UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Metrizabilidad y Normabilidad en Espacios Localmente Convexos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Elena Ortiz Rascón

Directora de Tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 7 de Mayo de 2015

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora.

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Universidad de Sonora.

Dra. Marysol Navarro Burruel
Universidad de Sonora.

M.C. Carolina Espinoza Villalva
Universidad de Sonora.

Al 2008

Agradecimientos

Hay tanta gente a la que le quiero agradecer, cada uno tiene su detalle. Empiezo por Carlos Alarcón y Dante, su amistad y apoyo hicieron muy gratos estos años. Dante, gracias por hacerme sonreír. A Jocelyn, fue divertido lidiar la parte media de la licenciatura contigo. El ejemplo de Alejandra Fonseca. A César y Lupita que siempre estuvieron pendientes de mí. A Jorge Espíndola, Belén Chavarría, Borchardt y Pastora por su amistad estos últimos momentos. A Luis René. Luis, ¿cómo no mencionarte? El sin número de veces que nos ayudaste a varios de nosotros con tanta naturalidad, tu empecinamiento en el mejor de los sentidos y tu claridad hacían más entretenido algún tema, en particular el Análisis Matemático. Y a Felipe quién me dio la bienvenida a la licenciatura.

A todos los maestros les tengo algo que agradecer, por mencionar algunos están Eduardo Frías, Teresa Robles, Daniel Olmos y Adolfo Minjárez por su atención cuando tenía inquietudes de la carrera. A la maestra Lupita Ávila, su paciencia al enseñarme a escribir mejor las demostraciones inició mi cariño al Análisis. Y finalmente al maestro Carlos Robles y a la maestra Martha Guzmán, es imposible dormir un segundo en sus clases, han sido mis favoritas. Pero claro está que le tengo un especial agradecimiento a la maestra Martha. Maestra, fue un gusto enorme saber que podría trabajar con usted. Cuando supe que daría Análisis Complejo en aquel semestre, no dudé en entrar de oyente para conocer sus clases y no me arrepiento. Aprecio mucho la guía que me ha dado.

Y a mi familia que no puede faltar, cada uno a su manera y en espacial a mi padre por todo el apoyo y tiempo que me ha brindado.

Elena Ortiz Rascón

Hermosillo, Sonora. Mayo 2015

Índice general

Introducción

De acuerdo a N. Bourbaki (ver [3] p. 217), el comienzo de la edad adulta para la teoría de espacios normados se da con la publicación del tratado de Banach sobre operadores lineales (ver [2]). Muchos resultados vienen en esa obra acompañados de ejemplos tomados de diversos ámbitos del Análisis, por ello se pronosticaba un futuro brillante para la teoría. En efecto, el trabajo había tenido un éxito considerable y una de sus consecuencias más inmediatas fue la adopción cuasi-universal del lenguaje y notación utilizada por Banach. Sin embargo, a pesar de muchos años dedicados al estudio sobre espacios de Banach, si se exceptúan las investigaciones en álgebras de Banach y sus aplicaciones al análisis armónico conmutativo y no conmutativo, esta teoría aportó pocas nuevas aplicaciones a los grandes problemas del Análisis Clásico, lo cual fue un tanto decepcionante para las esperanzas que se habían puesto en ella. Con el objeto de expandir los conceptos relativos a los espacios normados se originó uno de los desarrollos más fructíferos que han ocurrido en Análisis, a saber, la teoría de espacios localmente convexos.

En 1926, Fréchet notó que había espacios vectoriales con una cierta naturaleza de modo que podían ser metrizables y completos. Pero la teoría de espacios más generales sólo se desarrolló de manera provechosa en combinación con la idea de convexidad. Esto último fue objeto de estudio para Banach y sus pupilos, preparando así el camino para la definición general de espacios localmente convexos dada por J. von Neumann en 1935. Se debe tomar en cuenta que los avances en la simplicidad y generalidad de estas nuevas ideas fueron posibles gracias a la creación de las nociones fundamentales de la Topología General, llevadas a cabo entre los años 1930 y 1940; por otro lado también tenemos la noción de conjunto acotado, introducido por Kolmogoroff y von Neumann en 1935. Finalmente, lo cierto es que el impulso principal que motivó esta investigación vino de nuevas posibilidades para usos en el Análisis, en ámbitos donde la teoría de Banach era inoperante como la teoría de espacios de sucesiones, desarrollada por Köthe, Toeplitz y sus discípulos desde 1934, la teoría de "funcionales analíticos" de Fantappié y sobre todo la teoría de distribuciones de L. Schwartz, donde la teoría moderna de espacios localmente convexos encontró un campo de aplicaciones, que está sin duda, lejos de ser agotado.

Empezaremos definiendo una estructura que nos acompañará en el resto de la tesis que es la de espacio vectorial topológico, enseguida veremos qué es una familia de seminormas separante y cómo estos conceptos forman el de espacio localmente convexo que es el que nos avocaremos a estudiar. En particular, en el Capítulo 1 nos proveemos de varias herramientas para verificar que ciertos espacios con familias de seminormas distintas son espacios localmente convexos. En la segunda mitad del capítulo empleamos otros conceptos más como el de envolvente convexa, los conjuntos balanceados y absorbentes para luego llegar a una caracterización:

Si X es un espacio vectorial y V un subconjunto de X entonces: V es un conjunto no vacío convexo, balanceado y absorbente en cada uno de sus puntos si y sólo si existe una única seminorma p en X tal que

$$V = \{x \in X : \ p(x) < 1\}.$$

Luego esto nos ayudará a ver otra manera de definir los espacios localmente convexos, a saber, si tenemos que X es un espacio vectorial topológico Hausdorff con una base para el sistema de vecindades del cero donde los básicos son abiertos, balanceados y convexos, entonces X es un espacio localmente convexo.

En el Capítulo 2 iniciamos haciendo un camino para definir una métrica a base de una familia numerable de seminormas. Después mostramos unos resultados sobre convergencias y equivalencias de topologías para poder mostrar uno de los teoremas más importantes de la obra: ver cuándo un espacio localmente convexo X es metrizable. Obtendremos que X lo es si y sólo si existe una colección a lo más numerable de seminormas tal que la topología que determine esta familia coincida con la topología de X. Enseguida mostramos ejemplos donde esto se cumple y uno donde no que viene siendo L^p con $0 < p < 1$. Luego introducimos el concepto de F-espacio y espacios de Fréchet y veremos como algunos ejemplos del Capítulo 1 caen en esta categoría. También manejaremos una definición de conjunto acotado que generaliza a la usual, mostraremos algunos resultados sobre conjuntos acotados para terminar caracterizando a los espacios localmente convexos normables como aquellos que poseen al menos un subconjunto abierto, acotado y distinto del vacío. Después acabamos con un ejemplo de espacio localmente convexo metrizable mas no normable.

El Teorema de Banach-Alaoglu es un teorema muy importante en Análisis. Nos dice que si X es un espacio normado, entonces la bola unitaria de X^* es compacta con la topología débil*. Para llegar a este resultado en el Capítulo 3 demostraremos los resultados necesarios para probar el teorema. La mayoría tratan sobre equivalencias de convergencias y terminamos el capítulo con una consecuencia del Teorema de Banach-Alaoglu que aplicaremos al inicio del Capítulo 4. Esta aplicación consiste en que dada una función armónica u en el disco unitario, asegurar la existencia de una función f en $L^p(T)$ (donde a T lo identificamos con el intervalo $[-\pi, \pi]$) tal que

$$u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta),$$

esto es equivalente al hecho de que u esté uniformemente en $L^p(T)$; aquí P_r es el Núcleo de Poisson para el disco unitario. Antes de esta prueba se proporcionarán las definiciones necesarias, así como algunas de las propiedades de las funciones armónicas y del Núcleo de Poisson. Después en este mismo capítulo abordamos el estudio de dos espacios muy valiosos en Análisis: La Clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esta importancia se debe a que son espacios cuyas funciones poseen características muy deseables. Además veremos que $\mathcal{S}$ es completo respecto a una determinada topología. Y para concluir esta obra mostraremos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, así como también tendremos la densidad de $\mathcal{S}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para ello nos auxiliaremos de la función traslación $T_y : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ que nos da

$$(T_y f)(x) = f(x - y).$$

Haremos uso de propiedades que cumple respecto a la norma $\| \, \|_p$ tal como la continuidad. También emplearemos la convolución entre funciones y varios resultados que reuniremos para llegar a este desenlace.

Capítulo 1

Espacios Localmente Convexos

Los espacios localmente convexos son un tipo de espacio de mucha utilidad en el Análisis Funcional. En este trabajo nos dedicaremos a estudiarlos y en particular en este capítulo daremos una introducción a éstos presentando algunas de sus propiedades más importantes así como también veremos algunos ejemplos que tendremos oportunidad de volver a mencionar en capítulos posteriores. Cabe aclarar que en todo el trabajo el campo de escalares $\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.1 *Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial X con una topología donde la suma de vectores y la multiplicación por escalar*

$$s : X \times X \longrightarrow X, \ s(x, y) := x + y \tag{1.1}$$

$$m : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X, \ m(\alpha, x) := \alpha x \tag{1.2}$$

son continuos respecto a esa topología. Es decir, s es continuo si dados $x_0, y_0 \in X$ y V una vecindad de $x_0 + y_0$, existen dos vecindades U y W en X de x_0 y y_0 respectivamente, tales que $s(U \times W) \subseteq V$ (o bien, que $U + W \subseteq V$) y se dice que m es continuo si dados $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in X$ y V una vecindad en X de $\alpha_0 x_0$ existen $\delta > 0$ y una vecindad U en X de x_0 tales que $m(B_\delta(\alpha_0) \times U) \subseteq V$, esto es que $\alpha U \subseteq V$ siempre que $|\alpha - \alpha_0| < \delta$.

Observación 1.1 *Todo espacio normado es un espacio vectorial topológico.*

Demostración: Si X es un espacio normado, entonces es un espacio vectorial y tiene la topología τ inducida por la norma, esto es, τ es generada por la base $\mathcal{B} = \{\{y \in X : \|y - x\| < \varepsilon\} : \ x \in X, \ \varepsilon > 0\}$, falta ver que la suma y el producto definidos en (1.1) y (1.2) son mapeos continuos respecto a τ. Sean $x_0, y_0 \in X$ y V una vecindad de $x_0 + y_0$

en X, entonces existe un básico $\{y \in X : \|y - (x_0 + y_0)\| < \varepsilon\} \subseteq V$. Ahora tomemos $U_1 = \{z : \|z - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ como vecindad de x_0 y $U_2 = \{z : \|z - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ como vecindad de y_0, así, si $(x, y) \in U_1 \times U_2$ entonces se tiene que

$$\|s(x,y) - s(x_0,y_0)\|_X = \|x + y - x_0 - y_0\|_X \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

por lo tanto $s(U_1 \times U_2) \subseteq \{y \in X : \|y - (x_0 + y_0)\| < \varepsilon\} \subseteq V$ y entonces s es continuo. Ahora, sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ y V una vecindad de αx en X, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{y \in X : \|y - \alpha x\| < \varepsilon\} \subseteq V$ y consideremos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converja a x y una sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ tal que converja a α. Como $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, existe $M > 0$ tal que $|\alpha_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y sean $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ para $n \geqslant N_1$ y $|\alpha_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2(\|x\|+1)}$ para $n \geqslant N_2$. Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. Así, si $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned}
\|m(\alpha_n, x_n) - m(\alpha, x)\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x - \alpha_n x + \alpha_n x\| \\
&\leqslant |\alpha_n|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(\|x\|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, como $(\alpha_n, x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria en $\mathbb{K} \times X$ que converge a (α, x) y $(m(\alpha_n, x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $m(\alpha, x)$ en X, entonces m es continuo. ■

Definición 1.2 *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama seminorma si cumple las siguientes condiciones:*

(1) *$p(x) \geqslant 0$ $\forall$ $x \in X$.*

(2) *Si $x = 0$, entonces $p(x) = 0$.*

(3) *$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall$ $x \in X$.*

(4) *$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ $\forall$ $x, y \in X$.*

Observación 1.2 *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en X, entonces*

$$S = \{\{y \in X : p(y - x) < \varepsilon\} : p \in \mathcal{P},\ x \in X,\ \varepsilon > 0\} \tag{1.3}$$

es sub-base para una topología en X y además X es un espacio vectorial topológico con la topología generada por S.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap_{j\in J} E_j : \ E_j \in S$ y J finito$\}$, probaremos que $\mathcal{B}$ es base para una topología en X, es decir, que genera una topología en X. Claramente para cada $x \in X$, cualquier seminorma $p \in \mathcal{P}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ hacen que

$$x \in \{y : \ p(y-x) < \varepsilon\} \in \mathcal{B}$$

y si $x \in B_J \cap B_K$ con $B_J, B_K \in \mathcal{B}$ donde

$$B_J = \bigcap_{j\in J} E_j \ \text{ y } \ B_K = \bigcap_{j\in K} E_j,$$

entonces J y K son finitos, por lo tanto $I = J \cup K$ es finito y si $B_I = \bigcap_{j\in I} E_j$, entonces $B_I \in \mathcal{B}$ y además $x \in B_I$ y $B_I \subseteq B_J \cap B_K$. Con esto tendremos que un subconjunto U de X es abierto si y sólo si para cada $x \in U$ existen $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{y \in X : \ p_j(y-x) < \varepsilon_j\} \subseteq U.$$

Ahora falta probar que s, m definidos en (1.1) y (1.2) son continuos respecto a la topología generada por $\mathcal{B}$ y para ello bastará probar para sub-básicos en vez de vecindades.

Sean $x_0,\ y_0$ dos puntos en X y E un sub-básico de τ tal que $x_0 + y_0 \in E$, así

$$E = \{z \in X : \ p(z - (x_0 + y_0)) < \varepsilon\}$$

para algún $\varepsilon > 0$ y sean

$$U_1 = \left\{x \in X : \ p(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \ \text{ y } \ U_2 = \left\{y \in X : \ p(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

vecindades de x_0 y y_0 respectivamente, entonces si $(x, y) \in U_1 \times U_2$,

$$p(s(x, y) - s(x_0, y_0)) = p(x - x_0 + y - y_0) \leqslant p(x - x_0) + p(y - y_0) < \varepsilon$$

y así $s(U_1 \times U_2) \subseteq E$ y por tanto s es continuo en X. Ahora tomemos $x_0 \in X, \alpha_0 \in \mathbb{K}$ y un sub-básico $V = \{z \in X : \ p(z - \alpha_0 x_0) < \varepsilon\}$, para probar la continuidad de m hará falta ver que exista una vecindad W de x_0 y un radio $\delta > 0$ tales que $m(B_\delta(\alpha_0) \times W) \subseteq V$. En efecto, si tomamos $\delta = mín\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}, \frac{\varepsilon}{3(p(x_0)+1)}\right\}$, $\beta = mín\left\{\sqrt{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{3(|\alpha_0|+1)}\right\}$, $W = \{z \in X : \ p(z - x_0) < \beta\}$, $x \in W$ y $\alpha \in B_\delta(\alpha_0)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
p(m(\alpha, x) - \alpha_0 x_0) &= p(\alpha x - \alpha_0 x_0) \\
&= p(\alpha x - \alpha x_0 + \alpha x_0 - \alpha_0 x + \alpha_0 x - \alpha_0 x_0 + \alpha_0 x_0 - \alpha_0 x_0) \\
&= p((\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0 + \alpha_0(x - x_0)) \\
&\leqslant p((\alpha - \alpha_0)(x - x_0)) + p((\alpha - \alpha_0)x_0) + p(\alpha_0(x - x_0)) \\
&= |\alpha - \alpha_0| p(x - x_0) + |\alpha - \alpha_0| p(x_0) + |\alpha_0| p(x - x_0) \\
&< \delta\beta + \delta p(x_0) + |\alpha_0|\beta \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto X con la topología inducida por la familia de seminormas $\mathcal{P}$, es un espacio vectorial topológico. ■

Una de las conveniencias que tiene el estudiar las seminormas radica en la teoría de ecuaciones diferenciales donde se desea estudiar el operador $\frac{d}{dx}$ u operadores más complicados construidos a partir de éste y hay espacios en los que es imposible definir una norma de tal manera que el operador $\frac{d}{dx}$ sea acotado. Más adelante mostraremos un ejemplo de este tipo de espacios pero antes necesitaremos algunos resultados.

Definición 1.3 *Un espacio localmente convexo es un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ tal que si $x \in X$ y $p(x) = 0$ para toda $p \in \mathcal{P}$, entonces $x = 0$, dicho de otra forma, para $x \neq 0$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$. A una familia de seminormas $\mathcal{P}$ con esta propiedad se le llama separante.*

Proposición 1.1 *Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología es la inducida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$, entonces X es de Hausdorff si y sólo si es localmente convexo.*

Demostración: Sea $x \neq 0$, como X es de Hausdorff, existen V y W vecindades disjuntas en X de 0 y x respectivamente y entonces existen $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tales que $\bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X : \ p_j(z) < \varepsilon_j\} \subseteq V$ y como $x \notin V$ existe al menos un $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p_{j_0}(x) \geqslant \varepsilon_{j_0} > 0$ y así tenemos que se cumple la propiedad para ser localmente convexo.

Recíprocamente, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces $x - y \neq 0$ y como X es localmente convexo, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x - y) > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < p(x - y)$ y nótese que si hacemos $U = \{z \in X : \; p(x-z) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ y $V = \{z \in X : \; p(y-z) < \frac{\varepsilon}{2}\}$, entonces U y V serán vecindades disjuntas de x y y respectivamente y por lo tanto X es de Hausdorff. ■

Proposición 1.2 *Sea X un espacio vectorial topológico, $x_0 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}\diagdown\{0\}$, entonces los siguientes mapeos*

$$\varphi_{x_0} : X \longrightarrow X, \;\; \varphi_{x_0}(x) := x + x_0 \tag{1.4}$$

$$\psi_\alpha : X \longrightarrow X, \;\; \psi_\alpha(x) := \alpha x \tag{1.5}$$

son homeomorfismos.

Demostración: Nótese que $\alpha \neq 0$, entonces existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}\diagdown\{0\}$ y $\psi_\alpha^{-1} = \psi_{\alpha^{-1}}$, de esta manera ya tenemos la existencia de la inversa. Sólo falta ver que ψ_α es continua respecto a la topología de X. Sea $x \in X$ y sea V una vecindad de αx en X. Como X es un espacio vectorial topológico, sabemos que el producto es un mapeo continuo y entonces existen $\delta > 0$ y W vecindad de x tales que $m(B_\delta(\alpha) \times W) \subseteq V$. Así, $\psi_\alpha(W) = m(\alpha \times W) \subseteq m(B_\delta(\alpha) \times W) \subseteq V$ por tanto ψ_α es continua para cualquier escalar en $\mathbb{K}\diagdown\{0\}$ y así ψ_α^{-1} también es continua.

Por otro lado, tenemos que $\varphi_{x_0}^{-1} = \varphi_{-x_0}$, por lo que basta demostrar que φ_{x_0} es continua. Sea $x \in X$ y V una vecindad de $x + x_0$ en X. Como la suma es también un mapeo continuo, existen U_1 vecindad de x y U_2 vecindad de x_0 tales que $s(U_1 \times U_2) \subseteq V$. Así,

$$\varphi_{x_0}(U_1) = s(U_1 \times x_0) \subseteq s(U_1 \times U_2) \subseteq V.$$

■

Como consecuencia de lo anterior, vemos que cualquier vecindad de cualquier punto en un espacio vectorial topológico puede obtenerse como traslación de alguna vecindad del 0.

Observación 1.3 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico, $x \in X$ y U una vecindad de x, entonces existe una vecindad V de 0 tal que $U = x + V$, donde de hecho $V = U - x$.*

Demostración: Como U es vecindad de x, entonces existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq U$ y como φ_x definido en (1.4) es continuo, entonces $\varphi_x^{-1}(A)$ es un abierto en X, es decir, $A - x \in \tau$, enseguida se tiene que $0 = x - x \in A - x \subseteq U - x$, entonces $U - x$ es vecindad de 0. ■

Observación 1.4 *Si p es una seminorma en un espacio vectorial topológico X, entonces $\{x \in X :\ p(x - x_0) < \varepsilon\} = x_0 + \varepsilon\{x \in X :\ p(x) < 1\}$, donde $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$.*

Demostración: Sea $y \in \{x \in X :\ p(x - x_0) < \varepsilon\}$, entonces $p(y - x_0) < \varepsilon$ y luego $p(\frac{1}{\varepsilon}(y - x_0)) < 1$, y así $\frac{1}{\varepsilon}(y - x_0) \in \{x \in X :\ p(x) < 1\}$ y entonces $y \in x_0 + \varepsilon\{x \in X :\ p(x) < 1\}$ y si $y \in x_0 + \varepsilon\{x \in X :\ p(x) < 1\}$, entonces $y = x_0 + \varepsilon x$ con $p(x) < 1$ y luego $(y - x_0) = \varepsilon x$, así $p(y - x_0) = p(\varepsilon x) = \varepsilon p(x) < \varepsilon$ y por lo tanto $y \in \{x \in X :\ p(x - x_0) < \varepsilon\}$.
■

Lo anterior nos dice que si X tiene la topología inducida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$, entonces cualquier sub-básico $S = \{x \in X :\ p(x - x_0) < \varepsilon\}$ con $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ puede obtenerse de una traslación φ_{x_0} y una dilatación ψ_ε (o contracción según sea el caso) del sub-básico $S_0 = \{x \in X :\ p(x) < 1\}$, es decir $S = (\varphi_{x_0} \circ \psi_\varepsilon)(S_0)$, o bien $S_0 = (\psi_\varepsilon^{-1} \circ \varphi_{x_0}^{-1})(S)$.

A continuación introduciremos el concepto de *red* que es una generalización de las sucesiones. Esto es porque no siempre se trabaja en espacios primero-numerables, que son en los que se pueden construir cerraduras de conjuntos usando sólo sucesiones. Tal es el caso de los espacios métricos. Sin embargo esto no ocurre en general.

El siguiente ejemplo nos ilustra por qué las sucesiones no son suficientes para caracterizar a los puntos de la cerradura de un conjunto.

Ejemplo 1.1 *Consideremos*

$$X = [0, 1] \quad y \quad \tau = \{\varnothing\} \cup \{B \subseteq X :\ X \setminus B \text{ es a lo más numerable}\}.$$

Discusión: Si $A = [0, 1)$, entonces $\bar{A} = [0, 1]$ ya que al suponer que $1 \notin \bar{A}$, entonces existe $B_0 \in \tau$ tal que $1 \in B_0$ y $B_0 \cap A = \varnothing$ y entonces $B_0 = \{1\}$, pero $\{1\} \notin \tau$ ya que $X \setminus \{1\} = [0, 1)$ no es numerable. Sin embargo no existe una sucesión en $[0, 1)$ tal que converja a 1 en X. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en $[0, 1)$ y sea $V = ((x_n)_{n=1}^{\infty})^c$, luego V es vecindad de 1 pero $V \cap (x_n)_{n=1}^{\infty} = \varnothing$ y por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no puede converger a 1. De este modo podemos ver que no podemos construir la cerradura de un subconjunto de un espacio topológico sólo con límites de sucesiones en él.

Más adelante formaremos una red para este ejemplo.

Definición 1.4 *Un sistema dirigido es un conjunto de índices I junto con un orden $\precsim$ que cumple*

(I) *Si $\alpha,\ \beta \in I$, entonces existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \precsim \gamma$ y $\beta \precsim \gamma$.*

(II) *$\precsim$ es un orden, es decir, es reflexivo, transitivo y no necesariamente antisimétrico.*

Definición 1.5 *Sea X un espacio topológico. Una red en X es una función $f : I \longrightarrow X$ donde I es un sistema dirigido. Denotaremos a la red como $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ donde $x_\alpha = f(\alpha)$ para cada $\alpha \in I$.*

Así, si $I = \mathbb{N}$ con el orden usual, entonces las redes en X son las sucesiones en X.

Definición 1.6 *Se dice que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$ cuando para cada vecindad V de x, existe $\beta \in I$ tal que $x_\alpha \in V$ si $\alpha \succsim \beta$.*

Proposición 1.3 *Si X es un espacio topológico Hausdorff, se tiene que toda red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en X tiene a lo más un límite, es decir, si $x_\alpha \longrightarrow x$ y $x_\alpha \longrightarrow y$, entonces $x = y$.*

Demostración: Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red en X tal que converge a x y supongamos que también converge a un punto $y \in X$ con $y \neq x$. Luego, dado que X es de Hausdorff, existen vecindades V y W de x y y respectivamente tales que $V \cap W = \varnothing$. Ahora, como $x_\alpha \longrightarrow x$ para la vecindad V existe $\beta_1 \in I$ tal que $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \succsim \beta_1$ y como $x_\alpha \longrightarrow y$, para la vecindad W de y existe $\beta_2 \in I$ tal que $x_\alpha \in W$ para todo $\alpha \succsim \beta_2$. Luego como I es un sistema dirigido, existe $\gamma \in I$ tal que $\gamma \succsim \beta_1$ y $\gamma \succsim \beta_2$, así $x_\alpha \in V \cap W$ si $\alpha \succsim \gamma$, pero $V \cap W = \varnothing$, por lo que x y y deben ser iguales. ∎

Proposición 1.4 *Sea $A \subseteq X$, X un espacio topológico, entonces $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una red en A tal que converja a x.*

Demostración: Sea $x \in \bar{A}$ y sea I la colección de todas las vecindades de x en X con el siguiente orden: $V_1 \precsim V_2$ si $V_2 \subseteq V_1$ donde $V_1,\ V_2 \in I$. Nótese que $I \neq \varnothing$ pues $X \in I$, más aún, es un sistema dirigido ya que el orden $\precsim$ es reflexivo, transitivo y además, para cada par $V,\ U \in I$, existe $W = V \cap U \in I$ tal que $V \precsim W$ y $U \precsim W$. Luego, como $x \in \bar{A}$, entonces para cada $V \in I$ se tiene que $V \cap A \neq \varnothing$. Luego para cada $V \in I$ tomemos un punto en $V \cap A$ y denotémoslo por x_V, así $\{x_V\}_{V\in I}$ es una red en A, sólo falta ver que $x_V \longrightarrow x$. Sea W una vecindad de x, entonces $W \in I$ y existe $x_W \in W \cap A$. Luego, si $V \succsim W$, entonces $V \subseteq W$ y así $x_V \in U \subseteq W$ para toda $U \succsim W$, por lo tanto $\{x_V\}_{v\in I}$ converge a x.

Ahora sea $x \in X$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red en A tal que converge a x, entonces si V es una vecindad arbitraria de x, existe $\beta \in I$ tal que $x_\alpha \in V$ para toda $\alpha \succsim \beta$ y entonces $A \cap V \neq \varnothing$, por lo tanto $x \in \bar{A}$. ■

Proposición 1.5 *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en x si y sólo si para toda red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ que converge a x en X, la red $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ converge a $f(x)$ en Y.*

Demostración: Sea V una vecindad de $f(x)$, como f es continua en x, entonces $f^{-1}(V)$ es vecindad de x. Así, si $x_\alpha \to x$ entonces $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ está eventualmente en $f^{-1}(V)$, es decir, existe $\beta \in I$ tal que $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ para toda $\alpha \succsim \beta$ y entonces $f(x_\alpha) \in V$ para toda $\alpha \succsim \beta$ y así $f(x_\alpha) \to f(x)$. Por otro lado, si f no fuese continua en x, existiría una vecindad W de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ no fuera vecindad de x, es decir, $x \notin (f^{-1}(V))^\circ$ o equivalentemente $x \in \overline{f^{-1}(V)^c}$, o bien $x \in \overline{f^{-1}(V^c)}$ y entonces existiría una sucesión $\{x_i\}_{i\in I}$ en $f^{-1}(V^c)$ tal que converge a x y entonces la sucesión $\{f(x_i)\}_{i\in I}$ no está en V y por tanto $f(x_i) \nrightarrow f(x)$.
■

Proposición 1.6 *Sea X un espacio vectorial topológico y sea p una seminorma en X, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(*a*) *p es continua.*

(*b*) *$\{x \in X :\ p(x) < 1\}$ es abierto.*

(*c*) *$0 \in \{x \in X :\ p(x) < 1\}^\circ$.*

(*d*) *$0 \in \{x \in X :\ p(x) \leqslant 1\}^\circ$.*

(*e*) *p es continua en* 0.

(*f*) *Existe una seminorma continua q en X tal que $p \leqslant q$.*

Demostración: Probaremos las equivalencias en el siguiente orden: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$ y finalmente $(e) \Leftrightarrow (f)$ para cerrar el ciclo.

$(a) \Rightarrow (b)$: Sea p una seminorma continua en X y tomemos la topología usual para $\mathbb{R}$, entonces $(-\infty, 1)$ es abierto y como p es continua, $p^{-1}((-\infty, 1))$ es un abierto de X y $p^{-1}((-\infty, 1)) = \{x \in X : \ p(x) < 1\}$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Notemos que $0 \in \{x \in X : \ p(x) < 1\}$ pues $p(0) = 0$ y como $\{x \in X : p(x) < 1\}$ es abierto, entonces $\{x \in X : \ p(x) < 1\} = \{x \in X : \ p(x) < 1\}^\circ$, por lo tanto $0 \in \{x \in X : \ p(x) < 1\}^\circ$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Como $\{x \in X : \ p(x) < 1\} \subseteq \{x \in X : \ p(x) \leqslant 1\}$, tenemos que $\{x \in X : p(x) < 1\}^\circ \subseteq \{x \in X : \ p(x) \leqslant 1\}^\circ$ y así $0 \in \{x \in X : \ p(x) \leqslant 1\}^\circ$.

