



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Retratos Fase de Equilibrios No-hiperbólicos en el Plano

## T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jocelyn Anaid Castro Echeverría

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México,      Octubre de 2012



## SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Yuri M. Vorobiev  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Daniel Olmos Liceaga  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México



## Agradecimientos

Agradezco, en primer lugar, a Dios por llevarme siempre de la mano a largo de mi vida, tanto personal como profesional, por llenarme de sus dones y bendiciones, permitiéndome lograr mis metas y todo lo que me he propuesto hasta hoy, gracias dios porque sin ti no soy nada.

Le doy gracias a mi familia, que es lo más importante que tengo, por darme su apoyo incondicional, su comprensión y todo su amor, en especial a mis padres, Bertha y Roberto, por guiar mi camino, escucharme y brindarme siempre su cariño y sus consejos, espero que se sientan orgullosos de mi. A mis hermanos Danya y Roberto, les doy gracias por ser mis compañeros de vida y les agradezco el que siempre seamos tan unidos, riéndonos o afrontando juntos lo que se presente, los quiero mucho.

Quiero agradecerle también a mi director, Dr. Fernando Verduzco González, por su enseñanza, su paciencia y por haberme dedicado su tiempo, siempre con una sonrisa y con entusiasmo, gracias por ser una gran persona y apoyarme no sólo con este trabajo sino también a lo largo de la licenciatura, es un gran honor conocerlo y trabajar con usted, quiero que sepa que lo aprecio y admiro enormemente.

Muchas gracias a mis sinodales Dr. Yuri M. Vorobiev, Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro y Dr. Daniel Olmos Liceaga, por haber destinado parte de su tiempo a la revisión de este trabajo, gracias por sus observaciones y correcciones.

Le doy las gracias a todos mis profesores de la licenciatura por ayudarme a enriquecer mis conocimientos y a crecer académicamente, gracias también por su gran amabilidad y disposición, son un ejemplo para mi.

A todas esas maravillosas personas que tengo la dicha de conocer y que forman una parte muy especial en mi vida, no alcanzan las palabras para decir lo que significan para mi y lo feliz que soy de tenerlos, gracias por ser mis cómplices y por estar conmigo en todo momento.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido para la realización de esta tesis como becaria del proyecto “Mecanismos de Promedio para Sistemas de Evolución Clásicos y Cuánticos” (Clave CONACYT: 55463).

*Jocelyn Anaid Castro Echeverría  
Octubre de 2012*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Teoría de la Variedad Central . . . . .	3
2.2. Teoría de Formas Normales . . . . .	5
2.2.1. Caso nilpotente . . . . .	10
2.2.2. Caso valores propios complejos puros . . . . .	13
2.3. Técnicas de Blow-up en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
<b>3. Un valor propio cero</b>	<b>25</b>
3.1. Dinámica sobre la Variedad Central . . . . .	26
3.2. Cálculo de $a_m$ . . . . .	29
3.3. Ejemplo . . . . .	31
<b>4. Dos Valores Propios Cero con Multiplicidad Geométrica Dos</b>	<b>35</b>
4.1. P y Q: Polinomios homogéneos del mismo grado . . . . .	36
4.1.1. Ejemplos . . . . .	40
4.2. P y Q: Polinomios homogéneos de distinto grado . . . . .	46
4.2.1. Ejemplos . . . . .	50
<b>5. Dos Valores Propios Cero con Multiplicidad Geométrica Uno</b>	<b>57</b>
5.1. Ejemplos . . . . .	72
<b>6. Valores propios imaginarios</b>	<b>77</b>
<b>7. Continuos de equilibrios</b>	<b>85</b>
7.1. Caso I . . . . .	85
7.2. Caso II . . . . .	87
7.3. Caso III . . . . .	89
<b>Apéndices</b>	<b>91</b>
<b>A. Factorización de Polinomios Homogéneos</b>	<b>93</b>





# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos es de gran importancia, ya que además de su sentido abstracto, estos se encuentran relacionados con situaciones del mundo real. Por medio de ecuaciones diferenciales es posible describir el comportamiento de una gran cantidad de fenómenos físicos, biológicos, entre otros; sin embargo, en su mayoría resulta muy difícil y a veces imposible resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales de forma cuantitativa y en estos casos podemos recurrir al análisis de sus soluciones de forma cualitativa.

El objetivo de este trabajo de tesis de licenciatura es el analizar el comportamiento de sistemas dinámicos alrededor de puntos de equilibrio no-hiperbólicos en el plano. En el caso hiperbólico no es complicado determinar el retrato fase alrededor del equilibrio, ya que podemos utilizar el teorema de Hartman y Grobman, el cual establece que el comportamiento alrededor del equilibrio está dado por la linealización del sistema. El caso no-hiperbólico no es tan simple, por tal motivo, a lo largo de este trabajo presentaremos un análisis detallado acerca de los distintos tipos de retrato fase que se presentan en el plano, de acuerdo con la forma de la matriz Jacobiana del sistema y sus respectivos valores propios.

Hemos clasificado los equilibrios aislados no-hiperbólicos en el plano en cuatro casos, para los cuales utilizaremos diversas herramientas matemáticas, como lo son la Teoría de la Variedad Central, la Teoría de Formas Normales y la técnica del Blow-up, mismas que se abordan en el capítulo de Preliminares. Estas técnicas de simplificación han sido desarrolladas para sistemas en el plano. En los capítulos posteriores se abordará cada uno de los casos de equilibrios no-hiperbólicos, podremos observar que dichos equilibrios pueden resultar ser tipo foco, centro, silla, nodos, así como otros tipos de comportamientos locales propios de los equilibrios no-hiperbólicos. Asimismo, presentaremos algunos ejemplos para cada uno de los casos, que nos permitan mostrar dichos comportamientos y el uso de los teoremas demostrados en cada capítulo.

En el Capítulo 3 analizaremos el comportamiento de equilibrios cuya matriz Jacobiana tiene un valor propio real distinto de cero, para tal caso empleamos la teoría de la variedad central para determinar el comportamiento del equilibrio, concluyendo tres posibles escenarios para el equilibrio: nodo, silla o silla-nodo.

El segundo caso se aborda en el Capítulo 4, este caso se refiere a los puntos de equilibrio no-hiperbólicos cuya matriz Jacobiana es la matriz cero. Hemos dividido este capítulo en dos secciones, por un lado estudiaremos el comportamiento del sistema cuando el campo está formado por polinomios homogéneos del mismo grado en ambas componentes y por otro lado, cuando estos son de grado distinto. Demostraremos que existen tres posibilidades para el primer tipo, es decir, el equilibrio puede ser un nodo no-hiperbólico, en el que aparecen distintos tipos de sectores, un foco o un centro. Mientras que para el caso en el que son de distinto grado, presentamos un teorema, en el cual bajo ciertas hipótesis aseguramos que el equilibrio será un nodo no-hiperbólico y además, el teorema nos permite determinar cuáles son las curvas separatrices de cada sector y el comportamiento sobre ellas. El resultado anteriormente mencionado no ha sido encontrado hasta en el momento en la bibliografía con la que contamos, por lo que esta aportación es el resultado fuerte de esta tesis.

El Capítulo 5 trata sobre los equilibrios cuya matriz Jacobiana tiene dos valores propios cero pero la matriz no es idénticamente cero. A partir de la forma normal del sistema podemos determinar el tipo de comportamiento en una vecindad del equilibrio mediante dos teoremas probados en este capítulo, apareciendo diversos escenarios como lo son la cúspide y el denominado punto crítico con dominio elíptico.

El último caso, el cual son los equilibrios cuya matriz Jacobiana tiene dos valores propios complejos puros, se ha estudiado en el Capítulo 6, haciendo uso de las coordenadas polares podremos demostrar que existen tres tipos de comportamientos, el foco, el centro y un caso poco frecuente, el foco-centro. Cabe mencionar que sigue siendo un problema abierto el poder diferenciar mediante ciertas condiciones entre un foco o un centro, escenarios que pueden presentarse en este caso.

Finalmente, hemos incluido un capítulo dedicado al estudio del comportamiento de continuos de equilibrios que pasan por el origen, ya que en los capítulos previos se tratan sólo equilibrios aislados, además del hecho de que los continuos de equilibrios son poco tratados en la mayor parte de la literatura.

