UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales y Soluciones Periódicas

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Carmen María Romandía Flores

Director de tesis:
Dra. Inna K. Shingareva

Hermosillo, Sonora, México, 22 de noviembre de 2013

SINODALES

Dr. Rodrigo González González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Carlos Lizárraga Celaya
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. Inna K. Shingareva
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Martín Gildardo García Alvarado
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Contenido

Dedicatoria

A mi familia y amigos, quienes estuvieron conmigo a lo largo de este camino. Lo mejor está por empezar.

Agradecimientos

A toda mi familia que siempre está al pendiente de mí, pero en especial a mi madre, María del Carmen, quien ha cuidado de mí y se ha esforzado para darme lo necesario para salir adelante en la vida. Gracias por dejarme ser la persona que soy ahora.

A mis amigos, nuevos y no tanto, quienes me apoyaron durante toda la carrera. A los de mi generación, con quienes pasamos tantas cosas juntos (divertidas y traumatizantes). A mis amigos de generaciones y carreras diferentes, con quienes me reí y aprendí tanto (sobre la vida y otras cosas). Al grupo de tesistas del verano 2013, fue un placer pasar las vacaciones con ustedes en el "cubo".

A mis maestros, quienes fueron guía en mis estudios.

En general, gracias a todos los que me ayudaron.

For meeting me, thank you.

Prefacio

Este trabajo de tesis se divide en cinco Capítulos, en los que se describen Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales (SLED) de varias clases, propiedades y algunas aplicaciones. Se construyen soluciones analíticas periódicas de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de varias clases.

En el primer Capítulo se da una breve reseña sobre la historia de la evolución de las ecuaciones diferenciales, así como de los científicos que las estudiaron. Se da una introducción sobre los Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales y se ven algunas aplicaciones.

En el segundo Capítulo damos algunas definiciones sobre elementos y conceptos del Álgebra Lineal que utilizamos a lo largo de este trabajo y revisamos propiedades generales de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales.

En el tercer Capítulo profundizamos un poco más a los SLED, estudiando clases particulares de los mismos. Obtenemos soluciones analíticas de SLED de varias clases.

En los últimos dos Capítulos consideramos Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales con coeficientes periódicos.

En el cuarto Capítulo consideramos algunas aplicaciones de SLED con coeficientes periódicos, describimos la teoría de Floquet y propiedades básicas de soluciones de Floquet.

En el quinto Capítulo construimos soluciones periódicas analíticas de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de varias clases. En particular, vemos algunas ecuaciones diferenciales de segundo grado (ecuación de Hill, ecuaciones de Meissner, ecuación de Liénard) que se pueden considerar para modelar varios procesos físicos.

Notación

$y(x), x$	variable dependiente (función), variable independiente;
$y'(x)$	la primera derivada de una función, también se denota $\dfrac{dy(x)}{dx}$;
$y''(x)$	la segunda derivada de una función, también se denota $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$;
$y^{(n)}(x)$	la n-ésima derivada de una función, también se denota $\dfrac{d^ny(x)}{dx^n}$;
$X(t)$	una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales;
$x(t)$	una solución de una ecuación diferencial;
$f(t), F(t)$	una función escalar, una función vectorial;
$c_i (i = 1, 2, \ldots)$	constantes de integración;
$A(t)$	una matriz con coeficientes periódicos;
$I_k (k = 2, 3, \ldots)$	una matriz identidad de dimensión $k \times k$;
$\mathrm{Tr}(C)$	la traza de la matriz de monodromía;
$U(t_2, t_1)$	una matriz de propagación;
$\Phi(t), W(t)$	una matriz fundamental, el Wronskiano;
$\mathcal{V}, \mathcal{F}$	un espacio vectorial, un campo escalar;
λ, ρ	los múltiplos y exponentes de Floquet.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Notas Históricas

Desde los tiempos antiguos, la humanidad ha tenido la necesidad de saber como es el movimiento que describen algunos objetos. Entre ellos destaca el movimiento lunar y la predicción de eclipses lunares, los cuales tenían gran significado religioso. El que un astrónomo lograra predecir el momento exacto en el que ocurría un eclipse hablaba mucho de sus habilidades y le daba gran prestigio. Para lograr esta predicción, los astrónomos dedicaban gran parte de su vida estudiando los movimientos estelares y tenían que saber con exactitud los movimientos que realizaba la Luna en un momento en particular.

Bhaskara II (siglo XII). Matemático y astrónomo de origen hindú [1] se le reconoce por concebir la diferenciación de la función $\operatorname{sen} t$, conocer las propiedas del valor máximo y los conceptos básicos del teorema del valor medio, así como utlizar el cálculo para encontrar el valor de π y el área de superficies curvas, y volúmenes.

Madhava (siglo XIV). Matemático hindú [1] quién aportó grandes avances en el estudio de series infinitas, que es fundamental en análisis matemático.

Con esto vemos que los comienzos del cálculo no fueron en el siglo XVII, sino cientos de años antes. Pero para los historiadores, las bases del cálculo fueron establecidas por Newton y Leibniz.

Isaac Newton (siglo XVII).[1] Físico y matemático de origen inglés considerado por muchos como el científico más grande e influyente que ha existido [20], dió las bases para el Cálculo Diferencial e Integral. Newton descubrió que "El método de fluxiones", como él lo llamaba, estaba basado en la idea de que la integración es el procedimiento inverso de la derivación. Tomando la derivada como operación básica, formuló métodos analíticos que resolvían problemas tales como encontrar áreas, tangentes, longitudes de curvas, máximos y mínimos. En el tema de Ecuaciones Diferenciales, Newton trabajó con algunas ecuaciones de primer orden, las cuales clasificó en tres tipos:

- *El primer tipo* consistía de ecuaciones en las cuales la derivada es una función de una sola variable, x ó y. Por ejemplo, $\dot{y} = f(x)$, $\dot{y} = f(y)$, donde $\dot{y} = y'(x)$.

- *El segundo tipo*, eran ecuaciones en las cuales la derivada es una función que depende de las dos variables x, y. Por ejemplo, $\dot{y} = f(x,y)$, donde $\dot{y} = y'(x)$.

- *El tercer tipo* estaba formado por ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Por ejemplo, $\dot{u} = f(x,y)$, donde $u = u(x,y)$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

En 1687 Newton publicó su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* mejor conocido como *Principia*[1], en el cual escribe su teoría física y su aplicación a la astronomía. En este libro, reconocido como el mejor libro científico escrito, Newton analizó el movimiento de n cuerpos bajo la fuerza de gravitación. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimeinto se basan en la segunda ley de Newton.

Resolvió geométricamente el problema de dos cuerpos, el cual se modela con el siguiente sistema. Sean m_1 y m_2 masas de dos cuerpos esféricos. Fijamos un sistema coordenado tal que el origen sea el centro de masa de los dos cuerpos, y sean (x_1, y_1, z_1) las coordenadas de un cuerpo y (x_2, y_2, z_2) las coordenadas del otro cuerpo; sea r la distancia $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Entonces el

[1]Para más detalles, por ejemplo, se puede ver "The Newton project", disponible en `www.newtonproject.sussex.ac.uk`.

sistema de ecuaciones que describe el movimiento en el tiempo t es:

$$m_1 x_1''(t) = -km_1 m_2 \frac{x_1(t)-x_2(t)}{r^3(t)}, \quad m_1 y_1''(t) = -km_1 m_2 \frac{y_1(t)-y_2(t)}{r^3(t)},$$
$$m_1 z_1''(t) = -km_1 m_2 \frac{z_1(t)-z_2(t)}{r^3(t)}, \quad m_2 x_2''(t) = -km_1 m_2 \frac{x_2(t)-x_1(t)}{r^3(t)},$$
$$m_2 y_2''(t) = -km_1 m_2 \frac{y_2(t)-y_1(t)}{r^3(t)}, \quad m_2 z_2''(t) = -km_1 m_2 \frac{z_2(t)-z_1(t)}{r^3(t)}.$$

Gottfried Leibniz (siglo XVII). Pocos años después, fue el matemático alemán Leibniz quien introdujo el término de “ecuación diferencial” para referirse a la relación entre dos diferenciales dx, dy de dos variables x, y [1]. Con esta teoría, Leibniz estudió problemas geométricos, por ejemplo el problema de la tangente inversa.

Jacob y Johann Bernoulli (siglo XVII). Entre los seguidores de Leibniz se encuentran el par de hermanos suizos [1], quienes propusieron y estudiaron problemas similares, entre ellos está el problema del braquistocrono (el descenso más rápido), el cual es resuelto por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. La resolución de estos problemas llevó a la aparición de los métodos de “separación de variables” y “cambio de variables”.

Las principales aplicaciones de las ecuaciones diferenciales fueron soluciones a problemas geométricos, algunos de los cuales estaban formulados con ecuaciones de orden 2 o superior.

Jacobo Riccati (siglo XVII). Matemático italiano, a quien se le reconoce por la ecuación diferencial no lineal que lleva su nombre,

$$y'(x) = p(x)y^2(x) + q(x)y(x) + r(x),$$

la cuál estudió durante gran parte de su vida para analizar los fenómenos de hidrodinámica. En el siglo XXI, muchas investigaciones siguen apareciendo en la literatura matemática con respecto a la ecuación de Riccati.

Brook Taylor (siglo XVII). Matemático inglés a quién se le atribuye la invención del método de integración por partes, y el descubrimiento de la fórmula que lleva su nombre, la cual describe el comportamiento de una función en una vecindad de un punto.

Alexis Clairaut y Jean D'Alembert (siglo XVIII). Ambos físicos y matemáticos franceses [1], que trabajaron con ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en física. Ambos descubieron una clase de ecuaciones diferenciales con propiedades interesantes, las cuales llevan sus respectivos nombres:

$$y(x) = xy'(x) + f\big(y'(x)\big), \qquad y(x) = xg\big(y'(x)\big) + f\big(y'(x)\big).$$

Leonhard Euler (siglo XVIII). Matemático suizo, contribuyó con muchas ideas importantes para el estudio de ecuaciones diferenciales [20]. Entre estas contribuciones podemos nombrar varios métodos de reducción de orden, soluciones de series de potencias, teoría de ecuaciones lineales de orden arbitrario. Euler también inventó el método de variación de parámetros. En 1750, Euler dió la forma analítica de la segunda ley de Newton, $F{=}m\dfrac{d^2P(t)}{dt^2}$ $\big(F{=}(F_1,F_2,F_3)^{\mathrm{T}}$, $P(t){=}\big(x(t),y(t),z(t)\big)^{\mathrm{T}}\big)$,

$$F_1 = mx''(t), \quad F_2 = my''(t), \quad F_3 = mz''(t).$$

Joseph-Louis Lagrange (siglo XVIII). Matemático italiano quien generalizó el método de variación de parámetros creado por Euler. Extendió y formalizó el trabajo de Newton en mecánica.

Augustin Louis Cauchy, Rudolf Lipschitz (siglo XVIII). La prueba rigorosa de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de primer orden con valor inicial fue presentada por el matemático francés Cauchy. Tiempo después el matemático alemán Lipschitz simplificó y aclaró la teoría de Cauchy.

Émile Picard (siglo XIX). Por su parte, el matemático francés Picard desarrolló una teoría de existencia basada en un método de aproximaciones sucesivas, que es considerada más constructiva que la de Cauchy–Lipschitz. Otros contribuyentes al método de aproximaciones sucesivas son: el matemático francés Joseph Liouville, el matemático prusiano Lazarus Fuchs, el matemático italiano Giuseppe Peano, el matemático estadounidense Maxime Bôcher, entre otros.

El trabajo de Cauchy, Lipschitz y Picard es de naturaleza cualitativa. En vez de encontrar una solución explícita, provee suficientes condiciones en las variables conocidas lo que asegura la existencia de la solución.

El matemático francés Émile Léonard Mathieu es reconocido por sus contribuciones en el area de física-matemática (ecuación de Mathieu, funciones especiales de Mathieu, transformación de Mathieu, grupos de Mathieu). George William Hill, astrónomo y matemático americano estudió la descripción matemática varios problemas de mecánica celeste (el problema de tres cuerpos, el problema de cuatro cuerpos, descripción de movimiento de planetas, ecuación de Hill). El matemático francés Gaston Floquet desarrolló la teoría de Floquet, que es un área de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos.

En los últimos siglos (XX–XXI), este trabajo resultó en un extenso crecimiento del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Entre otros matemáticos que han contribuido de manera significante en el desarrollo de la teoría cualitativa mencionamos a Aleksandr Lyapunov y Henri Poincaré (siglos XIX–XX), Richard Bellman, Ivar Bendixson, George David Birkhoff, Lamberto Cesari, Thomas Gronwall, Solomon Lefschetz, Norman Levinson, Balthasar van der Pol, Aurel Wintner, Edward Ince, E. Meissner, Vladimir I. Arnold [3], Peter J. Olver, Jerrold E. Marsden, Andrei D. Polyanin [16].

1.2 Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

Consideraremos ahora los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales no autónomos de la forma

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{1.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ real no singular, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ es un vector n-dimensional. Los elementos de $A(t)$ son funciones de la variable independiente t y nuestro interés sería el caso en el que estas funciones sean periódicas, pero en el Capítulo 2 daremos una descripción de las propiedades de sistemas más generales.

Las ecuaciones de la forma (1.1) aparecen en el estudio de ecuaciones no lineales

$$X'(t) = F\big(X(t), t\big),$$

donde $F\big(X(t),t\big) = \big(F_1(X(t),t), F_2(X(t),t), \ldots, F_n(X(t),t)\big)^{\mathrm{T}}$ es una función vectorial n-dimensional de $X(t)$ y del tiempo t. Si $F = F\big(X(t)\big)$, entonces una expansión alrededor de los puntos fijos, definida por las ecuaciones $F\big(X(t)\big) = 0$, normalmente nos lleva a la ecuación de la forma (1.1) con una matriz A constante, y el estudio de este sistema lineal nos da información importante sobre el comportamiento de las soluciones en una vecindad de los puntos fijos.

Si el sistema no lineal permite una solución periódica $p(t)$: $p(t+T) = p(t)$ para toda t y algún período $T > 0$, entonces una expansión alrededor de p nos lleva a una ecuación de la forma (1.1) en la que $A(t)$ es una función T-periódica. El estudio de estas ecuaciones lineales nos ayuda a entender, entre otras cosas, la naturaleza de soluciones periódicas.

1.3 Algunas Aplicaciones

I. *Biología Matemática. Modelo de Epidemia SIR.* En 1975, N. T. J. Bailey publicó su libro *"The Mathemetical Theory of Epidemics"*, que trata sobre la teoría matemática de epidemias. En este libro se describen varios modelos para estudiar la transmisión de enfermedades.

Consideremos el primer modelo matemático.
Suponemos que una población de tamaño fijo N puede separarse en tres clases:

1. $S(t)$ denota el número de individuos de la población que son susceptibles a una enferemedad contagiosa dada en el tiempo t.

2. $I(t)$ es el número de individuos en el tiempo t que están infectados, es decir, tienen la enfermedad y son contagiosos.

3. $R(t)$ denota el número de individuos que en el tiempo t se han recuperado de la enfermedad y son inmunes a futuras infecciones.

Suponemos también que al principio todos los individuos son susceptibles y que nadie sale de la comunidad mientras se propaga la epidemia. Entonces, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales describe la propagación de la epidemia en la comunidad:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t), \quad \frac{dI(t)}{dt} = -\beta I(t) + \alpha S(t), \quad \frac{dR(t)}{dt} = \beta I(t),$$

donde α representa la tasa de infección y β la tasa de recuperación. Para determinar la solución única, es necesario incluir condiciones iniciales.

Este modelo es generalmente conocido como el modelo de epidemia *SIR*, donde es obvio que

$$S(t)+I(t)+R(t)=N.$$

II. *Biología Matemática. Modelo de Lotka–Voterra.* Otro ejemplo que podemos tomar en cuenta es el modelo de depredador-presa de Lotka–Volterra. El problema consiste en modelar el comportamiento entre dos especies. Supongamos que en un sistema ecológico existe una especie de depredadores que se alimenta de una especie de animales de presa, y que la presa siempre dispone de alimento abundante. Sea $x(t)$ la población de presas y $y(t)$ la población de depredadores. Como el alimento es abundante, tenemos que la tasa de nacimentos de las presas es constante independiente del tiempo. Sin embargo, la tasa de mortalidad depende del número de depredadores que existen en un tiempo dado.

Por otra parte, tenemos que la tasa de nacimiento de los depredadores depende de la disponibilidad de su alimento, mientras que su tasa de mortalidad permanece constante. Ahora, si escribimos las tasas de crecimiento por individuo para las dos especies, tenemos

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)-bx(t)y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt}=\alpha x(t)y(t)-\beta y(t),$$

donde a, b, α, β son constantes de proporcionalidad positivas.

III. *Mecánica Clásica. Modelo de masa-resorte.* Los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales también tienen aplicaciones en el estudio de la mecánica. Consideremos una masa m unida al extremo de un resorte, como se muestra en la Figura 1.1.

Si al tiempo $t=0$ la masa tiene una posición x_0 y una velocidad v_0, el desplazamiento x de la posición de equilibrio está dada por la ley de Newton:

$$mx''(t)=F(t),$$

donde F representa la fuerza que actúa en la masa. En el modelo de masa y resorte usual, la fuerza total que actúa sobre la masa es considerada como la suma de tres términos:

- La primera fuerza es la de restitución $kx(t)$, con k no negativa, la cual mueve la masa a su posición de equilibrio.

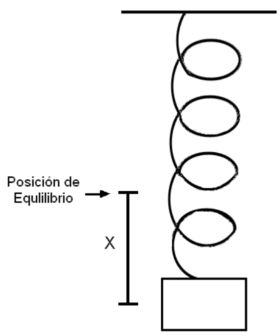

Figura 1.1: Un sistema de masa y resorte

- El segundo término es la fuerza de amortiguamiento $cx'(t)$, donde c es no negativa, que actúa en dirección opuesta al movimiento.
- El tercer término es la fuerza que depende del tiempo $f(t)$, la cual es independiente de la posición o velocidad de la masa.

En este modelo consideramos cuatro casos.

A) En forma general, el modelo consiste en una ecuación diferencial con condiciones iniciales,

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \tag{1.2}$$

Es conveniente convertir ecuaciones diferenciales de orden superior en un sistema de ecuaciones de primer orden. Esto lo podemos hacer mediante el cambio de variable

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = x'(t).$$

La descripción del movimiento del resorte ahora tiene la forma,

$$y_1'(t) = y_2(t), \quad y_2'(t) = -\frac{k}{m}y_1(t) - \frac{c}{m}y_2(t) + \frac{f(t)}{m}, \quad y_1(0) = x_0,\ y_2(0) = v_0.$$

Sería conveniente introducir las nuevas variables:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0, \quad \beta = \frac{c}{m}, \quad F(t) = \frac{f(t)}{m}.$$

Introducimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\beta \end{pmatrix},$$

y las funciones vectoriales

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}.$$

Este sistema de dos ecuaciones se puede escribir de la forma

$$Y'(t) - AY(t) = B(t). \tag{1.3}$$

Esto es un sistema lineal de primer orden para la función vectorial $Y(t)$.

B) Si consideramos ahora el caso particular cuando $f(t)$=0, la ecuación del resorte se convierte,

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

El sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente es

$$Y'(t) - AY(t) = 0. \tag{1.4}$$

Para este tipo de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes buscamos soluciones de la forma

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Si sustituimos esta solución en nuestro sistema (1.4), el resultado es

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} - A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} = 0,$$

que es equivalente al problema de valor propio

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

El conjunto de λ de soluciones no triviales está determinado por la condición

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda + \beta \end{pmatrix} = 0,$$

o equivalente a,

$$\lambda(\lambda + \beta) + \omega_0^2 = 0.$$

En general existen dos soluciones para esta ecuación:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

De la ecuación del valor propio se sigue que los vectores propios no negativos satisfacen $b = \lambda a$. Si $\lambda_+ \neq \lambda_-$, las soluciones del sistema pueden ser encontradas de la forma

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_+ t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_- t}.$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales vemos que

$$a_1 + a_2 = x_0, \quad b_1 + b_2 = \lambda_+ a_1 + \lambda_- a_2 = v_0.$$

Observemos que si c, m, $k > 0$, entonces tenemos dos casos:

$$\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0, \quad \text{ó} \quad \left| \sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2} \right| < \beta.$$

En ambos casos los eigevalores $\lambda_{\pm}$ tienen parte real negativa, así que la solución tiende a 0 cuando $t \to +\infty$.

C) Para simplificar el ejemplo, suponemos que $c = 0$ es decir, que el resorte no tiene fuerza amortiguadora. En este caso, los dos valores propios son imaginarios puros:

$$\lambda_{\pm} = \pm i \sqrt{\omega_0^2}.$$

Utilizando la fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta),$$

la solución

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

de la ecuación

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \tag{1.5}$$

satisface la ecuación y tiene las condiciones iniciales apropiadas.

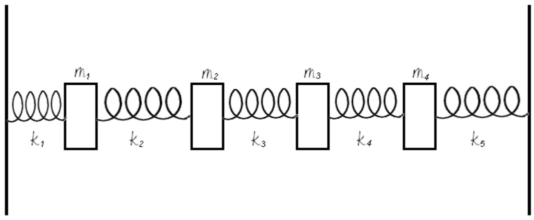

Figura 1.2: Un sistema de masas y resortes

D) Ahora consideramos otro caso particular del modelo de masa y resorte sin amortiguamiento, con $f(t) \neq 0$,

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{a}{m}\operatorname{sen}(\omega t), \quad \omega > 0, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2, \quad a \neq 0. \tag{1.6}$$

Las dos soluciones independientes de (1.5) tengan la forma

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t), \quad x_2(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t). \tag{1.7}$$

Buscando una solución particular del sistema no homogéneo (1.6) de la forma $x_p(t) = b\operatorname{sen}(\omega t)$, vemos que

$$-\omega^2 b + \omega_0^2 b = \frac{a}{m},$$

o similarmente

$$b = \frac{a}{m\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]}.$$

La solución general de (1.6) tiene la forma

$$x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{A}{m\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]}\operatorname{sen}(\omega t).$$

Algunos sistemas mecánicos pueden llevar a sistemas mas complejos de ecuaciones diferenciales. Consideremos un sistema de resortes y masas, sin fuerza de amortiguamiento y sin fuerza externa, como en la Figura 1.2. Si denotamos las masas $m_1, \ldots, m_4$, los resortes con constantes $k_1, \ldots, k_5$, el desplazamiento de la j-ésima masa desde su punto de equilibrio es $x_j(t)$, entonces el sistema de ecuaciones que describe el movimiento de las masas es

$$\begin{aligned} m_1x_1''(t)+k_1x_1(t)-k_2[x_2(t)-x_1(t)]&=0,\\ m_2x_2''(t)+k_2[x_2(t)-x_1(t)]-k_3[x_1(t)-x_2(t)]&=0,\\ m_3x_3''(t)+k_3[x_3(t)-x_2(t)]-k_4[x_2(t)-x_3(t)]&=0,\\ m_4x_4''(t)+k_4[x_4(t)-x_3(t)]+k_5x_4(t)&=0. \end{aligned}$$

IV. *Mecánica Hamiltoniana. Modelo de péndulo esférico.*

En esta aplicación utilizaremos la notación conveniente de derivadas para mecánica Hamiltoniana, es decir, $\dot{q}_k = q_k'(t)$.