$(d) \Rightarrow (e)$: Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $A = \{x \in X : \ p(x) \leqslant 1\}$. Ahora tomemos $0 < \delta < \varepsilon$ y obsérvese que $0 \in \delta A^\circ$, pues por hipótesis $0 \in A^\circ$ y $0 = \delta \cdot 0 \in \delta A^\circ$. Falta ver que δA° es abierto y que $p(\delta A^\circ) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sea $\psi_{\frac{1}{\delta}}$ el homeomorfismo definido en (1.5), así

$$\begin{aligned}
\delta A^\circ &= \{y \in X : \ y = \delta x, \ x \in A^\circ\} \\
&= \{y \in X : \ \frac{1}{\delta} y = x, \ x \in A^\circ\} \\
&= \{y \in X : \ \psi_{\frac{1}{\delta}}(y) = x, \ x \in A^\circ\} \\
&= \psi_{\frac{1}{\delta}}^{-1}(A^\circ)
\end{aligned}$$

y como $\psi_{\frac{1}{\delta}}$ es continuo y A° es abierto, entonces δA° es abierto en X y además, si $y \in \delta A^\circ$ tenemos que $y = \delta x$ con $x \in A^\circ \subseteq A$ y entonces $p(x) \leqslant 1$, así $p(y) = p(\delta x) = \delta p(x) \leqslant \delta < \varepsilon$, por lo tanto $p(\delta A^\circ) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$(e) \Rightarrow (a)$: Sea $x \in X$ y $\{x_i\}_{i \in I}$ una red en X que converge a x y sea V una vecindad de x que, por la observación 1.3, V puede obtenerse de la traslación de una vecindad W del cero, es decir, $V = x + W$, así como también la vecindad W del cero puede obtenerse como la traslación de una vecindad de x, esto es, $W = V - x$. Luego, existe i_0 en I tal que $x_i - x \in V - x = W$ para toda $i \succsim i_0$ y entonces la red $\{x_i - x\}_{i \in I}$ converge a cero. Aparte, por la desigualdad del triángulo se tiene que $|p(x_i) - p(x)| \leqslant p(x_i - x)$ y entonces $\{p(x_i)\}_{i \in I}$ debe converger a $p(x)$ en $\mathbb{R}$ y como $\{x_i\}_{i \in X}$ es una red arbitraria que converge a x, por la proposición 1.5, p es continua en x y por tanto continua en X.

$(e) \Rightarrow (f)$: Por hipótesis general tenemos que p es seminorma y como (e) es equivalente a (a) entonces p es continua, además siempre se tiene que $p \leqslant p$, por lo tanto, si definimos a q como p, hemos terminado. Notar que también podemos definir a $q = kp$ con $k \geqslant 1$ que en efecto también es seminorma y continua.

$(f) \Rightarrow (e)$: Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una red que converja a cero en X. Como q es continua, $q(x_i) \to 0$ y como $0 \leqslant p(x_i) \leqslant q(x_i)$ para toda $i \in I$, por comparación, $p(x_i) \to 0$ y así p es continua en 0. ■

Observación 1.5 *Sea X un espacio localmente convexo determinado por una familia de seminormas $\mathcal{P}$, entonces para cada $p \in \mathcal{P}$, p es continua en X.*

Demostración: Sea p una seminorma en $\mathcal{P}$, entonces $S = \{x \in X : \ p(x) < 1\}$ es un sub-básico de X y por tanto es un abierto, luego por la proposición 1.6 (b) p es continua. ■

Lema 1.1 *Sea I un conjunto de índices, $A = \{a_i\}_{i\in I}$ y $B = \{b_i\}_{i\in I}$ con A y B subconjuntos acotados superiormente de $\mathbb{R}$ tales que $a_i, \ b_i > 0$ para toda $i \in I$, entonces*

a) Si $\alpha > 0$ y $s = sup\{\alpha b_i : \ i \in I\}$ entonces $s = \alpha sup(B)$

b) $sup\{a_i + b_i : \ i \in I\} \leqslant sup(A) + sup(B)$

c) Si $c_i \leqslant a_i + b_i$ para toda $i \in I$, entonces $sup\{c_i : \ i \in I\} \leqslant sup\{a_i + b_i : \ i \in I\}$.

Demostración: $a)$ Tenemos que $s \geqslant \alpha b_i$ para todo $i \in I$ y como $\alpha > 0$ entonces $\frac{1}{\alpha}s \geqslant b_i$ para todo $i \in I$ y entonces como $\frac{1}{\alpha}s$ es cota superior para B, entonces $\frac{1}{\alpha}s \geqslant sup(B)$ o bien $s \geqslant \alpha sup(B)$. Por otro lado $sup(B) \geqslant b_i$ para todo $i \in I$, por lo tanto $\alpha sup(B) \geqslant s$ y así $s = \alpha sup(B)$.

$b)$ Como $a_i + b_i \leqslant sup(A) + sup(B)$ para todo $i \in I$, entonces $sup(A) + sup(B)$ es cota superior de $\{a_i + b_i : \ i \in I\}$, por lo tanto $sup\{a_i + b_i : \ i \in I\} \leqslant sup(A) + sup(B)$.

$c)$ Tenemos que $c_i \leqslant a_i + b_i \leqslant sup\{a_i + b_i : \ i \in I\}$ para todo $i \in I$, entonces $sup\{a_i + b_i : \ i \in I\}$ es cota superior de $\{c_i : \ i \in I\}$, por lo tanto $sup\{c_i : \ i \in I\} \leqslant sup\{a_i + b_i : \ i \in I\}$. ■

Estas propiedades las utilizaremos principalmente en el inciso (b) de la siguiente proposición.

Proposición 1.7 *Sea X un espacio vectorial topológico.*

(a) *Si $p_1, \ldots, p_n$ son seminormas continuas, entonces $p_1 + \cdots + p_n$ y $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{p_i(x)\}$ definen dos seminormas continuas.*

(b) *Si $\{p_i\}_{i \in I}$ es una familia de seminormas continuas y existe una seminorma continua q tal que $p_i < q$ $\forall i \in I$, entonces $p(x) := \sup\limits_{i \in I}\{p_i(x)\}$ define una seminorma continua.*

(c) *Si p es una seminorma continua y $\beta > 0$, entonces $q := \beta p$ también define una seminorma continua.*

Demostración: (a) Defínase la función p en X como $p(x) = p_1(x) + \ldots + p_n(x)$ y primero probemos que es seminorma. Si $x \in X$, entonces $p_i(x) \geqslant 0$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y entonces $p(x) = p_i(x) + \ldots + p_n(x) \geqslant 0$, luego $p(0) = p_1(0) + \ldots + p_n(0) = 0$ y si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= p_1(\alpha x) + \ldots + p_n(\alpha x) \\ &= |\alpha| p_1(x) + \ldots + |\alpha| p_n(x) \\ &= |\alpha|(p_1(x) + \ldots + p_n(x)) \\ &= |\alpha| p(x) \end{aligned}$$

y finalmente si $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} p(x+y) &= p_1(x+y) + \ldots + p_n(x+y) \\ &\leqslant p_1(x) + p_1(y) + \ldots + p_n(x) + p_n(y) \\ &= p_1(x) + \ldots + p_n(x) + p_1(x) + \ldots + p_n(y) \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in X$ y $\{x_j\}_{j \in J}$ una red que converja a x en X y sea $V = (p(x) - \varepsilon, p(x) + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ una vecindad de $p(x)$. Como $p_1, \ldots, p_n$ son continuas, entonces $p_i(x_j) \longrightarrow p_i(x)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, así, existen $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ tales que para cada i en $\{1, \ldots, n\}$ se tiene que $|p_i(x_j) - p_i(x)| < \frac{\varepsilon}{n}$ para todo $j \geqslant j_i$. Dado que J es un sistema dirigido, existe un elemento $j_0 \in J$ tal que $j_0 \geqslant j_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y así, $|p_i(x_j) - p_i(x)| < \frac{\varepsilon}{n}$ para toda $j \geqslant j_0$ y para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$\begin{aligned}|p(x_j)-p(x)| &= |p_1(x_j)+\ldots+p_n(x_j)-p_1(x)-\ldots-p_n(x)|\\ &\leqslant |p_1(x_j)-p_1(x)|+\ldots+|p_n(x_j)-p_n(x)|\\ &< \underbrace{\frac{\varepsilon}{n}+\ldots+\frac{\varepsilon}{n}}_{\text{n-veces}}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

y de esta manera tenemos que p es continua.

Ahora defínase q como $q(x) := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{p_i(x)\}$. En efecto q es una seminorma pues si $x \in X$, $q(x) \geqslant 0$, $q(0) = 0$ y además si $\alpha \in \mathbb{R}$, $q(\alpha x) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{p_i(\alpha x)\}$ y entonces existe $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tal que

$$q(\alpha x) = p_{i_0}(\alpha x) = |\alpha|p_{i_0}(x) = |\alpha|q(x)$$

pues como

$$|\alpha|p_{i_0}(x) = p_{i_0}(\alpha x) \geqslant p_i(\alpha x) = |\alpha|p_i(x) \qquad \text{para toda } i \in \{1,\ldots,n\},$$

entonces $p_{i_0}(x) \geqslant p_i(x)$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Sólo falta probar que sea subaditiva. Sean $x, y \in X$, entonces

$$q(x+y) = p_k(x+y) \qquad \text{para algún } k \in \{1,\ldots,n\},$$

luego

$$p_k(x+y) \leqslant p_k(x) + p_k(y) \leqslant q(x) + q(y)$$

pues q es el máximo y con esto ya se tiene que $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$.

Para probar la continuidad, por la proposición 1.6 (e), bastará probarla en una vecindad del cero. Sea $\{x_j\}_{j\in J}$ una red tal que $x_j \longrightarrow 0$ en X. Sea $\varepsilon > 0$, como p_i es continua en 0, para cada i en $\{1,\ldots,n\}$ existen $\beta_1,\ldots,\beta_n$ tales que $|p_i(x_j)| < \varepsilon$ para todo $j \geqslant \beta_j$, luego J es un sistema dirigido y por lo tanto existe $\beta \in J$ tal que $\beta \geqslant \beta_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y entonces $|p_i(x_j)| < \varepsilon$ para todo $j \geqslant \beta$ y para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y así $|q(x_j)| < \varepsilon$ para todo $j \geqslant \beta$, por lo tanto $q(x_j) \longrightarrow 0$.

(b) Claramente $p(x) \geqslant 0$ para toda $x \in X$ y $p(0) = 0$. Luego, sea $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces por el lema 1.1 (a) se tiene que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha x) &= sup\{p_i(\alpha x) : \ i \in I\} \\
&= sup\{|\alpha| p_i(x) : \ i \in I\} \\
&= |\alpha| sup\{p_i(x) : \ i \in I\} \\
&= |\alpha| p(x).
\end{aligned}
$$

Ahora sean $x, y \in X$, por el lema 1.1 (b) y (c) tenemos que

$$
\begin{aligned}
p(x+y) &= sup\{p_i(x+y) : \ i \in I\} \\
&\leqslant sup\{p_i(x) + p_i(y) : \ i \in I\} \\
&\leqslant sup\{p_i(x) : \ i \in I\} + sup\{p_i(y) : \ i \in I\} \\
&= p(x) + p(y),
\end{aligned}
$$

por lo tanto p sí es una seminorma.

Para probar la continuidad de p sólo falta recordar la proposición 1.6 pues tenemos por hipótesis la existencia de una seminorma continua q tal que $q \geqslant p_i$ para todo $i \in I$, entonces q es una cota superior para $\{p_i : \ i \in I\}$ mientras que q es el supremo, así $p \leqslant q$ y por la equivalencia de (a) y (f) de la proposición 1.6, entonces p es continua.

(c) Es fácil ver que q es una seminorma. En efecto, $q(x) = \beta p(x) \geqslant 0$ para toda $x \in X$ y además $q(0) = \beta \cdot 0 = 0$. También se tiene que

$$q(\alpha x) = \beta(p(\alpha x)) = |\alpha| \beta p(x) = |\alpha| q(x)$$

y

$$q(x+y) = \beta(p(x+y)) \leqslant \beta(p(x) + p(y)) = \beta p(x) + \beta p(y) = q(x) + q(y).$$

Finalmente, la continuidad de q se obtiene directamente de la continuidad de p. ■

Proposición 1.8 *Sea X un espacio localmente convexo cuya topología está determinada por una familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Entonces una red $\{x_i\}_{i \in I}$ converge a x en X si y sólo si $p_\alpha(x_i - x) \longrightarrow 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración: Es claro que $x_j - x \longrightarrow 0$ pues por la observación 1.3 para cada vecindad V del cero existe una vecindad U de x tal que $V = U - x$ y como $x_i \longrightarrow x$, existe $\beta \in I$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geqslant \beta$. Ahora, para cada $\alpha \in \Lambda$, por la observación 1.5 p_α es continua y como $x_i - x$ converge a cero, entonces $p_\alpha(x_i - x) \longrightarrow p_\alpha(0) = 0$.

Recíprocamente, para probar que $x_i \longrightarrow x$, o equivalentemente, que $x_i - x \longrightarrow 0$, bastará probar que para cada sub-básico alrededor de cero, $x_i - x$ está eventualmente en éste, es decir, que para cada $\alpha \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$ exista $i_{(\alpha,\varepsilon)} \in I$ tal que $x_i - x \in \{z \in X : p_\alpha(z) < \varepsilon\}$ para todo $i \geqslant i_{(\alpha,\varepsilon)}$. En efecto, como $p_\alpha(x_i - x) \longrightarrow 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$, para $\alpha \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$ existe $i_{(\alpha,\varepsilon)} \in I$ tal que $p_\alpha(x_i - x) < \varepsilon$ para todo $i \geqslant i_{(\alpha,\varepsilon)}$, es decir, $x_i - x \in \{z \in X : \ p_\alpha(z) < \varepsilon\}$ para todo $i \geqslant i_{(\alpha,\varepsilon)}$. ■

Proposición 1.9 *Sean X y Y espacios vectoriales con las topologías definidas respectivamente por las familias de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ y sea $T : X \longrightarrow Y$ un mapeo lineal. Entonces T es continuo si y sólo si para cada $\beta \in B$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ y $c > 0$ tales que*

$$q_\beta(T(x)) \leqslant c\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x). \tag{1.6}$$

Demostración: Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una red que converge a un punto x en X, luego por la proposición 1.8, $p_\alpha(x_i - x) \longrightarrow 0$ para toda $\alpha \in A$ y por hipótesis tenemos que para cada $\beta \in B$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ y $c > 0$ tales que

$$q_\beta(T(x_i - x)) \leqslant c\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x_i - x) \qquad \text{para todo } i \in I$$

y como $p_\alpha(x_i - x) \longrightarrow 0$ para toda $\alpha \in A$ por la proposición 1.8, entonces

$$c\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x_i - x) \longrightarrow 0$$

y así a su vez $q_\beta(T(x_i - x)) \longrightarrow 0$ y como q_β también es continua en Y para todo $\beta \in B$, entonces $T(x_i - x) \longrightarrow 0$, en otras palabras, como T es lineal, entonces $T(x_i) \longrightarrow T(x)$ donde $\{x_i\}_{i\in I}$ es una red arbitraria que converge a x, por lo tanto T es continuo.

Recíprocamente, sea $\beta \in B$, como T es lineal y continuo, si $W = \{w \in Y : \ q_\beta(w) < 1\}$ entonces existe un básico U en X tal que $0 \in U$ y $T(U) \subseteq V$ y así $q_\beta(T(x)) < 1$ si $x \in U$; asúmase sin pérdida de generalidad que U está conformado por sub-básicos alrededor del cero, es decir, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ tales que

$$U = \bigcap_{j=1}^{k} \{z \in X : \ p_{\alpha_j}(z) < \varepsilon_j\}. \tag{1.7}$$

Sea $\varepsilon = mín\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, así, si $p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ entonces $x \in U$ y $q_\beta(T(x)) < 1$. Ahora, dado x en X hay dos posibilidades: $p_{\alpha_j}(x) > 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, k\}$, o bien, $p_{\alpha_j}(x) = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Supongamos primero que existe $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $p_{\alpha_{j_0}}(x) > 0$ y sea

$$y = \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x)} x,$$

entonces

$$p_{\alpha_j}(y) = p_{\alpha_j}\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x)} x\right) = \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x)} p_{\alpha_j}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, por lo tanto $q_\beta(T(y)) < 1$ y de este modo tenemos que

$$q_\beta(T(x)) = q_\beta\left(T\left(y\frac{2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x)\right)\right) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x) q_\beta(T(y)) < \frac{2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x),$$

así, si tomamos $c = \dfrac{2}{\varepsilon} > 0$ tenemos la prueba y si se tiene que $p_{\alpha_j}(x) = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, entonces

$$p_{\alpha_j}(rx) = 0 \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, k\},\ \forall\, r > 0,$$

por lo tanto $q_\beta(T(rx)) < 1$ para todo $r > 0$ y entonces $q_\beta(T(x)) < \dfrac{1}{r}$ para todo $r > 0$, por lo tanto $q_\beta(T(x)) = 0$ y de esta manera si $c = \dfrac{2}{\varepsilon} > 0$, también se tiene que

$$q_\beta(T(x)) \leqslant c\sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(x).$$

■

Ahora veamos algunos ejemplos de familias de seminormas.

Ejemplo 1.2 *Sea X un espacio topológico localmente compacto y sea*

$$C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid\ f \textit{ es continua}\}.$$

Si K es un subconjunto compacto de X, defínase $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$; entonces

$$\mathcal{P} = \{p_K :\ K \subseteq X,\ K \textit{ compacto}\}$$

es una familia de seminormas que hace de $C(X)$ un espacio localmente convexo.

Demostración: En efecto, sea $K \subseteq X$ compacto y $f \in C(X)$, claramente $p_K(f) \geqslant 0$ para toda $f \in C(X)$ y $p_K(0) = 0$. Ahora tomemos $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $p_K(\alpha f) = |\alpha| p_K(f)$, pues

$$\begin{aligned} p_K(\alpha f) &= sup\{|\alpha f(x)| : \ x \in K\} \\ &= sup\{|\alpha||f(x)| : \ x \in K\} \\ &= |\alpha| sup\{|f(x)| : \ x \in K\} \\ &= |\alpha| p_K(f); \end{aligned}$$

luego, sea g otra función en $C(X)$, entonces $p_K(f+g) \leqslant p_K(f) + p_K(g)$, pues

$$\begin{aligned} p_K(f+g) &= sup\{|(f+g)(x)| : \ x \in K\} \\ &= sup\{|f(x) + g(x)| : \ x \in K\} \\ &\leqslant sup\{|f(x)| + |g(x)| : \ x \in K\} \\ &\leqslant sup\{|f(x)| : \ x \in K\} + sup\{|g(x)| : \ x \in K\} \\ &= p_K(f) + p_K(g), \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{P}$ sí es una familia de seminormas en $C(X)$. Por otro lado, sabemos que $C(X)$ es un espacio vectorial con la suma de funciones y el producto por escalar usuales. Estos dos hechos, por la observación 1.2, hacen que $C(X)$ sea un espacio vectorial topológico. Falta ver que $\mathcal{P}$ sea separante para que $C(X)$ sea un espacio localmente convexo.

Considérese $f \in C(X)$ con $f \neq 0$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$, así $x_0 \notin f^{-1}(\{0\}) \equiv W$, donde W viene siendo un conjunto cerrado pues es imagen inversa de un cerrado y f es continua. Entonces x_0 está en $V \equiv X \diagdown W$, el cual es abierto y además se tiene que $f(x) \neq 0$ para toda $x \in V$. Luego, como X es localmente compacto, x_0 tiene una base de vecindades compactas y entonces existe un compacto $K_0 \subseteq X$ tal que $x_0 \in K_0 \subseteq V$ y así

$$p_{K_0}(f) = sup\{f(x) : \ x \in K_0\} > 0,$$

por lo tanto $\mathcal{P}$ hace de $C(X)$ un espacio localmente convexo. ■

Ejemplo 1.3 *Sea G un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $H(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica}\}$ y considérese la familia de seminormas*

$$\mathcal{P} = \{p_K : \ K \subseteq G, \ K \ compacto\}$$

donde $p_K(f) = sup\{|f(x)| : \ x \in K\}$, entonces $H(G)$ es un espacio localmente convexo.

Demostración: Nótese que en efecto $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas en $H(G)$ ya que como G es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces es localmente compacto y así, por el ejemplo 1.2 se tiene que $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas en $C(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{f es continua}\}$ pero como $H(G)$ está contenido en $C(G)$, entonces $\mathcal{P}$ también es una colección de seminormas en $H(G)$ y de la misma manera que en el ejemplo 1.2, al tomar una función f distinta de cero, existirá un compacto K_0 tal que $p_{K_0}(f) > 0$ y así $H(G)$ es localmente convexo si su topología la determina $\mathcal{P}$. ■

Notemos que en el ejemplo anterior la topología definida por $\mathcal{P}$ es la topología de la convergencia uniforme en compactos, esto es, $\{f_i\}_{i\in I}$ converge a f en $H(G)$ si y sólo si para todo compacto K en G se tiene que

$$p_K(f_i - f) \longrightarrow 0 \ \text{ es decir, } \ f_i \longrightarrow f \ \text{ uniformemente en } \ K,$$

pues si $f_i \longrightarrow f$ en $H(G)$, dado un compacto K y un $\varepsilon > 0$ para el sub-básico

$$S = \{g \in H(G) : \ p_K(g - f) < \varepsilon\}$$

existe i_0 tal que $f_i \in S$ para todo $i \geqslant i_0$, es decir, $p_K(f_i - f) < \varepsilon$ para todo $i \geqslant i_0$, esto es, $\sup\limits_{x\in K}|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $i \geqslant i_0$ y entonces

$$|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } i \geqslant i_0 \text{ y para toda } x \in K,$$

así pues $\{f_i\}_{i\in I}$ converge uniformemente a f en K. Análogamente, dado un sub-básico

$$S = \{g \in H(G) : \ p_K(g - f) < \varepsilon\},$$

como $f_i \longrightarrow f$ en cada compacto de G, así lo es también en K y para el ε del sub-básico S existe $i_0 \in I$ tal que $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $i \geqslant i_0$ y para toda $x \in K$, de aquí sigue que

$$\sup_{x\in K}|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$$

y así $p_K(f_i - f) < \varepsilon$, en otras palabras $f_i \in S$ para todo $i \geqslant i_0$, por lo tanto f_i converge a f en $H(G)$.

Ejemplo 1.4 *Sea* $X = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}\}$ *y considérese la familia de seminormas*

$$\mathcal{P} = \{p_x : \ x \in [0,1]\},$$

donde $p_x(f) := |f(x)|$. *La topología inducida en* X *por esta familia se llama la topología de la convergencia puntual pues la red* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *converge a* f *en* X *si y sólo si* $f_\alpha \longrightarrow f$ *puntualmente para cada* $x \in [0,1]$.

Demostración: En efecto $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas pues si $f \in X$ y $x \in [0,1]$, se tiene que $p_x(f) \geqslant 0$; si $g = 0$ entonces $p_x(g) = |g(x)| = 0$ y si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f, h \in X$ entonces

$$p_x(\alpha f) = |\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)| = |\alpha| p_x(f)$$

y

$$p_x(f+h) = |f(x) + h(x)| \leqslant |f(x)| + |h(x)| = p_x(f) + p_x(h),$$

por lo tanto p_x es una seminorma para cada $x \in [0,1]$.

Ahora, tómese una red $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que converja a f en X, $x \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, entonces para el sub-básico $S = \{g \in X : \ p_x(g-f) < \varepsilon\}$ existe $\alpha_0 \in I$ tal que $f_\alpha \in S$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$ y por lo tanto hay convergencia puntual. Recíprocamente si hay convergencia puntual, para un sub-básico $S = \{g \in X : \ p_x(g-f) < \varepsilon\}$ existe $\alpha_0 \in I$ tal que $|f_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$, es decir, $f_\alpha \in S$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$ y por lo tanto $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge a f en X. ■

Definición 1.7 *Sea* X *un espacio normado sobre un campo* $\mathbb{K}$. X^* *se define como el espacio dual de* X, *esto es,* $X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \ f \text{ es una funcional lineal acotada}\}$.

El siguiente teorema es una de las consecuencias del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.1 *Sea* X *un espacio normado y* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *un subconjunto finito linealmente independiente contenido en* X. *Entonces dada una colección finita* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *de escalares en* $\mathbb{K}$, *existe una funcional lineal acotada* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que* $f(x_j) = \alpha_j$ *para toda* $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 1.5 *Sea X un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$, considerando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y sea X^* su espacio dual. Para cada $f \in X^*$ defínase $p_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $p_f(x) = |f(x)|$. Entonces*

$$\mathcal{P} = \{p_f : f \in X^*\}$$

es una familia de seminormas que hace de X un espacio localmente convexo.

Demostración: Efectivamente para cada $f \in X^*$, p_f es una seminorma pues si $x \in X$ entonces $p_f(x) \geqslant 0$ y $p_f(0) = 0$ ya que f es lineal y si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$,

$$p_f(\alpha x) = |\alpha f(x)| = |\alpha| p_f(x)$$

y

$$p_f(x + y) = |f(x + y)| = |f(x) + f(y)| \leqslant p_f(x) + p_f(y),$$

de esta manera $\mathcal{P} = \{p_f : f \in X^*\}$ es una familia de seminormas. Luego, X un espacio localmente convexo ya que si $x \neq 0$, entonces $\{x\}$ es un subconjunto linealmente independiente y finito y al tomar un escalar $k \in \mathbb{K}$ con $k \neq 0$, por el teorema 1.1, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) = k$ y entonces $p_f(x) = |f(x)| = |k| > 0$. ■

A la topología definida en X por esta familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_f : f \in X^*\}$ se le llama la topología débil y se denotará por $\sigma(X, X^*)$

Observación 1.6 *La topología $\sigma(X, X^*)$ es más débil que la topología $\tau_{\| \|_X}$ inducida por la norma $\| \|_X$.*

Demostración: En efecto consideremos un sub-básico V de $\sigma(X, X^*)$

$$V = \{y \in X : \ p_f(y - x) < \varepsilon\} \qquad \text{con } f \in X^* \text{ y } \varepsilon > 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} V &= \{y \in X : \ |f(y - x)| < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X : \ |f(y) - f(x)| < \varepsilon\} \\ &= f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \end{aligned}$$

y como $B_\varepsilon(f(x))$ es un abierto en $\mathbb{C}$ y f es continua respecto a $\| \|_X$ por ser una funcional acotada, entonces V debe ser un abierto respecto a $\| \|_X$ y así $V \in \tau_{\| \|_X}$ y por lo tanto $\sigma(X, X^*) \subseteq \tau_{\| \|_X}$. ■

Ejemplo 1.6 *Sea X un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ y X^* su espacio dual. Para cada $x \in X$ defínase $p_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ como $p_x(f) = |f(x)|$, entonces*

$$\mathcal{P} = \{p_x : \ x \in X\}$$

es una familia de seminormas en X^* que lo hace un espacio localmente convexo.

Demostración: Si $x \in X$, claramente $p_x(f) \geqslant 0 \ \forall f \in X^*$ y si $f = 0$ entonces $p_x(f) = 0$. Luego si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f, g \in X^*$ se tiene que

$$p_x(\alpha f) = |\alpha f(x)| = |\alpha| p_x(f)$$

y

$$p_x(f + g) = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| = p_x(f) + p_x(g).$$

Luego si $f \neq 0$ entonces debe existir $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y por tanto $|f(x_0)| > 0$ (pues el valor absoluto es una norma). De esta manera tenemos que X^* es un espacio localmente convexo con $\mathcal{P}$. ■

La topología definida por estas seminormas se conoce como la topología débil* (dicho como topología débil estrella) y se denota por $\sigma(X^*, X)$. Y así como tenemos la observación 1.6 para $\sigma(X, X^*)$, tenemos un resultado similar para $\sigma(X^*, X)$.

Observación 1.7 *La topología $\sigma(X^*, X)$ es más débil que la $\tau_{\| \ \|_{X^*}}$ inducida por la norma $\| \ \|_{X^*}$, donde esta norma se define para $h \in X^*$ como*

$$\|h\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|h(x)|}{\|x\|_X} \tag{1.8}$$

Demostración: Mostraremos que cualquier abierto en $\sigma(X^*, X)$ es abierto en $\tau_{\| \ \|_{X^*}}$. Para ello probaremos que la función identidad

$$id : (X^*, \tau_{\| \ \|_{X^*}}) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$$

es continua, de esta manera si tenemos un abierto A en la topología débil*, la imagen inversa $id^{-1}(A) = A$ será un abierto respecto a la norma $\| \ \|_{X^*}$.

