UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Integración de Riemann en espacios de Banach

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Omar Eduardo Hernández Andrade

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Junio 2017

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Carolina Espinoza Villalva

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. Jessica Yuniver Santana Bejarano

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. Marysol Navarro Burruel

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

Sin duda alguna agradezco a mis padres por todo el apoyo que me han dado. Recuerdo hace años haberles comentado la idea de que buscaba estudiar la lic. en matemáticas; como a muchos estudiantes de esta carrera nos ha sucedido, la primera respuesta que se tiene al mencionar a alguien que estudiarás matemáticas es una cara de confusión, con mis padres no fue diferente y a pesar de ello, no dudaron en darme su apoyo y jamás me alejaron de mis sueños.

Agradezco a mi directora de tesis, Dra. Martha Guzmán, por haberme guiado durante todo este proyecto y por todos los consejos que me ha dado durante toda mi trayectoria por la licenciatura.

Por último, agradezco a cada profesor del departamento de matemáticas con quien tuve el gusto de ser uno de sus alumnos.

Índice general

Introducción

La integral de Riemann de una función definida en un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ con valores reales es probablemente la integral que muchos llegamos a conocer por primera vez, ya sea como parte de un curso de cálculo o de análisis matemático, sin embargo, como suele suceder comúnmente dentro de las matemáticas, el concepto de integral puede ser generalizado, de hecho, una de las primeras generalizaciones de la integral de Riemann fue dada por H. Lebesgue, la cual se apoyó en las ideas de la teoría de la medida. Por otro lado, la integral de Riemann que estudiaremos en esta tesis es una abstracción de la clásica integral de Riemann en un intervalo $[a, b]$. En nuestro caso, los valores de nuestras funciones serán elementos de un espacio de Banach, es decir, de un espacio vectorial normado y completo.

Los primeros análisis sobre la integral de Riemann vectorial fueron hechos por L. Graves, los cuales fueron publicados en 1927 en el artículo *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*, desde entonces algunos autores han contribuido a la teoría, de hecho dentro de este escrito presentaremos además de los descubrimientos de L. Graves algunos avances teóricos dados por A. Alexiewicz, W. Orlicz, R. Rejouani, A. Nemirovski, M. Yu Ochan, G. da Rocha y B. Pettis.

En el capítulo 1 iniciaremos con resultados preliminares necesarios para establecer una base sobre la cual podamos guiarnos para nuestro estudio sobre la integral de Riemann vectorial, por lo cual, abordaremos algunos puntos de la teoría de la integral de Riemann-Stieltjes e integral de Lebesgue y algunos ejemplos de espacios de Banach.

Durante el capítulo 2 presentaremos los conceptos de medida vectorial e integral de Bochner, con el objetivo de presentar otra integral vectorial para una posterior comparación con la integral de Riemann. Uno de los teoremas más importantes de este capítulo es el teorema de medibilidad de Pettis, el cual nos será imprescindible durante los capítulos siguientes. Respecto a la integral de Bochner, conoceremos su fundamentación y algunas de sus propiedades, además de otros resultados relacionados con esta integral.

En el capítulo 3 dará inicio el tema principal de este trabajo. Presentaremos la definición de la integral de Riemann vectorial, algunas de sus propiedades básicas y abordaremos algunas de las similitudes y diferencias que guarda con su análoga real. Sin entrar mucho en detalle podemos mencionar que las propiedades de cada uno de los espacios de Banach donde las funciones toman valores tienen consecuencias sobre algunas de las características de la integral de Riemann, las cuales nos serán de gran interés.

En el último capítulo hablaremos de la *propiedad de Lebesgue* de un espacio de Banach, para ello empezaremos con lo que llamaremos integral de Darboux vectorial y después veremos qué relación guarda con la integral de Riemann vectorial. Una vez hecho esto, podremos definir la propiedad de Lebesgue y veremos algunos resultados que tratan sobre condiciones suficientes para asegurar que un espacio tenga o no esta propiedad. Por último finalizaremos el tema central de esta tesis probando que l^1 tiene la propiedad de Lebesgue.

Capítulo 1

Preliminares

Tenemos que empezar esta tesis con un capítulo que cumpla dos propósitos. Primero, debe de servir como un recordatorio o una introducción a algunos temas y resultados necesarios para este proyecto. Por último, debe de ser una sutil guía que trace algo del camino que esta tesis planea seguir respecto al tema central.

Debido al objetivo de este trabajo, es necesario presentar la teoría de la integral de Riemann real, de hecho, el discurso estará centrado respecto a la integral de Riemann-Stieltjes, que es una integral más general que la integral de Riemann. También tendremos en consideración resultados y propiedades de la integral de Lebesgue, y no puede faltar un acercamiento a algunos de los espacios de Banach clásicos, pues son en ellos donde tomarán valores las funciones que estudiaremos.

Los resultados que presentaremos en este capítulo, base para nuestro desarrollo posterior, han sido tomados de [2], [16], [3], [5] y [11].

1.1. Integral de Riemann-Stieltjes

La integral de Riemann-Stieltjes involucra dos funciones f y α a diferencia de la integral de Riemann. Se construye de manera similar, a partir de particiones y en el caso particular cuando α es la función identidad, ambas integrales coinciden. Sin embargo, la integral de Riemann-Stieltjes aun tiene sentido cuando α es discontinua o incluso no diferenciable. De hecho, es cuando α es discontinua que la importancia de esta integral se vuelve aparente.

En esta sección, las funciones denotadas por f, g, α, β, etc., se asumirán acotadas y definidas en el intervalo $[a, b]$.

Definición 1.1. *Una partición del intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito y ordenado $\{t_0, t_1, ..., t_{N-1}, t_N\}$ de puntos en $[a, b]$ que satisfacen*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b.$$

Denotaremos la partición $\mathcal{P}$ por $\mathcal{P} = \{t_i\}_{i=0}^N$ y llamaremos a los elementos t_i puntos de la partición. Cuando una partición $\mathcal{P}'$ contiene los puntos de $\mathcal{P}$, diremos que $\mathcal{P}'$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$ y lo denotaremos por $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$. Si para cada intervalo de la partición $\mathcal{P}$ elegimos etiquetas $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ diremos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada y la denotaremos por $\mathcal{P} = \{s_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^N$. El símbolo $\Delta\alpha_k$ denotará la diferencia $\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})$. De modo que

$$\sum_{k=1}^{N} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Definición 1.2. *Sea $\mathcal{P} = \{s_k, [t_{k-1}, t_k]\}_{k=1}^N$ una partición de $[a, b]$. Una suma de la forma*

$$S(f, \mathcal{P}, \alpha) = \sum_{k=1}^{N} f(s_k)\Delta\alpha_k,$$

se llama una suma de Riemann-Stieltjes con respecto a α. Diremos que una función f es Riemann integrable con respecto a α en $[a, b]$ si existe un número A con la siguiente propiedad: dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a, b]$ tal que

$$|S(f, \mathcal{P}, \alpha) - A| < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada que refina $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Cuando dicho número existe, está determinado de manera única y será denotado por $\int_a^b f d\alpha$. En este caso, decimos que la integral de Riemann-Stieltjes existe y escribiremos $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Nos referiremos a las funciones f y α como el integrando y el integrador respectivamente.

En el caso particular en que $\alpha(x) = x$, la integral se llama simplemente integral de Riemann y se denota por $\int_a^b f dx$.

Continuaremos esta sección exhibiendo las principales propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes y algunos resultados trascendentes. Primeramente observemos que la integral de Riemann-Stieltjes es lineal en ambos integrando e integrador.

Teorema 1.3. *Si $f \in R(\alpha)$ y $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ para cualesquiera dos constantes c_1, c_2 y*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha.$$

Teorema 1.4. *Si $f \in R(\alpha)$ y $f \in R(\beta)$ en $[a, b]$, entonces $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$ en $[a, b]$ para cualesquiera constantes c_1 y c_2 y*

$$\int_a^b f d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta.$$

Otra propiedad básica que es de esperar, es que la integral es aditiva respecto al intervalo de integración.

Teorema 1.5. *Sea $c \in (a, b)$. Si dos de las integrales en (1.1) existen, entonces la tercera también y se tiene que*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha. \tag{1.1}$$

Usando inducción, este hecho se puede probar para una descomposición finita de $[a, b]$. Una notable relación entre integrando e integrador surge en la integral de Riemann-Stieltjes, la existencia de $\int_a^b f d\alpha$ implica la existencia de $\int_a^b \alpha df$ y el inverso se cumple. Más aun, hay una simple conexión entre ambas integrales que es conocida como la fórmula de integración por partes.

Teorema 1.6. *Si* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a,b]$*, entonces* $\alpha \in R(f)$ *en* $[a,b]$ *y se cumple que*

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

La integral de Riemann-Stieltjes puede ser tratada mediante sumas superiores y sumas inferiores al igual que la integral de Riemann. Pero para ello, el integrador α debe de ser una función monótona creciente en $[a,b]$, lo cual denotaremos por $\alpha \nearrow$ en $[a,b]$.

Definición 1.7. *Sea* $\mathcal{P} = \{t_k\}_{k=1}^N$ *una partición de* $[a,b]$ *y sea*

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\} \qquad y \qquad m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}.$$

Los números

$$U(f,\mathcal{P},\alpha) = \sum_{k=1}^N M_k(f)\Delta\alpha_k \qquad y \qquad L(f,\mathcal{P},\alpha) = \sum_{k=1}^N m_k(f)\Delta\alpha_k,$$

se llaman respectivamente, la suma de Stieltjes superior e inferior de f *respecto a* α *para la partición* $\mathcal{P}$*.*

La primera observación es que debido a que $\alpha \nearrow$ en $[a,b]$, se tiene que para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ se cumple la desiguadad

$$L(f,\mathcal{P},\alpha) \leq S(f,\mathcal{P},\alpha) \leq U(f,\mathcal{P},\alpha).$$

La importancia de esto, es que nos lleva a un resultado importante conocido como la condición de Riemann.

Teorema 1.8 (Condición de Riemann)**.** *Sea* $\alpha \nearrow$ *en* $[a,b]$*. La función* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a,b]$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una partición* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *tal que para cualquier refinamiento* $\mathcal{P}$ *de* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *se cumple que*

$$0 \leq U(f,\mathcal{P},\alpha) - L(f,\mathcal{P},\alpha) \leq \varepsilon.$$

Enseguida introducimos la siguiente definición.

Definición 1.9. *Sea* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$*. La variación de* f *en* $[a,b]$ *es el número*

$$Var(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^{n}$ *de* $[a,b]$*. En caso de que la variación de* f *esté acotada, diremos que* f *es de variación acotada.*

Se puede demostrar que toda función de variación acotada se puede expresar como la diferencia de dos funciones crecientes. Por tal razón, la variación es una propiedad muy importante ligada a la existencia de la integral de Riemann y una de las principales consecuencias de su estudio es el siguiente teorema.

Teorema 1.10. *Sea* α *de variación acotada en* $[a,b]$ *y supongamos que* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a,b]$*. Entonces* $f \in R(\alpha)$ *para todo subintervalo* $[c,d]$ *de* $[a,b]$*.*

Notemos que en el teorema 1.5 se pide la existencia de dos miembros de la ecuación para asegurar la existencia del tercero. Sin embargo, el resultado anterior nos permite afirmar la existencia de la integral en cualquier subintervalo, por lo que podemos hablar ahora de la integral indefinida de f en $[a,b]$.

Teorema 1.11. *Sea* α *de variación acotada en* $[a,b]$ *y supongamos que* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a,b]$*. Definamos* F *para* $x \in [a,b]$ *por la ecuación*

$$F(x) = \int_a^x f d\alpha.$$

Entonces

1. F *es de variación acotada en* $[a,b]$*.*

2. *Cada punto de continuidad de* α *es también un punto de continuidad de* $F(x)$*.*

3. *Si* $\alpha \nearrow$ *en* $[a,b]$*, la derivada* $F'(x)$ *existe en cada punto* $x \in (a,b)$ *donde* $\alpha'(x)$ *existe y* $f(x)$ *es continua. Para tales* x*, tenemos que*

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

Enunciaremos ahora algunas condiciones que aseguran la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes e integral de Riemann.

Teorema 1.12. *Si f es continua en $[a, b]$ y α es de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f \in R(\alpha)$.*

Este teorema implica que al intercambiar f con α obtendremos dos condiciones suficientes para la existencia de la integral de Riemann de f.

Corolario 1.13. *Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para la existencia de la integral de Riemann de f en $[a, b]$.*

1. *f es continua en $[a, b]$,*

2. *f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Por último, sólo hace falta exhibir el importante criterio de Lebesgue para la Riemann integrabilidad.

Teorema 1.14 (Criterio de Lebesgue para la Riemann integrabilidad)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y D el conjunto de discontinuidades de f en $[a, b]$. Entonces, f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y sólo si D tiene medida cero.*

Este teorema es de vital importancia y jugará un papel muy importante en el estudio de la integral de Riemann en espacios de Banach.

1.2. Integral de Lebesgue

La integral de Lebesgue es conocida como una generalización de la integral de Riemann, pues la última es un caso particular cuando se integra bajo la medida de Lebesgue. En esta sección abordaremos el concepto de integral indefinida $F(x) = \int_a^x f dt$ bajo la medida de Lebesgue. Veremos qué sucede con los teoremas fundamentales del cálculo y relacionaremos el concepto de integral con otros de igual importancia.

El primer teorema de esta sección, afirma la relevancia del concepto de variación en un intervalo, dado que tiene consecuencias relacionadas incluso con la derivada de una función.

Teorema 1.15. *Si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f'(x)$ existe para casi toda $x \in [a,b]$.*

Definición 1.16. *Si f es una función Lebesgue integrable en $[a,b]$, su integral indefinida es la función $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f dt.$$

Como aquí estamos considerando la σ-álgebra de los Lebesgue medibles de $[a,b]$, no hay problema al definir la integral indefinida para cualquier $x \in [a,b]$, debido a que todos los conjuntos de la forma $[a,x]$ son medibles.

Al igual que en el caso de la integral de Riemann-Stieltjes, la integral indefinida sigue siendo una función de variación acotada.

Teorema 1.17. *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces la integral indefinida de f es una función continua de variación acotada.*

Si F es la integral indefinida de f, el teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann afirma que $F'(x) = f(x)$ en los puntos de continuidad de f. Sin embargo, esta igualdad se tiene de manera más general para la integral de Lebesgue.

Teorema 1.18. *Si f es una función integrable en $[a,b]$ y definimos $F(x) = F(a) + \int_a^x f dt$. Entonces $F'(x) = f(x)$ ctp en $[a,b]$.*

Hemos hablado de la integral indefinida de una función f, sin embargo, ¿es toda función F la integral indefinida de alguna otra función? El siguiente concepto nos permitirá responder a esa pregunta.

Definición 1.19. *Una función f a valores reales definida en $[a,b]$ se llama absolutamente continua en $[a,b]$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$$

para toda colección finita $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{n}$ de subintervalos de $[a,b]$ que no se traslapan y tales que

$$\sum_{i=1}^{n} |d_i - c_i| < \delta.$$

Es fácil probar que una función absolutamente continua es de variación acotada. Este hecho junto con el teorema 1.15 asegura la existencia casi en todas partes de la derivada de una función absolutamente continua.

Corolario 1.20. *Si f es absolutamente continua en $[a,b]$, entonces f tiene derivada ctp en $[a,b]$.*

Los últimos resultados que presentaremos en esta sección, muestran la importancia de la continuidad absoluta con respecto a la integral indefinida.

Teorema 1.21. *Una función F es una integral indefinida si y sólo si F es absolutamente continua.*

Corolario 1.22. *Toda función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada.*

1.3. Espacios de Banach

Un espacio normado es un espacio vectorial con una métrica definida por una norma, la cual generaliza la idea de longitud de un vector en el plano o en el espacio, y un espacio de Banach es un espacio normado que resulta ser un espacio métrico completo.

El estudio de espacios normados de dimensión infinita es una de la razones que hacen al análisis funcional tan interesante, pues es en ellos donde encontramos propiedades inusuales y poco intuitivas, que sin duda enriquecen profundamente el entendimiento de las matemáticas.

Definición 1.23. *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial sobre el campo* K*, donde* K *es* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*. Una norma en* $\mathbf{X}$ *es una función* $\| \, \| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para toda* $x \in \mathbf{X}$*,*
2. *Si* $\|x\| = 0$*, entonces* $x = 0$*,*
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para toda* $\lambda \in K$ *y* $x \in \mathbf{X}$*,*
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para toda* $x, y \in \mathbf{X}$*.*

A la pareja $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *se le llama espacio normado.*

Al comenzar esta sección mencionamos las palabras *espacio métrico completo*. La completez de un espacio métrico es uno de los conceptos fundamentales en espacios donde hay una distancia definida, pues la propiedad de ser completo hace que otro concepto esencial en las matemáticas se revitalice, hablamos del concepto de *límite*.

Definición 1.24. *Diremos que un espacio métrico* $(\mathbf{X}, d)$ *es completo si toda sucesión de Cauchy en* $\mathbf{X}$ *converge en* $\mathbf{X}$*.*

Definición 1.25. *Sea* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *un espacio normado. Definamos la distancia entre dos vectores* $x, y \in \mathbf{X}$ *como* $d(x, y) = \|x - y\|$*. Diremos que el espacio normado* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *es un espacio de Banach si* $(\mathbf{X}, d)$ *es completo.*

Los siguientes ejemplos son espacios de Banach muy conocidos.