Hamilton trabajó por muchos años sobre principios variacionales (en particular, sobre el principio de Fermat) en sus investigaciones sobre óptica. Descubrió (después de introducir una "función principal") que sus ideas permiten resolver el problema de Kepler sobre el moviento de un planeta. Hamilton escribió varios artículos que revolucionaron el campo de la mecánica. Después de muchos cálculos descubrió que era "más conveniente en varios aspectos" trabajar con coordenadas de momento, como sugirió Poisson,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

con la función

$$H(q_1,\dots q_n,p_1,\dots,p_n)=\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_kp_k-\mathcal{L}. \tag{1.8}$$

Esta idea de que las derivadas $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ y las variables independientes p_i simplifican las ecuaciones diferenciales se debe a Legendre. Derivando (1.8) mediante la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i}p_k+\dot{q}_i-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i}$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i}p_k-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i}.$$

Si $\mathcal{L}=T-U$, donde T es la fuerza cinética y U la fuerza potencial del sistema, y tomando p_i como la definimos anteriormente, simplificamos las derivadas

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i=1,\dots,n.$$

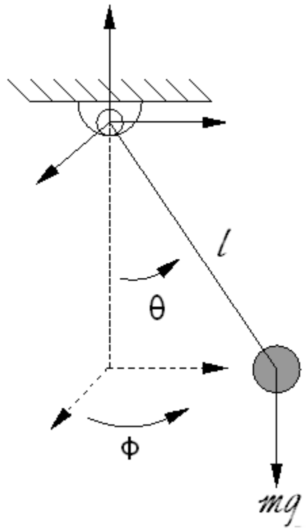

Figura 1.3: Coordenadas Esféricas

Hamilton descubrió que estas ecuaciones son simétricas y el integrar estas ecuaciones de movimiento es el proplema principal de la "dinámica matemática". A estas ecuaciones, Jacobi las llamó *ecuaciones diferenciales canónicas*.

Observación: Si la energía cinética T es una función cuadrática de las velocidades $\dot{q}_i$, la identidad de Euler nos dice que

$$2T = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}.$$

Si asumimos que la energía potencial U es independiente de $\dot{q}_i$, obtenemos la energía total del sistema

$$H = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L} = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = 2T - \mathcal{L} = T + U.$$

Consideramos un modelo particular del péndulo esférico (ver Figura 1.3), con $l = 1$, $m = 1$, $g = 1$ y coordenadas esféricas del espacio Euclidiano:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \\ y &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \\ z &= -\cos\theta. \end{aligned}$$

Tomando como base las ecuaciones de la Mecánica Lagrangiana,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}(\theta+\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta), \\ U &= z = -\cos\theta, \end{aligned}$$

tenemos,

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta,$$

y elminando las variables $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$, obtenemos

$$H = T+U = \frac{1}{2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) - \cos\theta.$$

Así, la energía total del sistema resulta

$$\dot{p_\theta} = p_\varphi^2\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\right) - \operatorname{sen}\theta, \qquad \dot{p_\varphi} = 0,$$

$$\dot{\theta} = p_\theta, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

En este Capítulo, dimos un resumen sobre la historia de las ecuaciones diferenciales y sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, de algunos de los matemáticos que aportaron al desarrollo de las ecuaciones y sistemas, así como las características generales de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. También mencionamos algunas de las aplicaciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales a mecánica clásica.

En el siguiente Capítulo, nos enfocaremos en describir las propiedades generales de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 2

Propiedades Generales de los Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

2.1 Elementos de Álgebra Lineal

DEFINICIÓN 2.1 Un *espacio vectorial* $\mathcal{V}$ sobre un campo real, o complejo, $\mathcal{F}$ es un conjunto de elementos denominados *vectores* en el que están definidas dos operaciones, adición y multiplicación por un escalar, y cumplen con los siguientes axiomas:

i. $x+y=y+x,\ \forall\, x,y\in\mathcal{V}$

ii. $(x+y)+z=x+(y+z),\ \forall\, x,y,z\in\mathcal{V}$

iii. $\exists\ 0\in\mathcal{V}$ tal que $x+0=x,\ \forall\, x\in\mathcal{V}$

iv. $\forall\, x\in\mathcal{V}\ \ \exists y\in\mathcal{V}$ tal que $x+y=0,$

v. $\forall x\in\mathcal{V}\ 1x=x$

vi. $(ab)x=a(bx),\ \forall\, a,b\in\mathcal{F},\ \forall x\in\mathcal{V},$

vii. $a(x+y)=ax+ay,\ \forall\, a\in\mathcal{F},\ \forall x,y\in\mathcal{V}$

viii. $(a+b)x=ax+bx,\ \forall\, a,b\in\mathcal{F}\forall\, x\in\mathcal{V}$

DEFINICIÓN 2.2 Un *espacio afín* es un conjunto $\mathcal{X}$ que admite una acción transitiva libre de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Es decir, existe un mapeo $\mathcal{X} \times \mathcal{V} \to \mathcal{X}$: $(X,V) \mapsto X+V$, que se llama *traslación* por el vector V, tal que cumple las siguientes condiciones:

1. Suma de vectores corresponde a una composición de traslaciones, es decir, $\forall\ X \in \mathcal{X}$ y $U,V \in \mathcal{V}$, la suma de vectores satisface la ley de asociatividad: $X+(U+V) = (X+U)+V$.

2. El vector cero actúa como la identidad, es decir, para todo $X \in \mathcal{X}$, $X+0 = X$.

3. La acción es libre, es decir, para un vector dado $V \in \mathcal{V}$ existe un punto $X \in \mathcal{X}$ tal que $X+V = X$ implica $V = 0$.

4. La acción es transitiva, es decir, para todos los puntos $X,Y \in \mathcal{X}$ existe un vector $V \in \mathcal{V}$ tal que $Y = X+V$.

La dimensión del espacio afín $\mathcal{X}$ es igual a la dimensión del espacio vectorial de traslaciones $\mathcal{V}$.

DEFINICIÓN 2.3 Un subconjunto $\mathcal{W}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ se llama un *subespacio* de $\mathcal{V}$ si $\mathcal{W}$ es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en $\mathcal{V}$.

DEFINICIÓN 2.4 Un subconjunto S de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es *linealmente independiente* si existe un número finito de vectores distintos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ en S y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en $\mathcal{F}$, no todos cero, tales que $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0$. En caso contrario, los elementos de S son *linealmente dependientes*.

DEFINICIÓN 2.5 Una *base* β para un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathcal{V}$ que genera a $\mathcal{V}$. Si β tiene un número finito de elementos, entonces $\mathcal{V}$ se denomina *dimensionalmente finito* y el número de elementos de β es la *dimensión* de $\mathcal{V}$ y se representa $\dim \mathcal{V}$. Una *base ordenada* es una base para $\mathcal{V}$ establecida con un orden específico.

DEFINICIÓN 2.6 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales. Una función $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ se llama *transformación lineal* de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ si $\forall X, Y \in \mathcal{V}$, $c \in \mathcal{F}$ se tiene:

$$T(X+Y) = T(X) + T(Y), \qquad T(cX) = cT(X).$$

DEFINICIÓN 2.7 Un arreglo en m renglones y n columnas de $m \times n$ elementos a_{ij},

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se llama *matriz* $m \times n$. Una matriz es cuadrada si $m = n$.
Sean A, B dos matrices de dimensión $n \times n$, entonces el producto AB es una matriz C cuyos elementos son de la forma $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

DEFINICIÓN 2.8 Sean $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ espacios vectoriales dimensionalmente finitos. Si $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una transformación lineal, entonces existe una *única matriz* A_T tal que

$$TX = A_T X \quad \forall X \in \mathcal{V}.$$

DEFINICIÓN 2.9 La *matriz cero* de dimensión $n \times n$, 0_n, es aquella cuyos todos elementos son cero.

DEFINICIÓN 2.10 La *matriz identidad* de dimensión $n \times n$, I_n, es aquella cuyos elementos de la forma a_{ii} son 1, y los demás 0.

DEFINICIÓN 2.11 Una matriz A es *invertible* si existe A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

DEFINICIÓN 2.12 La *traza* de una matriz A se denota por $\mathrm{Tr}(A)$ y es la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

DEFINICIÓN 2.13 El *determinante* de la matriz A de $n \times n$ se denota como

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Un determinante obtenido al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz A se llama el menor $\tilde{a}_{ij}$ del elemento a_{ij}. Definimos el cofactor de a_{ij} como $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\tilde{a}_{ij}$. En términos de cofactores el determinante de A se define como

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}.$$

DEFINICIÓN 2.14 Un *sistema lineal* de n ecuaciones con n incóngitas es un conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}U_1 + \cdots + a_{1n}U_n &= b_1, \\ a_{21}U_1 + \cdots + a_{2n}U_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}U_1 + \cdots + a_{nn}U_n &= b_n, \end{aligned}$$

donde a_{ij} y b_i, $1 \leq i, j \leq n$ son números reales y U_i, $1 \leq i \leq n$ son n incógnitas.

Este sistema puede ser escrito en la forma

$$AU = B,$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es un vector $n \times 1$ y U es un vector $n \times 1$ de incógnitas. Si $B = 0$ entonces el sistema se llama *homogéneo*, en caso contrario se llama *no homogéneo*.

DEFINICIÓN 2.15 Sean A una matriz de coeficientes constantes con valores en un campo $\mathcal{F}$ y α un vector en $\mathcal{F}^n$. Un elemento $\lambda \in \mathcal{F}$ que satisface la ecuación $(\lambda I_n - A)\alpha = 0$ $(\alpha \neq 0)$ es un *valor propio* de A en $\mathcal{F}$.

DEFINICIÓN 2.16 Cualquier $\alpha \in \mathcal{F}^n$ $(\alpha \neq 0)$ que satisface $(\lambda I_n - A)\alpha = 0$ es llamado *vector propio* para $\lambda \in \mathcal{F}$.

DEFINICIÓN 2.17 El polinomio de grado n que se obtiene de la ecuación

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

es llamado *polinomio característico* y sus raíces $\lambda_j \in \mathcal{F}$ son valores propios de A.

DEFINICIÓN 2.18 Si λ es un valor propio de A, el *espacio propio* $\mathcal{E}(A,\lambda)$ de A para λ es el espacio vectorial

$$\mathcal{E}(A,\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I_n),$$

donde $\mathcal{N}$ denota al *espacio nulo*.

El *espacio propio generalizado* $\mathcal{F}(A,\lambda)$ de A para λ es el espacio vectorial

$$\mathcal{F}(A,\lambda) = \mathcal{N}((A - \lambda I_n)^m), \quad \text{para algún } m > 0.$$

2.2 Propiedades Generales de los Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

La ecuación matricial

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{2.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz real no singular $n \times n$ y $X(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^{\mathrm{T}}$ un vector n-dimensional, es lineal y esto impone ciertas restricciones en el comportamiento de las soluciones. A continuación daremos algunas definiciones y propiedades importantes.

2.2.1 Existencia y Unicidad

Si los elementos de $A(t)$ son funciones definidas y continuas por partes, con una cantidad finita de puntos de discontinuidad e integrables en cada punto de discontinudad, la solución de la ecuación $X'(t) = A(t)X(t)$ con condición inicial $X(0) = X_0$ existe y es única.

Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial normado, $W \subset \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ un conjunto abierto y $f : W \to \mathcal{E}$ un mapeo continuo. Sea $(t_0, u_0) \in W$. Una solución del problema de valor inicial (problema de Cauchy)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x), \\ x(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

es una curva diferenciable $x(t)$ en $\mathcal{E}$ para t en algún intervalo I que tiene las propiedades:

$$\begin{aligned} t_0 \in I, &\qquad x(t_0) = u_0, \\ (t, x(t)) \in W, &\qquad x'(t) = f(t, x(t)), \end{aligned}$$

para todo $t \in I$.

Teorema 2.1 *Sea $W \subset \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ un conjunto abierto y $f : W \to \mathcal{E}$ un mapeo continuo que satisface la condición de Lipschitz en $x(t)$. Si $(t_0, u_0) \in W$, entonces existe $t \in I$ tal que el problema de valor inicial tiene solución y es única.*

La prueba de este teorema para ecuaciones no autónomas se puede encontrar en el libro de Hirsch y Smale ([11], Capítulo 15).

Vamos a aplicar este teorema para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de nuestro sistema (2.1).

Teorema 2.2 *Sea $A : I \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ un mapeo continuo de un intervalo I al espacio de operadores lineales en $\mathcal{E}$. Sea $(t_0, u_0) \in I \times \mathcal{E}$. Entonces el problema de valor inicial*

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = U_0$$

tiene una solución y es única en todo el intervalo.

Demostración. Si $I_0 \subset I$ es compacto, entonces existe una cota superior K para las normas de los operadores $A(t)$, $t \in I_0$. Esta cota superior es una constante de Lipschitz en $X(t)$ para $f \subset I_0 \times \mathcal{E}$ y el Teorema (2.1) se puede aplicar para demostrar nuestro teorema. ∎

2.2.2 Linealidad

Si $\{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t)\}$ son m soluciones del sistema (2.1), reales o complejas, entonces la suma

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k(t) = 0,$$

donde α_k son constantes reales o complejas, también es solución.

Teorema 2.3 *Sea $X(t)$ una solución del sistema $X'(t) = A(t)X(t) + B_1(t)$ y sea $Y(t)$ una solución del sistema $Y'(t) = A(t)Y(t) + B_2(t)$, entonces $\varphi(t) = c_1X(t) + c_2Y(t)$ es solución del sistema diferencial $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + c_1B_1(t) + c_2B_2(t)$.*

Demostración. De $\varphi(t) = c_1X(t) + c_2Y(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= c_1X'(t) + Y'(t) \\ &= c_1(A(t)X(t) + B_1(t)) + c_2(A(t)Y(t) + B_2(t)) \\ &= A(t)(c_1X(t) + c_2Y(t)) + c_1B_1(t) + c_2B_2(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + c_1B_1(t) + c_2B_2(t). \end{aligned}$$

■

Como caso particular para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, tenemos: si $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$ son dos soluciones de las ecuaciones $Y'(t) + p(t)Y(t) = q_i(t)$ (para $i = 1, 2$, respectivamente), entonces $c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $Y'(t) + p(t)Y(t) = c_1q_1(t) + c_2q_2(t)$.

2.2.3 Dependencia Lineal

DEFINICIÓN 2.19 Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto, donde $t \in I$.
Si $\{Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_m(t)\}$ son m funciones vectoriales (reales o complejas) arbitrarias, continuas en I, todas diferentes de cero, y si existen constantes α_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, no todas cero tales que

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k Z_k(t) = 0,$$

entonces las funciones $Z_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, se dicen ser *linealmente dependientes*. De lo contrario, son *linealmente independientes*.

Ejemplo 2.1 *Vectores linealmente dependientes*
Determinamos si los siguientes vectores son linealmente dependientes:

(i) $V_1 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $V_2 = (2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $V_3 = (0,1,-3)^{\mathrm{T}}$,

(ii) $U_1 = (\operatorname{sen}(t-\alpha), \cos(t-\alpha))^{\mathrm{T}}$, $U_2 = (\operatorname{sen}(t-\beta), \cos(t-\beta))^{\mathrm{T}}$.

(i) Resolvemos la ecuación

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones no triviales si $\det(V_1\ V_2\ V_3) = 0$. Calculando el determinante, tenemos que $\det(V_1\ V_2\ V_3) = -8$. Entonces V_1, V_2, V_3 son linealmente dependientes.

(ii) Resolvemos la ecuación

$$d_1 U_1 + d_2 U_2 = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones no triviales si $\det(U_1\ U_2) = 0$. Calculando el determinante, tenemos que $\det(U_1\ U_2) = \operatorname{sen}(\beta - \alpha)$, el cual es igual a cero cuando $\beta - \alpha = \pi k$. Por lo tanto, si $\beta - \alpha = \pi k$, entonces U_1, U_2 son linealmente independientes. □

2.2.4 Matriz Fundamental

DEFINICIÓN 2.20 Si $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ es un conjunto de n soluciones linealmente independientes, la matriz

$$\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

cuya k-ésima columna es el vector $\phi_k(t)$, se le denomina *matriz fundamental*.

Para un sistema arbitrario existen una infinidad de matrices fundamentales, cada una satisface la ecuación diferencial matricial

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t). \tag{2.2}$$

Diferentes conjuntos de soluciones linealmente independientes dan como resultado diferentes matrices fundamentales, pero ya que los componentes de cada conjunto pueden ser expresados como combinaciones lineales de componentes de otro conjunto arbitrario, cualesquiera dos matrices fundamentales $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$ están relacionadas mediante $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$, donde C es una matriz constante no singular.

DEFINICIÓN 2.21 La matriz fundamental que satisface $\Phi(0) = I_n$ es denominada la *matrizant* de la ecuación (2.1).

DEFINICIÓN 2.22 Si la matriz $A(t)$ es T-periódica, la *matriz de monodromía* es el valor de la matrizant en $t = T$, esto es $\Phi(T)$, donde $\Phi(0) = I_n$. Esta matriz tiene un papel importante en la teoría de sistemas periódicos.

2.2.5 Determinante de una Matriz Fundamental

De la definición del determinante podemos calcular la derivada de la función $\det\big(A(t)\big)$. Utilizando la expansión de $A(t)$ por cofactores, tenemos

$$\det\big(A(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\alpha_{ij}(t),$$

se sigue que

$$\frac{\partial \det\big(A(t)\big)}{\partial a_{ij}(t)} = \alpha_{ij}(t),$$

y por lo tanto

$$\Delta(t) = \frac{d}{dt}\big(\det\big(A(t)\big)\big) = \sum_{j=i}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \det\big(A(t)\big)}{\partial a_{ij}(t)}\frac{da_{ij}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(t)a'_{ij}(t),$$

que equivale a,

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \cdots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & \cdots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{n1}(t) & \cdots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Si $F(t)$ es una matriz $n \times n$ de las soluciones $\{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$, entonces sucede uno de los siguientes afirmaciones:

1. $\det(F(t)) \neq 0$, para toda t, en cuyo caso $X_k(t)$ son linealmente independientes y $F(t)$ es una matriz fundamental, ó

2. $\det(F(t)) = 0$, para toda t, en este caso $X_k(t)$ son linealmente dependientes. Inversamente, si $X_k(t)$ son linealmente independientes, $\det(F(t)) = 0$.

2.2.6 Wronskiano

El Wronskiano de un conjunto de n soluciones linealmente independientes está definido como el determinante de la matriz fundamental

$$W(t) = \det(\Phi(t)) = \begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{n1} \\ U_{12} & \cdots & U_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{1n} & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.4 *Si el Wronskiano $W(t)$ de n vectores columna $U_1(t),\ldots,U_n(t)$ es diferente de cero para algún punto en un intervalo I, entonces estas funciones son linealmente independientes en I.*

Demostración. Sean $U_1, \ldots, U_n$ linealmente dependientes en I, entonces existen n constantes $c_1, \ldots c_n$, no todas cero, tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i U_i(t) = 0$ en I. Esto es igual a decir que el sistema homogéneo de ecuaciones,

$$\sum_{i=1}^{n} U_{i_k}(t) c_i = 0, \ 1 \leq k \leq n, \ t \in I,$$

tiene solución no trivial. Sin embargo, sabemos que el sistema $AU = B$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ (ver Agarwal, Teorema 13.2) [1]. Esto es, para cada $t \in I$, este sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si $W(t) = 0$. Pero $W(t) \neq 0$ para algún $t \in I$, y por lo tanto, $U_1(t), \ldots, U_n(t)$ no pueden ser linealmente dependientes. ■

En general, el recíproco de este teorema no es verdadero. Por ejemplo, los vectores $U_1(t) = \big(x(t), 1\big)^{\mathrm{T}}$, $U_2(t) = \big(x^2(t), x(t)\big)^{\mathrm{T}}$, son linealmente independientes en cualquier intervalo I, pero $W\big(U_1(t), U_2(t)\big) = 0$ en I. Pero si $U_1(t), \ldots, U_n(t)$

son soluciones del sistema homogéneo (2.1) en I, entonces obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5 **(Fórmula de Abel)** *Sean $U_1(t),\ldots,U_n(t)$ soluciones linealmente independientes del sistema (2.1) en I, entonces $W(t)\neq 0$ para toda $t\in I$.*

Demostración. Sea t_0 un punto en I donde $W(t_0)=0$, entonces existen constantes $c_1,\ldots,c_n$, no todas cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i U_i(t_0)=0.$$

Ya que $U(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i U_i(t)$ es solución de (2.1), y $U(t_0)=0$, del teorema de existencia y unicidad de las soluciones se sigue que $U(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i U_i(t)=0$ en I. Pero las funciones $U_1(t),\ldots,U_n(t)$ son linealmente independientes en I, entonces $c_1=\cdots=c_n=0$, lo cual es una contradicción. ■

Existe una relación entre la matriz $A(t)$ y el Wronskiano $W(t)$, la cual la damos en el siguiente resultado.

