \\ & = & \Phi(g^{-1}, \Phi(g,x)) \\ & = & \Phi(g^{-1}g, x) \\ & = & \Phi(e,x) \\ & = & x \end{array}$$

Por lo que,

$$\Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g = \mathrm{Id}_X.$$

Análogamente, $\Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_X$ y se sige que

$$\Phi_g^{-1} = \Phi_{g^{-1}}.$$

De modo que cada elemento de $g \in G$ define una función biyectiva de X en X, esto es, una permutación $\Phi_g \in \mathrm{Sim}(X)$. Así, toda acción Φ de G en X induce una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : G & \to & \mathrm{Sim}(X) \\ g & \mapsto & \Phi_g \end{array}$$

Proposición 2.1.2. *Sean G un grupo, X un conjunto no vacío, y $\Phi : G \times X \to X$ una función. La aplicación*

$$\Psi : G \to \mathrm{Sim}(X)$$

definida por $\Psi(g) \coloneqq \Phi_g = \Phi(g, -)$ es un homomorfismo de grupos si y sólo si, Φ es una acción.

Demostración. Supongamos primero que Ψ es un homomorfismo, esto es,

$$\Psi(gh) = \Psi(g)\Psi(h).$$

Por un lado

$$\Psi(gh)(x) = \Phi(gh, x),$$

$$\Psi(g)(\Psi(h)(x)) = \Phi(g, \Phi(h,x)),$$

así que

$$\begin{array}{rcl} \Phi(g, \Phi(h,x)) & = & \Psi(g)(\Psi(h)(x)) \\ & = & \Psi(g) \circ \Psi(h)(x) \\ & = & \Psi(gh)(x) \\ & = & \Phi(gh, x). \end{array}$$

Por otro lado, como $\Psi(e)(x) = \mathrm{Id}_X(x)$, por lo que:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(e,x) & = & \Psi(e)(x) \\ & = & \mathrm{Id}_X(x) \\ & = & x \end{array}$$

Concluímos que Φ es una acción. Recíprocamente, se debe probar que $\Psi(gh) = \Psi(g) \circ \Psi(h)$, pero sabemos que

$$\Psi(gh) = \Phi_{gh},$$

$$\Psi(g)\circ\Psi(h) = \Phi_g\circ\Phi_h,$$

y que Φ es acción, así que

$$\begin{aligned}\Psi(gh) &= \Phi_{gh}\\ &= \Phi_g\circ\Phi_h\\ &= \Psi(g)\circ\Psi(h).\end{aligned}$$

■

Existen diferentes tipos de acciones, dependiendo de la forma en la que actúan sobre X. Enlistaremos a continuación los tipos de acciones más frecuentes:

- **Acción Trivial:** Donde $\Psi : G \to \mathrm{Sim}(X)$ es el homomorfismo constante $g \mapsto \mathrm{Id}_X$. Equivalentemente, $g\cdot x = x$ para todos $g\in G$, y para todos $x\in X$.
- **Acción Fiel:** Donde $\Psi : G\to \mathrm{Sim}(X)$ es inyectivo.
  Equivalentemente, si $g\cdot x = x$ para todo $x\in X$ entonces $g = e$.
  En este caso, $G\cong \mathrm{Im}(\Psi)$.
- **Acción Libre:** Si $g\cdot x = x$ para algún $x\in X$ entonces $g = e$.
  Se sigue que toda acción fiel es libre.
- **Acción Transitiva:** Para cada $x, y\in X$, existe $g\in G$ tal que $g\cdot x = y$.
- **Acción Regular:** Para cada $x, y\in X$, existe un único $g\in G$ tal que $g\cdot x = y$.
  Se sigue que toda acción regular es libre y transitiva.

Definición 2.1.3. *Si G actúa en X, para $x\in X$ se define el grupo*

$$G_x := \{g\in G \mid g\cdot x = x\},$$

*llamado el **grupo de isotropía** en x.*

Se puede verificar que efectivamente G_x es un grupo, de hecho es un subgrupo de G. En efecto, el elemento neutro de G_x es el mismo que en G y también los inversos de los elementos de G_x son los mismos que en G. De esta manera sólo falta ver que la operación es cerrada en G_x, esto es $gh\in G_x$ para cualesquiera $g, h\in G_x$. Por lo que tomamos $g, h\in G_x$, entonces

$$(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x) = g\cdot x = x.$$

Observemos que G actúa trivialmente sobre X si y sólo si $G_x = G$ para todo $x\in X$, y que G actúa libremente sobre X si y sólo si $G_x = \{e\}$ para todo $x\in X$.

Se tienen los siguientes ejemplos de acciones.

Ejemplo 2.1.4. Todo conjunto X puede ser considerado como un G-conjunto, para cualquier grupo G, mediante la acción trivial que es aquella que no tiene efecto alguno sobre el G-conjunto X.

$$\begin{aligned} G\times X &\to X\\ (g,x) &\mapsto x\end{aligned}$$

♦

Ejemplo 2.1.5. Si G es un grupo, podemos considerarlo como un G-conjunto utilizando la multiplicación en G,

$$\begin{array}{rcl} \beta : G \times G & \to & G \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

Veamos que β cumple los axiomas de una acción. Primero tomemos $g,h,x \in G$, se tiene que

$$\beta(g,\beta(h,x)) = \beta(g,h\cdot x) = gh \cdot x = \beta(gh,x).$$

Ahora sea $e \in G$ el elemento identidad de G, así

$$\beta(e,x) = e\cdot x = x \in G.$$

También se puede ver que β es una acción fiel, pues es una acción inyectiva. Por lo que $G \hookrightarrow \mathrm{Sim}(G)$, y se sigue el Teorema de Cayley, que afirma que todo grupo G es isomorfo a un grupo de permutaciones.

♦

Ejemplo 2.1.6. Otra manera de darle a G una estructura de G-conjunto es mediante la acción sobre sí mismo, con la operación conjugación.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : G \times G & \to & G \\ (g,x) & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

Los axiomas de acción se siguen por las propiedades de grupo en G. En efecto, primero tomemos $g,h,x \in G$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \gamma(g,\gamma(h,x)) & = & \gamma(g,hxh^{-1}) \\ & = & g(hxh^{-1})g^{-1} \\ & = & (gh)x(h^{-1}g^{-1}) \\ & = & (gh)x(gh)^{-1} \\ & = & \gamma(gh,x) \end{array}$$

Ahora sea $e \in G$ el elemento identidad de G, así

$$\begin{array}{rcl} \gamma(e,x) & = & exe^{-1} \\ & = & x \end{array}$$

Además es una acción trivial si y sólo si G es abeliano, pues, si por un lado suponemos que G es abeliano, para $g \in G$ y $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl} \gamma(g,x) & = & gxg^{-1} \\ & = & gg^{-1}x \\ & = & ex \\ & = & x \end{array}$$

Por otro lado, si G no fuera abeliano, existen $x \in X$ y $g^{-1} \in G$ tal que

$$gxg^{-1} \neq gg^{-1}x = x$$

de modo que $\gamma(g,x) \neq x$ y la acción γ no es trivial.

La acción γ es fiel si y sólo si el centro de G, definido por

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G\}$$

es trivial. En efecto, supongamos que $Z(G) = \{e\}$, entonces ningún otro elemento de G conmuta.

$$\gamma(g,x) = gxg^{-1} = gg^{-1}x \Longleftrightarrow g = e$$

La acción γ es libre, o transitiva, si y sólo si G es trivial.
Si $G = \{e\}$ entonces $\gamma(e,x) = exe^{-1} = x$. Por lo que el único elemento de G que es el elemento neutro es el que manda $x \mapsto x$, es decir, es libre.

♦

Definición 2.1.7. *Sea G un grupo actuando sobre el conjunto X. Decimos que los elementos $x, y \in X$ están relacionados si y sólo si, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$, esto es*

$$x \sim y \iff \exists g \in G, \quad g \cdot x = y$$

Lema 2.1.8. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Para probar que $\sim$ es una relación de equivalencia, hay que probar que $\sim$ es una operación reflexiva, simétrica y transitiva.

- Reflexividad: Como $e \in G$ es tal que $e \cdot x = x$, entonces $x \sim x$.
- Simetría: Si $x \sim y$ entonces existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Pero como G es grupo, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} \cdot y = g^{-1}(g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = x$. Por lo que existe $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} \cdot y = x$, i.e., $y \sim x$.
- Transitividad: Si $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces existen $g, h \in G$ tal que $g \cdot x = y$, $h \cdot y = z$. Pero como G es grupo y $g, h \in G$ entonces también $m = hg \in G$, por lo que $z = h \cdot y = h(g \cdot x) = (hg) \cdot x = m \cdot x$. Entonces existe $m \in G$ tal que $m \cdot x = z$, i.e., $x \sim z$.

■

Definición 2.1.9. *Definimos el **espacio cociente** ó **espacio de órbitas** como el conjunto de clases de equivalencia de la relación $\sim$, y denotamos este conjunto como X/G.*

Es importante tener en cuenta cómo se va a manejar el cociene X/G, ya que se puede tomar a H, un subgrupo de G, y si H actúa sobre G mediante la multiplicación por la izquierda $(h,g) \mapsto h \cdot g$ se obtiene el espacio de órbitas G/H como las clases laterales derechas de H en G, i.e.,

$$\begin{aligned} G/H &= \{[g] \mid g \in G\} \\ &= \{\{h \cdot g \mid h \in H\} \mid g \in G\} \\ &= \{Hg \mid g \in G\} \end{aligned}$$

Análogamente, si H actúa sobre G mediante la multiplicación por la derecha $(h,g) \mapsto g \cdot h^{-1}$ se obtiene el espacio de órbitas G/H como las clases laterales izquierdas de H en G.