1. $(l^p, \| \|_p)$, $1 \leq p < \infty$, en este ejemplo $l^p = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}$ y la norma es
$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. $(l^\infty, \| \|_\infty)$, aquí, $l^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada$\}$ y
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

3. $(c, \| \|_\infty)$, $c = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge$\}$ y
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

4. $(c_0, \| \|_\infty)$, donde $c_0 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$ y
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

5. $\big(\mathcal{C}[a,b], \| \|_\infty\big)$, donde $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to K : f$ es continua$\}$ y
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

6. $\big(B[a,b], \| \|_\infty\big)$, aquí, $B[a,b] = \{f : [a,b] \to K : f$ es acotada$\}$ y $\| \|_\infty$ definida como en el ejemplo anterior.

7. Los espacios $\big(L^p(X, \Sigma, \mu), \| \|_p\big)$, con (X, Σ, μ) un espacio de medida, f es medible y las clases de funciones $L^p(X, \Sigma, \mu) = \big\{[f] : \int |f|^p d\mu < \infty\big\}$. Aquí, $[f] = \{g : X \to K : f = g \quad \mu\text{−ctp}\}$ y
$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

8. $\big(L^\infty(X, \Sigma, \mu), \| \|_\infty\big)$, aquí, $L^\infty(X, \Sigma, \mu) = \big\{[f] : \exists M$ tal que $|f(x)| \leq M \; \mu\text{-ctp}\big\}$, f medible y
$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\,\big\{M : \mu\{x : |f(x)| > M\} = 0\big\}.$$

La norma en estos espacios se considerará fija en este trabajo, es decir, siempre que mencionemos a l^∞, nos referiremos a $(l^\infty, \| \|_\infty)$, de igual manera con los demás espacios, esto nos evitará un uso excesivo de notación.

Como observaciones generales de los ejemplos anteriores, se tiene que los espacios c_0 y c son subespacios de l^∞, y que $\mathcal{C}[a,b]$ y $B[a,b]$ son subespacios de $L^\infty([a,b],\mathcal{L},\lambda)$, el cual denotaremos simplemente por $L^\infty[a,b]$; aquí, $\mathcal{L}$ denota los Lebesgue medibles de $[a,b]$ y λ la medida de Lebesgue en $[a,b]$. Siguiendo el mismo estilo, denotaremos el espacio $L^p([a,b],\mathcal{L},\lambda)$ por $L^p([a,b])$.

No es necesario que indaguemos profundamente en estos espacios, por lo que exhibiremos sólo algunas propiedades básicas relacionadas con su estructura de espacios de Banach y conceptos que nos serán relevantes en el futuro.

Definición 1.26. *Sea $(\mathbf{X}, \| \|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathbf{X}$ es una base de Schauder de $\mathbf{X}$ si para cada elemento $x \in \mathbf{X}$, existe una sucesión única de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n \right\| = 0,$$

es decir, $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$.

Observemos que hay una notable diferencia entre una base de Schauder y una base de Hamel. Una base de Hamel de $\mathbf{X}$ cumple que cada vector en $\mathbf{X}$ puede representarse como una combinación lineal finita de elementos de la base. Otro hecho, consecuencia del teorema de categoría de Baire, es que, una base de Hamel para un espacio de dimensión infinita debe de ser no numerable.

Teorema 1.27. *La sucesión $(e_n)_{n=1}^\infty$ en el espacio $(l^p, \| \|_p)$, donde*

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & si \quad i = n \\ 0 & si \quad i \neq n \end{cases}$$

es una base de Schauder para l^p, $1 \leq p < \infty$.

No es difícil probar el enunciado anterior, la misma definición de base de Schauder y la forma de los elementos de l^p ofrecen una clave inmediata. El espacio $\mathcal{C}[a,b]$ también tiene una base de Schauder, ver [11], pág. 352, y el sistema $Haar$ es una base de Schauder para cualquier espacio $L^p[a,b]$ con $1 \leq p < \infty$, ver [5] pág. 30. Otro resultado adicional es que la existencia de una base de Schauder para un espacio $\mathbf{X}$ implica la separabilidad del espacio. También es fácil probar que l^∞ no es separable, lo que significa que para este espacio no existe una base de Schauder; $L^\infty[a,b]$ comparte esta propiedad.

Definición 1.28. *Diremos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una base de Schauder para la cerradura del espacio que genera, es decir, $\overline{span}(x_n)_{n=1}^\infty$.*

No cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ es necesariamente una base de Schauder para el espacio que genera, debido a que es necesaria la independencia lineal del conjunto. Claramente una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica, donde $\overline{\text{span}}(x_n)_{n=1}^\infty = \mathbf{X}$.

Teorema 1.29. *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ de vectores distintos de cero es una base de Schauder para $\mathbf{X}$ si y sólo si*

1. *$span(x_n)_{n=1}^\infty$ es denso en $\mathbf{X}$,*

2. *existe una constante M tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\|$$

para todos los escalares $(\alpha_i)_{i=1}^\infty$ y todo $n < m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Este teorema también implica que una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica si y sólo si la sucesión cumple la condición 2.

Algunos renglones atrás mencionamos la relación entre base de Schauder y separabilidad, y vimos que la existencia de la primera implica la segunda. Una pregunta natural que surge es, ¿todo espacio separable tiene una base de Schauder? La respuesta es no, y esto fue demostrado por Per Enflo [7] en 1973. Otra pregunta que vale la pena hacernos es, ¿todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica? En este caso, la respuesta es afirmativa.

Teorema 1.30. *Cualquier espacio de Banach infinito dimensional contiene una sucesión básica.*

Ahora, necesitamos conocer otro concepto que surge en los espacios normados: *Convexidad uniforme.*

Definición 1.31. *Sea* $\big(\mathbf{X}, \|\ \|\big)$ *un espacio normado. Diremos que* $\mathbf{X}$ *es uniformemente convexo si siempre que* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *son sucesiones en* $\mathbf{X}$ *con* $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Pensemos en $\mathbb{R}^2$ para entender mejor este concepto. Si tenemos dos sucesiones en la esfera unitaria, para que el promedio de las sucesiones se acerque a la esfera, es necesario que ambas sucesiones converjan al mismo punto. Por el momento, exhibiremos un ejemplo de un espacio de Banach donde es clara la falta de convexidad uniforme.

Ejemplo 1.32. Consideremos el espacio de Banach $\big(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty\big)$, observemos lo que sucede con las siguientes sucesiones. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n = \big(1 - \frac{1}{n}, 1\big)$ y $y_n = \big(\frac{1}{n} - 1, 1\big)$. Estas sucesiones cumplen que $\|x_n\|_\infty = \|y_n\|_\infty = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(0, 2) \right\|_\infty = 1.$$

Pero, también tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(2 - \frac{2}{n}, 0\right) \right\|_\infty = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n} = 2.$$

Observemos que lo anterior es una consecuencia de la norma en cuestión, dado que $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana es claramente uniformemente convexo.

Una propiedad que intuitivamente es de esperar en los espacios uniformemente convexos es que todo subespacio es también uniformemente convexo.

Teorema 1.33. *Cualquier subespacio de un espacio normado uniformemente convexo es uniformemente convexo.*

Por último, presentaremos una propiedad de los espacios uniformemente convexos, este resultado fue originalmente probado por R. James en [10].

Teorema 1.34. *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio de Banach uniformemente convexo. Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una base de Schauder normalizada de* $\mathbf{X}$*, entonces existe* $M > 0$ *y* $r > 1$ *tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

para cada sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *no idénticamente cero de números reales.*

Capítulo 2

Integral de Bochner

La integral de Bochner para funciones que toman valores en un espacio de Banach es una generalización de la clásica integral de Lebesgue. Como sabemos, esta última se sustenta en el concepto de medida, por lo cual, será necesario introducirnos de manera somera en algunas de las nociones básicas de teoría de la medida vectorial, con el objetivo de poder construir adecuadamente la integral de Bochner. En los capítulos posteriores de este trabajo, tendremos oportunidad de examinar algunas relaciones entre la integral de Bochner y la integral de Riemann vectorial.

El material que presentamos en este capítulo ha sido tomado de [6]; también aclaramos que en lo que sigue, $\mathbf{X}$ siempre denotará un espacio de Banach con norma $\| \|$.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de conjuntos definida en un conjunto Ω. Diremos que $F : \mathcal{F} \to \mathbf{X}$ es una medida vectorial si para cualesquiera E_1 y E_2 elementos ajenos de $\mathcal{F}$, se sigue que $F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2)$. Si además, $F\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$ en la norma de $\mathbf{X}$ para toda sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos ajenos por pares de $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$, entonces diremos que F es una medida aditiva numerable.*

Definición 2.2. *Sea $F : \mathcal{F} \to \mathbf{X}$ una medida vectorial. La variación de F es la* *función* $|F| : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ *dada por*

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π *de* E *en un número finito de elementos de* $\mathcal{F}$ *ajenos por pares. Cuando* $|F|(\Omega) < \infty$ *diremos que* F *es una medida de variación acotada.*

Observación 2.3. *La variación de una medida* F *es monótona y finitamente aditiva.*

Demostración. Mostraremos primero que es finitamente aditiva. Sean E y G elementos de $\mathcal{F}$ tal que $E \cap G = \phi$. Supongamos que $E \cup G = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, con $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ una partición de $E \cup G$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| &= \sum_{j=1}^{n} \left\|F\big(A_j \cap (E \cup G)\big)\right\| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E) + F(A_j \cap G)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E)\| + \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap G)\| \\
&\leq |F|(E) + |F|(G).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|F|(E \cup G) \leq |F|(E) + |F|(G)$.

Ahora, tomemos $\varepsilon > 0$. Por definición de $|F|$, existen particiones $\{B_j\}_{j=1}^{k}$ y $\{C_i\}_{i=1}^{m}$ de E y G respectivamente, tales que

$$|F|(E) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^{k} \|F(B_j)\| \quad \text{y} \quad |F(G)| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} \|F(C_i)\|.$$

Como $E \cup G = \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right)$, entonces

$$|F|(E) + |F|(G) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{k} \|F(B_j)\| + \sum_{i=1}^{m} \|F(C_i)\| \leq |F|(E \cup G).$$

De ambas desigualdades se concluye que $|F|(E \cup G) = |F|(E) + |F|(G)$.

Veamos que $|F|$ es monótona. Sean A y B elementos de $\mathcal{F}$ con $A \subset B$. Entonces,

$$|F|(B) = |F|\big(A \cup (B \backslash A)\big) = |F|(A) + |F|(B \backslash A) \geq |F|(A).$$

■

Ahora, continuaremos con conceptos básicos de integrales vectoriales respecto a una medida escalar. De ahora en adelante en este capítulo, estaremos suponiendo que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita.

Definición 2.4. *Una función* $f : \Omega \to \mathbf{X}$ *se llama simple si existen* $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{X}$ *y* $E_1, E_2, ...E_n \in \Sigma$ *tales que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}, \tag{2.1}$$

donde $\chi_{E_i}(w) = 1$ *si* $w \in E_i$ *y* $\chi_{E_i}(w) = 0$ *si* $w \notin E_i$. *Si* $E_i \cap E_j = \phi$ *para toda* $i \neq j$ *y* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, *diremos que* (2.1) *es la representación estándar de* f.

Siempre que hablemos de una función simple $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$, estaremos suponiendo que $\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ es la representación estándar de f.

La integral de Lebesgue se construye sobre funciones *medibles*; siendo la integral de Bochner una generalización de la integral de Lebesgue, necesitamos introducir este concepto nuevamente, además de su versión *débil*.

Definición 2.5. *Una función* $f : \Omega \to \mathbf{X}$ *se llama* μ*-medible o fuertemente medible si existe una sucesión de funciones simples* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \|f_n(w) - f(w)\| = 0$ *para* μ*-casi toda* $w \in \Omega$.

Definición 2.6. *Una función* $f : \Omega \to \mathbf{X}$ *se dice débilmente* μ*-medible si para cada* $\Lambda \in \mathbf{X}^*$ *la función compuesta* $\Lambda f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es* μ*-medible.*

El siguiente resultado, cuya prueba será omitida debido a que se aleja de los objetivos de esta tesis, es de suma importancia porque caracteriza la medibilidad fuerte como la medibilidad débil más una propiedad adicional que en muchos casos es fácil probar. Este resultado será de gran utilidad para nosotros en el capítulo tres. Su demostración puede consultarse en [6], pág. 42.

Teorema 2.7 (Medibilidad de Pettis)**.** *Una función $f : \Omega \to \mathbf{X}$ es fuertemente μ-medible si y sólo si*

1) existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $f(\Omega \backslash E)$ es un conjunto separable de $\mathbf{X}$,

2) f es débilmente medible.

La prueba del teorema de medibilidad de Pettis, produce el siguiente corolario que más adelante nos será de utilidad.

Corolario 2.8. *Una función $f : \Omega \to \mathbf{X}$ es μ-medible si y sólo si f es μ-ctp el límite uniforme de una sucesión de funciones μ-medibles que toman a lo sumo una cantidad numerable de valores.*

Mostraremos ahora un lema que a pesar de su sencillez, guarda una importante relación con la integral de Bochner.

Lema 2.9. *Sea $f : \Omega \to \mathbf{X}$ una función fuertemente medible. Entonces la función real $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $\|f\|(w) = \|f(w)\|$ es medible.*

Demostración. Como f es μ-medible fuertemente , existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(w) - f(w)\| = 0$ casi en todas partes. A partir de que

$$\Big| \|f_n(w)\| - \|f(w)\| \Big| \leq \|f_n(w) - f(w)\|$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \|f_n(w)\| - \|f(w)\| \Big| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n(w) - f(w)\| = 0.$$

Por lo tanto, $\|f\|$ es medible. ■

Para proseguir, definiremos la integral de una función simple con respecto a una medida.

Definición 2.10. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita y* $\varphi : \Omega \to \mathbf{X}$ *simple tal que* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$*. La integral de* φ *con respecto a* μ *es el vector*

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i).$$

Si $E \in \Sigma$ *entonces*

$$\int_{E} \varphi d\mu = \int_{\Omega} \varphi \chi_E d\mu.$$

Una de las consecuencias inmediatas de la definición 2.10 es el siguiente lema, el cual es muy sencillo de probar por lo que no incluiremos su demostración.

Lema 2.11. *Si* $\varphi : \Omega \to \mathbf{X}$ *es una función simple,* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$*, entonces la función norma* $\|\varphi\|$ *es una función simple con representación estándar*

$$\|\varphi\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \chi_{E_i}.$$

Además

$$\int_{\Omega} \|\varphi\| d\mu = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \mu(E_i) \qquad y \qquad \left\| \int_{\Omega} \varphi d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|\varphi\| d\mu.$$

El siguiente resultado asegura la unicidad de la integral, garantizando así, su apropiada definición.

Lema 2.12. *Sea* $f : \Omega \to \mathbf{X}$ *fuertemente medible. Supongamos que para dos sucesiones* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ *de funciones simples se tiene que* $\|f - \varphi_n\|$ *y* $\|f - \psi_n\|$ *son Lebesgue integrables* $\forall n \in \mathbb{N}$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f - \varphi_n\| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f - \psi_n\| d\mu = 0.$$

Entonces $\forall E \in \Sigma$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E} \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E} \psi_n d\mu.$$

Demostración. Sean $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ con las propiedades anteriores y $E \in \Sigma$, observemos que

$$\begin{aligned}\left\|\int_E \varphi_n d\mu - \int_E \varphi_m d\mu\right\| &= \left\|\int_E (\varphi_n - \varphi_m) d\mu\right\| \\ &\leq \int_E \|\varphi_n - \varphi_m\| \, d\mu \\ &\leq \int_E \|f - \varphi_n\| \, d\mu + \int_E \|f - \varphi_m\| \, d\mu.\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\|\int_E \varphi_n d\mu - \int_E \varphi_m d\mu\right\| = 0$. Lo que implica que $\left(\int_E \varphi_n d\mu\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{X}$ y como $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach esta sucesión converge. Lo mismo sucede para la sucesión $\left(\int_E \psi_n d\mu\right)_{n=1}^{\infty}$. Así,

$$\left\|\int_E \varphi_n d\mu - \int_E \psi_n d\mu\right\| \leq \int_E \|f - \varphi_n\| \, d\mu + \int_E \|f - \psi_n\| \, d\mu < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. Se sigue que $\int_E \varphi_n d\mu = \int_E \psi_n d\mu$. ■

Definición 2.13. *Una función μ-medible $f : \Omega \to \mathbf{X}$ es Bochner integrable si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu = 0.$$

En este caso, $\int_E f d\mu$ está definida para $E \in \Sigma$ como

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

La familia de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbf{X}$ Bochner integrables constituye un subespacio lineal de las funciones fuertemente medibles de Ω en $\mathbf{X}$ y la integral de Bochner actúa como un operador lineal de Ω a $\mathbf{X}$.

Teorema 2.14. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbf{X}$ dos funciones Bochner integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es Bochner integrable y para toda $E \in \Sigma$*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

La prueba del teorema anterior es muy sencilla, daremos una breve explicación sin entrar en detalle. Como f y g son Bochner integrables, existen sucesiones de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisfacen lo expresado en la definición anterior. La sucesión de funciones simples necesarias para probar la integrabilidad de $\alpha f + \beta g$ es $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n=1}^{\infty}$.

El siguiente teorema muestra la relación entre la integral de Bochner de una función f y la integral de Lebesgue de la función $\|f\|$.