En esta tesis presentamos todos los tipos de comportamiento locales alrededor de puntos de equilibrios no-hiperbólicos que pueden existir, por lo que en conjunto con el teorema de Hartman y Grobman podremos determinar cualquier tipo de comportamiento en una vecindad de un equilibrio aislado en el plano, estas herramientas podrían ser de utilidad incluso posteriormente al momento de enfrentar análisis globales del comportamiento de las soluciones para cada sistema en el plano.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Teoría de la Variedad Central

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{w} = F(w), \tag{2.1}$$

con  $w \in \mathbb{R}^2$  y  $F$  un campo vectorial suave. Supongamos que  $F(0) = 0$  y que  $DF(0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  con  $\lambda$  un número real negativo. Por lo tanto el sistema (2.1) puede ser representado como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda y + g(x, y), \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  y  $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$  y  $f, g \in C^r$ , con  $r \geq 2$ .

**Definición 1.** Una variedad invariante será llamada **variedad central** para el sistema (2.2) si puede ser representada, de manera local, como sigue

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

para  $\delta$  lo suficientemente pequeña.

**Observación 1.** El hecho de que  $h(0) = 0$  y  $Dh(0) = 0$  nos asegura que la variedad central  $W^c(0)$  es tangente al eigenespacio central  $E^c$  (eigenespacio asociado al valor propio cero).

Los siguientes tres teoremas que enunciaremos se encuentran demostrados en Carr [1]. El primero de estos teoremas nos garantiza la existencia de la variedad central.

**Teorema 1.** Existe una  $C^r$  variedad central para el sistema (2.2). La dinámica del sistema (2.2), restringida a la variedad central, está dada, para  $u$  suficientemente pequeña, por la siguiente ecuación

$$\dot{u} = f(u, h(u)), \tag{2.3}$$

El siguiente teorema establece que la dinámica de (2.3) cerca de  $u = 0$ , determina la dinámica de (2.2) cerca de  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Teorema 2.**

- (i) *Supongamos que  $u = 0$  es un equilibrio estable (asintóticamente estable)(inestable) del sistema (2.3), entonces  $(x, y) = (0, 0)$  es un equilibrio estable (asintóticamente estable)(inestable) del sistema (2.2).*
- (ii) *Supongamos que el equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$  del sistema (2.2) es estable. Entonces, si  $(x(t), y(t))$  es una solución de (2.2) con  $(x(0), y(0))$  lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución  $u(t)$  de (2.3) tal que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \end{aligned}$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante.

**Observación 2.** *Lo que nos dice el teorema 2 es que la solución  $u(t)$  del sistema (2.3), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución  $(x(t), y(t))$  del sistema (2.2), sobre el eigenespacio  $E^c \cong \mathbb{R}$ .*

El último teorema proporciona un método para aproximar la función  $h(x)$ , cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciarlo, encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya incógnita es justamente la función  $h(x)$ .

Sea  $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c(0)$ , luego, se cumple que  $y(t) = h(x(t))$ , y derivando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (2.4)$$

Pero todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (2.2), por lo tanto, la ecuación (2.4) es equivalente a

$$\lambda h(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$\aleph(h(x)) \equiv Dh(x)(f(x, h(x))) - \lambda h(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (2.5)$$

Ahora, nuestro problema es encontrar  $h(x)$  tal que satisfaga (2.5). La solución de esta ecuación en derivadas parciales es un problema más complejo que resolver el sistema (2.2), sin embargo, el siguiente teorema nos permitirá aproximar la solución de (2.5) con el grado de precisión que se desee.

**Teorema 3.** Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , con  $\phi(0) = D\phi(0) = 0$  tal que  $\aleph(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$  cuando  $x \rightarrow 0$ , para algún  $q > 1$ . Entonces

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \text{ cuando } x \rightarrow 0.$$

## 2.2. Teoría de Formas Normales

El Teorema de Hartman-Grobman nos muestra que en una vecindad de un equilibrio hiperbólico, el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.6}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ , está determinado por su parte lineal. La parte lineal de (2.6) puede ser escrita en su forma de Jordan  $\dot{x} = Jx$ , lo que hace sencillo resolver el sistema. El Teorema Local de la Variedad Central de la sección anterior nos muestra que, en una vecindad de un punto de equilibrio no-hiperbólico, determinar el comportamiento de (2.6) puede reducirse al problema de determinar el comportamiento del sistema no lineal

$$\dot{x} = Jx + F(x) \tag{2.7}$$

en la variedad central. La Teoría de Formas Normales nos permite simplificar la parte no lineal,  $F(x)$  de (2.7) con la finalidad de analizar estos casos, tan fácil como sea posible. Este objetivo se logra si hacemos una transformación de coordenadas no lineal de la forma

$$x = y + h(y), \tag{2.8}$$

donde  $h(y) = \mathcal{O}(|y|^2)$  cuando  $|y| \rightarrow 0$ . Ilustraremos esta idea mediante el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.** *La parte lineal del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + ax_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + ex_1x_2 + x_1^3, \end{aligned}$$

alrededor del origen, se encuentra ya en forma de Jordan, así la matriz asociada al sistema es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para este caso tenemos dos valores propios cero.

Con la finalidad de reducir el sistema de este ejemplo a su forma normal, hagamos

$$x = y + \begin{pmatrix} 0 \\ -ay_1^2 \end{pmatrix},$$

es decir, hacemos  $x_1 = y_1$  y  $x_2 = y_2 - ay_1^2$  o, equivalentemente  $y_2 = x_2 + ax_1^2$ . Bajo esta transformación de coordenadas no lineal, el sistema se transforma como sigue

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 + ax_1^2 = y_2 - ay_1^2 + ay_1^2 = y_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 + 2ax_1\dot{x}_1 = y_1^2 + ey_1(y_2 - ay_1^2) + y_1^3 + 2ay_1y_2 \\ &= y_1^2 + (e + 2a)y_1y_2 + (1 - ae)y_1^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1^2 + (e + 2a)y_1y_2 + (1 - ae)y_1^3 \end{aligned}$$

**Definición 2.** Sean  $\dot{x} = f(x)$  con flujo  $\varphi_t$ , y  $\dot{y} = g(y)$  con flujo  $\psi_t$ . Diremos que los sistemas (ó los flujos) son **topológicamente conjugados**, si existe un difeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

Los dos sistemas en el ejemplo anterior son topológicamente conjugados y por lo tanto ambos tienen el mismo comportamiento cualitativo en una vecindad del origen.

El método para reducir el sistema (2.7) a su forma normal por medio de un cambio de coordenadas cercano a la identidad de la forma (2.8) fue originado en la tesis doctoral de Poincaré.

Si reescribimos el sistema (2.7), de acuerdo a la serie de Taylor como

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots,$$

cuando  $|x| \rightarrow 0$ , donde  $F_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ . Supongamos que el campo  $f$  posee términos no lineales de grado  $r$  en adelante, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots \quad (2.9)$$

Consideremos el cambio de coordenadas cercano a la identidad

$$x = y + h_r(y), \quad (2.10)$$

donde  $h_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ . El objetivo es encontrar  $h_r$  tal que el sistema (2.9) en el

cambio de coordenadas no posea términos de grado  $r$ . Usando la regla de la cadena en (2.10), obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{y} + Dh(y)\dot{y} \\ &= [I + Dh(y)]\dot{y}\end{aligned}\tag{2.11}$$

cuando  $|y| \rightarrow 0$ , pero  $I + Dh_r(y)$  es una matriz cercana a la identidad, invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots,\tag{2.12}$$

luego, de (2.11) se sigue que

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1}\dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots),\end{aligned}$$

pero  $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \dots$ , entonces

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(J(y + h_r(y)) + F_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1})) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}),\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde

$$\tilde{F}_r(y) = F_r(y) - (Dh_r(y)Jy - Jh_r(y))\tag{2.14}$$

**Observación 3.** *Observemos que si el campo vectorial  $f$  posee términos no lineales a partir de orden  $r$ , entonces el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$  produce un nuevo campo vectorial también con términos no lineales a partir de orden  $r$ .*

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de  $h_r$  tal que  $\tilde{F}_r = 0$ . Considere el espacio vectorial  $H^r$  de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ , y sea  $L_J : H^r \rightarrow H^r$  el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y),$$

tal operación se conoce como el *paréntesis de Lie* entre los campos vectoriales  $Jy$  y  $h_r(y)$ . Basta probar que  $L_J$  es invertible, ya que  $\tilde{F}_r = 0 \Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$ . Ahora bien,  $L_J$  será invertible si y sólo si todos sus valores propios son diferentes de cero. Procederemos entonces a calcular sus valores propios.