Se puede observar que ambas son acciones, la multiplicación por la izquierda se probó en general en el Ejemplo 2.1.5, y la multiplicación por la derecha se sigue de tomar $h_1, h_2, g \in G$, así

$$(h_1,(h_2,g)) = (h_1, g \cdot h_2^{-1}) = (g \cdot h_2^{-1}) \cdot h_1^{-1} = g \cdot (h_2^{-1} h_1^{-1}) = g \cdot (h_1 h_2)^{-1} = (h_1 h_2, g),$$

$$(e,g) = g \cdot e^{-1} = g.$$

Es usual restringir nuestra atención a cierta clase de simetrías de un conjunto X, en especial en aquellas que preservan ciertos aspectos característicos de interés. Por ejemplo, si X es un espacio topológico nos interesarían aquellas simetrías de X continuas, si X es una variedad diferenciable, nuestras simetrías de interés serían las simetrías diferenciables, y si X es un espacio vectorial, sería deseable trabajar con simetrías lineales, etc.

Ejemplo 2.1.10. Consideremos las siguientes transformaciones de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} a(x,y) & = & (x+1, y) \\ b(x,y) & = & (x+\frac{1}{2}, -y) \\ c(x,y) & = & (x, y+1) \end{array}$$

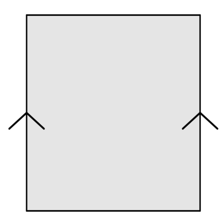
Cada una de estas transformaciones es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, y por lo tanto también lo es cada composición entre éstas. Así, consideremos el grupo

$$\Gamma_C = \langle a \rangle = \{a^n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

y a la acción inclusión

$$\Gamma_C \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2).$$

El espacio cociente o espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\Gamma_C$ mediante esta acción puede identificarse con el cilindro. Si tomamos el espacio cociente $([0,1]\times\mathbb{R})/\Gamma_C$, obtenemos nuevamene el cilindro. Esto se debe a que la región $[0,1]\times\mathbb{R}$ contiene al menos un representante de cada Γ_C–órbita. Una región conexa del plano con esta característica es llamada **dominio fundamental**.



Γ_C–órbita: Cilindro

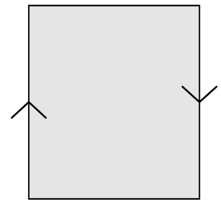
Por otro lado, si consideramos al grupo

$$\Gamma_M = \langle b \rangle$$

entonces la acción inclusión

$$\Gamma_M \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$$

tiene como espacio de órbitas a la banda de Möbius.



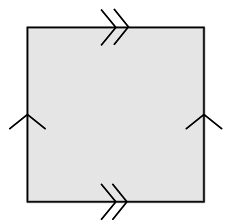
Γ_M–órbita: Banda de Möbius

No es difícil convencerse que las acciones

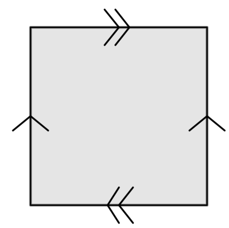
$$\Gamma_T = \langle a, c\rangle \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$$

$$\Gamma_K = \langle b, c\rangle \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$$

tienen como espacio de órbitas al toro y a la botella de Klein, respectivamente.



Γ_T–órbita: Toro



Γ_K–órbita: botella de Klein

♦

En los ejemplos anteriores, nos enfocamos en cierto tipo de simetrías de $\mathbb{R}^2$ (homeomorfismos), si en lugar de eso, enfocamos nuestra atención en aquellas simetrías de $\mathbb{R}^2$ que preservan su estructura de espacio vectorial, entramos en la teoría de representaciones lineales.

2.2. Representaciones de grupos finitos

En esta sección se establecen algunos resultados sobre teoría de representaciones lineales de grupos finitos. Tanto las definiciones como los resultados aquí enunciados, se pueden encontrar completamente desarrollados en [17] y [26].

Sea V un espacio vectorial complejo. Denotaremos por $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ al conjunto de todos los isomorfismos $\mathbb{C}$–lineales de V en V. Notemos que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ forma un grupo bajo la composición de funciones.

En este trabajo sólo consideraremos espacios vectoriales complejos y homomorfismos $\mathbb{C}$-lineales, de modo que en adelante omitiremos el subíndice en $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$, denotando este espacio simplemente por $\mathrm{Aut}(V)$.

Consideremos un grupo finito G y un espacio vectorial complejo V de dimensión finita. Una **representación lineal** de G en V, de grado n, corresponde a un homomorfismo

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \subset \mathrm{Sim}(V)$$

Lema 2.2.1. *Los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

i) $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ *es un homomorfismo.*

ii) $\phi_\rho : G \times V \to V$ *es una acción tal que* ϕ_ρ *es isomorfismo de espacios vectoriales para cada* $g \in G$.

iii) V *tiene estructura de* $\mathbb{C}G-$*módulo, dada por*

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot v := \sum_{g\in G} \lambda_g \rho_g \cdot v.$$

Demostración. Los enunciados (i) y (ii) son equivalentes gracias a la Proposición 2.1.2 y porque ρ_g es una aplicación lineal. La equivalencia de los enunciados (i) y (iii) se pude ver en [26, p. 47]. ■

Ejemplo 2.2.2. Sea $(\mathbb{Z}_2, +)$ un grupo y $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ un espacio vectorial. Podemos ver que

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{Z}_2 & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2) \\ & \overline{0} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \overline{1} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

es una representación lineal pues es un homomorfismo,

$$\begin{array}{rcl} \rho(\overline{0} + \overline{1}) & = & \rho(\overline{1}) \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \rho(\overline{0}) + \rho(\overline{1}) \end{array}$$

♦

Ejemplo 2.2.3. Sea X cualquier conjunto y G un grupo que actúa en X, i.e., $G \to \mathrm{Aut}(X)$ es un homomorfismo al grupo de permutaciones de X. Ahora, si V es un espacio vectorial de $\dim V = |X|$, esto es, V es un espacio vectorial con base $\{e_x\}_{x\in X}$, entonces G actúa en V como

$$g \cdot \sum a_x e_x = \sum a_x e_{g\cdot x},$$

y esta acción es llamada **representación permutación**.
La **representación regular**, denotada por R_G o R, corresponde a la acción de G en sí mismo, dada por el Ejemplo 2.1.5 de multiplicación por la izquierda. Dicho de otra manera, R es el espacio de funciones complejas en G, donde un elemento $g \in G$ actúa en una función α por $(g\alpha)(h) = \alpha(g^{-1}h)$.

♦

Cuando no existe ambigüedad respecto al homomorfismo ρ, usualmente nos referimos a V como la representación de G, y también escribimos $\rho_g(v)$ para denotar $\rho(g)(v)$. Dicho esto, una transformación entre dos representaciones V y W de G corresponde a una aplicación lineal $\phi : V \to W$ entre espacios vectoriales que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

para cada $g \in G$, esto es, $\phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v)$ para todo $v \in V$. En este caso, decimos que ϕ es una **transformación G-lineal** y denotamos por $\mathrm{Hom}^G(V,W)$ al conjunto de todas estas aplicaciones, esto es,

$$\mathrm{Hom}^G(V,W) = \{\phi : V \to W \mid \phi \text{ es } G\text{–lineal}\}.$$

Definición 2.2.4. *Dos representacions son llamadas **isomorfas** o **equivalentes** si entre ellas existe un isomorfismo de espacios vectoriales G–lineal.*

Definición 2.2.5. *Si W es una representación de G y V es un subespacio vectorial de W tal que para cada $g \in G$ y $v \in V$ tenemos que $\rho_g(v) \in V$, entonces decimos que V es una **subrepresentación** de G o un G-**espacio invariante**. Cuando una representación no tiene subrepresentaciones propias $W \neq \{0\}$, es llamada **irreducible**.*

Ejemplo 2.2.6. Si V y W son dos representaciones de G y $\phi : V \to W$ es una aplicación G-lineal, entonces $\mathrm{Ker}\,(\phi)$ e $\mathrm{Im}(\phi)$ son subrepresentaciones de V y W, respectivamente, ya que si $v \in \mathrm{Ker}\,(\phi) \subset V$ entonces $gv \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$ pues $\phi(gv) = g\phi(v) = g0 = 0$. Análogamente, si $w \in \mathrm{Im}(\phi)$ y $w = \phi(v)$ para algún $v \in V$, entonces $gw = g\phi(v) = \phi(gv) \in \mathrm{Im}(\phi)$.

♦

Mostramos a continuación algunos ejemplos de como obtener nuevas representaciones a partir de representaciones dadas.

Representación suma directa.
Sean $\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}(V)$ y $\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(W)$ representaciones de G, podemos formar la representación *suma directa* $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(V \oplus W)$ dada por

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)_g(v \oplus w) := \rho_{1g}(v) \oplus \rho_{2g}(w)$$

para cada $g \in G$, $v \in V$ y $w \in W$.

Representación producto tensorial.
Análogamente al caso anterior, es posible definir la representación *producto tensorial* $V \otimes W$ de dos represetaciones V y W de G,

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)_g(v \oplus w) := \rho_{1g}(v) \otimes \rho_{2g}(w),$$

la cual es de nuevo una representación de G.

Representación Hom. Si V y W son representaciones del grupo G, podemos formar una nueva representación sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$, el espacio de todas las aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales $\phi : V \to W$, con la acción dada por

$$(g\phi)(v) := g\phi(g^{-1} \cdot v) \quad v \in V.$$

Es usual denotar esta acción también como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$.

