



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

**Estabilización deslizando de una familia robusta de
sistemas lineales positivos.**

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Daniel Rubal Valencia

Director de tesis: M.C. Horacio Leyva Castellanos

Hermosillo, Sonora, México

10 de Diciembre de 2014

SINODALES

Dr. Carrillo Navarro Francisco Armando
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Leyva Castellanos Horacio
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Olmos Liceaga Daniel
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Verduzco González Fernando
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Índice general

Dedicatoria	7
Agradecimientos	9
Introducción	11
1. Teoría de modos deslizantes para sistemas afines	13
1.1. Definición de modo deslizante	13
1.2. Condiciones invariantes	15
1.3. Condiciones de existencia	16
1.4. Caso lineal	22
2. Sistemas lineales positivos	27
2.1. Algunos conceptos importantes	27
2.2. El teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler	28
2.3. Existencia y diseño de una familia de hiperplanos deslizantes	29
3. Estabilización de sistemas positivos mediante modos deslizantes	33
3.1. Mezcla con dos tanques	33
3.1.1. Ejemplo numérico	37
3.2. Estabilización de la insulina via modos deslizantes con control para T1DM	41
3.2.1. Estabilización de insulina implica estabilización de glucosa	41
4. Robustez de la estabilidad de una familia de sistemas lineales	47
4.1. La estabilidad Hurwitz robusta de matrices Metzlerianas	47
4.2. Estabilidad deslizante de una familia robusta de sistemas lineales	49

4.3. Aplicaciones	50
4.3.1. El caso de mezcla con dos tanques	50
4.3.2. El Modelo de la Insulina	55
Conclusiones	57
Bibliografía	59

Dedicatoria

*Dedicado a mi Papá,
mi hermano, mi familia y a Paola,
pero en especial a mi Mamá.*

Agradecimientos

Quiero agradecer primero que nada a mi papá Abel Rubal Rodríguez que me dio todo su apoyo y todo su amor en esta etapa donde lo menos que hice fue agradecerle, hoy intento compensar un poco eso haciéndole saber que sin él, nada de esto fuera posible, espero que mis éxitos también sean tus éxitos.

A mi hermano Abel E. Rubal Valencia que siempre estuvo pendiente de mí y me sacó de muchos apuros cuando yo lo necesité en esta etapa, con el comparto cada uno de mis logros, de antemano gracias hermano a ti y a mi papá por haber hecho que mi vida fuera un poco más fácil cuando no pasábamos por los mejores momentos.

A mi familia que siempre estuvo apoyándome en cada momento y se mantuvo al tanto de mi progreso, gracias por echarme la mano cuando lo necesite.

A mis amigos que siguieron mis pasos por este andar, que aguantaron todo el tiempo sin saber de mí por estar siempre ocupado con la licenciatura, quiero agradecerles su apoyo y el estar conmigo en los momentos cuando lo necesité, también a los nuevos amigos que hice en la universidad, la verdad que sin ellos esta carrera hubiera sido mucho más complicada de lo que fue, cuantas tardes de tareas no compartimos, estar prácticamente toda la semana metidos en la biblioteca y también estando sábados y domingos, muchas gracias por abrirme las puertas de su casa y por todo el apoyo que siempre me dieron, gracias.

A mis profesores que fueron parte fundamental de mi formación, gracias por todo el apoyo mostrado, en especial a mi director de tesis M.C. Horacio Leyva por estar siempre atento a cada paso que daba de la tesis y por su paciencia. También a mis sinodales Dr. Francisco Carrillo, Dr. Fernando Verduzco y Dr. Daniel Olmos, por sus correcciones y su ayuda en este trabajo.

Y por último a esas dos personas especiales en mi vida.

A Paola E. Onuma Aganza que fue mi principal motor en los últimos semestres de la licenciatura, ella llegó en el momento justo para darme ánimos y darme su apoyo incondicional. Te agradezco tanto y de todo corazón el que hayas estado a mi lado todo este tiempo siendo tan paciente y comprensiva de las situaciones por las que pasé, la verdad es que sin tí no se que sería de mí ahora, gracias por tus consejos, por tu apoyo y por todo el amor mostrado, simple y sencillamente, muchas gracias por todo.

Y a la persona más importante de mi vida, a mi mamá Sonia Haydeé Valencia Hernández que gracias a ella hoy soy una persona de bien y me he superado a cada momento, sus consejos y su ayuda fueron de vital importancia en mi vida, hoy este logro más que mio es de ella, ella siempre luchó hasta el final por verme aquí y aquí estoy gracias a todo ese esfuerzo que puso, siempre te llevare conmigo y se que estás orgullosa de este logro, sabes que todo lo que viene de ahora en adelante es gracias a ti mamá, tu sigues presente en cada logro, muchas gracias por todo tu amor mostrado durante estos 22 años de mi vida, tengo que decirte muchas gracias mamá, un beso y un abrazo hasta el cielo para ti mamá, 27/03/72 - 20/07/14.

*Muy agradecido con todos
y con todo mi cariño, Daniel.*

En la vida siempre habrá obstáculos difíciles de superar, pero depende de ti y solo de ti el aceptarlos, ser valiente y enfrentarlos, solo así podrás superar cada uno de ellos y salir adelante.

Daniel Rubal Valencia.

Introducción

En este trabajo de tesis estudiamos la estabilización de una familia de sistemas positivos lineales. Al considerar el parámetro de control, buscamos resolver un problema de estabilización con el objetivo de agregar dos características: lograr una mejor tasa de estabilización y describir la robustez de la estabilización. Para mejorar la tasa de estabilización hacemos uso de algunos resultados de la teoría de modos deslizantes; para describir la robustez aplicamos un teorema específico para esta familia de sistemas.

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}$ el parámetro de control, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Considerando una familia de sistemas lineales positivos (donde \mathbb{R}_+^n es invariante) con control escalar no negativo, y resultados de la teoría de modos deslizantes para sistemas afines descritos en [15], logramos un diseño de la función de control para mejorar la tasa de estabilización de los sistemas retroalimentados. También analizamos la robustez de la estabilidad de los sistemas positivos que abordamos en este trabajo (ver, [5]). La motivación de estudiar la estabilidad de tal familia de sistemas se debe a que representan sistemas compartimentales, en tales modelos es importante que las variables y parámetros sean no negativas ó estrictamente positivas. Hay ejemplos de tales sistemas en el área económica, balance de masa, dinámica de poblaciones, etc.

En tal planteamiento, consideramos a los sistemas lineales como un caso particular del sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es el parámetro de control y $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son campos vectoriales suaves.

En el primer capítulo se describe a grandes rasgos acerca de los modos deslizantes para sistemas afines; se ve su definición, las condiciones para que el modo deslizante exista y se retoma lo de sistemas afines para el caso de sistema lineal, por otra parte, se dan ejemplos de aplicación que nos ilustran los conceptos que rodean a lo que refiere el tema modos deslizantes.

En el segundo capítulo se explica acerca de los sistemas positivos, donde nos adentramos a las definiciones importantes que nos ayudan a seguir adelante en este trabajo, tales como la de matriz Metzler, matriz Hurwitz, matriz compartimental y mas adelante tambien la de matriz Metzleriana, las cuales nos ayudan a tener una clase de sistemas dinámicos mas en específico, a los cuales podremos aplicarles también el teorema de Frobenius-Perron. Se elabora un diseño de familias de hiperplanos delizantes que nos llevaran al siguiente capítulo.

En el tercer capítulo se observa la conjunción de los temas anteriores aplicados en dos sistemas: en el primero de ellos se aborda el análisis de estabilización del sistema de control que representa la dinámica de la concentración en dos tanques, donde presentamos condiciones necesarias para que ocurra el deslizamiento, y por lo tanto mejorar la tasa de estabilización. El siguiente sistema con el que se trabaja es la estabilización de la insulina basado en el modelo de Sorensen, vía modos deslizantes con control y de igual manera que para el caso de los dos tanques se presentan condiciones necesarias para que ocurra el deslizamiento y por tanto mejorar la tasa de estabilización.

En el cuarto y último capítulo, se aborda sobre el tema de la robustez para el sistema lineal, para la cual se utiliza la definición de matriz Metzleriana y también la de matriz Hurwitz estable, las cuales nos llevan a desarrollar un teorema el cual se aplica a los sistemas anteriormente mencionados, tanto al de los dos tanques como al de la insulina, para obtener así, no solo una solución que estabilice nuestro sistema, sino, una familia de ellas.

Capítulo 1

Teoría de modos deslizantes para sistemas afines

Es conocido que la estabilización y robustez que caracteriza a los sistemas con parte derecha discontinua es apreciada en las aplicaciones, por ello presentamos los siguientes resultados para sistemas afines expuestos en [15].

Se consideran las ecuaciones diferenciales en el sentido de Filippov [8], con el fin de prever la posibilidad de utilizar las señales discontinuas en los controles. Las soluciones de Filippov coinciden con las soluciones habituales, cuando los lados derechos son Lipschitz. Se supone también que todas las entradas consideradas permiten la existencia de soluciones y su extensión a todo el semieje $t \geq 0$.

1.1. Definición de modo deslizante

Consideramos el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbf{X}$, un conjunto abierto de \mathbb{R}^n ; la función de entrada del control $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es posiblemente de un carácter discontinuo; y f, g son campos vectoriales de clase C^1 definidos en \mathbf{X} con $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{X}$. Sea s una función suave $s : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$, con un gradiente distinto de cero en \mathbf{X} . El conjunto

$$\mathbf{S} := \{x \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}, \quad (1.2)$$

entonces define una subvariedad $(n - 1)$ -dimensional localmente regular en \mathbf{X} (ver, [6]), llamada de ahora en adelante la variedad deslizante o la superficie de cambio. La función escalar s a menudo sera abordada como la función de superficie coordenada.

Todos los resultados expuestos en esta sección son de un carácter local, restringido a una vecindad abierta $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ teniendo una intersección no vacía con la variedad deslizante \mathbf{S} .

Una ley de control de estructura variable se obtiene al permitir que la función de control u tome uno de dos valores obtenidos de acuerdo con el signo de $s(x)$, y es definida por

$$u = \begin{cases} r^+ & \text{para } s(x) > 0 \\ r^- & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

con $r^+ \neq r^-$.

Las leyes de control obtenidas r^+ y r^- se refieren a los valores extremos del control. Se supone que satisface $r^+ > r^-$. Sea $L_h\sigma$ la derivada direccional (ver, [6]) de la función escalar σ con respecto al campo vectorial h .

Supongamos que como resultado de la norma del control (1.3) las trayectorias de estado de (1.1) alcanza localmente la superficie de deslizamiento \mathbf{S} y, de ahí en adelante, su movimiento se ve limitado a una vecindad de \mathbf{S} . Decimos que existe un régimen de deslizamiento en \mathbf{S} (ver, [18]), siempre que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gr^+}s < 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+gr^-}s > 0, \quad (1.4)$$

i.e, la velocidad de cambio de la función escalar de la superficie coordenada $s(x)$, medida en la dirección del campo controlado, es tal que un cruce de la superficie está garantizada, de cada lado de la superficie, por el uso de la ley de control (1.3).

Sea ds una forma correspondiente al gradiente de $s(x)$ y sea \langle, \rangle el producto escalar de vectores y co-vectores en su relación funcional. Las condiciones (1.4) son equivalentes a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + gr^+ \rangle < 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + gr^- \rangle > 0, \quad (1.5)$$

la cual alternativamente explica que en \mathbf{S} , las proyecciones del campo vectorial controlado $f + gr^+$ y $f + gr^-$ en el vector gradiente a s son opuestos en signo y por lo tanto el campo controlado localmente apunta hacia la superficie \mathbf{S} .