Supongamos que  $J$  posee dos valores propios reales diferentes, y como esta en forma de Jordan, entonces es diagonal, y además sus vectores propios son los elementos de la base canónica en  $\mathbb{R}^2$ ,  $e_1$  y  $e_2$ . Regresemos ahora al espacio vectorial  $H^r$  y tratemos de ubicar su base canónica. Por ejemplo para  $r=2$ , la base canónica posee seis elementos

$$\mathcal{B}_{H^2} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si definimos  $y^m = y_1^{m_1} y_2^{m_2}$ , con  $m_1 + m_2 = 2$  y  $m_i \geq 0$ , entonces

$$\mathcal{B}_{H^2} = \{y^m e_i | m_1 + m_2 = 2, i = 1, 2\}.$$

Ahora bien,

$$L_J(y^m e_i) = D(y^m e_i) Jy - J(y^m e_i),$$

y  $Jy = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}$ , por lo tanto, si tomamos  $e_1$

$$\begin{aligned} D(y^m e_1) Jy &= D \begin{pmatrix} y^{m_1} y^{m_2} \\ 0 \end{pmatrix} Jy \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_1}{y_1} y^m & \frac{m_2}{y_2} y^m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Jy \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_1}{y_1} y^m & \frac{m_2}{y_2} y^m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 \lambda_1 y^m + m_2 \lambda_2 y^m \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Análogamente para  $e_2$ . Por lo tanto,

$$D(y^m e_i) Jy = (m \cdot \lambda) y^m e_i$$

donde  $m = (m_1, m_2)$  y  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} L_J(y^m e_i) &= D(y^m e_i) Jy - J(y^m e_i) \\ &= (m \cdot \lambda) y^m e_i - \lambda_i y^m e_i \\ &= (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i, \end{aligned}$$

es decir,  $y^m e_i$  es un vector propio de  $L_J$  con valor propio

$$\Lambda_{m,i} = (m \cdot \lambda) - \lambda_i. \quad (2.15)$$

Luego,  $L_J$  será invertible si y sólo si  $\Lambda_{m,i} \neq 0$  para toda  $m$  y toda  $i = 1, 2$ . Esto nos lleva al siguiente concepto,

**Definición 3.** Diremos que la dupla de valores propios  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  es **resonante de orden  $r$**  si es posible encontrar una relación entera de la forma

$$\lambda_i = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2$$

para algún  $m$  con  $m_1 + m_2 = r$ , y alguna  $i = 1, 2$ .

**Observación 4.** Puede probarse que la expresión (2.15) también es válida para el caso en que  $J$  no es diagonal.

Tenemos entonces probado el teorema de linealización de Poincaré,



**Teorema 4. (Poincaré)** Si los valores propios de la matriz  $J$  son no resonantes, entonces el sistema no lineal

$$\dot{x} = Jx + \dots$$

puede ser reducido al sistema lineal

$$\dot{y} = Jy$$

por un cambio formal de coordenadas  $x=y+\dots$ .

Veamos como determinar  $h_r$  tal que  $\tilde{F}_r = 0$ , es decir, determinar  $h_r$  tal que  $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$ . Expresemos  $h_r$  y  $F_r$  en términos de los vectores canónicos de  $H^r$ ,

$$\begin{aligned} h_r(y) &= \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \\ F_r(y) &= \sum_{m,i} F_{m,i} y^m e_i, \end{aligned}$$

con  $m_1 + m_2 = r$ , luego,

$$\begin{aligned} L_J(h_r(y)) &= L_J \left( \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \right) \\ &= \left( \sum_{m,i} h_{m,i} L_J(y^m e_i) \right) \\ &= \sum_{m,i} h_{m,i} (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i. \end{aligned}$$

Ahora bien,  $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$  si y sólo si

$$h_{m,i} = \frac{F_{m,i}}{(m \cdot \lambda - \lambda_i)}. \quad (2.16)$$

Como los valores propios de  $J$  son no resonantes, la expresión anterior siempre tiene sentido.

Consideremos ahora el caso en el que ocurre resonancia, es decir, el caso en que algunos valores propios  $\Lambda_{m,i}$  de  $L_J$  son cero. Los vectores propios de  $L_J$  que provienen de valores propios diferentes de cero forman una base de la imagen  $B^r = L_J(H^r)$ . Sea  $F_r \in H^r$ , luego, las componentes de  $F^r$  que estén en  $B^r$  pueden ser aniquilados mediante el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$ , donde  $h_r$  se escoge de acuerdo a la fórmula (2.16). Las componentes  $w_r$  de  $F_r$  que pertenezcan a algún subespacio complementario,  $G^r$ , de  $B^r$ , permanecerán sin cambio mediante el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$  obtenido de  $B^r$ . Así que estos términos resonantes permanecerán en el nuevo campo vectorial. Esto nos prueba el siguiente teorema.

**Teorema 5. (Teorema de Poincaré-Dulac)** Considere el sistema no lineal,

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.17)$$

con  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(0) = 0$  y  $f$  un campo vectorial suave. Existe una transformación polinomial  $x = y + h(y)$ , tal que transforma el sistema (2.17) en

$$\dot{y} = Jy + \sum_{r=2}^N w_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{N+1}), \quad (2.18)$$

donde todos los monomios en  $w_r(y)$  son resonantes. El lado derecho de (2.18) es llamado la **forma normal** del campo  $f$ .

### 2.2.1. Caso nilpotente

En esta sección presentaremos la forma normal para el siguiente sistema no lineal en el plano

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots, \quad (2.19)$$

con  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , cuando  $|x| \rightarrow 0$ , donde  $F_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $r = 2, 3, \dots$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ . Comenzaremos a eliminar los términos no resonantes de grado dos, mediante el cambio de coordenadas  $x = y + h_2(y)$ , de (2.14) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(y) &= F_2(y) + Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy \\ &= \begin{pmatrix} F_{21}(y) \\ F_{22}(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{22}(y) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{21}(y) + h_{22}(y) - y_2 \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} \\ F_{22}(y) - y_2 \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{21}(y) \\ \tilde{F}_{22}(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que

$$\tilde{F}_{21} \equiv 0 \Leftrightarrow h_{22}(y) = y_2 \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} - F_{21}(y).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{22}(y) &= F_{22}(y) - y_2 \left( y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} \right) \\ &= \left( F_{22}(y) + y_2 \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} \right) - y_2^2 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} \right), \end{aligned}$$

pero si  $h_{21}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_2^2$  entonces  $\frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} = 2\alpha_1$ , así que sólo podemos eliminar los términos  $y_2^2$ , por lo tanto finalmente obtenemos que

$$\tilde{F}_{22}(y) = \tilde{\alpha}_1 y_1^2 + \tilde{\alpha}_2 y_1 y_2 \quad (2.20)$$

para algún  $\tilde{\alpha}_1$  y  $\tilde{\alpha}_2$  en  $\mathbb{R}$ .

Para eliminar los términos cúbicos se procede de manera análoga, proponiendo el cambio de coordenadas  $x = y + h_3(y)$  con  $h_3(y)$  homogénea de grado 3 (notemos que esta no es la  $x$  inicial sino que hemos renombrado), seguimos el mismo camino obteniendo

$$\tilde{F}_3(y) = \begin{pmatrix} F_{31}(y) + h_{32}(y) - y_2 \frac{\partial h_{31}(y)}{\partial y_1} \\ F_{32}(y) - y_2 \frac{\partial h_{32}(y)}{\partial y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{31}(y) \\ \tilde{F}_{32}(y) \end{pmatrix}.$$

Nuevamente hacemos  $h_{32}(y) = y_2 \frac{\partial h_{31}(y)}{\partial y_1} - F_{31}(y)$ , para que  $\tilde{F}_{31}(y) \equiv 0$ , luego entonces

$$\tilde{F}_{32}(y) = \left( F_{32}(y) + y_2 \frac{\partial F_{31}(y)}{\partial y_1} \right) - y_2^2 \frac{\partial^2 h_{31}(y)}{\partial y_1^2},$$

por otro lado si  $h_{31}(y) = \beta_1 y_1^3 + \beta_2 y_1^2 y_2 + \beta_3 y_1 y_2^2 + \beta_4 y_2^3$  entonces  $y_2^2 \frac{\partial^2 h_{31}(y)}{\partial y_1^2} = 6\beta_1 y_1 y_2^2 + 2\beta_2 y_2^3$  por lo que podemos eliminar los términos  $y_1 y_2^2$  y  $y_2^3$ , por lo tanto,

$$\tilde{F}_{32}(y) = \tilde{\beta}_1 y_1^3 + \tilde{\beta}_2 y_1^2 y_2. \quad (2.21)$$

para algún  $\tilde{\beta}_1$  y  $\tilde{\beta}_2$  en  $\mathbb{R}$ .