Teorema 2.15. *Una función μ-medible $f:\Omega \to \mathbf{X}$ es Bochner integrable si y sólo si $\int_\Omega \|f\|\, d\mu < \infty$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es Bochner integrable. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples para $\int_\Omega f d\mu$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_\Omega \|f - f_N\|\, d\mu < \varepsilon$, por consiguiente

$$\int_\Omega \|f\|\, d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_N\|\, d\mu + \int_\Omega \|f_N\|\, d\mu < \varepsilon + \int_E \|f_N\|\, d\mu < \infty.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que f es μ-medible y que $\int_\Omega \|f\|\, d\mu < \infty$. Por el corolario 2.8 escójase una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones medibles que toman a lo más una cantidad numerable de valores tal que $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\|f_n\| \leq \|f\| + \frac{1}{n}$ μ-ctp y estamos en un espacio de medida finita, entonces

$$\int_\Omega \|f_n\|\, d\mu \leq \int_\Omega \|f\|\, d\mu + \frac{\mu(\Omega)}{n} < \infty$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Escribamos

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_m^{(n)} \chi_{E_m^{(n)}},$$

donde $E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)} = \phi$ si $i \neq j$, $E_m^{(n)} \in \Sigma$, $x_m^{(n)} \in \mathbf{X}$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Como

$$\int_\Omega \|f_n\|\, d\mu = \int_{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^{(n)}} \|f_n\|\, d\mu,$$

tenemos que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\bigcup_{j=m+1}^{\infty}E_j^{(n)}}\|f_n\|\,d\mu=0$$

para toda $n\in\mathbb{N}$. Se sigue que dado $n\in\mathbb{N}$ existe un índice p_n tal que

$$\int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty}E_m^{(n)}}\|f_n\|\,d\mu<\frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Sea $g_n=\sum_{m=1}^{p_n}x_m^{(n)}E_m^{(n)}$, así, cada g_n es una función simple y se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\|f-g_n\|\,d\mu &\le \int_{\Omega}\|f-f_n\|\,d\mu+\int_{\Omega}\|f_n-g_n\|\,d\mu\\
&\le \frac{\mu(\Omega)}{n}+\int_{\Omega}\left\|\sum_{m=p_n+1}^{\infty}x_m^{(n)}\chi_{E_m^{(n)}}\right\|d\mu\\
&\le \frac{\mu(\Omega)}{n}+\int_{\Omega}\sum_{m=p_n+1}^{\infty}\left\|x_m^{(n)}\right\|\chi_{E_m^{(n)}}d\mu\\
&\le \frac{\mu(\Omega)}{n}+\int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty}E_m^{(n)}}\|f_n\|\,d\mu\\
&\le \frac{\mu(\Omega)}{n}+\frac{\mu(\Omega)}{n}\\
&= \frac{2\mu(\Omega)}{n}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito tenemos que f es Bochner integrable.

■

Mostraremos ahora que la integral de Bochner se comporta como se esperaría de un concepto que es una generalización de la integral de Lebesgue. Es decir, cumple de manera análoga algunas propiedades fundamentales de dicha integral.

Teorema 2.16. *Si f es una función Bochner integrable con respecto a μ, entonces*

1) $\left\|\int_E f d\mu\right\|\le\int_E\|f\|\,d\mu\ \forall E\in\Sigma$.

2) $\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\int_E f d\mu=0$.

3) Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos ajenos por pares en Σ y definimos E como $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, entonces

$$\int_E f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f d\mu.$$

4) Si $F(E) = \int_E f d\mu$, entonces F es de variación acotada y

$$|F|(E) = \int_E \|f\| \, d\mu.$$

Demostración. Demostraremos 1) primero para funciones simples Bochner integrables. Sea $E \in \Sigma$ y $f : \Omega \to \mathbf{X}$ dada por $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f d\mu \right\| &= \left\| \int_\Omega f \chi_E d\mu \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i \cap E) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \mu(E \cap E_i) \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \chi_{E_i \cap E} \right) d\mu \\
&= \int_E \|f\| \, d\mu.
\end{aligned}$$

Tomemos ahora f Bochner integrable. Consecuentemente, existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$. Observemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left| \int_E \|f_n\| \, d\mu - \int_E \|f\| \, d\mu \right| = \left| \int_E (\|f_n\| - \|f\|) \, d\mu \right| \leq \int_E \big| \|f_n\| - \|f\| \big| d\mu \leq \int_E \|f - f_n\| \, d\mu,$$

por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \|f_n\| \, d\mu = \int_E \|f\| \, d\mu$. Luego

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_E f_n d\mu \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n\| \, d\mu = \int_E \|f\| \, d\mu.$$

Para demostrar 2), como $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$, se tiene que

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu.$$

Tomando el límite cuando $\mu(E)$ tiende a cero se concluye lo deseado.

Ahora, sea $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ una sucesión ajena por pares y sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Observemos que $\forall k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{k} \left\| \int_{E_n} f d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty.$$

Así, cuando k tiende a infinito, se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_{E_n} f d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty.$$

De aquí, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$ converge absolutamente en $\mathbf{X}$. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión para $\int_{\Omega} f d\mu$. Notemos que la integral de Bochner es finitamente aditiva; si $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} f d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} f_k d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int_{E_n} f_k d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{m} \lim_{k\to\infty} \int_{E_n} f_k d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{m} \int_{E_n} f d\mu.
\end{aligned}$$

Como se tiene que $\lim\limits_{m\to\infty} \mu\big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\big) = 0$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\| = \left\| \lim_{m\to\infty} \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\| = 0.$$

Con estos dos hechos, observemos ahora que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^{m} \int_{E_n} f d\mu \right\| &= \lim_{m\to\infty} \left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \int_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} f d\mu \right\| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_E f d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Por último, definamos la medida $F : \Sigma \to \mathbf{X}$ como $F(E) = \int_E f d\mu$ y veamos que F es de variación acotada. Sea π una partición finita de $E \in \Sigma$, entonces

$$\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \sum_{A\in\pi} \left\| \int_A f d\mu \right\| \leq \sum_{A\in\pi} \int_A \|f\| \, d\mu = \int_E \|f\| \, d\mu < \infty,$$

lo cual implica que $|F|(E) < \infty$.

Mostremos ahora que $|F|(E) = \int_E \|f\|\, d\mu$. Sea $\varepsilon > 0$ y seleccionemos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu = 0$. Fijemos n_0 de modo que

$$\int_\Omega \|f - f_{n_0}\|\, d\mu < \varepsilon$$

y sea $E \in \Sigma$. Como $f_{n_0} = \sum_{k=1}^{r} x_k \chi_{A_k}$ en su representación estándar, tomemos la partición $\pi' = \{E_k\}_{k=1}^{r}$, donde $E_k = A_k \cap E$, para la cual, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_E \|f_{n_0}\|\, d\mu &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{r} \|x_k\|\, \chi_{A_k\cap E} d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{r} \|x_k\|\, \mu(A_k \cap E) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \|x_k \mu(A_k \cap E)\| \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left\| \int_{A_k\cap E} f d\mu \right\| \\
&= \sum_{E_k\in\pi'} \left\| \int_{E_k} f d\mu \right\|.
\end{aligned}$$

Ahora, podemos escoger una partición π de E que refine a π' tal que

$$0 \leq |F|(E) - \sum_{C\in\pi} \left\| \int_C f d\mu \right\| < \varepsilon,$$

debido a que dado $\varepsilon > 0$ existe π'' partición de E tal que

$$0 \leq |F|(E) - \sum_{B\in\pi''} \left\| \int_B f d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Tomando $\pi = \left\{ C = E_k \cap B : E_k \in \pi', B \in \pi'' \right\}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\pi''} \left\| \int_B f d\mu \right\| &= \sum_{B\in\pi''} \left\| \sum_{E_k\in\pi'} \int_{E_k\cap B} f d\mu \right\| \\
&\leq \sum_{B\in\pi''} \sum_{E_k\in\pi'} \left\| \int_{E_k\cap B} f d\mu \right\| \\
&= \sum_{C\in\pi} \left\| \int_C f d\mu \right\|,
\end{aligned}$$

de modo que efectivamente,

$$|F|(E) - \sum_{C\in\pi} \left\| \int_C f d\mu \right\| \leq |F|(E) - \sum_{B\in\pi'} \left\| \int_B f d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Para esta partición también se tiene que

$$\int_E \|f_{n_0}\| \, d\mu = \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\|,$$

pues π es refinamiento de π'. Además, se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\pi} \left| \left\| \int_B f d\mu \right\| - \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\| \right| &\leq \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f d\mu - \int_B f_{n_0} d\mu \right\| \\
&\leq \sum_{B\in\pi} \int_B \|f - f_{n_0}\| \, d\mu \\
&\leq \int_E \|f - f_{n_0}\| \, d\mu \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por último, usando la partición π y la última desgualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| |F|(E) - \int_E \|f_{n_0}\| \, d\mu \right| &= \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\| \right| \\
&\leq \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f d\mu \right\| \right| + \left| \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f d\mu \right\| - \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\| \right| \\
&\leq \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f d\mu \right\| \right| + \sum_{B\in\pi} \left| \left\| \int_B f d\mu \right\| - \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\| \right| \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Con ello concluimos que $|F|(E) = \int_E \|f\| \, d\mu$. ■

Corolario 2.17. *Si f y g son Bochner integrables y para toda $E \in \Sigma$ se tiene que*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu,$$

entonces $f = g$ μ-casi en todas partes.

Demostración. Consideremos la medida $F(E) = \int_E (f - g) d\mu$. Entonces $F(E) = 0$ para toda $E \in \Sigma$, por lo que $|F|(E) = 0$ para cada $E \in \Sigma$, así,

$$0 = |F|(\Omega) = \int_\Omega \|f - g\| \, d\mu.$$

Es decir, $\|f - g\| = 0$ μ-ctp. ■

Afortunamente, la integral de Bochner tiene un resultado análogo al teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Teorema 2.18 (Convergencia dominada)**.** *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones con valores en $\mathbf{X}$ y Bochner integrables en Ω. Si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-ctp y si existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable con $\|f_n\| \leq g$ μ-ctp, entonces f es Bochner integrable y para toda $E \in \Sigma$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu, \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu = 0.$$

Demostración. Observemos que $\|f - f_n\| \leq \; 2g$ μ-casi en todas partes. Entonces $\|f - f_n\|$ es una función Lesbesgue integrable $\forall n \in \mathbb{N}$ que converge a 0 cuando n tiende a infinito. Por el teorema de convergencia dominada para la integral de Lebesgue ordinaria, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| = 0$ μ-ctp.

Ahora, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión de funciones simples $\left(\varphi_m^{(n)}\right)_{m=1}^\infty$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \left\|f_n - \varphi_m^{(n)}\right\| d\mu = 0.$$

Elijamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $m_n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\int_\Omega \left\|f_n - \varphi_{m_n}^{(n)}\right\| = \frac{1}{n}.$$

Entonces $\left(\varphi_{m_n}^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones simples tal que

$$\int_\Omega \left\|f - \varphi_{m_n}^{(n)}\right\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu + \int_\Omega \left\|f_n - \varphi_{m_n}^{(n)}\right\| d\mu$$

para toda $n\in\mathbb{N}$. Consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left\|f-\varphi_{m_n}^{(n)}\right\|d\mu=0,$$

por lo que f es Bochner integrable. Sea $E\in\Sigma$, se sigue que

$$\int_E fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_{m_n}^{(n)}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_nd\mu$$

debido a que

$$\left\|\int_E\varphi_{m_n}^{(n)}d\mu-\int_E f_nd\mu\right\|=\left\|\int_E\left(\varphi_{m_n}^{(n)}-f_n\right)d\mu\right\|\leq\int_E\left\|\varphi_{m_n}^{(n)}-f_n\right\|d\mu<\frac{1}{n}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. ∎

El siguiente teorema exhibe una propiedad muy útil de la teoría de la integral de Bochner que no tiene análogo no trivial en la teoría de integración de Lebesgue ordinaria.

Teorema 2.19. *Sea $f:\Omega\to\mathbf{X}$ Bochner integrable y $\mathbf{Y}$ un espacio de Banach. Si $T\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, entonces $Tf:\Omega\to\mathbf{Y}$ es Bochner integrable y para toda $E\in\Sigma$ se tiene que*

$$\int_E Tfd\mu=T\left(\int_E fd\mu\right).$$

Demostración. Consideremos primero una función f simple, $f=\sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}$. Como T es lineal, $Tf=\sum_{i=1}^n T(x_i)\chi_{E_i}$ es simple, entonces

$$T\left(\int_E fd\mu\right)=T\left(\sum_{i=1}^n x_i\mu(E\cap E_i)\right)=\sum_{i=1}^n T(x_i)\mu(E\cap E_i)=\int_E Tfd\mu.$$

Supongamos ahora que f es Bochner integrable. Entonces existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu = 0$. Así, para cada $E\in\Sigma$,

$$\begin{aligned}
T\left(\int_E f d\mu\right) &= T\left(\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} T\left(\int_E f_n d\mu\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_E T f_n d\mu\\
&= \int_E T f d\mu.
\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene porque

$$\left\|\int_E T f_n d\mu - \int_E T f d\mu\right\| \leq \int_E \|T(f_n - f)\|\, d\mu \leq \|T\| \int_E \|f_n - f\|\, d\mu < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. ■

Corolario 2.20. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbf{X}$ dos funciones μ-medibles y supongamos que para toda $\Lambda\in\mathbf{X}^*$ se tiene que $\Lambda f = \Lambda g$ μ-casi en todas partes. Entonces $f = g$ ctp.*

Demostración. Sea $\Lambda \in \mathbf{X}^*$ y $E_n = \{w\in\Omega : \|f(w)\| \leq n, \|g(w)\| \leq n\}$ para toda $n\in\mathbb{N}$. La sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y además $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dado que f y g son ambas acotadas en E_n, tenemos que las integrales $\int_E \|f\chi_{E_n}\|\, d\mu$ y $\int_E \|g\chi_{E_n}\|\, d\mu$ son finitas para toda $E \in \Sigma$. Consecuentemente, las integrales de Bochner

$$\int_E f\chi_{E_n} d\mu \qquad \text{y} \qquad \int_E g\chi_{E_n} d\mu,$$

existen para toda $E \in \Sigma$. Por el teorema anterior

$$\int_E \Lambda f\chi_{E_n} d\mu = \Lambda\left(\int_E f\chi_{E_n}\right),$$

con lo se concluye que

$$\Lambda\left(\int_E f\chi_{E_n} d\mu\right) = \Lambda\left(\int_E g\chi_{E_n} d\mu\right)$$

para toda $E \in \Sigma$. Si ahora fijamos E, tenemos que $\forall \Lambda \in \mathbf{X}^*$

$$\Lambda\left(\int_E f\chi_{E_n} d\mu - \int_E g\chi_{E_n} d\mu\right) = 0,$$

y como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, se sigue que

$$\int_E f\chi_{E_n} d\mu = \int_E g\chi_{E_n} d\mu$$

para toda $E \in \Sigma$. Ahora, por el corolario 2.17, se tiene que $f\chi_{E_n} = g\chi_{E_n}$ μ-ctp para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} f\chi_{E_n} = f$ y de forma análoga para g, obtenemos finalmente que $f = g$ μ-ctp. ■

Capítulo 3

Integral de Riemann en espacios de Banach

En este capítulo desarrollaremos algunos aspectos básicos de la integral de Riemann para funciones con valores en un espacio de Banach real. Iniciamos con algunos conceptos necesarios para definir dicha integral, veremos algunas de sus propiedades y ejemplos que muestran el comportamiento cualitativamente distinto al ocurrido en el caso real, lo cual sin duda es una de las principales razones que motivan su estudio.

Aclaramos al lector que nuestra exposición esta basada en [8].

Definición 3.1. *Sea* $\{t_i\}_{i=0}^N$ *una partición del intervalo* $[a, b]$. *Escribiremos como* Δt_i *la longitud* $t_i - t_{i-1}$ *y definimos la norma de la partición como el número*

$$|\mathcal{P}| := \text{máx}\{\Delta t_1, ..., \Delta t_n\}.$$

Si para cada intervalo de la partición $\mathcal{P}$ *elegimos etiquetas* $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ *diremos que* $\mathcal{P}$ *es una partición etiquetada y la denotaremos por* $\mathcal{P} = \{s_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^N$. *En una partición etiquetada la norma es definida de igual manera que en una partición sin etiquetar.*

Definición 3.2. *La partición (etiquetada)* $\mathcal{P}_2$ *es un refinamiento de la partición (etiquetada)* $\mathcal{P}_1$ *si los puntos de* $\mathcal{P}_1$ *están contenidos en el conjunto de puntos de*

$\mathcal{P}_2$. Además, llamaremos refinamiento común a la partición $\mathcal{Q}$ que contiene los puntos de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Durante este capítulo se hará un uso constante del concepto de partición y partición etiquetada y, aunque no se tenga una notación particular para diferenciar ambas, se aclarará cuando se hace uso de cada una en los momentos en que se considere necesario.

Algunas veces se utilizará la expresión *intervalos de la partición* para referirnos a los intervalos cuyos extremos son puntos consecutivos de la partición. Además, siempre que se hable de una partición, se entenderá que se trata de una partición del intervalo $[a, b]$ a menos de que se especifique lo contrario. Para no hacer un uso excesivo de notación, escribiremos simplemente $\mathbf{X}$ para referirnos a un espacio de Banach real $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Como vimos en la seccion de la integral de Riemann-Stieltjes del primer capítulo, es necesario presentar primero el concepto de suma de Riemann para posteriormente definir la integral de Riemann.