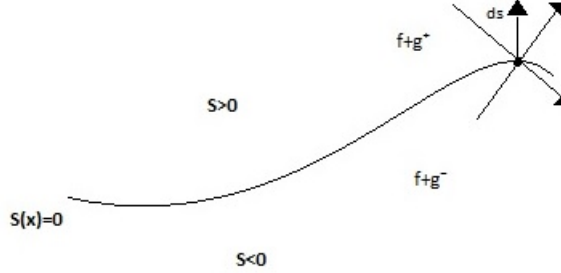


Figura 1.1: Deslizamiento sobre la superficie S.

1.2. Condiciones invariantes

Una definición del movimiento de deslizamiento ideal es dada por Utkin en [18]. Esta definición es conocida como el método de control equivalente. En este enfoque, los movimientos de deslizamiento ideales se describen mediante las siguientes condiciones de invariancia:

$$s = 0, \quad L_{f+gu_{eq}(x)}s = \langle ds, f + gu_{eq}(x) \rangle = 0, \quad (1.6)$$

donde $u_{eq}(x)$ es un control retroalimentado suave para el cual S es una variedad integral local o una variedad invariante local de (1.1). La función del control retroalimentado $u_{eq}(x)$ es llamado el control equivalente. De la definición de derivada direccional y de (1.6), podemos obtener el control equivalente.

Tenemos que

$$\langle ds, f + gu_{eq}(x) \rangle = 0,$$

por lo que

$$\langle ds, f \rangle + \langle ds, gu_{eq}(x) \rangle = 0,$$

lo cual implica que

$$u_{eq}(x)\langle ds, g \rangle = -\langle ds, f \rangle,$$

por lo tanto

$$u_{eq}(x) = -\frac{L_f s}{L_g s} = -\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle}. \quad (1.7)$$

El sistema dinámico $\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq}(x)$ describe la dinámica ideal de deslizamiento.

1.3. Condiciones de existencia

Decimos que el control equivalente está bien definido siempre que exista y está determinado en forma única por las condiciones de invariancia.

Lema 1. *Una condición necesaria y suficiente para que el control equivalente este bien definido es que la condición de transversalidad*

$$\langle ds, g \rangle \neq 0, \quad (1.8)$$

se satisface localmente en \mathbf{S} .

Demostración. Supongamos que el control equivalente (1.7) esta bien definido. Entonces necesariamente $\langle ds, g \rangle \neq 0$ en \mathbf{S} ya que, de otro modo, $\langle ds, f \rangle$ tendría que ser cero para que el control equivalente exista. Sin embargo, en este caso, $u_{eq}(x)$ no estaría definido de forma única ya que (1.6) se estaría satisfaciendo por cualquier control con función u . Si en el otro sentido, $\langle ds, g \rangle \neq 0$ en \mathbf{S} , entonces de manera evidente u_{eq} existe. Supongamos, para probar unicidad, que la condición de invariancia se satisface por dos controles equivalentes, u_{1eq} y u_{2eq} , mientras que la condición de transversalidad es válida, entonces de (1.6) se sigue que

$$\langle ds, f + gu_{1eq}(x) \rangle = \langle ds, f + gu_{2eq}(x) \rangle = 0,$$

donde podemos ver que

$$\langle ds, f \rangle + \langle ds, gu_{1eq}(x) \rangle - \langle ds, f \rangle - \langle ds, gu_{2eq}(x) \rangle = 0,$$

de manera evidente

$$u_{1eq}(x)\langle ds, g \rangle - u_{2eq}(x)\langle ds, g \rangle = 0,$$

por lo tanto

$$(u_{1eq} - u_{2eq}) \langle ds, g \rangle = 0,$$

lo cual es una contradicción en virtud de (1.3) y el supuesto señalado. \square

La condición de transversalidad solo representa una condición necesaria para la existencia del deslizamiento, como lo demuestra el siguiente Lema.

Lema 2. *Si el deslizamiento existe localmente en \mathbf{S} entonces*

$$\langle ds, g \rangle < 0, \quad (1.9)$$

en \mathbf{S} .

Demostración. De la definición de deslizamiento dada en (1.4) o (1.5), tenemos que, en \mathbf{S} ,

$$\langle ds, f + gr^+ \rangle < 0 \quad y \quad \langle ds, f + gr^- \rangle > 0,$$

de aquí que

$$\langle ds, f + gr^+ \rangle < \langle ds, f + gr^- \rangle,$$

lo que implica que

$$\langle ds, f + gr^+ \rangle - \langle ds, f + gr^- \rangle < 0,$$

donde

$$\langle ds, f \rangle + \langle ds, gr^+ \rangle - \langle ds, f \rangle - \langle ds, gr^- \rangle < 0,$$

por lo tanto,

$$\langle ds, (r^+ - r^-)g \rangle = (r^+ - r^-)\langle ds, g \rangle < 0.$$

El resultado se sigue de que $r^+ > r^-$. □

Observación 1. *Notamos que el signo de la condición de transversalidad es arbitrario y depende en la orientación de \mathbf{S} . Por ejemplo, si en (1.2) se define \mathbf{S} usando $s_1(x) = -s(x)$, lógicamente (1.3) cambia y la condición de transversalidad adopta la forma $\langle ds_1, g \rangle > 0$.*

El siguiente corolario es una consecuencia directa del Lema 1 y el Lema 2.

Corolario 1. *Una condición necesaria para la existencia del deslizamiento local en \mathbf{S} es que el control equivalente este bien definido en \mathbf{S} .*

Teorema 1. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia del deslizamiento en \mathbf{S} es que localmente en \mathbf{X}*

$$r^- < u_{eq}(x) < r^+, \tag{1.10}$$

para $x \in \mathbf{S}$.

Demostración. Supongamos que el deslizamiento local existe en \mathbf{S} , entonces de (1.5) se sigue que localmente en \mathbf{S} ,

$$\langle ds, f + gr^+ \rangle = \langle ds, f \rangle + r^+\langle ds, g \rangle < 0,$$

donde

$$\langle ds, f \rangle < -r^+ \langle ds, g \rangle,$$

por Lema 2, $\langle ds, g \rangle < 0$, entonces

$$\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} > -r^+,$$

por virtud de (1.7)

$$\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} + r^+ = -u_{eq}(x) + r^+ > 0,$$

por lo tanto

$$u_{eq}(x) < r^+.$$

Por otra parte, en \mathbf{S} , $\langle ds, f + r^-g \rangle > 0$; usando los mismos argumentos se sigue que

$$-u_{eq}(x) + r^- < 0,$$

por lo tanto

$$r^- < u_{eq}(x).$$

Entonces concluimos que

$$r^- < u_{eq}(x) < r^+.$$

Ahora, para probar la implicación inversa en el teorema, sea $u_{eq}(x)$ una función suave satisfaciendo (1.7) y (1.10). De esto se deduce que

$$0 < u_{eq}(x) - r^- < r^+ - r^-,$$

y por tanto,

$$0 < w_{eq}(x) < 1,$$

donde $w_{eq}(x) := \frac{(u_{eq}(x) - r^-)}{(r^+ - r^-)}$. De esto es fácil ver que $0 < 1 - w_{eq}(x) < 1$ y por tanto

$$\begin{aligned} & w_{eq}(x) \langle ds, f + gr^+ \rangle + (1 - w_{eq}(x)) \langle ds, f + gr^- \rangle \\ = & \frac{(u_{eq}(x) - r^-)}{(r^+ - r^-)} \langle ds, f + gr^+ \rangle + \langle ds, f + gr^- \rangle - \frac{(u_{eq}(x) - r^-)}{(r^+ - r^-)} \langle ds, f + gr^- \rangle \\ = & \frac{(u_{eq}(x) - r^-)}{(r^+ - r^-)} (\langle ds, gr^+ \rangle - \langle ds, gr^- \rangle) + \langle ds, f + gr^- \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(u_{eq}(x) - r^-)}{(r^+ - r^-)}(r^+ \langle ds, g \rangle - r^- \langle ds, g \rangle) + \langle ds, f + gr^- \rangle \\
&= (u_{eq}(x) - r^-)(\langle ds, g \rangle) + \langle ds, f \rangle + \langle ds, gr^- \rangle \\
&= u_{eq}(x) \langle ds, g \rangle + \langle ds, f \rangle = \langle ds, f \rangle + \langle ds, gu_{eq}(x) \rangle \\
&= \langle ds, f + gu_{eq}(x) \rangle = 0
\end{aligned}$$

Hay que observar que las cantidades $\langle ds, f + gr^+ \rangle$ y $\langle ds, f + gr^- \rangle$ son de signos opuestos en \mathbf{S} . Ya que la orientación de \mathbf{S} es arbitraria siempre se puede definir de tal manera que

$$\langle ds, f + gr^- \rangle > 0$$

y entonces $\langle ds, f + gr^+ \rangle < 0$. Sin embargo, esto significa que el control

$$u = \begin{cases} r^+ & \text{para } s(x) > 0 \\ r^- & \text{para } s(x) < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

actúa en el sistema (1.1) satisfaciendo

$$\langle ds, f + gr^+ \rangle |_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + gr^+ \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gr^+} s < 0$$

y

$$\langle ds, f + gr^- \rangle |_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + gr^- \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+gr^-} s > 0,$$

i.e, el deslizamiento existe en \mathbf{S} . □

Ejemplo 1. Consideremos el sistema afín en el plano

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s^2}{1+s^2} & -1 \\ 1 & \frac{s^2}{1+s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} u,$$

donde $s = \sqrt{x^2 + y^2} - 3$ es la función de cambio y el control $u = 0.5 + 0.5(\text{signo}(\sqrt{x^2 + y^2} - 3))$.

Realizando los cálculos pertinentes, tenemos que el sistema en coordenadas polares queda descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{(r - r_0)^2}{1 + (r - r_0)^2} - u, \\
\dot{\theta} &= 1,
\end{aligned}$$

con $r_0 = 3$ y control $u \in U = [0, 1]$.

Una retroalimentación deslizante discontinua del sistema afín:

$$u(r) = \begin{cases} 1 & \text{para } r > r_0 \\ 0 & \text{para } r \leq r_0 \end{cases}$$

*El campo vectorial correspondiente al control discontinuo $u := 0.5 * (1 + \text{signo}(r - r_0))$ es el siguiente.*

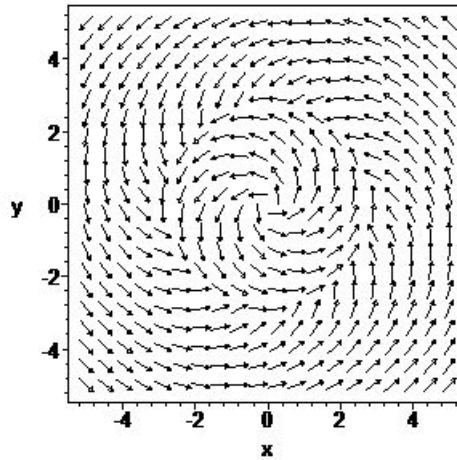


Figura 1.2: Campo vectorial correspondiente al control discontinuo.

Podemos obtener también una retroalimentación de nuestro sistema afín de tal manera que el control que utilizamos es uno continuo, el cálculo de este se puede ver en [11]. Por tanto, la retroalimentación estabilizante continua del sistema afín es

$$u(r) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{1}{(1+p^2)^{(1+p^2)}} \right]^n & \text{para } r > r_0 \\ 0 & \text{para } r \leq r_0 \end{cases}$$

con $p = (r - r_0)$.