En general, los nuevos términos de orden  $r$  bajo el cambio de coordenadas son

$$\begin{aligned} \tilde{F}_r(y) &= F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy \\ &= \begin{pmatrix} F_{r1}(y) \\ F_{r2}(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{r2}(y) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{r1}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{r1}(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_{r2}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{r2}(y)}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{r1}(y) + h_{r2}(y) - y_2 \frac{\partial h_{r1}(y)}{\partial y_1} \\ F_{r2}(y) - y_2 \frac{\partial h_{r2}(y)}{\partial y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{r1}(y) \\ \tilde{F}_{r2}(y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

observemos que

$$\tilde{F}_{r1}(y) \equiv 0 \Leftrightarrow h_{r2}(y) = y_2 \frac{\partial h_{r1}(y)}{\partial y_1} - F_{r1}(y),$$

en consecuencia,

$$\tilde{F}_{r2}(y) = \left( F_{r2}(y) + y_2 \frac{\partial F_{r1}(y)}{\partial y_1} \right) - y_2^2 \frac{\partial^2 h_{r1}(y)}{\partial y_1^2},$$

si  $h_{r1}(y) = \alpha_1 y_1^r + \alpha_2 y_1^{r-1} y_2 + \dots + \alpha_r y_1 y_2^{r-1} + \alpha_{r+1} y_2^r$  entonces

$$y_2^2 \frac{\partial^2 h_{r1}(y)}{\partial y_1^2} = y_2^2 (r(r-1)\alpha_1 y_1^{r-2} + (r-1)(r-2)\alpha_2 y_1^{r-3} y_2 + \dots + 2\alpha_{r-1} y_2^{r-2})$$

por lo que finalmente tenemos que los nuevos términos de orden  $r$  al eliminar los términos no resonantes son

$$\tilde{F}_r(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\alpha}_1 y_1^r + \tilde{\alpha}_2 y_1^{r-1} y_2 \end{pmatrix}$$

para algún  $\tilde{\alpha}_1$  y  $\tilde{\alpha}_2$  en  $\mathbb{R}$ .

Por lo tanto, una vez que hemos eliminado todos los términos no resonantes hasta orden  $r$ , la forma normal del sistema (2.19) es

$$\dot{y}_1 = y_2 + H(y) \quad (2.22)$$

$$\dot{y}_2 = \sum_{k=2}^r (a_k y_1^k + b_k y_1^{k-1} y_2) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \quad (2.23)$$

donde la función  $H(y)$  contiene términos de orden  $r+1$  en adelante. Notemos que los términos remanentes de  $\dot{y}_2$  en (2.23) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(|y|^{r+1}) &= \beta_1 y_1^{r+1} + \beta_2 y_1^r y_2 + y_2^2 (g_1(y)) \\ &+ \gamma_1 y_1^{r+2} + \gamma_2 y_1^{r+1} y_2 + y_2^2 (g_2(y)) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

para algunos  $g_i(y)$ . Por lo que podemos reescribir el sistema (2.23) como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + H(y) \\ \dot{y}_2 &= \sum_{k=2}^{\infty} (a_k y_1^k + b_k y_1^{k-1} y_2) + y_2^2 G(y) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si consideramos ahora el cambio de coordenadas  $z_1 = y_1$  y  $z_2 = y_2 + H(y)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{y}_1 = y_2 + H(y) = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{y}_2 + DH(y)\dot{y} \\ &= \dot{y}_2 + \frac{\partial H(y)}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial H(y)}{\partial y_2} \dot{y}_2 \end{aligned}$$

observemos que el término  $\frac{\partial H(y)}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial H(y)}{\partial y_2} \dot{y}_2 = \mathcal{O}(|y|^{r+1})$  por lo que simplemente reagrupamos estos términos con los de  $\dot{y}_2$ , es decir, los términos en  $y_1^k$  en la primer sumatoria, los términos en  $y_1^{k-1} y_2$  en la segunda, y podemos sacar como factor común  $y_2^2$  del remanente.

Tenemos finalmente la forma normal del sistema (2.19), esta es:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \sum_{k=2}^{\infty} (a_k z_1^k + b_k z_1^{k-1} z_2) + z_2^2 R(z) \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función analítica en una vecindad del origen.

### 2.2.2. Caso valores propios complejos puros

Determinaremos ahora la forma normal del campo vectorial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Observemos que la matriz Jacobiana del sistema (2.26) tiene los valores propios imaginarios  $\lambda = i\omega_0$  y su conjugado  $\bar{\lambda}$ . Cuando tenemos valores propios complejos, es conveniente cambiar de variables para representar la Jacobiana en forma diagonal procediendo de la siguiente manera. Introducimos la variables complejas  $z = x + iy$  y  $\bar{z} = x - iy$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

De lo anterior y (2.26) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ &= -\omega_0 y + f_1(x, y) + i\omega_0 x + if_2(x, y) \\ &= -\omega_0 \left( \frac{1}{2} [-iz + i\bar{z}] \right) + f_1(z, \bar{z}) + i\omega_0 \left( \frac{1}{2} [z + \bar{z}] \right) + if_2(z, \bar{z}) \\ &= i\omega_0 z + F_1(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \dot{x} - i\dot{y} \\ &= -\omega_0 y + f_1(x, y) - i\omega_0 x - if_2(x, y) \\ &= -\omega_0 \left( \frac{1}{2} [-iz + i\bar{z}] \right) + f_1(z, \bar{z}) - i\omega_0 \left( \frac{1}{2} [z + \bar{z}] \right) - if_2(z, \bar{z}) \\ &= -i\omega_0 \bar{z} + F_2(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) \\ F_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix},$$

donde  $F_1 = f_1 + if_2$  y  $F_2 = f_1 - if_2 = \bar{F}_1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda z + F_1(z, \bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{\lambda} \bar{z} + \bar{F}_1(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Observemos que la segunda ecuación es conjugada de la primera. Procedamos a buscar términos resonantes de orden  $r$ , es decir, busquemos  $m$  e  $i$  en la ecuación (2.15) tal que  $\Lambda_{m,i} = 0$ . Luego, se sigue que

$$m_1 \lambda + m_2 \bar{\lambda} = \lambda_i \Leftrightarrow (m_1 - m_2) \lambda = \lambda_i,$$

con  $\lambda_1 = \lambda$  y  $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ , además  $m_1 + m_2 = r$ . Para  $i = 1$ , la ecuación anterior se reduce a  $m_1 - m_2 = 1$ , por lo tanto, los términos resonantes son  $z^{k+1}\bar{z}^k e_1$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . Para  $i = 2$ , tenemos la ecuación  $m_1 - m_2 = -1$ , así que los términos resonantes son  $z^k \bar{z}^{k+1} e_2$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . En consecuencia, la forma normal del sistema en variables complejas, está dado por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1} \bar{z}^k \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{\lambda} \bar{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k z^k \bar{z}^{k+1}\end{aligned}$$

Ahora pasemos el sistema nuevamente a variables real, pero antes observe que, si  $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ , entonces

$$\begin{aligned}c_k z^{k+1} \bar{z}^k &= c_k z(z\bar{z})^k \\ &= (\alpha_k + i\beta_k)(x + iy)(x^2 + y^2)^k \\ &= ((\alpha_k x - \beta_k y) + i(\beta_k x + \alpha_k y))(x^2 + y^2)^k.\end{aligned}$$

Usando los cambios de coordenadas anteriores, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) \\ \frac{i}{2}(-\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1} \bar{z}^k$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) &= \operatorname{Re}(\mathcal{F}(z, \bar{z})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x - \beta_k y)(x^2 + y^2)^k, \\ \frac{i}{2}(-\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) &= \operatorname{Im}(\mathcal{F}(z, \bar{z})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k x + \alpha_k y)(x^2 + y^2)^k,\end{aligned}$$

por lo que tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x - \beta_k y)(x^2 + y^2)^k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k x + \alpha_k y)(x^2 + y^2)^k \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x - \beta_k y)(x^2 + y^2)^k \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k x + \alpha_k y)(x^2 + y^2)^k\end{aligned}$$