Dado un G-espacio V, denotaremos por V^G al subconjunto de V que consiste de todos los puntos fijados por la acción para todo $g \in G$, esto es,

$$V^G := \{v \in V \mid g \cdot v = v \text{ para todo } g \in G\}.$$

En esta notación, tenemos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V, W).$$

En efecto, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G$ si y sólo si

$$(g\phi)(v) = \phi(v) \text{ para todos } g \in G,\ v \in V,$$

pero como $(g\phi)(v) = g\phi(g^{-1} \cdot v)$, entonces $\phi(v) = g\phi(g^{-1} \cdot v)$. Siendo así,

$$\phi(g \cdot v) = g\phi(g^{-1} \cdot (g \cdot v)) = g\phi(v)$$

para todos $g \in G$, $v \in V$, lo cual significa precisamente que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V, W)$.

Representación dual. Sea V una representación de G y consideremos el espacio vectorial complejo $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ con la suma y multiplicación por escalares usual. De modo que, como un caso particular de la representación Hom, la representación dual es dada por

$$\rho^*(g) := \rho(g^{-1}).$$

Hemos visto que dadas dos representaciones podemos formar una nueva representación, como la suma directa de ellas. Preguntémonos por el resultado inverso, es decir, dada una representación V de G, ¿será posible escribir V como una suma directa de subrepresentaciones? La respuesta es que si, y es dada por el siguiente resultado, también conocido como el Teorema de Maschke.

Teorema 2.2.7 (Maschke). *Si V es una representación de dimensión compleja finita del grupo finito G y W es una subrepresentación, entonces existe un subespacio invariante complementario W' tal que $V = W \oplus W'$.*

Demostración. Si olvidamos por un momento que V tiene una acción definida en él, y sólo lo vemos como un espacio vectorial complejo de dimensión finita, entonces siempre podemos definir sobre V un producto interior Hermitiano, pues $V \simeq \mathbb{C}^m$ para algún m y en $\mathbb{C}^m$ se tiene el producto interior usual, digamos

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}.$$

Si W es un subespacio vectorial de V siempre existe su $\langle\ ,\ \rangle$–complemento ortogonal $W^\perp$, sin embargo cuando V y W son representaciones lineales, no es necesariamente el complemento ortogonal $W^\perp$ una representación lineal (ver Ejemplo 2.2.8). Para que dicha condición se cumpla, debemos tener que si $w' \in W^\perp$ entonces $gw' \in W^\perp$ para todo $g \in G$, esto es,

$$\langle gw', w\rangle = 0 \text{ para todos } g \in G, w \in W,$$

o bien, como W es G-invariante,

$$\langle gw', gw\rangle = 0 \text{ para todos } g \in G, w \in W.$$

Esta última condición no es válida en general, pero en el caso de grupos finitos (incluso compactos) siempre es posible construir un producto Hermitiano a partir del ya dado, que sea invariante respecto a G, como el siguiente,

$$\langle v, w\rangle_{inv} := \sum_{g\in G} \langle gv, gw\rangle,$$

ya que $\langle gv, gw\rangle_{inv} = \langle v, w\rangle_{inv}$. Esa propiedad de ser invariante es la que garantiza la existencia de un complemento ortogonal $G-$invariante

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle_{inv} = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

■

Ejemplo 2.2.8. Si V es una representación del grupo G y debilitamos la hipótesis de que éste sea finito, entonces el Teorema de Maschke puede que ya no sea válido. Por ejemplo, si $G = (\mathbb{R}, +)$ es el grupo aditivo de los números reales y $V = \mathbb{C}^2$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathbb{R} & \to & \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

es una representación lineal y el subespacio

$$W = \mathbb{C} \oplus 0 = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

es G-invariante, pues al tomar $(z, 0) \in W$ se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\rho_x(z, 0) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, no tiene un complemento G-invariante distinto a W y al trivial.

♦

Ejemplo 2.2.9. El Teorema de Maschke tampoco es válido en general para campos de característica positiva, por ejemplo si la característica del campo divide el orden del grupo. Consideremos el campo $\mathbb{Z}_p$ y el espacio vectorial $V = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p$, con el siguiente producto interior

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle: & V \times V & \to & \mathbb{Z}_p \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_{11}v_{21} + v_{12}v_{22} \end{array}$$

donde $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ y $v_2 = (v_{21}, v_{22})$. Si tomamos nuevamente la acción

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de un grupo G sobre V cuyo orden sea divisible por p, se puede ver que el producto anterior no es invariante respecto a G.

Además, aunque $\mathbb{Z}_p \oplus 0$ es un subespacio G-invariante, no existe un G-espacio complementario, de hecho su complemento $\langle\ ,\ \rangle_{inv}$-ortogonal es precisamente V.

♦

Como una consecuencia del Teorema de Maschke, se sigue el siguiente resultado:

Corolario 2.2.10. *Toda representación V de dimensión compleja finita de un grupo finito G, es una suma directa de representaciones irreducibles. Esta propiedad es conocida como **reducibilidad completa**.*

Demostración. Sea V una representación de dimensión compleja finita de un grupo finito G, por el Teorema de Maschke se puede ver como una suma directa de dos subrepresentaciones. Las cuales pueden ser o no irreducibles, si no lo son se les aplica nuevamente el Teorema de Maschke y esa subrepresentación se expresa como suma de otras.
Se tiene que es un proceso finito ya que la dimensión tanto del grupo G como de la representación V son finitas. Y así, la representación V quede expresada como suma directa de representaciones irreducibles.
■

Combinando lo anterior con el siguiente resultado, tendremos que dicha descomposición es única, salvo isomorfismo.

Lema 2.2.11 (Schur)**.** *Si V y W son representaciones irreducibles de G y $\phi : V \to W$ es una aplicación G-lineal, entonces*

1. *ϕ es un isomorfismo, o bien, $\phi = 0$.*
2. *Si $V = W$, entonces $\phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$, para $\lambda \in \mathbb{C}$, Id la aplicación identidad.*

Demostración. La primera parte del Lema se sigue del hecho de que $\mathrm{Ker}\,(\phi)$ e $\mathrm{Im}(\phi)$ son subrepresentaciones de V y W, respectivamente, ya que V es irreducible, se tienen los siguientes dos casos:

- $\mathrm{Ker}\,(\phi) = 0$: Entonces ϕ es inyectiva y distinta de cero, por lo tanto $\mathrm{Im}(\phi) \neq 0$ de donde se sigue que $\mathrm{Im}(\phi) = W$ por ser W irreducible. Por lo tanto ϕ es un isomorfismo.
- $\mathrm{Ker}\,(\phi) = V$: y por lo tanto $\phi = 0$.

Para la segunda parte del lema usamos el hecho de que el campo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, eso significa que todos los polinomios con coeficientes complejos tienen sus raíces dentro de los complejos. Como esto garantiza la existencia de un valor propio no nulo para la aplicación $\phi : V \to W$, digamos $\lambda \in \mathbb{C}$, consideremos ahora la aplicación

$$\psi := \phi - \lambda \cdot \mathrm{Id} : V \to W,$$

y notemos que ψ es también $G-$lineal pues

$$g\psi(v) = g\phi(v) - g\lambda \cdot \mathrm{Id}(v) = \phi(g \cdot v) - \lambda \cdot \mathrm{Id}(g \cdot v) = \psi(g \cdot v),$$

pues tanto ϕ como $\lambda \cdot \mathrm{Id}$ son $G-$lineales.
Ahora, todo múltiplo $\mathbb{C}$-escalar del vector propio v_λ asociado al valor propio λ satisface

$$\psi(cv_\lambda) = (\phi - \lambda \cdot \mathrm{Id})(cv_\lambda) = \phi(cv_\lambda) - \lambda \cdot \mathrm{Id}(cv_\lambda) = c\phi(v_\lambda) - \lambda c v_\lambda = 0,$$

de donde se sigue que $\mathrm{Ker}\,(\psi) \neq 0$ y al ser una subrepresentación de V debemos tener $\mathrm{Ker}\,(\psi) = V$, es decir, $\psi := \phi - \lambda \cdot \mathrm{Id} = 0$ sobre todo elemento en V, y por lo tanto $\phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$. ■

Del Teorema de Maschke y el Lema de Schur, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.12. *Sea G un grupo finito y $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ una representación. Entonces*

$$V \cong \bigoplus_{V_i \in \mathrm{Irr}(G)} a_i V_i$$

donde $\mathrm{Irr}(G)$ *corresponde al conjunto de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G.*

Se tiene que a_i, nos dice cuantas veces aparece la representación irreducible V_i en tal descomposición, porque las representaciones que son isomorfas a V_i se ven como una sola, y así a_i nos dice cuantas son las isomorfas a V_i.

2.3. Ejemplos

Mostramos a continuación algunos ejemplos de representaciones lineales.

Ejemplo 2.3.1. Haciendo referencia al Ejemplo 2.2.2, considere la representación

$$\rho : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$$

Los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ son:

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \neq 0\}$$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y = 0\}$$
$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx, m \in \mathbb{R}\}$$

Pero el único subespacio invariantes de esta acción es W, porque si $(x,y) \in U$ entonces $\rho(\overline{1})(x,y) \notin U$, del mismo modo para V. De esta manera, la representación se ve como la siguiente suma de representaciones irreducibles: $W \oplus \{0\}$.

♦

Ejemplo 2.3.2. Sea $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ el grupo aditivo de las clases residuales módulo 4. Todas las representaciones lineales complejas de dimensión 1 que tiene este grupo son:

$$\begin{array}{rccc} \rho_0 : & \mathbb{Z}_4 & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \\ & x & \mapsto & 1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rccc} \rho_1 : & \mathbb{Z}_4 & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \\ & \overline{0} & \mapsto & 1 \\ & \overline{1} & \mapsto & -1 \\ & \overline{2} & \mapsto & 1 \\ & \overline{3} & \mapsto & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \rho_2 : & \mathbb{Z}_4 & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \\ & \overline{0} & \mapsto & 1 \\ & \overline{1} & \mapsto & i \\ & \overline{2} & \mapsto & -1 \\ & \overline{3} & \mapsto & -i \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rccc} \rho_3 : & \mathbb{Z}_4 & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \\ & \overline{0} & \mapsto & 1 \\ & \overline{1} & \mapsto & -i \\ & \overline{2} & \mapsto & -1 \\ & \overline{3} & \mapsto & i \end{array}$$

Son las únicas porque como tienen que ser homomorfismos, todas deben de mandar $\overline{0} \mapsto 1$ y también que se manda $\overline{1} \mapsto \omega$, donde $\omega^4 = 1$.