Definición 3.3. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbf{X}$ y una partición etiquetada $\mathcal{P} = \{s_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^N$ definimos la suma de Riemann de f correspondiente a $\mathcal{P}$ como el vector en $\mathbf{X}$*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} f(s_i)\Delta t_i.$$

En la siguiente definición, exhibiremos dos formulaciones de la integral de Riemann vectorial, a semejanza del caso real.

Definición 3.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbf{X}$.*

a) La función f es R_δ integrable en $[a, b]$ si existe un vector $z \in \mathbf{X}$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S(f, \mathcal{P}) - z\| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ que satisface $|\mathcal{P}| < \delta$.

b) La función f es R_Δ integrable en $[a,b]$ si existe un vector $z \in \mathbf{X}$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada que refina a $\mathcal{P}_\varepsilon$.

La primera observación que podemos hacer de estos conceptos es que el vector z es único. En efecto:

a) Sea f R_δ integrable. Supongamos que existen vectores distintos $z, w \in \mathbf{X}$ que satisfacen la definición de R_δ integrabilidad de f. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta_1$. Además existe $\delta_2 > 0$ de modo que

$$\|S(f,\mathcal{P}) - w\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $|\mathcal{P}| < \delta_2$. Eligiendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$\|z - w\| \leq \|S(f,\mathcal{P}) - z\| + \|S(f,\mathcal{P}) - w\| < \varepsilon$$

siempre que $|\mathcal{P}| < \delta$. Así $z = w$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto z es único.

b) Sea f R_Δ integrable en $[a,b]$. Supongamos que la R_Δ integral de f no es única. Sean así $z, w \in \mathbf{X}$ R_Δ integrales de f con $z \neq w$. Para $\varepsilon > 0$ existen particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tal que

$$\|S(f,\mathcal{Q}_1) - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $\mathcal{Q}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_1$. Igualmente

$$\|S(f,\mathcal{Q}_2) - w\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $\mathcal{Q}_2$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_2$. Así, sea $\mathcal{P}_\varepsilon$ el refinamiento común de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, entonces

$$\|z - w\| \leq \|S(f,\mathcal{P}) - z\| + \|S(f,\mathcal{P}) - w\| < \varepsilon,$$

lo cual contradice que $z \neq w$. Así la R_Δ integral de f en $[a,b]$ es única.

Notemos que una función f integrable en cualquiera de los dos sentidos anteriores es acotada. En efecto:

a) Supongamos que f es R_δ integrable en $[a,b]$. Sea $s \in [a,b]$ y z la R_δ integral de f en $[a,b]$. Para $\varepsilon = 1/2$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < 1/2$ siempre que $|\mathcal{P}| < \delta$. Ahora, sea $\mathcal{Q} = \{t_i\}_{i=0}^N$ una partición fija de $[a,b]$ de modo que la longitud de todos los intervalos sea igual a $\delta/2$, excepto posiblemente en el último intervalo, en cuyo caso su longitud es menor. Así, $s \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ para algún $i_0 \in \{1, 2, ..., N\}$.

Elíjanse etiquetas $s_i, \tilde{s}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $s_{i_0} = s$, $\tilde{s_{i_0}} = t_{i_0}$, y sea $s_i = \tilde{s}_i$ elegida al azar cuando $i \neq i_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\|\big(f(s) - f(t_{i_0})\big)\Delta t_{i_0}\right\| &= \left\| \sum_{i=1}^N f(s_i)\Delta t_i - \sum_{i=1}^N f(\tilde{s}_i)\Delta t_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^N f(s_i)\Delta t_i - z \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N f(\tilde{s}_i)\Delta t_i - z \right\| \\ &< 1, \end{aligned}$$

por lo que $\|f(s)\| < \Delta t_{i_0}^{-1} + \|f(t_{i_0})\|$. Recordemos que $\Delta t_{i_0} = \delta/2$, o en caso de que $i_0 = N$ se tiene que $\Delta t_{i_0} \leq \delta/2$. Así,

$$\|f(s)\| < \text{máx}\left\{ \max_{1\leq i<N} \left\{ \frac{2}{\delta} + \|f(t_i)\| \right\}, \frac{1}{\Delta t_N} \|f(b)\| \right\},$$

lo que implica que f es acotada en $[a,b]$.

b) Supongamos que f es R_Δ integrable en $[a,b]$. Sea z la integral de f y $s \in [a,b]$. Tomando $\varepsilon = 1/2$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N$ de $[a,b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < 1/2$ siempre que $\mathcal{P}$ sea un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$, consecuentemente existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tal que $s \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$.

Escójanse etiquetas $s_i, \tilde{s}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de modo que $s_{i_0} = s$ y $\tilde{s_{i_0}} = t_{i_0}$ y sea

$s_i = \tilde{s}_i$ elegida al azar cuando $i \neq i_0$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\big(f(s)-f(t_{i_0})\big)\Delta t_{i_0}\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{N} f(s_i)\Delta t_i - \sum_{i=1}^{N} f(\tilde{s}_i)\Delta t_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{N} f(s_i)\Delta t_i - z\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{N} f(\tilde{s}_i)\Delta t_i - z\right\| \\ &< 1.\end{aligned}$$

Así, se tiene entonces que $\|f(s)\| < \Delta t_{i_0}^{-1} + \|f(t_{i_0})\|$, luego

$$\|f(s)\| < \max_{1\leq i\leq N}\left\{\Delta t_i^{-1} + \|f(t_i)\|\right\},$$

por lo que f es acotada en $[a,b]$.

El siguiente resultado exhibe una propiedad compartida por la integral de Riemann real y la integral de Riemann vectorial.

Teorema 3.5. *Una función $f\colon [a,b] \to \mathbf{X}$ es R_Δ integrable en $[a,b]$ si y sólo si f es R_δ integrable en $[a,b]$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es R_Δ integrable. Sea z la integral de f y M una cota para f en $[a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N$ partición de $[a,b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada que refina a $\mathcal{P}_\varepsilon$, tomemos $\delta = \varepsilon/4MN$. Mostraremos que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \varepsilon$ siempre que $|\mathcal{P}| < \delta$.

Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$. Sea $\mathcal{P}_1$ el refinamiento común de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_\varepsilon$ con etiquetas de modo que cada intervalo de $\mathcal{P}_1$ que coincide con $\mathcal{P}$ tiene la misma etiqueta que $\mathcal{P}$ y en los demás casos es arbitraria. Tomemos de la partición $\mathcal{P}$ los intervalos $[c_{k-1}, c_k]$ con $1 \leq k \leq K$ que contienen puntos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ en su interior, observemos que $K \leq N-1$.

Ahora en el intervalo $[c_{k-1}, c_k]$ sea $c_{k-1} = u_0^k < u_1^k < \ldots < u_{n_k}^k = c_k$ donde $\{u_i^k\}_{i=1}^{n_k-1}$ son los puntos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ en (c_{k-1}, c_k). Llamemos s_k a la etiqueta de $\mathcal{P}$ en $[c_{k-1}, c_k]$ y υ_i^k la etiqueta de $\mathcal{P}_1$ para $[u_{i-1}^k, u_i^k]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|S(f,\mathcal{P})-S(f,\mathcal{P}_1)\| &= \left\|\sum_{k=1}^{K}\left\{f(s_k)\Delta c_k-\sum_{i=1}^{n_k}f(v_i^k)\Delta u_i^k\right\}\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{K}\left\{f(s_k)\sum_{i=1}^{n_k}\Delta u_i^k-\sum_{i=1}^{n_k}f(v_i^k)\Delta u_i^k\right\}\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}\big(f(s_k)-f(v_i^k)\Delta u_i^k\big)\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}\left\|f(s_k)-f(v_i^k)\right\|\Delta u_i^k.
\end{aligned}$$

Ahora, usando que f es acotada se tiene que

$$\begin{aligned}
\|S(f,\mathcal{P})-S(f,\mathcal{P}_1)\| &\leq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}2M\Delta u_i^k \\
&= 2M\sum_{k=1}^{K}\Delta c_k \\
&< 2M(N-1)\delta \\
&= 2M(N-1)\frac{\varepsilon}{4MN}<\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$, concluimos que

$$\|S(f,\mathcal{P})-z\|\leq\|S(f,\mathcal{P})-S(f,\mathcal{P}_1)\|+\|S(f,\mathcal{P}_1)-z\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

por lo que f es R_δ integrable en $[a,b]$.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es R_δ integrable en $[a,b]$. Sea z la R_δ integral de f y $\varepsilon>0$. Existe $\delta>0$ tal que $\|S(f,\mathcal{P})-z\|<\varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ es una partición de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}|<\delta$. Elijamos $\mathcal{P}_\varepsilon=\{t_i\}_{i=0}^{N}$ tal que $\Delta t_i<\delta$. Se sigue que cualquier refinamiento $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_\varepsilon$ cumple que $|\mathcal{P}|\leq|\mathcal{P}_\varepsilon|$ por lo que $\|S(f,\mathcal{P})-z\|<\varepsilon$, así f es R_δ integrable. ∎

Definición 3.6. *La función $f:[a,b]\to\mathbf{X}$ es Riemann integrable en $[a,b]$ si es R_δ o R_Δ integrable en $[a,b]$. Denotaremos por $\mathcal{R}([a,b],\mathbf{X})$ el conjunto de funciones Riemann integrables de $[a,b]$ a $\mathbf{X}$.*

Durante el siguiente resultado haremos uso del concepto conocido como *envolvente convexa*. En el apéndice de esta tesis pueden encontrarse las demostraciones de algunas de sus propiedades, las cuales utilizaremos durante la exposición de la siguiente prueba. Aquí sólo presentaremos su definición.

Definición 3.7. *Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbf{X}$. La envolvente convexa de S, denotada por $co(S)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S.*

Recordemos que en la definición de R_δ y R_Δ integrabilidad en $[a, b]$ de una función f, se necesita de la existencia de un vector $z \in \mathbf{X}$ que cumpla dichas características. Sin embargo, el siguiente teorema es de especial importancia, ya que muestra algunos criterios que permiten la Riemann integrabilidad de f sin tener que conocer la identidad del vector z.

Teorema 3.8. *Sea $f : [a, b] \to \mathbf{X}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f es Riemann integrable en $[a, b]$.

2) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para todo par de particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de $[a, b]$ con norma menor a δ.

3) Para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a, b]$ tal que $\|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para todas las particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que refinan a $\mathcal{P}_\varepsilon$.

4) Para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a, b]$ tal que $\|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para todo par de particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbf{X})$. Sea $\varepsilon > 0$ y z la integral de Riemann de

f. Como f es integrable existe $\delta > 0$ tal que $\|S(\mathcal{P}, f) - z\| < \varepsilon/2$ siempre $|\mathcal{P}| < \delta$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ particiones etiquetadas de $[a, b]$ con normas menores a δ, entonces

$$\begin{aligned}\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| &\leq \|S(f,\mathcal{P}_1) - z\| + \|z - S(f,\mathcal{P}_2)\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para todo par de particiones etiquetadas con $|\mathcal{P}_i| < \delta$, i=1,2. Ahora sea δ_n tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{Q})\| < 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ siempre que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tengan norma menor a δ_n y tal que $\delta_{n+1} < \delta_n$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_n$ una partición etiquetada con $|\mathcal{P}_n| < \delta_n$. Así, si $m > n$ entonces

$$\|S(f,\mathcal{P}_n) - S(f,\mathcal{P}_m)\| < 1/n,$$

por lo que la sucesión $\big(S(f,\mathcal{P}_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{X}$ y como $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach, la sucesión anterior converge en $\mathbf{X}$. Así sea $z = \lim\limits_{m\to\infty} S(f,\mathcal{P}_m)$. Con ello tenemos que $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\|(S,\mathcal{P}_n) - z\| \leq 1/n.$$

Veamos que z es la integral de Riemann de f. Sea $\varepsilon > 0$, $K\in\mathbb{N}$ tal que $K > \frac{2}{\varepsilon}$. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta_K$, entonces

$$\|S(f,\mathcal{P}) - z\| \leq \|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{P}_K)\| + \|S(f,\mathcal{P}_K) - z\| < \varepsilon.$$

1) $\Rightarrow$ 3) Sea $f\in\mathcal{R}([a,b],\mathbf{X})$ y sea z la integral de f. Así dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \varepsilon/2$ siempre que $\mathcal{P}$ refina a $\mathcal{P}_\varepsilon$. Sean así $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ dos refinamientos de $\mathcal{P}_\varepsilon$, entonces

$$\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| \leq \|S(f,\mathcal{P}_1) - z\| + \|z - S(f,\mathcal{P}_2)\| < \varepsilon.$$

3) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que para $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a, b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para cualesquiera dos particiones $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ etiquetadas que

refinan a $\mathcal{P}_\varepsilon$. Sea $\mathcal{Q}_n$ tal que $\|S(f,\mathcal{Q}_n^i) - S(f,\mathcal{Q}_n^j)\| < \frac{1}{n}$, siempre que $\mathcal{Q}_n^i$, $\mathcal{Q}_n^j$ refinan a $\mathcal{Q}_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Llamemos $(\mathcal{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de particiones cuya partición $\mathcal{P}_n$ tiene todos los puntos de las particiones $\mathcal{Q}_i$ para $1 \leq i \leq n$, es claro que $\mathcal{P}_n$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_{n-1}$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Así dado $\varepsilon > 0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $N^{-1} < \varepsilon$, de modo que si $m > n \geq N$

$$\|S(f,\mathcal{P}_n) - S(f,\mathcal{P}_m)\| < N^{-1} < \varepsilon,$$

por lo que $\big(S(f,\mathcal{P}_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{X}$. Sea así $z = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,\mathcal{P}_n)$. Observemos que $\|S(f,\mathcal{P}_n) - z\| \leq 1/n$. Así, sea $\varepsilon > 0$, $N\in\mathbb{N}$ con $N^{-1} < \varepsilon/2$ y $\mathcal{P}$ un refinamiento de $\mathcal{P}_N$, entonces por la forma en que hemos definido a $\mathcal{P}_n$ tenemos que

$$\|S(f,\mathcal{P}) - z\| \leq \|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{P}_N)\| + \|S(f,\mathcal{P}_N) - z\| < \varepsilon,$$

por lo tanto $f\in\mathcal{R}([a,b],\mathbf{X})$.

3) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que refinan a $\mathcal{P}_\varepsilon$. Basta elegir $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$.

4) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para todo par de particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N$ partición de $[a,b]$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| < \varepsilon$ para todo par de particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con los mismos puntos que la partición $\mathcal{P}_\varepsilon$. Sea $\mathcal{P}_0 = \{t_i,[t_{i-1},t_i]\}_{i=1}^N$, para cada $i\in\{1,2,...,N\}$ sea W_i el conjunto $\{f(t)\Delta t_i : t\in[t_{i-1},t_i]\} \subset \mathbf{X}$ y por último, llamemos W al conjunto

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i.$$

Notemos que $\|x\| < \varepsilon$ para toda x en $\mathrm{co}(W - W)$. En efecto, sea $x\in\mathrm{co}(W-W)$ y $\alpha_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq m$ tal que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Entonces $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, donde

$x_i \in (W - W)$, por lo que

$$x_i \in \left(\sum_{j=1}^{N} W_j - \sum_{j=1}^{N} W_j \right)$$

y así $x_i = S(f, \mathcal{Q}_i) - S(f, \mathcal{Q}_i')$ para algún par de particiones etiquetadas $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{Q}_i'$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$. Se tiene entonces por hipótesis que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (S(f, \mathcal{Q}_i) - S(f, \mathcal{Q}_i') \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left\| S(f, \mathcal{Q}_i) - S(f, \mathcal{Q}_i') \right\| \\ &< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sea ahora $P = \{\upsilon_k, [u_{k-1}, u_k]\}_{k=1}^{M}$ una partición etiquetada que refina a $\mathcal{P}_\varepsilon$. Para cada i sea k_i el índice k tal que $u_k = t_i$. Entonces

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}_0) - S(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ f(t_i)\Delta t_i - \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\upsilon_k)\Delta u_k \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ f(t_i) \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \Delta u_k - \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\upsilon_k)\Delta u_k \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(t_i)\Delta u_k - f(\upsilon_k)\Delta u_k \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \frac{\Delta u_k}{\Delta t_i} \Big(f(t_i)\Delta t_i - f(\upsilon_k)\Delta t_i \Big) \\ &\in \sum_{i=1}^{N} \mathrm{co}(W_i - W_i) \\ &= \mathrm{co}\left(\sum_{i=1}^{N} W_i - W_i \right) \\ &= \mathrm{co}(W - W), \end{aligned}$$

así, $\|S(f, \mathcal{P}_0) - S(f, \mathcal{P})\| < \varepsilon/2$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ particiones etiquetadas que refinan a $\mathcal{P}_\varepsilon$, luego

$$\|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)\| \leq \|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_0)\| + \|S(f, \mathcal{P}_0) - S(f, \mathcal{P}_2)\| < \varepsilon.$$

■

Por el hecho de que la integral toma valores en un espacio de Banach $\mathbf{X}$, vale la pena preguntarnos qué podemos decir acerca de los elementos del dual de $\mathbf{X}$ y la integral de Riemann, por lo que presentamos la siguiente definición.