Finalmente pasamos el sistema a coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) \\
&= \frac{1}{r} \left( -\omega_0 xy + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x^2 - \beta_k xy)(x^2 + y^2)^k + \omega_0 xy + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k xy + \alpha_k y^2)(x^2 + y^2)^k \right) \\
&= \frac{1}{r} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x^2 + y^2)^{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^{2k+1} \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \omega_0 x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k x^2 + \alpha_k xy)(x^2 + y^2)^k + \omega_0 y^2 - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k xy - \beta_k y^2)(x^2 + y^2)^k \right) \\
&= \frac{1}{r^2} (\omega_0 (x^2 + y^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x^2 + y^2)^{k+1}) \\
&= \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k r^{2k}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la forma normal del sistema (2.26) en coordenadas polares esta dada por

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^{2k+1} \\
\dot{\theta} &= \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k r^{2k}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

### 2.3. Técnicas de Blow-up en $\mathbb{R}^2$

Las técnicas de Blow-up involucran cambios de coordenadas que expanden un punto de equilibrio no-hiperbólico, suponiendo que el equilibrio es el origen, en una curva donde se encuentra un número de singularidades. El tipo topológico para cada una de estas singularidades se determina usando el teorema de Hartman-Grobman. Los cambios de coordenadas usados son singulares en el punto de equilibrio ya que asignan una curva a un punto. Por otro lado también son difeomorfismos. En otras palabras, esta técnica nos permite analizar el comportamiento del origen al hacer una expansión o inflado del mismo, por ejemplo a una circunferencia, analizando en ella las singularidades y su comportamiento para posteriormente contraer la curva nuevamente el origen y obtener así su retrato fase. El ejemplo más sencillo y conocido es el de las coordenadas polares en el plano.

■ **Blow-up Polar:**

La ecuación diferencial  $\dot{x} = X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  se expresa fácilmente en coordenadas polares  $(r, \theta)$  para obtener

$$\dot{r} = X_r(r, \theta), \quad \dot{\theta} = r^{-1}X_\theta(r, \theta), \quad (2.28)$$

donde  $X = X_r e_r + X_\theta e_\theta$  y  $e_r$ ,  $e_\theta$  son vectores unitarios radial y angular, respectivamente. Esta forma puede ser considerada como la definición de una ecuación diferencial en un medio cilindro o, equivalentemente, en un plano perforado, como podemos apreciar en la figura (2.1). Bajo estas condiciones, las coordenadas polares usuales corresponden al caso especial en el que el círculo con  $r = 0$  es enviado al origen y el medio cilindro,  $\mathbb{R}^+ \times S^1$ , es enviada bajo un difeomorfismo a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . En coordenadas cartesianas, la función logra esto es

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

y  $\phi^{-1}$  podemos verla como un blow-up del origen del plano a el círculo  $r = 0$ .

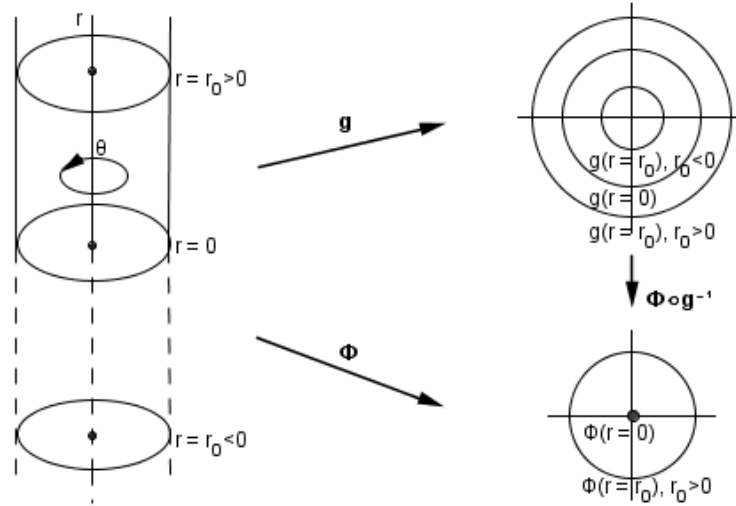


Figura 2.1: Equivalencia entre el medio cilindro y el plano agujereado:  $g$  es un difeomorfismo, por ejemplo  $g = e^r(\cos \theta, \sin \theta)$ . El plano polar corresponde al caso  $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Es importante que notemos que no siempre podemos estudiar el círculo  $r = 0$  directamente. Observemos que si  $D^l X(0) = 0$ ,  $l \leq k$  y  $D^{k+1} X(0) \neq 0$  entonces el sistema es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_0 x_1^{k+1} + \alpha_1 x_1^k x_2 + \dots + \alpha_{k+1} x_2^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}) \\ \dot{x}_2 &= \beta_0 x_1^{k+1} + \beta_1 x_1^k x_2 + \dots + \beta_{k+1} x_2^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}), \end{aligned}$$



en consecuencia,

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1 \left( \alpha_0 x_1^{k+1} + \dots + \alpha_{k+1} x_2^{k+1} + \dots \right) \\ &\quad + x_2 \left( \beta_0 x_1^{k+1} + \beta_1 x_1^k x_2 + \beta_{k+1} x_2^{k+1} + \dots \right) \\ &= r^{k+2} R(r, \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 \\ &= x_1 \left( \beta_0 x_1^{k+1} + \dots + \beta_{k+1} x_2^{k+1} + \dots \right) \\ &\quad - x_2 \left( \alpha_0 x_1^{k+1} + \alpha_1 x_1^k x_2 + \alpha_{k+1} x_2^{k+1} + \dots \right) \\ &= r^{k+2} Q(r, \theta), \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\dot{x} = X(x)$  tiene la forma polar

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^{k+1} R(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= r^k Q(r, \theta), \end{aligned}$$

por lo que no podemos obtener información haciendo  $r = 0$  directamente. Sin embargo, notemos que las curvas solución del sistema anterior están dadas por

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rR(r, \theta)}{Q(r, \theta)}$$

para  $r > 0$ . Es decir, las curvas solución son las mismas curvas solución del sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= rR(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= Q(r, \theta), \end{aligned}$$

obtenido dividiendo por  $r^k$ . Más aún, como  $r^k > 0$ , la orientación de las trayectorias es la misma. En general,  $Q(0, \theta) \neq 0$  y podemos usar el teorema de Hartman y Grobman para estudiar los puntos de equilibrio del nuevo sistema en la circunferencia expandida  $r = 0$ . Si todos estos puntos son hiperbólicos, podemos obtener el retrato fase local de  $\dot{x} = X(x)$  en  $x = 0$  contrayendo nuevamente el la circunferencia  $r = 0$  al origen, de lo contrario será necesario que utilicemos otros blow-up o cálculos de formas normales.

**Ejemplo 2.** Utilizaremos el blow-up polar para determinar el retrato fase alrededor del origen del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= y^2 - 2xy, \end{aligned} \tag{2.29}$$

el sistema en coordenadas polares es

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^2(\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta) = r^2 R(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= 3r \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) = rQ(r, \theta).\end{aligned}$$

Observemos que el sistema es topológicamente equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{r} &= rR(r, \theta) = \hat{X}_1 \\ \dot{\theta} &= Q(r, \theta) = \hat{X}_2,\end{aligned}$$

haciendo  $r = 0$  obtenemos los puntos críticos del sistema los cuáles son  $\theta = 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2, \pi/4$  y  $5\pi/4$ , y gracias al teorema de Hartman y Grobman podemos determinar el comportamiento en cada uno de estos puntos, por ejemplo para  $\theta = 0$  tenemos

$$D\hat{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

por lo que el punto  $(r, \theta) = (0, 0)$  es un equilibrio tipo silla con la variedad inestable tangente a la dirección radial, el resto de los equilibrios pueden observarse en la figura (2.2). Finalmente, contraemos el círculo  $r = 0$  al origen para obtener el retrato fase mostrado en la figura (2.3).