♦

Se puede observar que, en general, si V es una representación de un grupo finito G cada $g \in G$ nos da una función $\rho_g : V \to V$, pero esta función no siempre es un homomorfismo G−lineal: para $h \in G$ se tiene que

$$g(h(v)) \neq h(g(v)).$$

Siendo así, $\rho_g : V \to V$ será G−lineal para cada ρ si y sólo si g está en el centro $Z(G)$ de G. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3.3. *Si G es un grupo abeliano y V una representación irreducible de G, se tiene que V es de dimensión 1.*

Demostración. Por la observación anterior, como G es abeliano se tiene $G = Z(G)$ y así $\rho_g : V \to V$ es G−lineal. Luego, por la segunda parte el Lema de Schur (2.2.11), cada elemento de $g \in G$ actúa en V por $\rho_g = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Así todo subespacio de V es invariante, por lo que V es de dimensión 1. ■

Otros ejemplos que se muestran a continuación, son las representaciones complejas del grupo simétrico en tres elementos.

Ejemplo 2.3.4. Sea $G = S_3$, el grupo no-abeliano más simple. Para empezar, en cualquier grupo simétrico, se tienen dos representaciones de dimensión 1:

- Trivial:

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \\ g & \mapsto & 1 \end{array}$$

- Alternante:

$$\begin{array}{rcl} \rho' : G & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \\ g & \mapsto & \mathrm{sgn}(g) \end{array}$$

Por otro lado, consideremos la representación permutación del Ejemplo 2.2.3, con $X = \{1,2,3\}$ y $V = \mathbb{C}^3$, donde G actúa sobre $\mathbb{C}^3$ permutando las coordenadas. Explícitamente, si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base estándar de $\mathbb{C}^3$, entonces $g \cdot e_i = e_{g(i)}$, y para $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ general,

$$\begin{array}{rcl} g \cdot (z_1, z_2, z_3) & = & g \cdot (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) \\ & = & z_1 e_{g(1)} + z_2 e_{g(2)} + z_3 e_{g(3)} \\ & = & \left(z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}\right) \end{array}$$

Esta representación, como cualquier representación de permutación, no es irreducible, pues la línea L generada por el vector $(1,1,1) \in \mathbb{C}^3$ es invariante.
Notemos que el subespacio complementario a la línea L, es el subespacio

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}.$$

Esta representación V de dimensión 2 es irreducible, y conocida como la representación estándar de S_3. Por lo tanto la descomposición en irreducibles de la representación permutación es

$$\mathbb{C}^3 \simeq L \oplus V.$$

Ahora, vamos a describir una representación arbitraria de S_3, para crearla normalmente se usa la teoría de caracteres, pero se va a usar un método más rudimentario, aunque puede ser ineficiente. La idea es simple, empecemos con una representación arbitraria W de S_3 y veamos la acción del subgrupo abeliano $A_3 = \mathbb{Z}/3 \subset S_3$ en W, i.e.,

$$A_3 \to \mathrm{Aut}(V).$$

Esto produce la siguiente descomposición: si tomamos τ como el generador de A_3 (i.e., un 3−ciclo), el espacio W es generado por los eigenvectores v_i para la acción de τ, cuyos eigenvalores son potencias de una raíz cúbica de la unidad, $\omega = e^{2\pi i/3}$. Entonces,

$$W = \bigoplus V_i,$$

donde

$$V_i = \mathbb{C}v_i \text{ y } \tau v_i = \omega^{\alpha_i} v_i.$$

Después, para ver cómo los demás elementos de S_3 actúan en W, en términos de esta descomposición, se toma σ una transposición tal que τ y σ generan a S_3 con la relación

$$\sigma\tau\sigma = \tau^2.$$

Se quiere saber a donde manda σ a cada eigenvector v para la acción τ, digamos con ω^i; para resolver esto, se ve como actúa τ en $\sigma(v)$. Usando la relación anterior:

$$\begin{aligned} \tau(\sigma(v)) &= \sigma(\tau^2(v)) \\ &= \sigma(\omega^{2i} \cdot v) \\ &= \omega^{2i} \cdot \sigma(v). \end{aligned}$$

Por lo que, si v es un eigenvector para τ con el eigenvalor ω^i, entonces $\sigma(v)$ es también un eigenvector para τ con el eigenvalor ω^{2i}.

♦

2.4. Caracteres

Retomando el último ejemplo de la sección anterior se sugiere que conociendo los eigenvalores de cada elemento de G, debe ser suficiente para describir la representación. Claro que especificar todos los eigenvalores de la acción no es trivial y, de hecho es redundante ya que si se tienen los eigenvalores $\{\lambda_i\}$ de un elemento $g \in G$, entonces se tienen los eigenvalores $\{\lambda_i\}^k$ de g^k, para cada k. Podemos usar esto para simplificar los datos que tenemos que especificar. La clave es dar la suma de los eigenvalores de cada elemento de G, como sabemos que $\sum \lambda_i^k$ es equivalente a saber el eigenvalor $\{\lambda_i\}$.

Definición 2.4.1. *Si $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ es una representación, entonces el **caracter***

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}$$

es una función compleja definida por

$$\chi_V(g) := \mathrm{Tr}(\rho_g),$$

donde Tr *denota la traza de la transformación lineal ρ_g.*

En particular, tenemos
$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g),$$
pues las matrices similares tienen la misma traza. De modo que χ_V es constante sobre clases de conjugación de G; tal función se llama **función de clase**. Note que $\chi_V(e) = \dim V$, donde e es el elemento neutro del grupo.

Proposición 2.4.2. *Sean V y W representaciones de G. Entonces*

$$\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W, \quad \chi_{V\otimes W} = \chi_V \times \chi_W, \quad \chi_{V^*} = \overline{\chi_V}.$$

Demostración. Se calcula el valor de dichos caracteres en un elemento $g \in G$ fijo. Si para la acción de g, V tiene eigenvalores $\{\lambda_i\}$ y W tiene eigenvalores $\{\mu_i\}$. Entonces $\{\lambda_i + \mu_j\}$ y $\{\lambda_i \cdot \mu_j\}$ son eigenvalores de $V \oplus W$ y $V \otimes W$ respectivamente, de donde se cumplen las primeras dos fórmulas.
Similarmente, $\{\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}\}$ son eigenvalores para g en V^*, pues todos los eigenvalores son raíces n−ésimas de la unidad, con n el orden de g. ■

Ejemplo 2.4.3. Calcularemos el caracter de la representación permutación del Ejemplo 2.2.3. Probaremos que si V es la representación de permutación asociada a la acción de un grupo G en un conjunto finito X, entonces $\chi_V(g)$ es el número de elementos de X fijados por g, tal expresión se llama **fórmula original de punto fijo**.
En efecto, supondremos que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y así obtenemos V como el espacio vectorial generado por los elementos de X. Por lo que nuestra representación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccccc} \rho: & G & \to & \mathrm{Aut}(V) & & \\ & g & \mapsto & \rho_g: & V & \to & V \\ & & & & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} a_i g\cdot x_i \end{array}$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Ahora, denotemos el conjunto de elementos en X fijados por $g \in G$ como

$$X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$$

Lo que nos permite restringir a ρ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccccccc} \rho': & G & \to & \mathrm{Aut}(V_{X^g}) & & & & & \\ & g & \mapsto & \rho'_g: & V_{X^g} & \to & V_{X^g} & & \\ & & & & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & \to & \sum_{i=1}^{n} a_i g\cdot x_i & = & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \end{array}$$

i.e., se identifica con la función Id, y por la nota de la Definición 2.4.1 se tiene que $\chi_V = |X^g|$.
⧫

Como se ha dicho, el caracter de una representación de un grupo G es realmente una función en un conjunto de clases en G. Esto sugiere expresar la información básica sobre las representaciones irreducibles de un grupo G en la forma de una **tabla de caracter**.

Esta es una tabla con las clases $[g]$ de G enlistadas en la parte superior, usualmente mediante una g representativa, con el número de elementos en cada clase sobre él; las representaciones irreducibles V de G enlistadas a la izquierda, y en la casilla correspondiente el valor del caracter χ_V en la clase $[g]$.

Ejemplo 2.4.4. Calcularemos la tabla de caracter de S_3. Es fácil empezar con la representación trivial, que toma el valor 1 en las tres clases $[1], [(1,2)], [(1,2,3)]$; mientras la representación alternante tiene el valor 1 para las clases $[1], [(1,2,3)]$ y el valor -1 para la clase $[(1,2)]$.
Para ver el caracter de la representación estándar V, note que la descomposición de la representación permutación es $\mathbb{C}^3 = \rho \oplus V$, como se vio en el Ejemplo 2.3.4, y por lo tanto el caracter de la representación permutación tiene los valores: $\chi_V([1]) = 3$, $\chi_V([(1,2)]) = 1$ y $\chi_V([(1,2,3)]) = 0$. Por otro lado, de la Proposición 2.4.2 se tiene que

$$\chi_V([1]) = \chi_{\mathbb{C}^3}([1]) - \chi_\rho([1]) = 3 - 1 = 2$$

$$\chi_V([(1,2)]) = \chi_{\mathbb{C}^3}([(1,2)]) - \chi_\rho([(1,2)]) = 1 - 1 = 0$$

$$\chi_V([(1,2,3)]) = \chi_{\mathbb{C}^3}([(1,2,3)]) - \chi_\rho([(1,2,3)]) = 0 - 1 = -1$$

Por lo que la tabla de caracter de S_3 es

	1	3	2
S_3	1	$(1,2)$	$(1,2,3)$
trivial ρ	1	1	1
alternante ρ'	1	-1	1
estándar V	2	0	-1

Esto nos da otra solución al problema de descomponer un representación W de S_3 en representaciones irreducibles, si

$$W \cong \rho^{\oplus a} \oplus \rho'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c},$$

entonces

$$\chi_W = a\chi_\rho + b\chi_{\rho'} + c\chi_V.$$

En particular, como $\chi_\rho, \chi_{\rho'}, \chi_V$ son independientes se puede ver que W es determinado salvo isomorfismo por su caracter χ_W.