Teorema 2.6 *Sean $U_1(t),\ldots,U_n(t)$ soluciones del sistema (2.1) en I y sea $t_0\in I$. Entonces, para toda $t\in I$,*

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{Tr}(A(s))ds\right). \tag{2.3}$$

Demostración. Por las propiedades del determinante de una matriz, podemos escribir el Wronskiano de la siguiente manera,

$$W'(t)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} U_{1,1}(t) & \cdots & U_{n,n}(t)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ U_{1,i-1}(t) & \cdots & U_{n,i-1}(t)\\ U'_{1,i}(t) & \cdots & U'_{n,i}(t)\\ U_{1,i+1}(t) & \cdots & U_{1,i+1}(t)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ U_{1,n}(t) & \cdots & U_{n,n}(t)\end{vmatrix}.$$

En el i-ésimo determinante remplazamos $U'_{j,i}(t)$ con $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(t)U_{j,k}(t)$ del sistema (2.1) y multiplicamos el primer renglón por $a_{i,1}(t)$, el segundo por $a_{i,2}(t)$ y así sucesivamente, excepto en el i-ésimo renglón, y restamos su suma del i-ésimo renglón y obtenemos

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)W(t) = \big(\mathrm{Tr}A(t)\big)W(t).$$

Integrando de t_0 a t esta ecuación diferencial de primer orden, obtenemos la ecuación (2.3). ■

2.2.7 Dependencia Lineal de las Soluciones

Utilizando la definición del Wronskiano, las soluciones $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ del sistema (2.1) son linealmente independientes en un intervalo I si y sólo si existe al menos un punto $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) \neq 0$.

Cualquiera de las $n+1$ soluciones no triviales de n ecuaciones (2.1) son linealmente dependientes. Inversamente, existe un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (2.1).

Más aún, si $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ es un conjunto de n soluciones linealmente independientes, *cada* solución de (2.1) es una combinación de estas soluciones.

Sea $\phi(t)$ cualquier solución del sistema (2.1) en I tal que $\phi(t) = \phi_0$. Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de las soluciones con valor inicial del sistema (2.1), se sigue que $\phi(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{0_i}\phi_i(t)$, donde $\phi_i(t)$ es solución de (2.1).

Así, cada solución del sistema puede ser expresada como combinación lineal de las $n+1$ soluciones del sistema. Podemos concluir que estas soluciones forman un espacio vectorial.

2.2.8 Soluciones en Términos de Matriz Fundamental

La solución de (2.1) con condición inicial $X(t_0) = X_0$ puede ser expresada como

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}X(t_0),$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental arbitraria.

DEFINICIÓN 2.23 La matriz $U(t_2,t_1) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)^{-1}$, que depende de dos tiempos, t_1 y t_2, se denomina la *matriz de propagación*.

Puesto que el sistema es lineal, la matriz de propagación tiene la propiedad multiplicativa

$$U(t_3,t_1) = U(t_3,t_2)U(t_2,t_1).$$

Para sistemas autónomos, la matriz de propagación $U(t_2,t_1)$ depende solo de la diferencia $t_2 - t_1$.

En general, no es posible encontrar soluciones del sistema lineal no autónomo $X'(t) = A(t)X(t)$ en términos de funciones elementales. Sin embargo, cuando la matriz $A(t)$ es constante, la solución en cualquier caso particular puede ser expresado en términos de funciones trigonométricas, hiperbólicas (o sus productos), y funciones polinomiales de t.

Consideremos ahora el sistema $X'(t) = AX(t)$, donde A es una matriz constante, real, no singular de $n \times n$. Sustituyendo $X(t) = Ee^{\lambda t}$, donde λ es una constante y E es un vector constante, obtenemos la ecuación asociada al valor propio

$$AR = \lambda E.$$

El vector E sería no trivial, distinto de cero, sólo si λ es un valor propio de A, esto es, λ debe satisfacer el polinomio de grado n:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

La ecuación tiene n soluciones $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, las cuales pueden no ser todas diferentes, y deben ser reales ó complejas, en este caso, ocurren en conjugados, ya que A es real. Para algún valor propio dado λ_p le corresponde un vector propio E_p que satisface la ecuación $AE_p = \lambda_p E_p$.

Si la matriz A tiene n vectores propios linealmente independientes, es decir, $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, que corresponden a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, que necesitan ser distintos, la solución general de la ecuación

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{es} \quad X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k e^{\lambda_k t},$$

donde los c_k son constantes.

Si un valor propio λ_p tiene multiplicidad $m \leq n$: $\det(A - \lambda I)$, tiene un factor $(\lambda - \lambda_p)^m$, entonces existen m vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio λ_p. En este caso existen m soluciones de la forma

$$E_1(t)e^{\lambda_p t}, \quad E_2(t)e^{\lambda_p t}, \quad \ldots, \quad E_m(t)e^{\lambda_p t},$$

donde los E_k son polinomios vectoriales de t de grado $m-1$, o menor.

Para sistemas bidimensionales, $n=2$, las combinaciones de valores y vectores propios, que existen, dan lugar a 10 tipos de soluciones, los que se pueden ver en [17].

Si $n \geq 3$, existe una gran cantidad de posibilidades para clasificar, y cada problema debe ser tratado individualmente. Sin embargo, si los valores propios de A satisfacen la condición $Re(\lambda_k) \leq 0$, entonces las soluciones de los sistemas

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{y} \quad X'(t) = [A + C(t)]X(t)$$

son acotadas para $t > t_0$ si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} \left|C_{ij}(t)\right| dt. \tag{2.4}$$

La condición (2.4) es resultado obtenido por Cesari (Teorema 3.4).

Ejemplo 2.2 *Sistema lineal con coeficientes constantes reales*
Consideramos el sistema (1.1) con coeficientes constantes reales, donde la matriz A tiene la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Encontramos los valores y vectores propios correspondientes.

Si calculamos el polinomio característico de la matriz A mediante la fórmula $\det(A - \lambda I)$, obtenemos $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$. Resolviendo la ecuación de tercer orden, obtenemos las soluciones $\lambda_i, \quad i = 1,2,3$. Ahora calculamos los vectores propios con la fórmula $(A - \lambda_i I) = 0 \quad (i = 1,2,3)$ y obtenemos,

Valores Propios	Vectores Propios
$\lambda_1 = 1$	$(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_2 = 2$	$(3/2,-1/2,1)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_3 = 3$	$(1,-1/2,1)^{\mathrm{T}}$

□

Ejemplo 2.3 *Matriz fundamental*
Encontramos la matriz fundamental con valor inicial $\Phi(0) = I_n$ $(n = 2, 3)$ para los sistemas:

$$(i) \quad X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X(t), \qquad\qquad (ii) \quad X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X(t).$$

(i) Si hacemos $X(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}}$, entonces el sistema queda de la forma

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t) - 2y(t).$$

Resolviendo este sistema, encontramos las soluciones generales

$$x(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t), \quad y(t) = e^{-t}(c_2 - c_1 - c_2 t).$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos una matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(ii) Si hacemos $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^{\mathrm{T}}$, entonces el sistema queda de la forma

$$x'(t) = -x(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t) + z(t), \quad z'(t) = -y(t).$$

Resolvemos la ecuación $x'(t) + x(t) = 0$, tenemos

$$x(t) = C_1 e^{-t}.$$

Así, el sistema lo podemos escribir de la siguiente forma, $y''(t) - y'(t) + y(t) = -C_1 e^{-t}$. Resolviendo esta ecuación tenemos que la solución es

$$y(t) = \left[C_2 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] e^{\frac{t}{2}} - \tfrac{1}{3}C_1 e^{-t}.$$

Finalmente calculamos $z(t) = y'(t) - y(t) - x(t)$,

$$z(t) = \left[\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}C_3 - \tfrac{1}{2}C_2\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] e^{\frac{t}{2}} + \left[\left(\tfrac{1}{2}C_3 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}C_2\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] e^{\frac{t}{2}} - \tfrac{1}{3}C_1 e^{-t}.$$

Calculando

$$x(0) = C_1, \quad y(0) = C_2 - \tfrac{1}{3}C_1, \quad z(0) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}C_3 - \tfrac{1}{2}C_2 - \tfrac{1}{3}C_1,$$

igualando a las condiciones iniciales, $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, obtenemos las constantes

$$(C_1,C_2,C_3)=(1,\tfrac{1}{3},\tfrac{\sqrt{3}}{3}),\quad (0,1,\tfrac{\sqrt{3}}{3}),\quad (0,0,\tfrac{2\sqrt{3}}{3}).$$

Por lo tanto, tenemos la matriz fundamental

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ \left[\frac{\cos\alpha}{3}+\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha}{3}\right]e^{\frac{t}{2}}-\frac{e^{-t}}{3} & \left[\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha}{3}\right]e^{\frac{t}{2}} & \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\alpha e^{\frac{t}{2}} \\ \left[\frac{\cos\alpha}{3}-\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha}{3}\right]e^{\frac{t}{2}}-\frac{e^{-t}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\alpha e^{\frac{t}{2}} & \left[\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha}{3}\right]e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix},$$

donde $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}t$. $\square$

Capítulo 3

Clases Particulares de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

3.1 Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Consideremos el sistema homogéneo de la forma

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in I, \tag{3.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ de funciones continuas sobre un intervalo I.

Dado cualquier $t_0 \in I$ entonces existe una solución única $X(t)$ de (3.1) en I que satisface la condición inicial $X(t_0) = X_0$. La función cero, $X(t) = (0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \in I$, es una solución trivial de (3.1).

Si $X(t)$ es alguna solución de (3.1) tal que $X(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in I$, entonces por unicidad ($X(t) = 0$ para toda $t \in I$) $X(t)$ es una solución trivial. Esto nos lleva a los siguientes resultados, los cuales se pueden encontrar en [1].

1. El conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones de (3.1) en I es un *espacio vectorial* n-dimensional sobre el campo escalar $\mathcal{F}$.

2. Sea $t_0 \in I$, sean $X_1(t), \dots, X_k(t)$ k soluciones arbitrarias de (3.1) en I. Entonces $X_1(t), \dots, X_k(t)$ es un conjunto *linealmente independiente* en S si y sólo si $X_1(t_0) = F_1, \dots, X_k(t_0) = F_k$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vecotorial $\mathcal{F}^n$. En particular, si $k = n$, entonces $X_1(t), \dots, X_n(t)$ es una *base* para S si y sólo si $X_1(t_0) = F_1, \dots, X_n(t_0) = F_n$ es una base para $\mathcal{F}^n$.

3. Una *base estándar* $E_1,\ldots,E_n$ (donde cada vector E_j tiene componentes cero excepto la j-ésima entrada, que es uno), tiene la siguiente forma:

$$E_1=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ E_n=(0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

Así, una base para $\mathcal{S}$ consiste de los vectores $X_j(t)\in S$ tal que $X_j(t_0)=E_j$ para algún $t_0\in I$ fijo.

4. Una matriz $n\times n$, $\Phi(t)=\big(\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t)\big)$ con columnas $\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t)$ es una *matriz solución* para (3.1) si cada $\phi_j(t)\in S$.

En este Capítulo obtenemos las soluciones de algunos problemas más generales y relevantes y generalizamos algunos resultados representados en el Capítulo 12 de la monografía científica de Richards [17], es decir, Teoremas 3.1 y 3.3.

Teorema 3.1 *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema diferencial lineal homogéneo (3.1), entonces el vector*

$$X(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 \tag{3.2}$$

es la solución del problema de Cauchy, es decir, satisface el sistema lineal de ecuaciones diferenciales con condición inicial,

$$X'(t)=A(t)X(t),\qquad X(t_0)=X_0.$$

Demostración. Consideramos el vector $X(t)$, dado en (3.2) y lo derivamos con respecto a t, esto es,

$$X'(t)=\frac{d}{dt}(\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0)=\Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0.$$

Por la propiedad de la matriz fundamental (2.2) tenemos

$$X'(t)=A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0=A(t)X(t).$$

■

Ahora consideremos el sistema no homogéneo

$$X'(t)=A(t)X(t)+B(t), \tag{3.3}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n\times n$ de funciones continuas en un intervalo I y $B(t)$ es un vector n-dimensional de funciones continuas en I.

Supongamos que $X_p(t)$ es una solución particular de (3.3) y $X(t)$ es otra solución arbitraria. Entonces $U(t) = X(t) - X_p(t)$ satisface la ecuación lineal homogénea asociada

$$U'(t) = X'(t) - X_p'(t) = A(t)\,[X(t) - X_p(t)] = A(t)U(t).$$

Inversamente, dada cualquier solución $X_p(t)$ de (3.3) y una solución $U(t)$ de (3.1), la función $X(t) = X_p(t) + U(t)$ es solución de (3.3), ya que

$$X'(t) = X_p'(t) + U'(t) = A(t)X_p(t) + B(t) + A(t)U(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Teorema 3.2 *Sea $S(t)$ una base para las soluciones (3.1). Entonces existe una solución $X(t)$ de (3.3) de la forma $X(t) = S(t)C(t)$, donde $C(t)$ es una función diferenciable arbitraria que satisface $S(t)C'(t) = B(t)$. Si $S(t)$ es la base tal que $S(t_0) = I_n$, con I_n la matriz identidad, entonces la solución $X(t)$ de (3.3) satisface $X(t_0) = E$ y está dada por*

$$X(t) = S(t)E + S(t)\int_{t_0}^{t} S^{-1}(s)B(s)ds, \quad t \in I. \tag{3.4}$$

Esta fórmula se llama *variación de parámetros*, y la demostración de este teorema se puede encontrar en [6].

Notemos que en particular, se cumple el siguiente teorema.

Teorema 3.3 *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$, entonces*

a) *la solución del sistema diferencial lineal no homogéneo*

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t),$$

donde $F(t)$ es una función vectorial que depende de t, tiene la forma

$$X(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds;$$

b) *la solución del sitema con condiciones iniciales $X(t_0) = X_0$ tiene la forma*

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds.$$

Demostración.
a) Introducimos el cambio de variable $X(t) = \Phi(t)Y(t)$. Derivando obtenemos,

$$X'(t) = \Phi'(t)Y(t) + \Phi(t)Y'(t) = A(t)X(t) + F(t).$$

Por la propiedad de la matriz fundamental (2.2) tenemos

$$A(t)\Phi(t)Y(t) + \Phi(t)Y'(t) = A(t)\Phi(t)Y(t) + F(t).$$

Restando $A(t)\Phi(t)Y(t)$ ambos lados, la ecuación queda de la forma

$$\Phi(t)Y'(t) = F(t).$$

Multiplicando por $\Phi^{-1}(t)$, obtenemos

$$Y'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t).$$

Ahora, integrando la ecuación anterior con respecto a t, tenemos

$$Y(t) = \int \Phi^{-1}(s)F(s)ds.$$

Sustituyendo $Y(t) = \Phi^{-1}(t)X(t)$ y despejando $X(t)$, encontramos

$$X(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds.$$

b) Por la teoría de ecuaciones diferenciales, la solución del sistema lineal original con condición inicial $X(t_0) = X_0$ es la suma de la solución del sistema lineal homogéneo con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ y la solución del sistema lineal no homogéneo con la condición inicial $X(t_0) = 0$.

La solución del sistema diferencial lineal homogéneo con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ es

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0.$$

La solución del sistema diferencial lineal no homogéneo con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ es

$$X(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds.$$

Entonces, obtenemos el resultado final

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds.$$

■

3.2 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden n

En esta Sección consideramos la siguiente ecuación diferencial lineal de orden n:

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0(t)x(t)=b(t), \quad t\in I, \tag{3.5}$$

donde a_k, b son funciones continuas en el intervalo I.

DEFINICIÓN 3.1 El número mayor entero positivo n de la derivada $x^{(n)}$ que aparece en una ecuación diferencial ordinaria se llama el *orden* de la ecuación.

Esta clase de ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser reducida al estudio de un sistema de primer orden (ver Sección 3.1).

Una solución de (3.5) en I es una función $x: I\to\mathcal{F}$ que tiene n derivadas continuas en I tal que si sustituimos esta función a la ecuación diferencial, obtenemos la identidad:

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0(t)x(t)\equiv b(t), \quad t\in I.$$

Existe un sistema de primer orden asociado con (3.5). Si $x(t)$ es una solución de (3.5), las n funciones

$$y_1(t)=x(t), \quad y_2(t)=x'(t), \quad \ldots, \quad y_n(t)=x^{(n-1)}(t),$$

satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &y_1'(t)=y_2(t), \quad y_2'(t)=y_3(t), \quad \ldots \quad y_{n-1}'(t)=y_n(t),\\ &y_n'(t)=-a_0y_1(t)-a_1y_2(t)-\cdots-a_{n-1}y_n(t)+b(t). \end{aligned}$$

El sistema puede ser escrito de la forma

$$Y'(t)=A(t)Y(t)+B(t), \quad Y(t)=\big(y_1(t),\ldots,y_n(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad t\in I, \tag{3.6}$$

donde

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t)\end{pmatrix}, \quad B(t)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(t)\end{pmatrix}=b(t)E_n.$$

Inversamente, si $Y(t)$ satisface $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ en I, entonces su primer componente es $y_1(t) = x(t)$ tal que $y_j(t) = x^{(j-1)}(t)$, con $j = 1, \ldots, n$, y $x(t)$ satisface (3.5) en I. Este sistema escrito en la forma matricial (3.6) se conoce como el *sistema de primer orden asociado.* De esta manera podemos concluir que para cualquier $t_0 \in I$ y $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{F}^n$, existe una única solución $x(t)$ de (3.5) en I y que satisface

$$x^{(j-1)}(t_0) = \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Si $b(t) \neq 0$ para algún $t \in I$ decimos que la ecuación (3.5) es una *ecuación no homogénea* y la ecuación

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0 \tag{3.7}$$

es la *ecuación homogénea* correspondiente. Su *sistema asociado* es

$$Y'(t) = A(t)Y(t). \tag{3.8}$$

El conjunto $\mathcal{S}$ de todas las soluciones de (3.7) en I es un espacio vectorial n-dimensional $\mathcal{F}^n$. Un conjunto de k soluciones $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ de (3.7) es linealmente independiente si y sólo si (para cada $t_0 \in I$) $\tilde{x}_1(t_0), \ldots, \tilde{x}_k(t_0)$, soluciones de (3.8), es linealmente independiente en $\mathcal{F}^n$.

Problema 3.1 *Ecuación diferencial lineal de segundo orden*
Sea $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ ecuación diferencial lineal de segundo orden.

a) Introduciendo la variable $y(t) = x'(t)$, transformar la ecuación a la forma matricial (2.1) y demostrar que la matriz fundamental con condición incial $\Phi(0) = I_2$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

b) Utilizando este resultado y el Teorema 3.3, demostrar que la solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea con condiciones iniciales,

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \quad x(0) = a, \quad x'(0) = b,$$

es

$$x(t) = a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \operatorname{sen}\big(\omega(t-s)\big)\, ds.$$

Solución.

a) Introduciendo $y(t) = x'(t)$, $y'(t) = -\omega x^2(t)$, formamos la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\operatorname{sen}(\omega t).$$

Por lo tanto $y(t) = x'(t)$ implica

$$y(t) = -c_1\omega\cos(\omega t) + c_2\omega\operatorname{sen}(\omega t).$$

Entonces la matriz fundamental con condiciones iniciales $\Phi(0) = I_2$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) \\ -\omega\operatorname{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

b) Consideramos la ecuación diferencial lineal no homogénea, $x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$, con condiciones iniciales $x(0) = a$, $x'(0) = b$, y la transformamos al sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -\omega^2 x(t) + f(t). \end{aligned}$$

Utilizando el Teorema (3.3) y el resultado anterior, tenemos que

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)\,ds.$$

Haciendo las respectivas operaciones, llegamos a

$$x(t) = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\operatorname{sen}\big(\omega(t-s)\big)\,ds.$$

□

Problema 3.2 *EDO-L de segundo orden con coeficientes variables*
Sea $x''(t) - \frac{2}{t}x'(t) + x(t) = 0$ una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

a) Demuestre que las soluciones son de la forma $x_{1,2}(t) = (1 \mp it)e^{\pm it}$.

b) Consideramos dos ecuaciones: la ecuación original y la ecuación formada si pasamos al límite en los coeficientes cuando $t \to \infty$, es decir

$$x''(t) - \frac{2}{t}x'(t) + x(t) = 0, \tag{3.9}$$

$$x''(t) + x(t) = 0. \tag{3.10}$$

Comparando los límites cuando $t \to \infty$ en las soluciones de estas dos ecuaciones, demuestre que los límites no coinciden; las soluciones de Ec. (3.9) no son acotadas y las soluciones de Ec. (3.10) son acotadas. Este resultado no contradice al Teorema de Cesari [4] (Sección 3.3):

> **Teorema 3.4** *Sean A una matriz con elementos constantes y $C(t)$ una matriz cuyos elementos son funciones de la variable t y cumplen la condición*
>
> $$\int_0^{+\infty} ||C(t)||dt < +\infty. \tag{3.11}$$
>
> *Si todas las soluciones del sistema $X'(t) = AX(t)$ son acotadas en $[0, +\infty)$, entonces las soluciones del sistema $X'(t) = [A + C(t)]X(t)$ son acotadas en $[0, +\infty)$.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en Cesari [4] (Teorema 3.3.3).

Solución.

a) Consideremos la función $x(t) = (1 + at)e^{it} = e^{it} + ate^{it}$, calculamos la primera y segunda derivada,

$$\begin{aligned} x'(t) &= ie^{it} + ae^{it} + atie^{it} = e^{it}(a + ati + i), \\ x''(t) &= -e^{it} + iae^{it} + iae^{it} - ate^{it} = e^{it}(-1 + 2ai - at). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original, obtenemos

$$e^{it}(-1 + 2ai - at) - \frac{2}{t}e^{it}(a + at + i) + (1 + at)e^{it} = 0.$$

Dividimos entre e^{it},

$$-1+2ai-at-\frac{2a}{t}-2ai+\frac{2i}{t}+1+at=0,$$

simplificando la ecuación, tenemos

$$-\frac{2a}{t}+\frac{2i}{t}=0,$$

de donde se sigue que

$$a=-i.$$

Así, una solución $x_1(t)=(1-it)e^{it}$. Puesto que la ecuación original es real, y $x_1(t)$ es la raíz de la ecuación, entonces $x_2(t)=\overline{x_1}(t)$, es también la raíz de la ecuación.

b) Ahora investigamos el comportamiento cualitativo cuando $t\to\infty$. Los coeficientes de la ecuación (3.9) monótonos en $[1,\infty)$ y tienden, cuando $t\to\infty$, a los coeficientes de la ecuación

$$x''(t)+x(t) \;=\; 0.$$

Introduciendo la variable auxiliar $y(t)=x'(t)$, formamos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

calculamos el polinomio característico $P(\lambda)=\lambda^2+1=0$. Así

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-it}+c_2e^{it}=A\cos t+B\operatorname{sen} t,\\ y(t) &= -A\operatorname{sen} t+B\cos t. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que los límites de las soluciones cuando $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{t\to\infty}\left(A\cos t+B\operatorname{sen} t\right),\quad \lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty}\left(-A\operatorname{sen} t+B\cos t\right),$$

no existen. Aunque el comportamiento cuando $t\to\infty$ de las soluciones de la ecuación es:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t)=\lim_{t\to\infty}(1-it)e^{it}\to\infty,\quad \lim_{t\to\infty} x_2(t)=\lim_{t\to\infty}(1+it)e^{-it}\to 1.$$

Notamos que $x_2(t)$ está acotada y $x_1(t)$ no.