Tal que el sistema realimentado, para $n = 1$ y $r \geq r_0$, nos queda

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{(r - r_0)^2}{1 + (r - r_0)^2} - u(r) \\
 &= \frac{(r - r_0)^2}{1 + (r - r_0)^2} - 1 + \left[\frac{1}{(1 + p^2)^{1+p^2}} \right]^n \\
 &= -\frac{1}{1 + (r - r_0)^2} + \frac{1}{(1 + p^2)^{1+p^2}} \\
 &= -\frac{1}{(1 + p^2)} + \frac{1}{(1 + p^2)} \frac{1}{(1 + p^2)^{p^2}} \\
 &= \frac{1}{1 + p^2} \left(-1 + \frac{1}{(1 + p^2)^{p^2}} \right),
 \end{aligned}$$

finalmente

$$\dot{r} = \frac{1}{1 + p^2} \left(-1 + \frac{1}{(1 + p^2)^{p^2}} \right) < 0 \quad \text{si } p > 0.$$

El campo vectorial correspondiente al control continuo se ve en la figura 1.3.

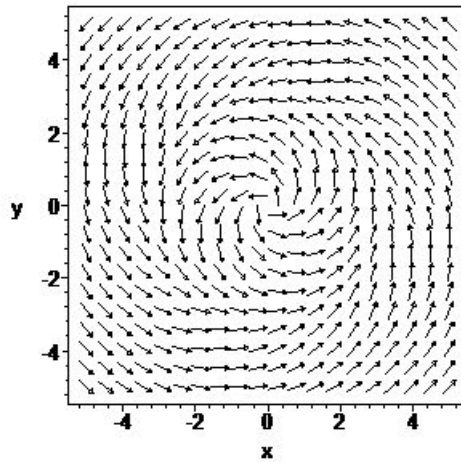


Figura 1.3: Campo vectorial correspondiente al control continuo.

Para $r = r_0$ la circunferencia es invariante.

1.4. Caso lineal

Si consideramos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.12)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}$ el parámetro de control, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Con el objetivo de describir el deslizamiento, consideramos un vector constante $L \in \mathbb{R}^n$ y un escalar constante $k > 0$, de manera que el segmento de hiperplano contenido en \mathbb{R}^n , representado por la igualdad

$$\mathbf{S} := \{x \in \mathbb{R}^n | Lx - k = 0\}, \quad (1.13)$$

donde L y k representan parámetros por determinar, de manera que se cumple la condición de deslizamiento, expresada con el par de desigualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) &< 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) &> 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Elegimos k de forma que el hiperplano, representado por $Lx - k = 0$, pase por un punto predeterminado \bar{x} de manera que el hiperplano (1.13) nos queda como:

$$L(x - \bar{x}) = 0,$$

por consiguiente

$$k = L\bar{x}, \quad (1.15)$$

Con las desigualdades (1.14) y, los valores de los parámetros r_1 , r_2 , \bar{x} , k y L , es conocido que mediante la aplicación del control discontinuo

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

tendremos que cualquier solución $x(t)$ que inicia fuera del hiperplano $Lx = k$, alcanza al hiperplano en tiempo finito. Hay aplicaciones donde la aplicación del control discontinuo (1.16), que toma valores en los extremos del intervalo de restricción $[r_1, r_2]$, reduce el tiempo de llegada al hiperplano $Lx = k$ (ver,

[12]), ya que al considerar la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}(Lx - k)^2$, tenemos que el control (1.16) es la solución al siguiente problema de optimización

$$\min_{u \in [r_1, r_2]} \frac{dV}{dt} = \min_{u \in [r_1, r_2]} \{(Lx - k), L(Ax + bu)\}.$$

Una vez cumplidas las desigualdades (1.14), se origina una dinámica invariante sobre el hiperplano $Lx = k$, podemos decir que esta dinámica corresponde a la aplicación del llamado control equivalente, denotado por u_{eq} y definido para x tales que $Lx = k$, de manera que lo podemos calcular de la igualdad $L\dot{x} = 0$. Es decir,

$$L(Ax + bu_{eq}) = 0,$$

por consiguiente

$$u_{eq} = -\frac{L Ax}{L b},$$

con $Lb > 0$. Con este resultado tenemos definido el control globalmente estabilizante para toda $x \in \mathbb{R}^n$:

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ -\frac{L Ax}{L b} & \text{si } Lx - k = 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Ejemplo 2. *El sistema de control de dos dimensiones*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \text{donde } u \in [-76, 76]$$

con $u = -76 \text{sign}(s)$ y función de cambio $s(x, y) = y - 2x$ le corresponde el punto de equilibrio $\bar{x} = \left(\frac{-u}{19}, \frac{-3u}{19}\right)^T = \frac{-u}{19}(1, 3)^T$, de forma que

$$\text{si } s > 0 \Rightarrow u = -76 \Rightarrow \bar{x} = (4, 12)^T,$$

$$\text{si } s < 0 \Rightarrow u = 76 \Rightarrow \bar{x} = (-4, -12)^T.$$

Para $s = 0$, u no está definido.

La siguiente observación se sigue de lo anterior

Observación 2. *Para cualquier valor de u , los puntos de equilibrio del sistema están sobre la línea recta con pendiente 3 que pasa por el origen.*

Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ son

$$\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{5} \quad y \quad \lambda_2 = 1 - 2\sqrt{5},$$

con los correspondientes vectores propios

$$v_1 = (1, 4 + 2\sqrt{5})^T \quad y \quad v_2 = (1, 4 - 2\sqrt{5})^T.$$

El siguiente es el retrato fase de la matriz A .

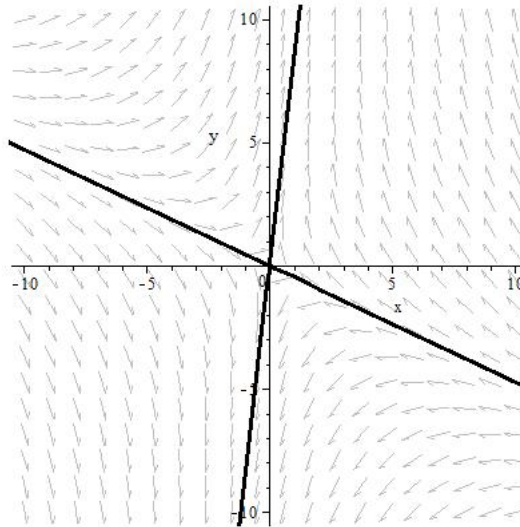


Figura 1.4: Retrato fase correspondiente a la matriz A .

De acuerdo a las desigualdades (1.14), para obtener el dominio del modo deslizante calculamos

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} (10x + 3y - 76) = 16x - 76 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{19}{4},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} = \lim_{s \rightarrow 0^-} (10x + 3y + 76) = 16x + 76 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{19}{4},$$

estas desigualdades implican que existe un modo deslizante en el intervalo $-\frac{19}{4} < x < \frac{19}{4}$. Este es un segmento de la línea recta de cambio

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s(x, y) = 0\}.$$

El modo deslizante es representado por la ecuación $\dot{x} = -x$.

Ahora trabajaremos con el caso del control continuo de este ejemplo, pero primero, se dará una explicación de donde sale este control continuo (ver, [9]).

Una hipótesis esencial de la teoría de control de estructura variable, consiste en que el control puede cambiar de un valor a otro infinitamente rápido. Físicamente esto es imposible, ya que todo mecanismo presenta un retardo al llevar a cabo un cambio de valor en el control. Por consiguiente es necesario considerar el efecto chattering, este fenómeno es un serio obstáculo en la aplicación de los controles de tipo (1.17). De acuerdo a esta característica, un buen control para el sistema (1.1) es uno que ayude a eliminar el efecto chattering y a la vez mantenga la convergencia en tiempo finito. Además de ser acotado, el control debe preservar la dinámica deslizante sobre \mathbf{S} , así como la persistencia de esta dinámica en presencia de perturbaciones.

Una opción aceptada para anular el efecto chattering consiste en considerar una vecindad $O_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |s(x)| < \epsilon\}$ de la superficie de cambio \mathbf{S} (ver [16]). En esta vecindad es posible reemplazar el control discontinuo (1.17) por uno continuo o de clase C^1 . Sin embargo, esta sustitución puede destruir la invariancia de \mathbf{S} y de la dinámica deslizante sobre \mathbf{S} . Bajo la consideración de la vecindad O_ϵ de \mathbf{S} , propongo el siguiente control continuo:

$$u(s) = \begin{cases} u_c & \text{si } \left|\frac{s}{\epsilon}\right| < 1 \\ -k \text{sign}(s) & \text{si } \left|\frac{s}{\epsilon}\right| \geq 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

con $u_c := u_{eq} - \left|\frac{s}{\epsilon}\right|^p (k \text{sign}(s) + u_{eq})$, donde $p > 0$.

De acuerdo con (1.18), el control de relevo $u_r(s) = -k \text{sign}(s)$ actúa fuera de la vecindad O_ϵ , mientras que en el interior funciona una interpolación continua entre u_{eq} y los valores extremos $\pm k$. El control (1.18) es continuo y acotado. En [15] se probó que $-k \leq u_{eq} \leq k$. Para el control (1.18) es fácil probar el siguiente par de desigualdades:

$$u_{eq} \leq u(s) \leq k \quad \text{para } s \leq 0,$$

$$-k \leq u(s) \leq u_{eq} \quad \text{para } s \geq 0,$$

Prueba para el caso $0 < s < \epsilon$.

De este caso deducimos que $0 < \left|\frac{s}{\epsilon}\right|^p < 1$

$$\Rightarrow \quad 0 < \left|\frac{s}{\epsilon}\right|^p (k + u_{eq}) < k + u_{eq}, \quad \Rightarrow \quad u_{eq} > u_{eq} - \left|\frac{s}{\epsilon}\right|^p (k + u_{eq}) > -k,$$

es decir, $u_{eq} > u(s) > -k$.

Por tanto siguiendo con el ejemplo y de acuerdo a (1.18), podemos aplicar el control continuo.

$$u_c = \begin{cases} -10x - 3y - \left|\frac{s}{\epsilon}\right|^p (76\text{sign}(s) - 10x - 3y) & \text{si } \left|\frac{s}{\epsilon}\right| < 1 \\ -76\text{sign}(s) & \text{si } \left|\frac{s}{\epsilon}\right| \geq 1 \end{cases}$$

donde $p > 1$. Con este control aplicado al sistema (1.11) obtenemos el siguiente sistema con lado derecho continuo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= -6x + 2y - \left|\frac{y-2x}{\epsilon}\right|^p (k\text{sign}(y-2x) - 10x - 3y). \end{aligned}$$

donde la línea recta $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0\}$ es invariante. Además sobre esta recta hay una dinámica deslizante si $-4.75 < x < 4.75$.

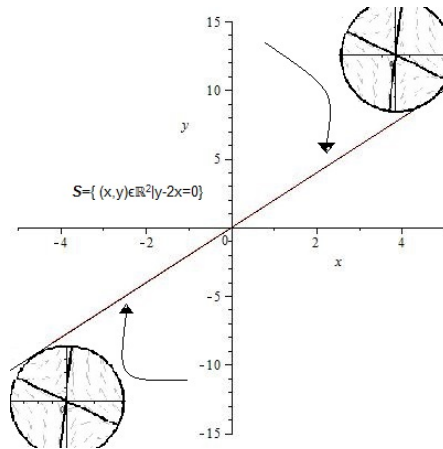


Figura 1.5: Dinámica deslizante sobre la recta S .

Con este ejemplo mostramos que es posible estabilizar, mediante modos deslizantes, un sistema inestable a lazo abierto.