♦

Definición 2.4.5. *Sea G un grupo finito, sea e el elemento neutro del grupo y sea V una representación irreducible de G. Al valor $\chi_{\rho_1}(e) = n$ se le conoce como el* ***grado*** *de la representación V.*

Corolario 2.4.6. *Sea G un grupo finito, sea $|G| = g$ y sean $n_1, \ldots, n_k$ los grados de las representaciones irreducibles $\rho_1, \ldots, \rho_k$ de G. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = g.$$

Con este resultado (probado en [26, p. 18]) y el Ejemplo 2.4.4, se puede ver que no hay más representaciones irreducibles de S_3 pues

$$1 + 1 + 2^2 = 6 = |S_3|.$$

Capítulo 3

Representaciones unitarias y espacios de probabilidad estándar

El objetivo de este capítulo es analizar algunos aspectos analíticos en el espacio de representaciones unitarias de un grupo abeliano y finito, sobre un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. La motivación de este análisis radica en su relación con la construcción de ciertos espacios topológicos cuyas propiedades son importantes en topología algebraica (cf. [3] y [2]).

El contenido de este capítulo se basa principalmente en [13] y [20].

3.1. Nociones y hechos básicos

Si X es un espacio topológico, un subconjunto $S \subset X$ es llamado **de primera categoría**, si se puede escribir como la unión numerable de subconjuntos de X densos en ninguna parte, i.e.,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n, \quad (\overline{S_n})^{\circ} = \varnothing.$$

Se dice que $S \subset X$ es **residual** si $X \backslash S$ es de primera categoría.

Recordemos que un espacio topológico es **separable** si contiene un subconjunto que sea denso y numerable.

Definición 3.1.1. *Un* ***espacio Polaco*** *es un espacio topológico completamente metrizable y separable. Esto es, un espacio homeomorfo a un espacio métrico completo que tiene un subconjunto denso numerable.*

Una $\sigma-$**álgebra** sobre un conjunto X es un familia $\mathcal{S}$ no vacía de subconjuntos de X, donde los elementos de $\mathcal{S}$ cumplen las siguientes propiedades:

1) $\varnothing, X \in \mathcal{S}$.

2) Si $E \in \mathcal{S}$ entonces $X \backslash E \in \mathcal{S}$.

3) Si $\{E_1, E_2, \ldots\} \subset \mathcal{S}$ es una sucesión (numerable) entonces la unión (numerable) de todos ellos también está en $\mathcal{S}$.

Al par $(X, \mathcal{S})$ se denomina como **espacio medible**, y los elementos de $\mathcal{S}$ se denominan **conjuntos medibles**.

Si X es un espacio topológico, entonces la $\sigma-$**álgebra de Borel** se define como la $\sigma-$álgebra $\mathbb{B}(X)$ generada por los abiertos de X. Se pude observar que también está generada por los cerrados de X. Todo conjunto en $\mathbb{B}(X)$ se llama **conjunto de Borel**.

Si $S \subset X$ es la intersección de una colección numerable de abiertos, entonces S es un **conjunto** G_δ. El cual no necesariamente es un conjunto abierto, pero si es un conjunto medible pues es intersección de conjuntos de una $\sigma-$álgebra.

Definición 3.1.2. *Una **medida** es una función μ definida en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{S}$ sobre un conjunto X con valores en el intervalo real extendido $[0, \infty]$ que verifica:*

- *La medida del conjunto vacío es cero, i.e., $\mu(\varnothing) = 0$.*
- *Si $\{E_1, E_2, \ldots\}$ es una sucesión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{S}$, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Si una medida cumple que para dos conjuntos medibles $A, B \in \mathcal{S}$ tal que $A \subseteq B$, satisfacen que $\mu(A) \leq \mu(B)$, entonces se dice que la medida es **monótona**.

La **medida de Lebesgue** se puede definir sobre $\mathbb{R}^n$ como la medida inducida por el volumen de los elementos básicos en la topología producto; así sobre el conjunto de los números reales, por lo que se tiene

- $\mu([a, b]) = \mu((a, b)) = b - a$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mu(\{a\}) = 0$, con $a \in \mathbb{R}$.
- Todos los conjuntos numerables tienen medida cero.

Definición 3.1.3. *Una **función medible** se define como una función f de un espacio medible $(X, \mathcal{S}_X)$ a otro espacio medible $(Y, \mathcal{S}_Y)$ tal que*
$$f^{-1}(E) \in \mathcal{S}_X,$$
para todo $E \in \mathcal{S}_Y$.

Si X es un espacio topológico y $A \in \mathbb{B}(X)$ es un conjunto de Borel, las siguientes funciones son ejemplos importantes de funciones medibles:

- La **función característica** de A, definida por,
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$
- La **función simple** se ve como combinación lineal finita de funciones características: $f = \sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{A_i}$ donde los A_i's son medibles y disjuntos dos a dos.

Un espacio medible $(X, \mathcal{S})$ se dice ser **espacio de Borel estándar** cuando es isomorfo a un espacio Polaco Y dotado con una σ−álgebra de Borel $\mathbb{B}(Y)$. Un espacio medible (X, μ) se dice ser un **espacio de probabilidad** si $\mu(X) = 1$.

Definición 3.1.4. *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible. A μ se le llama **medida de probabilidad no-átomica** si para todo $A \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(A) > 0$, existe $B \subset A$ tal que $\mu(A) > \mu(B) > 0$.*

Un **espacio de probabilidad estándar** es un espacio de Borel estándar $(X, \mathcal{S})$ con una medida de probabilidad no-átomica μ definida en la σ−álgebra $\mathcal{S}$. Denotamos a esto, brevemente, como (X, μ) en vez de $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

3.2. La representación de Koopman

En el resto de este trabajo, cuando se mencione un espacio de Hilbert, se entenderá como un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ el grupo unitario de $\mathcal{H}$, que contiene todos los operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$, dotado con la topología fuerte.

Para un grupo numerable G y un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una representación unitaria de G consiste de un homomorfismo $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y denotamos por $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ al espacio de todas las representaciones unitarias de G.

El conjunto $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ es un subespacio cerrado del espacio Polaco $C(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ y por lo tanto, también es un espacio Polaco.

Si (X, μ) es un espacio de probabilidad estándar, denotamos por $\mathcal{L}^2_0(X, \mu)$ el complemento ortogonal de las funciones constantes en el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(X, \mu)$, i.e.,

$$\mathcal{L}^2(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : \int_X |f|^2 < \infty\},$$

y

$$\mathcal{L}^2_0(X, \mu) = \{f \in \mathcal{L}^2(X, \mu) : \int_X f d\mu = 0\}.$$

Si (X, μ) es un espacio de probabilidad estándar, entonces un automorfismo de Borel $T : X \to X$ es llamado un automorfismo que preserva la medida de (X, μ) si para cada $B \in \mathcal{S}$ se tiene que $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$, al cual llamaremos brevemente μ-**automorfismo**. Como es usual, identificamos dos μ−automorfismos T, S de (X, μ) si estos coinciden casi en todas partes, i.e., si

$$\mu(\{x \in X : T(x) \neq S(x)\}) = 0.$$

Bajo esta identificación, y asumiendo de aquí en adelante a (X, μ) como un espacio de probabilidad estándar, denotamos el espacio de todos los μ−automorfismos de (X, μ) por $\mathrm{Aut}(X, \mu)$. Ahora, este conjunto nos da paso al siguiente resultado.

Lema 3.2.1. *Existe una aplicación bien definida,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(X, \mu) &\hookrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}^2_0(X, \mu)) \\ T &\longmapsto U_T \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dada para cada $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ y $f \in \mathcal{U}(\mathcal{L}^2_0(X, \mu))$, por $U_T : f \longmapsto f \circ T^{-1}$.

Demostración. Veamos primero que la aplicación (3.1) está bien definida. Para ello, es necesario verificar que $U_T \in \mathcal{U}(\mathcal{L}_0^2(X,\mu))$, esto es, $U_T(f) \in \mathcal{L}_0^2(X,\mu)$ para cada $f \in \mathcal{L}_0^2(X,\mu)$ y que U_T es unitario.

Sea $f \in \mathcal{L}_0^2(X,\mu)$. Debemos probar que,

$$\int_X U_T(f) d\mu = \int_X f \circ T^{-1} d\mu = 0.$$

Basta demostrar la igualdad anterior para una función característica $f = \chi_A$, pues en [4] se pueden encontrar dos resultados que dicen que una función medible se puede expresar como el límite de una sucesión de funciones simples, y además que una función simple es combinación lineal de funciones características.

Siendo así, sea A un subconjunto medible de X, en cuyo caso se tiene

$$\int_X \chi_A \circ T^{-1} d\mu = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Luego, como $f \in \mathcal{L}_0^2(X,\mu)$, se sigue que

$$\int_X f d\mu = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A) = 0.$$

Veamos ahora que U_T es unitario, esto es, que $U_T^* = U_T^{-1}$. Para ello, es suficiente demostrar que $\langle U_T f, g\rangle = \langle f, U_T^{-1} g\rangle$ para f y g funciones características.