Ahora aplicamos el resultado de Cesari, la fórmula (3.11), para la ecuación original. Si introducimos la variable adicional $y(t) = x'(t)$, entonces la ecuación se convierte en la forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Comparando con la fórmula de Cesari (3.11), vimos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i$,

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t \end{pmatrix},$$

entonces la condición (3.11) se convierte en

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_0}^{T} \left|C_{kj}(t)\right| = 0+0+0+\int_{t_0}^{T}\frac{2}{t}dt = 2\ln\left|\frac{T}{t_0}\right|.$$

Si $T \to \infty$, entonces nuestro resultado no acotado y por eso no contradice al Teorema de Cesari. □

3.3 SLED con Coeficientes Constantes

En las Secciones anteriores vimos las estructuras de las soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales no autónomos y ecuaciones diferenciales lineales de orden n. En las siguientes Secciones nos enfocaremos en sistemas lineales homogéneas de ecuaciones diferenciales,

$$X'(t) = AX(t), \tag{3.12}$$

donde A es una matriz con coeficientes constantes.

Para esto, utilizamos algunos resultados de álgebra lineal cómo algunas propiedades de la función e^A, la forma canónica de Jordan de la matriz A.

Valores Propios Complejos

Es conveniente considerar A como una matriz con elementos en el campo complejo para garantizar la existencia de valores propios $\lambda \in \mathbb{C}$ de A.

Teorema 3.5 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con valores propios distintos, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, y sus vectores propios correspondientes, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Entonces el conjunto*

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t}\alpha_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

es una base para el espacio de soluciones $\mathcal{S}$.

Teorema 3.6 *Supongamos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tiene valores propios $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ distintos con multiplicidades algebraicas $m_1,\ldots,m_k$, respectivamente. Si $E \in \mathbb{C}^n$ y $E = E_1 + \cdots + E_k$, donde $E_j \in \mathcal{F}(A,\lambda_j)$, entonces la solución $X(t)$ de (3.12) que satisface la condición inicial $X(0) = E$ tiene la siguiente forma:*

$$X(t) = e^{At}E = e^{\lambda_1 t}P_1(t) + \ldots + e^{\lambda_k t}P_k(t),$$

donde

$$P_j(t)=\left[I_n+t(A-\lambda_j I_n)+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda_j I_n)^2+\ldots+\frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(A-\lambda_j I_n)^{m_j-1}\right]E_j$$

es un vector polinomial de grado a lo más $m_j - 1$.

La demostración de Teoremas (3.5) y (3.6) se puede encontrar en [6].

Teorema 3.7 *Si para cada $j = 1,\ldots,k$ y $i = 1,\ldots,m_j$, los vectores α_{ij} forman una base para $\mathcal{F}(A,\lambda_j)$, entonces los n vectores α_{ij} forman una base para $\mathbb{C}$, y los $X_{ij}(t)$ estan dados por*

$$X_{ij}(t) = e^{\lambda_j t}P_{ij}(t), \quad i = 1,\ldots,m_j \quad y \quad j = 1,\ldots,k,$$

así,

$$P_{ij}(t) = \sum_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}(A-\lambda_j I_n)^p\alpha_{ij}$$

constituye una base para $\mathcal{S}$.

La demostración de este Teorema se puede encontrar en [6].

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tiene parte imaginaria diferente de cero y es valor propio de A con multiplicidad m, entonces $\overline{\lambda}$ también lo es.

Problema 3.3 *EDO-L de tercer orden con coeficioentes constantes*
Definiendo variables auxiliares, escribir la ecuación

$$x'''(t) - x''(t) - 4x'(t) - 4x(t) = 0$$

en la forma matricial (2.1), encontrar una matriz fundamental y demostrar que la matriz de propagación (2.23) es

$$U(t_2,t_1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e+4c+2s & -10s & 4e-4c+8s \\ e-c+2s & 5c & 4e-4c-2s \\ e-c-\frac{1}{2}s & \frac{5}{2}s & 4e+c-2s \end{pmatrix},$$

donde $e = \exp\tau,\ c = \cos 2\tau,\ \tau = t_2 - t_1$.

Solución.

Primero, introducimos $z(t) = x'(t)$ y $w(t) = z'(t)$, y construimos el sistema

$$x'(t) = z(t), \quad z'(t) = w(t), \quad w'(t) = w(t) - 4z(t) + 4x(t).$$

Ahora, con un reacomodo, lo convertimos a la forma matricial (2.1)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w(t) \\ z(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w(t) \\ z(t) \\ x(t) \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculamos los valores y vectores propios.

Valores Propios	Vectores Propios
$\lambda_1 = 1$	$E_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_2 = 2i$	$E_2 = (-4,2i,1)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_3 = -2i$	$E_3 = (-4,-2i,1)^{\mathrm{T}}$

Calculando la solución general, $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k e^{\lambda_k t}$, formamos una matriz fundamental,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -4e^{2it} & -4e^{-2it} \\ e^t & 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \\ e^t & e^{2it} & e^{-2it} \end{pmatrix}.$$

Ahora, con la definición de la matriz de propagación, $U(t_2,t_1) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_1)$ (Definición 2.23), haciendo los cálculos y simplificando con identidades trigonométricas, obtenemos

$$U(t_2,t_1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{\tau}+4\cos 2\tau+2\operatorname{sen} 2\tau & -10\operatorname{sen} 2\tau & 4e^{\tau}-4\cos 2\tau+8\operatorname{sen} 2\tau \\ e^{\tau}-\cos 2\tau+2\operatorname{sen} 2\tau & 5\cos 2\tau & 4e^{\tau}-4\cos 2\tau-2\operatorname{sen} 2\tau \\ e^{\tau}-\cos 2\tau-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\tau & \frac{5}{2}\operatorname{sen} & 4e^{\tau}+\cos 2\tau-2\operatorname{sen} 2\tau \end{pmatrix},$$

y sustituyendo $e = e^{\tau}$, $c = \cos 2\tau$, $s = \operatorname{sen} 2\tau$ y $\tau = t_2 - t_1$, nos queda la matriz que buscamos. □

Problema 3.4 *SLED de segundo orden con coeficientes constantes*
Encuentre la matriz fundamental, con condición inicial $\Phi(t) = I_3$, del sistema de ecuaciones

$$x'(t) = -y(t), \quad y''(t) = -x(t) - y(t) + y'(t).$$

Deduciremos que las únicas soluciones que son acotadas para toda t tiene las condiciones iniciales $(x(0), y(0), y'(0))^{\mathrm{T}} = (0, a, 0)^{\mathrm{T}}$ para una constante a arbitraria.

Solución.

Introduciendo la nueva variable $z(t) = y'(t)$, el sistema queda

$$x'(t) = -y(t), \qquad y'(t) = z(t), \qquad z'(t) = -x(t) - y(t) + z(t).$$

Haciendo un reacomodo, escribimos en la forma matricial (2.1)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

y calculamos los valores y vectores propios,

Valores Propios	Vectores Propios
$\lambda_1 = 1$	$(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_2 = i$	$(1,-i,1)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_3 = -i$	$(1,i,1)^{\mathrm{T}}$

Formamos una matriz fundamental,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} c_1e^t & c_2e^{it} & c_3e^{-it} \\ c_1e^t & -ic_2e^{it} & ic_3e^{-it} \\ -c_1e^t & c_2e^{it} & c_3e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos el matrizant y simplificando, obtenemos

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} e+\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{sen} t) & -\operatorname{sen} t & -e+\frac{1}{2}(\cos t-\operatorname{sen} t) \\ e-\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{sen} t) & \cos t & -e+\frac{1}{2}(\cos t-\operatorname{sen} t) \\ e+\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{sen} t) & -\operatorname{sen} t & e+\frac{1}{2}(\cos t-\operatorname{sen} t) \end{pmatrix}.$$

Ahora, buscaremos M tal que

$$|X(t)| \leq M.$$

Por el teorema anterior, tenemos

$$|X(t)| = \left|\Phi(t)\Phi^{-1}(0)X(t)\right| = |\Phi(t)| \cdot \left|\Phi^{-1}(0)\right| \cdot |X(t)|.$$

Multiplicando por la izquierda la ecuación $\Phi(0) = I_3$, es decir, $\Phi^{-1}(0)\Phi(0) = \Phi^{-1}(0)I_3$, obtenemos $I_3 = \Phi^{-1}(0)$. Por la propiedad $\Phi^{-1}(0) = I_3$, tenemos

$$\Phi(t)\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_1e^{it} \\ -c_1ie^{it} \\ c_1e^{it} \end{vmatrix} = |c_1| \cdot \begin{vmatrix} e^{it} \\ -ie^{it} \\ e^{it} \end{vmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $M = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $|x(t)| \leq M$. □

Valores Propios Reales

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Aplicamos el análisis complejo para determinar soluciones reales del sistema (3.12). Consideramos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y vemos el conjunto de todas las soluciones $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$ de (3.12). Si $X(t) \in \mathcal{S}$, entonces $\overline{X}(t) \in \mathcal{S}$ y el sistema $X'(t) = AX(t)$ implica $\overline{X'(t)} = \overline{AX(t)} = A\overline{X}(t)$. De esta manera, $U = \Re(X)$ y $V = \Im(X)$ también pertenecen a $\mathcal{S}$. Una solución $X(t)$ es real, $X(t) = \overline{X}(t)$, si y sólo si, su valor inicial $X(0) = E$ es real. Se sigue que

$$X(t) = e^{At}E = e^{At}\overline{E} = \overline{X}(t)$$

si y sólo si $E = \overline{E}$.

Problema 3.5 *SLED de segundo orden con coeficientes constantes*
(i) Demuestre que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 2b \end{pmatrix},$$

donde b es una constante, tiene un valor propio $\lambda = b$ con multiplicidad 2, y un vector propio es $R_1 = (1, b)^{\mathrm{T}}$.

(ii) Si R_2 es otro vector y sean c_1, c_2 constantes arbitrarias, demuestre que

$$X(t) = c_1 R_1 e^{bt} + c_2(R_2 + tR_1)e^{bt}$$

es una solución del sistema $X'(t) = AX(t)$ si R_2 satisface la ecuación

$$(A - bI)R_2 = R_1.$$

(iii) Por lo tanto, la solución con condiciones iniciales $X(0) = (\alpha, \beta)$ es

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha + (\beta - b\alpha)t \\ \beta + bt(\beta - b\alpha) \end{pmatrix} e^{bt}.$$

Solución.

(i) Formando el polinomio característico de A, $\lambda^2 - 2b\lambda + b^2 = 0$, tenemos que $\lambda = b$ es un valor propio de multiplicidad dos y su vector propio asociado es $E_1 = (1, b)^{\mathrm{T}}$.

(ii) Si $X(t) = c_1 R_1 e^{bt} + c_2(R_2 + tR_1)e^{bt}$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces tenemos

$$AX(t) = c_1 bR_1 e^{bt} + c_2(AR_2 + tbR_1)e^{bt}, \quad X'(t) - AX(t) = c_2(R_1 + bR_2 - AR_2)e^{bt}.$$

Por lo tanto, $X(t)$ es una solución de la ecuación diferencial si el vector R_2 satisface la ecuación $(A - Ib)R_2 = R_1$.

(iii) Una solución de la ecuación $(A - Ib)R_2 = R_1$ es $R_2 = (1, 1 + b)^{\mathrm{T}}$, entonces la solución general es

$$X(t) = (c_1 + tc_2)\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} e^{bt} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + b \end{pmatrix} e^{bt}.$$

Si $X(t) = (\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$ en $t = 0$, entonces $\alpha = c_1 + c_2$ y $\beta = b\alpha + c_2$, por lo tanto obtenemos

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha + (\beta - b\alpha)t \\ \beta + (\beta - b\alpha)bt \end{pmatrix} e^{bt}. \qquad \square$$

Problema 3.6 *SLED de segundo orden con coeficientes constantes*
Reduce el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'(t) - 3y'(t) &= 2x + y, \\ 2x'(t) + y'(t) &= 4x - 3y \end{aligned}$$

a la forma matricial (2.1) y encuentre la matriz fundamental tal que $\Phi(0) = I_2$.

Solución.

Primero notemos que el sistema lo podemos ver de la siguiente manera:

$$BX'(t) = CX(t), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por B^{-1} por la izquierda y así tenemos

$$X'(t) = (B^{-1}C)X(t) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{8}{7} \\ 0 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} X(t),$$

tomando $A = B^{-1}C$, obtenemos la forma matricial (2.1). Ahora, calculamos los valores y sus vectores propios asociados

Valores Propios	Vectores Propios
$\lambda_1 = -5/7$	$(8,19)^{\mathrm{T}}$
$\lambda_2 = 2$	$(1,0)^{\mathrm{T}}$

Así, la solución general es

$$c_1 E_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 E_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Ahora, formamos la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & \frac{8}{19}(e^{-\frac{5}{7}t} - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-\frac{5}{7}t} \end{pmatrix}.$$

□

Capítulo 4

Teoría de Floquet

4.1 Introducción

Ahora estudiaremos el sistema diferencial lineal con coeficientes periódicos,

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad A(t+T) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ real, no singular, cuyos elementos son funciones T-periódicas.

En el siglo XIX, el matemático Gaston Floquet desarrolló la teoría de los sitemas periódicos y realizó un estudio sistemático de estos sistemas. En general, las soluciones de tales ecuaciones no pueden ser expresadas en términos de funciones conocidas. Sin embargo, la periodicidad da estructura a las soluciones.

Una manera de ver como es el comportamiento de un sistema, es asociarlo con un péndulo vertical en el cual la longitud varía periodicamente, es decir un columpio. Si elegimos el período, se puede mostrar que la energía potencial del sistema (es decir la amplitud del péndulo) incrementa rapidamente. Al observar el movimiento del mismo, podemos decir que la amplitud del movimiento se incrementa con el movimiento que hacemos para impulsarlo, lo que hace que el centro de masa se eleve cuando el columpio pasa por su punto más bajo y baje cuando alcanza su punto más elevado. Un modelo de este movimiento se obtiene al compararlo con un péndulo vertical que cambia su centro de masa de manera instantánea en los puntos indicados.

Como otro ejemplo de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, consideramos un péndulo vertical (de longitud l y masa m) cuyo punto de pivote oscila verticalmente con la frecuencia Ω y amplitud A. La ecuación del movimiento es:

$$\theta''(t) + \omega^2(1 + k^2 \operatorname{sen}(\Omega t)) \operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad k^2 = \frac{A}{l}\frac{\Omega^2}{\omega^2},$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo entre el eje vertical (hacia abajo) y el péndulo. Si hacemos la transformación $\theta(t) = \pi - \phi(t)$ y expandemos alrededor de $\phi(t) = 0$, obtenemos la ecuación del movimiento

$$\phi''(t) + (-\omega^2 - k^2\omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t))\phi(t) = 0.$$

Si hacemos la transformación $\Omega t = 2\tau + \frac{\pi}{2}$, obtenemos la *ecuación de Mathieu*:

$$\phi''(\tau) + (a - 2q\cos(2\tau))\phi(\tau) = 0,$$

donde $a = -\dfrac{4\omega^2}{\Omega^2}$, $q = \dfrac{-4\omega^2 k^2}{\Omega^2} = \dfrac{2A}{l}$.

4.2 Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Periódicos. Aplicaciones

En esta Sección describimos algunas aplicaciones físicas de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos.

4.2.1 Juego Piedra, Papel o Tijera

La teoría de juegos formaliza las interacciones entre varios jugadores mediante la descripción de cuánto gana o pierde cada jugador en función de la estrategia que utiliza en cada jugada, así como las estrategias de los otros jugadores.

Nos enfocaremos en el juego “Piedra, Papel o Tijeras” (RPS por sus siglas en inglés). En este juego, los jugadores interactúan en parejas, y existen tres estrategias de las cuales un jugador solo puede utilizar una: piedra (R), papel (P), o tijeras (S).

Las reglas del juego son las siguientes:

1. la piedra aplasta las tijeras
2. las tijeras cortan el papel
3. el papel envuelve a la piedra.

El ganador obtiene $+1$ puntos, mientras que el perdedor obtiene -1 puntos. Los resultados se pueden resumir en la siguiente matriz

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R & P & S \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ P \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

La supervivencia del más apto nos dice que las estrategias que dan mayores resultados se vuelven más comunes con el tiempo. Para agregar elementos dinámicos de la teoría de juegos a la matriz de resultados, se le agregan ecuaciones diferenciales. Un método común que se utiliza es el de juegos repetidos.

Este método utiliza una ecuación diferencial cuyos coeficientes se toman de la matriz de resultados asociada. Sea A_{ij} la estrategia i utilizada contra la estrategia j en un modelo que incluye una población infinitamente grande de jugadores.

Definimos x_i como la fracción de jugadores en la población que utilizan la estretegia i. Asumiendo que existen N estrategias posibles, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(t) = 1. \tag{4.2}$$

La "aptitud" de un individo que utiliza la estrategia i está dado por

$$f_i(t) = \sum_{j}^{N} A_{ij} x_j(t) \tag{4.3}$$

y el método de juegos repetidos nos dice que

$$x_i(t) = x_i(t)\big(f_i(t) - \Phi(t)\big), \tag{4.4}$$

donde $\Phi(t)$ se elige de tal manera que (4.2) se satisface.

Derivando (4.2) y utilizando (4.4), tenemos

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\big(f_i(t) - \Phi(t)\big) = 0. \tag{4.5}$$

Despejando $\Phi(t)$, tenemos

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{N} x_j(t) f_j(t). \tag{4.6}$$

Consideramos la ecuación (4.4) para estudiar la dinámica evolutiva del juego RPS, el cual puede ser utilizado para modelar diferentes aplicaciones en los campos de la biología y las ciencias sociales.

Para este ejemplo, tomaremos una variación periódica en el juego RPS, tomando coeficientes constantes en la matriz de resultados, por ejemplo:

$$\begin{array}{c} R \\ P \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1+A_1\cos(\omega t) & 1+A_2\cos(\omega t) \\ 1+A_3\cos(\omega t) & 0 & -1+A_4\cos(\omega t) \\ -1+A_5\cos(\omega t) & 1+A_6\cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Las tres ecuaciones de (4.4) pueden ser reducidas en 2 ecuaciones de $x_1(t), x_2(t)$ si eliminamos $x_3(t)$ mediante (4.2), entonces $x_3(t) = 1 - x_1(t) - x_2(t)$. El resultado es

$$x_1(t) = x_1(t)[1-2x_2(t)-x_1(t)] + x_1(t)G_1\big(x_1(t), x_2(t); A_i\big)\cos(\omega t), \tag{4.8}$$

$$x_2(t) = x_2(t)[x_2(t)+2x_1(t)-1] + x_2(t)G_2\big(x_1(t), x_2(t); A_i\big)\cos(\omega t), \tag{4.9}$$

donde G_1, G_2 son polinomios de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y A_i.

En el caso de que todos los coeficientes A_i sean cero, al integrar las ecuaciones (4.8) y (4.9), obtenemos

$$x_1(t)x_2(t)[1-x_1(t)-x_2(t)] = \text{constante}.$$

Los puntos de equilibrio para (4.8) y (4.9) son $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,0)$ y las soluciones exactas son las rectas $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$ y $x_1(t) + x_2(t) = 1$.

Notemos que $x_1(t) + x_2(t) = 1$ es equivalente a $x_3(t) = 0$ por (4.2). En este caso, todos los coeficientes A_i son cero y existe otro punto de equlibrio, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Queremos considerar el caso en el que este equilibrio se preserva bajo los períodos forzados. Para esto se requiere que de (4.8) y (4.9) las ecuaciones G_1 y G_2 desaparezcan en $x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{3}$. Para esto se requiere que

$$A_1 = A_6 + A_5 - A_2, \quad A_3 = A_6 + A_5 - A_4.$$

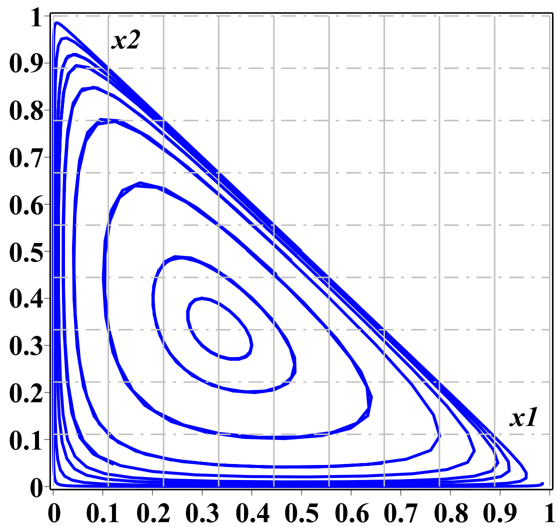

Figura 4.1: Curvas integrales del sistema (4.10), (4.11) ($A = 0.02$, $\omega = 1$)

Elegimos el caso en el que $A_1 = -A_2 = -A$, $A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0$. Esto corresponde a la matriz de resultados

$$\begin{pmatrix} 0 & -1-A\cos(\omega t) & 1+A\cos(\omega t) \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$x_1'(t) = x_1(t)\big(1-2x_2(t)-x_1(t)\big)\left[1+\big(1-x_1(t)\big)A\cos(\omega t)\right], \tag{4.10}$$

$$x_2'(t) = x_2(t)\big(x_2(t)+2x_1(t)-1+\left[x_1(t)\big(2x_2(t)+x_1(t)-1\big)\right]A\cos(\omega t)\big). \tag{4.11}$$

Ecuaciones diferenciales (4.10) y (4.11), que decriben el modelo del juego RPS, son no lineales. Curvas integrales (obtenidas mediante integración numérica) que describen la dinámica evolutiva del juego RPS se muestran en la Figura 4.1. Los parámetros del sistema son $A = 0.02$ y $\omega = 1$.