Sea f una funcional en X^* y $V = \{g \in X^* : \ p_{x_0}(f - g) < \varepsilon\}$ con $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ un sub-básico alrededor de $id(f) = f$ en $\sigma(X^*, X)$. Probaremos que existe un abierto W que contiene a f en $\tau_{\| \|_{X^*}}$ tal que $id(W) = W \subseteq V$, a saber

$$W = B_r^{\| \|_{X^*}}(f) = \{g \in X^* : \ \|f - g\|_{X^*} < r\} \qquad \text{con } r = \frac{\varepsilon}{\|x_0\|_X}.$$

En efecto, si $g \in W$, para toda $x \in X$ se tiene que

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{\|x\|_X} \leqslant \|g - f\|_{X^*} < r$$

y en particular para x_0 se tiene que

$$\frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{\|x_0\|_X} < r = \frac{\varepsilon}{\|x_0\|_X}$$

y entonces g está en V. ■

Más adelante, en el Capítulo 3, veremos que la topología débil* es más débil que la topología débil de X^* y ésta a su vez será más débil que la topología inducida por la norma de X^*, es decir,

$$\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\| \|_{X^*}}.$$

Acontinuación presento la definición de funciones localmente integrables y un lema para mostrar otro ejemplo de espacio localmente convexo.

Definición 1.8 *Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ medible se dice que es localmente integrable (respecto a la medida de Lebesgue $d\mu = dx$) si*

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

para todo subconjunto medible y acotado K en $\mathbb{R}^n$.
Denotaremos al espacio de las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.2 *Sea D un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu(D) > 0$ donde μ es la medida de Lebesgue. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos medibles en $\mathbb{R}^n$ tal que $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(D \cap E_N) > 0$.*

Demostración: Notemos que si $\mu(D \cap E_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu(D) = \mu\left(D \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (D \cap E_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D \cap E_n) = 0$$

llegando así a una contradicción pues $\mu(D) > 0$, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(D \cap E_N) > 0$. ■

Ejemplo 1.7 *Consideremos el espacio* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *donde*

$$p_k(f) = \int_{\|x\|\leqslant k} |f(x)|dx.$$

Entonces $\mathcal{P}$ *es una familia de seminormas tal que* $(L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{P}})$ *es un espacio localmente convexo.*

Demostración: Primero veamos que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial, centrándonos sólamente en la cerradura de la suma y el producto por escalar. Tomemos f y g en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y K un subconjunto medible y acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces por la linealidad de la integral de Lebesgue para funciones positivas (ver [6] lema 3.2.5 p. 81 y lema 3.2.3 p. 74) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_K |(f+g)(x)|dx &= \int_K |f(x)+g(x)|dx \\
&\leqslant \int_K |f(x)|+|g(x)|dx \\
&= \int_K |f(x)|dx + \int_K |g(x)|dx \\
&< \infty
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\int_K |\alpha f(x)|dx &= \int_K |\alpha||f(x)|dx \\
&= |\alpha| \int_K |f(x)|dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que p_k es una seminorma para toda $k \in \mathbb{N}$. Sea $f = 0$ en el sentido de clases de equivalencia (es decir, $f(x) = 0$ casi en todas partes), y denotemos la bola cerrada $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant k\}$ como B_k y notemos que B_k es acotada y Lebesgue-medible por lo que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$0 \leqslant p_k(f) = \int_{B_k} |f(x)|dx < \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego para toda k en $\mathbb{N}$ tenemos que

$$B_k = B_k \cap \mathbb{R}^n = B_k \cap (E \cup E^c) = (B_k \cap E) \cup (B_k \cap E^c)$$

y además $B_k \cap E \subseteq E$ y $B_k \cap E^c \subseteq E^c$, entonces por la σ-aditividad y la monotonía de μ (ver [6] teorema 3.4.2 p. 86 y corolario 3.2.2 p. 77) se tiene que

$$\begin{aligned} p_k(f) &\leqslant \int_{B_k} |f(x)|dx \\ &= \int_{B_k \cap E} |f(x)|dx + \int_{B_k \cap E^c} |f(x)|dx \\ &\leqslant \int_E |f(x)|dx + \int_{E^c} |f(x)|dx \end{aligned}$$

donde

$$\int_E |f(x)|dx \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)|\mu(E) = \sup_{x \in E} |f(x)| \cdot 0 = 0$$

y

$$\int_{E^c} |f(x)|dx \leqslant \sup_{x \in E^c} |f(x)|\mu(E^c) = 0 \cdot \mu(E^c) = 0$$

por lo tanto $p_k(f) = 0$. Luego, si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, por la linealidad de la integral se tiene que

$$p_k(\alpha f) = \int_{B_k} |\alpha f(x)|dx = |\alpha| \int_{B_k} |f(x)|dx = |\alpha| p_k(f)$$

y

$$\begin{aligned} p_k(f+g) &= \int_{B_k} |f(x)+g(x)|dx \\ &\leqslant \int_{B_k} |f(x)| + |g(x)|dx \\ &= \int_{B_k} |f(x)|dx + \int_{B_k} |g(x)|dx \\ &= p_k(f) + p_k(g) \end{aligned}$$

Entonces, teniendo que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial y que $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas, por la observación 1.2 se tiene que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial topológico con la topología generada por la sub-base definida en (1.3). Sólo falta ver que $\mathcal{P}$ es una familia separante de seminormas.

Tómese $f \neq 0$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces debe existir un subconjunto medible A de $\mathbb{R}^n$ con $\mu(A) > 0$ en el que $f(x) \neq 0$ para toda $x \in A$ y además tenemos que

$$A = A \cap \mathbb{R}^n = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(0) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_k(0))$$

entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A \cap B_{k_0}) > 0$, de lo contrario la medida de A sería cero. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{x : \ |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ y sea $\phi_n = \frac{1}{n}\chi_{E_n}$ donde χ_{E_n} es la función característica de E_n, entonces sabemos que

$$\begin{aligned} A \cap B_{k_0}(0) &\subseteq \{x : \ |f(x)| > 0\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x : \ |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \end{aligned}$$

y por el lema 1.2 debe existir un natural N tal que $\mu((A \cap B_{k_0}) \cap E_N) > 0$. Con esto ya podemos afirmar que existe una seminorma, que es p_{k_0}, en la que su valor en f sea mayor que cero pues por monotonía respecto a conjuntos y a funciones tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p_{k_0}(f) &= \int_{B_{k_0}} |f(x)| dx \\ &\geqslant \int_{A \cap B_{k_0}(0)} |f(x)| dx \\ &\geqslant \int_{A \cap B_{k_0} \cap E_N} |f(x)| dx \\ &\geqslant \int_{A \cap B_{k_0} \cap E_N} \phi_N(x) dx \\ &= \frac{1}{N} \mu(A \cap B_{k_0} \cap E_N) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Así nuestra familia de seminormas es separante y por lo tanto el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ con la familia de seminormas $\mathcal{P}$ es localmente convexo. ■

Ahora presentaremos algunos tipos de conjuntos en los espacios vectoriales como lo son los conjuntos convexos, los conjuntos balanceados y los conjuntos absorbentes. También definiremos la envolvente convexa de un conjunto y mencionaremos algunas propiedades de estos conceptos para poder probar un resultado muy importante para caracterizar a los espacios localmente convexos como espacios vectoriales topológicos que posean una base de vecindades para el cero donde los elementos de esta base sean abiertos, balanceados y convexos.

Definición 1.9 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, A un subconjunto de X y $a, b \in A$.*

$i)$ El segmento de recta de a hacia b se denota y se define como

$$[a, b] \equiv \{tb + (1-t)a : \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

$ii)$ Se dice que A es convexo si $[a, b] \subseteq A$.

Proposición 1.10 *Sea X un espacio vectorial y $A \subseteq X$.*

(a) A es convexo si y sólo si para cada colección finita $x_1, \dots, x_n \in A$ y $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ con $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, entonces $\sum_{j=1}^{n} t_j x_j$ pertenece a A.

(b) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección de conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es convexo.

Demostración:

(a) Supóngase A convexo. Sean $x_1, \dots, x_n \in A$ y $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ tales que $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$. Para la prueba procederemos por inducción. Notemos que para $k = 2$ la proposición es verdadera pues A es convexo, es decir, si $t_1 + t_2 = 1$ entonces $t_2 = 1 - t_1$ y entonces

$$t_1 x_1 + (1 - t_1) x_2 \in [x_1, x_2] \subseteq A.$$

Ahora supongamos la proposición válida para $k = n$ y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in [0, 1]$ donde $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1$ y sean $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in A$, entonces si escribimos $C = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 - \alpha_{n+1}$ con $\alpha_{n+1} < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j &= \frac{C}{C}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \ + \ \alpha_{n+1}x_{n+1} \\
&= C\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{C} x_j \ + \ \alpha_{n+1}x_{n+1} \\
&= (1-\alpha_{n+1})\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{C} x_j \ + \ \alpha_{n+1}x_{n+1}
\end{aligned}$$

y como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{C} = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \frac{C}{C} = 1$, por hipótesis de inducción se tiene que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{C} x_j \in A$. Así, si escribimos $a = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{C} x_j$ tenemos por la convexidad de A que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j = (1-\alpha_{n+1})a \ + \ \alpha_{n+1}x_{n+1} \in A.$$

Recíprocamente, tómese cualesquier par a, b en A y un t en $[0,1]$ arbitrariamente. Así, si $s = 1-t$, entonces $t+s = 1$ y por la hipótesis para una colección de dos términos tenemos que $ta + sb \in A$. Por lo tanto A es convexo.

(*b*) Supongamos que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, luego tómese a y b en $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$, entonces a y b están en A_i para cada $i \in I$, por lo tanto $[a,b] \subseteq A_i$ para cada $i \in I$ pues A_i es convexo para toda i en I y así $[a,b] \subseteq \displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$, lo que hace de esta intersección un conjunto convexo.

■

Definición 1.10 *Si A es un subconjunto de un espacio vectorial X, la envolvente convexa de A que denotaremos por $co(A)$ se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. Y si X es un espacio vectorial topológico, la envolvente convexa cerrada de A será la intersección de todos los subconjuntos convexos cerrados de X que contienen a A y se denotará mediante $\overline{co}(A)$.*

Observación 1.8 *Sean X y Y espacios vectoriales y A un subconjunto de X, entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(*a*) *La envolvente convexa $co(A)$ está bien definida y es convexa.*

(b) *Si X es un espacio vectorial topológico entonces la envolvente convexa cerrada $\overline{co}(A)$ es convexa y cerrada en X.*

(c) *Si X es un espacio normado entonces $\{x \in X : \ \|x\| \leqslant 1\}$ y $\{x \in X : \ \|x\| < 1\}$ son conjuntos convexos.*

(d) *Si f es una funcional en X^*, entonces $\{x \in X : \ |f(x)| \leqslant 1\}$, $\{x \in X : \ Ref(x) \leqslant 1\}$ y $\{x \in X : \ Ref(x) > 1\}$ son convexos.*

(e) *Sea $T : X \longrightarrow Y$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal y B un subconjunto convexo de Y, entonces $T^{-1}(B)$ es un convexo de X.*

Demostración:

(a) Sea $\mathscr{C} = \{C \subseteq X : \ C \text{ es convexo y } A \subseteq C\}$. Hay que notar que X es en sí un conjunto convexo al ser un espacio vectorial, de esta manera la colección $\mathscr{C}$ es no vacía y así para cualquier subconjunto habrá un conjunto convexo que lo contenga y por el resultado (b) de la proposición 1.10 se tiene que la envolvente convexa es convexa pues $co(A) = \bigcap\limits_{C \subseteq \mathscr{C}} C$.

(b) Dado que X es un espacio topológico, entonces X es cerrado. Así si

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq X : \ F \text{ es cerrado, convexo y } A \subseteq F\},$$

entonces $\mathscr{C}$ es no vacía y de la misma manera que en (a) tenemos que $\overline{co}(A)$ está bien definida y es convexa. Además, la intersección arbitraria de cerrados es cerrada en un espacio topológico, entonces $\overline{co}(A) = \bigcap\limits_{F \subseteq \mathscr{F}} F$ es cerrada.

(c) Sean a, b en $\{x \in X : \ \|x\| \leqslant 1\}$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}
\|bt + (1-t)a\| &\leqslant t\|b\| + (1-t)\|a\| \\
&\leqslant t + (1-t) \\
&= 1
\end{aligned}$$

y si c y d están en $\{x \in X : \ \|x\| < 1\}$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \|dt + (1-t)c\| &\leqslant t\|d\| + (1-t)\|c\| \\ &< t + (1-t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto sí son convexos.

(*d*) Sean $a, b \in \{x \in X : \ |f(x)| \leqslant 1\}$ y $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} |f(bt + (1-t)a)| &= |tf(b) + (1-t)f(a)| \\ &\leqslant t|f(b)| + (1-t)|f(a)| \\ &\leqslant t + (1-t) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego, si $c, d \in \{x \in X : \ Ref(x) \leqslant 1\}$ y $t \in [0,1]$, entonces por la $\mathbb{R}$-linealidad de f se tiene que

$$\begin{aligned} Re(f(tb + (1-t)a)) &= Re(tf(b) + (1-t)f(a)) \\ &= Re(tf(b)) + Re((1-t)f(a)) \\ &= tRef(b) + (1-t)Ref(a) \\ &\leqslant t + (1-t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

y finalmente, si $u, v \in \{x \in X : \ Ref(x) > 1\}$ y $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} Re(f(tv + (1-t)u)) &= Re(tf(v) + (1-t)f(u)) \\ &= tRef(v) + (1-t)Ref(u) \\ &> t + (1-t) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(*e*) Considérense a y b en $T^{-1}(B)$ y sea $t \in [0,1]$, entonces $T(a)$ y $T(b)$ están en B, que por ser convexo se tiene que $tT(b) + (1-t)T(a) \in B$ y por la $\mathbb{R}$-linealidad de T entonces

$$tT(b) + (1-t)T(a) = T(tb + (1-t)a),$$

por lo tanto, efectivamente $tb + (1-t)a$ está en $T^{-1}(B)$.

$\blacksquare$

Proposición 1.11 *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$ convexo, entonces*

(a) $\overline{A}$ *es convexa.*

(b) *Si $a \in A^\circ$ y $b \in \bar{A}$, entonces $[a, b) \equiv \{tb + (1-t)a : \ 0 \leqslant t < 1\} \subseteq A$.*

Demostración:

(a) Ya sabemos que para puntos u, v en A tendremos que $tv + (1-t)u \in \bar{A}$ para toda $t \in [0, 1]$ pues A es convexo y $A \subseteq \bar{A}$. Ahora supongamos $x \in A$, $y \in \bar{A}$ y $t \in [0, 1]$, entonces existe una red $\{y_i\}_{i \in I}$ en A tal que $y_i \longrightarrow y$. Así,

$$ty_i + (1-t)x \longrightarrow ty + (1-t)x.$$

Y como A es convexo, entonces $\{ty_i + (1-t)x\}_{i \in I}$ es una red en A, por lo tanto $ty + (1-t)x \in \bar{A}$ para toda $t \in [0, 1]$.

Otro caso es cuando ambos puntos están en la cerradura. Sean $x, y \in \bar{A}$ y $t \in [0, 1]$, luego existe una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ en A tal que $x_\alpha \longrightarrow x$. Entonces, como x_α está en A para cada $\alpha \in \Lambda$ y $y \in \bar{A}$, por lo anterior tenemos que $ty + (1-t)x_\alpha$ está en $\bar{A}$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y para toda $t \in [0, 1]$. Además

$$ty + (1-t)x_\alpha \longrightarrow ty + (1-t)x,$$

y como $\{ty + (1-t)x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una red en $\bar{A}$, entonces $ty + (1-t)x$ debe estar en $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ para toda $t \in [0, 1]$, por lo tanto $\bar{A}$ es convexa.

(b) Tomemos un t fijo en $(0, 1)$ y sea $c = tb + (1-t)a$ donde $a \in A^\circ$ y $b \in \bar{A}$. Probaremos que c es punto interior de A.

Dado que a está en A°, existe un abierto V de X tal que V es vecindad de 0 y $a + V \subseteq A$. Luego si tomamos un elemento d en A, entonces

$$td + (1-t)(a + V) \subseteq A$$

puesto que A es convexo. Visto de otra forma tenemos para cualquier $d \in A$ la siguiente contención:

$$\begin{aligned} A &\supseteq td + (1-t)(a+V) \\ &= t(d-b) + tb + (1-t)(a+V) \\ &= t(d-b) + tb + (1-t)a + (1-t)V \\ &= (t(d-b) + (1-t)V) + c \end{aligned}$$

Así, lo que falta es encontrar un $d \in A$ tal que $t(d-b) + (1-t)V \equiv U$ sea vecindad de 0, puesto que por la proposición 1.2, U es un abierto y por la observación 1.3, $U + c$ será vecindad de c en A y por lo tanto $c \in A^\circ$. Ahora, hallar un $d \in A$ tal que

$$0 \in t(d-b) + (1-t)V$$

es equivalente a encontrarlo tal que

$$0 \in (d-b) + t^{-1}(1-t)V,$$

o bien, tal que

$$d \in b - t^{-1}(1-t)V.$$

Como V es una vecindad abierta del 0, por la observación 1.3 y la proposición 1.2, $-t^{-1}(1-t)V$ también es una vecindad abierta de 0, aparte b está en $\bar{A}$ y $b - t^{-1}(1-t)V$ es vecindad de b en X (por la observación 1.3), entonces

$$b - t^{-1}(1-t)V \cap A \neq \emptyset$$

y así, extraemos d de esta intersección.

$\blacksquare$

Corolario 1.1 *Si $A \subseteq X$ y X es un espacio vectorial topológico, entonces $\overline{co}(A)$ es la cerradura de $co(A)$.*

Demostración: Sean

$$\mathscr{C} = \{C \subseteq X : \ C \text{ es convexo y } A \subseteq C\}$$

y

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq X : \ F \text{ es convexo, cerrado y } A \subseteq F\},$$

entonces $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}$. De esta manera, si $x \in co(A) = \bigcap_{C\in\mathscr{C}} C$, entonces $x \in C$ para todo $C \in \mathscr{C}$, por tanto, $x \in F$ para toda $F \in \mathscr{F}$, así

$$x \in \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F = \overline{co}(A).$$

Entonces, como $co(A) \subseteq \overline{co}(A)$, se tiene que $\overline{co(A)} \subseteq \overline{\overline{co}(A)} = \overline{co}(A)$ puesto que $\overline{co}(A)$ es cerrada por la observación 1.8 (b). Por otro lado, tenemos por la observación 1.8 (a) que $co(A)$ es convexa y por la proposición 1.11 (a) $\overline{co(A)}$ también es convexa. Así, $\overline{co(A)} \in \mathscr{F}$ y por lo tanto $\overline{co}(A) \subseteq \overline{co(A)}$. ■

Definición 1.11 *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$.*

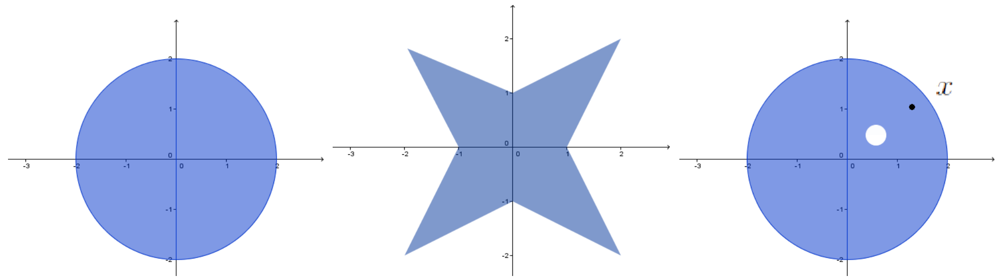
i) Se dice que un subconjunto A de X es balanceado si para $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leqslant 1$ se cumple que αx está en A.

ii) Un subconjunto absorbente B de X es aquel en el cual para cada $x \in X$ existe un $\varepsilon > 0$ que depende de x, es decir $\varepsilon = \varepsilon(x)$, tal que para $t \in [0, \varepsilon)$, se verifica que $tx \in B$.

iii) Si $C \subseteq X$ y $c \in C$, decimos que C es absorbente en c si el conjunto $C-c$ es absorbente. Equivalentemente, C es absorbente en c si para cada $x \in X$ existe $0 < \varepsilon = \varepsilon(x)$ tal que para $t \in [0, \varepsilon)$ se tenga que $tx + c \in C$.

Claramente se puede observar que tanto un conjunto balanceado como un conjunto absorbente, ambos deben contener al cero y también es claro que si un conjunto es absorbente en 0 es lo mismo que decir que es absorbente.

Una manera intuitiva de pensar en este tipo de conjuntos es, en el caso de un balanceado A, imaginarlo como un conjunto que tiene cierta simetría respecto al origen, ya que para $\alpha = -1$, si $x \in A$, entonces su inverso $-x$ también debe estar en A (véase la figura 1.1b). Otro ejemplo que podemos visualizar es el espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Así, si $z = r_z e^{i\theta_z}$ está en un balanceado A y $\alpha = e^{i\theta}$, entonces $\alpha z = r_z e^{i(\theta_z+\theta)}$ pertenece a A, y esto debe cumplirse para toda $\theta \in [0, 2\pi]$ lo que hace que A tenga que contener toda la circunferencia de radio r_z, de hecho, todo el círculo de radio r_z pues para $\beta = re^{i\theta}$ con $0 \leqslant r \leqslant 1$, entonces βz debe estar en A.



(a) Balanceado en $\mathbb{C}$ (b) Balanceado en $\mathbb{R}^2$ (c) No balanceado

Figura 1.1: Ejemplos

Notemos que en el caso de la figura 1.1c tenemos que existen algunos α's con módulo menor que 1 tales que $\alpha x \notin A$.

También podemos ver que en el caso de un conjunto absorbente, además de contener al cero, éste debe poseer una vecindad del cero, de lo contrario habría puntos para los cuales no existirían tales epsilons como el conjunto de la siguiente imagen.

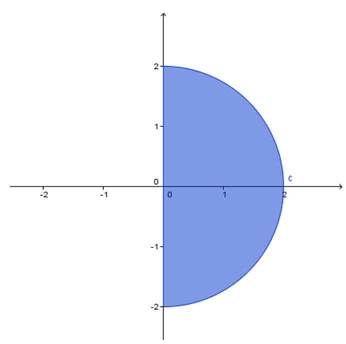


Figura 1.2: No absorbente

Y si se quiere que un conjunto A sea absorbente en uno de sus puntos, digamos a, entonces A debe contener una vecindad de a.

A continuación vamos a caracterizar a los conjunto que sean no vacíos, convexos, balanceados y absorbentes en cada uno de sus puntos con seminormas, es decir, por cada conjunto de este tipo va a existir una única seminorma que lo describa. Para ello la observación 1.9 y la proposición 1.12.

Observación 1.9 *Si X es un espacio vectorial y p es una seminorma en X, entonces el* *conjunto*

$$V = \{x \in X : \ p(x) < 1\}$$

es convexo, balanceado y absorbente en cada uno de sus puntos.

Demostración: Claramente V es convexo, balanceado y no vacío. Falta ver que es absorbente en cada uno de sus puntos. Sea $v \in V$ y $x \in X$ con $p(x) = 0$, entonces para toda $t > 0$ se tiene que

$$p(tx + v) \leqslant p(tx) + p(v) = tp(x) + p(v) = p(v) < 1.$$

Luego, supongamos que $p(x) > 0$, entonces defínase $\varepsilon = \dfrac{1 - p(v)}{p(x)} > 0$. Si $t \in [0, \varepsilon)$ tendremos que

$$\begin{aligned} p(v + tx) &\leqslant p(v) + tp(x) \\ &< p(v) + \frac{1 - p(v)}{p(x)} p(x) \\ &= p(v) + 1 - p(v) \\ &= 1 \end{aligned}$$

y entonces $v + tx \in V$ para toda $t \in [0, \varepsilon)$. ■

Resulta que el recíproco de la observación previa también es válido. Para mostrarlo, probaremos antes el siguiente lema.

Lema 1.3 *Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto convexo y balanceado. Considérese la función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$p(x) = \text{ínf} \{t \in \mathbb{R} : \ t \geqslant 0 \ \text{y} \ x \in tA\}. \tag{1.9}$$

Entonces se cumplen los siguientes resultados:

(*a*) *Si $\alpha \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{\alpha} A = \dfrac{1}{|\alpha|} A$*

(*b*) *Sea $x \in X$ con $p(x) = \alpha$ y sea $\delta > 0$, entonces $x \in (\alpha + \delta)A$.*

(*c*) *Sean $\alpha, \beta > 0$, entonces $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.*

Demostración:

(*a*) Sea $z \in \dfrac{1}{\alpha}A$, entonces $\alpha z \in V$. Luego como $\Big|\dfrac{|\alpha|}{\alpha}\Big| = 1$ y A es balanceado, entonces $\dfrac{|\alpha|}{\alpha}\alpha z \in A$ y así $|\alpha| z \in A$ y luego $z \in \dfrac{1}{|\alpha|}A$. La otra contención es exactamente análoga.

(*b*) Sea $\delta > 0$, entonces existe $t_\delta \in (\alpha, \alpha+\delta]$ tal que $x \in t_\delta A$ y como $0 < \dfrac{t_\delta}{\alpha+\delta} \leqslant 1$ y A es balanceado, se sigue que $\dfrac{t_\delta}{\alpha+\delta}A \subseteq A$, así $x \in t_\delta A \subseteq (\alpha+\delta)A$.

(*c*) Claramente tenemos que $(\alpha+\beta)A \subseteq \alpha A + \beta A$. Luego, como A es convexo y $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$, entonces

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}A \subseteq A$$

y finalmente $\alpha A + \beta A \subseteq (\alpha+\beta)A$.

$\blacksquare$

Proposición 1.12 *Sea X un espacio vectorial y $V \subseteq X$ un conjunto convexo, balanceado, absorbente en cada uno de sus puntos y no vacío. Entonces existe una única seminorma p en X tal que*

$$V = \{x \in X : \ p(x) < 1\}.$$

Demostración: Definamos $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$p(x) = \text{ínf}\{t \in \mathbb{R} : \ t \geqslant 0 \text{ y } x \in tV\}.$$

Notar que $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} nV$ ya que si $x \in X$, como V es absorbente, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $tx \in V$ siempre que $t \in [0, \varepsilon_x)$ y si tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon_x$, tendremos que $\frac{1}{n_0}x \in V$ o bien que $x \in n_0 V$.

Esta observación sobre X lo que hace es permitirnos asegurar que el conjunto

$$\{t \in \mathbb{R} : \ t \geqslant 0 \text{ y } x \in tV\}$$

sea no vacío. Ahora que p está bien definida veamos que en efecto es una seminorma en X.

Es claro que $p(0) = 0$. Ahora supongamos $\alpha \in \mathbb{K}$ con $\alpha \neq 0$, $x \in X$ y aplicando el hecho de que V es balanceado y convexo obtenemos

$$\begin{aligned}
p(\alpha x) &= \text{ínf}\{t \in \mathbb{R} :\ t \geqslant 0 \text{ y } \alpha x \in tV\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \in \mathbb{R} :\ t \geqslant 0 \text{ y } x \in \frac{t}{\alpha}V\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \in \mathbb{R} :\ t \geqslant 0 \text{ y } x \in \frac{t}{|\alpha|}V\right\} \qquad \text{(por } (a) \text{ del lema 1.3)} \\
&= |\alpha|\text{ínf}\left\{\frac{t}{|\alpha|} \in \mathbb{R} :\ \frac{t}{|\alpha|} \geqslant 0 \text{ y } x \in \frac{t}{|\alpha|}V\right\} \\
&= |\alpha| p(x)
\end{aligned}$$

Para completar la prueba de que p es una seminorma falta probar que $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ para todo $x, y \in X$.