Definición 3.9. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbf{X}$.

a) La función f es débilmente medible si Λf es medible para toda $\Lambda\in\mathbf{X}^*$.

b) La función f es de variación acotada débil en $[a,b]$ si Λf es de variación acotada en $[a,b]$ para toda $\Lambda\in\mathbf{X}^*$.

c) La función f es de variación acotada externa en el intervalo $[a,b]$ si se cumple que $\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{N}(f(d_i)-f(c_i))\right\|\right\}$ es finito, donde el supremo se toma sobre todas las colecciones finitas de subintervalos $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^{N}$ de $[a,b]$ que no se traslapan. Denotaremos la variación externa como $Var^*(f)$.

d) La función f es una derivada escalar de $F:[a,b]\to\mathbf{X}$ en $[a,b]$ si para toda $\Lambda\in\mathbf{X}^*$ la función ΛF es diferenciable casi en todas partes en $[a,b]$ y $(\Lambda F)'=\Lambda f$ ctp en $[a,b]$.

Durante el transcurso de esta tesis indicaremos la norma de un elemento $\Lambda\in\mathbf{X}^*$ mediante la notación $\|\Lambda\|_*$.

La primera observación que surge acerca de la definición anterior es que los conceptos de variación acotada externa y variación acotada débil son equivalentes.

Teorema 3.10. *Sea $f:[a,b]\to\mathbf{X}$, la función f es de variación acotada débil si y sólo si f es de variación acotada externa.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que f es de variación acotada débil en $[a,b]$ y sea $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^{k}$ una

colección finita de subintervalos que no se traslapan. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{k}\big(f(d_i)-f(c_i)\big)\right\| &= \sup_{\|\Lambda\|_*\le 1}\left\{\left|\Lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\big(f(d_i)-f(c_i)\big)\right)\right| : \Lambda\in\mathbf{X}^*\right\}\\ &= \sup_{\|\Lambda\|_*\le 1}\left\{\left|\sum_{i=1}^{k}\Lambda f(d_i)-\Lambda f(c_i)\right| : \Lambda\in\mathbf{X}^*\right\}\\ &\le \sup_{\|\Lambda\|_*\le 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left|\Lambda f(d_i)-\Lambda f(c_i)\right| : \Lambda\in\mathbf{X}^*\right\}\end{aligned}$$

El supremo se alcanza en la última desigualdad gracias al teorema de Hahn-Banach, así que existe Λ' de modo que

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\big(f(d_i)-f(c_i)\big)\right\| \le \sum_{i=1}^{k}|\Lambda' f(d_i)-\Lambda' f(c_i)| \le Var(\Lambda' f),$$

y consecuentemente f es de variación acotada externa.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es de variación acotada externa. Sea $\Lambda\in\mathbf{X}^*$ y $\mathcal{P}=\{t_i\}_{i=0}^{N}$ una partición de $[a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}|\Lambda f(t_i)-\Lambda f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\big(\Lambda f(t_i)-\Lambda f(t_{i-1})\big)\big(\Lambda f(t_i)-\Lambda f(t_{i-1})\big)\\ &= \sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\Big(\Lambda\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\Big)\Big(\Lambda\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\Big)\\ &= \Lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\Big(\Lambda\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\Big)\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)\right)\\ &= \left|\Lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\Big(\Lambda\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\Big)\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)\right)\right|\\ &\le \|\Lambda\|_*\left\|\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\Big(\Lambda\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\Big)\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)\right\|\\ &= \|\Lambda\|_*\left\|\sum_{i\in I_1}\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)-\sum_{i\in I_2}\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\right\|,\end{aligned}$$

donde $I_1=\Big\{1\le i\le N : \operatorname{sgn}\Big(\Lambda f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)\ge 0\Big\}$ y $I_2=[a,b]\backslash I_1$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}|\Lambda f(t_i)-\Lambda f(t_{i-1})| &\le \|\Lambda\|_*\left\|\sum_{i\in I_1}f(t_i)-f(t_{i-1})\right\|+\|\Lambda\|_*\left\|\sum_{i\in I_2}f(t_i)-f(t_{i-1})\right\|\\ &\le 2\,\|\Lambda\|_*\,Var^*(f),\end{aligned}$$

lo que implica que f es de variación acotada débil. ■

En el siguiente teorema mostraremos algunas propiedades fundamentales de la integral.

Teorema 3.11. *Sea* $f\colon[a,b]\to X$ *Riemann integrable en* $[a,b]$*, entonces*

a) La función f *es Riemann integrable en todo subintervalo de* $[a,b]$*.*

b) Si $c\in(a,b)$*, entonces* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f$*.*

c) Si M *es una cota de* f *entonces* $\left\|\int_a^b f\right\| \leq M(b-a)$*.*

d) Si $T:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ *es un operador lineal continuo y* $\mathbf{Y}$ *un espacio de Banach, entonces* Tf *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *y* $\int_a^b Tf = T(\int_a^b f)$*.*

e) Para cada $\Lambda\in\mathbf{X}^*$*, la función* Λf *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *y* $\int_a^b \Lambda f = \Lambda\int_a^b f$*. Así,* f *es débilmente medible y para toda* $\Lambda\in\mathbf{X}^*$ *la función* Λf *es continua ctp en* $[a,b]$*.*

Demostración.

a) Supongamos que f es Riemann integrable en $[a,b]$ y sea $[c,d]$ un subintervalo de $[a,b]$. Como f es Riemann integrable, dado $\varepsilon>0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que $\|S(f,\mathcal{P})-S(f,\mathcal{Q})\|<\varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son refinamientos de $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Consideremos la partición $\mathcal{P}'_\varepsilon$ de $[c,d]$ dada por $\mathcal{P}'_\varepsilon=\mathcal{P}_\varepsilon\cap[c,d]\cup\{c,d\}$. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos refinamientos de $\mathcal{P}'_\varepsilon$ y extendamos dichas particiones a $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{Q}'$ particiones de $[a,b]$ de modo que tengan las mismas etiquetas y puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$ fuera de $[c,d]$. Entonces

$$\|S(f,\mathcal{P}')-S(f,\mathcal{Q}')\| = \|S(f,\mathcal{P})-S(f,\mathcal{Q})\| < \varepsilon,$$

por lo que f es Riemann integrable en $[c,d]$.

b) Sean $z_1=\int_a^c f$, $z_2=\int_c^b f$ y $z_3=\int_a^b f$, demostraremos que $\|z_3-(z_1+z_2)\|=0$. Sea $\varepsilon>0$, existe $\delta_i>0$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}_i)-z_i\|<\varepsilon/3$ siempre que $|\mathcal{P}_i|<\delta_i$,

$1 \leq i \leq 3$, donde $\mathcal{P}_1$ es una partición de $[a, c]$, $\mathcal{P}_2$ es una partición de $[c, b]$ y $\mathcal{P}_3$ una partición de $[a, b]$.

Elijamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$. Sea $\mathcal{Q}_1$ la partión de $[a, c]$ cuyos puntos son los elementos de $\mathcal{P}$ contenidos en $[a, c]$, obsérvese que no necesariamente $c \in \mathcal{P}$, simplemente se incluye. De forma análoga, tomemos $\mathcal{Q}_2$ una partición de $[c, b]$ y $\mathcal{Q}_3$ el refinamiento común de $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$. Escojamos etiquetas al azar para $\mathcal{Q}_3$ y asignemos a $\mathcal{Q}_1$ las etiquetas de $\mathcal{Q}_3$ en los intervalos en que coinciden y hacemos lo mismo para $\mathcal{Q}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|z_3 - (z_1 + z_2)\| &= \|z_3 - z_1 - z_2 - S(f, \mathcal{Q}_3) + S(f, \mathcal{Q}_1) + S(f, \mathcal{Q}_2)\| \\
&\leq \|z_3 - S(f, \mathcal{Q}_3)\| + \|S(f, \mathcal{Q}_1) - z_1\| + \|S(f, \mathcal{Q}_2) - z_2\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + < \frac{\varepsilon}{3} + < \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

como lo anterior se cumple para toda $\varepsilon > 0$, tenemos la igualdad deseada.

c) Sea M una cota de f en $[a, b]$ y $z = \int_a^b f$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|S(f, \mathcal{P}) - z\| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P} = \{s_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^N$ es una partición etiquetada con $|\mathcal{P}| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|z\| &= \|S(f, \mathcal{P}) + z - S(f, \mathcal{P})\| \\
&\leq \|S(f, \mathcal{P})\| + \|z - S(f, \mathcal{P})\| \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^N f(s_i) \Delta t_i \right\| + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^N \|f(s_i)\| \, \Delta t_i + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^N M \Delta t_i + \varepsilon \\
&= M(b - a) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\|z\| \leq M(b - a) + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por lo tanto $\left\| \int_a^b f \right\| \leq M(b - a)$.

d) Sea $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un operador lineal continuo y z la integral de Riemann de f en $[a, b]$. Sabemos que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S(f, \mathcal{P}) - z\| < \varepsilon / \|T\|$ siempre que $|\mathcal{P}| < \delta$. Así,

$$\begin{aligned}\big\|T\big(S(f,\mathcal{P})\big) - T(z)\big\| &= \big\|T\big(S(f,\mathcal{P}) - z\big)\big\| \\ &\leq \|T\| \, \|S(f,\mathcal{P}) - z\| \\ &< \|T\| \frac{\varepsilon}{\|T\|} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto Tf es Riemann integrable en $[a, b]$ con $\int_a^b Tf = T \int_a^b f$.

e) Consecuencia del inciso anterior.

■

Obsérvese que en el inciso b) del teorema anterior no tenemos la desigualdad $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\| \, dx$ porque la Riemann integrabilidad vectorial no garantiza la existencia de la integral real de la funcion $\|f\|$. Algunos de los ejemplos que veremos más adelante exhiben dicho caso.

El próximo teorema establece una relación con el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue y la integral de Riemann-Stieltjes. Para ello, presentaremos primero la siguiente definición.

Definición 3.12. *Sea $f : [a, b] \to \mathbf{X}$. Diremos que f es absolutamente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(d_i) - f(c_i)\| < \varepsilon$$

siempre que $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n$ es una colección finita de subintervalos de $[a, b]$ que no se traslapan tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |d_i - c_i| < \delta.$$

A continuación, mostraremos que el teorema fundamental del cálculo sigue siendo válido en el caso general de una función con valores en un espacio de Banach.

Teorema 3.13. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbf{X}$ *Riemann integrable en* $[a,b]$ *y* $F(t) = \int_a^t f$. *Entonces* F *es absolutamente continua en* $[a,b]$ *y* f *es una derivada escalar de* F *en* $[a,b]$. *Más aun, en cada punto* t *donde* f *es continua, la función* F *es diferenciable y* $F'(t) = f(t)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n$ una colección finita de subintervalos de $[a,b]$ que no se traslapan y M una cota de f en $[a,b]$. Tomemos $\delta = \varepsilon/M$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|F(d_i) - F(c_i)\| &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{c_i}^{d_i} f \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n M(d_i - c_i) \\
&= M \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) \\
&< M \frac{\varepsilon}{M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sea $\Lambda \in \mathbf{X}^*$. Observemos que ΛF es una función a valores reales absolutamente continua por lo que tiene derivada ctp y así

$$\big(\Lambda F(t)\big)' = \left(\Lambda \int_a^t f\right)' = \left(\int_a^t \Lambda f\right)' = \Lambda f(t),$$

para casi toda t en $[a,b]$. Sea ahora $t_0 \in [a,b]$ un punto donde f es continua; sin pérdida de generalidad supongamos que $t > t_0$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$ siempre que $|t - t_0| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) \right\| &= \frac{1}{t - t_0} \left\| \int_{t_0}^{t} f(t) - (t - t_0) f(t_0) \right\| \\
&= \frac{1}{t - t_0} \left\| \int_{t_0}^{t} f(t) - \int_{t_0}^{t} f(t_0) \right\| \\
&= \frac{1}{t - t_0} \left\| \int_{t_0}^{t} \big(f(t) - f(t_0) \big) \right\| \\
&\leq \frac{t - t_0}{t - t_0} \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

En el capítulo 1 mencionamos la importancia de la variación de una función en el caso real; para un espacio de Banach, la *variación débil* es igual de relevante para la existencia de la integral.

Teorema 3.14. *Si la función $f : [a, b] \to \mathbf{X}$ es de variación acotada externa en $[a, b]$, entonces $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbf{X})$. Consecuentemente, una función de variación acotada débil es Riemann integrable.*

Demostración. Mostraremos que f satisface el cuarto criterio dado en el teorema 3.8. Sean $\varepsilon > 0$, M la variación externa de f en $[a, b]$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{M}$. Elijamos $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^{N}$ una partición de $[a, b]$ tal que $t_i = a + \frac{i(b-a)}{N}$ y sean $\mathcal{P}_1 = \{u_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^{N}$ y $\mathcal{P}_2 = \{v_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^{N}$ particiones etiquetadas con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned}
\|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{N} \big(f(u_i) - f(v_i) \big) \Delta t_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{N} \big(f(u_i) - f(v_i) \big) \frac{b - a}{N} \right\| \\
&= \frac{b - a}{N} \left\| \sum_{i=1}^{N} \big(f(u_i) - f(v_i) \big) \right\| \\
&< \frac{b - a}{N} M \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

A continuación mostraremos algunos ejemplos de funciones que exhiben el comportamiento inusual de la integral de Riemann con valores en un espacio de Banach.

El primer ejemplo que presentaremos fue construido por R. Rejouani en [14].

Ejemplo 3.15. *Una función medible Riemann integrable que no es continua casi en todas partes.*

Consideremos el espacio c_0 dotado con la norma del supremo. Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales en $[0,1]$ y definamos $f:[0,1]\to c_0$ dada por

$$f(t)=\begin{cases} e_n & si \quad t=r_n, \\ 0 & si \quad t\notin\{r_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Mostraremos que f es de variación acotada externa, para ello, sea $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^{n}$ una colección de subintervalos de $[0,1]$ que no se traslapan. Observemos que por la definición de la función y la norma en el espacio, se tiene que $\left\|\sum_{i=1}^{n} f(d_i)-f(c_i)\right\|_{\infty}\leq 1$, por lo que f es de variación acotada externa en $[0,1]$.

Para demostrar que f es medible utilizaremos el teorema de medibilidad de Pettis. Recordemos que $(c_0)^*\cong l^1$, así, si $\Lambda\in(c_0)^*$ existe un único $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l^1$ tal que

$$\Lambda(y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n.$$

Observemos que

$$\Lambda f(t)=\begin{cases} x_n & si \quad t=r_n, \\ 0 & si \quad t\notin\{r_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Definiendo la sucesión $f_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{\{r_i\}}$, tenemos que $\Lambda f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda f_n(t)$, por lo que f es débilmente medible. Como c_0 es separable por tener una base de Schauder, todo subconjunto de c_0 es separable y por el teorema de medibilidad de Pettis se tiene entonces que f es medible.

Para probar que f no es continua casi en todas partes, sea t un irracional en $[0,1]$ y $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de racionales en $[0,1]$ que converge a t. Se sigue que

$$\|f(q_n) - f(t)\|_{\infty} = \|f(q_n)\|_{\infty} = 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión $(f(q_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(t)$, consecuentemente f es discontinua en todo irracional, es decir, un conjunto de medida positiva.

El siguiente ejemplo también se debe a R. Rejouani [14] y muestra que la variación externa no es una condición necesaria para la Riemann integrabilidad.

Ejemplo 3.16. *Una función medible, Riemann integrable que no es de variación acotada externa.*

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales en $[0,1]$ y definamos $f:[0,1] \to l^2$ como en el ejemplo anterior,

$$f(t) = \begin{cases} e_n & \text{si} \quad t = r_n, \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \{r_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

La función es medible por el teorema de medibilidad de Pettis, la demostración es igual a la del ejemplo anterior. Veamos que f es Riemann integrable. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon^2$, tomemos $\{s_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^{N}$ una partición etiquetada de $[0,1]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$, entonces

$$\|S(f,\mathcal{P})\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{N} f(s_i)\Delta t_i \right\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i^2 \leq |\mathcal{P}| \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i \leq |\mathcal{P}| = \varepsilon^2.$$

Así, f es integrable con $\int_0^1 f = 0$.

Veamos que f no es de variación acotada externa en $[0,1]$. Sea $N \in \mathbb{N}$ y tomemos un irracional $c_i \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ para $i = 1, ..., N$. Se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(\frac{1}{i}\right) - f(c_i) \right) \right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N},$$

por lo que la variación externa de f no está acotada.

Observemos que f es débilmente continua casi en todo $[0,1]$, ya que si $\Lambda \in (l^2)^*$ y t_0 es un irracional en $[0,1]$, tomando una sucesión $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ que converge a t_0, tendremos

$$f(t_k) = \begin{cases} e_{k_n} & \text{si} \quad t_k = r_n, \\ 0 & \text{si} \quad t_k \notin \{r_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Como $\Lambda(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ para toda $y \in l^2$ y alguna sucesión $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$, se sigue que

$$\Lambda f(t_k) = \begin{cases} x_{k_n} & \text{si} \quad t_k = r_n, \\ 0 & \text{si} \quad t_k \notin \{r_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Como $x \in l^2$, sabemos que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ por lo que

$$\lim_{k\to\infty} |\Lambda f(t_k) - \Lambda f(t_0)| = 0.$$

Como nota final para este ejemplo, la función anterior se puede generalizar a los espacios l^p, $1 < p < \infty$.

El próximo ejemplo se debe a L. Graves [9].