Sean A y B subconjuntos medibles de X, y sean χ_A y χ_B sus correspondientes funciones características. Entonces,

$$\langle U_T \chi_A, \chi_B\rangle = \int_X \chi_A \circ T^{-1} \cdot \chi_B d\mu = \mu(T(A) \cap B)$$

Por otro lado,

$$\langle \chi_A, U_T^{-1}\chi_B\rangle = \int_X \chi_A \cdot \chi_B \circ T d\mu = \mu(A \cap T^{-1}(B)) = \mu(T^{-1}(T(A) \cap B)) = \mu(T(A) \cap B).$$

Finalmente, la inyectividad de la aplicación (3.1) se sigue del hecho de que si $U_T = U_S$, entonces $f \circ T^{-1} = f \circ S^{-1}$ para toda función $f \in \mathcal{L}_0^2(X,\mu)$, lo cual implica que $T^{-1} = S^{-1}$ casi en todas partes y se sigue el resultado que deseábamos demostrar. ■

Como consecuencia del Lema 3.2.1 se tiene que $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ puede identificarse como un subgrupo cerrado del grupo Polaco $\mathcal{U}(\mathcal{L}_0^2(X,\mu))$, y por lo tanto también es un grupo Polaco.

Sea $a : G \longrightarrow \mathrm{Sim}(X)$ una acción de G sobre X. Decimos que a es una μ-acción si $a(g)$ es un μ-automorfismo de (X,μ) para todo $g \in G$, esto es, a define un homomorfismo por restricción

$$a : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X,\mu).$$

Identificamos dos μ–acciones a, b de G en (X,μ) si estas coinciden en casi todas partes, i.e., si para todo $g \in G$ se tiene

$$\mu(\{x \in X : a(g)(x) \neq b(g)(x)\}) = 0.$$

Bajo esta identificación denotamos el espacio de todas las μ–acciones de G en (X,μ) por $A(G,X,\mu)$. Dado que $A(G,X,\mu)$ es un subespacio cerrado del espacio Polaco

$C(G, \mathrm{Aut}(X,\mu))$, también éste es un espacio Polaco.

Toda μ–acción de $A(G,X,\mu)$ con G un grupo numerable y (X,μ) un espacio de probabilidad estándar, se induce de manera canónica a la representación unitaria de Koopman asociada a la acción a de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, dashed, "\kappa^a"] & \\ \mathrm{Aut}(X,\mu) \arrow[r, hook] & \mathcal{U}(\mathcal{L}_0^2(X,\mu)) \end{tikzcd}$$

donde $\kappa_g^a(f)(x) = f(a(g^{-1})(x))$ con $g \in G, f \in \mathcal{L}_0^2(X,\mu), x \in X$.

Dos representaciones unitarias $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}), \rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K})$, con G un grupo numerable y $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ espacios de Hilbert, se llaman unitariamente equivalentes si existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\pi_g"] \arrow[d, "U"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{K} \arrow[r, "\rho_g"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

para todo $g \in G$.

Definición 3.2.2. *Una representación unitaria $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ se dice que es* ***realizable por una acción****, si existe $a \in A(G,X,\mu)$ tal que π es unitariamente equivalente a la representación Koopman κ^a asociada a la acción a.*

Algunos hechos interesantes concernientes a la noción de realizabilidad por una acción, pueden encontrarse en [20, Ap. H-(F)].

3.3. El espacio de representaciones unitarias realizables por una acción

En [20, Prop. H.14] se demuestra que si G es un grupo numerable y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces el conjunto de representaciones unitarias realizables por una acción de G en $\mathcal{H}$ es denso en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$. También se demuestra que dicho conjunto es de primera categoría o residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, ya que es invariante bajo conjugación por elementos del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, y en el caso que G es un grupo abeliano libre de torsión entonces tal conjunto es de primera categoría.

En [20, Problem H.16] el autor plantea el siguiente problema, aún abierto hasta el momento de la redacción de este trabajo:

Pregunta: Sean G un grupo infinito numerable y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita. ¿Es el conjunto de todas las representaciones unitarias de G, realizables por una acción, de primera categoría en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$?

Posteriormente, en [13] se responde una variante de esta pregunta bajo la hipótesis de que G es un grupo abeliano y finito. El resultado obtenido en [13] afirma de hecho, que tal subconjunto es residual, dando una respuesta negativa bajo las hipótesis mencionadas sobre el grupo.

Formalmente, el resultado obtenido por M. Doležal es el siguiente.

Teorema 3.3.1. *[13, Th. 2] Sea G un grupo abeliano finito y sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Entonces el conjunto*

$$\{\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \pi \text{ es realizable por una acción}\}$$

es residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$.

De hecho, Doležal demuestra un resultado más fuerte, a saber que existe una representación unitaria realizable por una acción, cuya clase de equivalencia unitaria es residual en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$.

La prueba del Teorema 3.3.1 será desarrollada en varios lemas, los cuales se demuestran en la siguiente sección, y esencialmente se seguirá de los siguientes hechos:

- Sea el espacio de probabilidad estándar $(X = C(G,[0,1]),\mu)$.
  Como $C(G,[0,1]) = \prod_{g\in G}[0,1]$, se tiene lo siguiente:

  $$\mu(X) = \mu\left(\prod_{g\in G}[0,1]\right) = \prod_{g\in G}(\mu_L([0,1])) = 1,$$

  donde se toma a μ_L como la medida de Lebesgue.

- Consideremos la siguiente acción:

  $$\begin{array}{rccc} a: & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(C(G,[0,1])) \\ & g & \longmapsto & g\cdot x := x(g^{-1}) \end{array}$$

- Sea $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ una representación unitaria y sea $\chi \in G^* = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{C})$ un caracter en el grupo dual. Se define el subespacio $\mathcal{H}_\chi^\pi$ de $\mathcal{H}$ por

  $$\mathcal{H}_\chi^\pi = \{h \in \mathcal{H} : \pi_g(h) = \chi(g)h \quad \forall g \in G\}.$$

- La representación de Koopman asociada a la μ-acción libre a de G sobre el espacio de probabilidad estándar $X = C(G,[0,1])$,

  $$\kappa^a : G \xrightarrow{a} \mathrm{Aut}(X,\mu) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}_0^2(X,\mu))$$

  es unitariamente equivalente a toda representación unitaria $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ tal que $\dim \mathcal{H}_\chi^\pi = \infty$ para todo caracter $\chi \in G^*$ (Lema 3.4.3), y

- El conjunto de las representaciones unitarias $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ tales que $\dim \mathcal{H}_\chi^\pi = \infty$ para todo caracter $\chi \in G^*$ es un subconjunto G_δ-denso en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ (Lema 3.4.4).

De los últimos dos hechos se sigue que cada una de las representaciones en el conjunto

$$A = \{\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \dim \mathcal{H}_\chi^\pi = \infty \ \forall \chi \in G^*\},$$

es realizable por una acción y que además, este conjunto es G_δ-denso en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$. Esto implica que A es una intersección numerable de conjuntos abiertos y por lo tanto, densos en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$. En particular, se sigue que el $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))\backslash A$ está dado por una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, lo cual implica que A es residual y por lo tanto también lo es el conjunto de todas las representaciones unitarias realizables por una acción.

3.4. Demostración del resultado principal

Consideremos la representación de Koopman

$$\kappa^a : G \xrightarrow{\ a\ } \mathrm{Aut}(X,\mu) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}_0^2(X,\mu))$$

asociada a la μ-acción libre

$$\begin{array}{rcl} a : G \times C(G,[0,1]) & \longrightarrow & C(G,[0,1]) \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x := x(g^{-1}) \end{array}$$

sobre el espacio de probabilidad estándar $X = C(G,[0,1])$.

Para cada caracter $\chi : G \to \mathbb{C}$ en el grupo dual de G, se define el subespacio K_χ de $\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))$ por

$$K_\chi = \{f \in \mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1])) : \kappa_g^a(f) = \chi(g) f \quad \forall g \in G\}.$$

Lema 3.4.1. *Para toda* $\chi \in G^*$*, se tiene que* $\dim K_\chi = \infty$*.*

Demostración. Tomemos una $\chi \in G^*$. Para todo $g \in G$ definimos

$$Q_g = \{x \in C(G,[0,1]) : x(g) \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ x(\widehat{g}) \in \left(\frac{1}{2},1\right] \quad \forall \widehat{g} \in G, \widehat{g} \neq g\}.$$

Los conjuntos Q_g, con $g \in G$, son disjuntos dos a dos. También son conjuntos con la medida producto positiva. Denotamos por e al elemento neutro de G y definimos un operador lineal T como

$$T : \mathcal{L}_0^2(Q_e) \to \mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1])).$$