Para obtener el sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos hacemos el procedimiento de linealización en una vecindad de un punto de equilibrio. Introducimos la transformación

$$x_1(t) = \varepsilon y_1(t) + \tfrac{1}{3}, \quad x_2(t) = \varepsilon y_2(t) + \tfrac{1}{3},$$

es decir, la linealización alrededor del punto de equilibrio $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ con escalamiento de las coordenadas por $\varepsilon \ll 1$. Si sustituimos estas ecuaciones a las ecuaciones del sistema no lineal (4.10) y (4.11), obtenemos

$$y_1'(t)=[\tfrac{1}{9}(3\varepsilon y_1(t)+1)]\big(y_1(t)+2y_2(t)\big)[A\cos(\omega t)(3\varepsilon y_1(t)-2)-3], \quad (4.12)$$
$$y_2'(t)=[\tfrac{1}{9}(3\varepsilon y_2(t)+1)]\big(A\cos(\omega t)[\big(y_1(t)+2y_2(t)\big)(3\varepsilon y_1(t)+1)] +3\big(2y_1(t)+y_2(t)\big)\big). \quad (4.13)$$

Si consideramos valores pequeños de $y_1(t)$, $y_2(t)$, sustituimos $\varepsilon=0$ en las ecuaciones (4.12) y (4.13), obtenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos:

$$y_1'(t) = [\tfrac{1}{9}(y_1(t)+2y_2(t))](-3-2A\cos(\omega t)), \quad (4.14)$$
$$y_2'(t) = \tfrac{1}{9}A\cos(\omega t)\big(y_1(t)+2y_2(t)\big)+\tfrac{1}{3}\big(2y_1(t)+y_2(t)\big). \quad (4.15)$$

En la forma matricial, tenemos el sistema

$$Y'(t)=A(t)Y(t),$$

donde

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ A(t)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{9}A\cos(\omega t)-\frac{1}{3} & -\frac{4}{9}A\cos(\omega t)-\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{9}A\cos(\omega t) & \frac{1}{3}+\frac{2}{9}A\cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

4.2.2 Péndulo Invertido

Un péndulo invertido es un péndulo en el cual su centro de masa se encuentra por arriba de su punto de giro.

Mientras un péndulo normal es estable cuando está hacia abajo, el péndulo invertido es propiamente intestable y debe ser balanceado constantemente para permanecer en posición vertical; esto se puede lograr de varias formas, aplicando una torca en el punto de pivote, moviendo el punto de pivote horizontalmente como resultado de un sistema, oscilando el punto verticalmente, entre otros métodos.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un péndulo invertido es necesario ver las condiciones en las cuales esta restringido. Nosotros estudiaremos el caso en el cual el péndulo invertido tiene un movimiento oscilatorio en la base.

La ecuación de movimiento para un péndulo conectado a una base sin masa con movimiento vertical oscilatorio se obtienen de las ecuaciones de Lagrange $\mathcal{L} = K - U$[1] de la siguiente manera.

Sea $\theta(t)$ el ángulo del péndulo con longitud l con respecto a la vertical y las fuerzas de gravedad y la fuerza F que actúa en la dirección vertical.

Sea $y(t)$ la posición de la base del péndulo. El Lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}mv^2 - mg\big[y(t) + l\cos\big(\theta(t)\big)\big].$$

Escribiendo la velocidad en términos de $y(t)$, $\theta(t)$ y escribiendo la velocidad como la primera derivada de la posición, tenemos

$$v^2 = \big(y'(t)\big)^2 - 2ly'(t)\theta'(t)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) + l^2\big(\theta'(t)\big)^2.$$

Así, sustituyendo la velocidad en el Lagrangiano, queda

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}m\left(\big(y'(t)\big)^2-2ly'(t)\theta'(t)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big)+l^2\big(\theta'(t)\big)^2\right)-mg\big(y(t)+l\cos(\theta(t))\big).$$

Así, la ecuación de movimiento se obtiene de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta'(t)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0.$$

Sustituyendo y despejando, obtenemos

$$l\theta''(t) - y''(t)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) = g\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big).$$

Si $y(t)$ representa un movimiento armónico simple, $y(t) = A\operatorname{sen}(\omega t)$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\theta''(t) - \tfrac{g}{l}\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) = -\tfrac{A}{l}\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big),$$

la cual se puede escribir en la forma

$$\theta''(t) - \tfrac{g}{l}\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) + \tfrac{A}{l}\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) = 0,$$

o en la forma equivalente

$$\theta''(t) + \big(-\tfrac{g}{l} + \tfrac{A}{l}\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)\big)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big) = 0.$$

[1] Aquí K representa la energía cinética del sistema mientras que U es la energía potencial.

Si aproximamos $\operatorname{sen}\bigl(\theta(t)\bigr) \approx \theta(t)$ (la amplitud de la oscilación es pequeña) y aplicamos la transformación $\omega t = \tau + \frac{\pi}{2}$, obtenemos la ecuación de Mathieu:

$$\theta''(\tau) + \bigl(a + b\cos(\tau)\bigr)\theta(\tau) = 0,$$

donde $a = g/(l\omega^2)$, $b = A/l$.

Ahora consideramos una generalización del modelo anterior, es decir, el *péndulo invertido de Kapitsa* [13] (de longitud l y masa m, sujeto a la gravedad g), introducido por P. L. Kapitsa en 1951. El punto de pivote se mueve a lo largo del eje vertical, es decir, sujeto a las oscilaciones verticales $p(t)$ de forma general $p''(t) = r(t)$. La ecuación que describe el movimiento del desplazamiento angular $\theta(t)$ es

$$\theta''(t) + \bigl(\tfrac{g}{l} - \tfrac{1}{l}r(t)\bigr)\operatorname{sen}\bigl(\theta(t)\bigr) = 0,$$

donde $r(t)$ es la función periódica $r(t+2\pi) = r(t)$. Los puntos fijos del péndulo son $(0,0)$ y $(\pi,0)$. El punto fijo $(0,0)$ corresponde a la posición más baja del péndulo y el punto $(\pi,0)$, a la posición más elevada. Si hacemos la linealización de la ecuación del movimiento en la vecindad de los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$, obtenemos, respectivamente, las siguientes *ecuaciones de Hill*:

$$\theta''(t) + \bigl(\tfrac{g}{l} - \tfrac{1}{l}r(t)\bigr)\theta(t) = 0, \quad \theta''(t) - \bigl(\tfrac{g}{l} - \tfrac{1}{l}r(t)\bigr)\theta(t) = 0.$$

La solución de estas ecuaciones es acotada o no acotada, es decir, los puntos fijos son estables o inestables (dependiendo de los parámetros de la ecuación).

4.3 Teorema de Floquet

Consideramos el sistema

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

donde $A(t) \in C(\mathbb{R}, M_{nn}(\mathbb{R}))$, es periódica con período T, $A(t+T) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si $X(t)$ satisface (4.17), entonces $Y(t) = X(t+T)$ también es solución, ya que

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lema 4.1 *Sea $C \in M_{nn}(\mathbb{C})$ invertible, entonces existe $B \in M_{nn}(\mathbb{C})$ tal que $e^B = C$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, asumimos que C está en forma canónica de Jordan. Si no lo está, podemos encontrar una matriz P invertible, $P \in M_{nn}(\mathbb{C})$, tal que $P^{-1}CP = e^B$. Simplificando, obtenemos $C = e^{PBP^{-1}}$. Más aún, por el comportamiento de la matriz exponencial sobre un bloque diagonal, es suficiente probar que para cada bloque de Jordan $p \times p$

$$\tilde{C_p} := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

$\tilde{C_p} = e^{\tilde{B_p}}$ para alguna matriz $\tilde{B_p}$ de dimensión $p \times p$.

Ahora, nuestro candidato para $\tilde{B_p}$ es el logaritmo natural de $\tilde{C_p}$. Para esto, definimos el logaritmo de una matriz de manera similar al exponencial. Notemos que $\tilde{C_p} = \lambda I_p + N_p = \lambda I_p(I_p + N_p/\lambda)$, donde N_p es la matriz nilpotente. Como C es invertible, sabemos que todos los valores propios son distintos de cero. Notemos que por la propiedad de la matriz nilpotente, $(N_p/\lambda)^p = 0$. Entonces tomamos

$$\tilde{B_p} = (\ln \lambda)I_p + \ln(I_p + N_p/\lambda), \tag{4.18}$$

donde

$$\ln(I_p + N_p/\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(N_p/\lambda)^k}{k}. \tag{4.19}$$

Puesto que $(N_p/\lambda)^p = 0$, entonces la suma es convergente. Por lo tanto, sustituyendo (4.19) en (4.18), obtenemos $e^{\tilde{B_p}} = \tilde{C_p}$. ■

Los valores propios λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ de C son llamados *múltiplos de Floquet* de (4.17). Los números ρ_i $(i = 1, \ldots, n)$ tales que $\lambda_i = e^{\rho_i T}$ son llamados *exponentes de Floquet* de (4.17).

Teorema 4.2 *(de Floquet) Sea $X(t)$ una solución (en términos de matriz fundamental) del sistema periódico (4.17). Entonces* *(i)* $X(t+T)$ *es también la solución del sistema (4.17);*

(ii) Existe una matriz invertible T*-periódica* $P(t)$ *tal que* $X(t) = P(t)e^{Bt}$.

Demostración.
(i) Sea $Y(t) = X(t+T)$. Puesto que $X'(t) = A(t)X(t)$, obtenemos

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)Y(t).$$

Por lo tanto, $Y(t)$ es también una solución del sistema (4.17). Puesto que $X(t)$ es invertible para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces $X(t+T)$ es también invertible. Por lo tanto, $Y(t)$ es también una solución (en términos de matriz fundamental) del sistema periódico (4.17).
(ii) Puesto que $Y(t)$ es también una matriz fundamental, entonces tiene la forma $X(t)C$ para una matriz constante invertible C tal que

$$Y(t) = X(t+T) = X(t)C \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo de Lema 4.1, existe una matriz B tal que $e^{BT} = C$. Sea $P(t) = X(t)e^{-Bt}$, es decir, $X(t) = P(t)e^{Bt}$. Entonces

$$\begin{aligned} P(t+T) &= X(t+T)e^{-B(t+T)} = X(t+T)e^{-Bt}e^{-BT} = X(t)Ce^{-Bt}e^{-BT} \\ &= X(t)e^{BT}e^{-BT}e^{-Bt} = X(t)e^{-Bt} = P(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(t)$ es invertible para toda $t \in \mathbb{R}$ y T-periódica. ■

Los múltiplos y los exponentes de Floquet no dependen de la matriz fundamental elegida, aún cuando la matriz de monodromía si depende de esta. Dependen solamente de $A(t)$. Para esto, sean $X(t)$ y $Y(t)$ matrices fundamentales con sus matrices de monodromía correspondientes C y D. Ya que $X(T)$ y $Y(t)$ son matrices fundamentales, existe una matriz constante no singular S tal que $Y(t) = X(t)S$ para toda $t \in \mathbb{R}$. En particular, $Y(0) = X(0)S$ y $Y(T) = X(T)S$. Así

$$C = X(0)^{-1}X(T) = SY(0)^{-1}Y(T)S^{-1} = SY(0)^{-1}Y(0)DS^{-1} = SDS^{-1}.$$

Esto nos dice que las matrices de monodromía son similares y, por lo tanto, tienen los mismos valores propios.

Puesto que C es una matriz constante, se puede calcular para $t=0$, es decir

$$C = X^{-1}(0)X(T). \tag{4.20}$$

Si elegimos las condiciones iniciales $X(0) = I_n$, entonces $C = X(T)$.

Problema 4.1 *SLED con coeficientes periódicos*
Consideramos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos:

$$x'(t) = \left(1 + \frac{\cos t}{4+\operatorname{sen} t}\right)x(t), \quad y'(t) = -2x(t) - y(t),$$

o en la forma matricial equivalente:

$$X'(t) = A(t)X(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 1+\cos t/(4+\operatorname{sen} t) & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

De acuerdo del Teorema de Floquet demuestre que existen las siguientes soluciones linealmente independientes del sistema:

$$X_1(t) = P_1(t)e^t, \quad X_2(t) = P_2(t)e^{-t},$$

donde

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - 2 \end{pmatrix}, \quad P_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son funciones periódicas con el período $T = 2\pi$.

Solución.

Si integramos las dos ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \frac{2\tan^2(\frac{1}{2}t) + \tan(\frac{1}{2}t) + 2}{\tan^2(\frac{1}{2}t) + 1} = c_1 e^t (2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t), \\ y(t) &= c_1 e^t \left(\tfrac{1}{5}\cos t - \tfrac{2}{5}\operatorname{sen} t - 2\right) + c_2 e^{-t}, \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Encontramos una matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t(2+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t) & 0 \\ e^t(\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - 2) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

y la matriz C

$$C = \Phi^{-1}(0)\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los múltiplos de Floquet son $\lambda_1 = e^{2\pi}$ y $\lambda_2 = e^{-2\pi}$, los exponentes de Floquet son $\rho_1 = 1$ y $\rho_2 = -1$.

Determinamos la estructura de la solución general del sistema lineal periódica de acuerdo del Teorema de Floquet:

$$X(t) = P(t)e^{Bt},$$

donde

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t)], \quad P(t) = [P_1(t), P_2(t)] = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & 0 \\ \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, obtenemos las siguientes soluciones linealmente independientes del sistema original:

$$X_1(t) = P_1(t)e^{t}, \quad X_2(t) = P_2(t)e^{-t},$$

donde

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - 2 \end{pmatrix}, \quad P_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son funciones periódicas con el período $T = 2\pi$. □

4.4 Propiedades de Soluciones de Floquet

Teorema 4.3 *Sea λ un múltiplo de Floquet del sistema (4.1) y ρ su exponente de Floquet asociado, entonces existe una solución no trivial $X(t)$ de (4.1) tal que $X(t+T) = \lambda X(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y $X(t) = e^{\rho t}P(t)$ para algún vector funcional T-periódico $P(t)$.*

Demostración. Elijamos x_0 como un vector propio de B corresondiente a su valor propio $\tilde{\lambda}$, donde $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ es la descomposición de una matriz fundamental $\Phi(t)$. Sea $X(t) = \Phi(t)X_0$. Entonces $X(t)$ es solución de (4.1). La serie de potencia para la matriz exponencial implica que X_0 es un vector propio de e^{tB} con valor propio $e^{\rho t}$. De aquí que,

$$X(t) = \Phi(t)X_0 = P(t)e^{tB}X_0 = P(t)e^{\lambda t}X_0 = e^{\rho t},$$

donde $X(t) = P(t)X_0$. También vemos que,

$$X(t+T) = e^{\lambda T}e^{\rho t}P(t+T) = \lambda e^{\lambda t}P(t) = \lambda X(t).$$

■

Aunque los múltiplos y los exponentes de Floquet son determinados por $A(t)$, es necesario calcularlos.

Teorema 4.4 *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los múltiplos de Floquet y $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ los exponentes de Floquet de (4.1), entonces*

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \exp\left(\int_0^T \mathrm{Tr}\left(A(t)\right)dt\right) \tag{4.21}$$

y

$$\rho_1 + \cdots + \rho_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Tr}\left(A(t)\right)dt \mod \left(\frac{2\pi i}{T}\right). \tag{4.22}$$

Demostración. Nos enfocaremos en (4.21). La fórmula (4.22) se sigue de esta demostración.

Sea $W(t)$ el determinante de la matriz fundamental principal $\Phi(t)$. Sea S_n el conjunto de permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\}$ y sea $\varepsilon : S_n \to \{-1,1\}$ un mapeo de paridad. Entonces

$$W(t) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\Phi_{1,\sigma(1)}(t)\Phi_{2,\sigma(2)}(t)\cdots\Phi_{n,\sigma(n)}(t),$$

donde $\Phi_{ij}(t)$ es la (i,j)-ésima entrada de $\Phi(t)$.

Luego diferenciando ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned}
W'(t) &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\frac{d}{dt}[\Phi_{1,\sigma(1)}(t)\Phi_{2,\sigma(2)}(t)\cdots\Phi_{n,\sigma(n)}(t)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\Phi_{1,\sigma(1)}(t)\cdots\Phi_{i-1,\sigma(i-1)}(t)\Phi'_{i,\sigma(i)}(t)\Phi_{i+1,\sigma(i+1)}(t)\cdots\Phi_{n,\sigma(n)}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\Phi_{1,\sigma(1)}(t)\cdots\Phi_{i-1,\sigma(i-1)}(t)\left[\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(t)\Phi_{j,\sigma(i)}(t)\right]\Phi_{i+1,\sigma(i+1)}(t)\cdots\Phi_{n,\sigma(n)}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(t)\left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\Phi_{1,\sigma(1)}(t)\cdots\Phi_{i-1,\sigma(i-1)}(t)\Phi_{j,\sigma(i)}(t)\Phi_{i+1,\sigma(i+1)}(t)\cdots\Phi_{n,\sigma(n)}(t)\right).
\end{aligned}$$

Si $i \neq j$, la suma interior es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la i-ésima fila de $\Phi(t)$ por su j-ésima fila. Esta nueva matriz, la cual tiene dos filas iguales, necesariamente tiene determinante igual a 0. Por lo tanto,

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}(t) \det\big(\Phi(t)\big) = \big[\mathrm{Tr}\,\big(A(t)\big)\big]\, W(t).$$

Así

$$W(t) = \exp\left[\int_0^t \mathrm{Tr}\,\big(A(s)\big)\, ds\right] W(0) = \exp\big[\mathrm{Tr}\,\big(A(t)\big)\big]\,.$$

En particular,

$$\begin{aligned} \exp\big[\mathrm{Tr}\,\big(A(t)\big)\big] &= W(t) = \det(P(T)e^{TB}) = \det(P(0)e^{TB}) \\ &= \det e^{TB} = \det C = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Soluciones Periódicas de SLED de Varias Clases

5.1 Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales Unidimensionales de Primer Orden

En este Capítulo consideramos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, construimos soluciones periódicas de algunos problemas más generales y relevantes (Problemas 5.1-5.8), generalizamos algunos resultados representados en el Capítulo 12 de la monografía científica de Richards [17] (Teoremas 5.1–5.8).

Empezamos con el sistema diferencial lineal homogéneo unidimensional. Su forma general con condición inicial es

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(0) = X_0, \qquad A(t+T) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

donde $X(t) = x(t)$, y $A(t) = a(t)$ es una función periódica con período T. Esta ecuación se puede resolver por el método de separación de variables,

$$x(t) = x(0)\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right).$$

La linealidad de las ecuaciones y la periodicidad de los coeficientes restringen los posibles tipos de soluciones: si $x(t)$ es solución, entonces $y(t) = x(t+T)$ también es solución, ya que

$$y'(t) = x'(t+T) = a(t+T)x(t+T) = a(t)y(t).$$

Por lo tanto, $x(t+T)$ y $x(t)$ satisfacen la ecuación (5.1). Sin embargo, no necesariamente son la misma función. Puesto que la ecuación diferencial es lineal y de primer orden, existe solo una solución linealmente independiente:

$$x(t+T) = cx(t), \tag{5.2}$$

donde c es una constante. Generalizamos este resultado para $x(t+nT)$, donde n es un número entero.

Teorema 5.1 *Sea n un número entero, entonces*

$$x(t+nT) = c^n x(t),$$

donde $a(t)$ es una función periódica con período T y

$$c = \exp\left(\int_0^T a(t)\,dt\right).$$

Demostración. Puesto que $x(t+T) = cx(t)$ para $n = 1$, esta ecuación tiene la forma general

$$x(t+nT) = cx(t+(n-1)T) \text{ para } n \in \mathbb{Z},$$

y de acuerdo con (5.2) tenemos $x(t+(n-1)T) = cx(t+(n-2)T)$, la cual podemos sustituir en la ecuación anterior,

$$x(t+nT) = c[cx(t+(n-2)T)].$$

Luego, obtenemos

$$x(t+nT) = c\cdots c[x(t+(n-n)T)],$$

esto es,

$$x(t+nT) = c^n x(t).$$

■

Si analizamos el comportamiento cualitativo de la solución $x(t)$ para varios valores de c, obtenemos las siguientes condiciones para soluciones periódicas:

1. $c > 1$: c^n crece exponencialmente cuando n crece, así la solución $x(t)$ también crece exponencialmente.

2. $c < 1$: $c^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

3. $c = 1$: $x(t+T) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, entonces la solución es periódica. Esto ocurre si se cumple el siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Sea $x(t)$ una solución periódica de (5.1), entonces el valor medio de $a(t)$ es cero, es decir*

$$\int_0^T a(t)\,dt = 0.$$

Demostración. Por la periodicidad tenemos

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{si} \quad c = 1.$$

Resolviendo la ecuación diferencial $x'(t) = a(t)x(t)$ por el método de separación de variables, tenemos $\ln x(t) = \int a(t)\,dt$. Por la periodicidad de $x(t)$, tenemos $\ln\left(\dfrac{x(t+T)}{x(t)}\right) = \int a(t)dt$. Despejamos c de (5.2) y obtenemos $\ln c = \int_0^T a(t)dt$. Esto es, $c = \exp\left(\int_0^T a(t)dt\right)$.

Ahora sustituyendo en la condición anterior, obtenemos

$$1 = \exp\left(\int_0^T a(t)\,dt\right).$$

Así,

$$\int_0^T a(t)\,dt = 0.$$

■

Problema 5.1 *EDO-L de primer orden con coeficientes periódicos*
Consideramos la ecuación diferencial lineal de primer orden con la condición inicial

$$x'(t) = x(t)\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(\sigma t), \quad x(0) = 1, \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

donde $\sigma = p/q$ y p, q son primos relativos.

Demuestre los siguientes resultados:

a) La solución del problema de valor inicial es de la forma:

$$x(t) = \exp\left(\frac{\text{sen}(\sigma-1)t}{2(\sigma-1)} - \frac{\text{sen}(\sigma+1)t}{2(\sigma+1)}\right). \tag{5.3}$$

b) La solución es periódica con período $T = \pi q$ y $C = 1$, en este caso $x(0) = x(\pi q) = 1$.

c) El valor máximo de la solución no está acotado (para $0 < \sigma < 1$).