Sean $x, y \in X$ con $p(x) = \alpha$, $p(y) = \beta$ y sea $\delta > 0$, entonces por (b) del lema 1.3, $x \in (\alpha+\delta)V$ y $y \in (\beta+\delta)V$, por tanto $x+y \in (\alpha+\delta)V + (\beta+\delta)V$, además, por el inciso (c) del lema 1.3 se tiene que

$$(\alpha+\delta)V + (\beta+\delta)V = (\alpha+\beta+2\delta)V$$

y como $p(x+y) = \text{ínf}\{t \geqslant 0 :\ x+y \in tV\}$, entonces $p(x+y) \leqslant \alpha+\beta+2\delta$ y así

$$p(x+y) = \lim_{\delta\to 0} p(x+y) \leqslant \lim_{\delta\to 0}(\alpha+\beta+2\delta) = \alpha+\beta = p(x)+p(y)$$

y con esto ya tenemos que p es una seminorma en X. Resta demostrar que $V = \{x \in X :\ p(x) < 1\}$. Primero veamos que $\{x \in X :\ p(x) < 1\} \subseteq V$. Sea $x \in X$ tal que $p(x) = \alpha < 1$, entonces existe β en $[\alpha, 1)$ tal que $x \in \beta V$ y como V es balanceado, se tiene que

$$x \in \beta V \subseteq V.$$

Recíprocamente, sea $x \in V$, entonces $p(x) \leqslant 1$. Luego, como V es absorbente en cada uno de sus puntos, entonces lo es en x y así existe $\varepsilon_x > 0$ tal que para $t \in [0, \varepsilon)$ se tiene que

$$x + tx = y \in V,$$

entonces $x = (1+t)^{-1}y$ y además $p(y) \leqslant 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} p(x) &= p((1+t)^{-1}y) \\ &= (1+t)^{-1}p(y) \\ &\leqslant (1+t)^{-1} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Por último probaremos la unicidad de dicha seminorma. Supóngase que existe otra seminorma q tal que

$$V = \{x \in X : \ q(x) < 1\}.$$

Sea $x \in X$, luego sabemos que $p(x) < 1$ si y sólo si $q(x) < 1$. Sea $\alpha = q(x)$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$q\left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}x\right) = \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon} < 1$$
$$\Rightarrow \ p\left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}x\right) < 1$$

y así $p(x) < \alpha + \epsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto $p(x) \leqslant q(x)$. De modo análogo se tiene que $q(x) \leqslant p(x)$ y con esto tenemos que efectivamente p es única. ■

Definición 1.12 *Sea X un espacio vectorial y V un subconjunto de X.Definimos la función o funcional de Minkowski de V o bien, la función gauge de V, $p_V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$p_V(x) = \acute{\imath}nf\, \{t \in \mathbb{R} : \ t \geqslant 0 \ y \ x \in tV\}. \tag{1.10}$$

Notar que la funcional de Minkowski es la misma función que se define en (1.9), sin embargo, en la definición 1.12, V es un subconjunto arbitrario de X.

Observación 1.10 *Si V es un subconjunto abierto de un espacio vectorial topológico X, entonces V es absorbente en cada uno de sus puntos.*

Demostración: Sea $v \in V$, como V es abierto entonces $V - v$ es vecindad del cero. Sea $x \in X$ y consideremos la red $\{(1-t)x\}_{t\in(0,1)}$ y notemos que

$$(1-t)x \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0,$$

entonces existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $(1-t)x \in V - v$ para $t \geqslant t_0$, equivalentemente para $1 - t \geqslant 1 - t_0$ entonces $(1-t)x \in V - v$. Así, si tomamos $\varepsilon_x = 1 - t_0$, en efecto, V será absorbente en v pues para $u \in [0, \varepsilon_x)$ se tiene que $ux \in V - v$. ■

Teorema 1.2 *Sea X un espacio vectorial topológico Hausdorff y considérese*

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X : \ U \text{ es abierto, balanceado y convexo}\}.$$

Entonces X es un espacio localmente convexo si y sólo si $\mathcal{U}$ es una base para el sistema de vecindades de 0.

Demostración: Supongamos que X es un espacio localmente convexo y sea $\mathcal{P}$ la familia de seminormas separante que genera la topología de X. Sea V una vecindad de 0 en X, entonces existe una colección finita de sub-básicos formados con $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tales que

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : \ p_i(x) < \varepsilon_i\} \subseteq V.$$

Notemos que para cada $i = 1, \ldots, n$, por la proposición 1.12 el sub-básico $\{x \in X : \ p_i(x) < 1\}$ es abierto, convexo, balanceado y no vacío para cada $i = 1, \ldots, n$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \{x \in X : \ p_i(x) < \varepsilon\} &= \varepsilon\{x \in X : \ p_i(x) < 1\} \\ &= \psi_{\frac{1}{\varepsilon}}^{-1}(\{x \in X : \ p_i(x) < 1\}) \end{aligned}$$

y por la observación 1.8 (e) el sub-básico $\{x \in X : \ p_i(x) < \varepsilon\}$ también es convexo. Además, por la proposición 1.2 tenemos que es abierto y claramente es balanceado. Ahora veamos que W también cumple estas propiedades.

Tenemos por la proposición 1.10 (b) que W es convexo y fácilmente se puede ver que W es balanceado. Además, sabemos que la intersección finita de abiertos es abierta. Así, $W \in \mathcal{U}$, de esta manera se tiene que, efectivamente, $\mathcal{U}$ es una base para el sistema de vecindades del 0.

Para demostrar el recíproco hay que encontrar una familia de seminormas separante para X tal que la topología generada por esta familia coincida con la topología τ original de X. Para cada $U \in \mathcal{U}$, U es convexo y balanceado, además, como es abierto, por la observación 1.10 U es absorbente en cada uno de sus puntos y por la proposición 1.12 existe una única seminorma p_U en X tal que $\{x \in X : \ p_U(x) < 1\} = U$. Entonces

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}} = \{p_U : \ U \in \mathcal{U}\}$$

es una familia de seminormas. Primero veamos que ésta es separante. Sea $x \in X \setminus \{0\}$, como X es Hausdorff, existe una vecindad V del cero en $\mathcal{U}$ en la que $x \notin V$, así, $p_V(x) > 0$ por lo tanto X es localmente convexo con la topología $\tau_{\mathcal{P}_\mathcal{U}}$. Ahora falta ver que $\tau = \tau_{\mathcal{P}_\mathcal{U}}$.

Sea V un abierto respecto a τ, veremos que para cada $v \in V$ v es punto interior de V. Dado que $\mathcal{U}$ es base para el sistema de vecindades de 0 entonces para cada $v \in V$ existe $U_v \in \mathcal{U}$ tal que

$$\{x \in X : \ p_{U_v}(x) < 1\} = U_v \subseteq V - v.$$

Con esto $V - v$ es vecindad abierta de 0 en $\tau_{\mathcal{P}_\mathcal{U}}$ para cada $v \in V$, por lo tanto V lo es para todo v en él y entonces V es abierto respecto a $\tau_{\mathcal{P}_\mathcal{U}}$.

Recíprocamente, cada sub-básico de $\tau_{\mathcal{P}_\mathcal{U}}$ es de la forma

$$\begin{aligned} \{x \in X : \ p_U(x - x_0) < \varepsilon\} &= x_0 + \varepsilon\{x \in X : \ p_U(x) < 1\} \\ &= x_0 + \varepsilon U \in \tau \end{aligned}$$

pues $U \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es base para sistema de vecindades de 0 respecto a τ. ■

Capítulo 2

Espacios localmente convexos normables y metrizables

Se sabe que los espacios métricos y los espacios normados son muy útiles en la matemática y que tienen una estructura muy rica. El propósito de este capítulo es averiguar qué espacios localmente convexos tienen una topología definida por una métrica y también buscar cuáles son normables. Para ello se definirá una métrica a partir de una colección numerable de seminormas y en el caso de los espacios normables se tendrá la existencia de una cierta seminorma a la cual se le probará la propiedad que falta para ser norma, es decir, que si un elemento es distinto del cero, entonces su valor en la norma es estrictamente positivo.

La siguiente observación nos ayudará a probar una desigualdad del triángulo.

Observación 2.1 *Sea* $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \tag{2.1}$$

entonces f *es creciente.*

Demostración: Claramente f está bien definida y es diferenciable en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y su derivada es

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Notemos que f' siempre es positiva, por lo tanto f es creciente. ■

Lema 2.1 *Sea* X *un espacio vectorial y* p *una seminorma en* X*. Sea* $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$\rho(x, y) = \frac{p(x-y)}{1+p(x-y)}.$$

Entonces ρ es una pseudométrica.

Demostración: Antes que nada notemos que ρ está bien definida y que $\rho(x,y) \geqslant 0$ para todo par $(x,y) \in X \times X$. Luego, si $x = y$, entonces $p(x-y) = 0$ por ser seminorma y entonces $\rho(x,y) = 0$. Luego, si $x, y \in X$, como p es seminorma se tiene que

$$p(x-y) = p((x-z)+(z-y)) \leqslant p(x-z) + p(z-y).$$

Tomando $t_1 = p(x-y)$ y $t_2 = p(x-z) + p(z-y)$, como f definida en (2.1) es creciente, entonces

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \frac{p(x-y)}{1+p(x-y)} \\
&\leqslant \frac{p(x-z)+p(z-y)}{1+p(x-z)+p(z-y)} \qquad \text{pues } f \text{ es creciente} \\
&= \frac{p(x-z)}{1+p(x-z)+p(z-y)} + \frac{p(z-y)}{1+p(x-z)+p(z-y)} \\
&\leqslant \frac{p(x-z)}{1+p(x-z)} + \frac{p(z-y)}{1+p(z-y)} \\
&= \rho(x,z) + \rho(z,y)
\end{aligned}$$

por lo tanto ρ es una pseudométrica. ■

Proposición 2.1 *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de seminormas tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ p_n(x) = 0\} = \{0\}$, es decir, con la propiedad de ser separante y para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese $d_n : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$d_n(x,y) = \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Entonces $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y)$ es métrica y es invariante bajo traslaciones.

Demostración: Primero analicemos si d está bien definida, es decir, hay que ver que la serie converja. En efecto, como vimos en el lema 2.1 tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, d_n está bien definida además de ser una pseudométrica y se tiene que $d_n(x,y) \leqslant 1$ y como la serie geométrica $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente y además $\frac{1}{2^n} d_n(x,y) \leqslant \frac{1}{2^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por comparación se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y)$ también converge.

Ahora, claramente $d(x,y) \geqslant 0$ para todo par $(x,y) \in X \times X$ y si $x = y$ entonces $d_n(x,y) = 0$ pues para cada $n \in \mathbb{N}$ d_n es una pseudométrica por el lema 2.1 y así $d(x,y) = 0$. Luego, para $(x,y) \in X \times X$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (d_n(x,z) + d_n(z,y)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(z,y) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Finalmente, si $d(x,y) = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y) = 0$ y como cada miembro de la serie es no negativo, entonces $d_n(x,y) = 0$ para toda $n = 1, 2, \ldots$, esto nos da que $p_n(x-y) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por hipótesis $x - y = 0$, es decir, $x = y$, y por tanto d efectivamente es una métrica. Sólo falta ver que es invariante bajo traslaciones.

Sean x, y y $x_0 \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x + x_0 - (y + x_0))}{+p_n(x + x_0 - (y + x_0))} \\ &= d(x + x_0, y + x_0). \end{aligned}$$

■

A continuación daremos respuesta a la cuestión inicial en este capítulo sobre qué espacios localmente convexos son metrizables.

Lema 2.2 *Sea X un espacio localmente convexo y metrizable y sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces existe una familia de seminormas $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con la propiedad de que $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X si y sólo si $p_n(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Sea d la métrica de X y $\mathcal{P}$ la familia que hace de X un espacio localmente convexo. Considérese

$$U_n = \left\{x \in X : \ d(x,0) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Notar que $U_n \neq \emptyset$ pues al menos el 0 está ahí para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es un espacio localmente convexo y U_n es un abierto entonces existen $q_1^{(n)}, \ldots, q_k^{(n)} \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : \ q_i^{(n)}(x) < \varepsilon_i\} \subseteq U_n.$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase $p_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$p_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_1} q_1^{(n)}(x) + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_k} q_k^{(n)}(x) \tag{2.2}$$

para cada $x \in X$. Nótese que si $p_n(x) < 1$ entonces $\dfrac{1}{\varepsilon_i} q_i^{(n)}(x) < 1$ para toda $i = 1, \ldots, k$ y así $x \in U_n$. Luego, sabemos por la observación 1.5 que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ $q_i^{(n)}$ es continua y por la proposición 1.7 (a) y 1.7 (c) tenemos que p_n es seminorma y también es continua en X. Así, si $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X, entonces $p_n(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $p_n(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Así, para $\varepsilon > 0$ hay un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ y por hipótesis $p_N(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_N(x_j) < 1 \quad \text{para toda } j \geqslant j_0.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{\varepsilon_1} q_1^{(N)}(x_j) + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_k} q_k^{(N)}(x_j) < 1 \quad \text{para toda } j \geqslant j_0$$

y entonces

$$q_i^{(N)}(x_j) < \varepsilon_i \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, k \quad \text{ y para toda } j \geqslant j_0.$$

Luego,

$$x_j \in \bigcap_{i=1}^{k} \left\{x \in X : \ q_i^{(N)}(x) < \varepsilon_i\right\} \subseteq U_N = \left\{x \in X : \ d(x,0) < \frac{1}{N} < \varepsilon\right\}$$

para toda $j \geqslant j_0$ y así $x_j \in B_\varepsilon(0)$ para toda $j \geqslant j_0$, por lo tanto $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X. De esta manera, la familia numerable de seminormas que buscábamos es $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ en (2.2). ■

Lema 2.3 *Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de seminormas que determina la topología de un espacio X y sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X si y sólo si $p_n(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ p_n es continua y así se tiene que $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Recíprocamente, sea V una vecindad de 0 en X, entonces existen $p_{i_1}, \ldots, p_{i_m} \in \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0$ tales que

$$\bigcap_{k=1}^{m} \{x \in X : \; p_{i_k}(x) < \varepsilon_k\} \subseteq V.$$

Luego, dado que $p_n(x_j) \longrightarrow 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces existen $J_1, \ldots, J_m \in \mathbb{N}$ tales que para cada $k = 1, \ldots, m$

$$p_{i_k}(x_j) < \varepsilon_k \quad \text{para toda } j \geqslant J_k.$$

Tomando $J = máx\{J_1, \ldots, J_k\}$ entonces para toda $k = 1, \ldots, m$ resulta que

$$p_{i_k}(x_j) < \varepsilon_k \quad \text{para toda } j \geqslant J$$

y así $x_j \in V$ para toda $j \geqslant J$, por tanto $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X. ■

Lema 2.4 *Sea X un espacio topológico primero-numerable y $U \subseteq X$. Entonces*

(*a*) *U es abierto en X si y sólo si para cada x en U se cumple que para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \longrightarrow x$ en X, exista $N \in \mathbb{N}$ tal que x_n esté en U para toda $n \geqslant N$.*

(*b*) *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías que hacen de X un espacio primero-numerable. Si se tiene que $x_j \longrightarrow x$ en τ_1 es equivalente a $x_j \longrightarrow x$ en τ_2 para cualquier sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ en X entonces τ_1=τ_2.*

Demostración:

(a) Sea U un abierto de X, entonces si $x \in U$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a x, por definición de convergencia tenemos que existe N tal que $x_n \in U$ para toda $n \geqslant N$.

Por el otro lado, supongamos que $x \in U$ y X es primero-numerable. Entonces existe una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ de x a lo más numerable, digamos

$$\mathcal{B}_x = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $V_{n+1} \subseteq V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego constrúyase una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de manera que $x_n \in V_n$, entonces necesariamente $x_n \longrightarrow x$ pues al tomar un abierto W tal que $x \in W$, como $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades anidadas entonces existe n_0 tal que $V_n \subseteq W$ para toda $n \geqslant n_0$ y con ello $x_n \in W$ para toda $n \geqslant n_0$. Luego, por hipótesis, para la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para toda $n \geqslant N$. Así, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para toda $n \geqslant N_1$ y con esto debe existir un N tal que $V_N \subseteq U$, de lo contrario, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tendría que $V_n \diagdown U \neq \emptyset$ y si construimos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \in V_n \diagdown U$ para cada n entonces $y_n \longrightarrow x$, ya que si A es un abierto con $x \in A$ entonces existe N_2 tal que $x \in V_n \subseteq A$ para toda $n \geqslant N_2$ y luego $y_n \in V_n \diagdown U \subseteq A$ para toda $n \geqslant N_2$ y así $y_n \longrightarrow x$. Luego debe existir N_0 tal que $y_n \in U$ para toda $n \geqslant N_0$ pero esto es imposible por la construcción de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, por lo tanto es cierto que existe N con $V_N \subseteq U$ y con esto obtenemos que U es abierto.

(b) Sea U un abierto de X respecto a τ_1. Consideremos un punto arbitrario $x \in U$ y $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión que converja a x respecto a τ_2. Por hipótesis tenemos que esto es equivalente a que $x_j \longrightarrow x$ respecto a τ_1 y como U es abierto con τ_1, por el inciso anterior existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in U$ para toda $n \geqslant N$ y con esto, U es abierto respecto a τ_2 y así $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y la otra contención es completamente análoga.

$\blacksquare$

Teorema 2.1 *Sea X un espacio localmente convexo donde la familia de seminormas que determina su topología es $\mathcal{P}$. Entonces X es metrizable si y sólo si existe una colección $\mathcal{Q}$ a lo más numerable de seminormas que induce la topología de X.*

Demostración: ($\Rightarrow$)

Supongamos que X es un espacio localmente convexo donde $\mathcal{P}$ es la familia de seminormas que determina su topología y también supongamos que X es un espacio metrizable donde d es la métrica correspondiente. Así pues, $\tau_{\mathcal{P}}$=τ_d pero para tener más claridad en la demostración denotaremos a esta topología mediante τ_1, es decir, $\tau_1 = \tau_{\mathcal{P}} = \tau_d$. Lo que a continuación probaremos es que debe existir una familia de seminormas a lo sumo numerable, digamos $\mathcal{Q}$, tal que $\tau_1 = \tau_{\mathcal{Q}}$.

Sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en X, por el lema 2.2 existe una familia de seminormas $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, la cual se define a partir de la familia $\mathcal{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ en (2.2), con la propiedad de que

$$x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en } \tau_1 \quad \text{si y sólo si} \quad p_n(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Luego, llamémosle τ a la topología que determina $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces, por el lema 2.3,

$$x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en } \tau \quad \text{si y sólo si} \quad p_n(x_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Así, por las dobles implicaciones (2.3) y (2.4) tenemos que

$$x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en } \tau_1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en } \tau.$$

Además sabemos que todo espacio métrico es primero-numerable por lo que X es primero-numerable con la topología τ_1. Luego, tenemos que la topología τ está determinada por una sub-base numerable, lo que deduce que cada $x \in X$ tiene una base numerable y entonces X también es primero-numerable con τ. Así, por el lema 2.4 (b) se sigue que $\tau_1 = \tau$. Por lo tanto tenemos que la familia de seminormas $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la familia $\mathcal{Q}$ a lo más numerable que induce la topología τ_1 que estábamos buscando.

($\Leftarrow$)

Supongamos que existe una familia $\mathcal{P}_0$ a lo más numerable tal que induzca la topología de X, digamos $\mathcal{P}_0 = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por la proposición 2.1 sabemos que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

es una métrica para X. Sea τ_d la topología inducida por d. También vimos en la proposición 2.1 que d es invariante bajo traslaciones, por tanto tenemos que $B_r(x_0) = x_0 + B_r(0)$ pues

$$\begin{aligned} y \in B_r^d(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad d(y, x_0) < r \\ &\Leftrightarrow \quad d(y - x_0, x - x_0) < r \\ &\Leftrightarrow \quad d(y - x_0, 0) < r \\ &\Leftrightarrow \quad y - x_0 \in B_r^d(0) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in x_0 + B_r^d(0). \end{aligned}$$

De esta manera sólo necesitamos mostrar que el sistema de vecindades del cero en $\tau_{\mathcal{P}_0}$ es el mismo que en τ_d para ver que X es metrizable. Esta última afirmación es gracias a la observación 1.3.

Sea W vecindad del cero en $\tau_{\mathcal{P}}$, entonces existen $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n} \in \mathcal{P}_0$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tales que

$$0 \in \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in X : \; p_{i_k}(x) < \varepsilon_k\} \subseteq W.$$

Para ver que W es vecindad del cero respecto a τ_d bastará encontrar un radio $r > 0$ tal que

$$0 \in B_r(0) \subseteq W.$$

Sea $r = mín\left\{\dfrac{\varepsilon_k}{2^{i_k}(1+\varepsilon_k)} : \; k = 1, \ldots, n\right\}$ y sea $x \in B_r(0) = \{y \in X : \; d(y, 0) < r\}$, entonces

$$\frac{1}{2^{i_k}} \frac{p_{i_k}(x)}{1 + p_{i_k}(x)} < r \leqslant \frac{\varepsilon_k}{2^{i_k}(1+\varepsilon_k)} \quad \text{para toda } \; k = 1, \ldots, n$$

y luego

$$(1 + \varepsilon_k) p_{i_k}(x) < \varepsilon_k (1 + p_{i_k}(x)) \quad \text{para toda } \; k = 1, \ldots, n$$

y entonces

$$p_{i_k}(x) < \varepsilon_k \quad \text{para toda } \; k = 1, \ldots, n.$$

Por tanto $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in X : \; p_{i_k}(x) < \varepsilon_k\}$. Así, efectivamente $B_r(0) \subseteq W$ y por tanto W es vecindad de 0 en τ_d. Ahora, si U es una vecindad del cero respecto a τ_d, entonces hay un $\delta > 0$ con el que $0 \in B_\delta(0) \subseteq U$ y queremos ver que U es vecindad abierta de 0 en $\tau_{\mathcal{P}_0}$. Para esto observemos lo siguiente. Sea $\tilde{d} = d \mid_{\{0\} \times X}$, esto es, $\tilde{d} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\tilde{d}(x) = d(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)}.$$

Como para cada n, p_n es continua respecto a $\tau_{\mathcal{P}_0}$, entonces también para cada n la función $\frac{1}{2^n}\frac{p_n}{1+p_n}$ es continua respecto a $\tau_{\mathcal{P}_0}$. Además la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$ converge uniformemente, entonces se tiene que $\tilde{d}$ es una función continua respecto a $\tau_{\mathcal{P}_0}$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} B_r(0) &= \{x \in X :\ d(0,x) < r\} \\ &= \{x \in X :\ \tilde{d}(x) < r\} \\ &= \{x \in X :\ \tilde{d}(x) \in (-\infty, r)\} \\ &= \tilde{d}^{-1}(-\infty, r) \end{aligned}$$

y como $(-\infty, r)$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y $\tilde{d}$ es continua en $\tau_{\mathcal{P}_0}$, entonces $B_r(0)$ es un abierto respecto a $\tau_{\mathcal{P}_0}$ y con esto último hemos probado que $\tau_{\mathcal{P}_0}=\tau_d$ y por tanto X es metrizable.

■

Ahora veremos algunos ejemplos donde se usa este teorema, pero antes de ello hacemos una pequeña observación que nos resultará muy útil:

Sean $a, b \geqslant 0$ y $0 < p < 1$, entonces

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p.$$

En efecto, sabemos que si $0 \leqslant c \leqslant 1$ y $0 < p < 1$ entonces $c \leqslant c^p$, así

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a+b}{a+b} \\ &= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \\ &\leqslant \left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \\ &= \frac{a^p + b^p}{(a+b)^p} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p.$$

Ejemplo 2.1 *Consideremos el espacio*

$$L^p = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es Lebesgue-medible y } \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

para $0 < p < 1$, donde un elemento $f \in L^p$ se entiende como la clase de equivalencia

$$[f] = \{g \in L^p \mid \ g(t) = f(t) \ \ \textit{casi en todas partes} \}.$$

Defínase para $f, g \in L^p$

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt.$$

Entonces:

(*a*) *d es una métrica invariante por traslaciones y además (L^p, d) es completo.*

(*b*) *(L^p, d) es un espacio vectorial topológico.*

(*c*) *Los únicos subconjuntos abiertos y convexos que posee (L^p, d) son el vacío y el propio L^p.*

(*d*) *(L^p, d) no es localmente convexo.*

(*e*) *El dual de L^p consta sólo de la funcional cero, es decir, $(L^p)^* = \{0\}$.*

Demostración:

(*a*) Primero probaremos que d es una métrica. Claramente $d(f,g) \geqslant 0$ para cualesquier par $f, g \in L^p$ y que $d(f,g) = d(g,f)$. Luego, supongamos que $d(f,g) = 0$, entonces

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt = 0,$$

como el integrando es no negativo y la medida de $[0,1]$ es positiva entonces debemos tener que el integrando es cero casi en todas partes y esto implica que $|f - g|^p \in [0]$, luego $|f - g| \in [0]$ y finalmente que $[f] = [g]$. Recíprocamente si $[f] = [g]$ tenemos que hay un subconjunto B de $[0,1]$ de medida cero donde $f(t) \neq g(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
d(f,g) &= \int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt \\
&= \int_B |f(t)-g(t)|^p dt + \int_{B^c} |f(t)-g(t)|^p dt \\
&\leqslant \mu(B) sup\{|f(t)-g(t)|^p : \ t \in B\} + \mu(B^c) sup\{|f(t)-g(t)|^p : \ t \in B^c\} \\
&= 0 \cdot sup\{|f(t)-g(t)|^p : \ t \in B\} + \mu(B^c) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sólo falta probar la desigualdad del triángulo. Sean f, g y h en L^p, así

$$\begin{aligned}
d(f,g) &= \int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt \\
&= \int_0^1 |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)|^p dt \\
&\leqslant \int_0^1 (|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|)^p dt
\end{aligned}$$

y por la observación previa a este ejemplo

$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^1 |f(t)-h(t)|^p + |h(t)-g(t)|^p dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t)-h(t)|^p dt + \int_0^1 |h(t)-g(t)|^p dt \\
&= d(f,h) + d(h,g).
\end{aligned}$$

Para ver que d es invariante por traslaciones notemos que

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt \\ &= \int_0^1 |(f(t)+h(t))-(g(t)+h(t))|^p dt \\ &= d(f+h,g+h). \end{aligned}$$

Entonces ya que sabemos que (L^p, d) es un espacio métrico, enseguida probaremos que es completo pero antes observemos que

$$\int_0^1 |f_1(t)+f_2(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |f_1(t)|^p dt + \int_0^1 |f_2(t)|^p dt. \tag{2.5}$$

Ahora, consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en L^p, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que para $m, n \geqslant N$ entonces

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^p dt < \varepsilon.$$

De $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ podemos sustraer una subsucesión $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$d(g_{k+1}, g_k) < \frac{1}{2^k},$$

es decir,

$$\int_0^1 |g_{k+1}(t) - g_k(t)|^p dt < \frac{1}{2^k}.$$

Definamos para cada $t \in [0,1]$ la sucesión $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ donde

$$h_m(t) = |g_1(t)| + \sum_{k=1}^{m} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|,$$

entonces para cada $m = 1, 2, \dots$, h_m es medible. Así si definimos $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(t) = |g_1(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|$$

entonces g es el límite de h_m, además, g está bien definida, es no negativa y medible. También tenemos que si $h_m \longrightarrow g$ entonces $(h_m)^p \longrightarrow g^p$ y por el lema de Fatou se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(t)|^p dt &= \int_0^1 \left(|g_1(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|\right)^p dt \\
&\leqslant \underline{lim} \int_0^1 \left(|g_1(t)| + \sum_{k=1}^{m} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|\right)^p dt
\end{aligned}$$

y por (2.5) entonces

$$\begin{aligned}
&\leqslant \underline{lim} \left(\int_0^1 |g_1(t)|^p dt + \int_0^1 \sum_{k=1}^{m} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|^p dt\right) \\
&\leqslant \underline{lim} \left(\int_0^1 |g_1(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |g_{k+1}(t) - g_k(t)|^p dt\right) \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 |g_1(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |g_{k+1}(t) - g_k(t)|^p dt\right) \\
&= \int_0^1 |g_1(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |g_{k+1}(t) - g_k(t)|^p dt \\
&= \int_0^1 |g_1(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{\infty} d(g_{k+1}, g_k) \\
&\leqslant \int_0^1 |g_1(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \int_0^1 |g_1(t)|^p dt + 1 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Con esto último se tiene que $g \in L^p$ y entonces g debe ser finita casi en todas partes.

Defínase ahora $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(t) - g_k(t)) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

donde $\mu(E^c) = 0$.

Notar que para cada k y para toda $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
|g_k(t)| &= \sum_{j=k}^{\infty}(|g_j(t)| - |g_{j+1}(t)|) \\
&\leqslant \sum_{j=k}^{\infty}|g_j(t) - g_{j+1}(t)| \\
&\leqslant g(t).
\end{aligned}$$

También tenemos que para cada $t \in E$ que

$$\begin{aligned}
f(t) &= g_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(g_{j+1}(t) - g_j(t)) \\
&= g_1(t) + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}(g_{j+1}(t) - g_j(t)) \\
&= g_1(t) + \lim_{k\to\infty}(-g_1(t) + g_{k+1}(t)) \\
&= \lim_{k\to\infty} g_{k+1}(t).
\end{aligned}$$

Así la sucesión $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ está dominada por g que es elemento de L^p y $g_k \longrightarrow f$ casi en todas partes, luego por el Teorema de la Convergencia Dominada, f está en L^p. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|g_k(t) - f(t)| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ y entonces

$$\begin{aligned}
d(g_k, f) &= \int_0^1 |g_k(t) - f(t)|^p dt \\
&= \int_E |g_k(t) - f(t)|^p dt + \int_{E^c} |g_k(t) - f(t)|^p dt \\
&\leqslant \int_E (\varepsilon^{\frac{1}{p}})^p dt + \sup_{t\in E^c}|g_k(t) - f(t)|\mu(E^c) \\
&= \varepsilon\mu(E) + 0 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, ya tenemos una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un elemento de L^p respecto a la métrica d, por lo tanto f_n también a f y finalmente (L^p, d) es completo.