Capítulo 2

Sistemas lineales positivos

Muchos modelos económicos, físicos, biológicos, etc., involucran cantidades que se representan mediante variables positivas. Por ejemplo la concentración de sustancias, el nivel de líquidos en tanques, la biomasa de una población, etc. Estos ejemplos pertenecen a la clase de sistemas positivos, donde las variables de estado y las condiciones iniciales son no negativas (ver, [1]). En tales sistemas también pueden considerarse controles positivos, por ejemplo en reactores y procesos biológicos la acción de control está relacionada a flujos, cuyos valores son estrictamente positivos, por ejemplo la introducción de insulina en un ser vivo es un ejemplo de control positivo.

En este trabajo consideramos una familia de sistemas que satisfacen las hipótesis de la teoría de estabilidad para sistemas positivos, tales como los teoremas de Frobenius-Perron para matrices Metzler y el teorema de Gerschgorin aplicado a matrices compartimentales

Bajo tales consideraciones para $\dot{x} = Ax + bu$, presentamos un conjunto de resultados en el ámbito de la teoría de modos deslizantes que permiten la existencia de una dinámica deslizante mediante la cual podemos estabilizar rápidamente este sistema positivo.

2.1. Algunos conceptos importantes

Consideremos el sistema lineal homogéneo

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definición 1. *El sistema (2.1) es positivo si para cada $x(t_0) = x_0 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, $t \geq 0$, sucede que la solución correspondiente $x(t; t_0; x_0) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ para toda $t \geq t_0$.*

Definición 2. *La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Metzler si $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.*

Definición 3. *La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.*

Teorema 2. *El sistema $\dot{x} = Ax$ es positivo si y sólo si A es Metzler.*

A este tipo de sistemas se les denomina positivos porque el cono positivo \mathbb{R}_+^n es un conjunto invariante (ver, [2]).

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.2)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz Metzler y Hurwitz, $b \geq 0$ y $r_2 > r_1 \geq 0$. En el teorema 4 veremos que tales condiciones representan condiciones de positividad: el sistema lineal (2.2) es positivo si y sólo si la matriz A es Metzler y $b \geq 0, u \geq 0$ (ver, [7]).

2.2. El teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler

Teorema 3. *Sea A una matriz Metzler. Entonces, existen un número real μ_0 y un vector $x_0 \geq 0$ tales que se cumple lo siguiente:*

- i) $Ax_0 = \mu_0 x_0$, y*
- ii) Si $\mu \neq \mu_0$ es cualquier otro valor propio de la matriz A , entonces $\text{Re}(\mu) < \mu_0$.*

Adicionalmente a las hipótesis del teorema 2 supondremos condiciones para que la estabilización de la dinámica controlada también ocurra en \mathbb{R}_+^n .

Teorema 4. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz Metzler. La inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva, si y sólo si, A es Hurwitz (i.e., $\mu_0 < 0$).*

La prueba de los teoremas 3 y 4 pueden verse en [2] y [4], respectivamente.

2.3. Existencia y diseño de una familia de hiperplanos deslizantes

Consideremos la matriz Metzler A dada en (2.2) con entradas $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$ y el vector $L = (l_1, \dots, l_n)$, con $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$A^T L^T = -p.$$

Proposición 1. *Si $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, entonces existe un deslizamiento sobre todo el hiperplano $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R}_+^n / L(x - \bar{x}) = 0\}$, bajo el sistema (1.12)-(1.17).*

Demostración. La condición $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ implica que $u_{eq}(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}_+^n$, pues

$$L^T = (-A^{-1})^T p \in \mathbb{R}_+^n;$$

ya que A es Metzler y Hurwitz. Es decir, para cada $p \in \mathbb{R}_+^n$ tenemos un vector $L = -p^T A^{-1} \in \mathbb{R}_+^n$, tal que $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb} > 0$, entonces

$$u_{eq} = \frac{p^T x}{p^T (-A^{-1})b} > 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^n.$$

De acuerdo al teorema 1 visto en el primer capítulo, al considerar $r_2 > 0$ suficientemente grande ($0 < u_{eq} \leq \mathbf{m\acute{a}x}(u_{eq}) < r_2$) tenemos que existe un deslizamiento sobre el hiperplano \mathbf{S} . \square

Observación 3. *La dinámica deslizante es dada por el sistema lineal $\dot{x} = A_{eq}x$, donde $A_{eq} = A + b(\frac{p^T}{p^T(-A^{-1})b})$ es Metzler, ya que es la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas; es decir, el segmento de hiperplano deslizante es invariante.*

Lema 3. $\det A_{eq} = 0$.

Demostración. Basta con probar que $b \in \ker(I - b\frac{L}{Lb})$, ya que

$$A + b\left(-\frac{LA}{Lb}\right) = \left(I + b\left(-\frac{L}{Lb}\right)\right)A,$$

donde tenemos que

$$(I - b\frac{L}{Lb})b = b - b\frac{L}{Lb}b = 0,$$

concluimos que $\det A_{eq} = 0$ \square

La interpretación del lema anterior consiste en que la dinámica n -dimensional de $\dot{x} = Ax$ se restringe, mediante el control equivalente, a la dinámica $(n-1)$ -dimensional definida en el hiperplano \mathbf{S} y representada por $\dot{x} = A_{eq}x$.

En particular, por ser A matriz Hurwitz tenemos que $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ es punto de equilibrio de $\dot{x} = Ax + bu_{eq}$, ya que al sustituir en la última igualdad obtenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{eq}\bar{x} \\ &= A\bar{x} + b\left(-\frac{LA\bar{x}}{Lb}\right) \\ &= A(-A^{-1}b\bar{u}) + b\left(-\frac{LA(-A^{-1}b\bar{u})}{Lb}\right) \\ &= -b\bar{u} + b\left(-\frac{L(-b\bar{u})}{Lb}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hemos probado que $\lambda = 0$ es valor propio de la matriz $A_{eq} = A + b\left(\frac{p^T}{p^T(-A^{-1}b)}\right)$; además es Metzler por ser la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas.

Por otro lado, tenemos que si $x^* \in Ker(I - b\frac{L}{Lb})$, entonces $x^* = \frac{1}{Lb}bLx^*$. Por lo tanto, $x^* \in Im(b)$, implicando que $\lambda = 0$ es el valor propio correspondiente al vector propio x^* . En cada una de las aplicaciones expuestas más adelante, mostramos que $\lambda = 0$ es el valor propio dominante de A_{eq} , y de acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, esto implica que la dinámica del sistema $\dot{x} = A_{eq}x$ tiene al estado $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ como único punto de equilibrio sobre el hiperplano $Lx = k$.

De las desigualdades

$$\begin{aligned} \lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) &< 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) &> 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

es fácil ver que para x tal que $s(x) = 0$, se cumple que

$$L(Ax + br_1) < 0 < L(Ax + br_2),$$

como $Lb > 0$, tenemos que

$$Lbr_1 < -L Ax < Lbr_2 \iff r_1 < -\frac{L Ax}{Lb} < r_2,$$

es decir, $r_1 < u_{eq} < r_2$, por lo que concluimos que $u_{eq} \in [r_1, r_2]$. En particular, se cumple que

$$\begin{aligned} u_{eq}(\bar{x}) &= -\frac{1}{Lb}LA\bar{x} = -\frac{1}{Lb}LA(-A^{-1}b\bar{u}) \\ &= -\frac{1}{Lb}L(-b\bar{u}) = \bar{u}. \end{aligned}$$

Proposición 2. *Si A es Metzler y Hurwitz, entonces la solución $x(t, x_0)$ del sistema (2.2), que inicia en $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, puede ser estabilizada en el punto de equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$, con $\bar{u} \in [r_1, r_2]$, mediante un deslizamiento sobre el hiperplano $w_0^T(x - \bar{x}) = 0$ con el control positivo*

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } w_0^T(x - \bar{x}) > 0 \\ \bar{u} & \text{si } w_0^T(x - \bar{x}) = 0 \\ r_2 & \text{si } w_0^T(x - \bar{x}) < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $A^T w_0 = \lambda_0 w_0$, con valor propio dominante $\lambda_0 < 0$.

Demostración. Si A es Metzler y Hurwitz, entonces A^T es Metzler y Hurwitz también. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, sea $w_0 > 0$ el vector propio de A^T asociado al valor propio dominante $\lambda_0 < 0$; de forma que

$$A^T w_0 = \lambda_0 w_0,$$

implicando que

$$w_0^T A x = \lambda_0 w_0^T x \leq 0,$$

y

$$w_0^T b > 0;$$

de manera que la función $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb}$, con $L = w_0^T$ y x tal que $w_0^T(x - \bar{x}) = 0$

nos queda $u_{eq}(x) = \bar{u}$:

$$\begin{aligned}u_{eq}(x) &= -\frac{w_0^T Ax}{w_0^T b} \\&= (-\lambda_0) \frac{w_0^T x}{w_0^T b} \\&= (-\lambda_0) \frac{w_0^T \bar{x}}{w_0^T b} \\&= -\frac{1}{w_0^T b} \lambda_0 w_0^T (-A^{-1} b \bar{u}) \\&= -\frac{1}{w_0^T b} (w_0^T A) (-A^{-1} b \bar{u}) \\&= \bar{u}.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Estabilización de sistemas positivos mediante modos deslizantes

Los comportamientos de los sistemas afines $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ con lado derecho discontinuo no puede ser descrito adecuadamente en términos de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Para resolver estos problemas, hay varios caminos que son usualmente sugeridos, con el fin de reducir el problema original a una forma que produce una solución muy cercana a la del problema original y que permiten el uso de técnicas de análisis clásico. Tal sustitución del problema es llamada regularización.

3.1. Mezcla con dos tanques

La descripción del problema es el siguiente:

Dos tanques, A y B , contienen V_1 y V_2 litros de salmuera y en los cuales se disolvieron inicialmente a y b libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiéndose un flujo f_2 de salmuera del tanque A al B y un flujo f_3 del tanque B al A . Además, del exterior hay un flujo f_1 con u libras de sal por litro hacia el tanque A , y del tanque B hay un flujo f_4 hacia el exterior. Deseamos determinar la cantidad de sal presente en cada tanque en el instante t .

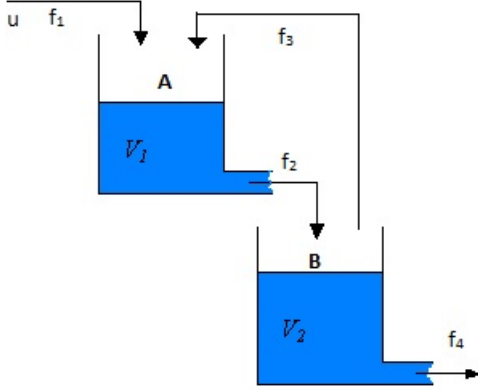


Figura 3.1: Representación de los tanques.