Ejemplo 3.17. *Una función Riemann integrable que no es medible y no es débilmente continua ctp.*

Sea $f : [0,1] \to B[0,1]$ definida por $f(t) = \chi_{[0,t]}$. Mostraremos que f no es medible utilizando el teorema de medibilidad de Pettis. Observemos primero que para cualquier subconjunto E de $[0,1]$ se sigue que $f([0,1] \backslash E) = \{\chi_{[0,t]} : t \in [0,1] \backslash E\}$. Tomaremos cualquier conjunto numerable contenido en $f([0,1] \backslash E)$ y demostraremos que no puede ser denso en $B[0,1]$.

Sea $A = \{\chi_{[0,t_n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset f([0,1] \backslash E)$ un conjunto numerable y $t_0 \in [0,1] \backslash E$ tal que $t_0 \neq t_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\left\| \chi_{[0,t_0]} - \chi_{[0,t_n]} \right\|_{\infty} = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esto nos muestra que ninguna sucesión del conjunto A converge a $\chi_{[0,t_0]}$, por lo que el elemento $\chi_{[0,t_0]}$ no pertence a la cerradura de A, y así, A no es denso en $f([0,1] \backslash E)$. Se sigue del teorema de medibilidad de Pettis que f no es medible.

Para mostrar que f no es débilmente continua, tomemos $t_0 \in (0,1)$ y una sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a t_0 tal que $t_0 \neq t_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, por el teorema de Hahn-Banach

$$\begin{aligned} 1 &= \left\| \chi_{[0,t_0]} - \chi_{[0,t_n]} \right\|_{\infty} \\ &= \| f(t_n) - f(t_0) \|_{\infty} \\ &= \sup \left\{ \left| \Lambda\big(f(t_0) - f(t_n)\big) \right| : \Lambda \in (B[0,1])^*, \|\Lambda\|_* = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sabemos que el supremo en la última igualdad se alcanza, es decir, existe un Λ_0 en el dual de $B[0,1]$, de modo que

$$1 = \left|\Lambda_0\big(f(t_0) - f(t_n)\big)\right| = \left|\Lambda_0 f(t_0) - \Lambda_0 f(t_n)\right|.$$

Lo anterior se tiene para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que Λ_0 es discontinua $\forall t_0 \in (0,1)$.

Veamos que f es Riemann integrable en $[0,1]$. Sea $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^{N}$ una colección finita de subintervalos de $[a,b]$ que no se traslapan, observemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \big(f(d_i) - f(c_i)\big) \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{i=1}^{N} \chi_{[0,d_i]} - \chi_{[0,c_i]} \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{i=1}^{N} \chi_{[c_i,d_i]} \right\|_{\infty} = 1,$$

por lo que f es de variación acotada externa, y así Riemann integrable en $[a,b]$.

El siguiente ejemplo es una modificación de uno construido por A. Alexiewicz y W. Orlicz en [1].

Ejemplo 3.18. *Una función medible Riemann integrable que no es débilmente continua casi en todas partes.*

Consideremos el intervalo $[0,1]$ y los racionales diádicos de la forma $t = \frac{2m-1}{2^k}$ con $2 \leq m \leq 2^{k-1}$. Para cada t de la forma anterior definamos la función continua $g_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_t(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \in \{0, t - 2^{-k+1}, t + 2^{-k}, 1\} \\ 0 & \text{si} \quad s \in \{t - 2^{-k}, t\} \\ \text{lineal} & \text{entre estos puntos.} \end{cases}$$

Definamos ahora, $f:[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ de la siguiente manera

$$f(t) = \begin{cases} g_t & \text{si} \quad t = \frac{2m-1}{2^k},\ 2 \leq m \leq 2^{k-1} \\ 1 & \quad\ \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí, "1"es la función constante $h(s) = 1$, $s \in [0,1]$.

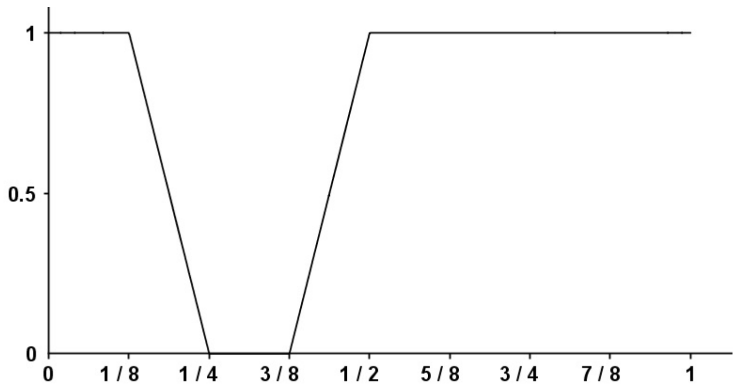

Figura 3.1: $f\left(\frac{3}{8}\right) = g_{\frac{3}{8}}$

Para hacer un análisis que nos permita entender mejor esta función, le llamaremos *base* al intervalo $\{s \in [0,1] : g_t(s) = 0\}$ y *paredes* a los subintervalos de $[0,1]$ donde g_t tiene pendiente distinta de cero, es decir, el dominio de cada función g_t esta conformado por una base, dos paredes, y el conjunto de puntos s donde $g_t(s) = 1$, tal y como su gráfica lo indica. Ahora, dependiendo del valor de k, la base y cada una de las paredes tendrán una longitud de 2^{-k}.

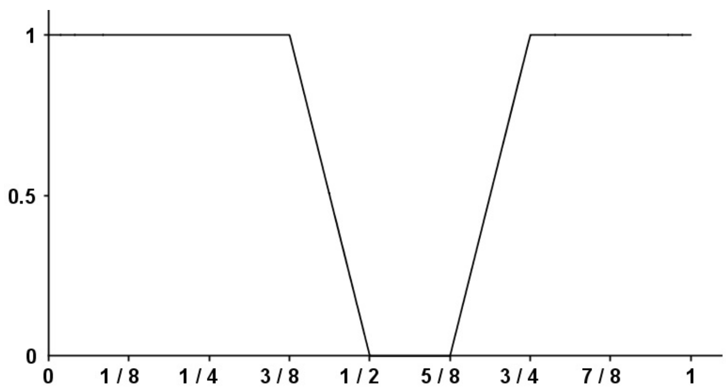

Figura 3.2: $f\left(\frac{5}{8}\right)$

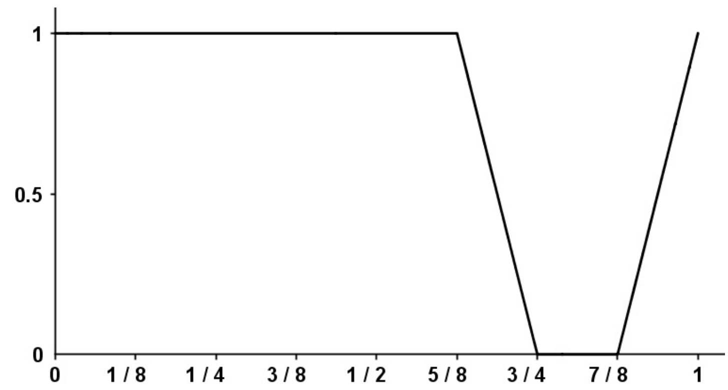

Figura 3.3: $f\left(\frac{7}{8}\right)$

Además, existen $2^{k-1}-1$ racionales diádicos t de la forma $t=\frac{2m-1}{2^k}$, por lo que para $k=3$ tenemos 3 valores de t. Las figuras anteriores muestran que los valores de $f(t)$ lucen como "traslaciones"de la base y las paredes por un valor de 2^{-2}, o de forma general, según k, por 2^{-k+1}. Queremos hacer énfasis, en que el valor de $t_0 \in [0,1]$ es el que determina el número k, lo que a su vez nos da información acerca de la base y paredes de $f(t_0)$ y las funciones determinadas por las imágenes del resto de los racionales diádicos para ese valor k.

Para ver que f es integrable, mostraremos que f satisface el cuarto criterio del teorema 3.8. Sea $\varepsilon > 0$ y $k \geq 2$ un natural tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{5}$. Para cada $n \in \{1,2,...,2^k-1\}$ llamemos I_n al intervalo

$$I_n = \left[\frac{n}{2^k} - 2^{-2k}, \frac{n}{2^k} + 2^{-2k}\right],$$

y sea $\{J_n\}_{n=1}^{2^k}$ los intervalos faltantes en $[0,1]$ enumerados en orden creciente. Sean u_n y v_n puntos arbitrarios en I_n, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{2^k-1} \big(f(u_n) - f(v_n)\big)\lambda(I_n) \right\|_\infty &\leq \sum_{n=1}^{2^k-1} \|f(u_n)-f(v_n)\|_\infty \lambda(I_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{2^k-1} \lambda(I_n) \\
&= (2^k-1)(2\cdot 2^{-2k}) \\
&< 2 \cdot 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Se puede mostrar que $\forall s \in [0,1]$ existen a lo sumo 3 enteros n, de modo que si u_n y v_n pertenecen a J_n entonces $\big(f(u_n) - f(v_n)\big)(s) \neq 0$. No presentaremos la prueba de esto porque es necesario proceder por casos según el valor de s, lo que hace la demostración considerablemente larga, además de que no es nuestro objetivo hacer un análisis completo de esta función. Lo que podemos decir, es que lo anterior sucede porque podemos encontrar racionales diádicos u_n de modo que s está contenido en el interior de una pared de $f(u_n)$ y al tomar por ejemplo v_n irracional, se cumple que $f(u_n)(s) - f(v_n)(s) \neq 0$. La existencia de estos 3 enteros n, asegura que

$$\left\| \sum_{n=1}^{2^k} \big(f(v_n) - f(u_n)\big)\lambda(J_n) \right\|_\infty \leq 3 \max_n \{\lambda(J_n)\} < 3 \cdot 2^{-k}.$$

Sea $\mathcal{P}_\varepsilon$ la partición formada por los intervalos I_n y J_n, tomemos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos particiones de $[0,1]$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$ y etiquetas elegidas al azar. A las etiquetas de $\mathcal{P}_1$ que pertenezcan a los intervalos I_n las denotaremos por v'_n y a las restantes por v_n. De forma similar, denotaremos por u'_n a las etiquetas de $\mathcal{P}_2$ pertenecientes a los intervalos I_n y u_n si $u_n \in J_n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\|_\infty &= \left\| \sum_{n=1}^{2^k-1} \big(f(v'_n) - f(u'_n)\big)\lambda(I_n) + \sum_{n=1}^{2^k} \big(f(v_n) - f(u_n)\big)\lambda(J_n) \right\|_\infty \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{2^k-1} \big(f(v'_n) - f(u'_n)\big)\lambda(I_n) \right\|_\infty + \left\| \sum_{n=1}^{2^k} \big(f(v_n) - f(u_n)\big)\lambda(J_n) \right\|_\infty \\
&< 2 \cdot 2^{-k} + 3 \cdot 2^{-k} = 5 \cdot 2^{-K} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Probaremos ahora que f es medible. Llamemos A al conjunto de racionales diádicos tomados inicialmente en este ejemplo y sea $B = [0,1] \backslash A$. Entonces

$$f = 1\chi_B + \sum_{s \in A} f(s)\chi_{\{s\}},$$

por lo que f es medible.

Ahora, mostraremos que f no es débilmente continua casi en todo $[0,1]$, para ello veremos que f no es débilmente continua en todo irracional en $[0,1]$. Tomemos de esta manera, un irracional s en $[0,1]$ y $\Lambda \in (\mathcal{C}[0,1])^*$ definido por $\Lambda(\phi) = \phi(s)$. Existe una cantidad infinita de enteros k, tal que

$$\frac{2m_k - 2}{2^k} < s < \frac{2m_k - 1}{2^k}$$

para algún entero $m_k \geq 2$. Sea $t_k = \frac{2m_k - 1}{2^k}$, la sucesión $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a s y

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda f(t_k) = \lim_{k\to\infty} f(t_k)(s) = \lim_{k\to\infty} g_{t_k}(s) = 0 \neq 1 = f(s) = \Lambda f(s),$$

lo que implica que Λf es discontinua en un conjunto de medida positiva, y así se tiene que f no es débilmente continua.

El último ejemplo se debe a B. Pettis [13].

Ejemplo 3.19. *Una función Riemann integrable f tal que $\|f\|$ no es medible, por lo que $\|f\|$ no es Lebesgue ni Riemann integrable.*

Sea E un conjunto no medible en $[0,1]$ y defina $f : [0,1] \to B[0,1]$ por $f(t) = 0$ si $t \notin E$ y $f(t) = \chi_{\{t\}}$ si $t \in E$. Sea $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{N}$ una colección finita de intervalos que no se traslapan. Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \big(f(d_i) - f(c_i)\big) \right\|_{\infty} \leq 1.$$

Así, f es de variación acotada externa, consecuentemente Riemann integrable. Para probar que $\|f\|$ no es medible, observemos que

$$\|f\|(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in E \\ 0 & \text{si} \quad t \notin E. \end{cases}$$

Esto es, $\|f\| = \chi_E$, lo que implica que $\|f\|$ no es medible.

En el caso real, una función Riemann integrable es Lebesgue integrable. La integral de Bochner es una generalización de la integral de Lebesgue, por lo que tiene sentido preguntarnos si una función Riemann integrable con valores en un espacio de Banach es Bochner integrable, sin embargo, éste no siempre es el caso. No obstante, para obtener la Bochner integrabilidad lo único que se necesita es que la función sea medible.

Teorema 3.20. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbf{X}$ *Riemann integrable en* $[a, b]$ *y medible, entonces* f *es Bochner integrable en* $[a, b]$.

Demostración. Como f es medible y Riemann integrable, la función $\|f\|$ es medible y acotada. Por lo tanto, $\|f\|$ es Lebesgue integrable en $[a, b]$, lo que implica que f es Bochner integrable en $[a, b]$. ■

Capítulo 4

La propiedad de Lebesgue de un espacio de Banach

Para funciones con valores reales la integral de Riemann puede definirse usando sumas superiores y sumas inferiores, lo que se conoce como la integral de Darboux, es decir, en el caso real una función acotada es Riemann integrable si y sólo si es Darboux integrable. Sin embargo, si se considera una función con valores en un espacio vectorial, el conjunto de funciones Darboux integrables está propiamente contenido en el conjunto de funciones Riemann integrables. Durante la exposición de este capítulo, presentaremos un resultado que nos ayudará a entender dicha contención, lo cual nos servirá como base para establecer la *propiedad de Lebesgue* de un espacio de Banach. Por ahora, empezaremos con algunas definiciones y resultados preliminares que han sido tomados de [8].

Definición 4.1. *Sean $f\colon[a,b]\to\mathbf{X}$ y $\mathcal{P}=\{t_i\}_{i=0}^N$ una partición de $[a,b]$. Se define la oscilación de f respecto a la partición $\mathcal{P}$ como*

$$\omega(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{N}\omega(f,[t_{i-1},t_i])\Delta t_i,$$

donde $\omega(f,[t_{i-1},t_i])=\sup\{\|f(u)-f(v)\| : u,v\in[t_{i-1},t_i]\}$ es la oscilación de la función f en el intervalo $[t_{i-1},t_i]$.

Definición 4.2. *Sea* $f:[a,b]\to \mathbf{X}$.

a) *La función* f *es* D_δ *integrable en* $[a,b]$ *si* $\forall\varepsilon>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que* $\omega(f,\mathcal{P})<\varepsilon$ *siempre que* $\mathcal{P}$ *es una partición de* $[a,b]$ *que satisface* $|\mathcal{P}|<\delta$.

b) *La función* f *es* D_Δ *integrable en* $[a,b]$ *si* $\forall\varepsilon>0$ *existe una partición* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *de* $[a,b]$ *tal que* $\omega(f,\mathcal{P})<\varepsilon$ *siempre que* $\mathcal{P}$ *es un refinamiento de* $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Notemos que las dos definiciones anteriores son muy similares a los conceptos de R_δ y R_Δ integral mencionados en el capítulo 3, por lo que es de esperarse que los conceptos de D_δ y D_Δ integrabilidad sean equivalentes.

Teorema 4.3. *La función* $f:[a,b]\to\mathbf{X}$ *es* D_δ *integrable en* $[a,b]$ *si y sólo si* f *es* D_Δ *integrable en* $[a,b]$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es D_δ integrable en $[a,b]$. Dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $\omega(f,\mathcal{P})<\varepsilon$ siempre que $|\mathcal{P}|<\delta$. Sea $\mathcal{P}_\varepsilon=\{t_i\}_{i=0}^N$ una partición tal que $|\mathcal{P}_\varepsilon|<\delta$. Recordemos que si $\mathcal{P}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$, se tiene que $|\mathcal{P}|<|\mathcal{P}_\varepsilon|$. De modo que por hipótesis, $\omega(f,\mathcal{P})<\varepsilon$, con lo que se sigue que f es D_Δ integrable en $[a,b]$.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es D_Δ integrable en $[a,b]$. Observemos que f es acotada, para ello, sea $x_0\in[a,b]$ y $\varepsilon=1$, entonces existe una partición de $[a,b]$, $\mathcal{P}_\varepsilon=\{t_i\}_{i=0}^N$ tal que $\omega(f,\mathcal{P})<\varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$. Como $x_0\in[t_{i-1},t_i]$ para algún $i\in\{1,2,...,N\}$ y $\omega(f,[t_{i-1},t_i])<1$, tenemos que

$$\|f(x_0)-f(t_i)\|\,\Delta t_i<1.$$

Despejando, se sigue que $\|f(x_0)\|<\Delta t_i^{-1}+\|f(t_i)\|$, y consecuentemente para cualquier $x\in[a,b]$,

$$\|f(x)\|<\max_{1\le i\le N}\big\{\,\|f(t_i)\|+\Delta t_i^{-1}\big\}.$$

Usando este hecho, mostraremos que f es D_δ integrable en $[a,b]$. Sea $\varepsilon>0$ y $\mathcal{P}_\varepsilon=\{t_i\}_{i=0}^N$ partición de $[a,b]$ tal que $\omega(f,\mathcal{P})<\varepsilon/2$ siempre que $\mathcal{P}$ refina a

$\mathcal{P}_\varepsilon$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{4MN}$ y $\mathcal{P} = \{u_i\}_{i=0}^R$ partición de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$. Sea $\mathcal{P}_1$ el refinamiento común entre $\mathcal{P}_\varepsilon$ y $\mathcal{P}$ y denotemos por $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^K$ a los intervalos de $\mathcal{P}$ que contienen puntos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ en su interior, se tiene que $K \leq N-1$ y

$$\begin{aligned}
\omega(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{R} \omega(f,[u_{i-1},u_i])\Delta t_i \\
&\leq \omega(f,\mathcal{P}_1) + \sum_{i=1}^{K} \omega(f,[c_i,d_i])\Delta t_i \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{K} 2M\Delta t_i \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M(N-1)\varepsilon}{4MN} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es D_δ integrable en $[a,b]$. ∎

Definición 4.4. *Diremos que una función $f : [a,b] \to \mathbf{X}$ es Darboux integrable en $[a,b]$ si es D_δ o D_Δ integrable en $[a,b]$.*

Mostraremos ahora que toda función Darboux integrable en $[a,b]$ es Riemann integrable en $[a,b]$. La prueba es directo de la definición de Darboux integrabilidad.