(b) El hecho de que (L^p, d) es un espacio vectorial topológico se probará directo de la definición. Tomemos $f_0, g_0 \in L^p$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Sea $r > 0$ y $B_r^d(f_0 + g_0)$ una vecindad abierta de $f_0 + g_0$ en L^p. Entonces, para

$$U = B^d_{\frac{r}{2}}(f_0) \qquad \text{y} \qquad V = B^d_{\frac{r}{2}}(g_0),$$

entonces $U + V \subseteq B^d_r(f_0 + g_0)$ ya que si $f \in U$ y $g \in V$,

$$\begin{aligned} d(f+g, f_0+g_0) &= \int_0^1 |(f+g-f_0-g_0)(t)|^p dt \\ &\leqslant \int_0^1 (|f(t)-f_0(t)| + |g(t)-g_0(t)|)^p dt \end{aligned}$$

y por la observación previa a este ejemplo,

$$\begin{aligned} &\leqslant \int_0^1 |f(t)-f_0(t)|^p + |g(t)-g_0(t)|^p dt \\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)-f_0(t)|^p dt + \int_0^1 |g(t)-g_0(t)|^p dt \\ &= d(f, f_0) + d(g, g_0) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Luego, consideremos $B^d_\varepsilon(\alpha_0 f_0)$. Ahora tomemos

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2(d(f_0, 0)+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{y} \qquad r_1 = \frac{\varepsilon}{2(|\alpha_0| + \delta)}.$$

Notar que si $|\beta - \alpha_0| < \delta$, se obtiene que $|\beta| < \delta - |\alpha_0|$. Sean $f \in B^d_{r_1}(f_0)$ y $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, entonces

$$
\begin{aligned}
d(\alpha f, \alpha_0 f_0) &= \int_0^1 |\alpha f(t) - \alpha_0 f_0(t)|^p dt \\
&= \int_0^1 |(\alpha f(t) - \alpha f_0(t)) + (\alpha f_0(t) - \alpha_0 f_0(t))|^p dt \\
&\leqslant \int_0^1 |\alpha f(t) - \alpha f_0(t)|^p + |\alpha f_0(t) - \alpha_0 f_0(t)|^p dt \\
&\leqslant \int_0^1 |\alpha f(t) - \alpha f_0(t)|^p dt + \int_0^1 |\alpha f_0(t) - \alpha_0 f_0(t)|^p dt \\
&= \int_0^1 |\alpha|^p |f(t) - f_0(t)|^p dt + \int_0^1 |\alpha - \alpha_0|^p |f_0(t)|^p dt \\
&= |\alpha|^p \int_0^1 |f(t) - f_0(t)|^p dt + |\alpha - \alpha_0|^p \int_0^1 |f_0(t)|^p dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= |\alpha|^p d(f, f_0) + |\alpha - \alpha_0|^p d(f_0, 0) \\
&< (\delta + |\alpha_0|)^p \cdot r_1 + \delta^p d(f_0, 0) \\
&= (\delta + |\alpha_0|)^p \frac{\varepsilon}{2(\delta + |\alpha_0|)^p} + \left(\frac{\varepsilon}{2(d(f_0, 0) + 1)} \right) d(f_0, 0) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{d(f_0, 0)}{d(f_0, 0) + 1} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Con esto queda probado que tanto la suma como el producto por escalar en (L^p, d) son mapeos continuos, por lo tanto es un espacio vectorial topológico.

(c) Sea $V \neq \emptyset$ un subconjunto abierto y convexo en L^p. Sin pérdida de generalidad supongamos que el cero está en V. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r^d(0) \subseteq V$. Tómese

$f \in L^p$. Como $0 < p < 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n^{p-1} d(f, 0) < r. \tag{2.6}$$

Sea $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|^p dt,$$

entonces F es continua y creciente, donde además

$$F(0) = 0 < d(f, 0) = \int_0^1 |f(t)|^p dt = F(1).$$

Entonces se cumple que,

$$F(0) < \frac{d(f, 0)}{n} < F(1).$$

Por el Teorema del Valor Intermedio debe existir un punto $0 < x_1 < 1$ tal que

$$F(x_1) = \frac{d(f, 0)}{n},$$

es decir,

$$\int_0^{x_1} |f(t)|^p dt = \frac{d(f, 0)}{n}.$$

Ahora defínase $F_1 : [x_1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F_1(x) = \int_{x_1}^x |f(t)|^p dt,$$

entonces

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1) &= 0 \\
&< F_1(1) \\
&= \int_{x_1}^{1} |f(t)|^p dt \\
&= \int_{0}^{1} |f(t)|^p dt - \int_{0}^{x_1} |f(t)|^p dt \\
&= F(1) - F(x_1) \\
&= d(f,0) - \frac{d(f,0)}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} d(f,0) \qquad\qquad \text{(con } n > 2\text{)}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$F_1(x_1) = 0 < \frac{d(f,0)}{n} < \frac{n-1}{n} d(f,0) = F_1(1)$$

y de nuevo por el teorema del valor intermedio existe $x_1 < x_2 < 1$ tal que $F_1(x_2) = \frac{d(f,0)}{n}$ y así

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^p dt = \frac{d(f,0)}{n}.$$

De forma análoga podemos encontrar $x_3, x_4, \ldots, x_n$ tales que

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$$

y

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = n^{-1} d(f,0) \qquad \text{con } \ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.7}$$

Definamos para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$g_i(t) = \begin{cases} nf(t) & \text{si } t \in (x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{otro caso ,} \end{cases}$$

entonces, por (2.6) y (2.7) tenemos

$$\begin{aligned}
d(g_i, 0) &= \int_0^1 |g_i(t)|^p dt \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g_i(t)|^p dt \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} n^p |f(t)|^p dt \\
&= n^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt \\
&= n^p \frac{1}{n} \int_0^1 |f(t)|^p dt \\
&= n^{p-1} d(f, 0) \\
&< r,
\end{aligned}$$

de esta manera $g_i \in B_r^d(0) \subseteq V$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Luego, como V es convexo y

$$f = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n),$$

por la proposición 1.10 (a) se sigue que f está en V. Así, $V = L^p$.

(d) Sea $\mathcal{U} = \{U \subset L^p : \ U \text{ es abierto, balanceado y convexo}\}$, entonces por (c), $\mathcal{U} = \{L^p\}$. Por (a) sabemos que (L^p, d) es un espacio métrico y por tanto Hausdorff, además, por (b) tenemos que es un espacio vectorial topológico, sin embargo $\mathcal{U}$ no es una base local para el sistema de vecindades del cero en (L^p, d), entonces, por el teorema 1.2 resulta que (L^p, d) no es localmente convexo.

(e) Otra consecuencia que se tiene del hecho de que los únicos subconjuntos abiertos y convexos sean el vacío y L^p es que el dual de L^p sea sólamente la función 0. En efecto, supongamos que $\Lambda : L^p \longrightarrow Y$ es una transformación lineal y continua de L^p a un espacio localmente convexo Y y sea $\mathcal{B}$ una base local convexa para el cero en Y. Si $W \in \mathcal{B}$ entonces $\Lambda^{-1}(W)$ es convexo por la linealidad de Λ, abierto por la continuidad de Λ y no vacío pues al menos $0 \in \Lambda^{-1}(W)$. Notemos que el único que cumple esto es precisamente L^p, es decir $\Lambda^{-1}(W) = L^p$. En consecuencia $\Lambda(L^p) \subset W$ y esto ocurre para cada $W \in \mathcal{B}$ con lo que concluimos que $\Lambda f = 0$ para toda $f \in L^p$ porque si hubiera $g \in L^p$ tal que $\Lambda(g) = y \neq 0$ entonces, dado que Y es localmente convexo entonces es Hausdorff y por tanto existe $V \in \mathcal{B}$ vecindad del cero tal que $y \notin V$, pero $\Lambda(L^p) \subseteq V$, es decir, $\Lambda(g) \in V$, con lo que se da una contradicción. Por lo tanto $\Lambda \equiv 0$.

Así, hemos llegado a que la función cero es el único mapeo lineal y continuo de L^p con valores en un espacio localmente convexo Y cuando $p \in (0,1)$. En particular, $\mathbb{K}$ es un espacio localmente convexo, por lo tanto

$$(L^p)^* = \{\Psi : L^p \longrightarrow \mathbb{K} \mid \ \Psi \text{ es lineal y continua}\} = \{0\}.$$

$\blacksquare$

Ejemplo 2.2 *Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Considérese*

$$C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \ f \ \textit{es continua}\}$$

con la topología definida por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_K\}_{K \in \mathcal{K}}$ donde

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \tag{2.8}$$

y $\mathcal{K} = \{K \subseteq X : \ K \ \textit{es compacto}\}$. Además supongamos que existe una familia de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, que cumpla $K_n \subseteq K_{n+1}$ y que para cualquier compacto K en X existe un K_n donde $K \subseteq K_n$. Entonces $C(X)$ es un espacio localmente convexo y metrizable.

Demostración: Denotemos por τ la topología de $C(X)$ y por $\tau_{\mathbb{N}}$ la topología determinada por la familia de seminormas $\{p_{K_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Probaremos que $\tau = \tau_{\mathbb{N}}$.

Sea W una vecindad del cero en $\tau_{\mathbb{N}}$ entonces existen

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0 \quad \text{y} \quad p_{K_{i_1}}, \ldots, p_{K_{i_m}} \in \{p_{K_n}\}_{n=1}^{\infty}$$

tales que

$$B = \bigcap_{j=1}^{m} \{f \in C(X) : \ p_{K_{i_j}}(f) < \varepsilon_j\} \subseteq W$$

y como $K_{i_j} \in \mathcal{K}$ para toda $j = 1, \ldots, m$, entonces B es un básico de $\boldsymbol{\tau}$ y así W es vecindad de cero en $\boldsymbol{\tau}$. Recíprocamente, sea V una vecindad del cero en $\boldsymbol{\tau}$, entonces existen $\delta_1, \ldots, \delta_l > 0$ y $K^{(1)}, \ldots, K^{(l)} \in \mathcal{K}$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{l} \{f \in C(X) : \; p_{K^{(j)}}(f) < \delta_j\} \subseteq V.$$

Luego para cada $j = 1, \ldots, l$ existe un $K_{i_j} \in \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $K^{(j)} \subseteq K_{i_j}$ y entonces

$$p_{K^{(j)}}(g) = \underset{x \in K^{(j)}}{sup} |g(x)| \leqslant \underset{x \in K_{i_j}}{sup} |g(x)| = p_{K_{i_j}}(g)$$

con $g \in C(X)$. Así

$$\{f \in C(X) : \; p_{K_{i_j}}(f) < \delta_j\} \subseteq \{f \in C(X) : \; p_{K^{(j)}}(f) < \delta_j\}$$

pues si $g \in \{f \in C(X) : \; p_{K_{i_j}}(f) < \delta_j\}$ entonces $p_{K^{(j)}}(g) \leqslant p_{K_{i_j}}(g) < \delta_j$ y así

$$\bigcap_{j=1}^{l} \{f \in C(X) : \; p_{K^{(j)}}(f) < \delta_j\} \subseteq \bigcap_{j=1}^{l} \{f \in C(X) : \; p_{K^{(j)}}(f) < \delta_j\} \subseteq V,$$

por lo tanto $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{N}}$.

Recordemos que en el ejemplo 1.2 vimos que $(C(X), \boldsymbol{\tau})$ es un espacio locamente convexo y como $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ define la misma topología que $\mathcal{P}$ entonces $(C(X), \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{N}})$ también es un espacio localmente convexo y además la familia de seminormas que lo definen es numerable, entonces por el teorema 2.1, $(C(X), \boldsymbol{\tau})$ es metrizable. ∎

Lema 2.5 *Si G es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $K \subseteq G$ es compacto, entonces $d(K, G^c) >$ 0.*

Demostración: La distancia entre dos conjuntos A, B se define como

$$d(A, B) = inf\{d(a, b) : \; a \in A, \; b \in B\}.$$

Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = d(x, G^c)$. Como K es compacto y f es continua, entonces el ínfimo de las imágenes se alcanza, es decir, si $m = inf\{f(x) : \; x \in K\}$, entonces hay un $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = m$ y por tanto $m > 0$, así

$$d(K, G^c) = inf\{d(x, y) : \; x \in K, \; y \in G^c\} > 0$$

. ∎

Ejemplo 2.3 *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces*

$$C(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es continua}\} \quad y \quad H(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es analítica}\}$$

son metrizables.

Demostración: Para probar esto basta con encontrar una familia de subconjuntos como se describe en el ejemplo 2.2.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$K_n = \{x \in G : \ \|x\| \leqslant n\} \cap \left\{x \in G : \ d(x, G^c) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Primero veamos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Sea $z \in G$, entonces existe n_1 tal que $\|z\| \leqslant n_1$ y como G es un abierto, se tiene que $d(z, G^c) > 0$ y entonces existe n_2 tal que

$$d(z, G^c) \geqslant \frac{1}{n_2}.$$

Si $N = máx\{n_1, n_2\}$, entonces $\|z\| \leqslant N, \ d(z, G^c) \geqslant \frac{1}{N}$ y con esto $z \in K_N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Ahora, como $\mathbb{C}$ es un espacio completo de dimensión finita tenemos que un subconjunto acotado y cerrado es compacto, por tanto probaremos para cada $N \in \mathbb{N}$ que K_N es cerrado y acotado. Claramente K_N es acotado pues $K_N \subseteq B_{N+1}(0)$. Luego, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en K_N que converge a x, así, si $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x\| - \|x_n\| \leqslant \|x - x_n\| < \varepsilon \qquad \text{para toda } n \geqslant N_0$$

y así

$$\|x\| < \varepsilon + \|x_n\| \leqslant \varepsilon + N$$

y como esto se cumple para cada $\varepsilon > 0$, entonces $\|x\| \leqslant N$. Ahora sea $y \in G^c$, luego tomemos un $\varepsilon > 0$, entonces hay un N_0 tal que

$$d(x, y) = |(x_n - y) - (x_n - x)| \geqslant |x_n - y| - |x_n - x| \geqslant \frac{1}{N} - \varepsilon$$

para todo $n \geqslant N_0$ y como esto ocurre para cada $\varepsilon > 0$, entonces $d(x, y) \geqslant \frac{1}{N}$ para cada $y \in G^c$, por tanto $d(x, G^c) \geqslant \frac{1}{N}$ y así el punto límite x está en K_N, por lo tanto K_N es cerrado.

Ahora tómese $K \subseteq G$ compacto, entonces al ser acotado existe N_1 tal que $\|x\| \leqslant N_1$ para todo $x \in K$ y como es un compacto contenido en un abierto, por el lema 2.5, hay un N_2 tal que

$$d(K, G^c) \geqslant \frac{1}{N_2}.$$

Se toma N como el máximo entre N_1 y N_2 y así $K \subseteq K_N$.

También notemos que la familia $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente. Si y está en K_n para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|y\| \leqslant n \leqslant n+1 \qquad \text{y} \qquad d(y, G^c) \geqslant \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

y entonces $K_n \subseteq K_n + 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por último, sabemos que $\mathbb{C}$ es localmente compacto y Hausdorff y como G es abierto, entonces G también es localmente compacto y Hausdorff. Así, aplicando el ejemplo 2.2 con la familia $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, resulta que $C(G)$ es metrizable con la topología determinada por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_K\}_{K \in \mathcal{K}}$ definidas en (2.8). Y como $H(G)$ es subespacio de $C(G)$, entonces $H(G)$ también es metrizable. ■

La misma construcción hecha para G puede realizarse para un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ pues $\mathbb{R}^n$ también es completo respecto a la métrica usual. Usando la misma notación, analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4 *Sea Ω un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ y considérese el conjunto de funciones infinitamente diferenciables*

$$C^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ \partial^{\alpha} f \in C(\Omega)\}$$

donde

$$\partial^{\alpha} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f\right) \cdots\right)$$

y α es el multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ cuyo orden se define como

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Defínase para cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$q_N(f) = \textit{máx}\{|\partial^{\alpha} f(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\},$$

entonces $\mathcal{Q} = \{q_N\}_{N=0}^{\infty}$ *es una familia numerable de seminormas en* $C^{\infty}(\Omega)$ *que lo hace un espacio localmente convexo metrizable.*

Demostración: Sabemos que $C^{\infty}(\Omega)$ es un espacio vectorial por la linealidad del operador ∂, entonces queda probar que $\mathcal{Q}$ es una familia de seminormas separante.

Es claro que $q_N(f) \geqslant 0$ para toda $f \in C^{\infty}(\Omega)$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, si $f_0 \equiv 0$ entonces $\partial^{\alpha} f_0 \equiv 0$ para toda $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, por tanto $q_N(f) = 0$ para toda $N = 0, 1, 2, \ldots$. Ahora tomemos $f, g \in C^{\infty}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} q_N(\beta f) &= máx\{|\partial^{\alpha}(\beta f)(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \\ &= máx\{|\beta||\partial^{\alpha} f(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \text{ por la linealidad de } \partial^{\alpha}. \\ &= |\beta| máx\{|\partial^{\alpha} f(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \\ &= |\beta| q_N(f) \end{aligned}$$

y también, por la linealidad de ∂^{α},

$$\begin{aligned} q_N(f+g) &= máx\{|\partial^{\alpha}(f+g)(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \\ &= máx\{|\partial^{\alpha} f(x) + \partial^{\alpha} g(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \\ &\leqslant máx\{|\partial^{\alpha} f(x)| + |\partial^{\alpha} g(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \\ &\leqslant máx\{|\partial^{\alpha} f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} + máx\{|\partial^{\alpha} g(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} \\ &= q_N(f) + q_N(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{Q}$ sí es una familia de seminormas. Luego, si $f \in C^{\infty}(\Omega)$ y $f \neq 0$ entonces hay un $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y como Ω es abierto y f es continua, también existe un abierto A tal que $x_0 \in A \subseteq \Omega$ en el que $f(x) \neq 0$ para toda $x \in A$. Dado que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n(f) > 0$, de aquí se sigue que $\mathcal{Q}$ es separante y que hace de $C^{\infty}(\Omega)$ un espacio localmente convexo. Además, $\mathcal{Q}$ es numerable y por el teorema 2.1, $C^{\infty}(\Omega)$ también es metrizable. ■

Definición 2.1 *Un F-espacio es un espacio vectorial topológico X cuya topología está definida por una métrica d invariante por traslaciones tal que* (X, d) *es completo.*

Definición 2.2 *Se dice que X es un espacio de Fréchet cuando es un F-espacio que además es localmente convexo. En otras palabras, si X es un espacio localmente convexo, metrizable, completo y cuya métrica sea invariante bajo traslaciones, entonces X es un espacio de Fréchet.*

Podemos ver que algunos de los espacios que se mencionaron antes son de Fréchet.

Observación 2.2 *Consideremos G un abierto de $\mathbb{C}$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $C(G)$, $H(G)$ y $C^\infty(\Omega)$ son espacios de Fréchet mientras que L^p con $0 < p < 1$ sólo es F-espacio.*

Demostración:

- Ya sabemos que $C(G)$ es un espacio localmente convexo y metrizable. Recordemos que esta métrica se tiene del teorema 2.1 y se define como

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \tag{2.9}$$

  y por la proposición 2.1 tenemos que es invariante bajo traslaciones. Así, para ver que $C(G)$ es de Fréchet falta ver que es completo.

  Recordemos del lema 2.3 que una sucesión $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge a cero respecto a d si y sólo si $p_{K_n}(f_j) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomemos una sucesión de Cauchy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $C(G)$, entonces $d(f_j, f_k) \longrightarrow 0$ cuando $j, k \longrightarrow \infty$ y por la manera en que definimos la métrica d se tiene que $p_{K_n}(f_j - f_k) \longrightarrow 0$ cuando $j, k \longrightarrow \infty$. Luego, dado $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe un índice $J = J(\varepsilon, n)$ tal que $p_{K_n}(f_j - f_k) < \varepsilon$ para toda $j, k \geqslant J$. Así,

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leqslant \underset{x \in K_n}{sup} |f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

  para toda $x \in K_n$ y para toda $j, k \geqslant J$. y con esto tenemos que $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en el compacto K_n, por lo tanto existe un límite f en K_n el cual es continuo. Como esto ocurre para cada $n = 1, 2, \ldots$ y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de compactos cuya unión es G, entonces podemos extender f en G y tenemos que es continua. Luego $(C(G), d)$ es completo y por tanto es de Fréchet.

- En el caso de $H(G)$ también basta ver que sea completo para que sea de Fréchet y la prueba es similar. Si tomamos una sucesión de Cauchy $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ resulta que es uniformemente de Cauchy en cada compacto de G y luego, igual que en $C(G)$, por la completitud de $\mathbb{C}$ tenemos que existe un límite g y por el teorema de la convergencia analítica (ver [8] teorema 3.1.8 p. 191) se tiene que este límite debe ser analítico en G y por lo tanto $H(G)$ es completo.

- En cuanto a $C^\infty(\Omega)$, tenemos que si $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, existe $J = J(\varepsilon, N)$ tal que para todo $i, j \geqslant J$ entonces $q_N(f_i - f_j) < \varepsilon$, así, para toda $x \in K_N$ y $|\alpha| \leqslant N$ tenemos que

$$|\partial^\alpha f_i(x) - \partial^\alpha f_j(x)| \leqslant \underset{x\in K_N, |\alpha|\leqslant N}{sup} |\partial^\alpha f_i(x) - \partial^\alpha f_j(x)| < \varepsilon$$

para todo $i, j \geqslant J$, entonces $\{\partial^\alpha f_j\}_{j=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en K_N para toda α con $|\alpha| \leqslant N$, esto es, $\{\partial^\alpha f_j\}_{j=1}^\infty$ converge uniformemente en K_N para toda $|\alpha| \leqslant N$. En particular para $\alpha = 0$, entonces $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ converge uniformemente en compactos de Ω y para cualquier multi-índice α, $\{\partial^\alpha f_j\}_{j=1}^\infty$ converge uniformemente en compactos de Ω. Usando un resultado clásico del Análisis elemental (ver [14] teorema 7.17 p. 152) que establece que si una sucesión de funciones diferenciables tiene la propiedad de *que la sucesión de sus derivadas de primer orden convergen uniformemente en un compacto y la sucesión de las funciones converge por lo menos en un punto*, entonces la sucesión converge uniformemente a una función límite f, la cual es diferenciable y la sucesión de derivadas converge a la derivada de f. Con esto tendremos la existencia de una función f definida en Ω la cual es infinitamente diferenciable y también se tiene que

$$\partial^\alpha f_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha f \tag{2.10}$$

uniformemente en compactos de Ω para cada multi-índice α. Claramente f está en $C^\infty(\Omega)$, además (2.10) implica que para todo $N = 0, 1, 2, \ldots,$

$$sup\{|\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha f(x)| : \ x \in K_N, |\alpha| \leqslant N\} = q_N(f_j - f) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir,

$$f_j \longrightarrow f \text{ en } (C^\infty(\Omega), d).$$

Por lo tanto $(C^\infty(\Omega), d)$ es completo y con ello un espacio de Fréchet.

- En el ejemplo 2.1 vimos que en efecto, L^p es un espacio métrico completo, cuya métrica es invariante por traslaciones. Además vimos que la suma y producto por escalar son continuos respecto a la topología que determina d y por tanto podemos decir que L^p es un F-espacio, sin embargo también vimos que no es localmente convexo y por ello no llega a ser un espacio de Fréchet.

■

Definición 2.3 *Sea X un espacio vectorial topológico y $B \subseteq X$. Diremos que B es acotado si para cada abierto U tal que $0 \in U$, existe un $\varepsilon_U > 0$ tal que*

$$\varepsilon_U B \subseteq U.$$

A continuación observaremos que esta definición es similar a la que tenemos sobre conjuntos acotados cuando el espacio es normado.

Observación 2.3 *Sea X un espacio normado y $B \subseteq X$. Entonces B es acotado si y sólo si*

$$sup\{\|b\| : \ b \in B\} < \infty.$$

Demostración: Supongamos que B es acotado y sea $U = \{x \in X : \ \|x\| < 1\}$, el cual es abierto y contiene al cero. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B \subseteq \frac{1}{\varepsilon}U$. Luego, para cada $b \in B$, $b = \frac{1}{\varepsilon}u$ para algún $u \in U$ y así

$$\|b\| = \frac{1}{\varepsilon}\|u\| < \frac{1}{\varepsilon}$$

para todo $b \in B$, por lo tanto el $sup\{\|b\| : \ b \in B\} < \infty$.

Recíprocamente, si V es un abierto en X que contiene al cero, entonces hay un $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq V$. Luego tenemos que hay un $M > 0$ tal que $\|b\| \leqslant M$ para toda $b \in B$, esto es,

$$B \subseteq B_{2M}(0) = \frac{2M}{r}B_r(0) \subseteq \frac{2M}{r}V$$

y entonces

$$\frac{r}{2M}B \subseteq V.$$

Por tanto B es acotado. ■

Observación 2.4 *Si $\| \ \|$ es una norma en X, entonces $\{x \in X : \ \|x\| < 1\}$ es acotado.*

Demostración: Es claro que el $sup\{x \in X : \ \|x\| < 1\} < \infty$ y por la observación 2.3, en efecto, el conjunto es acotado. ■

Definición 2.4 *Sea V un espacio vectorial, W un subconjunto de V y p una seminorma en V. Se dice que p es una seminorma acotada en W cuando existe $R > 0$ tal que*

$$p(w) \leqslant R \text{ para toda } w \in W.$$

Observación 2.5 *Sea Y un espacio localmente convexo generado por la familia separante de seminormas $\mathcal{P}$ y sea $A \subseteq Y$. Entonces A es acotado si y sólo si para toda $p \in \mathcal{P}$, p es acotada en A.*

Demostración: Supóngase que A es un acotado de Y y p una seminorma cualquiera en $\mathcal{P}$. Como A es acotado, si tomamos el sub-básico

$$U = \{y \in Y : \ p(y) < 1\}$$

entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon A \subseteq U$, o bien que

$$A \subseteq \frac{1}{\varepsilon} U,$$

de esta manera, para algún $u \in U$ se tiene que

$$p(a) = p\left(\frac{1}{\varepsilon} u\right) = \frac{1}{\varepsilon} p(u) < \frac{1}{\varepsilon}$$

y esto se cumple para toda $a \in A$, por tanto p es acotada en A.

Por otro lado, supongamos que p es acotada en A para toda $p \in \mathcal{P}$, es decir, para cada $p \in \mathcal{P}$ habrá un $R_p > 0$ tal que

$$p(a) \leqslant R_p \text{ para toda } a \in A. \tag{2.11}$$

Probaremos que A es acotado. Sea U una vecindad abierta del cero en Y, entonces existen $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in Y : \ p_i(y) < \varepsilon_i\} \subseteq U.$$

Luego, por (2.11), tenemos que para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$p_i(a) \leqslant R_{p_i} \ \text{ para toda } a \in A.$$

Así, si $R = máx\{R_{p_1}, \dots, R_{p_n}\}$ entonces

$$p_i(a) \leqslant R \ \text{ para toda } A \in A \text{ y para toda } i = 1, \dots, n \tag{2.12}$$

Además, consideremos $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ y sea $M = \dfrac{\varepsilon}{R}$ entonces, por (2.12),

$$p_i(a) < \frac{\varepsilon}{M} \ \text{ para toda } a \in A \text{ y para toda } i = 1, \dots, n,$$

luego

$$p_i(Ma) < \varepsilon \ \text{ para toda } a \in A \text{ y para toda } i = 1, \dots, n$$

y así

$$Ma \in \{y \in Y : \ p_i(y) < \varepsilon_i\} \ \text{ para toda } a \in A \text{ y para toda } i = 1, \dots, n,$$

es decir,

$$MA \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in Y : \ p_i(y) < \varepsilon_i\} \subseteq U,$$

por lo tanto A es acotado. ■

Observación 2.6 *Si p es una seminorma en X, en general no es cierto que $\{x \in X : p(x) < 1\}$ sea acotado.*

Discusión: Consideremos $X = C(\mathbb{R})$ topologizado como en el ejemplo 2.2, es decir, con la familia de compactos $\{[-n, n]\}_{n=1}^{\infty}$ y con la familia de seminormas $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde

$$p_n(f) = sup\{|f(t)| : \ t \in [-n, n]\}.$$

Tomemos p_1, entonces el conjunto $A = \{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_1(f) < 1\}$ es no acotado porque si consideramos la función continua

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ 4t - 4 & \text{si } t \in (1, \frac{3}{2}) \\ 2 & \text{si } t \geqslant \frac{3}{2} \ , \end{cases}$$

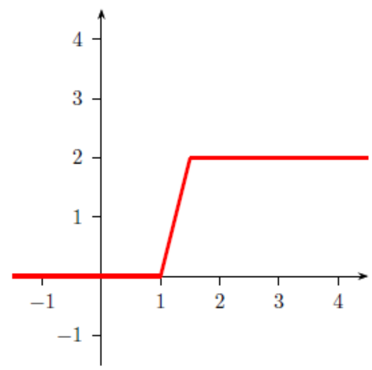


Figura 2.1

tenemos que

$$B = \{\alpha f_0 : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \{f : \ p_1(f) < 1\} = A$$

y si $V = \{g : \ p_2(g) < 1\}$ entonces V es una vecindad abierta del cero tal que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon B = B \nsubseteq V,$$

ya que si $f \in \varepsilon B$ luego $f = \varepsilon \alpha f_0$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, en particular para $\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon}$ se tiene que

$$p_2(f) = p_2(\varepsilon \alpha f_0) = p_2(f_0) = 2 > 1.$$

Con esto tenemos que B no es acotado y por lo tanto A tampoco lo es.