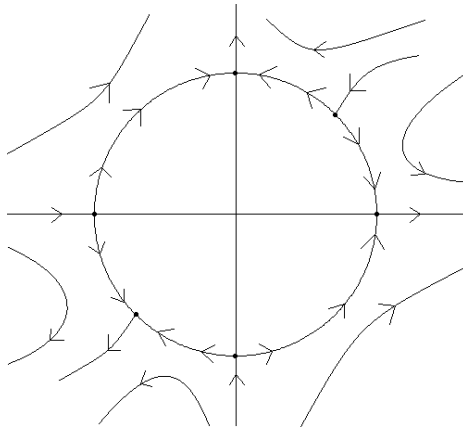


Figura 2.2: Blow-up polar ejemplo (2.29).

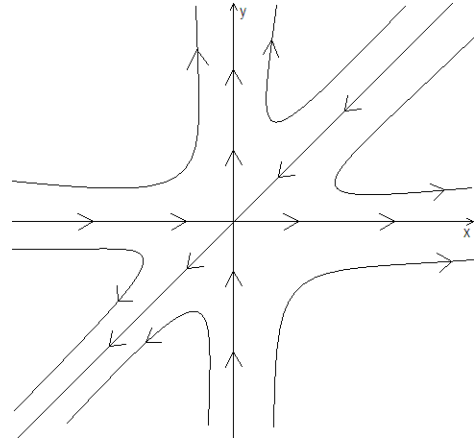


Figura 2.3: Retrato fase de (2.29).

#### ■ Blow-up Direccional:

Considere la función  $F : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$F(r, \theta) = (r \cos \theta, \tan \theta) = (u, v)$$

esta función es un difeomorfismo, observemos que

$$DF(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \sec^2 \theta \end{pmatrix}$$

con el determinante  $\sec \theta \neq 0$  para  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Más aún, tenemos que  $F$  lleva la media circunferencia  $\{(r, \theta) \mid r = 0, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$  en el eje  $v$  con el punto  $\theta = 0$  en el origen del plano  $u-v$ . Notemos que  $DF(0,0) = I$  entonces la parte lineal de campo  $X$  será la misma en las coordenadas  $(r, \theta)$  y  $(u, v)$ . Se sigue que podemos obtener la linealización de  $X$  en el punto  $\theta = 0$  en la circunferencia  $r = 0$  considerando la parte lineal de  $X$  en el origen del plano  $u-v$ . Dicha linealización puede ser obtenida directamente de la forma cartesiana de  $\dot{x} = X(x)$ . El cambio de coordenadas  $(u, v) \rightarrow (x, y)$  esta dado por la función  $\psi = \phi \cdot F^{-1}$ , donde

$$\psi(u, v) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (u, uv).$$

Si restringimos a  $u > 0$ ,  $\psi$  nos da un difeomorfismo en el semiplano  $x > 0$ . El cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  es llamado el *blow-up en la dirección  $x$* , ya que nos conduce a información sobre la singularidad en la circunferencia  $r = 0$  en  $\theta = 0$ , es decir, en el eje  $x$  positivo.

El sistema  $\dot{x} = X_1(x, y)$ ,  $\dot{y} = X_2(x, y)$  bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{X}_1(u, v) = X_1(u, uv) \\ \dot{v} &= \tilde{X}_2(u, v) = \frac{1}{u} [X_2(u, uv) - vX_1(u, uv)]. \end{aligned}$$

Además como en el blow-up polar si  $D^l \tilde{X}(0) = 0$ ,  $l \leq k$  y  $D^{k+1} \tilde{X}(0) \neq 0$ , dividimos el sistema anterior por factores  $|u|^k$ .

Con una transformación similar obtenemos un blow-up en la dirección  $y$  a fin de que adquiramos información en  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . El cambio de coordenadas que requerimos es

$$(x, y) = \tilde{\psi}(u, v) = (uv, v)$$

mientras que el campo bajo la transformación esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{X}_1(u, v) = \frac{1}{v} [X_1(uv, v) - uX_2(uv, v)] \\ \dot{v} &= \tilde{X}_2(u, v) = X_2(uv, v). \end{aligned}$$

En ocasiones puede resultarnos más conveniente usar un blow-up direccional para investigar las singularidades en la circunferencia  $r = 0$  en las direcciones  $x$  e  $y$ , incluso cuando es necesario aplicar la técnica repetidas ocasiones.

**Ejemplo 3.** Consideremos nuevamente el sistema (2.29) y hagamos uso del blow-up direccional en la dirección  $x$ . Por lo que bajo el cambio de coordenadas obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u^2 - 2u^2v \\ \dot{v} &= \frac{1}{u}(u^2v^2 - 2u^2v - v(u^2 - 2u^2v)), \end{aligned}$$

dividiendo entre  $u$  el sistema que se obtiene es

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u - 2uv \\ \dot{v} &= 3v(v - 1).\end{aligned}$$

Calculamos la matriz Jacobiana

$$D\tilde{X}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2v & -2u \\ 0 & -3 + 6v \end{pmatrix}$$

y evaluando en los puntos de equilibrio tenemos

$$D\tilde{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D\tilde{X}(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

por lo que ambos puntos son tipo silla como se observa en la figura (2.4), lo cual al contraer la recta al origen confirma el retrato fase obtenido con el blow-up polar.

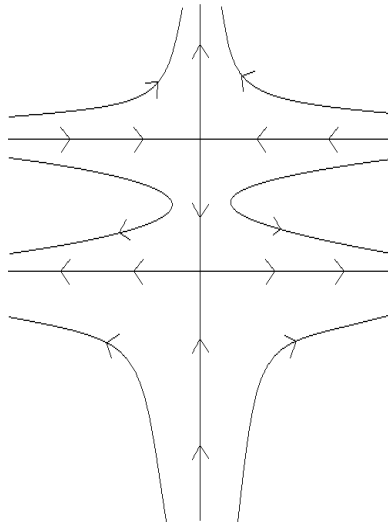


Figura 2.4: Blow-up dirección  $x$  del sistema (2.29).

Los anteriores son llamados *blow-ups homogéneos*, a continuación mostraremos un tipo diferente a los presentados, los cuales pueden resultar de gran ayuda, los blow-ups quasi-homéneos.

- **Blow-ups Quasi-homéneos:**

Aunque el método de blow-ups homogéneos sucesivos es suficiente para estudiar puntos de equilibrio aislados en un campo vectorial, nos resultará mucho más eficiente incluir blow-ups quasi-homéneos.

Sea el origen un punto de equilibrio de un campo vectorial suave  $X \in \mathbb{R}^2$ . Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta), \end{aligned}$$

para alguna pareja  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  adecuada con  $\alpha, \beta \geq 1$ . Exactamente como en el caso homogéneo, cuando  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  podemos definir un campo vectorial de acuerdo a un cambio de coordenadas y posteriormente dividirlo por  $r^k$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq 1$ , con la finalidad de que obtengamos un nuevo campo lo menos degenerado posible sobre el círculo invariante  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ .

Los blow-ups quasi-homogéneos más utilizados en la práctica son:

- Dirección  $x$  positiva  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}^\alpha, \bar{x}^\beta \bar{y})$ .
- Dirección  $x$  negativa  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (-\bar{x}^\alpha, \bar{x}^\beta \bar{y})$ .
- Dirección  $y$  positiva  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x} \bar{y}^\alpha, \bar{y}^\beta)$ .
- Dirección  $y$  negativa  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x} \bar{y}^\alpha, -\bar{y}^\beta)$ .

estos cambios de coordenadas nos llevan a otro sistema, el cual posteriormente dividiremos según nos convenga para llevar a cabo nuestro análisis y finalmente contraer el espacio para obtener el retrato fase para el sistema original.

**Ejemplo 4.** Consideremos el blow-up en la dirección  $x$  positiva:

$$\begin{aligned} x &= u^2 \\ y &= u^{k+1}v \end{aligned} \tag{2.30}$$

éste se obtiene mediante la función  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como

$$\psi(u, v) = \phi \circ F^{-1}(u, v) = (u^2, u^{k+1}v)$$

donde  $F : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define como

$$F(\theta, r) = \left( r\sqrt{\cos \theta}, \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^{\frac{k+1}{2}}} \right)$$

y  $\phi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la definimos por

$$\phi(\theta, r) = \left( r^2 \cos \theta, r^{k+1} \sin \theta \right).$$

Notemos que si tomamos  $r_0$  en el plano  $\theta$ - $r$ , si hacemos que  $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ,  $F(\theta, r) \rightarrow (0, -\infty)$ , mientras que si  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $F(\theta, r) \rightarrow (0, \infty)$ , además observemos que  $F(0, r_0) \rightarrow (r_0, 0)$ , por lo que si  $r_0 > 0$  la curva se encuentra en semiplano  $u$ -positivo y si  $r_0 < 0$  se encuentran en el negativo. Finalmente, veamos que si  $r_0 = 0$ , obtenemos el eje

$u = 0$  al aplicar la transformación  $F$ .