Primero, cada $f \in \mathcal{L}_0^2(Q_e)$ se extiende a $\bigcup_{g\in G} Q_g$ estableciendo

$$T(f)(x) = \chi(g^{-1}) f(a(g^{-1})(x)), \quad g \in G, x \in Q_g.$$

Entonces se fija $T(f)(x) = 0$ para toda $x \in C(G,[0,1]) \backslash \bigcup_{g\in G} Q_g$. Para verificar que está bien definido, se debe probar que $T(f) \in \mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))$ para toda $f \in \mathcal{L}_0^2(Q_e)$. Pero para cada $g \in G$, se tiene que

$$\int_{Q_g} |T(f)|^2 = |\chi(g^{-1})|^2 \int_{Q_e} |f|^2 < \infty$$

y que

$$\int_{Q_g} T(f) = \chi(g^{-1}) \int_{Q_e} f = 0.$$

El operador T está dado por la extesión natural, y así es inyectivo. Por lo que es suficiente con probar que $T(\mathcal{L}_0^2(Q_e)) \subseteq K_\chi$, pues $\mathcal{L}_0^2(Q_e)$ es de dimensión infinita. Para hacer esto, se escoge una $f \in \mathcal{L}_0^2(Q_e)$, con $\widehat{g} \in G$, $x \in C(G,[0,1])$. Si $x \in C(G,[0,1]) \setminus \bigcup_{g\in G} Q_g$ entonces $a(\widehat{g}^{-1})(x) \in C(G,[0,1]) \setminus \bigcup_{g\in G} Q_g$, y además se tiene

$$\kappa_{\widehat{g}}^a(T(f)(x)) = \kappa_{\widehat{g}}^a(0) = 0,$$

$$\chi(\widehat{g})T(f)(x) = 0.$$

Y si $x \in Q_g$ para algún $g \in G$, entonces $a(\widehat{g}^{-1})(x) \in Q_{\widehat{g}^{-1}g}$ y así tenemos que

$$\begin{aligned}
\kappa_{\widehat{g}}^a(T(f))(x) &= T(f)(a(\widehat{g}^{-1})(x)) \\
&= \chi((\widehat{g}^{-1}g)^{-1})f(a((\widehat{g}^{-1}g)^{-1})(a(\widehat{g}^{-1})(x))) \\
&= \chi(g^{-1}\widehat{g})f(a(g^{-1}\widehat{g})(a(\widehat{g}^{-1})(x))) \\
&= \chi(g^{-1})\chi(\widehat{g})f(a(g^{-1}\widehat{g}\widehat{g}^{-1})(x)) \\
&= \chi(\widehat{g})\chi(g^{-1})f(a(g^{-1})(x)) \\
&= \chi(\widehat{g})T(f)(x).
\end{aligned}$$

Se ha llegado a que $\kappa_{\widehat{g}}^a(T(f))(x) = \chi(\widehat{g})T(f)(x)$ para cada $\widehat{g} \in G$ y que $T(f) \in K_\chi$, como se quería. ■

Para una representación unitaria $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ y un caracter en el grupo dual $\chi \in G^* = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{C})$, se define el subespacio $\mathcal{H}_\chi^\pi$ de $\mathcal{H}$ por

$$\mathcal{H}_\chi^\pi = \{h \in \mathcal{H} : \pi_g(h) = \chi(g)h \quad \forall g \in G\}.$$

Lema 3.4.2. *Sea $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$. Entonces se tiene que*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi\in G^*} \mathcal{H}_\chi^\pi,$$

donde $\bigoplus$ se refiere a la suma directa de subespacios ortogonales.

Demostración. Primero, se muestra que los subespacios $\mathcal{H}_\chi^\pi$, con $\chi \in G^*$, son ortogonales dos a dos. Sean $\chi, \chi' \in G^*$ tal que $\chi \neq \chi'$. Entonces hay un $g \in G$ que cumple con $\chi(g) \neq \chi'(g)$. Los subespacios $\mathcal{H}_\chi^\pi$ y $\mathcal{H}_{\chi'}^\pi$ están contenidos en los eigenespacios del operador unitario π_g correspondiente a los eigenvalores $\chi(g)$ y $\chi'(g)$ respectivamente, y estos dos eigenespacios son ortogonales.

Ahora, descomponemos a $\mathcal{H}$ en una suma directa de subespacios de dimensión finita que son invariantes por la representación π. La descomposición se construye por inducción tranfinita.

En el primer paso, se toma un $h \in \mathcal{H}$ diferente de cero y arbitrario, y se define a

$$H_0 = \mathrm{span}\{\pi_g(h) : g \in G\}.$$

Después, se supone que para un α ordinal, se tienen subespacios ortogonales dos a dos de dimensión finita H_β, con $\beta < \alpha$, que son invariantes por π.

Si $\mathcal{H} = \bigoplus_{\beta<\alpha} H_\beta$, la construcción está completa. Y si no es el caso, se toma un h no-cero arbitrario en el complemento ortogonal de $\bigoplus_{\beta<\alpha} H_\beta$ y se define a

$$H_\alpha = \operatorname{span}\{\pi_g(h) : g \in G\}.$$

Esta construcción se terminará en un α ordinal numerable, ya que $\mathcal{H}$ es separable. Entonces se tiene que $\mathcal{H} = \bigoplus_{\beta<\alpha} H_\beta$.

Luego, se tiene por el Teorema de Mascke que cada subespacio H' de $\mathcal{H}$ de dimensión finita invariante (por π) puede descomponerse en una suma directa de subespacios invariantes (por π).

Se sigue, de las consideraciones de arriba, que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} H_i$$

para alguna familia (numerable) $\{H_i : i \in I\}$ de subespacios invariantes (no-triviales) por π. Sea $i \in I$. Se probará que $H_i \subseteq \mathcal{H}^\pi_\chi$, para algún $\chi \in G^*$. Por el caso de dimensión finita del teorema espectral, para cada $g \in G$, el subespacio H_i es una suma directa de eigenespacios de la resticción $\pi_g|_{H_i}$ de π_g a H_i. Cada uno de estos eigenespacios es invariante por π, pues si h es un eigenvector de $\pi_g|_{H_i}$ correspondiente a un eigenvalor $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\widehat{g} \in G$, entonces se tiene

$$\pi_g(\pi_{\widehat{g}}(h)) = \pi_{g\widehat{g}}(h) = \pi_{\widehat{g}g}(h) = \pi_{\widehat{g}}(\pi_g(h)) = \pi_{\widehat{g}}(\lambda h) = \lambda\pi_{\widehat{g}}(h).$$

Pero H_i es invariante y por eso hay un complejo $\chi(g) \in \mathbb{C}$ (que es el único eigenvalor de $\pi_g|_{H_i}$) tal que $\pi_g|_{H_i} = \chi(g)\mathrm{Id}$. Sea $h \in H_i$ un vector no-cero arbitrario. Entonces para todo $g, \widehat{g} \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}
\chi(g)\chi(\widehat{g})h &= \chi(g)\pi_{\widehat{g}}(h) \\
&= \pi_{\widehat{g}}(\chi(g)h) \\
&= \pi_{\widehat{g}}(\pi_g(h)) \\
&= \pi_{\widehat{g}g}(h) \\
&= \chi(\widehat{g}g)h \\
&= \chi(g\widehat{g})h,
\end{aligned}$$

y así $\chi(g)\chi(\widehat{g}) = \chi(g\widehat{g})$. Se sigue que $\chi \in G^*$ y $H_i \subseteq \mathcal{H}^\pi_\chi$.

Finalmente, se tiene que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} H_i = \bigoplus_{\chi\in G^*} \bigoplus_{\substack{i\in I \\ H_i\subseteq\mathcal{H}^\pi_\chi}} H_i \subseteq \bigoplus_{\chi\in G^*} \mathcal{H}^\pi_\chi,$$

y la prueba está completa. ■

Lema 3.4.3. *Sea* $\pi \in \operatorname{Hom}(G, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ *tal que* $\dim \mathcal{H}^\pi_\chi = \infty$ *para todo* $\chi \in G^*$. *Entonces* π *es unitariamente equivalente a* κ^a.

Demostración. Por el Lema 3.4.2, se tiene

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi\in G^*} \mathcal{H}^\pi_\chi.$$

Y al aplicar esto al espacio de Hilbert $\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))$ y con κ^a, se obtiene

$$\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1])) = \bigoplus_{\chi\in G^*} (\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1])))_\chi^{\kappa^a} = \bigoplus_{\chi\in G^*} K_\chi.$$

Como los subespacios $\mathcal{H}_\chi^\pi$ de $\mathcal{H}$ y K_χ de $\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))$ son de dimensión infinita, existe una isometría lineal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))$. Dicha isometría prueba que π y κ^a son unitariamente equivalentes. ■

Lema 3.4.4. *El conjunto* $A = \{\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \dim \mathcal{H}_\chi^\pi = \infty,\ \forall \chi \in G^*\}$ *es* G_δ*−denso en* $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$.

Demostración. Primero, se prueba que A es denso. Tomemos un abierto U en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ de la forma:

$$U(\rho,\varepsilon,h_1,\dots,h_p) = \{\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \|\pi_g(h_j) - \rho_g(h_j)\| < \varepsilon,\ \forall g \in G,\ \forall j \in \{1,\dots,p\}\}$$

donde $\rho \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, $p \in \mathbb{N}$, $h_1,\dots h_p \in \mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$. Se busca encontrar algún $\pi \in A \cap U$. Definimos

$$H' = \mathrm{span}\{\rho_g(h_j) : g \in G, j \in \{1,\dots p\}\}.$$

Entonces H' es un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{H}$ invariante por la representación ρ. Sea T una isometría lineal de $\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))$ sobre el complemento ortogonal $(H')^\perp$ de H' en $\mathcal{H}$. Define $\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ tal que coincida con ρ en H' y tal que la restricción de π a $(H')^\perp$ se define como la conjugación de κ^a por la isometría lineal T.
En otras palabras, se define π de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_g : & H' & \oplus & (H')^\perp & \to & H' & \oplus & (H')^\perp \\ & h & \oplus & \widehat{h} & \mapsto & \rho_g(h) & \oplus & T\circ\kappa_g^a\circ T^{-1}(\widehat{h}) \end{array}$$

Se tiene que $\pi \in U$, ya que

$$\|\pi_g(h_j) - \rho_g(h_j)\| = \|\rho_g(h_j) - \rho_g(h_j)\| = 0 < \varepsilon,$$

para toda $j \in \{1,\dots p\}$.
También se tiene que $\pi \in A$, pues al tomar $\widehat{h} \in T(\mathcal{L}_0^2(C(G,[0,1]))) \subset (H')^\perp$ tal que $\widehat{h} = T(f)$ con $f \in K_\chi$, i.e., $\widehat{h} \in T(K_\chi)$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_g(\widehat{h}) &= T\circ\kappa_g^a\circ T^{-1}(\widehat{h}) \\ &= T\circ\kappa_g^a\circ T^{-1}(T(f)) \\ &= T\circ\kappa_g^a(f) \\ &= T(\chi(g)f) \\ &= \chi(g)T(f) \\ &= \chi(g)\widehat{h} \end{aligned}$$