Lema 2.6 *Sea X un espacio localmente convexo, B un subconjunto acotado de X y $x_0 \in X$. Entonces $B + x_0$ también es acotado.*

Demostración: Sea $\mathcal{P}$ la familia de seminormas que define la topología de espacio localmente convexo de X y sea $p \in \mathcal{P}$. Por la observación 2.5 se tiene que p es acotada en B, esto es, existe $M_p > 0$ tal que

$$p(b) \leqslant M_p \ \text{ para toda } b \in B,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} p(b + x_0) &\leqslant p(b) + p(x_0) \\ &\leqslant M_p + p(x_0) \end{aligned}$$

para cada $b \in B$, por tanto $B + x_0$ también es acotado. ■

Lema 2.7 *Sea X un espacio localmente convexo respecto a la familia de seminormas $\mathcal{Q} = \{q_i\}_{i\in\Lambda}$ y sea p una seminorma continua en X. Si para cada $q \in \mathcal{Q}$ existe $\alpha > 0$ tal que*

$$q \leqslant \alpha p,$$

entonces la topología generada por p coincide con la topología de X.

Demostración: Tómese un sub-básico de X, digamos $\{x \in X : \ q(x) < \varepsilon\}$. Por hipótesis existe $\alpha = \alpha(q)$ tal que $q \leqslant \alpha p$, entonces efectivamente, p genera la misma topología que $\mathcal{Q}$ pues la colección

$$\mathcal{C} = \{\{x \in X : \ p(x) < r\} : \ r > 0\}$$

es una base local del cero para la topología en X ya que para $r = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$ se tiene que

$$\left\{x \in X : \ p(x) < \frac{\varepsilon}{\alpha}\right\} \subseteq \{x \in X : \ q(x) < \varepsilon\},$$

pues si $p(x) < \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$ entonces

$$q(x) \leqslant \alpha p(x) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Ahora, si para algún $\delta > 0$ tomamos $\{x \in X : \ p(x) < \delta\}$, tendremos que es abierto en la topología respecto a $\mathcal{Q}$ pues es la imagen inversa del abierto $(-\infty, \varepsilon)$ y p es continua. ■

Teorema 2.2 *Sea X un espacio localmente convexo, entonces X es normable si y sólo si posee un subconjunto abierto, acotado y no vacío.*

Demostración: $(\Rightarrow)$

Sea n una norma en X, luego $\{x \in X : \ n(x) < 1\}$ es abierto y además, por la observación 2.4 también es acotado.

$(\Leftarrow)$

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio localmente convexo y que A es un subconjunto abierto, acotado y no vacío de X. Por el lema 2.6 podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es vecindad del cero. Recordemos por el teorema 1.2 que

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X : \ U \text{ es abierto, balanceado y convexo}\}$$

es una base para el sistema de vecindades del cero. Entonces existe un conjunto V en $\mathcal{U}$ tal que $V \subseteq A$, luego V es abierto en X y por la observación 1.10 tenemos que V es absorbente en cada uno de sus puntos, así, V cumple con las cuatro propiedades que nos pide la proposición 1.12, por ello, existe una única seminorma continua p en X tal que

$$\{x \in X: \ p(x) < 1\} = V \subseteq A.$$

Ahora probaremos que p es una norma que define la topología de X. Sea $x \in X$ distinta del cero. Por la proposición 1.1, si X es localmente convexo entonces es Hausdorff y por ello existen W_0 y W_x vecindades abiertas y disjuntas del cero y de x respectivamente. Luego, como A es acotado, tenemos un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon V \subseteq \varepsilon A \subseteq W_0.$$

Sin embargo, $\varepsilon V = \{y \in X: \ p(y) < \varepsilon\}$ y puesto que $x \notin W_0$, entonces $p(x) \geqslant \varepsilon > 0$ y en consecuencia p es una norma.

Falta ver que p define la topología de X y para ello, por el lema 2.7 será suficiente mostrar que si q es cualquier seminorma en $\mathcal{Q}$, (donde $\mathcal{Q}$ es la familia que define la topología de espacio localmente convexo de X) entonces hay un escalar positivo α tal que $q \leqslant \alpha p$.

Como q es continua, por (a) y (b) de la proposición 1.6, el conjunto $\{x \in X: \ q(x) < 1\}$ es abierto y como A es acotado, existe $\delta_q > 0$ tal que

$$\delta_q\{x \in X: \ p(x) < 1\} = \delta_q V \subseteq \delta_q A \subseteq \{x \in X: \ q(x) < 1\}.$$

Esto significa que si $p(y) < \delta_q$ entonces $q(y) < 1$. Ahora tomemos cualquier $x \in X$ y $\beta > 0$ arbitrario. Consideremos el elemento $\dfrac{\delta_q x}{p(x) + \beta}$, entonces

$$p\left(\frac{\delta_q x}{p(x) + \beta}\right) = \frac{\delta_q}{p(x) + \beta} p(x) < \delta_q,$$

por lo tanto $q\left(\dfrac{\delta_q x}{p(x) + \beta}\right) < 1$, esto es,

$$\delta_q q(x) < p(x) + \beta \quad \text{para toda } \beta > 0.$$

Entonces $\delta_q q(x) \leqslant p(x)$, o bien, $q(x) \leqslant \dfrac{1}{\delta_q} p(x)$. Así, hemos encontrado el escalar α tal que $q \leqslant \alpha p$ y nótese que α depende de q pues $\alpha = \dfrac{1}{\delta_q}$ y entonces hay un escalar para cada $q \in \mathcal{Q}$. Luego, como p es una norma en X, en particular también es una seminorma continua en X y así, por el lema 2.7, la topología generada por p, coincide con la topología de X, es decir, con la generada por la familia separante $\mathcal{Q}$, por lo tanto X es normable. ■

En siguiente ejemplo veremos como podemos descartar la posibilidad de que un espacio sea normable haciendo uso de este teorema.

Ejemplo 2.5 *Consideremos el espacio $C(\mathbb{R})$ topologizado con la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $p_n(f) = \sup\limits_{t\in[-n,n]} |f(x)|$. Entonces $(C(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ es metrizable mas no normable.*

Demostración: Efectivamente, la familia $\{[-n, n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ tal que su unión son todos los reales y para cualquier compacto K en $\mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_0}$, sin olvidar que $\mathbb{R}$ es localmente compacto y Hausdorff. Así, apoyándonos una vez más en el ejemplo 2.2, se tiene que $C(\mathbb{R})$ es un espacio localmente convexo metrizable.

En la observación 2.6 vimos que el abierto $\{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_1(f) < 1\}$ era no acotado. Sin embargo, ahora necesitamos probar que para cualquier abierto que se tome en $C(\mathbb{R})$, éste no podrá ser acotado.

Observemos que $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n \leqslant \ldots$, por lo que si U es una vecindad abierta del cero entonces existen $\varepsilon > 0$ y $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n} \in \mathcal{P}$ donde $p_{i_1} \leqslant \cdots \leqslant p_{i_n}$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_j}(f) < \varepsilon\} \subseteq U$$

y como $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_j}(f) < \varepsilon\} = \{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_n}(f) < \varepsilon\}$, entonces

$$\{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_n}(f) < \varepsilon\} \subseteq U$$

pero $\{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_n}(f) < \varepsilon\}$ es no acotado ya que por la observación 2.6 tenemos que $\{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_n}(f) < 1\}$ es no acotado, es decir, si V es una vecindad abierta del cero, entonces para todo $\delta > 0$ tenemos que

$$\delta\{f \in C(\mathbb{R}) : \ p_{i_n}(f) < 1\} \nsubseteq V, \tag{2.13}$$

o bien, que para todo $\delta > 0$

$$\{f \in C(\mathbb{R}) : \; p_{i_n}(f) < \delta\} \nsubseteq V.$$

Así, sea $\lambda > 0$, entonces para $\delta = \lambda\varepsilon$, por (2.13) se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda\{f \in C(\mathbb{R}) : \; p_{i_n}(f) < \varepsilon\} &= \{f \in C(\mathbb{R}) : \; p_{i_n}(f) < \lambda\varepsilon\} \\ &= \{f \in C(\mathbb{R}) : \; p_{i_n}(f) < \delta\} \\ &\nsubseteq V. \end{aligned}$$

Por lo tanto U tampoco puede ser acotado. Así, ningún abierto en $(C(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ puede ser acotado y por el teorema 2.2 concluimos que $(C(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ no es normable. ■

Capítulo 3

El Teorema de Banach-Alaoglu

En este capítulo abordaremos el teorema de Banach-Alaoglu, el cual nos afirma que la bola unitaria cerrada en el dual de un espacio normado es compacta respecto a una topología en particular que resulta ser la topología débil*, misma de la que ya hablamos en el ejemplo 1.6. Recordemos que en un espacio normado la condición necesaria y suficiente para que la bola unitaria cerrada sea compacta, es que el espacio normado tenga dimensión finita. Es esta restricción la que hace que el Teorema de Banach-Alaoglu cobre gran importancia en el Análisis.

Consideremos X un espacio normado y X^* su dual. En los ejemplos 1.5 y 1.6 vimos maneras de topologizar a X y a X^*. Recordemos que la topología débil en X era aquella donde la familia de seminormas era $\{p_f\}_{f\in X^*}$ y

$$p_f(x) = |f(x)|.$$

Luego, la topología débil* para X^* consistía en la topología generada por la familia $\{p_x\}_{x\in X}$ donde para cada $f \in X^*$,

$$p_x(f) = |f(x)|.$$

Y así como X tiene la topología débil, X^* también tiene su topología débil puesto que también es un espacio normado donde la norma es la que definimos en (1.8), es decir, es aquella generada por la familia de seminormas $\{p_F\}_{F\in X^{**}}$, donde para cada $f \in X^*$,

$$p_F(f) = |F(f)|.$$

La topología débil para X^* se denota por $\sigma(X^*, X^{**})$. Notar que es distinta a la topología débil*, sin embargo hay una relación entre estas dos y la topología respecto a la norma en

X^*, dicha relación la probaremos a continuación, pero antes mencionaremos como podemos incluir a X en X^{**} en la siguiente definición.

Definición 3.1 *Tomemos X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, X^* su espacio dual y X^{**} el espacio dual de X^*. Sea $\mathbf{i} : X \longrightarrow X^{**}$ una función definida como*

$$\mathbf{i}(x) = F_x,$$

donde $F_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$, la cual se define para cada $f \in X^*$ por

$$F_x(f) = f(x).$$

A la función $\mathbf{i}$ se le conoce como la inclusión canónica.

Observación 3.1 *Sea X un espacio normado y X^* su espacio dual. Entonces la topología débil* es más débil que la topología débil para X^* y esta última es a su vez más débil que la topología definida por la norma $\| \ \|_{X^*}$. Dicho de otra forma, se cumplen las siguientes contenciones:*

$$\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\| \ \|_{X^*}}.$$

Demostración: Para probar la primer contención bastará ver que los sub-básicos de $\sigma(X^*, X)$ son abiertos en $\sigma(X^*, X^{**})$. Tomemos $\{f \in X^* : \ p_x(f) < \varepsilon\}$, luego, por la definición 3.1, para cada $x \in X$ tenemos una funcional $F_x \in X^{**}$ y entonces

$$\begin{aligned} \{f \in X^* : \ p_x(f) < \varepsilon\} &= \{f \in X^* : \ |f(x)| < \varepsilon\} \\ &= \{f \in X^* : \ |F_x(f)| < \varepsilon\} \\ &= \{f \in X^* : \ p_{F_x}(f) < \varepsilon\}, \end{aligned}$$

donde $\{f \in X^* : \ p_{F_x}(f) < \varepsilon\}$ es un sub-básico de $\sigma(X^*, X^{**})$ y con eso terminamos.
La segunda contención se obtiene aplicando la observación 1.6 al espacio normado X^*. $\blacksquare$

Definición 3.2 *Sean X y Y espacios normados y sea $f : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal. Decimos que f es una transformación lineal acotada si existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X \text{ para toda } x \in X.$$

Luego, definimos el siguiente espacio de funciones:

$$L(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \mid \ T \text{ es una transformación lineal y acotada}\}.$$

A continuación vamos a considerar X y Y espacios de Banach, esto es, espacios normados y completos respecto a dicha norma y los dotaremos con algunas topologías.

Ejemplo 3.1 *Para cada $x \in X$ sea $e_x : L(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ un operador tal que, para $T \in L(X,Y)$*

$$e_x(T) = \|T(x)\|_Y.$$

$\{e_x\}_{x\in X}$ es una familia de seminormas que hacen de $L(X,Y)$ un espacio localmente convexo.
Llamaremos a esta topología como la topología fuerte de operadores.

Demostración: Sea $x \in X$, es claro que $e_x(T) \geqslant 0$ para toda $T \in L(X,Y)$ y si $T_0 \equiv 0$, entonces $e_x(T_0) = 0$. Luego, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, por las propiedades de la norma $\| \ \|_Y$ se tiene que

$$e_x(\alpha T) = |\alpha| e_x(T)$$

y que

$$e_x(T_1 + T_2) \leqslant e_x(T_1) + e_x(T_2).$$

Luego, si T es distinta de la transformación cero, entonces existe $x \neq 0$ tal que $T(x) = y \neq 0$ y como $\| \ \|_Y$ es norma, entonces

$$\begin{aligned} e_x(T) &= \|T(x)\|_Y \\ &= \|y\|_Y \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Con esto llegamos a que $\{e_x\}_{x\in X}$ es una familia de seminormas separante, lo que implica que $L(X,Y)$ es localmente convexo con la topología que determina esta familia. ■

Ejemplo 3.2 *Consideremos $x \in X$, $f \in Y^*$ y sea $p_{x,f} : L(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$p_{x,f}(T) = |f(T(x))|.$$

Entonces $\{p_{x,f}\}_{(x,f)\in X\times Y^*}$ es una familia de seminormas donde $L(X,Y)$ es localmente convexo con la topología generada por ella.
A esta topología también se le conoce por la topología débil de operadores.

Demostración: Sea $x \in X$ y $f \in Y^*$, si $T_0 \equiv 0$, entonces

$$\begin{aligned} p_{x,f}(T_0) &= |f(T_0(x))| \\ &= |f(0)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

por la linealidad de f. Luego, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $T_1, T_2 \in L(X,Y)$ entonces

$$\begin{aligned} p_{x,f}(\alpha T) &= |f(\alpha T(x))| \\ &= |\alpha f(T(x))| \\ &= |\alpha| p_{x,f}(T) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_{x,f}(T_1 + T_2) &= |f(T_1(x) + T_2(x))| \\ &= |f(T_1(x)) + f(T_2(x))| \\ &\leqslant |f(T_1(x))| + |f(T_2(x))| \\ &= p_{x,f}(T_1) + p_{x,f}(T_2). \end{aligned}$$

Finalmente, si $T \neq 0$ entonces existe $x \neq 0$ tal que $T(x) = y \neq 0$. Luego para este y, por el teorema 1.1 existe $f \in Y^*$ tal que $f(y) = t \neq 0$ y así

$$p_{x,f}(T) = |f(T(x))| = |f(y)| = |t| \neq 0.$$

Por tanto $L(X,Y)$ también es localmente convexo con esta familia de seminormas. ∎

Los nombres de las topologías de los ejemplos anteriores se deben a los conceptos de convergencia fuerte y convergencia débil. Veamos esto en la siguiente observación.

Observación 3.2 *Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una red en $L(X,Y)$ y sea $T \in L(X,Y)$, entonces:*

(*a*) *La convergencia en $L(X,Y)$ con la topología débil de operadores es equivalente a que para cada $x \in X$, $T_\alpha(x) \longrightarrow T(x)$ débilmente en Y.*

(*b*) *$T_\alpha \longrightarrow T$ fuertemente, es decir, en la topología fuerte de operadores, si y sólo si $T_\alpha(x) \longrightarrow T(x)$ en la topología de la norma de Y para toda $x \in X$.*

Demostración:

(a) Que $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ converja en la topología débil de operadores a T significa que para cada $x \in X$ y $f \in Y^*$ se tenga que $p_{x,f}(T_\alpha - T) \longrightarrow 0$ esto es, que

$$\text{para cada } x \in X \text{ y } f \in Y^*: \quad |f(T_\alpha(x) - T(x))| \longrightarrow 0$$

y por la linealidad de f es equivalente a

$$\text{para cada } x \in X \text{ y } f \in Y^*: \quad |f(T_\alpha(x)) - f(T(x))| \longrightarrow 0,$$

esto si y sólo si para cada $x \in X$, $T_\alpha(x) \longrightarrow T(x)$ débilmente en Y.

(b) Ahora, la convergencia fuerte de operadores es que

$$\text{para cada } x \in X: \quad e_x(T_\alpha - T) \longrightarrow 0,$$

esto se entiende como

$$\text{para cada } x \in X: \quad \|T_\alpha(x) - T(x)\|_Y \longrightarrow 0$$

y esto ocurre si y sólo si

$$\text{para cada } x \in X\text{: } T_\alpha(x) \longrightarrow T(x) \text{ en la norma de } Y.$$

■

Hay que notar que la convergencia en la topología de la norma en $L(X,Y)$ es equivalente a la convergencia respecto a la norma $\|\ \|_Y$ en subconjuntos acotados de X pues

$$T_\alpha \longrightarrow T \ \text{ en } \|\ \|_{L(X,Y)} \ \text{ si y sólo si } \ \underset{\|x\|_X \leqslant 1}{sup} \|T_\alpha(x) - T(x)\|_Y \longrightarrow 0.$$

También podemos advertir que si $T_\alpha \longrightarrow T$ en $(L(X,Y), \|\ \|_{L(X,Y)})$, entonces para cada $x \in X$, $T_\alpha(x) \longrightarrow T(x)$ en $(Y, \|\ \|_Y)$, es decir, se cumple la convergencia fuerte de operadores en $L(X,Y)$. Luego, sabemos que la convergencia débil en Y se deduce de la convergencia en $(Y, \|\ \|_Y)$ por la continuidad de las funcionales en Y^* y como vimos en la observación previa, la convergencia débil es equivalente a la convergencia débil de operadores en $L(X,Y)$. Con esto concluimos que la topología de la norma $\|\ \|_{L(X,Y)}$ es más fuerte que la topología fuerte de operadores en $L(X,Y)$, la cual es más fuerte que la topología débil de operadores en $L(X,Y)$.

El siguiente resultado nos proporciona condiciones suficientes para que una sucesión en $L(X,Y)$ converja fuertemente.

Proposición 3.1 *Sea una sucesión* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $L(X,Y)$ *tal que* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|_{L(X,Y)} < \infty$ *y sea* $T \in L(X,Y)$. *Si para cada* y *en un subconjunto denso* D *de* X *tenemos que*

$$\|T_n(y) - T(y)\|_Y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces $T_n \longrightarrow T$ *fuertemente, es decir, en la topología fuerte de operadores.*

Demostración: Sea $C = máx\{\|T\|, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|\}$. Dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, por la densidad de D podemos escoger $y \in D$ tal que

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Luego, por hipótesis tenemos $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant N$

$$\|T_n(y) - T(y)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

entonces

$$\begin{aligned} e_x(T_n - T) &= \|T_n(x) - T(x)\|_Y \\ &\leqslant \|T_n(x) - T_n(y)\|_Y + \|T_n(y) - T(y)\|_Y + \|T(y) - T(x)\|_Y \\ &\leqslant \|T_n\|_{L(X,Y)}\|x - y\|_X + \frac{\varepsilon}{3} + \|T\|_{L(X,Y)}\|x - y\|_X \\ &< 2C\frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y esto implica que $T_n \longrightarrow T$ en la topología fuerte de operadores de $L(X,Y)$. ■

Finalmente mostraremos el teorema principal de este capítulo donde se muestra la utilidad de la topología débil* en un espacio dual.

Teorema 3.1 ***(Banach-Alaoglu)*** *Sea* X *un espacio normado. Entonces la bola unitaria cerrada*

$$B^* = \{f \in X^* : \ \|f\| \leqslant 1\}$$

en X^* *es compacta en la topología débil*.*

Demostración: Para cada $x \in X$ definimos

$$\begin{aligned} D_x &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant \|x\|\} \\ &= \overline{B}^{\mathbb{R}^2}_{\|x\|}((0,0)) \end{aligned}$$

y sea $D = \prod_{x \in X} D_x$. Como D_x es compacto en $\mathbb{C}$, se sigue del Teorema de Tychonoff que D también es compacto con la topología producto. Luego, notemos que cada elemento de D es un arreglo de elementos en el plano complejo que dependen de X, dicho de otra forma,

$$\begin{aligned} D &= \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f(x) \in D_x\} \\ &= \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ |f(x)| \leqslant \|x\|\} \end{aligned}$$

y también notemos que $B^* = \{f \in D : \ f \text{ es lineal}\}$.

Recordemos que la topología producto en D es la topología más débil que hace continuas a las proyecciones, es decir, es la topología generada por las proyecciones $\Pi_x : D \longrightarrow D_x$ con $x \in X$ tales que

$$\Pi_x(f) = f(x).$$

Por esto, la topología relativa que B^* hereda de la topología producto de D y la topología débil* de X^* coinciden con la topología de la convergencia puntual. Así, para probar que B^* es compacta en la topología débil* bastará ver que B^* es cerrada en D. En efecto, si $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una red en B^* que converge a $f \in D$, entonces para cualesquiera $x, y \in X$ y $a, b \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(ax + by) &= lim \ f_\alpha(ax + by) \\ &= lim \ (af_\alpha(x) + bf_\alpha(y)) \\ &= af(x) + bf(y), \end{aligned}$$

entonces f está en B^* y con esto B^* es cerrada. ■

A continuación veremos una consecuencia del Teorema de Banach-Alaoglu muy importante que se utiliza frecuentemente y cuya prueba requiere de los siguientes lemas.

Lema 3.1 *Sea Y un espacio topológico compacto. Si existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas (real valuadas) que separa puntos en Y, entonces Y es metrizable.*

Demostración: Para la prueba necesitaremos el siguiente resultado:

Sean τ_1 y τ_2 topologías para un espacio X donde τ_1 hace de X un espacio Hausdorff y donde τ_2 hace de X un espacio compacto. Supóngase además que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $\tau_1 = \tau_2$. (Ver [13] preliminar (a) p. 62)

Sea τ la topología de Y (es decir, la que lo hace compacto). Sin pérdida de generalidad supóngase que $|f_n| \leqslant 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y sea τ_d la topología inducida en X por la métrica

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Sabemos que d es métrica gracias a que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ separa puntos. Luego, como cada f_n es continua respecto a τ y la serie converge uniformemente en $X \times X$, d es una función continua respecto a τ en $X \times X$ y entonces, las bolas

$$B_r(x) = \{y \in X : \ d(x,y) < r\}$$

son abiertas respecto a τ. Así, $\tau_d \subseteq \tau$ y como τ_d es inducida por una métrica, entonces τ_d es Hausdorff y por el resultado que mencionamos al inicio de la prueba tenemos entonces que $\tau = \tau_d$, por lo tanto Y es metrizable. ■

Lema 3.2 *Sea X un espacio normado separable y X^* su dual dotado con la topología débil* y sea $K \subseteq X^*$ un compacto, entonces K es metrizable.*

Demostración: Como X es separable existe un subconjunto denso y numerable al cual denotaremos por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $f_n : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f_n(\Lambda) = \Lambda(x_n).$$

Cada f_n es débil*-continua por la definición de la topología débil*.

Notemos también que la familia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ separa puntos en X^*, pues si $f_n(\Lambda) = f_n(\Lambda')$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Lambda(x_n) = \Lambda'(x_n) \ \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

y por densidad y continuidad de Λ se tiene que $\Lambda = \Lambda'$. Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de funciones continuas que separa puntos en X^* y del lema 3.1 se sigue que K es metrizable. ■

Teorema 3.2 *Sea X un espacio normado separable y sea $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en la topología de la norma de X^*. Entonces hay una subsucesión $\{\phi_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge en la topología débil* de X^*.*

Demostración: Tenemos que $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada, luego existe $M > 0$ tal que

$$\|\phi_j\|_{X^*} \leqslant M.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $M = 1$ y con esto $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ se encuentra dentro de la bola unitaria cerrada B^* de X^*, luego, por el Teorema de Banach-Alaoglu ésta es compacta en la topología débil*. Así, por el lema 3.2 se tiene que B^* es metrizable. Luego, recordando que en un espacio métrico la compacidad y la compacidad secuencial son equivalentes, entonces $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ debe tener una subsucesión $\{\phi_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente respecto a la topología débil* de X^*. ∎

Capítulo 4

Aplicaciones y La Clase de Schwartz

El objetivo de este capítulo es utilizar las herramientas y resultados presentados en los capítulos anteriores para mostrar algunas descripciones de cierto tipo de funciones en el disco unitario del plano complejo. También estudiaremos un espacio funcional muy importante en la Teoría de distribuciones y el Análisis de Fourier, a saber, la clase de Schwartz.

4.1. Aplicaciones

Primero nos concentraremos en funciones definidas en el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ cuya frontera es el toro $T = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} = \{e^{it} : \ t \in \mathbb{R}\}$. La notación de D y T la usaremos en el resto del capítulo y un hecho del que nos auxiliaremos será el siguiente:

> *Toda función $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ induce una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-periódica definida como $F(t) = f(e^{it})$. De manera recíproca, toda función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que sea 2π-periódica inducirá una función $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante $f(e^{it}) = F(t)$. De hecho bastará considerar a F definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ e identificaremos a T con $[-\pi, \pi]$.*

Definición 4.1 *Sea $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es una función esencialmente acotada si existe el siguiente ínfimo:*

$$inf\{sup\{|f(t)| : \ t \in E\} : \ E \text{ Lebesgue-medible con } \mu(E^c) = 0\},$$

es decir, que f esté acotada casi en todas partes. En caso de que este ínfimo exista, se le denota por $\|f\|_\infty$.

En lo que sigue del capítulo necesitaremos mencionar algunos espacios de funciones que denotaremos a continuación:

$$\begin{aligned}
C(T) &= \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es continua y } 2\pi\text{-periódica}\}, \\
L^p(T) &= \left\{ f : T \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es Lebesgue-medible y } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\} \\
& \quad \text{donde } 1 \leqslant p < \infty, \\
L^\infty(T) &= \{f : T \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es esencialmente acotada}\}.
\end{aligned}$$

Además, debemos recordar lo que es una función armónica y mencionar algunos resultados que emplearemos más adelante. Las demostraciones de estos resultados que son clásiscos en Análisis Complejo pueden consultarse en el Capítulo I del libro [7].

Definición 4.2 *Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, es una función armónica en Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en Ω, donde Δ es el operador Laplaciano, es decir, que u cumpla con*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Proposición 4.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto.*

(*a*) *Toda función holomorfa en Ω es armónica en Ω.*

(*b*) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω, dada por $f = u + iv$, con u, v funciones reales. Entonces u y v son armónicas.*

(*c*) *Si además, Ω es simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real en $C^2(\Omega)$, entonces u es armónica si y sólo si existe una función analítica $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $Re(f) = u$.*

Proposición 4.2 *Sea $u : D(0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica donde $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ con $R > 0$. Entonces u tiene una representación en serie de la forma*

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \tag{4.1}$$

con $r \in [0, R)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$, y esta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0, R)$.

Demostración: Tenemos que el disco $D(0,R)$ es un dominio simplemente conexo, entonces, por (c) de la proposición 4.3 se tiene que existe una función analítica $F : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(F) = u$. Ahora, sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ con } c_k \in \mathbb{C}$$

la representación en serie de potencias de F que por el Teorema de Taylor (ver [8] teorema 3.2.7 p. 208) sabemos que converge uniformemente en compactos de $D(0,R)$ (ver [8] teorema 3.2.1 p. 204).

Así, si utilizamos la forma polar de $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$, tenemos

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta}$$

con $r \in [0, R)$.

Luego,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{F(re^{i\theta}) + \overline{F(re^{i\theta})}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} r^k e^{-ik\theta}\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \end{aligned}$$

donde

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\overline{c_{-k}} & \text{si } k < 0 \\ \frac{1}{2}(c_0 + \overline{c_0}) = \mathrm{Re}(c_0) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{2}c_k & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

con $r \in [0, R)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$. Así, hemos llegado a la representación que queríamos y además tenemos que la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0,R)$ ya que es la suma de dos series que convergen uniformemente en compactos de $D(0,R)$. ■

Notar que si $R > 1$, por la proposición 4.2 tendríamos que la representación de u en serie es válida para $r = 1$. Tal representación viene siendo

$$u(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

con $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Ahora, u está definida en T, por tanto podemos identificarla con una función 2π-periódica φ de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{C}$ como

$$\varphi(t) = u(e^{it})$$

y como en este caso u es continua, entonces φ también lo es y entonces φ está en $L^1(T)$, luego los coeficientes de Fourier $\hat{\varphi}$ de φ están definidos para cada $k \in \mathbb{Z}$ como

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}u(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}\right]dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}e^{int}dt \quad \left(\begin{array}{c}\text{por la convergencia} \\ \text{uniforme de la serie}\end{array}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt \\
&= a_k
\end{aligned}$$

por tanto, para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}u(e^{it})dt. \tag{4.2}$$

Hay que notar que los coeficientes a_k's vienen de (4.1) y son los mismos para toda $r \in [0, R)$ y toda $\theta \in [-\pi, \pi]$, por tanto podemos sustituir (4.2) (encontrados gracias a tomar el particular caso en que $r = 1$) en (4.1), y así

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}u(e^{it})dt\right)r^{|k|}e^{ik\theta}$$

con $r \in [0, R)$, sin embargo, para $r \in [0, 1)$ tenemos convergencia uniforme en la serie y podemos hacer que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}\right)u(e^{it})dt \tag{4.3}$$

siempre que r esté en $[0, 1)$.