Ahora, recordemos que en el plano  $x$ - $y$  solo consideramos  $r \geq 0$ . Bajo esta consideración tenemos  $\phi(\theta, 0) = (0, 0)$  y al aplicar  $\phi$  para  $r_0 > 0$  tenemos  $\phi(\theta, r) = (r_0^2 \cos \theta, r_0^{k+1} \sin \theta)$ , las cuales son medias elipses en el semiplano  $x$  positivo.

De este modo, al pasar del plano  $u$ - $v$  a  $x$ - $y$ , se pierde el semiplano izquierdo en  $u$ - $v$  ya que este corresponde a  $r < 0$ . Por lo que este blow-up nos define el retrato fase en el semi plano  $x$  positivo.

El diagrama de la figura (2.5) muestra como se transforman rectas del plano  $\theta$ - $r$ , bajo las transformaciones  $F$  y  $\phi$ .

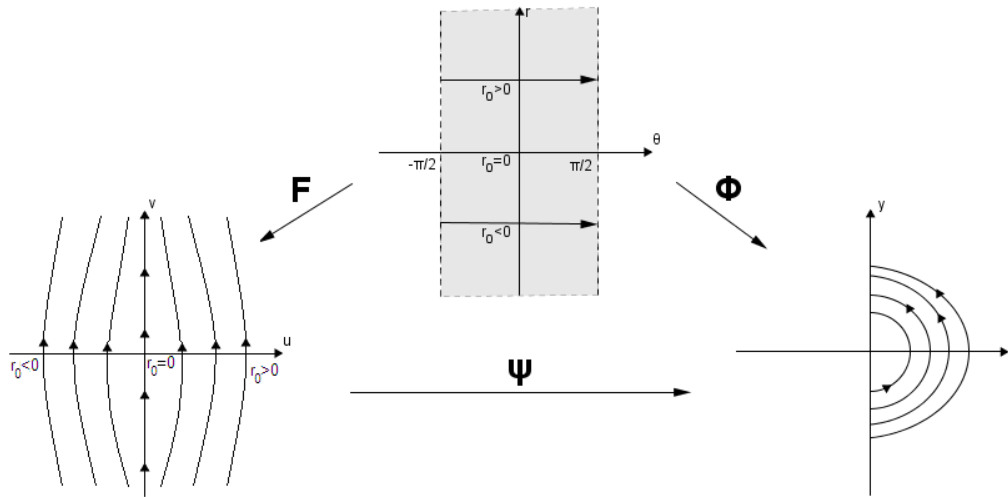


Figura 2.5: Blow-up dirección  $x$  positiva.

Análogamente al caso anterior tenemos el blow-up en la dirección  $x$  negativa.

**Ejemplo 5.** Consideremos el blow-up en la dirección  $x$  negativa:

$$\begin{aligned} x &= -u^2 \\ y &= u^{k+1}v \end{aligned} \quad (2.31)$$

el cual puede ser obtenido con la función  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\psi(u, v) = \phi \circ F^{-1}(u, v) = (u^2, u^{k+1}v)$$

donde  $F : (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es

$$F(\theta, r) = \left( r\sqrt{-\cos \theta}, \frac{\sin \theta}{(-\cos \theta)^{\frac{k+1}{2}}} \right)$$

y  $\phi : (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la definimos por

$$\phi(\theta, r) = (r^2 \cos \theta, r^{k+1} \sin \theta).$$

Con un análisis semejante al del ejemplo anterior, obtenemos un diagrama para la transformación de las rectas en el plano  $r$ - $\theta$  bajo la transformación  $F$  y  $\phi$  respectivamente, dicho diagrama se observa en la figura (2.6). Notemos que en este caso si  $r > 0$ , dado que  $\phi$  se define en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times \mathbb{R}$  obtenemos el semiplano  $x$  negativo, del retrato fase.

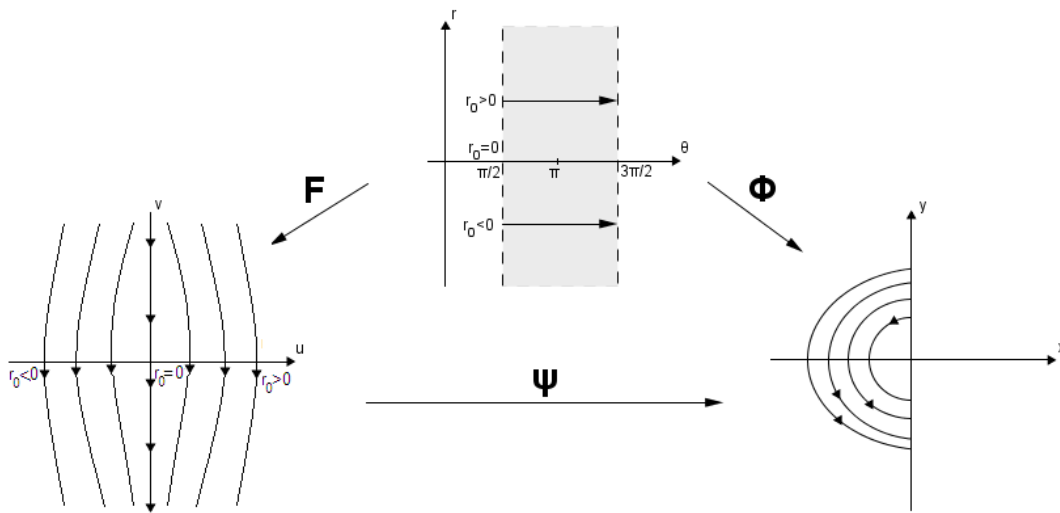


Figura 2.6: Blow-up dirección  $x$  negativa.

Una vez presentadas las herramientas anteriores, contamos con las condiciones necesarias para los objetivos principales de esta tesis por lo que en los capítulos posteriores procederemos a analizar los distintos tipos de retrato fase que pueden presentarse alrededor de puntos de equilibrios no hiperbólicos.





## Capítulo 3

### Un valor propio cero

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.1)$$

con  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $f$  un campo vectorial suave y  $f(x_0) = 0$ .

Supongamos que

$$Df(x_0) \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_0$  un número real diferente de cero, y analicemos el comportamiento del sistema (3.1) localmente, alrededor del punto de equilibrio  $x = x_0$ . Veremos entonces que la dinámica en una vecindad del equilibrio  $x = x_0$  puede ser tipo nodo, silla o silla-nodo.

Apliquemos al sistema (3.1) el cambio de coordenadas

$$y = P^{-1}(x - x_0), \quad (3.2)$$

con  $P = (v_1 \ v_2)$ , donde  $v_1, v_2$  son los vectores propios asociados a  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = \lambda_0$  respectivamente.

**Lema 1.** Si  $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix}$ , entonces  $w_1$  y  $w_2$  son los vectores propios izquierdos de  $A$ , con valores propios  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = \lambda_0$ , respectivamente.