Por lo que $\widehat{h} \in \mathcal{H}_\chi^\pi$. Recordemos que como T es una isometría lineal, es inyectiva, y se tiene que $T(K_\chi) \subset \mathcal{H}_\chi^\pi$. Así, $\dim \mathcal{H}_\chi^\pi \geq \dim K_\chi = \infty$ para toda $\chi \in G^*$.
Después, se prueba a continuación que A es un conjunto G_δ. Para ello, basta con que el conjunto

$$U_q^\chi = \{\pi \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \dim \mathcal{H}_\chi^\pi \geq q\},\ \forall \chi \in G^*,\ q \in \mathbb{N}$$

sea abierto en $\mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, por que podemos identificar a A como intersección numerable de estos conjuntos, i.e.,

$$A = \bigcap_{\chi \in G^*} \left(\bigcap_{q \in \mathbb{N}} U_q^{\chi} \right).$$

Así que fijemos una $\chi \in G^*$, un $q \in \mathbb{N}$ y un $\pi \in U_q^{\chi}$ para probar que π es un punto interior de U_q^{χ}. Como $\dim \mathcal{H}_{\chi}^{\pi} \geq q$, existen $h_1, \ldots, h_q \in \mathcal{H}$ vectores linealmente independientes tal que para toda $g \in G$ y $j \in \{1, \ldots, q\}$ cumplen que

$$\pi_g(h_j) = \chi(g) h_j.$$

Sea $\eta > 0$ tal que si se toman $h'_1, \ldots, h'_q \in \mathcal{H}$ y cumplen $\left\| h'_j - h_j \right\| < \eta$, para toda $j \in \{1, \ldots, q\}$, entonces $h'_1, \ldots, h'_q$ son linealmente independientes. Suponemos que G tiene n elementos: $g_1, \ldots, g_n$. Definimos

$$C = \min\{|\chi(g) - \chi'(g)| : g \in G,\ \chi, \chi' \in G^*,\ \chi(g) \neq \chi'(g)\},$$

$$\varepsilon = \frac{C\eta}{n},$$

y

$$V(\pi, \varepsilon, h_1, \ldots h_q) = \{\rho \in \mathrm{Hom}(G,\mathcal{U}(\mathcal{H})) : \|\rho_g(h_j) - \pi_g(h_j)\| < \varepsilon,\ \forall g \in G\}.$$

Basta con probar que $V \subseteq U_q^{\chi}$. Para lo cual se elige un $\rho \in V$ y por el Lema 3.4.2, se obtiene que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi' \in G^*} \mathcal{H}_{\chi'}^{\rho}.$$

Se sigue que para toda $j \in \{1, \ldots, q\}$ está la siguiente descomposición

$$h_j = \sum_{\chi' \in G^*} h_j^{\chi'}$$

donde $h_j^{\chi'} \in \mathcal{H}_{\chi'}^{\rho}$, para toda $\chi' \in G^*$ y donde la suma es una suma directa interna.

Así, basta probar que $\left\| h_j^{\chi} - h_j \right\| < \eta$ para toda $j \in \{1, \ldots, q\}$, ya que se obtiene que $h_1^{\chi}, \ldots, h_q^{\chi}$ son vectores linealmente independientes, de esta manera se llega a que $\dim \mathcal{H}_{\chi'}^{\rho} \geq q$, y por tanto $\rho \in U_q^{\chi}$. Tomemos $j \in \{1, \ldots, q\}$, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ denotamos

$$G_k^* = \{\chi' \in G^* : \chi'(g_l) = \chi(g_l),\ \forall l \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

De la definición de estos conjuntos se tiene que $G_k^* \subseteq G_{k-1}^*$, así podemos formar la siguiente sucesión de contenciones:

$$\{\chi\} = G_n^* \subseteq G_{n-1}^* \subseteq \cdots \subseteq G_k^* \subseteq G_{k-1}^* \subseteq \cdots \subseteq G_0^* = G^*.$$

Se sigue que

$$h_j - h_j^{\chi} = \left(\sum_{\chi' \in G^*} h_j^{\chi'} \right) - h_j^{\chi} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\chi' \in G_{k-1}^* - G_k^*} h_j^{\chi'} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\chi' \in G_{k-1}^*} h_j^{\chi'} - \sum_{\chi' \in G_k^*} h_j^{\chi'} \right),$$

y por lo tanto se tiene

$$\left\| h_j - h_j^{\chi} \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{\chi' \in (G^*)_{k-1}} h_j^{\chi'} - \sum_{\chi' \in G_k^*} h_j^{\chi'} \right\|.$$

Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{\chi' \in G^*_{k-1}} h_j^{\chi'} - \sum_{\chi' \in G^*_k} h_j^{\chi'} \right\|^2 &= \left\| \sum_{\chi' \in G^*_{k-1} \setminus G^*_k} h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&= \sum_{\chi' \in G^*_{k-1} \setminus G^*_k} \left\| h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&\leq \frac{|\chi'(g_k) - \chi(g_k)|^2}{C^2} \sum_{\chi' \in (G^*)_{k-1} \setminus G^*_k} \left\| h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \sum_{\chi' \in G^*_{k-1} \setminus G^*_k} |\chi'(g_k) - \chi(g_k)|^2 \ \left\| h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&\leq \frac{1}{C^2} \sum_{\chi' \in G^*} |\chi'(g_k) - \chi(g_k)|^2 \ \left\| h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \left\| \sum_{\chi' \in G^*} (\chi'(g_k) - \chi(g_k)) h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \left\| \sum_{\chi' \in G^*} \chi'(g_k) h_j^{\chi'} - \sum_{\chi' \in G^*} \chi(g_k) h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \left\| \sum_{\chi' \in G^*} \chi'(g_k) h_j^{\chi'} - \chi(g_k) \sum_{\chi' \in G^*} h_j^{\chi'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \left\| \sum_{\chi' \in G^*} \rho_{g_k}(h_j^{\chi'}) - \chi(g_k) h_j \right\|^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \left\| \rho_{g_k}(h_j) - \pi_{g_k}(h_j) \right\|^2 \\
&< \frac{1}{C^2} \varepsilon^2 \\
&= \frac{1}{C^2} \left(\frac{C\eta}{n} \right)^2 \\
&= \frac{\eta^2}{n^2},
\end{aligned}$$

y por eso,

$$\left\| h_j - h_j^{\chi} \right\| < \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta}{n} = \eta,$$

como se quería. ■

Bibliografía

[1] A. Arhangel'skii and M. Tkachenko. *Topological groups and related structures.* Atlantis Press, 2008.

[2] Atiyah Michael and Segal Graem. Twisted K-theory. *Ukranian Mathematical Bulletin*, 1(3):291–334, 2004.

[3] N. Barcenas, J. Espinoza, M. Joachim, and B. Uribe. Classification of twists in equivariant k-theory for proper and discrete actions. *http://arxiv.org/abs/1202.1880*, Febrero 2012.

[4] R. G. . Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Classics Library, 1995.

[5] F. Bien. Construction of telephone networks by group representations. *Notices A. M. S*, 36:5–22, 1989.

[6] F. Chung, B. Kostant, and S. Sternberg. *Groups and the buckyball.* Birkhauser, 1994.

[7] F. Chung and S. Sternberg. Mathematics and the buckyball. *American Scientist*, 83:56–71, 1993.

[8] R. Connelly and A. Back. Mathematics and tensegrity. *Amer Scientist*, pages 142–151, 1998.

[9] A. Connes. Formule de traces en geometrie non-commutative et hypothese de riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:1231–1236, 1996.

[10] F. Constantinescu and F. Toppan. On the linearized artin braid representation. *J. Knot Theory and its Ramifications*, 2, 1993.

[11] M. Craddock. The symmetry groups of linear partial differential equations and representation theory, i. *J. Diff. Equations*, 116:202–247, 1995.

[12] C. W. Curtis. *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer.* AMS and the London Mathematical Society, 2000.

[13] M. Dolezal. Unitary representations of finite abelian groups realizable by an action. *Topology and its Applications*, 164:87–94, 2014.

[14] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[15] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract Algebra.* John Wiley and Sons, 2004.

[16] J. Espinoza and B. Uribe. Topological properties of the unitary group. *JP Journal of Geometry and Topology*, 16(1):45–55, October 2014.

[17] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory. A First Course.* Springer-Verlag, 1991.

[18] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics.* Addison-Wesley, 1995.

[19] K. Gohberg, Goldberg. *Basic Classes of Linear Operators.* Birkhauser, 2003.

[20] A. Kechris. *Global Aspects of Ergodic Group Actions*, volume 160. Mathematical Surveys and Monographs, 2010.

[21] N. H. Kuiper. The homotopy type of unitary group of hilbert space. *Topology*, 3:19–30, 1965.

[22] L. S. Pontryagin. *Topological Groups.* CRC Press;, 1987.

[23] C. Robles and J. C. Ávila. *Topología.* Universidad de Sonora, 2009.

[24] D. Sattinger and O. Weaver. *Lie Groups and Algebras With Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, volume 61. Applied Mathematical Sciences, 1986.

[25] M. Schottenloher. The unitary group in its strong topology. *arXiv:1309.5891 [math.FA]*, September 2013.

[26] J. P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups.* Springer, 1977.

[27] Singer and Thorpe. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry.* Springer, 1967.

[28] V. Vladimirov. On the freund-witten adelic formula for veneziano amplitudes. *Letters in Math. Physics*, 27:123–131, 1993.