Ahora consideremos la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}.$$

Dicha serie converge uniformemente si $r \in [0, 1)$, entonces podemos hacer el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z^k) \qquad \text{(para } z = re^t\text{)} \\
&= 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k\right] \\
&= 2\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z}\right] \\
&= 2\mathrm{Re}\left[\frac{1+z}{2(1-z)}\right] \\
&= 2\mathrm{Re}\left[\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2}\right] \\
&= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{|1-r\cos t - ir\,\mathrm{sen}\,t|^2} \\
&= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}.
\end{aligned}$$

Llegando a esto ya podemos continuar con la siguiente definición.

Definición 4.3 *Sea* $r \in [0,1)$*, definimos* $P_r : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *para cada* $t \in [-\pi,\pi]$ *como*

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}.$$

A esta función se le conoce como el núcleo de Poisson para el disco unitario D*.*

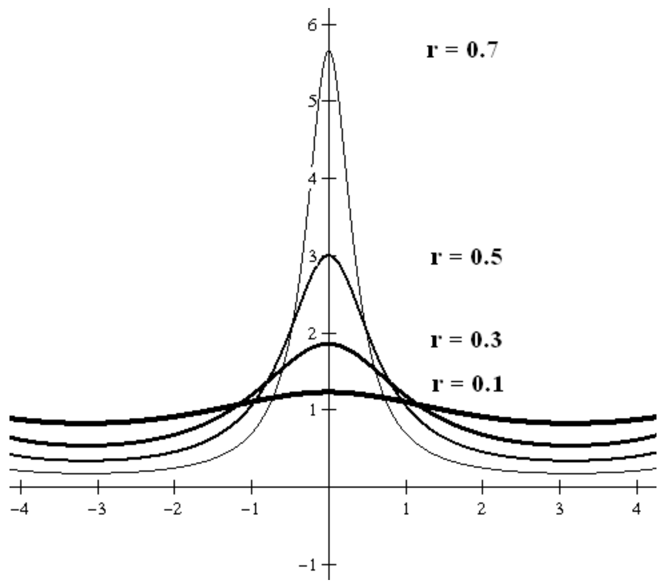


Figura 4.1: El núcleo de Poisson para algunos valores de r.

La siguiente proposición es otra manera de representar a una función armónica, diferente a la que vimos en la proposición 4.2, donde ahora la función podrá tomar valores en $\mathbb{C}$ pero cuya región de armonicidad debe poseer un disco $D(0,R)$ con $R > 1$.

Proposición 4.3 ***(Representación de Poisson en discos de radio*** $R > 1$***)*** *Sea* $u : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función armónica con* $R > 1$*. Entonces*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt$$

para $r \in [0,1)$ *y* $\theta \in [-\pi,\pi]$*.*

Demostración: A diferencia de la proposición 4.2, ahora u tomará valores en $\mathbb{C}$, sea pues, $u = v + iw$ donde $v = \mathrm{Re}(u)$ y $w = \mathrm{Im}(u)$.

Sabemos que si u es armónica entonces v y w también deben serlo. Así, primero aplicaremos los resultados anteriores a v y a w por separado.

Entonces, por la proposición 4.2, existen coeficientes b_k's y d_k's tales que

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k r^{|k|} e^{ik\theta} \qquad \text{y} \qquad w(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k r^{|k|} e^{ik\theta}$$

y como ya vimos, estos son coeficientes de Fourier y de la misma manera que obtuvimos (4.3), tenemos para $r \in [0, 1)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$ que

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right) v(e^{it}) dt \tag{4.4}$$

y

$$w(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right) w(e^{it}) dt. \tag{4.5}$$

Luego por la definición 4.3 del núcleo de Poisson tenemos

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) v(e^{it}) dt$$

$$w(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) w(e^{it}) dt$$

siempre que $r \in [0, 1)$ y entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= v(re^{i\theta}) + iw(re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) v(e^{it}) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) w(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)(v + iw)(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt \end{aligned}$$

■

Definición 4.4 *Sea f una función definida en el toro T. Luego, para $r \in [0, 1)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$ diremos que la convolución*

$$(P_r * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

es la integral de Poisson de f o bien, la representación de Poisson de f y la denotaremos por $P(f)$.

El siguiente Lema enlista algunas propiedades importantes del núcleo de Poisson. Su demostración puede consultarse en [7] p. 6-7.

Lema 4.1 *El núcleo de Poisson $P_r(t)$ tiene las siguientes propiedades:*

i) Para cada $r \in [0,1)$ fijo, $P_r(t)$ es una función continua en el toro $T = [-\pi, \pi]$, 2π-periódica, par y positiva.

ii) Para cada $r \in [0,1)$ fijo, se cumple que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$.

iii) $P_r(t) \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ para toda $\delta \in (0, \pi)$.

iv) $P_r(t)$, visto como función de re^{it}, es armónico en D.

Teorema 4.1 *Sea u una función armónica en el disco unitario D tal que*

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty,$$

para algún $1 < p < \infty$. Entonces, existe una función $f \in L^p(T)$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt \equiv (P_r * f)(\theta)$$

para $0 \leqslant r < 1$ y $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.
En conclusión, u es la representación de Poisson de alguna función $f \in L^p(T)$.

Demostración: Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tal que $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ de forma creciente y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = u(r_n e^{it}) \ \text{ para } t \in [-\pi, \pi].$$

Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que

$$\|f_n\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_n e^{it})|^p dt \leqslant K < \infty \ \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$f_n \in B \equiv \{g \in L^p(T) : \ \|g\|_p \leqslant K^{\frac{1}{p}}\} \ \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en la bola cerrada B del espacio $L^p(T)$. Pero $L^p(T)$ es el dual de $L^q(T)$, donde q es el exponente conjugado de p (esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), así pues, $L^p(T)$ es isomorfo a $L^q(T)^*$ (ver [5] p. 190). De hecho, por el Teorema de Representación de Riesz para espacios L^p, los espacios $L^p(T)$ y $L^q(T)^*$ son isométricamente isomorfos bajo la función

$$\phi : L^p(T) \longrightarrow L^q(T)^*$$

definida por $\phi(g) = \Lambda_g$, donde

$$\Lambda_g(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)g(t)dt \quad \text{para toda } h \in L^q(T)$$

(ver [12] p. 284-286). Como $L^p(T) \cong L^q(T)^*$, el Teorema de Banach-Alaoglu nos asegura entonces que la bola cerrada B es compacta en $L^p(T)$ con la topología débil* en $L^q(T)^*$. Además, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y $L^q(T)$ es separable entonces por el teorema 3.2 existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente en B respecto a la topología débil* en $L^q(T)^* \cong L^p(T)$. Denotaremos por $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la subsucesión para aligerar la notación.

Así, tenemos que existe $f \in B \subseteq L^p(T)$ tal que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{en la topología débil* de } L^p(T) \cong L^q(T)^*,$$

esto es,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)f(t)dt \quad \text{para toda } h \in L^q(T).$$

Por otro lado, por el lema 4.1 (i) sabemos que $P_r(\theta - t)$ es una función continua en el toro T para un θ fijo. Por lo tanto $P_r(\theta - t)$ está en $L^q(T)$, pues $C(T) \subseteq L^q(T)$. En consecuencia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la dilatación $u_n(z) = u(r_n z)$ para $z \in D(0, \frac{1}{r_n})$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n es armónica en $D(0, \frac{1}{r_n})$ y $\frac{1}{r_n} > 1$. Luego, por la representación de Poisson en discos de radio > 1 (proposición 4.3) tenemos que

$$u_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u_n(e^{it})dt,$$

esto para toda $n \in \mathbb{N}$, $r \in [0, 1)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$. Es decir,

$$\begin{aligned} u(r_n re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(r_n e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f_n(t)dt \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, $r \in [0,1)$ y $\theta \in [-\pi,\pi]$. Haciendo $n \longrightarrow \infty$, obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt \equiv (P_r * f)(\theta)$$

para $r \in [0,1)$ y $\theta \in [-\pi,\pi]$.

En conclusión, este teorema nos dice que si u es armónica en D y está uniformemente en $L^p(T)$, con $1 < p < \infty$, entonces $u = P(f)$ para alguna función $f \in L^p(T)$. ■

Enseguida examinamos el caso $p = \infty$.

Teorema 4.2 *Sea u una función armónica en el disco unitario D tal que*

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \|u_r\|_\infty < \infty,$$

donde $u_r(t) = u(re^{it})$. Entonces, existe una función $f \in L^\infty(T)$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt \equiv (P_r * f)(\theta)$$

para $0 \leqslant r < 1$ y $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Es decir, u es la representación de Poisson de alguna función $f \in L^\infty(T)$.

Demostración: Sea $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^+$ tal que converja a 1 de manera creciente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$f_n(t) = u(r_n e^{it}) = u_{r_n}(t) \quad \text{para } t \in [-\pi,\pi].$$

Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que

$$\|f_n\|_\infty = \|u_{r_n}\|_\infty \leqslant \sup_{0 \leqslant r < 1} \|u_r\|_\infty \leqslant K < \infty \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$f_n \in B \equiv \{g \in L^\infty(T) : \ \|g\|_\infty \leqslant K\} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ se encuentra en la bola cerrada B del espacio $L^\infty(T)$. Pero $L^\infty(T)$ es el dual de $L^1(T)$ (ver [5] p.190) y $L^1(T)$ es separable. Por el mismo razonamiento usado en la demostración del teorema 4.1 se tiene la existencia de la f buscada. ■

A continuación, mostraremos que los recíprocos de los teoremas previos también son válidos.

Teorema 4.3 *Sea $f \in L^p(T)$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y sea u la integral de Poisson de f, esto es,*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt \equiv (P_r * f)(\theta)$$

para $0 \leqslant r < 1$ y $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Entonces u es armónica en el disco unitario D y además:

(*a*) *Si $1 \leqslant p < \infty$ se tiene*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt$$

para toda $r \in [0,1)$;

(*b*) *si $p = \infty$ se tiene*

$$|u(z)| \leqslant \|f\|_\infty$$

para toda $z \in D$.

Demostración: Veamos que u es armónica en el disco D. Primero consideraremos el caso en que f toma valores reales, así:

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}\right)f(t)dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|}e^{ik\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}f(t)dt \text{ (gracias a la convergencia uniforme de la serie)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|}e^{ik\theta} \end{aligned}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}f(t)dt = \hat{f}(t) \ \text{ para toda } k \in \mathbb{Z}.$$

En particular,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Luego notemos que,

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} r^k e^{-ik\theta} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}} \\
&= Re(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}).
\end{aligned}$$

Esto muestra que para $z = re^{i\theta}$, se tiene que

$$u(z) = Re\left(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right),$$

donde la función $2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ es analítica en D ya que toda serie de potencias es analítica en el interior de su círculo de convergencia (ver [8] p.205) y por la proposición 4.1 (c) se concluye que u es armónica.

Ahora consideraremos el caso en que f toma valores en $\mathbb{C}$, así

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{Re}f(t)dt + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{Im}f(t)dt \\
&= v(re^{i\theta}) + iw(re^{i\theta})
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
v(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{Re}f(t)dt \text{ y} \\
w(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{Im}f(t)dt.
\end{aligned}$$

Y como $\mathrm{Re}f(t)$ e $\mathrm{Im}f(t)$ son funciones a valores reales, por el caso anterior entonces tenemos que v y w son armónicas y por tanto u es armónica. Sólo falta probar (a) y (b). Pero antes recordemos que por hipótesis tenemos que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt$$

y si hacemos un cambio de variable también se puede ver como

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)f(\theta - t)dt.$$

(a) Si $f \in L^p(T)$ con $1 \leqslant p < \infty$, por la desigualdad de Minkowski para integrales (ver [5] p.194), se tiene que

$$\begin{aligned} \|u(re^{i\alpha})\|_p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\|f(\alpha - t)\|_p \, dt \\ &= \|f\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt \\ &= \|f\|_p, \end{aligned}$$

donde α se entiende como la variable con respecto a la cual tomamos la norma.

(b) Por otra parte, si $f \in L^\infty(T)$, entonces

$$\begin{aligned} \|u(re^{i\theta})\|_p &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)|f(\theta - t)|dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

■

4.2. La Clase de Schwartz

En esta sección analizaremos principalmente dos espacios de funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$. El primero será $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y luego será la Clase de Schwartz $\mathcal{S}$, los cuales tienen una especial importancia en el Análisis Matemático.

Como estaremos tratando funciones diferenciables, las cuales vamos a estar derivando, es conveniente definir el conjunto donde una función no se anule y los puntos de acumulación de éste.

Definición 4.5 *Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, entonces el soporte de f se define y se denota como*

$$Sop(f) = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}.$$

(Notar que si $x \notin Sop(f)$ entonces $f(x) = 0$.)

Teniendo claro este concepto, incluiremos la siguiente notación donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$C^k(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid$ *f tiene derivadas parciales continuas de orden k*$\}$.

$$C^{\infty}(X) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(X).$$

$C^k_c(X) = \{f \in C^k(X) \mid Sop(f)$ es compacto en $X\}$.

$C^{\infty}_c(X) = \{f \in C^{\infty}(X) \mid Sop(f)$ es compacto en $X\}$.

Antes de comenzar verifiquemos que el espacio $C^{\infty}_c(\mathbb{R}^n)$ no sólo consta de funciones que se anulan al momento de derivarse, lo cual no es del todo obvio.

Con el propósito de encontrar una función como tal en $C^{\infty}_c(\mathbb{R}^n)$ primero consideraremos la función real f definida como

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

cuya gráfica es como se muestra en la siguiente figura:

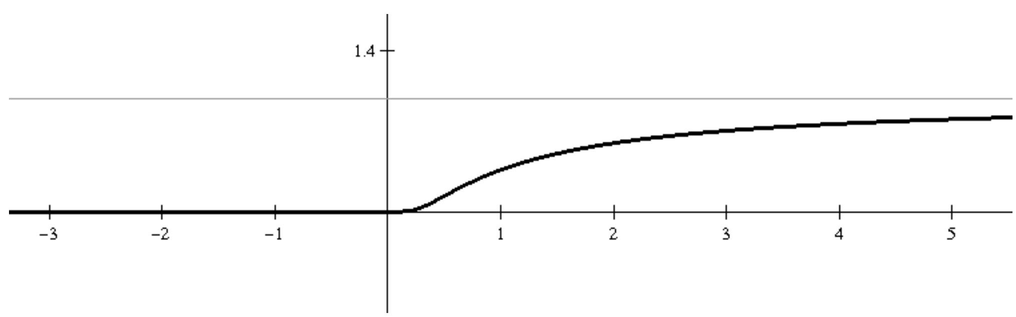


Figura 4.2

Claramente f es diferenciable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y el límite del cociente diferencial en el cero también existe, pues usando la expansión en serie de Taylor de $e^{\frac{1}{t}}$ para $t > 0$ vemos que

$$e^{\frac{1}{t}} \geqslant \frac{1}{2!t^2}$$

lo cual implica que

$$e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 2!t^2,$$

esto es,

$$0 < \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} \leqslant 2!t$$

y así

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

También tenemos que f es acotada, pues de nuevo, usando la expansión en serie de Taylor de la exponencial tendremos para $x > 0$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$x^n e^{-x} \leqslant n! \tag{4.7}$$

y en particular para $n = 0$ se tiene que para $x > 0$

$$e^{-x} \leqslant 1.$$

Así pues, tenemos que si $t > 0$, $f(t) = e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 1$, tal y como se puede apreciar en la figura 4.2.

Ahora analicemos su derivada.

$$f'(t) = \begin{cases} t^{-2} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

la cual es acotada por el mismo criterio que nos da (4.7) pues si $t > 0$ entonces

$$f'(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 2.$$

Además f' es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ ya que para $t > 0$, por (4.7), $e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 4!t^4$ y luego $0 \leqslant \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 4!t$ para toda $t > 0$ y el límite de $4!t$ cuando $t \longrightarrow 0$ es cero. Así, por comparación tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3} = 0.$$

Derivando una vez más, antes de generalizar, tenemos que

$$f''(t) = \begin{cases} -2\left(\frac{1}{t}\right)^3 e^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1}{t}\right)^4 e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

que por (4.7) también es acotada ya que

$$|f''(t)| = \left| -2\left(\frac{1}{t}\right)^3 e^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1}{t}\right)^4 e^{-\frac{1}{t}}\right| \leqslant 2\cdot 3! + 4! = 36$$

y diferenciable pues

$$-2\cdot 5! \leqslant -2\left(\frac{1}{t}\right)^5 e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 0 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \left(\frac{1}{t}\right)^6 e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 6!$$

entonces

$$-2\cdot 5!t \leqslant -2\left(\frac{1}{t}\right)^4 e^{-\frac{1}{t}} \leqslant \left(\frac{1}{t}\right)^5 e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 6!t,$$

luego

$$-2\cdot 5!t \leqslant -2\left(\frac{1}{t}\right)^4 e^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1}{t}\right)^5 e^{-\frac{1}{t}} \leqslant 2\cdot 6!t$$

y con esto el límite del cociente diferencial existe y es cero

$$\lim_{t\to 0} \frac{f''(t)-f''(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(-2\left(\frac{1}{t}\right)^5 e^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1}{t}\right)^5 e^{-\frac{1}{t}}\right) = 0.$$

De la misma manera podemos ver que existen todas las derivadas y que éstas son acotadas ya que por inducción se puede probar que son de la forma

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} c_k \left(\frac{1}{t}\right)^k e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

y entonces

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \left| c_k \left(\frac{1}{t}\right)^k e^{-\frac{1}{t}}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} |c_k| k!.$$

Ahora consideremos la función $\varphi(t) = f(1+t)f(1-t)$, esto es

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-t^2}} & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geqslant 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 4.3.

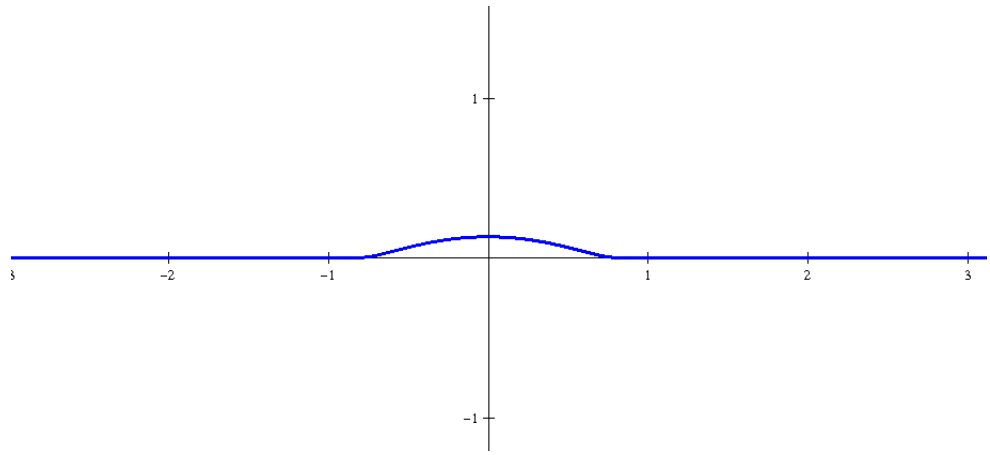


Figura 4.3

Como ya tenemos que f es infinitamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$, luego φ también lo es. Además, su soporte $Sop(\varphi)$ es compacto pues $\overline{\{t \in \mathbb{R}: \ \varphi(t) \neq 0\}} = \overline{(-1,1)} = [-1,1]$ y así afirmamos que φ está en $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Teniendo esto podemos obtener fácilmente variantes n-dimensionales de φ, a continuación unos ejemplos de esto.

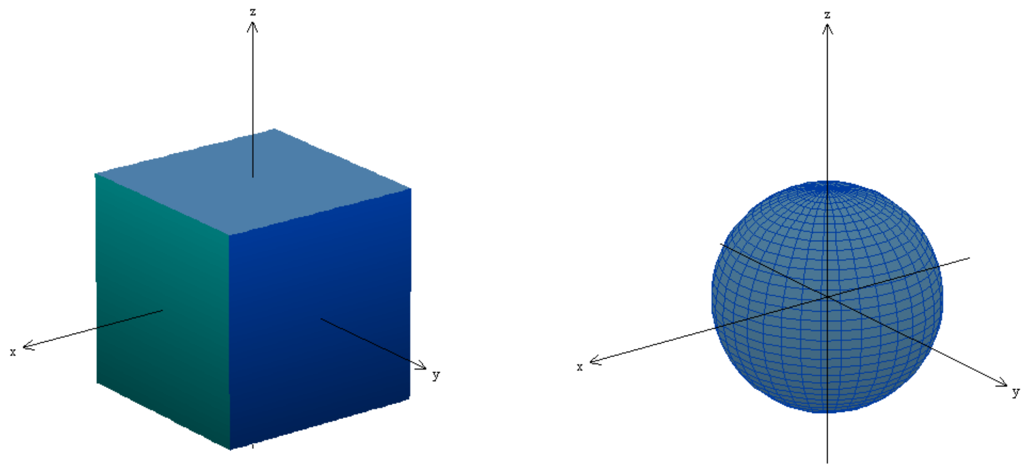
Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donde $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(a) $\psi(x) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)$

(b) $\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$

Notemos que, al ser φ de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, todas las derivadas parciales de todos los órdenes existen y entonces ψ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además como $\varphi(x_i) = 0$ si y sólo si $|x_i| < 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$ entonces $\psi(x) \neq 0$ si y sólo si $|x_i| < 1$ para toda i, es decir, $\psi(x) \neq 0$ si y sólo si x está en el n-cubo abierto con centro en el origen y lado 2. Así, su soporte es compacto y ψ es de la clase $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En el caso de ϕ podemos decir que también es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ viendo a la función como f^2 compuesta con la función $x \longmapsto 1 - |x|^2$, las cuales son $C^\infty(\mathbb{R})$ y $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ respectivamente y con esto ϕ está en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego su soporte es la bola unitaria cerrada, la cual es compacta en $\mathbb{R}^n$, por lo que efectivamente ϕ está en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Con el fin de ilustrar lo anterior, si $n = 3$ los soportes de (a) y (b) se muestran en la figura 4.4.



(a) $Sop(\psi)$ (b) $Sop(\phi)$

Figura 4.4: Soportes de ψ y ϕ

Otra función que consideraremos será

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases} \tag{4.12}$$

que también podemos verla como $f(1-|x|^2)$ y por lo que analizamos para ϕ, entonces θ también es $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuyo soporte también es la bola unitaria cerrada.

Como mencionamos al principio de la sección, la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ es el otro espacio que necesitamos estudiar y se define como

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \text{ para toda } N \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y todo } \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n\}$$

donde para cada $N \in \mathbb{N}$, α multi-índice en $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ la seminorma $\| \ \|_{(N,\alpha)}$ está definida mediante

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{sup} \{(1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)|\}.$$

Veamos que en efecto, $\| \ \|_{(N,\alpha)}$ es una seminorma. Es claro que $\|f\|_{(N,\alpha)} \geqslant 0$ y si $f_0 \equiv 0$ entonces $\|f_0\|_{(N,\alpha)} = 0$. Además, si $\beta \in \mathbb{C}$ y $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces por la linealidad del operador ∂^α tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\beta f\|_{(N,\alpha)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha(\beta f)(x)|\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\beta||\partial^\alpha f(x)|\} \\
&= |\beta|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)|\} \\
&= |\beta|\|f\|_{(N,\alpha)}
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{(N,\alpha)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha(f+g)(x)|\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)+\partial^\alpha g(x)|\} \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N(|\partial^\alpha f(x)|+|\partial^\alpha g(x)|)\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)|+(1+|x|)^N|\partial^\alpha g(x)|\} \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)|\right\}+\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\partial^\alpha g(x)|\} \\
&= \|f\|_{(N,\alpha)}+\|g\|_{(N,\alpha)}.
\end{aligned}$$

De hecho, para todo $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y para todo multi-índice α $\|\;\|_{(N,\alpha)}$ es una norma. Para $\alpha=0$, si $\|f\|_{(N,\alpha)}=0$ entonces

$$(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)|=0$$

para toda $x\in\mathbb{R}^n$ y como $(1+|x|)^N\neq 0$ para cualquier $x\in\mathbb{R}^n$ y toda $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ entonces queda que $|f(x)|=|\partial^\alpha f(x)|=0$ para toda $x\in\mathbb{R}^n$, por tanto $f\equiv 0$. Ahora supongamos $|\alpha|>0$. Igual que antes, $|\partial^\alpha f(x)|=0$ si $\|f\|_{(N,\alpha)}=0$. Esto implica que f es un polinomio de grado menor a $|\alpha|$ pero como $f\in\mathcal{S}$ esto nos dice que f decae rápidamente en infinito y la única posibilidad para f es que f sea el polinomio 0.

A continuación algunos ejemplos de funciones en $\mathcal{S}$.

Ejemplo 4.1 *Sean $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ y $f_\alpha:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones definidas como*

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= e^{-\delta|x|^2} \quad \textit{con } \delta>0 \\
f_\alpha(x) &= x^\alpha e^{-|x|^2} \quad \textit{con } \alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n
\end{aligned}$$

entonces φ y f_α están en $\mathcal{S}$. Sin embargo, $\gamma:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(x)=e^{-\delta|x|} \quad \textit{con } \delta>0$$

no pertenece a $\mathcal{S}$.

Nota: Para $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ multi-índice en $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se define x^β como

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}.$$

Demostración: φ es la composición de $x \longmapsto -\delta|x|^2$ y $t \longmapsto e^t$, donde ambas son infinitamente diferenciables en sus respectivos dominios, entonces φ también lo es y así $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora hay que ver que $(1 + |x|)^N |\partial^\alpha \varphi(x)|$ esté acotada para cada cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

Sin pérdida de generalidad supongamos $\delta = 1$. Con un argumento similar al que usamos para calcular las derivadas de (4.6) en (4.10) podemos obtener que

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \sum_{\substack{i \in F_\alpha \\ F_\alpha \text{ finito}}} P_i(x) e^{-|x|^2}$$

donde $P_i(x)$ es un polinomio.

Por el Teorema de Taylor sabemos que $P_i(x)e^{-|x|^2}$ es acotado en $\mathbb{R}^n$ para cada $i \in F_\alpha$ y repitiendo este argumento vemos que $(1+|x|)^N \partial^\alpha \varphi(x)$ está acotado para cada N y cada α ya que el acotamiento de cualquier polinomio P es equivalente a acotar $(1+|x|)^N$, luego $\varphi \in \mathcal{S}$.

En el caso de f_α, tenemos que es el producto de x^α la cual, por su definición resulta ser de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y φ con $\delta = 1$ que ya vimos que está en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto f_α también lo está. El mismo argumento de antes muestra que para cada N y α $\|f_\alpha\|_{(N,\alpha)} < \infty$ para afirmar que $f_\alpha \in \mathcal{S}$.