Solución.

a) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

la condición inicial $x(0) = 1$ y resolviendo el problema por el método de separación de variables, obtenemos

$$x(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos(\sigma t - t) - \cos(\sigma t - t)\right] dt\right).$$

Resolviendo la integral, obtenemos la solución

$$x(t) = \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(\sigma t - t)}{2(\sigma-1)} - \frac{\operatorname{sen}(\sigma+1)t}{2(\sigma+1)}\right).$$

b) Para que la solución sea periódica con período $T = \pi q$, se debe cumplir $x(0) = x(\pi q)$. Simplificando la solución, encontramos

$$\frac{\operatorname{sen}(\sigma t - t)}{2(\sigma-1)} - \frac{\operatorname{sen}(\sigma+1)t}{2(\sigma+1)} = \frac{\operatorname{sen}(\sigma t)\cos t - \cos(\sigma t)\operatorname{sen} t}{\sigma^2-1},$$

y evaulando en $t = \pi q$ tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi p)\cos(\pi q) - \cos(\pi p)\operatorname{sen}(\pi q)}{\sigma^2-1}.$$

Como p y q son primos relativos, y $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para $n \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple

$$x(\pi q) = e^0 = 1.$$

Por lo tanto, la solución es periódica con período $T = \pi q$.

c) Ahora, investigaremos los valores máximos de la solución periódica.

1) Investigaremos los valores máximos de la solución periódica para diferentes valores de σ con $0 < \sigma < 1$ con Maple [19].

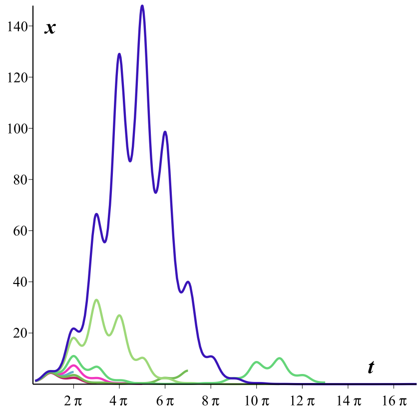

Figura 5.1: Gráficas de la solución (5.3) para distintos valores de σ

Las gráficas de la solución (5.3) para distintos valores de σ $(0 < \sigma < 1)$: $\sigma = \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{11}, \frac{11}{13}, \frac{13}{17}, \frac{17}{19}$ se muestran en la Figura 5.1. Los valores máximos no están acotados: 4.753331434, 4.419496638, 7.319030111, 5.277486397, 32.95564262, 11.00181004, 147.9336580.

2) Investigaremos los valores máximos de la solución periódica para un σ $(0 < \sigma < 1)$ fijo $(t \in [1, n\pi])$.

Si hacemos las gráficas de la solución (5.3) para $\sigma = \frac{11}{13}$ y calculamos los valores máximos, obtenemos 5.135682957, 18.13038079, 32.95564262, 32.95564262, 32.95564262, 32.95564262, 32.95564262, 32.95564262, 32.95564262. Por lo tanto, los valores máximos de la solución periódica están acotados para un σ fijo. $\square$

5.2 Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales n-dimensionales de Primer Orden

Ahora, consideremos el sistema lineal homogéneo n-dimensional:

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(0) = X_0, \qquad A(t+T) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

donde $A(t)$ es una matriz real de dimensión $n \times n$ cuyos elementos son funciones continuas T-periódicas, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R} \to M_{nn}(\mathbb{R})$, $A(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M_{nn}(\mathbb{R}))$.

Con las n soluciones linealmente independientes del sistema, $(X_1(t),\ldots,X_n(t))$, podemos formar la matriz fundamental

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

que satisface la ecuación matricial $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$. Los vectores $Y_k(t){=}X_k(t{+}T)$ también son soluciones de la ecuación diferencial, ya que

$$Y_k'(t)=X_k'(t+T)=A(t+T)X_k(t+T)=A(t)Y_k.$$

Así $Y_k(t)$ debe ser una combinación lineal de las soluciones,

$$Y_k(t)=\sum_{j=1}^{n}X_j(t)e_{jk},$$

para algunas constantes e_{jk}. Estas soluciones se utilizan para formar la matriz fundamental $\Phi(t+T)$, y así tenemos $\Phi(t+T)=\Phi(t)E$, donde E es la matriz con elementos e_{ij}. Ya que $\det(\Phi(t+T))=\det(\Phi(t))\det(E)$ y $\det(\Phi)\neq 0$, entonces E es no singular.

Teorema 5.3 *Sea I_n la matriz identidad de dimensión $n\times n$ y $\Phi(t)$ la matriz fundamental que satisface la condición $\Phi(0)=I_n$. Entonces la matriz fundamental $\Phi(t)$ satisface la ecuación matricial*

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)\Phi(T). \tag{5.5}$$

Demostración. En general, la matriz fundamental satisface la ecuación matricial,

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)E. \tag{5.6}$$

Ya que $\Phi(0){=}I_n$, entonces tenemos $\Phi(T){=}\Phi(0)E{=}E$ y así, $\Phi(T){=}E$. Sustituyendo en la ecuación (5.6), finalmente obtenemos $\Phi(t{+}T){=}\Phi(t)\Phi(T)$. ■

Los valores y vectores propios de E son importantes. Si λ es un valor propio de E y V es vector propio asociado, $EV=\lambda V$, entonces la solución

$$Z(t)=\Phi(t)V \quad \text{tiene la propiedad} \quad Z(t+T)=\lambda Z(t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Esto se sigue de $Z(t+T) = \Phi(t+T)V = \Phi(t)EV = \lambda\Phi(t)V = \lambda Z(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Los valores propios de la matriz E se denominan *múltiplos de Floquet* del sistema (5.4). Ahora demostramos el resultado que relaciona los múltiples de Floquet y la estructura de la matriz $A(t)$.

Teorema 5.4 *Los múltiplos de Floquet λ_k del sistema lineal (5.4) satisfacen la ecuación*

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \exp\left(\int_0^T \mathrm{Tr}\,(A(t))\right). \tag{5.7}$$

Demostración. Puesto que el Wronskiano $W = \det(X(T))$ del sistema (5.4) satisface la ecuación [17]

$$\det(X(T)) = \det(X(0)) \exp\left(\int_0^T \mathrm{Tr}\,(A(t))\,dt\right),$$

obtenemos la ecuación para la matriz fundamental

$$\det(\Phi(T)) = \det(\Phi(0)) \exp\left(\int_0^T \mathrm{Tr}\,(A(t))\,dt\right).$$

Ya que la matriz fundamental satisface la condición $\Phi(0) = I_n$ y sustituimos el valor $t = 0$ en la ecuación (5.5), obtenemos $\Phi(T) = E$. Luego, puesto que $\det(X(T)) = \det(\Phi(T)) = \det(E) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ [6], finalmente obtenemos el resultado (5.7). ∎

A continuación presentamos otro resultado importante que nos permite encontrar la solución periódica del sistema (5.4) en el caso particular si los valores propios satisfacen la ecuación $\lambda^m = 1$.

Teorema 5.5 *Sea λ un valor propio de la matriz E y la m-ésima raíz de la ecuación $\lambda^m = 1$ ($m \in \mathbb{N}$). Sea V un vector propio asociado con λ. Entonces la solución de la ecuación matricial $Z(t) = \Phi(t)V$ es periódica con el período mT.*

Demostración. Si V es un vector propio de la matriz E, entonces tenemos $EV = \lambda V$ y si $Z(t)$ satisface la ecuación matricial $Z(t) = \Phi(t)V$, entonces

$$Z(t+nT) = \Phi(t+nT)V = \Phi(t)E^nV = \Phi(t)\lambda^nV.$$

Puesto que $Z(t)$ satisface la ecuación matricial anterior, obtenemos

$$\lambda^n \Phi(t)V = \lambda^n Z(t).$$

Esto es,

$$Z(t+nT) = \lambda^n Z(t).$$

Si $\lambda^m = 1$, entonces

$$Z(t+mT) = \lambda^m Z(t) = Z(t).$$

Esto significa que la solución del sistema (5.4) en el caso particular $\lambda^m = 1$ es periódica con período mT. ∎

5.3 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

5.3.1 Ecuación Diferencial Lineal de Segundo Orden en Forma General

Consideremos ahora la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes periódicos

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0, \quad a_k(t+T) = a_k(t), \quad k = 1,2, \tag{5.8}$$

que es equivalente a la ecuación matricial (o al sistema diferencial lineal homogéneo)

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

donde $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$. Nos enfocaremos en el caso especial en el cual la matriz de monodromía C tiene dos valores propios reales idénticos, tales que $\mathrm{Tr}\,(C)^2 = 4\det(C)$.

Si λ es el valor propio, entonces existe una solución de (5.8) que satisface

$$x_1(t+T) = \lambda x_1(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Sea $x_2(t)$ una solución arbirtraria de (5.8) que es linealmente independiente de $x_1(t)$. Como $x_2(t+T)$ es también solución de (5.8), existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$x_2(t+T) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t). \tag{5.10}$$

El valor de c_2 se encuentra al evaluar el Wronskiano en una de estas soluciones,

$$W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Sustituyendo (5.9) y (5.10) en la expresión equivalente para $W(t+T)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
W(t+T) &= x_1(t+T)x_2'(t+T) - x_1'(t+T)x_2(t+T) \\
&= \lambda x_1(t)\left[c_1x_1'(t) + c_2x_2(t)\right] - \lambda x_1'(t)\left[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\right] \\
&= \lambda\left[x_1(t)\left[c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t)\right] - x_1'(t)\left[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\right]\right] \\
&= \lambda\left[c_2x_1(t)x_2'(t) - c_2x_1'(t)x_2(t)\right] \\
&= \lambda c_2W(t).
\end{aligned}$$

La ecuación (2.3) nos dice

$$W(t+T) = W(t)\exp\left(\int_0^T \mathrm{Tr}\left(A(t)\right)dt\right) = W(t)\exp\left(-\int_0^T a_1(t)dt\right),$$

y por lo tanto,

$$\lambda c_2W(t) = W(t+T) = W(t)\exp\left(-\int_0^T a_1(t)\,dt\right).$$

Finalmente, obtenemos

$$\lambda c_2 = \exp\left(-\int_0^T a_1(t)\,dt\right).$$

Ahora, construimos la matriz de monodromía C utilizando las dos soluciones linealmente independientes con condiciones iniciales

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 1,$$

de tal manera que

$$C = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}$$

y el múltiplo de Floquet λ satisface la ecuación

$$\lambda^2 - \big(x_1(T) + x_2'(T)\big)\lambda + \exp\left(-\int_0^T a_1(t)\,dt\right) = 0.$$

Pero asumimos que los valores propios son idénticos de tal forma que la ecuación tiene una raíz doble, lo que implica

$$\lambda^2 = \exp\left(-\int_0^T a_1(t)\,dt\right)$$

y así, $c_2 = \lambda$. Por lo tanto, la ecuación (5.10) resulta

$$x_2(t+T) = c_1 x_1(t) + \lambda x_2(t),$$

y así tenemos dos casos a considerar.

Caso 1. Si $c_1 = 0$, tenemos $x_1(t+T) = \lambda x_1(t)$ y $x_2(t+T) = \lambda x_2(t)$.

Si $\lambda = 1$, las dos soluciones linealmente independientes

$$x_1(t+T) = x_1(t), \quad x_2(t+T) = x_2(t),$$

son T-periódicas. En este caso $\det(C) = 1$ y $\mathrm{Tr}\,(C) = 2$, puesto que

$$x_1(T) = x_1(0) = 1 \quad \text{y} \quad x_2'(T) = x_2'(0) = 1,$$

y

$$\begin{aligned}
\det(C) &= x_1(T)x_2'(T) - x_1'(T)x_2(T) = 1 \cdot 1 - 0 = 1, \\
\mathrm{Tr}\,(C) &= x_1(T) + x_2'(T) = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Si $\lambda = -1$, las dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{aligned}
x_1(t+2T) &= (-1)^2 x_1(t) = x_1(t), \\
x_2(t+2T) &= (-1)^2 x_2(t) = x_2(t),
\end{aligned}$$

son $2T$-periódicas. En este caso $\det(C) = 1$ y $\mathrm{Tr}\,(C) = -2$, puesto que

$$x_1(T) = (-1)x_1(0) = -1 \quad \text{y} \quad x_2'(T) = (-1)x_2'(0) = -1,$$

y

$$\begin{aligned} \det(C) &= x_1(T)x_2'(T) - x_1'(T)x_2(T) = 1, \\ \operatorname{Tr}(C) &= x_1(T) + x_2'(T) = -2. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $c_1 \neq 0$, definimos dos funciones,

$$\begin{aligned} p_1(t) &= e^{-\rho t}x_1(t), \quad \lambda = e^{\rho T} \\ p_2(t) &= e^{-\rho t}x_2(t) - \frac{c_1 t}{T\lambda}p_1(t). \end{aligned}$$

Podemos ver que $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son soluciones T-periódicas:

$$\begin{aligned} p_1(t+T) &= e^{-\rho(t+T)}x_1(t+T) \\ &= e^{-\rho(t+T)}\lambda x_1(t) \\ &= e^{-\rho(t+T)}e^{\rho T}x_1(t) \\ &= e^{-\rho t}e^{-\rho T}e^{\rho T}x_1(t) \\ &= e^{-\rho(t)}x_1(t) \\ &= p_1(t) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_2(t+T) &= e^{-\rho(t+T)}x_2(t+T) - \frac{c_1(t+T)}{T\lambda}p_1(t+T) \\ &= e^{-\rho(t+T)}(c_1x_1(t) + \lambda x_2(t)) - \frac{c_1(t+T)}{T\lambda}p_1(t) \\ &= e^{-\rho(t+T)}(c_1x_1(t) + e^{\rho T}x_2(t)) - \frac{c_1(t+T)}{T\lambda}p_1(t) \\ &= c_1e^{-\rho T}p_1(t) + e^{-\rho t}x_2(t) - \frac{c_1t + c_1T}{T\lambda}p_1(t) \\ &= e^{-\rho t}x_2(t) + \left[\frac{T\lambda c_1e^{-\rho T} - c_1t - c_1T}{T\lambda}\right]p_1(t) \\ &= e^{-\rho t}x_2(t) + \left[\frac{Te^{\rho T}c_1e^{-\rho T} - c_1t - c_1T}{T\lambda}\right]p_1(t) \\ &= e^{-\rho t}x_2(t) + \left[\frac{Tc_1 - c_1t - c_1T}{T\lambda}\right]p_1(t) \\ &= e^{-\rho t}x_2(t) - \frac{c_1t}{T\lambda}p_1(t) = p_2(t). \end{aligned}$$

Y así, despejando $x_1(t)$ y $x_2(t)$, obtenemos

$$x_1(t) = e^{\rho t} p_1(t), \quad x_2(t) = e^{\rho t}\left(p_2(t) + \frac{c_1 t}{T\lambda} p_1(t)\right).$$

Si $\lambda = e^{\rho T} = 1$, las dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{aligned}
x_1(t+T) &= e^{\rho(t+T)} p_1(t+T) = e^{\rho t} e^{\rho T} p_1(t) = e^{\rho t} p_1(t) = x_1(t), \\
x_2(t+T) &= e^{\rho(t+T)}\left(p_2(t+T) + \frac{c_1(t+T)}{T} p_1(t+T)\right) \\
&= e^{\rho t} e^{\rho T}\left(p_2(t) + \frac{c_1(t+T)}{T} p_1(t)\right) \\
&= e^{\rho t} p_2(t) + \frac{c_1 t}{T} e^{\rho t} p_1(t) + c_1 e^{\rho t} p_1(t) \\
&= x_2(t) + c_1 x_1(t)
\end{aligned}$$

son T-periódicas. En este caso $\det(C) = 1$ y $\mathrm{Tr}\,(C) = 2$.

Si $\lambda = -1$, las dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{aligned}
x_1(t+2T) &= e^{\rho(t+2T)} p_1(t+2T) \\
&= e^{\rho t} e^{\rho 2T} p_1(t) \\
&= e^{\rho t}\left(e^{\rho T}\right)^2 p_1(t) \\
&= e^{\rho t}(-1)^2 p_1(t) = x_1(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t+2T) &= e^{\rho(t+2T)}\left(p_2(t+2T) - \frac{c_1(t+2T)}{T} p_1(t+2T)\right) \\
&= e^{\rho t}(e^{\rho T})^2\left(p_2(t) - \frac{c_1 t - c_1 2T}{T} p_1(t)\right) \\
&= e^{\rho t}\left(p_2(t) - \frac{c_1 t}{T} p_1(t) - c_1 2 p_1(t)\right) \\
&= e^{\rho t}\left(p_2(t) - \frac{c_1 t}{T} p_1(t)\right) - c_1 2 p_1(t) e^{\rho t} \\
&= x_2(t) - 2c_1 x_1(t),
\end{aligned}$$

y como $x_2(t+T) = c_1 x_1(t) - x_2(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
x_2(t+2T) &= x_2((t+T)+T) = c_1 x_1(t+T) - x_2(t+T) \\
&= -c_1 x_1(t) - c_1 x_1(t) + x_2(t) \\
&= x_2(t) - 2c_1 x_1(t),
\end{aligned}$$

así, las soluciones son $2T$-periódicas. En este caso $\det(C) = 1$ y $\mathrm{Tr}\,(C) = -2$.

Problema 5.2 *Múltiplos de Floquet*
Consideremos la ecuación

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=0,$$

donde $a_k(t)$ $(k=1,2)$ son funciones T-periódicas. Demuestre que

(i) Los múltiplos de Floquet satisfacen la relación

$$\lambda_1\lambda_2=\exp\left(-\int_0^T a_1(t)\,dt\right);$$

(ii) Sea $u(t)$ la variable dependiente de la transformación $x(t)=u(t)f(t)$, con

$$f(t)=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_0^t a_1(s)\,ds\right),$$

entonces la ecuación para $u(t)$ es de la forma

$$u''(t)+p(t)u(t)=0, \quad p(t)=a_2^2(t)-\tfrac{1}{4}a_1^2(t)-\tfrac{1}{2}a_1'(t). \tag{5.11}$$

(iii) La matriz fundamental relacionada a la ecuación con respecto a $u(t)$ tiene la forma,

$$\Phi_2(t)=\frac{1}{f(t)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{a_1(t)}{2} & 1\end{pmatrix}\Phi_1(t),$$

donde $\Phi_1(t)$ es una matriz fundamental de la ecuación para $x(t)$.

(iv) Los múltiplos de Floquet, $\bar{\lambda}_k$, de la ecuación (5.11) están dados por

$$\lambda_k=f(T)\overline{\lambda}_k=\overline{\lambda}_k\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_0^T a_1(t)dt\right), \quad k=1,2.$$

Solución.

(i) Introduciendo la nueva variable $y(t)=x'(t)$, podemos formar el sistema diferencial lineal asociado

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2(t) & -a_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 5.4, tenemos que para $k=2$ la ecuación queda

$$\det(C)=\lambda_1\lambda_2=\exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr}(A(t))dt\right)=-\exp\left(\int_0^T a_1(t)\,dt\right),$$

que es lo que buscamos.

(ii) Aplicamos la transformación $x(t) = u(t)f(t)$. Calculando las primeras dos derivadas y sustituyendo en la ecuación original, obtenemos

$$u''(t)f(t)+2u'(t)f'(t)+u(t)f''(t)+a_1(t)u'(t)f(t)+a_1(t)u(t)f'(t)+a_2(t)u(t)f(t)=0,$$

reacomodando los términos, tenemos

$$u''(t)f(t)+u'(t)\left[2f'(t)+a_1(t)f(t)\right]+u(t)\left[f''(t)+a_1(t)f'(t)+a_2(t)f(t)\right]=0. \quad (5.12)$$

Tomando los coeficientes de $u'(t)$ (igualando a cero) y despejando $f'(t)$, obtenemos

$$f'(t) = -\frac{a_1(t)f(t)}{2}.$$

Integrando ambos lados, tenemos

$$f(t) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_0^T a_1(s)\,ds\right).$$

Calculando las primeras dos derivadas de $f(t)$ y sustituyendo en el coeficiente de $u(t)$ de la ecuación (5.12), encontramos

$$u''(t)f(t)+u(t)\left[a_2(t)f(t)-\tfrac{1}{2}a_1'(t)-\tfrac{1}{4}a_1^2(t)f(t)\right]=0.$$

Dividiendo entre $f(t)$ y llamando $p(t)$ al coeficiente de $u(t)$, tenemos

$$u''(t)+p(t)u(t)=0.$$

(iii) Utilizando la propiedad (5.6), buscamos la relación

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ f'(t) & f(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}.$$

Con $f'(t) = -\frac{1}{2}a_1(t)$, encontramos el vector $\left(u(t),u'(t)\right)^{\mathrm{T}}$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{f(t)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1(t) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

De aquí, tenemos

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{f(t)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1(t) & 1 \end{pmatrix}\Phi_1(t). \quad (5.13)$$

Ahora, probaremos que $\Phi_2(t)$ es periódica:

$$\Phi_2(t+T) = \frac{1}{f(t+T)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1(t+T) & 1 \end{pmatrix} \Phi_1(t+T). \tag{5.14}$$

Por definición, $a_1(t)$ es T-periódica y $f(t+T) = f(t)f(T)$. Aplicando la propiedad (5.6) a $\Phi_1(t)$, obtenemos

$$\Phi_2(t+T) = \frac{1}{f(t)f(T)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1(t) & 1 \end{pmatrix} \Phi_1(t)E_1.$$

Por (5.13), tenemos

$$\Phi_2(t+T) = \frac{1}{f(T)}\Phi_2(t)E_1.$$

Despejando E_1 y utilizando la propiedad (5.6), obtenemos

$$E_1 = \Phi_2^{-1}(t)\Phi_2(t+T)f(T) = E_2 f(T).$$

Sustituyendo E_1 en (5.14), tenemos que $\Phi_2(t)$ es T-periódica.