Denotando por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las cantidades de sal presentes al instante t en los tanques A y B respectivamente, el modelo matemático matricial es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (3.1)$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = a$ y $x_2(0) = b$, de manera que el objetivo es estabilizar rápidamente las concentraciones $\frac{x_i}{V_i}$ de cada uno de los tanques. Suponemos que V_1 y V_2 son constantes, entonces

$$f_2 = f_3 + f_4 \quad y \quad f_1 = f_4, \quad (3.2)$$

donde la matriz de coeficientes A es Metzler, cuyos valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f_2(V_1 + V_2) \pm \sqrt{D}}{2V_1V_2}, \quad (3.3)$$

donde $D = f_2^2(V_2 - V_1)^2 + V_1V_2f_3f_2$. De (3.2) tenemos que $f_3 < f_2$, de modo que la expresión

$$\begin{aligned} D &< f_2^2(V_2 - V_1)^2 + V_1V_2f_2^2 \\ &= f_2^2(V_1 + V_2)^2, \end{aligned}$$

por consiguiente $-f_2(V_1 + V_2) + \sqrt{D} < 0$, esto es que A es matriz Hurwitz. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, tenemos

que el punto de equilibrio \bar{x} es positivo y asintóticamente estable, i.e.,

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = \bar{u} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Entonces, u es quien determina la cantidad de sal en cada tanque. La dinámica es sencilla, al aplicar un control constante \bar{u} , cualquier solución que inicie en \mathbb{R}^2 tiende asintóticamente al punto de equilibrio \bar{x} . Enseguida se probará que se puede estabilizar más rápido al considerar un control de la forma $u \in [r_1, r_2]$ en lugar de $u = \bar{u}$. Con

$$0 \leq r_1 < \bar{u} < r_2.$$

Sea $L = (l_1, l_2)$, con $l_i > 0$, denotemos a $s(x) = Lx - k$, entonces $s(x) = l_1x_1 + l_2x_2 - k = 0$, tal que para $L\bar{x} = k$ tenemos $L\dot{x} = 0$ de forma que la recta $s(x) = 0$ pasa entre los puntos

$$\bar{x}_1 = r_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = r_2 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Si consideramos el control discontinuo

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{para } s(x) > 0 \\ r_2 & \text{para } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Para cumplir con las condiciones de deslizamiento

$$\begin{aligned} \lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) &< 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) &> 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

debemos tener que $LAx < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}_+^n$,

$$LAx = -x_1 \frac{f_2l_1 - f_2l_2}{V_1} - x_2 \frac{f_2l_2 - f_3l_1}{V_2},$$

es suficiente que

$$f_2(l_1 - l_2) \geq 0 \text{ y } f_2l_2 - f_3l_1 > 0,$$

y además

$$f_2(l_1 - l_2) > 0 \text{ y } f_2l_2 - f_3l_1 \geq 0,$$

pero no puede pasar que ambas sean mayores que cero pues no se cumpliría que $LAx < 0$, y esto se resume en

$$\frac{f_3}{f_2} \leq \frac{l_2}{l_1} \leq 1. \quad (3.8)$$

Sabemos que $Lb = f_1 l_1$, entonces,

$$u_{eq} = \frac{x_1 \frac{f_2 l_1 - f_2 l_2}{V_1} + x_2 \frac{f_2 l_2 - f_3 l_1}{V_2}}{f_1 l_1},$$

así la dinámica deslizando dada por $\dot{x} = Ax + bu_{eq}$, toma la forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{eq} x, \quad (3.9)$$

y A_{eq} tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -\frac{f_2}{V_1 V_2 l_1} (V_1 l_1 + V_2 l_2)$, por lo que el valor propio λ_d del modo deslizando es

$$\lambda_d = -\frac{f_2}{V_1 V_2} \left(V_1 + \frac{V_2 l_2}{l_1} \right),$$

donde λ_d está en función del cociente $\frac{l_2}{l_1}$. De la desigualdad (3.8), si suponemos que $l_1 = l_2$ estaremos minimizando el valor propio λ_d , con $\frac{l_2}{l_1} \in [\frac{f_3}{f_2}, 1]$, de tal manera que el deslizamiento sea el óptimo, es decir, tenemos que

$$\lambda_d < \lambda_2 = \frac{-f_2(V_1 + V_2) - \sqrt{D}}{2V_1 V_2}$$

ya que $f_3 < f_2$ y concluimos que $\lambda_d < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Considerando $l_1 = l_2$, de (3.7) se tiene que $r_1 < \frac{x_1}{V_1} < r_2$, con $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb} = r_2 - \frac{x_1}{V_1}$ y $\lambda_d = -\frac{2f_2}{V_1}$, es decir, en todo el segmento de recta $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid s(x_1, x_2) = 0\}$ existe un deslizamiento. Haciendo $k = \frac{1}{2}L(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$, entonces

$$k = \frac{1}{2}L(-A^{-1}br_1 - A^{-1}br_2) = V_1 l_1 (r_1 + r_2).$$

Suponiendo $l_1 = l_2$ y $V_1 = V_2$ en (3.9), la dinámica deslizando es representada en términos de x_1 ó x_2 , por una de las dos ecuaciones

$$\dot{x}_i = -\frac{f_2}{V_1} (2x_i - V_1(r_1 + r_2)), \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (3.10)$$

el punto de equilibrio $\bar{x}_i = \frac{1}{2}V_1(r_1 + r_2)$, este punto de equilibrio es el punto medio del segmento de deslizamiento. Para el sistema (3.1), si $l_1 = l_2$ y $V_1 = V_2$, tenemos que

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } s(x) > 0 \\ u_{eq} & \text{si } s(x) = 0 \\ r_2 & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

con $s(x) = Lx - k$.

3.1.1. Ejemplo numérico

Asignando al sistema (3.1) los valores $V_1 = V_2 = 10$, $f_1 = f_4 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 2$ y $u \in [0, 4]$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

De (3.5) tenemos que

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Como $\bar{u} = 2$, se tiene que $\bar{x} = (20, 20)^T$, con $l_1 = l_2 = 1$ y $k = V_1 l_1 (r_1 + r_2) = 40$, la recta de cambio es $x_1 + x_2 = 40$. Ya que $u_{eq} = r_2 - \frac{x_1}{V_1} = 4 - 0.1x_1$ de (3.11) tenemos que

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 + x_2 > 40 \\ 4 - 0.1x_1 & \text{si } x_1 + x_2 = 40 \\ 4 & \text{si } x_1 + x_2 < 40 \end{cases} \quad (3.13)$$

entonces, $0 < 4 - 0.1x_1 < 4$ por lo que el intervalo de deslizamiento es $0 < x < 40$. Luego, tenemos que

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix},$$

entonces $\sigma(A_{eq}) = \{0, -0.6\}$, mientras que $\sigma(A) = \{-5.5051 \times 10^{-2}, -0.54495\}$, así $\lambda_d = -0.6$, es decir, $\lambda_d < \min[\sigma(A)]$. Esta última desigualdad implica que,

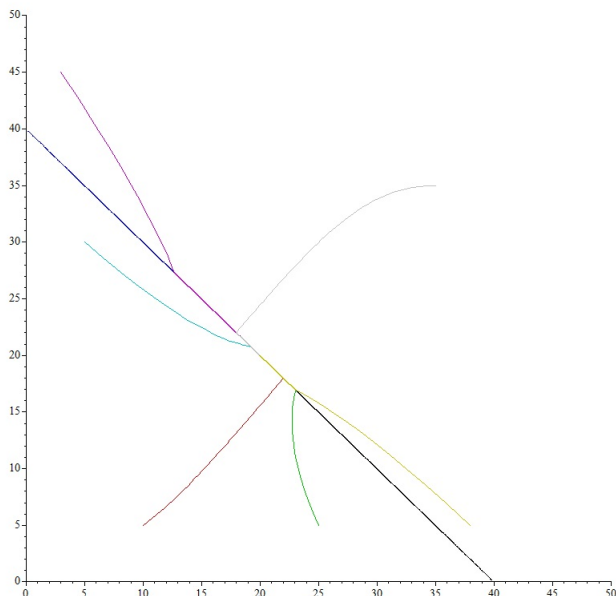


Figura 3.2: Comportamiento del sistema.

para condiciones iniciales sobre la recta de deslizamiento, es más rápido estabilizar mediante la aplicación del control (3.13) que mediante el control constante $\bar{u} = 2$.

Consideremos la suma de los tiempos de convergencia desde una condición inicial x_0 a una vecindad del punto de equilibrio \bar{x} bajo el control u dado por (3.13) es menor el tiempo de convergencia correspondiente al aplicar el control constante $u = \bar{u}$.

Dada $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T = (20, 40)^T$ (la cual no pertenece a la recta de deslizamiento) la solución de (3.12) – (3.13) es

$$\begin{pmatrix} 26.33e^{-5.5051 \times 10^{-2}t} + 6.3299e^{-0.54495t} \\ 7.7526e^{-0.54495t} - 32.247e^{-5.5051 \times 10^{-2}t} \end{pmatrix}.$$

Sea t_d el tiempo de llegada de esta solución a la recta de deslizamiento $s(x_1, x_2) = 0$, lo podemos obtener de $x_1(t_d, u) + x_2(t_d, u) = 40$, de manera que $t_d = 6.944$.

El punto de llegada sobre la superficie deslizante será nuestra nueva con-

diición inicial, la cual es

$$x(t_d) = e \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.821 \\ 22.179 \end{pmatrix},$$

considerando la solución deslizante, de (3.10) tenemos que $\dot{x}_1 = 12 - 0.6x_1$, luego $x_1(t) = e^{-0.6t}(G + 20e^{0.6t})$, entonces $x_1(0) = 17.821$ y $G = -2.179$. Entonces, el tiempo de llegada t_f de la trayectoria que parte de esta nueva condición inicial a una vecindad N_ϵ de \bar{x} sobre la superficie de deslizamiento satisface $|x_1(t_f) - 20| = \delta = 0.001$, esto es que $2.179e^{-0.6t_f} = 0.001$, así $t_f = 12.811$. De tal manera que el tiempo de llegada de la trayectoria que inicia en x_0 a N_ϵ es $t_d + t_f = 19.755$.

Considerando el sistema (3.12) con $u = \bar{u} = 2$, su solución es dada por $x(t) = e^{At}(x_0 + A^{-1}b\bar{u}) - A^{-1}b\bar{u}$, para $t = t_c > 0$ pedimos que $|x(t_c) - \bar{x}| = \delta = 0.001$ con $\bar{x} = (20, 20)^T$, nos queda que $t_c = 171.945$; de manera que $t_d + t_f < t_c$. Los resultados de este ejemplo numérico se pueden ver en la figura siguiente:

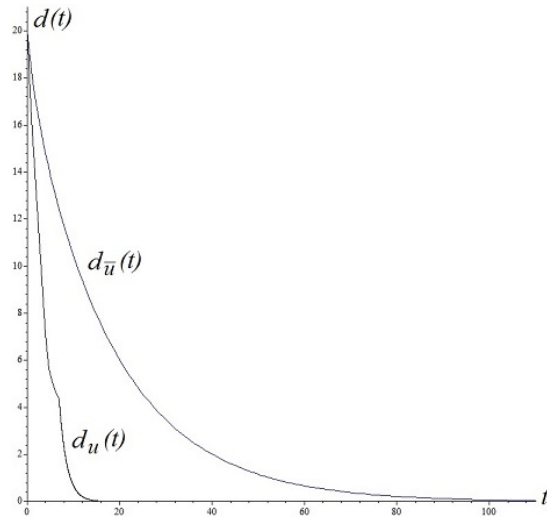


Figura 3.3: En esta simulación se tomó la condición inicial $x_0 = (20, 40)^T$, la curva $d_{\bar{u}}(t) = \sum |x_i(t, \bar{u} - \bar{x}_i)|$ donde $x(t, \bar{u})$ es la solución del sistema (3.12) con $\bar{u} = 2$, la curva $d_u(t) = \sum |x_i(t, u) - \bar{x}_i|$ donde $x(t, u)$ es la solución con u de la forma (3.13).