En cuanto a la función ψ notemos que no es diferenciable en el origen, así no está en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y por tanto tampoco en $\mathcal{S}$. ■

Observación 4.1 *El conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ es subespacio de la clase de Schwartz.*

Demostración: Para probar esta contención primero probaremos que las derivadas de una función $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ también tienen soporte compacto. Para cualesquier α ya tenemos que *Sop*$(\partial^\alpha f)$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ y por el Teorema de Heine-Borel falta ver que sea acotado para que sea compacto. Para ello bastará ver que está contenido en $Sop(f)$. Sea $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y sea $x \in (Sop(f))^c$, el cual es abierto dado que $Sop(f)$ es cerrado. Entonces hay un abierto V tal que $x \in V \subseteq (Sop(f))^c$. Tomando $y \in V$ tenemos que $f(y) = 0$ y además

$$\partial^{e_j} f(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y + he_j) - f(y)}{h} = 0$$

para cualquier $j = 1, \ldots, n$. De esta manera, si seguimos derivando, para cualquier multi-índice α, obtenemos que $\partial^\alpha f(y) = 0$ para cada $y \in V$, con esto tenemos la existencia de una vecindad de x tal que

$$V \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ \partial^\alpha f(x) \neq 0\} = \emptyset,$$

por lo tanto $x \in (Sop(\partial^\alpha f))^c$ y así $Sop(\partial^\alpha f) \subseteq Sop(f)$.
Ahora tomemos cualquier par (N, α). Sabemos que si $x \notin Sop(\partial^\alpha f)$ entonces

$$(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| = 0$$

y por otro lado, como $Sop(\partial^\alpha f)$ es compacto y $(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$ es continua entonces hay un $M > 0$ tal que

$$(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| \leqslant M \text{ para toda } x \in Sop(\partial^\alpha),$$

así obtenemos lo que queríamos, es decir, $\|f\|_{(N,\alpha)} < \infty$ y entonces $f \in \mathcal{S}$. ■

Observación 4.2 *Si f está en $\mathcal{S}$, entonces para cada $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ y cada $p \in [1, \infty]$ se tiene que $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Para $f \in \mathcal{S}$ hay que probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f|^p dx < \infty.$$

Tenemos que para cada par (N, α) hay un $M_{N,\alpha}$ tal que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant M_{N,\alpha} (1 + |x|)^{-N} \ \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

En este caso consideraremos $N > \frac{n}{p}$ y la fijaremos. Por monotonía bastará mostrar que la integral de $(1 + |x|)^{-Np}$ sobre $\mathbb{R}^n$ es finita. Para ello haremos uso de la siguiente fórmula de cambio de coordenadas para integración (ver [5] teorema 2.49 p. 78) para una función Borel-medible y no negativa g y $n > 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\ dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} g(r\sigma) d\sigma r^{n-1} dr \tag{4.13}$$

Ahora,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-Np} dx = \int_{|x|\leqslant 1} (1+|x|)^{-Np} dx + \int_{|x|>1} (1+|x|)^{-Np} dx$$

y como $(1+|x|)^{-Np} \leqslant 1$ entonces

$$\int_{|x|\leqslant 1} (1+|x|)^{-Np} dx \leqslant \int_{|x|\leqslant 1} dx = \mu\left(\overline{B_1(0)}\right) < \infty,$$

donde $\mu\left(\overline{B_1(0)}\right)$ es la medida n-dimensional de Lebesgue de la bola unitaria cerrada que es finita y por tanto falta estimar la segunda parte de la integral. Haciendo el correspondiente cambio de coordenadas con (4.13) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>1} (1+|x|)^{-Np} dx &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} (1+|r\sigma|)^{-Np} d\sigma\ r^{n-1} dr \\
&= \int_1^\infty \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma\right) (1+r)^{-Np} r^{n-1} dr \\
&= |S^{n-1}| \int_1^\infty (1+r)^{-Np} r^{n-1} dr \\
&\leqslant |S^{n-1}| \int_1^\infty r^{n-1-Np} dr,
\end{aligned}$$

donde $|S^{n-1}|$ es la medida superficial de la esfera que también es finita. Así, sólo falta estimar $\int_1^\infty r^{n-1-Np} dr$. Notar que si $b > 1$ y $N > \frac{n}{p}$ entonces $\dfrac{1}{b^{Np-n}} \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} r^{n-1-Np}dr &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} r^{n-1-Np}dr \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{r^{n-Np}}{n-Np}\right)\Big|_1^b \\
&= \frac{1}{n-Np}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{Np-n}}-1\right) \\
&= \frac{1}{Np-n} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-Np}dx < \infty$$

y con ello que $\partial^{\alpha} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposición 4.4 *$\mathcal{S}$ es un espacio de Fréchet con la topología definida por la familia de seminormas* $\{\| \ \|_{(N,\alpha)}\}_{\substack{N\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ \alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n}}$.

Demostración: Claramente tenemos que $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial y puesto que $\mathcal{S}$ se ha topologizado con la familia de seminormas $\{\| \ \|_{(N,\alpha)}\}_{\substack{\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\\ N\in\mathbb{N}\cup\{0\}}}$ entonces es inmediato que $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial topológico por 1.2, una de las primeras observaciones de este trabajo.

Además resulta que $\mathcal{P}$ es separante ya que, como vimos anteriormente, $\| \ \|_{(N,\alpha)}$ es norma para todo multi-índice α y cualquier $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y así si $f \neq 0$ se tiene que $\|f\|_{(N,\alpha)} > 0$ y con esto $\mathcal{S}$ es un espacio localmente convexo. Claramente, $\mathcal{S}$ es metrizable pues su topología está inducida por una familia numerable de seminormas. Sólo falta ver que sea completo para que $\mathcal{S}$ sea espacio de Fréchet. Para ello, recordemos que la convergencia en la métrica inducida por las seminormas es equivalente a la convergencia en cada seminorma.

Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}$, esto es

$$\|f_j - f_k\|_{(N,\alpha)} \underset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para todo multi-índice α y todo $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y por definición de estas seminormas tenemos que dado $\varepsilon > 0$

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{Sup}\{(1+|x|)^N |\partial^\alpha (f_j - f_k)(x)|\} < \varepsilon \quad \text{para todo } j, k \geqslant M$$

para algún $M \in \mathbb{N}$, luego

$$|\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha f_k(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } j, k \geqslant M \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, tenemos que $(\partial^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy y por tanto es uniformemente convergente a una función g_α.

Ahora denotemos por $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ con 1 en el j-ésimo lugar. También denotemos $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \equiv \partial_j$. Consideremos un x_0 fijo en $\mathbb{R}^n$ y tomemos

$$f_k(x_0 + te_j) = f((x_{01}, \ldots, x_{0j} + t, \ldots, x_{0n}))$$

como función de t. Entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_0^t \partial_j f_k(x_0 + se_j) ds = f_k(x_0 + te_j) - f_k(x_0).$$

Haciendo tender $k \longrightarrow \infty$ y recordando que $f_k = \partial^0 f_k$ y su límite es g_0 entonces

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^t \partial_j f_k(x_0 + se_j) ds = g_0(x_0 + te_j) - g_0(x_0).$$

Además tenemos convergencia uniforme, por tanto podemos intercambiar el límite en la integral y como derivamos respecto a la j-ésima componente, es decir, $\alpha = e_j$, entonces $\partial_j f_k$ converge a g_{e_j} y así

$$\int_0^t g_{e_j}(x_0 + se_j) ds = g_0(x_0 + te_j) - g_0(x_0). \tag{4.14}$$

Ahora tomemos el lado izquierdo de (4.14) como función de t, esto es,

$$\varphi(t) = \int_0^t g_{e_j}(x_0 + se_j) ds. \tag{4.15}$$

Notar que $\varphi(0) = 0$ y que φ es diferenciable entonces para $t \neq 0$

$$\frac{1}{t}[\varphi(t) - \varphi(0)] = \frac{1}{t}[g_0(x_0 + te_j) - g_0(x_0)]$$

y luego

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{g_0(x_0-te_j)-g_0(x_0)}{t}\\ &= \partial_j g_0(x_0).\end{aligned}$$

Por otro lado, por el Teorema Fundamental del Cálculo y por (4.15)

$$\varphi'(0) = g_{e_j}(x_0)$$

así,

$$\partial_j g_0(x_0) = g_{e_j}(x_0).$$

Después procedemos por inducción sobre $|\alpha|$ para obtener que $g_\alpha = \partial^\alpha g_0$ para todo multiíndice α. ■

A continuación investigaremos la continuidad de las traslaciones en varios espacios de funciones usando la siguiente notación:

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ y $y \in \mathbb{R}^n$ entonces $(T_y f)(x) := f(x-y)$.

Observación 4.3 *Sea f Lebesgue-medible.*

i) *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $\|T_y f\|_p = \|f\|_p$ para $1 \leqslant p < \infty$.*

ii) $\|T_y f\|_\infty = \|f\|_\infty$.

iii) *f es uniformemente continua si y sólo si $\|T_y f - f\|_\infty \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$.*

Demostración:

i) Considérese $F(x) = |f(x)|^p$, como $f \in L^p$, se sigue que $F \in L^1$ y $F \geqslant 0$. Luego si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $T(x) = x - y$ entonces T es biyectiva en $\mathbb{R}^n$, está en $C^1(\mathbb{R}^n)$ y además

$$J(T(x)) = \frac{\partial T(x)}{\partial x} = \frac{\partial (x-y)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Entonces, por el teorema 2.44 p. 73 en [5],

$$\int F(x)dx = |J(T(x))| \int F \circ T(x)dx, \tag{4.16}$$

es decir,

$$\int |f(x)|^p dx = |J(T(x))| \int |f(T(x))|^p dx = 1 \cdot \int |f(x-y)|^p dx$$

Sacando raíz p-ésima a ambos lados con $1 \leqslant p < \infty$, tenemos que

$$\|T_y f\|_p = \|f\|_p.$$

ii) Si E es un conjunto medible, $E-y$ también lo es y por la invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue, si $\mu(E^c) = 0$ entonces $\mu((E-y)^c) = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} \|T_y f\|_\infty &= inf\{sup\{|f(x-y)| : \ x \in E\} : \ E \text{ medible y } \mu(E^c) = 0\} \\ &= inf\{sup\{|f(z)| : \ z \in E-y\} : \ E \text{ medible y } \mu(E^c) = 0\} \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

iii) Supongamos f uniformemente continua, luego para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x-y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|y| = |x - (x-y)| < \delta$, es decir, ocurre para toda $x \in \mathbb{R}^n$ siempre que $|y| < \delta$, por lo tanto

$$\|f - T_y f\|_\infty = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{Sup} |f(x) - T_y f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

esto es, $\|f - T_y f\|_\infty$ converge a cero cuando $y \to 0$.

Recíprocamente, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x-y)| \leqslant \|f - T_y f\|_\infty < \varepsilon \ \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora, si x_1, x_2 son tales que $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces, haciendo $y = x_1 - x_2$ luego $x_1 - y = x_2$ y por lo anterior

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_1 - y)| < \varepsilon$$

y así llegamos a que f es uniformemente continua.

■

Lema 4.2 *Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, como f es continua, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $|y| < \delta_x$ entonces $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, como $Sop(f)$ es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_m$ tales que

$$Sop(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\delta_{x_j}}(x_j).$$

Sea $\delta = min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_m}\}$, entonces $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, por tanto $\|T_y f - f\|_\infty \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$ y por la observación 4.3 en $iii)$ tenemos que f es uniformemente continua.
$\blacksquare$

Proposición 4.5 *Si* $1 \leqslant p < \infty$*, la traslación es continua en la norma de* $L^p(\mathbb{R}^n)$*, esto es, si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $z \in \mathbb{R}^n$ *entonces*

$$\lim_{y \to 0} \|T_{y+z} f - T_z f\|_p = 0.$$

Demostración: Dado que $T_{y+z} = T_y \circ T_z$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z = 0$ por lo que tendremos que $f = T_z f$.

Primero, notamos que si $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $R > 0$ tal que $Sop(g) \subseteq B_R(0)$ y para $|y| \leqslant 1$ las funciones $T_y g$ tienen su soporte contenido en un compacto común K, a decir $K = \overline{B_{R+1}(0)}$. Luego, por la observación 4.3 $iii)$ tenemos que para $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ entonces $\|T_y g - g\|_\infty < \left(\frac{\varepsilon}{\mu(K)}\right)^{\frac{1}{p}}$ y de aquí

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_y g - g|^p dx &= \int_K |T_y g - g|^p dx + \int_{K^c} |T_y g - g|^p dx \\
&= \int_K |T_y g - g|^p dx \\
&\leqslant \int_K \sup_{x \in K} |T_y g(x) - g(x)|^p dx \\
&= \sup_{x \in K} |T_y g(x) - g(x)|^p \mu(K) \\
&= \|T_y g - g\|_\infty^p \mu(K) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\|T_y g - g\|_p \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ahora supongamos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y tomemos $\lambda > 0$. Sabemos que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en L^p por el Teorema de Lusin (ver [5] teorema 7.9 p. 217) , luego existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g - f\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$ y por la observación 4.3 en $i)$ tenemos $\|T_y(f-g)\|_p = \|g-f\|_p$ y como T es lineal entonces

$$\begin{aligned} \|T_y f - f\|_p &\leqslant \|T_y(f-g)\|_p + \|T_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|T_y g - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

y para y suficientemente pequeño podemos hacer que $\|T_y g - g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$ entonces

$$\|T_y f - f\|_p < \varepsilon.$$

■

Anteriormente habíamos definido la convolución de P_r y f como la integral de Poisson de f, donde P_r era el núcleo de Poisson para el disco unitario D y f una función esencialmente acotada en el toro T. Enseguida generalizaremos este concepto.

Definición 4.6 *Sean f, g funciones Lebesgue-medibles en $\mathbb{R}^n$. Se define la convolución de f y g para cada $x \in \mathbb{R}^n$ como la función*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \tag{4.17}$$

siempre que la integral exista.

Hay distintas formas de imponer condiciones a f y g para garantizar que $f * g$ esté definida al menos en casi todas partes, es decir, que la integral de (4.17) sea finita casi en todas partes.

Por ejemplo, si f es acotada con soporte compacto y g es localmente integrable (ver definición 1.8), la convolución está definida en todo $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, sea $K_x = x - Sop(f)$ luego K_x es compacto para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy &= \int_{K_x} |f(x-y)||g(y)|dy + \int_{(K_x)^c} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &= \int_{K_x} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &\leqslant M \int_{K_x} |g(y)|dy \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Proposición 4.6 *Sean f y g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$ y considérese $E \subseteq \mathbb{R}^n$ como el conjunto en donde la integral en cuestión es finita para que la convolución tenga sentido.*

(a) $f * g = g * f$.

(b) *Para $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$T_z(f * g) = (T_z f) * g = f * (T_z g).$$

(c) *Si* $A = \overline{\{x + y : \ x \in Sop(f), \ y \in Sop(g)\}}$ *entonces* $Sop(f * g) \subseteq A$.

Demostración:

(a) Haciendo el cambio de variable $z = x - y$ se tiene que

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

(b) Tenemos que

$$T_z(f * g) = (T_z f) * g \tag{4.18}$$

pues

$$\begin{aligned} T_z(f*g)(x) &= (f*g)(x-z) \\ &= \int f(x-z-y)g(y)dy \\ &= \int (T_zf)(x-y)g(y)dy \\ &= ((T_zf)*g)(x) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} T_z(f*g) &= T_z(g*f) && \text{por } (a) \\ &= (T_zg)*f && \text{por } (4.18) \\ &= f*(T_zg) && \text{por } (a). \end{aligned}$$

Finalmente $f*(T_zg) = T_z(f*g) = (T_zf)*g$.

(c) Supongamos que $w \notin A$, entonces para cualquier par $x \in Sop(f)$ y $y \in Sop(g)$ se tiene $w \neq x+y$ o bien, $w-y \neq x$ y así $w-y \notin Sop(f)$, por tanto $f(w-y)=0$ para cualquier $y \in Sop(g)$, con ello $f(w-y)g(y)=0$ si $y \in Sop(g)$ y también, si $y \notin Sop(g)$, entonces $f(w-y)g(y)=0$ y así

$$(f*g)(w) = \int f(w-y)g(y)dy = 0$$

y como A es cerrado, concluimos que $w \in (Sop(f*g))^c$ y luego $Sop(f*g) \subseteq A$.

■

El Teorema de Convergencia Dominada tiene varias consecuencias. En la siguiente proposición emplearemos una en particular que se menciona en el siguiente teorema.

Teorema 4.4 *Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la función $y \mapsto f(x_0,y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_x^\alpha f$ existe en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y además existe una función integrable h en $\mathbb{R}^n$ tal que $|\partial_x^\alpha f(x,y)| \leqslant h(y)$, entonces $F(x) = \int f(x,y)dy$ está en $C^k(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\partial_x^\alpha \int f(x,y)dy = \int \partial_x^\alpha f(x,y)dy,$$

donde $|\alpha| \leqslant k$.

Proposición 4.7 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha g$ acotada siempre que $|\alpha| \leqslant k$, entonces $f*g$ está en $C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha(f*g) = f*(\partial^\alpha g)$ para $|\alpha| \leqslant k$.*

Demostración: Sea $G(x,y) = f(y)g(x-y)$. Vista como función de y tenemos que para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, G es integrable ya que

$$\begin{aligned} \int |G(x_0,y)|dy &= \int |f(y)||g(x_0-y)|dy \\ &\leqslant \int M|f(y)|dy \\ &< \infty \end{aligned}$$

dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además $\partial_x^\alpha G$ existe siempre que $|\alpha| \leqslant k$ pues $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $|\partial_x^\alpha G(x,y)| = f(y)\partial_x^\alpha g(x-y)$. Por último

$$|\partial_x^\alpha G(x,y)| = |f(y)||\partial_x^\alpha g(x-y)| \leqslant M|f(y)|$$

y como f es integrable, ya tenemos todas las condiciones que necesitamos para usar el teorema 4.4. Así, la función $(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int G(x,y)dy \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y para $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha (f*g)(x) &= \partial_x^\alpha \int f(y)g(x-y) \\ &= \partial_x^\alpha \int G(x,y)dy \\ &= \int \partial_x^\alpha G(x,y)dy \\ &= \int f(y)\partial_x^\alpha g(x-y)dy \\ &= (f*\partial_x^\alpha g)(x) \end{aligned}$$

siempre que $|\alpha| \leqslant k$. ■

Usaremos la convolución para mostrar una aplicación muy importante, pero antes de ello, introduciremos la siguiente notación: dada una función ϕ en $\mathbb{R}^n$ y $t>0$ se define ϕ_t en $\mathbb{R}^n$ como $\phi_t(x) := t^{-n}\phi(t^{-1}x)$.

Obsérvese que si $\phi \in L^1$, entonces la integral de ϕ_t es independiente de t por el Teorema de Cambio de Variable, esto es, si $T(x) = t^{-1}x$ entonces

$$\int \phi_t(x)dx = \int t^{-n}\phi(T(x))dx = t^{-n}\int \phi(T(x))dx = \int \phi(x)dx.$$

Otro aspecto notable de esta composición es que la masa de ϕ_t se concentra en el origen conforme t tiende a cero. Un ejemplo a mostrar en $\mathbb{R}$ puede ser $\phi(x) = e^{-x^2}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{1}{2}}(x) &= 2e^{-4x^2} \\ \phi_{\frac{1}{4}}(x) &= 4e^{-16x^2} \end{aligned}$$

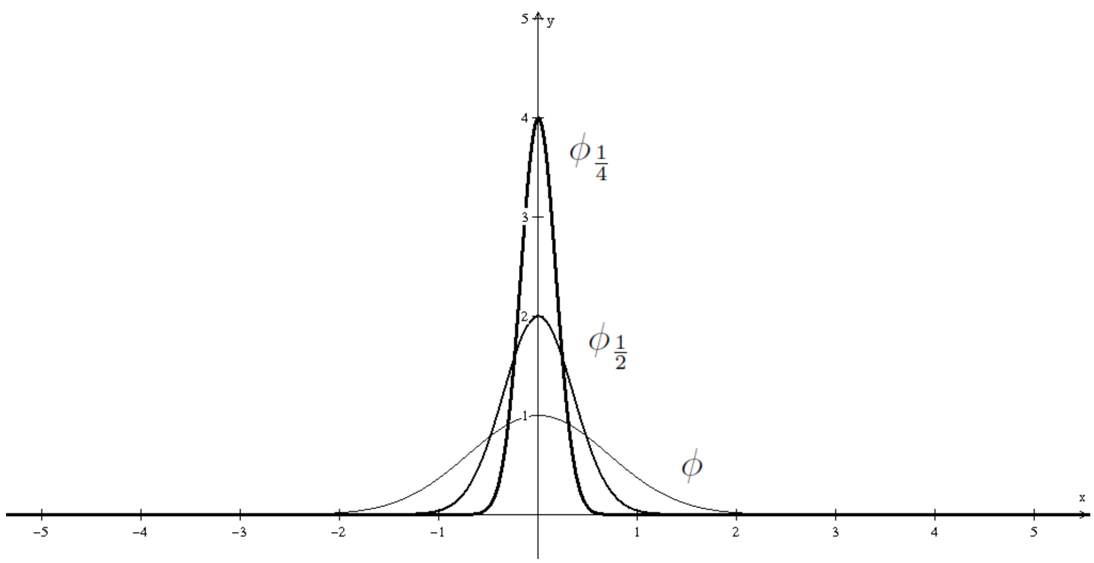


Figura 4.5

Para ver otro ejemplo consideremos

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \\ 0 & \text{si } x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right), \end{cases}$$

entonces

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 2\cos(2x) & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \\ 0 & \text{si } x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \infty\right), \end{cases}$$

$$\varphi_{\frac{1}{4}}(x) = \begin{cases} 4\cos(4x) & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \\ \\ 0 & \text{si } x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{\pi}{8}, \infty\right), \end{cases}$$

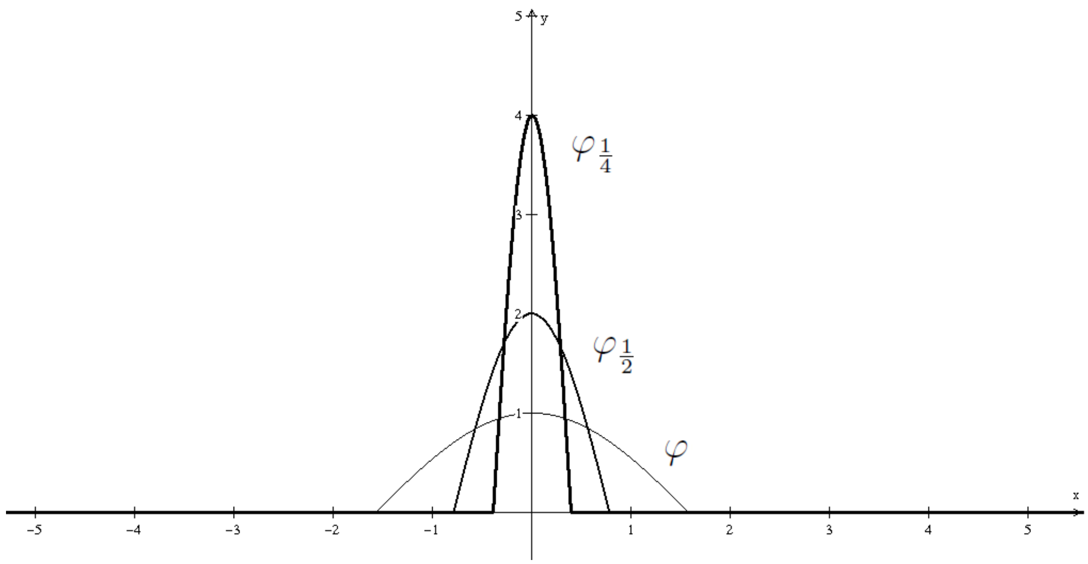


Figura 4.6

Teorema 4.5 *Sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y supóngase que $\int \phi = a$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leqslant p < \infty$, entonces $f * \phi_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} af$ en la norma de L^p.*

Demostración: Haciendo el cambio de variable $y = tz$ y recordando que $\int \phi_t = \int \phi = a$, tenemos

$$\begin{aligned} f * \phi_t(x) - af(x) &= \int f(x-y)\phi_t(y)dy - f(x)\int \phi_t(y)dy \\ &= \int \phi_t(y)(f(x-y) - f(x))dy \\ &= \int \phi_t(tz)(f(x-tz) - f(x))|t^n|dz \\ &= \int \phi(z)(T_{tz}f(x) - f(x))dz. \end{aligned}$$

Después, aplicamos la Desigualdad Integral de Minkowski (ver [5] teorema 6.19 (a) p. 194) para obtener

$$
\begin{aligned}
\|f*\phi_t - af\|_p &= \left(\int \left|\int (T_{tz}f(x)-f(x))\phi(z)dz\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int \left(\int |T_{tz}f(x)-f(x)||\phi(z)|dz\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int \left(\int |T_{tz}f(x)-f(x)|^p|\phi(z)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dz \qquad \text{(D.I.M.)} \\
&= \int \left(\int |T_{tz}f(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} |\phi(z)|dz \\
&= \int \|T_{tz}f-f\|_p|\phi(z)|dz.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, la observación 4.3 (i) nos da que $\|T_{tz}f\|_p = \|f\|_p$ y entonces

$$\|T_{tz}f - f\|_p \leqslant 2\|f\|_p. \tag{4.19}$$

Recordemos que $\|T_{tz}f - f\|_p$ converge a 0 cuando $t \to 0$ por la proposición 4.5, por tanto tenemos que $\|T_{tz}f - f\|_p|\phi(z)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, además, por (4.19) $\|T_{tz}f - f\||\phi(z)|$ está dominada por $2\|f\|_p|\phi(z)|$. Por el Teorema de Convergencia Dominada se obtiene luego que

$$0 \leqslant \lim_{t\to 0} \|f*\phi_t - af\|_p \leqslant \lim_{t\to 0} \int \|T_{tz}f-f\|_p|\phi(z)|dz = \int 0dz.$$

Por tanto $\|f*\phi_t - af\|_p \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. ■

Ahora, ya estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.6 *El espacio de funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leqslant p < \infty$.*

Demostración: Tómese f en L^p y sea $\varepsilon > 0$, como $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en L^p entonces existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f-g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ahora defínase ϕ como

$$\phi(x) = \frac{1}{\int \theta(y)dy}\theta(x),$$

donde θ es la función definida en (4.12). Nótese que entonces $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es tal que $\int \phi = 1$. Entonces por la proposición 4.6 (c) y la proposición 4.7 tenemos a $g*\phi_t$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $t > 0$. Enseguida, por el teorema 4.5 se tiene que $\|g*\phi_t - 1\cdot g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si t es suficientemente pequeño. Por tanto

$$
\begin{aligned}
\|f - g * \phi_t\|_p &\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g * \phi_t\|_p \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

si t es suficientemente pequeño. ■

De este teorema se concluye de manera sencilla que la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ también es densa en $L^p(\mathbb{R}^n)$ ya que por la observación 4.2 tenemos que $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ y por la observación 4.1 sabemos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$.

Finalmente, destacamos la importancia del resultado anterior: es posible obtener subconjuntos densos del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuyos elementos gocen de propiedades deseables. Tal es el caso de los espacios funcionales $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cuyos elementos son funciones infinitamente diferenciables, tienen un decaimiento muy rápido en infinito y en el caso de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tienen soporte compacto.

Conclusiones

Recordemos lo más importante de lo que se ha estudiado aquí. Primero pudimos determinar a los subconjuntos convexos, absorbentes en cada uno de sus puntos y balanceados de espacios vectoriales con seminormas que los describen como los puntos donde la seminorma toma valores menores que 1, donde a cada conjunto como tal le corresponde una única seminorma. Logramos caracterizar a los espacios vectoriales topológicos Hausdorff dotados de una base localmente convexa para el cero como los espacios localmente convexos, los cuales definimos al inicio a partir de familias de seminormas separantes. Afirmamos que un espacio localmente convexo X es metrizable si la topología de éste está determinada por una familia numerable de seminormas y viceversa, es decir, un espacio localmente convexo cuya topología coincide con la dada por una familia numerable de seminormas nos da por consiguiente que el espacio es metrizable. También conseguimos que un espacio localmente convexo es normable si y sólo si posee un subconjunto abierto, acotado y no vacío. Estos resultados son muy importantes ya que la teoría de espacios métricos y la teoría de espacios normados es muy rica, esto es, que si llegamos a tener un espacio localmente convexo en nuestras manos con la propiedad de tener una topología determinada por una familia numerable de seminormas o bien, que posea un conjunto abierto, acotado y no vacío, entonces sabremos que tenemos todas las propiedades de espacios métricos o normados (según sea el caso) a nuestro favor, tal como fue el caso de recordar que la compacidad y la compacidad secuencial son equivalentes en espacios métricos. Es esta equivalencia la que resultó ser muy útil para llegar a la consecuencia del Teorema de Banach-Alaoglu, la cual afirma que si una sucesión es acotada en la topología de la norma de X^*, donde X es un espacio normado y separable, entonces tiene una subsucesión que converge en la topología débil* de X^*. Tal corolario nos sostiene para dar una función f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u(re^{i\theta})$ sea la convolución del Núcleo de Poisson $(P_r * f)(\theta)$ con $0 \leqslant r < 1$ donde u es una función armónica en el disco unitario con cierto acotamiento. Este conocimiento nos puede ayudar a resolver el Problema de Dirichlet en el disco unitario.

Finalmente, con ayuda de esto y otros resultados obtuvimos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ son densos en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como se mencionó al final del Capítulo 4, esto resulta ser muy conveniente ya que, gracias a esto podemos aproximar una función en L^p mediante una sucesión de funciones que sean infinitamente diferenciables y de soporte compacto o en su defecto, que tengan un decaimiento muy rápido en infinito.

Bibliografía

[1] Robert G. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc. (1995).

[2] Stefan Banach: *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, (1932).

[3] Nicolas Bourbaki: *Elements of the History of Matematics*, Springer-Verlag, (1994).

[4] John B. Conway: *A Course in Functional Analysis* (2nd ed.), Springer-Verlag, (1990).

[5] G. B. Folland: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, (1999).

[6] Fernando Galaz Fontes: *Medida e Integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$, Oxford University Press Mexico, (2002).

[7] J. García Cuerva & J. L. Rubio de Francia: *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Elsevier Science Publishing Company Inc. (1985).

[8] Jerrold E. Marsden & Michael J. Hoffman: *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, (1999).

[9] James R. Munkres: *Topología* (2da ed.), Prentice Hall, Inc. (2002).

[10] James R. Munkres: *Topology* (2nd ed.), Prentice Hall, Inc. (2000).

[11] Michael Reed & Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol 1: Functional Analysis*, Academic Press, Inc. (1980).

[12] H. L. Royden: *Real Analysis* (3rd ed.), Prentice Hall, Inc. (1988).

[13] Walter Rudin: *Functional Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill, Inc. (1991).

[14] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill, Inc. (1976).

[15] Stephen Willard: *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1970).