(iv) Sean $\overline{\lambda}_k$ valores propios de E_2. Por el inciso anterior, $E_1 = E_2 f(T)$, y de aquí,

$$\lambda_k = \overline{\lambda}_k f(T) = \overline{\lambda}_k \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T a_1(s)\,ds\right).$$

□

5.3.2 Ecuación de Hill

Ahora estudiaremos un caso particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, la ecuación de Hill. Fue estudiada por primera vez por George William Hill en 1886 [18]. La ecuación de Hill es una ecuación diferencial homogénea, lineal de segundo orden con coeficientes reales periódicos la cual tiene muchas aplicaciones en ingeniería y física, incluyendo problemas en mecánica, astronomía, y conductividad eléctrica del metal. Su importancia fue descubierta por Lyapunov en 1907.

Consideramos la forma estándar de la ecuación de Hill:

$$x''(t) + (a+p(t))x(t) = 0, \tag{5.15}$$

donde a es una constante y $p(t)$ es una función T-periódica. Introduciendo las nuevas variables $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = x'(t)$, podemos escribir la ecuación en la forma matricial

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - p(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Formamos la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix},$$

donde $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones linealmente independientes del sistema lineal tal que $\Phi(0) = I_2$, es decir,

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Puesto que $\mathrm{Tr}\big(A(t)\big) = 0$, la ecuación

$$W'(t) = W(t)\mathrm{Tr}\big(A(t)\big)$$

nos dice que $\det\big(\Phi(t)\big)$=$W(t)$=constante.
Consideramos la matriz C (la matriz C se define por la fórmula (4.20)):

$$C = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}.$$

Mostramos que $\det(C) = 1$. Por las propiedades de la matriz fundamental tenemos:

$$\det(C) = \det\big(\Phi(T)\big) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \exp\left(\int_0^T \mathrm{Tr}\big(A(t)\big)\,dt \right) = 1.$$

Por lo tanto, los valores propios λ de C están dados por

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}(C)\lambda + \det(C) = 0, \quad \text{donde} \quad \mathrm{Tr}(C) = y_1(T) + y_2'(T),$$

es decir, los valores propios dependen de un parámetro $\mathrm{Tr}(C)$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(C) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}(C)^2 - 4}).$$

De acuerdo del Teorema de Vieta, tenemos

$$\lambda_1\lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(C).$$

Los exponentes de Floquet son ρ_1 y ρ_2, donde

$$\lambda_{1,2} = e^{\rho_{1,2}T},$$

y por lo tanto,

$$\rho_1 + \rho_2 = 0, \quad \rho_2 = -\rho_1, \tag{5.16}$$

$$\cosh(\rho_1 T) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(C), \quad \rho_1 = \frac{1}{T}\mathrm{arccosh}\,(\mathrm{Tr}\,(C)/2). \tag{5.17}$$

Existen cinco casos dependiendo del valor de $\mathrm{Tr}\,(C)$.

(1) $\mathrm{Tr}\,(C) > 2$. Los valores propios son reales y positivos, diferentes y distintos de $+1$, satisfacen la desigualdad $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. Por lo tanto, λ_2 es real y positivo, $\lambda_1 = -\lambda_2$ es real y negativo. De acuerdo de (5.16),

$$\lambda_2 = e^{\rho_2 T}, \quad \rho_2 T = \ln \lambda_2 > 0,$$

y dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(t) = e^{-\rho_2 t} p_1(t), \quad y_2(t) = e^{\rho_2 t} p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ $(k = 1,2)$ son funciones T-periódicas. La solución general de la ecuación de Hill (5.15) es

$$x(t) = c_1 e^{-\rho_2 t} p_1(t) + c_2 e^{\rho_2 t} p_2(t).$$

En este caso no existen soluciones periódicas. En general, $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$.

(2) $\mathrm{Tr}\,(C) = 2$. Los valores propios λ son iguales a 1. Entonces

$$\lambda_k = 1 = p_k(t) e^{\rho_k t}, \quad k = 1,2,$$

donde $\rho_k = 0$. Ahora, el comportamiento de las soluciones depende del número de vectores propios de C:

a) C tiene dos vectores propios linealmente independientes, entonces existen dos soluciones T-periódicas:

$$y_1(t) = p_1(t), \quad y_2(t) = p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ $(k = 1,2)$ son funciones T-periódicas. La solución general es

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t). \tag{5.18}$$

b) C tiene solamente un vector propio independiente, las dos soluciones independientes de (5.15) son

$$y_1(t) = p_1(t), \quad y_2(t) = t p_1(t) + p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ $(k = 1,2)$ son funciones T-periódicas. La solución general es

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2[t p_1(t) + p_2(t)]. \tag{5.19}$$

Las soluciones generales (5.18) y (5.19) se puede unificar así

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2[mt p_1(t) + p_2(t)], \tag{5.20}$$

donde m es una constante que puede ser 0. En este caso, si $c_2 = 0$, entonces existe una solución T-periódica de la ecuación de Hill.

(3) $|\mathrm{Tr}\,(C)| < 2$. Los valores propios de C son complejos con la magnitud $|\lambda_{1,2}| = 1$

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma T} \qquad (0 < \sigma T < \pi).$$

Los exponentes de Floquet son

$$\rho_{1,2} = \pm i\sigma, \quad \cos(\sigma T) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(C), \quad \rho_{1,2} = \pm i \arccos\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(C)\right).$$

Así las soluciones independientes son

$$y_1(t) = \Re\{e^{i\sigma t} p_1(t)\}, \quad y_2(t) = \Im\{e^{-i\sigma t} p_2(t)\},$$

donde $p_k(t)$ son funciones complejas T-periódicas. La solución general de la ecuación de Hill (5.15) es

$$x(t) = c_1 \Re\{e^{i\sigma t} p_1(t)\} + c_2 \Im\{e^{-i\sigma t} p_2(t)\}.$$

En este caso, soluciones son acotadas y oscilatorias, no existen soluciones T-periódicas o $2T$-periódicas. En general, existen soluciones mT-periódicas si $\sigma T = 2\pi/q$ $(q = 3,4,\ldots)$.

(4) $\mathrm{Tr}\,(C) = -2$. Ambos valores propios λ son iguales a -1, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Los exponentes de Floquet son $\rho_{1,2} = i\pi/T$. El comportamiento de las soluciones depende del número de vectores propios independientes de C:

a) C tiene dos vectores propios linealmente independientes: existen dos soluciones $2T$-periódicas ya que $\rho_{1,2}T = i\pi$ y las dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(t) = p_1(t), \quad y_2(t) = p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ $(k = 1,2)$ son funciones $2T$-periódicas. La solución general es

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t). \tag{5.21}$$

b) C tiene un solo vector propio linealmente independiente: las dos soluciones de (5.15) son

$$y_1(t) = p_1(t), \quad y_2(t) = t p_1(t) + p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ $(k = 1,2)$ son dos funciones $2T$-periódicas. La solución general es

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2[t p_1(t) + p_2(t)], \tag{5.22}$$

donde $p_k(t)$ $(k = 1,2)$ son funciones $2T$-periódicas.

Las soluciones generales (5.21) y (5.22) se puede unificar:

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2[mt p_1(t) + p_2(t)], \tag{5.23}$$

donde m es una constante que puede ser 0. En este caso, si $c_2 = 0$, entonces existe una solución $2T$-periódica de la ecuación de Hill.

(5) $\mathrm{Tr}\,(C) < -2$. Los valores propios $\lambda_{1,2}$ son reales y negativos, diferentes y distintos de -1, satisfacen la desigualdad $\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 0$. Si los múltiplos de Floquet son negativos, entonces los exponentes de Floquet son complejos:

$$\rho = \frac{i\pi}{T} + \nu, \quad e^{\nu T} = -\lambda.$$

En nuestro caso, tenemos

$$\rho_{1,2} = \frac{i\pi}{T} \mp \gamma_{1,2}, \quad \rho_{1,2}T = i\pi \mp \gamma_{1,2}T, \quad \cosh(\gamma_{1,2}T) = \mp\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(C),$$

y las soluciones linealmente independientes son

$$y_1(t) = e^{-\gamma_1 t} p_1(t), \quad y_2(t) = e^{\gamma_1 t} p_2(t),$$

donde $p_k(t)$ son funciones $2T$-periódicas. La solución general de la ecuación de Hill (5.15) es

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma_1 t} p_1(t) + c_2 e^{\gamma_1 t} p_2(t).$$

En este caso, no existen soluciones periódicas. En general, $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$.

Problema 5.3 *Ecuación de Hill*

Consideremos la ecuación de Hill $x''(t) + p(t)x(t) = 0$, donde $p(t)$ es una función T-periódica y $p(t) < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(i) Demuestre que al integrar la ecuación queda de la siguiente manera

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t -p(s)x(s)\,ds. \tag{5.24}$$

(ii) Encuentre soluciones de la ecuación de Hill que crecen monótonamente.

Solución.

(i) Despejando $x''(t)$ e integrando ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t -p(s)x(s)\,ds.$$

(ii) Con las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tenemos $x'(0) = 1$. Sustituyendo en la ecuación (5.24), obtenemos

$$1 + \int_0^t -p(s)x(s)\,ds.$$

Inicialmente, tenemos que si $x'(t) > 0 \;\; \forall t$, entonces $x(t)$ es creciente.

Probaremos esto por contradicción. Supongamos que $x(t) = 0$ en $t = \tau$, entonces $x'(t) = 0$ para $t = \hat{\tau}$ con $0 < \hat{\tau} < \tau$. Así,

$$-1 = \int_0^{\hat{\tau}} -p(s)x(s)\,ds,$$

pero $-p(s) > 0$ y $x(s) > 0$, lo cual contradice que $x(\hat{\tau}) = 0$. Por lo tanto, $x'(t){>}0$ $\forall\, t > 0$. $\square$

5.3.3 Ecuación de Meissner

En 1918, Meissner investigó la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x''(t) + \alpha(t)x(t) = 0, \qquad \alpha(t) = w_i, \quad t \in [(i-1)h, ih), \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde $\alpha(t)$ es una función T-periódica definida por partes, $h = T/n$, $w_i > 0\ \forall i$.

La ecuación de Meissner es un caso especial de la ecuación de Hill, para la cual existe teoría general ([15], [17]).

Una de las propiedades básicas de esta ecuación es que todas las soluciones son acotadas o todas las soluciones no acotadas [12]. En el primer caso, se dice que la ecuación es inestable, mientras que en el segundo, es estable. Ya que la estabilidad de la ecuación de Hill depende del discriminante, es decir, de la traza de la matriz de monodromía, entonces la estabilidad de la ecuación de Meissner también depende de $\mathrm{Tr}\,(C)$.

La ecuación de Meissner es integrable, es decir, la ecuación se puede resolver en cada intervalo (como un oscilador armónico) y verificar las condiciones de continuidad en extremos (de los intervalos).

En general, la matriz de monodromía para la ecuación de Meissner es $C = A_n A_{n-1} \cdots A_1$, donde A_i son matrices exponenciales

$$A_i = e^{\Omega_i h} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i h) & (1/\omega_i)\,\mathrm{sen}(\omega_i h) \\ -\omega_i\,\mathrm{sen}(\omega_i h) & \cos(\omega_i h) \end{pmatrix}, \qquad \Omega_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $|\mathrm{Tr}\,(C)| > 2$, la ecuación de Meissner es inestable y es estable si $|\mathrm{Tr}\,(C)| < 2$.

Problema 5.4 *Ecuación de Hill–Meissner*

Consideramos una ecuación de Hill–Meissner, es decir el caso particular de la ecuación de Hill, donde la ecuación de Meissner puede ser escrita en la siguiente forma:

$$x''(t) + \omega^2(t)x(t) = 0, \quad \omega(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t < \tau, \\ 0, & \tau \le t < T, \end{cases} \quad \omega(t+T) = \omega(t),\ t \in (0, \infty),$$

donde $\omega(t)$ es la función T-periódica definida por partes (ver Figura 5.2) y a es una constante arbitraria.

Encontramos las soluciones exactas periódicas de la ecuación de Meissner, la matriz de monodromía, construimos y graficamos las curvas en las cuales existen soluciones T- y $2T$-periódicas.

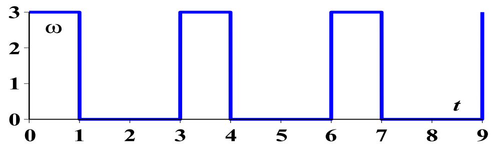

Figura 5.2: La función $\omega(t)$ T-periódica ($a = 3$, $T = 3$, $\tau = T/a$)

Solución.

(i) Veamos el comportamiento de las soluciones por casos.

Caso 1. $0 \le t < \tau$. La ecuación queda de la siguiente forma: $x''(t) + a^2 x(t) = 0$, y su solución general es $x_1(t) = a_1 \cos(at) + b_1 \operatorname{sen}(at)$.

Caso 2. $\tau \le t < T$. La ecuación queda de la siguiente forma: $x''(t) = 0$, y su solución general es $x_2(t) = a_2(t - \tau) + b_2$.

Ahora, aplicaremos las condiciones iniciales para encontrar las constantes a_1, b_1, a_2 y b_2.

(a) Para $X(0) = (x(0), x'(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ tenemos

$$a_1 \cos(a \cdot 0) + b_1 \operatorname{sen}(a \cdot 0) = 1, \quad -a_1 a \operatorname{sen}(a \cdot 0) + b_1 a \cos(a \cdot 0) = 0,$$

de donde obtenemos $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, esto es: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -a \operatorname{sen}(at) \end{pmatrix}$.

Verificando la condición de continuidad en $t = \tau$, tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_1'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ x_2'(\tau) \end{pmatrix},$$

esto es

$$\begin{pmatrix} \cos(a\tau) \\ -a \operatorname{sen}(a\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Así, el valor de la solución en $t = T$ es

$$X(T) = \begin{pmatrix} x_2(T) \\ x_2'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a(T - \tau) \operatorname{sen}(a\tau) + \cos(a\tau) \\ -a \operatorname{sen}(a\tau) \end{pmatrix}.$$

(b) Ahora, para $X(0) = (0,1)^{\mathrm{T}}$ tenemos

$$a_1 \cos(at) + b_1 \operatorname{sen}(at) = 0, \quad -a_1 a \operatorname{sen}(at) + b_1 a \cos(at) = 1,$$

de donde $a_1 = 0$, $b_1 = 1/a$.

Verificando la condición de continuidad en $t = \tau$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \operatorname{sen}(a\tau) \\ \cos(a\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

entonces, el valor de la solución en $t = T$ es

$$X(T) = \begin{pmatrix} (T-\tau)\cos(a\tau) + \frac{1}{a}\operatorname{sen}(a\tau) \\ \cos(a\tau) \end{pmatrix}.$$

Ahora, sean $\gamma = a\tau$ y $\beta = aT$, entonces la matriz C queda de la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} -(\beta-\gamma)\operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma & [(\beta-\gamma)\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma]\,\frac{1}{a} \\ -a\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

(ii) Calcularemos el determinate de la matriz de monodromía,

$$\begin{aligned} \det(C) &= (-(\beta-\gamma)\operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma)\cos\gamma + \frac{1}{a}((\beta-\gamma)\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma)\, a \operatorname{sen}\gamma \\ &= -(\beta-\gamma)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + \cos^2\gamma + (\beta-\gamma)\cos\gamma\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma \\ &= \cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma = 1. \end{aligned}$$

(iii) Encontramos las curvas en las cuales existen soluciones T- y $2T$-periódicas en el plano (β,γ). La traza de la matriz C es

$$\operatorname{Tr}(C) = 2\cos\gamma - (\beta-\gamma)\operatorname{sen}\gamma.$$

Puesto que la ecuación de Meissner es el caso particular de la ecuación de Hill, entonces de acuerdo de la teoría de la ecuación de Hill (5.3.2), las curvas en el plano (β,γ) en las cuales $\operatorname{Tr}(C) = 2$ y existen soluciones exactas T-periódicas. Si $\operatorname{Tr}(C) = -2$, las soluciones exactas son $2T$-periódicas. Estas curvas se presentan en Figura 5.3. Las curvas de color magenta denotan las soluciones de $\operatorname{Tr}(C) = 2$, mientras que las curvas azules denotan las soluciones de $\operatorname{Tr}(C) = -2$. □

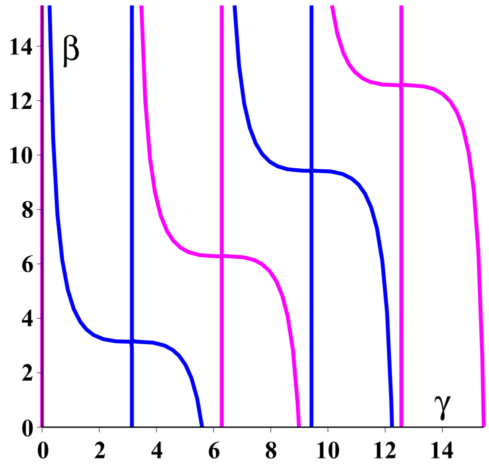

Figura 5.3: Las curvas en las cuales $\mathrm{Tr}(C)=2$ (curvas de color magenta) y $\mathrm{Tr}(C)=-2$ (curvas azules)

Problema 5.5 *Ecuación de Mathieu–Meissner*

Ahora, consideramos la ecuación de Mathieu–Meissner, es decir el caso particular de la ecuación de Mathieu, donde la ecuación de Meissner puede ser escrita en la siguiente forma:

$$x''(t)+(a+2qp(t))x(t)=0,\ p(t)=\begin{cases} b, & 0\leq t<\frac{T}{2},\\ -b, & \frac{T}{2}\leq t<T, \end{cases}\quad p(t+T)=p(t),\ t\in(0,\infty),$$

donde $p(t)$ es una función T-periódica definida por partes (ver Figura 5.4) y b es una constante arbitraria. Encontramos las soluciones exactas periódicas de la ecuación de Meissner, la matriz de monodromía, construimos y graficamos las curvas en las cuales existen soluciones T- y $2T$-periódicas.

Solución.

Si $a>2qb$, calculamos las soluciones para cada caso.

Caso 1. $0\leq t<\frac{T}{2}$. La ecuación queda de la forma $x''(t)+(a+2qb)x(t)=0$ y su solución es,

$$x_1(t)=a_1\cos(\sqrt{a+2qb}\,t)+b_1\operatorname{sen}(\sqrt{a+2qb}\,t).$$

Caso 2. $\frac{T}{2}\leq t<T$. La ecuación es $x''(t)+(a-2qb)x(t)=0$ y su solución queda:

$$x_2(t)=a_2\cos(\sqrt{a-2qb}\,(t-T/2)+b_2\operatorname{sen}(\sqrt{a-2qb}\,(t-T/2).$$

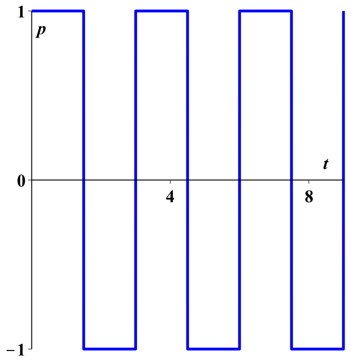

Figura 5.4: La función $p(t)$ T-periódica ($b=1$, $T=3$)

Aplicando la condición de continuidad en $t=\frac{T}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} a_1\cos\left(\sqrt{a+2qb}\,\tfrac{T}{2}\right)+b_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{a+2qb}\,\tfrac{T}{2}\right) &= a_2,\\ \sqrt{a+2qb}\,\left[-a_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{a+2qb}\,\tfrac{T}{2}\right)+b_1\cos\left(\sqrt{a+2qb}\,\tfrac{T}{2}\right)\right] &= \sqrt{a+2qb}\,b_2. \end{aligned}$$

(a) Para las condiciones iniciales $X(0)=(1,0)^{\mathrm{T}}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &a_1=1,\quad b_1=0,\quad a_2=\cos\left(\sqrt{a+2qb}\,T/2\right),\\ &b_2=-\frac{\sqrt{a+2qb}}{\sqrt{a-2qb}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{a+2qb}\,T/2\right). \end{aligned}$$

(b) Para las condiciones iniciales $X(0)=(0,1)^{\mathrm{T}}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &a_1=0,\quad b_1=1,\quad a_2=\frac{1}{\sqrt{a+2qb}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{a+2qb}\,T/2\right),\\ &b_2=\frac{1}{\sqrt{a-2qb}}\cos\left(\sqrt{a+2qb}\,T/2\right). \end{aligned}$$

Ahora, sean $\omega_p=\sqrt{a+2qb}$, $\omega_m=\sqrt{a-2qb}$, $\beta_p=\omega_pT/2$, $\beta_m=\omega_mT/2$, entonces la matriz de monodromía C queda de la siguiente forma:

$$C=\begin{pmatrix} c(\beta_p)c(\beta_m)-\frac{\omega_p}{\omega_m}s(\beta_p)s(\beta_m) & \frac{1}{\omega_p}s(\beta_p)c(\beta_m)+\frac{1}{\omega_m}c(\beta_p)s(\beta_m)\\ -\omega_m c(\beta_p)s(\beta_m)-\omega_p s(\beta_p)c(\beta_m) & -\frac{\omega_m}{\omega_p}s(\beta_p)s(\beta_m)+c(\beta_p)c(\beta_m) \end{pmatrix},$$

donde $c(\beta_p)=\cos(\beta_p)$, $c(\beta_m)=\cos(\beta_m)$, $s(\beta_p)=\mathrm{sen}(\beta_p)$, and $s(\beta_m)=\mathrm{sen}(\beta_m)$.

Por lo tanto, si obtenemos la traza de la matriz de monodromía

$$\mathrm{Tr}(C)=2\cos(\beta_p)\cos(\beta_m)-\frac{2a}{\sqrt{a^2-4q^2b^2}}\,\mathrm{sen}(\beta_p)\,\mathrm{sen}(\beta_m)$$

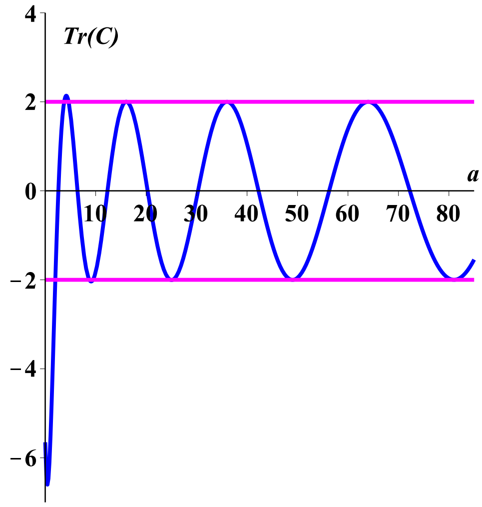

Figura 5.5: La gráfica de $\mathrm{Tr}\,(C)$ ($q = 1$, $b = 1$)

para $a > 2qb$. De manera similar, se puede obtener la traza de la matriz de monodromía

$$\mathrm{Tr}(C) = 2\cos(\beta_p)\cosh(\beta_m) - \frac{2a}{\sqrt{4q^2b^2 - a^2}}\,\mathrm{sen}(\beta_p)\,\mathrm{senh}(\beta_m)$$

para $a < 2qb$ y $\omega_p = \sqrt{a + 2qb}$, $\omega_m = \sqrt{2qb - a}$, $\beta_p = \omega_p T/2$, $\beta_m = \omega_m T/2$.