Aplicando la proposición 2 para el caso de los dos tanques

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad (3.14)$$

donde $f_i > 0$ y $f_2 = f_1 + f_3$, y el punto de equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -A^{-1}b\bar{u} \\ &= -\begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ &= \bar{u} \frac{f_1}{f_2 - f_3} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ &= \bar{u} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al considerar la restricción $\frac{l_2}{l_1} \in [\frac{f_3}{f_2}, 1]$ para tener deslizamiento sobre la recta $l_1x_1 + l_2x_2 = k$, $k = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)(l_1V_1 + l_2V_2)$ tenemos que el valor propio correspondiente al deslizamiento es dado por

$$\lambda_d = -\frac{f_2}{V_1V_2} \left(V_1 + \frac{l_2}{l_1} V_2 \right)$$

de forma que λ_d es decreciente en el intervalo $[\frac{f_3}{f_2}, 1]$. De manera que el deslizamiento es más rápido si $\frac{l_2}{l_1} = 1$ y más lento si $\frac{l_2}{l_1} = \frac{f_3}{f_2}$. \square

Ejemplo 3. *Generando otro plano deslizante con base a la proposición 2. Considerando $V_1 = V_2$, tenemos que la matriz*

$$A^T = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V} & \frac{f_2}{V} \\ \frac{f_3}{V} & -\frac{f_2}{V} \end{pmatrix},$$

tiene vector propio

$$w_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_3} \sqrt{f_2 f_3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

asociado al valor propio dominante $\lambda_0 = \frac{1}{V} \sqrt{f_2 f_3} - \frac{1}{V} f_2 < 0$. Por la proposición anterior, tenemos que ocurre un deslizamiento sobre la recta $w_0^T(x - \bar{x})$.

Observación 4. De acuerdo al cálculo de este ejemplo, observamos que si $L = (l_1, l_2) = (\sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \quad 1)$ tal que $l = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{f_2}{f_3}}} = \sqrt{\frac{f_3}{f_2}} < 1$, de forma que $\sqrt{\frac{f_3}{f_2}} \in (\frac{f_3}{f_2}, 1)$ implicando que

$$\begin{aligned} LAx &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} & 1 \\ \frac{f_2}{f_3} & -\frac{f_2}{f_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \left(\frac{1}{V_1} f_2 - \frac{1}{V_1} f_2 \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \right) - x_2 \left(\frac{1}{V_2} f_2 - \frac{1}{V_2} f_3 \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \right) \\ &= x_1 \frac{1}{V_1} f_2 \left(1 - \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \right) - x_2 \frac{1}{V_2} \left(f_2 - f_3 \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \right) \\ &< 0 \quad \text{para } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

3.2. Estabilización de la insulina via modos deslizantes con control para T1DM

3.2.1. Estabilización de insulina implica estabilización de glucosa

Muchos modelos matemáticos sobre la dinámica de la glucosa-insulina en la T1DM (Diabetes Mellitus tipo 1) han sido propuestos; sin embargo, el modelo de Sorensen es uno de los más aceptados pues es el más completo en la representación del metabolismo de la glucosa en un enfoque compartimental (ver, [17]). El uso del modelo de Sorensen para fines de control se ha discutido en [14]; ahí, se da una breve discusión acerca de la estructura principal del modelo. El modelo es dividido en 3 subsistemas: glucosa, insulina y tasas de glucagon-metabólico. El subsistema de la glucosa es una ecuación diferencial ordinaria no lineal 8-dimensional, mientras tanto el subsistema de la insulina es una ecuación diferencial ordinaria lineal 7-dimensional. Ambos sistemas están acoplados por el subsistema no lineal de tasas de glucagon-metabólico.

Un enfoque típico del control de la glucosa en la T1DM (Diabetes Mellitus tipo 1) consiste en diseñar una función $u(t)$ para controlar la señal de salida medida, esto es, la concentración de glucosa de el tejido vascular peri-

férico. El objetivo del control en la concentración de glucosa se alcanza por el suministro exógeno de insulina en la ruta subcutánea (señal de control) definido por diseño $u(t)$. En esta contribución, un subsistema de estabilización de la insulina es propuesto. Esta intención obedece al necesario control de la infusión de insulina; es decir, no es suficiente para obtener la concentración de glucosa en rangos fisiológicos, pero la insulina infundida debe ser controlada con el fin de reducir el exceso de dosis infundidas para prevenir la hiperinsulinemia y el coma diabético.

Proponemos un algoritmo para el control de la insulina basado en la estabilización rápida de un sistema de control lineal por medio de la teoría de modos deslizantes para sistemas positivos. El sistema controlado es el subsistema de insulina del modelo de Sorensen, el cual aquí es reescrito y considerando los parámetros nominales:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 1.73x_2 - 1.73x_1 \\
 \dot{x}_2 &= 0.454x_1 + 0.909x_4 + 0.727x_5 + 1.06x_6 - 3.151x_2 \\
 \dot{x}_3 &= 0.765x_2 - 0.765x_3 \\
 \dot{x}_4 &= 0.094x_2 + 0.378x_3 - 0.789x_4 \\
 \dot{x}_5 &= 1.411x_2 - 1.835x_5 \\
 \dot{x}_6 &= 1.418x_2 - 1.874x_6 + 0.455x_7 \\
 \dot{x}_7 &= 0.05x_6 - 0.111x_7
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde, x_i , para $i \in 1, \dots, 7$ es la concentración de insulina en el cerebro, arterias, intestino, hígado, riñones, vascular periférica, compartimentos intersticiales periféricos, respectivamente. Este submodelo se utiliza para diseñar un control estabilizador según la metodología utilizada en el trabajo.

De tal manera que proponemos un algoritmo para el control de la insulina, basado en una estabilización rápida de un sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax$$

con

$$A = \begin{pmatrix}
 -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\
 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000}
 \end{pmatrix}$$

A continuación, los parámetros de el control no continuo u para la rápida estabilización de la insulina son calculados.

Consideremos la representación del espacio de estado del subsistema lineal de la insulina descrito antes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.16}$$

con $x = (x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{R}_+^7$ representando los niveles de insulina. El parámetro del control positivo u representa la infusión de insulina, esto es, un parámetro acotado $u \in [r_1, r_2]$, con $r_2 > r_1 \geq 0$. Podemos ver que la matriz A de este modelo es Metzler y Hurwitz, de tal manera que se cumple la positividad y la condición deslizante dada en (3.7).

El problema de estabilización asume la infusión de insulina exógena en el tejido subcutáneo, es decir, la ecuación de balance de masa de la concentración de insulina en el compartimento vascular periférica \dot{x}_6 es modificada por la adición de la entrada u :

$$\dot{x}_6 = 1.418x_2 - 1.874x_6 + 0.455x_7 + 1.418u$$

El término multiplicativo 1.418 preserva el balance de la masa en la ecuación, utilizando los valores nominales de los parámetros de caudal y volumen en el compartimento vascular periférico $\left(\frac{Q_P^I}{V_{PV}^I} = 1.418\right)$ (ver, [17]).

De esta manera, $b = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.418 \ 0]^T$ y los parámetros del hiperplano $Lx - k = 0$ son $L = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7]$. Una vez que se cumplen las desigualdades (3.7), podemos definir el control deslizante u_{eq} en el segmento del hiperplano $Lx = k$. De $L\dot{x} = 0$

$$u_{eq} = -\frac{L Ax}{L b} \in [r_1, r_2].$$

De acuerdo con $k = L\bar{x}$, tenemos: $k = (r_1 + r_2) \pm (0.45781a_1 + 0.45781a_2 + 0.45781a_3 + 0.27387a_4 + 0.35202a_5 + 0.6885a_6 + 0.3101a_7)$. Podemos probar que existe L tal que un deslizamiento estable aumente sobre el hiperplano $\mathbf{H} = \{x \in \mathbb{R}_+^7 | Lx = k\}$. Los valores $a_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, 7$ y $k > 0$ deben ser fijos de tal manera que se cumpla la desigualdad (3.7). De esta manera:

$$\begin{aligned}L Ax &= x_6(1.06a_2 - 1.874a_6 + 0.05a_7) - x_3(0.765a_3 - 0.378a_4) \\ &+ x_2(1.73a_1 - 3.151a_2 + 0.765a_3 + 0.094a_4 + 1.411a_5 + 1.418a_6) \\ &- x_5(1.835a_5 - 0.727a_2) - x_4(0.789a_4 - 0.909a_2) \\ &- x_1(1.73a_1 - 0.454a_2) - x_7(0.111a_7 - 0.455a_6).\end{aligned}$$

Por simplicidad en la expresión de valores numéricos anterior se asignan a algún a_i , en particular para eliminar x_1, x_3, x_4, x_5 y x_7 teniendo el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1.73 & -0.454 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.765 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.909 & 0 & 0.789 & 0 \\ 0 & -0.727 & 0 & 0 & 1.835 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la siguiente solución no trivial:

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T = [0.66239 \ 2.5241 \ 1.4369 \ 2.9080 \ 1.0]^T.$$

Además, consideramos que $0.111a_7 - 0.455a_6 = 0$ y $a_6 = 0.24396a_7$, y tenemos:

$$L = [0.662 \ 2.524 \ 1.436 \ 2.908 \ 1 \ 0.243a_7 \ a_7]$$

tal que

$$LAx = [0.345a_7 - 4.023]x_2 + [2.675 - 0.407a_7]x_6$$

Debido a que $b^T u = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.418 \ 0]^T$ tenemos $Lbr_1 = a_6 r_1 = 0.243a_7 r_1$. Para determinar los valores de parámetro positivo tal que se cumple la desigualdad (3.7), las siguientes operaciones deben ser consideradas:

$$\begin{aligned} L\dot{x} &= (Ax + bu) \\ &= (0.345a_7 - 4.023)x_2 + (2.675 - 0.407a_7)x_6 + 0.243a_7u \end{aligned}$$

Debemos considerar tambien:

$$Lx - k = 0.662x_1 + 2.524x_2 + 1.436x_3 + 2.908x_4 + x_5 + 0.243a_7x_6 + a_7x_7 - k = 0.$$

Es decir;

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2.524}k - \frac{1}{2.524}(0.662x_1 + 1.436x_3 + 2.908x_4 + x_5 + 0.243a_7x_6 + a_7x_7) \\ &= \frac{1}{2.524}k - (0.262x_1 + 0.569x_3 + 1.152x_4 + 0.396x_5 + 0.097a_7x_6 + 0.396a_7x_7) \\ &= \frac{1}{2.524}k - L_m x_m. \end{aligned}$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} Lx - k > 0 &\Leftrightarrow x_2 > \frac{1}{2.5241}k - L_mx_m \Leftrightarrow u = r_1 \\ &< 0 &\Leftrightarrow x_2 < \frac{1}{2.5241}k - L_mx_m \Leftrightarrow u = r_2. \end{aligned}$$

Si asumimos que $0.345a_7 - 4.023 = 0$, entonces $a_7 = 11.632$; tal que:

$$L = [0.662 \quad 2.524 \quad 1.436 \quad 2.908 \quad 1 \quad 2.837 \quad 11.63] \quad (3.17)$$

y $L\dot{x} = 2.837u - 2.060x_6$, la desigualdad (3.7) resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} L\dot{x} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) = 2.837r_1 - 2.060x_6 < 0 \\ &\Leftrightarrow x_6 > \frac{2.837r_1}{2.060} = 1.377r_1 \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} L\dot{x} &= \lim_{s \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) = 2.837r_2 - 2.060x_6 > 0 \\ &\Leftrightarrow x_6 < \frac{2.837r_2}{2.060} = 1.377r_2 \end{aligned}$$

que se puede resumir en condiciones para r_1 y r_2 :

$$r_1 < 0.726x_6 < r_2$$

si estamos de acuerdo con $12.770 = \min\{x_6\} \leq x_6 \leq \max\{x_6\} = 34.425$, entonces podemos elegir $r_1 > 10$ y $r_2 < 50$. Podemos también considerar $k = 552.75$. El control equivalente resulta $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb} = 0.72622x_6$, debido a que $L\dot{x} = 0$ implica que $u_{eq} = 0.72622x_6$. Entonces, el control puede ser redefinido:

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - 552.75 > 0 \\ 0.72622x_6 & \text{si } Lx - 552.75 = 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - 552.75 < 0 \end{cases}$$

con $0 < r_1 < \min\{0.726x_6\} \leq 0.726x_6 \leq \max\{0.726x_6\} < r_2$, donde elegimos a $k = 552.75$. Ahora, calculamos el punto de equilibrio \bar{x} de el sistema deslizante: $\dot{x} = Ax + bu_{eq}(\bar{x})$; es decir:

$$A\bar{x} + bu_{eq}(\bar{x}) = 0$$

Debido a que \bar{x} debe estar en el hiperplano, entonces debe de cumplirse $L\bar{x} = k$. De la ecuación (3.15) y de seleccionar $k = 552.75$, entonces $\bar{x} = [28.672 \quad 28.672 \quad 28.672 \quad 17.153 \quad 22.059 \quad 43.114 \quad 19.421]^T$.