Teorema 4.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbf{X}$ Darboux integrable en $[a,b]$. Entonces, f es Riemann integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos que f es Darboux integrable en $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N$ de $[a,b]$, tal que si $\mathcal{P}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$ entonces $\omega(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Sean $\mathcal{P}_1 = \{u_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^N$ y $\mathcal{P}_2 = \{v_i, [t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^N$ particiones con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned}\|S(f,\mathcal{P}_1)-S(f,\mathcal{P}_2)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{N}\big(f(u_i)-f(v_i)\big)\Delta t_i\right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\|f(u_i)-f(v_i)\|\,\Delta t_i \\ &\leq \omega(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Como f satisface el cuarto criterio del teorema 3.8, f es Riemann integrable en $[a,b]$. ■

El siguiente concepto nos será de gran ayuda durante la prueba de algunos de los teoremas que le siguen.

Definición 4.6. *Sea $f:[a,b]\to \mathbf{X}$. Para cada $t\in(a,b)$, definimos la oscilación de f en t como el valor*

$$\omega(f,t)=\lim_{\delta\to 0^+}\omega(f,[t-\delta,t+\delta]).$$

La oscilación en a es el valor

$$\omega(f,a)=\lim_{\delta\to 0^+}\omega(f,[a,a+\delta]),$$

de manera análoga se define la oscilación en b.

Una de las principales razones por las que el concepto anterior es importante, es la siguiente observación.

Observación 4.7. *Una función $f:[a,b]\to \mathbf{X}$ es continua en $t\in[a,b]$ si y sólo si $\omega(f,t)=0$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que f es continua en $t_0\in(a,b)$. Así, dado $N\in\mathbb{N}$ existe $\delta_N>0$, tal que si $|t-t_0|<\delta_N$ entonces $\|f(t)-f(t_0)\|<\frac{1}{2N}$. Consideremos $u,v\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$, entonces

$$\|f(u)-f(v)\|\leq\|f(u)-f(t_0)\|+\|f(t_0)-f(v)\|\leq\frac{1}{N}.$$

Esto nos dice que $\sup\big\{\, \|f(u)-f(v)\| : u,v\in[t_0-\delta,t_0+\delta]\big\} \leq \frac{1}{N}$. Además, podemos elegir, δ_{N+1} tal que $\delta_{N+1}<\delta_N$. Con esto se concluye que

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega(f,[t_0-\delta,t_0+\delta]) = 0.$$

La demostración es análoga cuando f es continua en los extremos de $[a,b]$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\omega(f,t_0)=0$, lo cual quiere decir que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $u,v\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$ entonces $\|f(u)-f(v)\|<\varepsilon$. En particular, para t_0 y u tal que $|t_0-u|<\delta$ se tiene que $\|f(t_0)-f(u)\|<\varepsilon$. La demostración es análoga cuando t_0 es algún extremo de $[a,b]$. ■

Es bien sabido que el conjunto $J_\alpha=\{t\in[a,b]:\omega(f,t)\geq\alpha\}$ es cerrado cuando f toma valores en $\mathbb{R}$, ver [2], pág. 171. Resulta que en el caso vectorial, esta afirmación sigue siendo verdadera y además, nos será útil en la demostración del teorema 4.9 que probaremos más adelante.

Lema 4.8. *Sea $f:[a,b]\to\mathbf{X}$. El conjunto $J_\alpha=\{t\in[a,b]:\omega(f,t)\geq\alpha\}$ es cerrado para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Demostración. Procederemos por contradicción. Sea t un punto de acumulación de J_α y supongamos que $t\notin J_\alpha$. Entonces, $\omega(f,t)<\alpha$, por lo que existe un δ_0 que satisface

$$\sup\{\|f(u)-f(v)\| : u,v\in[t-\delta_0,t+\delta_0]\}<\alpha.$$

La desigualdad también se cumple en el abierto $A=(t-\delta_0,t+\delta_0)$, de modo que A no contiene puntos que pertenecen a J_α, pues si $y\in A$, existe $\delta>0$ suficientemente pequeño tal que $[y-\delta,y+\delta]\subset(t-\delta_0,t+\delta_0)$ y consecuentemente $\omega(f,y)<\alpha$. Esto contradice que t es un punto de acumulación de J_α, y por lo tanto $t\in J_\alpha$. ■

El siguiente teorema aclara el por qué la Darboux integrabilidad y la Riemann integrabilidad no son equivalentes en el caso general de un espacio de Banach. Veremos que esto está íntimamente relacionado con la continuidad casi en todas partes de una función.

Teorema 4.9. *Una función* $f:[a,b]\to \mathbf{X}$ *es Darboux integrable en* $[a,b]$ *si y sólo si* f *es acotada y continua casi en todo* $[a,b]$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es Darboux integrable en $[a,b]$, ya sabemos que f es acotada, mostraremos que f es continua casi en todo $[a,b]$. Sea $E_n=\{t\in[a,b]:\omega(f,t)\geq\frac{1}{n}\}$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y llamemos $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. Como cada E_n es cerrado y consecuentemente medible, se sigue que E es medible. Supongamos que $\lambda(E)\neq 0$, así, existe algún $N\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda(E_N)\neq 0$. Sea $\eta=\lambda(E_N)$, $\mathcal{P}$ cualquier partición de $[a,b]$ y $\mathcal{P}_1$ los puntos de $\mathcal{P}$ cuyos intervalos contienen puntos de E_N en su interior; observemos que

$$\omega(f,\mathcal{P})\geq\sum_{I\in\mathcal{P}_1}\omega(f,I)\lambda(I)\geq\frac{1}{N}\lambda(E_N)=\frac{\eta}{N},$$

lo que contradice que f es Darboux integrable. Así, f es continua ctp en $[a.b]$.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es acotada y continua ctp en $[a,b]$. Sea M una cota de f en $[a,b]$, $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$ y para dicho N sea $E_N=\big\{t\in[a,b]:\omega(f,t)\geq\frac{1}{N}\big\}$. Construiremos una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que la suma de las longitudes de los intervalos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ que intersectan a E_N es menor que $\frac{\varepsilon}{4M}$, y la oscilación de f en cada intervalo de $\mathcal{P}_\varepsilon$ que no intersecta a E_N es menor que N^{-1}.

Llamaremos $\mathcal{P}'_\varepsilon$ a la partición cuyos puntos son los extremos de intervalos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ que intersectan a E_N y $\mathcal{P}''_\varepsilon$ los extremos de intervalos restantes. Como $\lambda(E_N)=0$, existe una colección de intervalos $\{(c_i,d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $E_N\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(c_i,d_i)$ y $\sum_{i=1}^{\infty}(d_i-c_i)<\frac{\varepsilon}{4M}$. Debido a que E_N es acotado y cerrado, es compacto, y así, sólo una cantidad finita de intervalos (c_i,d_i) cubren a E_N. Agreguemos los extremos del intervalo $[c_i,d_i]\cap[a,b]$ a $\mathcal{P}'_\varepsilon$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Ahora, sea $[\alpha,\beta]$ un intervalo en $[a,b]$ contiguo a algún intervalo de $\mathcal{P}'_\varepsilon$. Como $[\alpha,\beta]\cap E_N=\phi$, para cada $t\in[\alpha,\beta]$ existe $\delta_t>0$ tal que $\omega(f,[t-\delta_t,t+\delta_t])<\frac{1}{N}$. La colección $\{(t-\delta_t,t+\delta_t):t\in[\alpha,\beta]\}$ es una cubierta abierta de $[\alpha,\beta]$, y como este intervalo es compacto, existe una subcubierta finita.

Los extremos en (α,β) de los intervalos que comprenden la subcubierta finita junto con $\{\alpha,\beta\}$ forman una partición de $[\alpha,\beta]$. Agreguemos estos puntos a $\mathcal{P}''_\varepsilon$ y hagamos lo anterior para cada intervalo contiguo a los intervalos de $\mathcal{P}'_\varepsilon$. Claramente $\mathcal{P}'_\varepsilon$ y $\mathcal{P}''_\varepsilon$ forman una partición de $[a,b]$.

Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$ que refina a $\mathcal{P}_\varepsilon$ y $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ los intervalos de $\mathcal{P}$ que están contenidos en intervalos de $\mathcal{P}'_\varepsilon$ y $\mathcal{P}''_\varepsilon$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\omega(f,\mathcal{P}) &= \sum_{I\in\mathcal{P}'}\omega(f,I)\lambda(I)+\sum_{I\in\mathcal{P}''}\omega(f,I)\lambda(I)\\ &\le 2M\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{1}{N}\sum_{I\in\mathcal{P}''}\lambda(I)\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{b-a}{N}\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Consecuentemente f es Darboux integrable en $[a,b]$. ■

Ya hemos visto la relación entre la Riemann integrabilidad y la Bochner integrabilidad; existe también, un resultado que establece una conexión entre la integral de Darboux y la integral de Bochner.

Teorema 4.10. *Sea $f:[a,b]\to\mathbf{X}$ Darboux integrable en $[a,b]$. Entonces f es medible y $\|f\|$ es Riemann integrable en $[a,b]$. Consecuentemente, f es Bochner integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Llamemos D al conjunto de puntos de discontinuidad de f, así $\lambda(D)=0$. Sea $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbf{X}$ la restricción de f al conjunto $[a,b]\backslash D$. Como $\tilde{f}$ es medible por ser continua, existe $E\subset[a,b]\backslash D$ con $\lambda(E)=0$ y $\tilde{f}\big(([a,b]\backslash D)\backslash E\big)$ separable, pero

$$\tilde{f}\big(([a,b]\backslash D)\backslash E\big)=\tilde{f}\big([a,b]\backslash(D\cup E)\big)=f\big([a,b]\backslash(D\cup E)\big).$$

Como f es débilmente medible por ser continua ctp y $f\big([a,b]\backslash(D\cup E)\big)$ es separable con $\lambda(D\cup E)=0$, se sigue por el teorema de medibilidad de Pettis que f es fuertemente medible. Ahora, $\|f\|$ es acotada y continua ctp por lo que $\|f\|$ es Riemann integrable en $[a,b]$, y por lo tanto, Lebesgue integrable en $[a,b]$. Se tiene entonces que f es Bochner integrable. ■

Como exhibimos en el ejemplo 3.15, a diferencia del caso real existen funciones Riemann integrables que no son continuas casi en todas partes, por ello es un problema interesante determinar en qué espacios toda función Riemann integrable es continua casi en todas partes, o en otras palabras, determinar en qué espacios Riemann integrabilidad y Darboux integrabilidad son equivalentes. Dado que H. Lebesgue probó que $\mathbb{R}$ tiene esta propiedad, presentamos la siguiente definición.

Definición 4.11. *Un espacio de Banach* $\mathbf{X}$ *tiene la propiedad de Lebesgue si cada función Riemann integrable* $f\colon [a,b] \to \mathbf{X}$ *es continua ctp en* $[a,b]$.

Observación 4.12. *Sea* $\mathbf{Y}$ *un subespacio de* $\mathbf{X}$.

a) Si $\mathbf{X}$ *tiene la propiedad de Lebesgue, entonces* $\mathbf{Y}$ *tiene la propiedad de Lebesgue.*

b) Si $\mathbf{Y}$ *no tiene la propiedad de Lebesgue, entonces* $\mathbf{X}$ *no tiene la propiedad de Lebesgue.*

Enunciamos la observación anterior, debido a que hay muchos espacios donde este sencillo resultado es fácilmente aplicable. Veremos a continuación algunos ejemplos de ello.

Teorema 4.13. *Los siguientes espacios no tienen la propiedad de Lebesgue.*

a) Los espacios c_0, c, l^∞, $\mathcal{C}[a,b]$, $B[a,b]$ *y* $L^\infty[a,b]$ *con norma* $\| \, \|_\infty$.

b) l^p, *para* $1 < p < \infty$.

c) El espacio $L^1[a,b]$.

d) El dual $\mathbf{X}^*$ *si* $\mathbf{X}$ *contiene una copia de* l^1.

Demostración. Por el ejemplo 3.15, c_0 no tiene la propiedad de Lebesgue. Como $c_0 \subset c \subset l^\infty$, utilizando la observación anterior, concluimos que c y l^∞ no tienen la propiedad de Lebesgue. Por el ejemplo 3.18, $\mathcal{C}[a,b]$ no tiene la propiedad de Lebesgue, consecuentemente $B[a,b]$ y $L^\infty[a,b]$ tampoco tienen la propiedad de Lesbesgue.

El ejemplo 3.16 es válido para $1 < p < \infty$, por lo que los espacios l^p, $1 < p < \infty$ no tienen la propiedad de Lebesgue. Ahora, sabemos que $L^2[a,b] \hookrightarrow L^1[a,b]$, debido a que si $f \in L^2[a,b]$, entonces

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| d\lambda = \int_a^b |f \cdot 1| d\lambda \leq \left(\int_a^b |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \lambda\big([a,b]\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $L^2[a,b]$ es un espacio de Hilbert separable, entonces $L^2[a,b] \cong l^2$. Así, $l^2 \hookrightarrow L^1[a,b]$. Se sigue que al no tener l^2 la propiedad de Lebesgue, $L^1[a,b]$ tampoco la tiene.

Para el último inciso, supongamos que $\mathbf{X}$ tiene una copia de l^1 que denotaremos por V. Como $l^\infty \cong (l^1)^*$, cada funcional $f : V \to \mathbb{R}$ puede ser identificado con un único $x \in l^\infty$. Usando el teorema de Hahn-Banach podemos extender f a $F_x : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, un funcional lineal continuo tal que $\|F_x\|_{\mathbf{X}^*} = \|f\|_{V^*}$. Aplicando el axioma de elección, podemos elegir una única extension, de aquí concluimos que $l^\infty \cong \{F_x \in \mathbf{X}^* : x \in l^\infty\}$. Esto, nos dice que $\mathbf{X}^*$ contiene una copia de l^∞, debido a que l^∞ no tiene la propiedad de Lebesgue, se sigue que $\mathbf{X}^*$ tampoco tiene esta propiedad. ■

En los ejemplos anteriores observamos que algunos espacios de dimensión infinita no tienen la propiedad de Lebesgue, el siguiente teorema mostrado por G. da Rocha en [15] presenta características suficientes para que un espacio $\mathbf{X}$ no tenga dicha propiedad. Aquí utilizaremos el teorema 1.34 probado por R. James.

Teorema 4.14. *Todo espacio de Banach de dimensión infinita y uniformemente convexo no tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach uniformemente convexo de dimensión infinita. Como $\mathbf{X}$ es infinito dimensional, contiene una sucesión básica $(x_n)_{n=1}^\infty$ con

$\|x_n\| = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Llamemos $\mathbf{Y}$ al espacio cerrado generado por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $\mathbf{Y}$ es uniformemente convexo y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base normalizada para $\mathbf{Y}$. Ahora, mostraremos que $\mathbf{Y}$ no tiene la propiedad de Lebesgue. Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales en $[0,1]$ y sea $f : [0,1] \to \mathbf{Y}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \\ x_n & \text{si} \quad t = r_n. \end{cases}$$

Claramente f es discontinua en un conjunto de medida positiva. Mostraremos que f es Riemann integrable en $[0,1]$ con integral 0. Sea $\varepsilon > 0$ y escojamos $M > 0$ y $r > 1$ como en el teorema 1.34 de James. Tomemos $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{r}{r-1}}$ y sea $\mathcal{P} = \{s_k, [t_{k-1}, t_k]\}_{k=1}^{N}$ una partición de $[0,1]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$, así

$$\begin{aligned} \|S(f,\mathcal{P})\| &= \left\| \sum_{k=1}^{N} f(s_k)\Delta t_k \right\| \\ &\leq M \left(\sum_{k=1}^{N} (\Delta t_k)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &< M \left(\sum_{k=1}^{N} \delta^{r-1}\Delta t_k \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= M\delta^{\frac{r-1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{N} \Delta t_k \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= M\frac{\varepsilon}{M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $\int_a^b f = 0$. Se sigue que $\mathbf{Y}$ no tiene la propiedad de Lebesgue y consecuentemente $\mathbf{X}$ tampoco tiene dicha propiedad. ■

Corolario 4.15. *Los siguientes espacios no tienen la propiedad de Lebesgue.*

a) Espacios de Hilbert de dimensión infinita.

b) Los espacios $L^p[a,b]$ para $1 < p < \infty$.