La gráfica de $\mathrm{Tr}\,(C)$ (para $q = 1$, $b = 1$) se presenta en Figura 5.5. Las líneas de color magenta denotan las fronteras: $\mathrm{Tr}\,(C) = 2$ y $\mathrm{Tr}\,(C) = -2$. □

5.4 Aplicaciones de la Teoría de SLED a Ecuaciones y Sistemas No Lineales

5.4.1 Sistemas No Lineales Autónomos n-Dimensionales

Consideremos el sistema autónomo n-dimensional:

$$X'(t) = F\big(X(t)\big), \tag{5.25}$$

donde $X(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^{\mathrm{T}}$ y $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}$ vectores columna n-dimensionales, y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.6 *Sea $P(t) = \big(p_1(t), \ldots, p_n(t)\big)^{\mathrm{T}}$ una solución periódica del sistema no lineal autónomo*

$$X'(t) = F\big(X(t)\big). \tag{5.26}$$

Supongamos que

$$X(t) = P(t) + Z(t), \qquad Z(t) = \big(z_1(t), \ldots, z_n(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad \|Z(t)\| \ll \|P(t)\|.$$

Entonces $P^{'}(t)$ es una solución del sistema (5.26) y $Z(t)$ satisface el sistema lineal no autónomo

$$Z^{'}(t) = A(t)Z(t), \qquad A_{ij}(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j(t)}\right|_{x_k(t)=p_k(t)}, \tag{5.27}$$

donde $A(t)$ es una matriz real de dimensión $n \times n$ con coeficientes periódicos evaluados en $x_k(t) = p_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$.

Demostración. Si tenemos el sistema de la forma $X^{'}(t) = F\big(X(t)\big)$ y si $X(t)$ es una solución periódica, entonces $X(t+T)$ (donde T es una constante) es también una solución periódica.

Si $X(t) = P(t)$ es una solución periódica, entonces $Y(t) {=} P(t{+}T)$ es también una solución periódica.

Consideremos la solución $X(t) = P(t) + Z(t)$ $(\|Z(t)\| \ll \|P(t)\|)$. Sustituyendo esta solución en el sistema (5.26) y expandiendo el resultado en la serie de Taylor alrededor de $P(t)$, obtenemos

$$P^{'}(t) + Z^{'}(t) = F\big(P(t)\big) + A(t)Z(t) + O\big(Z^2(t)\big), \tag{5.28}$$

donde $A(t)$ es la matriz con elementos

$$A_{ij}(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i(t)}\right|_{x_k(t)=p_k(t)}, \tag{5.29}$$

donde $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

Expandiendo $P(t+T)$ en la serie de Taylor alrededor de t, tenemos

$$Y(t) = P(t+T) = P(t) + P^{'}(t)T + O(T^2). \tag{5.30}$$

Si comparamos las expansiones (5.28) y (5.30), obtenemos que $P^{'}(t)$ es una solución del sistema lineal no autónoma $Z^{'}(t) = A(t)Z(t)$. ∎

Problema 5.6 *Sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales no lineales*
Consideramos el sistema no lineal autónomo

$$x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t)],$$
$$x_2'(t) = x_2(t) + x_1(t) - x_2(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t)]. \tag{5.31}$$

(i) Verifique que

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad P^{'}(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

son las soluciones periódicas del sistema no lineal autónomo (5.31).

(ii) De acuerdo del Teorema 5.6, determine la matriz $A(t)$, el sistema lineal no autónomo correspondiente, $Z^{'}(t) = A(t)Z(t)$, la solución $Z(t)$ del sistema lineal. Verifique que la solución $P^{'}(t)$ satisface el sistema lineal no autónomo.

(iii) Determine una solución particular $Z(t)$ que satisface la condición $\|Z(t)\| \ll \|P(t)\|$. Construye y compare las gráficas de las soluciones $p_1(t), x_1(t) = p_1(t) + z_1(t)$ y $p_2(t), x_2(t) = p_2(t) + z_2(t)$.

Solución.

(i) Si sustituimos $P(t)$ y $P^{'}(t)$ en el sistema de acuaciones no lineales (5.31), obtenemos, respectivamente, las identidades: $-\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t$, $\cos t = \cos t$ y $-\cos t = -\cos t$, $-\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t$.

(ii) De acuerdo de la fórmula para la matriz $A(t)$ (5.29), calculamos

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}^2 t - 3\cos^2 t + 1 & -2\operatorname{sen} t\cos t - 1 \\ -2\operatorname{sen} t\cos t + 1 & -3\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t + 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema lineal no autónoma queda

$$z_1'(t) = (1 - \operatorname{sen}^2 t - 3\cos^2 t)z_1(t) - (2\operatorname{sen} t\cos t + 1)z_2(t), \tag{5.32}$$
$$z_2'(t) = (1 - 2\operatorname{sen} t\cos t)z_1(t) + (1 - 3\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)z_2(t). \tag{5.33}$$

Resolvemos el sistema anterior analíticamente y obtenemos la solución general:

$$z_1(t) = -c_1\operatorname{sen} t - c_2e^{-2t}\cos t, \quad z_2(t) = -\frac{e^{-2t}}{\operatorname{sen} t}(c_1e^{2t}\cos t\operatorname{sen} t + c_2\cos^2 t - c_2).$$

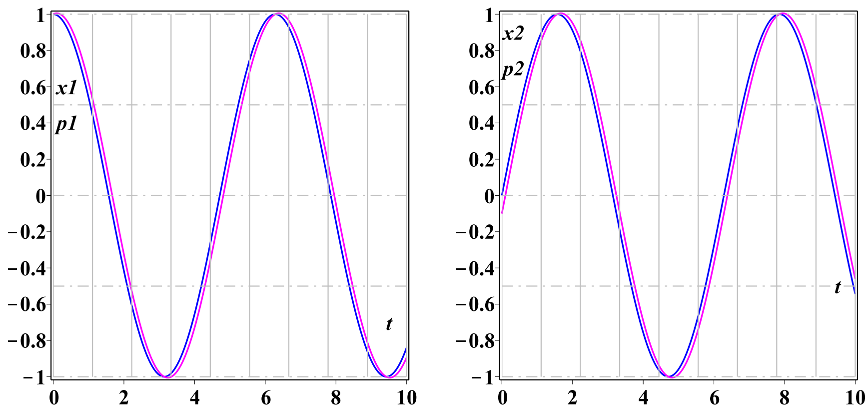

Figura 5.6: Gráficas de soluciones $p_i(t)$, $x_i(t){=}p_i(t){+}z_i(t)$ $(i = 1,2)$

Si sustituimos la solución $P'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)^{\mathrm{T}}$ en el sistema lineal no autónomo anterior, obtenemos la identidad: $-\cos t = -\cos t$, $-\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t$.

(iii) Ahora consideremos la solución $X(t) = P(t) + Z(t)$,

$$x_1(t) = \cos t + c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t e^{-2t}, \tag{5.34}$$

$$x_2(t) = \operatorname{sen} t - \frac{e^{-2t}}{\operatorname{sen} t}(c_1 e^{2t} \cos t \operatorname{sen} t + c_2 \cos^2 t - c_2), \tag{5.35}$$

que satisface la condición $\|Z(t)\| \ll \|P(t)\|$. Tomando $c_1 = 1/10$, $c_2 = 0$, tenemos una solución particular periódica del sistema lineal no autónomo

$$z_1(t) = \tfrac{1}{10}\operatorname{sen}(t), \quad z_2(t) = -\tfrac{1}{10}\cos t$$

y una solución particular periódica del sistema no lineal autónomo

$$x_1(t) = \cos t + \tfrac{1}{10}\operatorname{sen}(t), \quad x_2(t) = \operatorname{sen} t - \tfrac{1}{10}\cos t.$$

Por lo tanto, la norma euclidiana del vector $P(t) = (p_1(t), p_2(t))^{\mathrm{T}}$ es $\|P(t)\|_2 = 1$ y la norma euclidiana del vector $Z(t) = (z_1(t), z_2(t))^{\mathrm{T}}$ es $\|Z(t)\|_2 = 1/10$.

Las gráficas de las soluciones periódicas de los sistemas considerados, $p_1(t)$, $x_1(t) = p_1(t) + z_1(t)$ y $p_2(t)$, $x_2(t) = p_2(t) + z_2(t)$, se muestran en la Figura 5.6. Se puede controlar la coincidencia de las soluciones variando las constantes arbitrarias. □

5.4.2 Ecuaciones Diferenciales No Lineales Autónomas

Una de las aplicaciones de la teoría de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales es determinar soluciones periódicas de ecuaciones no lineales autónomas. Esta aplicación la ilustramos con la ecuación diferencial no lineal autónoma de Liénard:

$$x''(t)+f(x)x'(t)+g(x)=0, \quad t\in\mathbb{R},$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones arbitrarias. Asumimos que existe una solución periódica de la ecuación de Liénard.

Teorema 5.7 *Sea $p(t)$ una solución T-periódica de la ecuación de Liénard no lineal autónoma*

$$x''(t)+f(x)x'(t)+g(x)=0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.36}$$

Supongamos que

$$x(t)=p(t)+z(t), \quad |z(t)|\ll|p(t)|,$$

es una transformación. Entonces $p'(t)$ es una solución periódica de la ecuación diferencial lineal no autónoma

$$z''(t)+f(p)z'(t)+\big(f'(p)p'(t)+g'(p)\big)z(t)=0, \tag{5.37}$$

o del sistema diferencial lineal no autónomo equivalente

$$Z'(t)=A(t)Z(t), \tag{5.38}$$

donde

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -p'(t)f'(p)-g'(p) & -f(p)\end{pmatrix} \quad y \quad Z(t)=\begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix}.$$

Demostración. Si sustituimos la transformación $x(t)=p(t)+z(t)$ en la ecuación de Liénard (5.36), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\big(p(t)+z(t)\big)''+f\big(p(t)+z(t)\big)\big(p(t)+z(t)\big)'+g\big(p(t)+z(t)\big)=0.$$

Simplificando, encontramos la ecuación diferencial lineal no autónoma (5.37) y su forma matricial equivalente (5.38). Puesto que la ecuación de Liénard (5.36) es autónoma, entonces si T es una constante arbitraria, $p(t+T)$ también es una solución de la ecuación. Expandiendo $p(t+T)$ alrededor de t, obtenemos

$$x(t) = p(t+T) = p(t) + p'(t)T + O(T^2)$$

y $p'(t)$ es una solución de la ecuación (5.37). ■

Problema 5.7 *Ecuación de Liénard no lineal autónoma*
Consideramos la ecuación de Liénard no lineal autónoma

$$x''(t) = \cos\big(2x(t)\big)x'(t). \tag{5.39}$$

(i) Verifique que

$$p(t) = \arctan\left(\tfrac{1}{2}\tan(\tfrac{1}{2}t\sqrt{3})\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\right) \tag{5.40}$$

es la solución periódica de la ecuación de Liénard no lineal autónoma (5.39).

(ii) De acuerdo del Teorema 5.7, determine la ecuación diferencial lineal no autónoma correspondiente, la solución $z(t)$ de la ecuación lineal.

(iii) Determine una solución particular $z(t)$ y construye las gráficas de las soluciones $p(t)$, $x(t) = p(t) + z(t)$. Verifique que la solución $p'(t)$ satisface la ecuación lineal no autónoma.

Solución.

(i) Si sustituimos $p(t)$ en la ecuación de Liénard, obtenemos la identidad.

(ii) De acuerdo del Teorema 5.7, encontramos la ecuación diferencial lineal no autónoma

$$z''(t) + \cos\big(2p(t)\big)z'(t) - 2\,\mathrm{sen}\big(2p(t)\big)p'(t) = 0, \tag{5.41}$$

donde $p(t)$ es la solución periódica (5.40). Resolvemos la ecuación diferencial lineal anterior analíticamente y obtenemos la solución general:

$$z(t) = -p(t) - \arctan\left[\frac{1}{2c_1}\left\{\tan\left(\tfrac{1}{2}c_2\sqrt{4c_1^2-1} + \tfrac{1}{2}t\sqrt{4c_1^2-1}\right)\sqrt{4c_1^2-1} - 1\right\}\right].$$

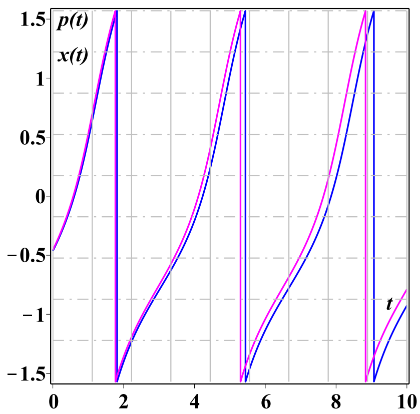

Figura 5.7: Gráficas de soluciones $p(t)$ y $x(t)$=$p(t)$+$z(t)$

(iii) Ahora consideremos una solución particular $x(t) = p(t) + z(t)$ que satisface la condición $|z(t)| \ll |p(t)|$, es decir,

$$x(t)=\arctan\left[0.8716121875\tan(0.8890444310t) - 0.4901960784\right],$$

donde $c_1 = -1.02$, $c_2 = 0$.

Ahora supongamos que una solución particular (de la ecuación lineal no autónoma) es $z(t) = kp'(t)$ y que satisface la condición $|z(t)| \ll |p(t)|$. Por lo tanto, podemos encontrar el valor de la constante k: $k = 1/20$.

Las gráficas de las soluciones periódicas de las ecuaciónes consideradas, $p(t)$ y $x(t) = p(t)+z(t)$, se muestran en la Figura 5.7. Se puede controlar la coincidencia de las soluciones variando las constantes arbitrarias. $\square$

Teorema 5.8 *Sea $z(t) = p'(t)$ una solución periódica de la ecuación lineal no autónoma (5.37) y que satisface la condición $|z(t)| \ll |p(t)|$, donde $p(t)$ una solución periódica de la ecuación de Liénard no lineal autónoma. Sea*

$$z(t) = \omega(t)p'(t)$$

una transformación. Entonces

$$z(t) = mp'_t \int \frac{1}{\left(p'(t)\right)^2} \exp\left(-\int f(p)\,dt\right) dt, \tag{5.42}$$

donde m es una constante arbitraria, es también una solución periódica de la ecuación lineal no autónoma (5.37).

Demostración. Si sustituimos la transformación $z(t) = \omega(t)p'(t)$ en la ecuación lineal no autónoma (5.37) y simplificamos la ecuación resultante considerando que $p'(t)$ es una solución de la ecuación lineal no autónoma (5.37), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\omega''(t)p'(t) + \omega'(t)\big(2p''(t) + f(p)p'(t)\big) = 0.$$

Aplicando el método de separación de variables e integrando, encontramos

$$\omega'(t) = \frac{m}{\big(p'(t)\big)^2}\exp\left(-\int f(p)\,dt\right),$$

donde m es una constante de integración. Al integrar nuevamente, tenemos

$$\omega(t) = \int \frac{m}{\big(p'(t)\big)^2}\exp\left(-\int f(p)\,dt\right)dt.$$

Aplicando la transformación

$$z(t) = \omega(t)p'(t),$$

obtenemos la solución periódica (5.42) de la ecuación lineal no autónoma. ∎

Problema 5.8 *Ecuación de Liénard. Transformaciones*
Consideramos la ecuación de Liénard no lineal autónoma $x''(t) = \cos\big(2x(t)\big)x'(t)$.

(i) Verifique que

$$q(t) = \frac{1}{20}p'(t) = \frac{1}{20}\frac{3 + 3\tan(\frac{1}{2}t\sqrt{3})^2}{5 + 3\tan(\frac{1}{2}t\sqrt{3})^2 - 2\tan(\frac{1}{2}t\sqrt{3})\sqrt{3}} \tag{5.43}$$

es la solución periódica de la ecuación lineal no autónoma (5.41) obtenida por la transformación $x(t) = p(t) + z(t)$ y que satisface la condición $|z(t)| \ll |p(t)|$, donde $p(t)$ es la solución periódica definida por la fórmula (5.40) (del problema anterior).

(ii) Verifique que la función periódica

$$z(t) = mq(t)\int q^{-2}(t)\exp\left(-\int \cos\big(2p(t)\big)\,dt\right)dt$$

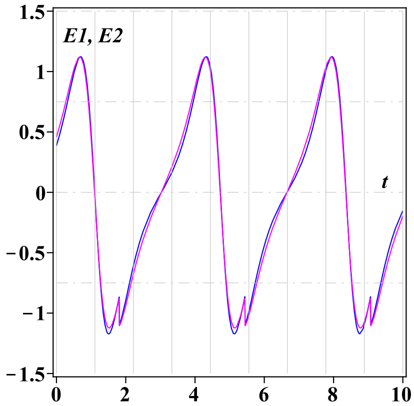

Figura 5.8: Gráficas de la ecuación (E_1, E_2) trascendente ($m = 1/3000$)

es la solución periódica de la ecuación lineal no autónoma (5.41). Determine la constante m.

Solución.

(i) Consideramos la solución periódica $p(t)$ definida en (5.40), encontramos la derivada $p'(t)$ y multiplicamos por la constante $k = 1/20$ (ver Problema 5.7).

(ii) Si sustituimos $q(t) = 1/20p'(t)$ en la ecuación lineal no autónoma (5.41), obtenemos la ecuación trascendente complicada que depende de un parámetro m. Variando el valor de m, podemos llegar a la identidad. En nuestro caso, $m = 1/3000$. Las gráficas de las expresiónes que corresponden a los lados (E_1, E_2) de la ecuación se muestran en la Figura 5.8. $\square$

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron distintas clases de ecuaciones diferenciales, enfocándonos en la clase especial en la cual permiten soluciones periódicas. Soluciones periódicas de sistemas lineales y no lineales son un aspecto importante de la teoría de ecuaciones diferenciales, ya que muchos fenómenos físicos tienen naturaleza periódica. En general, los medios periódicos lineales y no lineales son importantes en la física y aplicaciones técnicas, por ejemplo, especialmente en nanotecnología óptica (una ciencia fundamental en el siglo XXI).

En el presente trabajo, se vio un breve resumen histórico sobre la evolución de las ecuaciones diferenciales y quienes estudiaron con ellas, así como una introducción general a los Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales y algunas de sus aplicaciones. Se mostraron definiciones y propiedades generales de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales. Se estudiaron algunos Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de varias clases. Se vio la teoría de Floquet de los Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales con coeficientes periódicos y algunas aplicaciones.

En el último Capítulo, construimos las soluciones periódicas de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de varias clases. Vimos algunas de sus propiedades y estudiamos algunas ecuaciones diferenciales que describen procesos físicos (ecuaciones de Hill–Meissner y Mathieu–Meissner). Finalmente, aplicamos la teoría de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales para encontrar soluciones periódicas de sistemas no lineales autónomos y ecuaciones no lineales autónomas (ecuación de Liénard).

En este trabajo de tesis se aportan resultados a la literatura de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales tanto en el campo teórico (Teoremas 3.1, 3.3, 5.1–5.8) como en práctico (Ejemplos 2.1–2.3, Problemas 3.1–3.6, 4.1, 5.1–5.8).

Bibliografía

[1] Agarwal, R. P. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. 2nd Edition, Springer, New York, 2008

[2] Almira, J. M., Torres, P. J. Invariance of the stability of the stability of Meissner's equation under a permutation of its intervals. *Annali di Matematica*, Vol. 180, pp. 245–253, 2001

[3] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge, MA, 1978

[4] Cesari, L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. 1st Edition, Springer, Berlin, 1959

[5] Chicone, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. 2nd Edition, Springer, Columbia, MO, 2006

[6] Coddington, E. A., Carlson, R. *Linear Ordinary Differential Equations*. 2d Edition, SIAM, Philadelphia, 1997

[7] Derrick, W. R., Grossman, S. I. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. 1ra Edición, Fondo Educativo Interamericano, México, D.F. 1984

[8] Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E. *Álgebra Lineal*. 1ra Edición, Publicaciones Cultural, S.A., México, D.F. 1982

[9] Grossman, S. I. *Álgebra Lineal*. 2da Edición, Grupo editorial Iberoamericana, España, 2008

[10] Hairer, E., Nørsett, S., Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations*. 2nd Edition, Springer, Noruega, 1993

[11] Hirsch, M. W., Smalle, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. 2nd Edition, Academic Press, San Diego, California, 1974

[12] Hochstadt, H. A special Hill's equation with discontinuous coefficients. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 1, pp. 18–26, 1963

[13] Kapitsa, P. L. Dynamic stability of a pendulum with a vibrating point of suspension. In D. ter Haar (Ed.), *Collected Papers by P. L. Kapitsa*, Vol. 2 (pp. 714–725). Pergamon, London, 1965

[14] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Course of Theoretical Physics*, Vol. 1, Mechanics, 3rd Edition. Reed Educational and Professional Publishing, Oxford, 2000

[15] Magnus, W., Winkler, S. *Hill's Equation*. Series: Dover Books on Mathematics. Reprint of the 1979 2nd Edition, Dover Publications, NY, 2004

[16] Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2012.

[17] Richards, D. *Advanced Mathematical Methods with Maple*. Cambridge, Cambridge University Press, 2002

[18] Romandia Flores, C. M., Shingareva, I. K. Sistemas Hamiltonianos y ecuación de Hill, *Memorias del XII Seminario de Estudiantes de Matemáticas*, pp. 29–33, 2012

[19] Romandia Flores, C. M., Shingareva, I. K., Lizárraga-Celaya, C. Soluciones periódicas de sistemas diferenciales de varias clases, *Memorias de la XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 2013

[20] Simmons, G. F. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. 2da Edición, MacGraw-Hill, España, 1993

[21] Zill, D. G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. 7ma Edición, International Thomson Editores, S.A., 2002