Capítulo 4

Robustez de la estabilidad de una familia de sistemas lineales

4.1. La estabilidad Hurwitz robusta de matrices Metzlerianas

En esta sección mostraremos un resultado de robustez para una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Consideremos el sistema lineal positivo con control positivo

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{4.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz Metzler y Hurwitz, $x, b \in \mathbb{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$. Bajo tales condiciones de positividad para (4.1), presentamos un conjunto de resultados que permiten asegurar la existencia de equilibrios y la estabilidad robusta de tales soluciones de (4.1) contenidas en el cono positivo \mathbb{R}_+^n .

Una extensión importante de la prueba propuesta es la posibilidad de tomar los casos cuando la dinámica de los sistemas no es exactamente conocida, esto es ahora presentado.

Agregamos algunas definiciones para abordar el teorema 12.6 del libro [5]. Pero primero, definimos el conjunto

$$\mathbf{A} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \text{ para toda } i, j\}$$

que incluye a las matrices Metzlerianas de cota inferior y cota superior, donde

$$A^- = \begin{pmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1n}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^- & \cdots & a_{nn}^- \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1n}^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^+ & \cdots & a_{nn}^+ \end{pmatrix}$$

de tal manera que tenemos la siguiente definición.

Definición 4. *Una matriz A es llamada matriz Metzleriana si $a_{ii} < 0$ para toda i y $a_{ij} \geq 0$ para toda $i \neq j$. Similarmente, un intervalo de matrices \mathbf{A} es llamada matriz intervalo Metzleriana, si cada matriz $A \in \mathbf{A}$ es una matriz Metzleriana.*

Podremos representar un elemento $A_\epsilon \in \mathbf{A}$ mediante la notación:

$$A^- < A_\epsilon < A^+$$

donde ϵ es un parámetro escalar, $\epsilon \in [\alpha, \beta]$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de tal manera que $\alpha < \beta$, tal que

$$A^- = A + \alpha C \quad y \quad A^+ = A + \beta C$$

y además representamos a un elemento de A_ϵ como

$$A_\epsilon = A + \epsilon C$$

donde C es una matriz no negativa.

En el siguiente teorema, el termino $A(k)$ denota la submatriz principal de A , que consiste de las primeras k columnas y k renglones.

Teorema 5. *Una matriz Metzleriana $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Hurwitz para toda $A \in [A^-, A^+]$ si y solo si A^+ es Hurwitz. Una condición equivalente es que todos los menores principales de $-A^+$ son positivos, i.e, $\det[-A^+(k)] > 0$ para $k = 1, \dots, n$.*

De acuerdo al teorema anterior, tenemos que la matriz $A_\epsilon = A + \epsilon C$ es Metzleriana y Hurwitz para cualquier $\epsilon \in [\alpha, \beta]$, tal que $A^+ = A + \beta C$ es Hurwitz.

4.2. Estabilidad deslizante de una familia robusta de sistemas lineales

En esta sección consideramos una matriz Metzleriana A_ϵ y un intervalo de matrices Metzlerianas \mathbf{A} tal que $A^- \leq A_\epsilon \leq A^+$, con A^+ Hurwitz estable. Sea el sistema de control positivo

$$\dot{x} = A_\epsilon x + bu, \quad (4.2)$$

donde $x, b \in \mathbb{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2]$, con $0 \leq r_1 < r_2$. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, tenemos que el punto de equilibrio $\bar{x}_\epsilon = -A_\epsilon^{-1}b\bar{u} \in \mathbb{R}_+^n$, es positivo, tal que la dinámica de (4.2) con $u = \bar{u}$ es asintóticamente estable; cualquier solución que inicie en \mathbb{R}_+^n tiende asintóticamente al punto de equilibrio \bar{x}_ϵ para cualquier valor fijo de $\epsilon \in [\alpha, \beta]$. Puede probarse que los sistemas positivos del tipo (4.2) son no totalmente controlables, aún así, podemos preguntarnos ¿Es posible mejorar la tasa de estabilización al considerar $u \in [r_1, r_2]$ en lugar del valor constante $u = \bar{u}$?, en esta sección damos una respuesta positiva a la pregunta mediante un modo deslizante que mejora la tasa de estabilización.

Consideremos el sistema positivo (4.2), con matriz Metzleriana $A_\epsilon \in \mathbf{A}$ para $\epsilon \in [\alpha, \beta]$. En los trabajos [10] y [12] se muestran condiciones suficientes para tener un modo deslizante definido en un segmento de hiperplano contenido en \mathbb{R}_+^n . Si consideramos un vector constante $L_\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$, podemos representar un segmento de hiperplano que pasa por el punto de equilibrio positivo \bar{x}_ϵ , mediante la igualdad

$$L_\epsilon(x - \bar{x}_\epsilon) = 0,$$

de manera que se cumplen las condiciones deslizamiento expresadas con el par de desigualdades:

$$\begin{aligned} L_\epsilon(A_\epsilon x + br_1) &< 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tales que } L_\epsilon x > 0, \\ L_\epsilon(A_\epsilon x + br_2) &> 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tales que } L_\epsilon x < 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Con la igualdad $L_\epsilon \dot{x} = 0$ definimos $u_{eq\epsilon}$. Es decir,

$$L_\epsilon(A_\epsilon x + bu_{eq\epsilon}) = 0,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} u_{eq\epsilon} &= -\frac{L_\epsilon A_\epsilon x}{L_\epsilon b} \\ &= -\frac{p_\epsilon^T x}{p_\epsilon^T (-A_\epsilon)^{-1} b} > 0, \end{aligned}$$

donde $A_\epsilon^T L_\epsilon^T = -p_\epsilon$, con $p_\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$. De manera que la dinámica deslizante es representada por

$$\dot{x} = A_{eq\epsilon} x,$$

con $A_{eq\epsilon}$ matriz Metzler dada por

$$A_{eq\epsilon} = A_\epsilon + b \left(\frac{p_\epsilon^T}{p_\epsilon^T (-A_\epsilon)^{-1} b} \right).$$

Bajo estas condiciones, es conocido que mediante la aplicación del control

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } L_\epsilon(x - \bar{x}_\epsilon) > 0 \\ u_{eq\epsilon} & \text{si } L_\epsilon(x - \bar{x}_\epsilon) = 0 \\ r_2 & \text{si } L_\epsilon(x - \bar{x}_\epsilon) < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

tendremos que cualquier solución $x(t, \epsilon)$ que inicia fuera del hiperplano $L_\epsilon(x - \bar{x}_\epsilon) = 0$, alcanza al hiperplano en tiempo finito y converge bajo un deslizamiento al punto de equilibrio \bar{x}_ϵ .

4.3. Aplicaciones

Para algunos sistemas positivos del tipo (4.2) es posible determinar un intervalo de matrices \mathbf{A} . A continuación planteamos dos aplicaciones, en cada una calculamos los elementos de robustez y describimos el sistema de control. En el capítulo anterior estudiamos la estabilización mediante un deslizamiento de ambas aplicaciones para el caso $\epsilon = 0$, de manera que ahora mostramos la viabilidad de la estabilización deslizante para cualquier valor $\epsilon \in [\alpha, \beta]$.

4.3.1. El caso de mezcla con dos tanques

Ahora veremos la robustez para el caso de mezcla con dos tanques, para esto utilizaremos lo visto en la sección 3.1, a lo cual le aplicaremos lo visto al comienzo del capítulo.

Por tanto, utilizando el sistema del tipo (4.1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (4.5)$$

con $f_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ y si consideramos volúmenes constantes V_1 y V_2 de tal manera que $f_2 = f_3 + f_4$ y $f_1 = f_4$, tal que $f_3 < f_2$.

Ahora analizando el sistema a lazo abierto

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

con $V_1 = V_2 = V$.

Sea $\epsilon \in [-1, \frac{1}{2}]$ y la matriz C definida por

$$C = \begin{pmatrix} f_2 - f_3 & 0 \\ 0 & f_2 - f_3 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, podemos considerar las matrices

$$A^- := \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -2f_2 + f_3 & f_3 \\ f_2 & -2f_2 + f_3 \end{pmatrix}$$

y

$$A^+ := \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(f_2 + f_3) & f_3 \\ f_2 & -\frac{1}{2}(f_2 + f_3) \end{pmatrix}$$

donde tenemos que $A^- \leq A_\epsilon \leq A^+$ con

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_2 & f_3 \\ f_2 & -f_2 \end{pmatrix} + \epsilon \frac{1}{V} \begin{pmatrix} f_2 - f_3 & 0 \\ 0 & f_2 - f_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) & f_3 \\ f_2 & -(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\text{tr}(A_\epsilon) = -\frac{2}{V}(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) < 0$ y $\det(A_\epsilon) = \frac{1}{V^2}(f_2 - f_3)(f_2 - 2\epsilon f_2 + \epsilon^2 f_2 - \epsilon^2 f_3) > 0$ para $\epsilon \in [-1, \frac{1}{2}]$. Es decir, A_ϵ es Hurwitz y Metzleriana para $\epsilon \in [-1, \frac{1}{2}]$, al aplicar el teorema 5 es suficiente al mostrar que A^+ es Hurwitz.

Además tenemos que nuestro punto de equilibrio queda definido por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -A_\epsilon^{-1} b \bar{u} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{-(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3)}{V} & \frac{f_3}{V} \\ \frac{f_2}{V} & \frac{-(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3)}{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} \end{aligned}$$

y tambien podemos minimizar λ_{d_ϵ} cambiando la pendiente de la recta deslizando. A partir de (4.3), debemos tener que $LA_\epsilon x < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}_+^n$,

$$LA_\epsilon x = -x_1 \frac{l_1(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_2 l_2}{V} - x_2 \frac{l_2(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_3 l_1}{V},$$

es suficiente que

$$l_1(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_2 l_2 \geq 0 \quad y \quad l_2(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_3 l_1 > 0,$$

y además

$$l_1(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_2 l_2 > 0 \quad y \quad l_2(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_3 l_1 \geq 0,$$

pero no puede pasar que ambas sean mayores que cero pues no se cumpliria que $LA_\epsilon x < 0$, y esto se resume en

$$\frac{f_3}{f_2} \leq \frac{l_2 - \epsilon l_2}{l_1 - \epsilon l_2} \leq 1. \quad (4.7)$$

Sabemos que $Lb = f_1 l_1$, entonces,

$$u_{eq\epsilon} = \frac{x_1 \frac{l_1(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_2 l_2}{V} + x_2 \frac{l_2(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) - f_3 l_1}{V}}{f_1 l_1},$$

así la dinámica deslizando dada por $\dot{x} = A_\epsilon x + bu_{eq\epsilon}$, toma la forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V l_1} & \frac{(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) l_2}{V l_1} \\ \frac{f_2}{V} & -\frac{f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{eq\epsilon} x, \quad (4.8)$$

y $A_{eq\epsilon}$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -\frac{f_2 l_1 + f_2 l_2 - \epsilon f_2 l_1 + \epsilon f_3 l_1}{V l_1}$, por lo que el valor propio λ_d del modo deslizando es

$$\lambda_d = -\frac{f_2 l_1 + f_2 l_2 - \epsilon f_2 l_1 + \epsilon f_3 l_1}{V l_1},$$

donde λ_d está en función de la pendiente $\frac{l_2}{l_1}$. De la desigualdad (4.7), si suponemos que $l_1 = l_2$ estaremos minimizando el valor propio λ_d de tal manera que el deslizamiento sea el óptimo, es decir, tenemos que

$$\lambda_d < \lambda_2 = -\frac{2f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3}{V},$$

ya que $f_3 < f_2$ y concluimos que $\lambda_d < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Ejemplo 4. Retomando el ejemplo numérico 3.1.1 tenemos que la matriz A del sistema

$$\dot{x} = Ax + bu$$

queda determinada por

$$A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V = 10$, además $\epsilon \in [-1, \frac{1}{2}]$ y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que podemos considerar las matrices

$$A^- = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix}$$

y

$$A^+ = \begin{pmatrix} -0.25 & 0.2 \\ 0.3 & -0.25 \end{pmatrix},$$

y además

$$A_\epsilon = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 + \epsilon & 2 \\ 3 & -3 + \epsilon \end{pmatrix},$$

con $\text{tr}(A_\epsilon) = -\frac{1}{5}(3 - \epsilon) < 0$ y $\det(A_\epsilon) = \frac{1}{100}(3 - 6\epsilon + \epsilon^2) > 0$ para $\epsilon \in [-1, \frac{1}{2}]$. Es decir, A_ϵ es Hurwitz y Metzleriana para $\epsilon \in [-1, \frac{1}{2}]$, al aplicar el teorema 5 es suficiente al mostrar que A^+ es Hurwitz.