Demostración. Tomemos H un espacio de Hilbert y denotemos su norma por $\| \ \|$. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en H con $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1 \tag{4.1}$$

Por la ley del paralelogramo se sigue que

$$\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 = 4.$$

Por (4.1) tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$\left| \, \|x_n + y_n\|^2 - 4 \right| < \varepsilon^2.$$

Consecuentemente

$$\|x_n - y_n\|^2 = 4 - \|x_n + y_n\|^2 < \varepsilon^2,$$

lo que implica $\|x_n - y_n\| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. De aquí, H es uniformemente convexo.

No presentaremos la prueba de que los espacios $L^p[a,b]$ con $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos, debido a que dicha prueba, además de extensa, necesita de conceptos y resultados que se alejan del propósito de esta tesis, el lector puede consultarla en [11], p. 450. ■

$\mathbb{R}$ es un espacio de dimensión finita que tiene la propiedad de Lebesgue y en el teorema 4.13 exhibimos algunos espacios de dimensión infinita que no tienen dicha propiedad. Intuitivamente, uno especularía que la dimensión del espacio guarda alguna relación con la propiedad de Lebesgue. Resulta que, el hecho de que un espacio de Banach $\mathbf{X}$ tenga dimensión finita es una condición suficiente para que $\mathbf{X}$ cuente con la propiedad de Lebesgue.

Teorema 4.16. *Todo espacio de Banach de dimensión finita tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Dado que en un espacio normado de dimensión infinita todas las normas son equivalentes, sin pérdida de generalidad podemos reducirnos a $\mathbb{R}^n$ con su norma usual. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann integrable, $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$. Veamos que cada $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable. Sea $z = (z_1, ..., z_n) = \int_a^b f$ y $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que $\|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$. Veamos que esta partición asegura la Riemann integrabilidad para cada f_i, $i = 1, ..., n$. Sea $\mathcal{P}$ un refinamiento de $\mathcal{P}_\varepsilon$, entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$|S(f_i,\mathcal{P}) - z_i| \leq \|S(f,\mathcal{P}) - z\| < \varepsilon.$$

Ahora, como $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de Lebesgue, el conjunto de discontinuidades D_i en $[a,b]$ de cada f_i tiene medida cero. Entonces, si llamamos D al conjunto de discontinuidades de f, tenemos que $D = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$ tiene medida cero. Así, $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de Lebesgue. ∎

En el último teorema de este capítulo probaremos que l^1 tiene la propiedad de Lebesgue. Este hecho fue probado por A. Nemirovski, M. Ochan y R. Rejouani en [12] y fue descubierto independientemente por G. da Rocha en [15].

Teorema 4.17. *El espacio l^1 tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Bastará probar que cualquier función $f : [0,1] \to l^1$ acotada, que no es continua ctp en $[0,1]$ no puede ser Riemann integrable. El resultado puede generalizarse fácilmente a un intervalo $[a,b]$.

Tomemos $f : [0,1] \to l^1$ acotada pero no continua ctp en $[0,1]$. Por consiguiente, existe $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que $\lambda(H) = \alpha$ donde $H = \{t \in [0,1] : \omega(f,t) \geq \beta\}$. Mostraremos que para $\varepsilon_0 = \frac{\alpha\beta}{4}$ y cada $\delta > 0$, existen particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de $[0,1]$ con normas menores a δ que satisfacen $\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| \geq \frac{\alpha\beta}{4}$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$ y $\mathcal{P}_N = \left\{\frac{K}{N}\right\}_{K=0}^{N}$. Tomemos $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{p}$ todos los intervalos de $\mathcal{P}_N$ tal que $\lambda(H \cap (c_i, d_i)) > 0$. Notemos que debido a que $H \subset \bigcup_{i=1}^{p}(c_i, d_i)$, se tiene que $\lambda(H) = \alpha \leq \frac{p}{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ sea $e_j^* : l^1 \to \mathbb{R}$ el funcional definido para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ como $e_j^*(y) = y_j$. Llamemos D_j al conjunto de discontinuidades de la función $e_j^* f$ en $[0,1]$. Si $\lambda(D_j) > 0$ para algún j, tendríamos que $e_j^* f$ no es Riemann integrable en $[0,1]$, consecuentemente f tampoco lo sería y habríamos terminado. Supongamos pues, que el conjunto $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_j$ tiene medida cero, lo que significa que $e_j^* f$ es continua en $[0,1]\backslash D$.

Sea $\varepsilon = \frac{\alpha\beta}{16}$. Construiremos conjuntos $U = \{u_i\}_{i=1}^p$, $V = \{v_i\}_{i=1}^p$ y $W = \{n_i\}_{i=0}^p$ con $u_i \in (H\backslash D) \cap (c_i, d_i)$, $v_i \in (c_i, d_i)$ para cada $i = 1, ..., p$ y $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_p$ tal que si $z_i = f(u_i) - f(v_i) = (a_j^i)_{j=1}^{\infty}$, entonces

1. $\|z_i\| \geq \dfrac{\beta}{2}$ para toda $i = 1, ..., p$.
2. $\sum\limits_{j=n_i}^{\infty} |a_j^i| < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ para toda $i = 1, ..., p$.
3. $\sum\limits_{j=1}^{n_{i-1}} |a_j^i| < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ para toda $i = 2, ..., p$.

En otras palabras, dividimos la sucesión z_i en tres partes, donde la primera y última parte satisfacen 2 y 3. Sea $n_0 = 0$ y escójase $u_1 \in (H\backslash D) \cap (c_1, d_1)$. Como $\omega(f, u_1) \geq \beta$ existe un punto $v_1 \in (c_1, d_1)$ tal que $\|f(u_1) - f(v_1)\| \geq \frac{\beta}{2}$. Sea $z_1 = f(u_1) - f(v_1) = (a_j^1)_{j=1}^{\infty}$ y tomemos un entero $n_1 > n_0$ tal que $\sum_{j=n_1}^{\infty} |a_j^1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, sea $u_2 \in (H\backslash D) \cap (c_2, d_2)$. Dado que $\omega(f, u_2) \geq \beta$, y $e_j^* f$ es continua en u_2 para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $v_2 \in (c_2, d_2)$ tal que $\|f(u_2) - f(v_2)\| \geq \frac{\beta}{2}$ y

$$\sum_{j=1}^{n_1} |e_j^* f(u_2) - e_j^* f(v_2)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.2}$$

Sea $z_2 = f(u_2) - f(v_2) = (a_j^2)_{j=1}^{\infty}$. Entonces, por (4.2) se tiene que $\sum_{j=1}^{n_1} |a_j^2| < \frac{\varepsilon}{4}$. Elijamos un $n_2 > n_1$ tal que $\sum_{j=n_2}^{\infty} |a_j^2| < \frac{\varepsilon}{4}$. Continuamos este proceso hasta haber completado p pasos y tendremos los conjuntos deseados.

Sea $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ la base de Schauder usual para l^1 y para $1 \leq i \leq p$ sea

$$y_i = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i - 1} a_j^i e_j.$$

Entonces

$$\|z_i - y_i\| = \sum_{j=1}^{n_{i-1}} |a_j^i| + \sum_{j=n_i}^{\infty} |a_j^i| < \frac{2\varepsilon}{2^i}.$$

También se tiene que

$$\|y_i\| = \|z_i\| - \|z_i - y_i\| \geq \frac{\beta}{2} - \frac{2\varepsilon}{2^i}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{p} z_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} y_i + z_i - y_i \right\| \\
&\geq \left\| \sum_{i=1}^{p} y_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{p} (y_i - z_i) \right\| \\
&\geq \sum_{i=1}^{p} \|y_i\| - \sum_{i=1}^{p} \|y_i - z_i\| \\
&\geq \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{2\varepsilon}{2^i} \right) - \sum_{i=1}^{p} \frac{2\varepsilon}{2^i} \\
&= \frac{p\beta}{2} - 4\varepsilon \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} \\
&> \frac{p\beta}{2} - 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomemos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos particiones etiquetadas de $[0,1]$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_N$. Las etiquetas de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son u_i y v_i respectivamente, en los intervalos $[c_i, d_i]$ para $1 \leq i \leq p$, y las etiquetas en los intervalos restantes son iguales. Entonces $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son particiones con normas menores a δ y

$$\begin{aligned}
\|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \big(f(u_i) - f(v_i) \big) \Delta t_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{p} \frac{z_i}{N} \right\| \\
&\geq \frac{p\beta}{2N} - \frac{4\varepsilon}{N} \\
&\geq \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{16N} \\
&\geq \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{4} \\
&= \frac{\alpha\beta}{4} \\
&= \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f no es Riemann integrable en $[0,1]$. Generalizando el resultado a cualquier intervalo $[a,b]$, obtenemos que l^1 tiene la propiedad de Lebesgue. ■

A pesar de los resultados anteriores que presentan condiciones suficientes para que un espacio de Banach tenga la propiedad de Lebesgue, no hemos exhibido que condiciones caracterizan a los espacios de Banach que cuentan con dicha propiedad. Lamentablemente no responderemos dicha pregunta en esta tesis, pues hacerlo implicaría alargar considerablemente nuestro trabajo, sin embargo, es pertinenente comentar que G. da Rocha, en su tesis doctoral [15] muestra que si un espacio de Banach $\mathbf{X}$ tiene la propiedad de Schur, entonces $\mathbf{X}$ tiene la propiedad de Lebesgue si y sólo si, cada función débilmente Riemann integrable es Darboux integrable. Que un espacio de Banach tenga la propiedad de Schur, significa que toda sucesión débilmente convergente es fuertemente convergente. Por cierto, esta propiedad la goza el espacio de sucesiones l^1.

Conclusiones

Uno de los aspectos más interesante respecto a la construcción del conocimiento matemático, es que en algunas ocasiones el estudio de un objeto matemático en particular nos puede llevar a descubrir nuevas propiedades o conceptos que aunque guardan relación con el objeto inicial de estudio, también abren las puertas a un análisis distinto al que originalmente se habia planteado. En el caso de la integral de Riemann vectorial, y como se puede observar en esta tesis, finalizamos en la propiedad de Lebesgue de un espacio de Banach, la cual nos proporciona una nueva manera de analizar dichos espacios para enriquecer nuestro entendimiento de ellos.

En esta tesis pudimos ver que la integral de Riemann vectorial satisface el teorema fundamental del cálculo, uno de los resultados más importantes que se desearía tener en una generalización de la integral, y logramos hacer pequeñas comparaciones con la generalización de la integral de Lebesgue, es decir, la integral de Bochner.

Queremos resaltar la importancia del concepto de variación de una función, pues tanto en el caso real como en el vectorial, dicho concepto nos permite obtener una condición suficiente que garantice la integrabilidad de Riemann.

Otro punto importante es la Darboux integrabilidad; si estudiáramos solamente la Riemann y Darboux integrabilidad desde la perspectiva del caso real, jamás habríamos descubierto que en realidad una es un caso particular de la otra, lo que destaca la magnitud que tiene la generalización de conceptos como una parte fundamental de la labor del matemático.

Apéndice

Definición 4.18. *Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbf{X}$. La envolvente convexa de S, denotada por $co(S)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S.*

Notemos que la envolvente es distinta del vacío, pues $\mathbf{X}$ es un conjunto convexo que contiene a S. Es claro que la envolvente convexa es un conjunto convexo, además, podemos caracterizar a la envolvente convexa de una forma particular, para ello, necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.19. *Sea K un conjunto convexo y $x_1, x_2, ..., x_n \in K$. Entonces todos los elementos de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ donde $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, también pertecen a K.*

Demostración. La prueba será por inducción. La afirmación se satisface para $n = 2$ por la definición de conjunto convexo. Asumamos que el resultado es válido para $n - 1$ y demostraremos que también lo es para n.

Si $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = 0$, entonces cada $\alpha_i = 0$ para toda $i = 1, ..., n-1$ lo que implica que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = x_n \in K.$$

Ahora, supongamos que $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i > 0$ y que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, entonces

$$\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1} \in K$$

por hipótesis. Consecuentemente

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1} \right) + \alpha_n x_n \in K,$$

dado que K es convexo, lo que completa la prueba. ■

Teorema 4.20. *La envolvente convexa de un subconjunto S de un espacio vectorial $\mathbf{X}$ consiste de todos los vectores de la forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, donde $x_i \in S$, $\alpha_i \geq 0$ para toda $i = 1, 2, ..., n$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.*

Demostración. Llamemos K al conjunto de todos los vectores de la forma anterior. Sea $t \in [0,1]$ y $x, y \in K$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ y $y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$, claramente $\sum_{i=1}^n (1 - t)\alpha_i + \sum_{j=1}^m t\beta_j = 1$, así, K es convexo, lo que implica que $\text{co}(S) \subset K$. Además, por el lema anterior, cualquier conjunto convexo que contiene a S contiene a K y por lo tanto $\text{co}(S) = K$. ■

Es fácil probar que dados dos conjuntos convexos A y B, su suma $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ es también un conjunto convexo. Otro resultado relacionado con la suma de conjuntos en un espacio vectorial es que $\text{co}(A+B) = \text{co}(A) + \text{co}(B)$.

Teorema 4.21. *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio vectorial $\mathbf{X}$. Entonces $co(A + B) = co(A) + co(B)$.*

Demostración. Como $A \subset \text{co}(A)$ y $B \subset \text{co}(B)$ entonces $\text{co}(A)+\text{co}(B)$ es un convexo que contiene a $A + B$, por lo tanto $\text{co}(A + B) \subset \text{co}(A) + \text{co}(B)$. Para la otra contención, veamos que

1) $\text{co}(A + \text{co}(B)) = \text{co}(A) + \text{co}(B)$.

2) $A + \text{co}(B) \subset \text{co}(A + B)$.

Como $A + \text{co}(B) \subset \text{co}(A) + \text{co}(B)$ entonces $\text{co}(A + \text{co}(B)) \subset \text{co}(A) + \text{co}(B)$. Ahora, sea $z \in \big(\text{co}(A) + \text{co}(B)\big)$, $z = x + y$, $x \in \text{co}(A)$ y $y \in \text{co}(B)$, con $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$

y $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$. Se sigue que

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha_i x_i + \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \right) \\
&\in \operatorname{co}(A + \operatorname{co}(B)),
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\operatorname{co}(A) + \operatorname{co}(B) \subset \operatorname{co}(A + \operatorname{co}(B))$, y así, $\operatorname{co}(A + \operatorname{co}(B)) = \operatorname{co}(A) + \operatorname{co}(B)$.

Ahora, sea $z \in A + \operatorname{co}(B)$, $z = x + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$, entonces

$$
\begin{aligned}
z &= x \sum_{j=1}^{m} \beta_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j x + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j (x + y_j) \\
&\in \operatorname{co}(A + B),
\end{aligned}
$$

con ello tenemos que $A + \operatorname{co}(B) \subset \operatorname{co}(A + B)$.

Usando 2) tenemos que $\operatorname{co}(A+B)$ es un convexo que contiene a $A+\operatorname{co}(B)$, lo que implica que $\operatorname{co}(A+\operatorname{co}(B)) \subset \operatorname{co}(A+B)$, entonces por 1) $\operatorname{co}(A)+\operatorname{co}(B) \subset \operatorname{co}(A+B)$, con esto tenemos las dos contenciones y concluimos que $\operatorname{co}(A+B) = \operatorname{co}(A)+\operatorname{co}(B)$.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] A. Alexiewicz, W. Orlicz. *Remarks on Riemann-integration of vector valued functions*, Studia Math. **12**, (1951), 125-132.

[2] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*, Second Edition, Pearson, 1974.

[3] G. Bachman, L. Narici. *Functional Analysis*, Dover, 1966.

[4] R. G. Bartle. *The Elements of Real Analysis*, Second Edition, Wiley, 1976.

[5] N. L. Carothers. *A short Course on Banach Space Theory.* London Mathematical Society Student Texts 64. Cambridge University, 2004.

[6] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr. *Vector Measures.* Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1977.

[7] P. Enflo. *A counterexample to the approximation property in Banach spaces.* Acta Math. **130**, (1973), 309-317.

[8] R. Gordon. *Riemann Integration in Banach Spaces*, Rocky Mountain J. of Math., **21**, No. 3, (1991).

[9] L. M. Graves. *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **29**, (1927), 163-177.

[10] R. C. James. *Super-reflexive spaces with bases*, Pacific J. Math., **41**, 2, (1972), 409-419.

[11] R. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[12] A. S. Nemirovski, M. Yu Ochan, R. Rejouani. *Conditions for Riemann integrability of functions with values in a Banach space*, Vestnik Moskov Univ., Ser. I. Mat. Meh. **27**, no. 4 (1972), 62-65.

[13] B. J. Pettis. *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44**, (1938), 277-304.

[14] R. Rejouani. *On the question of the Riemann integrability of functions with values in a Banach space*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh. **26**, no.4, (1971), 75-79.

[15] G. C. da Rocha. *Integral de Riemann vectoriel e geometri de espaços de Banach*, Ph. D. thesis, Universidade de Sao Paulo, 1979.

[16] H. L. Royden *Real Analysis*, Third Edition, Pearson, 1988.