Además tenemos que el punto de equilibrio es:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -A_\epsilon^{-1}b\bar{u} \\ &= -2 \begin{pmatrix} -0.3 + 0.5\epsilon & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 + 0.5\epsilon \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} -\frac{10\epsilon-30}{\epsilon^2-6\epsilon+3} & \frac{20}{\epsilon^2-6\epsilon+3} \\ \frac{1}{\frac{1}{30}\epsilon^2-\frac{1}{5}\epsilon+\frac{1}{10}} & -\frac{\frac{1}{3}\epsilon-1}{\frac{1}{30}\epsilon^2-\frac{1}{5}\epsilon+\frac{1}{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} -\frac{10\epsilon-30}{\epsilon^2-6\epsilon+3} & \frac{20}{\epsilon^2-6\epsilon+3} \\ \frac{0.3}{\epsilon^2-6\epsilon+3} & -\frac{10\epsilon-30}{\epsilon^2-6\epsilon+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} -\frac{10\epsilon-30}{\epsilon^2-6\epsilon+3} \\ \frac{0.3}{\epsilon^2-6\epsilon+3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

También tenemos que $l_1 = l_2 = 1$ y por consiguiente

$$\begin{aligned} u_{eq\epsilon} &= -\frac{LA_\epsilon x}{Lb} \\ &= -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.3 + 0.5\epsilon & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 + 0.5\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{10}\epsilon x_1 + \left(\frac{1}{10}\epsilon - \frac{1}{10}\right)x_2, \end{aligned}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{2}{\epsilon^2 - 6\epsilon + 3} \begin{pmatrix} 30 + 10\epsilon \\ 30 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\epsilon^2 - 6\epsilon + 3}(60 + 10\epsilon), \end{aligned}$$

por tanto

$$u_{eq\epsilon} = \frac{-2\epsilon^2 - 10\epsilon + 12}{\epsilon^2 - 6\epsilon + 3} - \frac{x_1}{10},$$

por lo que el control queda definido como

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 + x_2 > 40 \\ \frac{-2\epsilon^2 - 10\epsilon + 12}{\epsilon^2 - 6\epsilon + 3} - \frac{x_1}{10} & \text{si } x_1 + x_2 = 40 \\ 4 & \text{si } x_1 + x_2 < 40 \end{cases} \quad (4.9)$$

Luego, tenemos que

$$A_{eq\epsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V l_1} & \frac{(f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3) l_2}{V l_1} \\ \frac{f_2}{V} & -\frac{f_2 - \epsilon f_2 + \epsilon f_3}{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 - 0.1\epsilon \\ 0.3 & -0.3 + 0.1\epsilon \end{pmatrix},$$

entonces $\sigma(A_{eq}) = \{0, -0.6 + 0.1\epsilon\}$, mientras que $\sigma(A) = \{-0.05505, -0.54495\}$, así $\lambda_{d\epsilon} = -0.6 + 0.1\epsilon$, es decir, $\lambda_{d\epsilon} < \min[\sigma(A)]$. Esta última desigualdad implica que, para condiciones iniciales sobre la recta de deslizamiento, es más rápido estabilizar mediante la aplicación del control (4.9) que mediante el control constante $\bar{u} = 2$.

4.3.2. El Modelo de la Insulina

En esta sección mostramos un resultado de robustez para una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

El resultado de robustez que aplicamos aquí es para los sistemas lineal del tipo (4.1) con matriz Metzleriana, una clase particular de matrices Metzler.

Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000} \end{pmatrix},$$

podemos definir la matriz $C = [c_{ij}]$, con

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A^+ es Hurwitz, el Teorema 4 nos asegura que la matriz $A + \epsilon C$ es Hurwitz para cualquier valor de ϵ tal que $-\frac{1}{20} < \epsilon < \frac{1}{200}$, donde podemos considerar que

$$A^+ = A + \left(\frac{1}{200}\right)C \quad \text{y} \quad A^- = A + \left(-\frac{1}{20}\right)C$$

donde el valor $a_{76}^- = 0$, indica la cota inferior para tener la condición Metzleriana y Hurwitz de la matriz A_ϵ es $-\frac{1}{20}$.

Mostramos que la matriz

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{-171}{100} & \frac{18}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-31}{10} & 0 & 1 & \frac{73}{100} & \frac{11}{10} & 0 \\ 0 & \frac{77}{100} & \frac{-76}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-78}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{-18}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-185}{100} & \frac{46}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

es Hurwitz, ya que los menores principales de $-A^+$ son positivos (sin errores de redondeo al calcular los determinantes):

$$\begin{aligned} \det[-A^+(1)] &= \frac{171}{100} \\ \det[-A^+(2)] &= \frac{4401}{1000} \\ \det[-A^+(3)] &= \frac{83619}{25000} \\ \det[-A^+(4)] &= \frac{2440341}{1250000} \\ \det[-A^+(5)] &= \frac{60102567}{25000000} \\ \det[-A^+(6)] &= \frac{718468299}{500000000} \\ \det[-A^+(7)] &= \frac{8052561}{156250000} \end{aligned}$$

Concluimos esta sección observando que el sistema lineal

$$\dot{x} = (A + \epsilon C)x,$$

es estable si $\epsilon \in [-0.05, 0.005]$.

Para algunos sistemas positivos del tipo (4.1) es posible determinar un intervalo de matrices, de manera que un intervalo “grande” significa “más robustez” en la estabilidad del sistema.

Conclusiones

En esta tesis consideramos la teoría de modos deslizantes para sistemas afines con control escalar restringido al intervalo $[r_1, r_2]$, con $r_2 > r_1 \geq 0$. Para tales sistemas presentamos e ilustramos el teorema que establece las condiciones necesarias y suficientes para que una dinámica deslizante exista. Ilustramos la geometría de tales condiciones con dos ejemplos. Con el fin de abordar una familia de aplicaciones, describimos los resultados anteriores para los sistemas lineales, como un caso particular de los sistemas afines, y consideramos condiciones de positividad para tales sistemas.

En este trabajo incluimos dos aplicaciones: el modelo de mezclas de dos tanques y el submodelo de la insulina, siendo este último parte del conocido modelo de Sorensen. Mostramos que el modelo de los dos tanques satisfacen las condiciones de deslizamiento, ilustramos esto mediante un ejemplo numérico y se pudo ver gráficamente como ocurre el deslizamiento en el espacio de estado.

Para el caso de la insulina también mostramos que la matriz correspondiente satisface las condición de ser Metzler, tal que al aplicar la teoría de modos deslizante se logró que hubiera deslizamiento, pero aquí no es posible ilustrar el deslizamiento en el espacio de estado ya que es un sistema con siete variables de estado.

Como resultado, para el caso del modelo de los dos tanques, logramos la mejor tasa de estabilización sobre el modo deslizante al variar la pendiente de la recta deslizante.

También, considerando un resultado de robustez para matrices Metzlerianas, mostramos una manera de analizar y diseñar una estabilización robusta de una familia de sistemas lineales, de manera que describimos la robustez de la estabilización lograda mediante los modos deslizantes para las dos aplicaciones. De manera que logramos el objetivo de describir un método para mejorar la tasa de estabilización y describir la robustez de la propia estabi-

lización.

A futuro es posible trabajar con el deslizamiento sobre superficies (no necesariamente hiperplanos pero satisfaciendo las condiciones deslizamiento y de positividad) para procurar mejorar la tasa de estabilización, y de ser posible describir la robustez de la estabilidad.

Bibliografía

- [1] AIT RAMI, M. y TADEO, F., *Controller Synthesis for Positive Linear Systems With Bounded Controls*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, Vol. 54, No. 2, February 2007.
- [2] BELLMAN, R., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [3] BENVENUTI, L., DE SANCTIS, A. y FARINA, L., *Positive Systems*, Proceedings of the First Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications, Rome, Italy, August 2003.
- [4] BERMAN, A., NEUMANN, M. y STERN, I., *Nonnegative matrices in the Dynamics Systems*, John-Wiley, New York, 1989.
- [5] BHATTACHARYYA, S. P., CHAPPELLAT, H y KEEL, L. H., *Robust Control, The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.
- [6] BOOTHBY, W. M., *An introduction to differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, New York: Academic Press, 1975.
- [7] FARINA, L. y RINALDI, S., *Positive Linear Systems: Theory and applications*, John Wiley y Sons, 2000.
- [8] FILIPPOV, A. F., *Differential equations with discontinuous righthand part*, *Mathematicheskii Sbornik*, 51, No. 1, pp. 99 to 128, 1960.
- [9] LEYVA, H., *Estabilidad de modos deslizantes con controles continuos*, *Mosaicos Matemáticos*, No. 27, Marzo, 2008, pp. 85 a 94.
- [10] LEYVA, H. y CARRILLO, F., *Estabilización robusta de sistemas lineales*, *EPISTEMUS*, No. 15, 2013.

-
- [11] LEYVA, H. y SOLIS-DAUN, J., *Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems*, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009.
- [12] LEYVA, H., SOLÍS-DAUN, J. y SUÁREZ, R., *Global CLF Stabilization of systems with control inputs constrained to a hyperbox*, SIAM J. CONTROL OPTIM., Vol. 51, No. 1, 2013.
- [13] MITKOWSKI, W., *Dynamical Properties of Metzler Systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 56, No. 4, 2008.
- [14] QUIROZ, G. y FEMAT, R., *On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from dynamic analysis*, Mathematical Biosciences 210, 554 575, 2007.
- [15] SIRA-RAMÍREZ, H., *Differential Geometric methods in variable-structure control*, Int. J. Control, Vol. 48, No. 4, 1988.
- [16] SLOTINE, J. J. y SASTRY, S. S., *Tracking Control of Non linear Systems using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators*, Int J. Control, 1993, Vol. 38.
- [17] SORENSEN, J.T., *A Physiologic Model of Glucose Metabolism in Man and its Use to Design and Assess Improved Insulin Therapies for Diabetes*, JPh.D. Thesis, MIT, USA, 1985.
- [18] UTKIN, VADIM I., *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
-