**Demostración:**

Debemos probar que  $w_1^T A = 0$  y  $w_2^T A = \lambda w_2^T$ , con  $A = Df(x_0)$ . Sabemos por construcción que  $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ . Multiplicando la expresión anterior por  $P^{-1}$  por la derecha, obtenemos

$$\begin{aligned} P^{-1}A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \\ \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} w_1^T A \\ w_2^T A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda w_2^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Veamos como se transforma el sistema (3.1) bajo el cambio de coordenadas (3.2):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} [P^{-1}(x - x_0)] \\ \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} \\ \dot{y} &= P^{-1}f(x)\end{aligned}$$

Desarrollamos el campo  $f(x)$  en serie de Taylor, alrededor de  $x = x_0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}D^2f(x_0)(x - x_0, x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{6}D^3f(x_0)(x - x_0, x - x_0, x - x_0) + \dots\end{aligned}$$

de (3.2), se tiene que  $x - x_0 = Py$ , entonces,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= P^{-1}f(x) \\ &= P^{-1} \left[ Df(x_0)Py + \frac{1}{2}D^2f(x_0)(Py, Py) + \frac{1}{6}D^3f(x_0)(Py, Py, Py) + \dots \right] \\ &= P^{-1}Df(x_0)Py + \frac{1}{2}P^{-1}D^2f(x_0)(Py, Py) + \frac{1}{6}P^{-1}D^3f(x_0)(Py, Py, Py) + \dots \\ &= Jy + \frac{1}{2}P^{-1}D^2f(x_0)(Py, Py) + \frac{1}{6}P^{-1}D^3f(x_0)(Py, Py, Py) + \dots\end{aligned}$$

Por lo que el sistema en las nuevas coordenadas es de la forma

$$\dot{y} = Jy + g_2(y) + g_3(y) + \dots, \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \\ g_2(y) &= \frac{1}{2}P^{-1}D^2f(x_0)(Py, Py), \\ g_3(y) &= \frac{1}{6}P^{-1}D^3f(x_0)(Py, Py, Py).\end{aligned}$$

### 3.1. Dinámica sobre la Variedad Central

Supongamos  $\lambda_0 < 0$ , entonces el sistema (3.3) tiene asociado un eigenespacio estable correspondiente al valor  $\lambda_0$  sobre el eje vertical y un eigenespacio central asociado al valor propio cero sobre el eje horizontal. Por lo que existen una variedad estable y una variedad central tangentes a los eigenespacios estable e inestable respectivamente.

Procederemos a analizar el comportamiento en la variedad central, para por medio de ella determinar el comportamiento local del equilibrio  $x = x_0$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ , luego

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \end{pmatrix}, \quad D^2 f(x) = \begin{pmatrix} (D^2 f_1(x)) \\ (D^2 f_2(x)) \end{pmatrix}, \quad D^3 f(x) = \begin{pmatrix} (D^3 f_1(x)) \\ (D^3 f_2(x)) \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Entonces,

$$D^k f(x_0) \underbrace{(Py, Py, \dots, Py)}_{k \text{ veces}} = \begin{pmatrix} D^k f_1(x_0)(Py, Py, \dots, Py) \\ D^k f_2(x_0)(Py, Py, \dots, Py) \end{pmatrix}_{2 \times 1} \quad \text{para } k = 2, 3, \dots$$

Multiplicando por  $P^{-1}$  a la izquierda tenemos,

$$P^{-1} D^k f(x_0)(Py, Py, \dots, Py) = \begin{pmatrix} w_1^T D^k f(x_0)(Py, Py, \dots, Py) \\ w_2^T D^k f(x_0)(Py, Py, \dots, Py) \end{pmatrix}$$

Si  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1^T D^2 f(x_0)(Py, Py) \\ w_2^T D^2 f(x_0)(Py, Py) \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} w_1^T D^3 f(x_0)(Py, Py, Py) \\ w_2^T D^3 f(x_0)(Py, Py, Py) \end{pmatrix} + \dots,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{2} w_1^T D^2 f(x_0)(Py, Py) + \frac{1}{6} w_1^T D^3 f(x_0)(Py, Py, Py) + \dots \\ &= p_2(y) \\ \dot{y}_2 &= \lambda_0 y_2 + \frac{1}{2} w_2^T D^2 f(x_0)(Py, Py) + \frac{1}{6} w_2^T D^3 f(x_0)(Py, Py, Py) + \dots \\ &= \lambda_0 y_2 + q_2(y). \end{aligned}$$

(3.4)

La variedad central debe cumplir las siguientes condiciones:

$$W^c = \{y_2 = h(y_1) : |y_1| < \epsilon, h(0) = 0, h'(0) = 0\},$$

y satisfacer la ecuación homológica

$$\dot{y}_2 = h'(y_1) \dot{y}_1 \Leftrightarrow \lambda_0 h(y_1) + q_2(y_1, h(y_1)) = h'(y_1) p_2(y_1, h(y_1)).$$

Finalmente, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{y}_1 = p_2(y_1, h(y_1)).$$

**Teorema 6.** *Sea el origen un punto de equilibrio aislado para el sistema analítico (3.4). Sea  $y_2 = h(y_1)$  la solución de la ecuación homológica*

$$\lambda_0 h(y_1) + q_2(y_1, h(y_1)) = h'(y_1) p_2(y_1, h(y_1))$$

*y sea la expansión de la función*

$$\phi(y_1) = p_2(y_1, h(y_1)) = a_m y_1^m + \dots$$

*en una vecindad de  $y_1 = 0$ , donde  $m \geq 2$  y  $a_m \neq 0$ . Entonces:*

1. *Si  $m$  es impar y  $a_m > 0$  el equilibrio es tipo **silla**.*
2. *Si  $m$  es impar y  $a_m < 0$  el equilibrio es tipo **nodo**.*
3. *Si  $m$  es par el equilibrio es tipo **silla-nodo**.*

**Observación 5.** *Es fácil determinar que si  $\lambda_0 > 0$  el criterio para la silla y el nodo se invierten, en este caso el nodo cambia su estabilidad de estable a inestable.*

### **Demostración:**

La demostración es análoga al caso que vimos anteriormente. Notemos que el valor propio  $\lambda_0$  tiene asociado una variedad estable por lo que basta analizar el comportamiento sobre la variedad central para determinar la estabilidad del equilibrio.

1. Si  $m$  es impar y  $a_m > 0$  entonces para  $y_1 > 0$  el flujo sobre la variedad central se mueve hacia la derecha ya que  $\dot{y}_1 > 0$ , por otro lado si  $y_1 < 0$ , tenemos que  $\dot{y}_1 < 0$  sobre la variedad central, en consecuencia, el flujo se mueve hacia la izquierda, por lo que el flujo sobre la variedad central es inestable, por lo tanto el origen es tipo *silla* como se muestra en la figura (3.1).
2. Consideremos ahora el caso  $m$  impar y  $a_m < 0$ , podemos analizarlo de forma similar al anterior, notemos que sobre la variedad central  $\dot{y}_1 > 0$  si  $y_1 < 0$  y  $\dot{y}_1 < 0$  si  $y_1 > 0$ , por lo que concluimos que el flujo es estable, lo cual significa que el origen es un *nodo* estable (Figura 3.2).

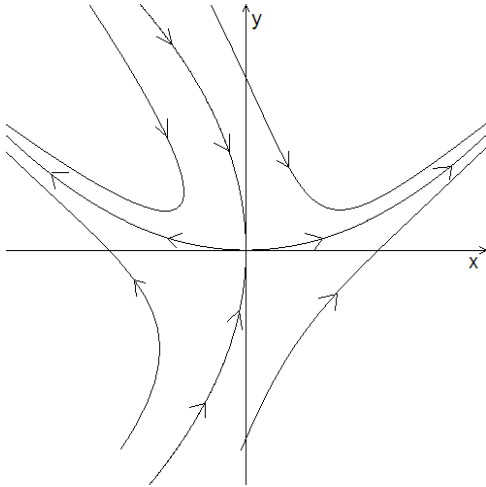


Figura 3.1: Equilibrio tipo silla.

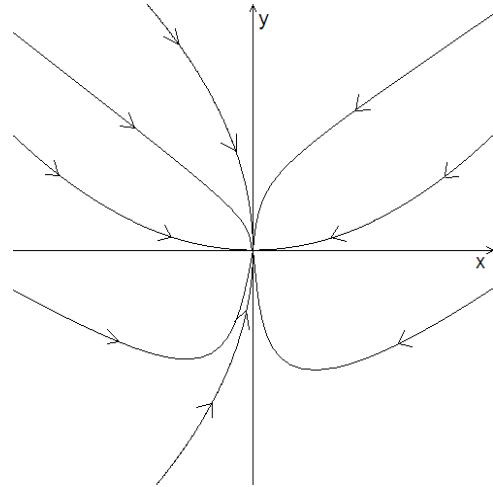


Figura 3.2: Equilibrio tipo nodo.

3. Finalmente, si  $m$  es par tenemos dos posibilidades a analizar  $a_m$  positiva o negativa. Si  $a_m > 0$  notemos que el flujo siempre se mueve hacia la derecha sobre la variedad central, como vemos en la figura (3.3), y por el contrario, si  $a_m < 0$  el flujo se mueve siempre hacia la izquierda. En conclusión el origen es un equilibrio tipo *silla-nodo*.

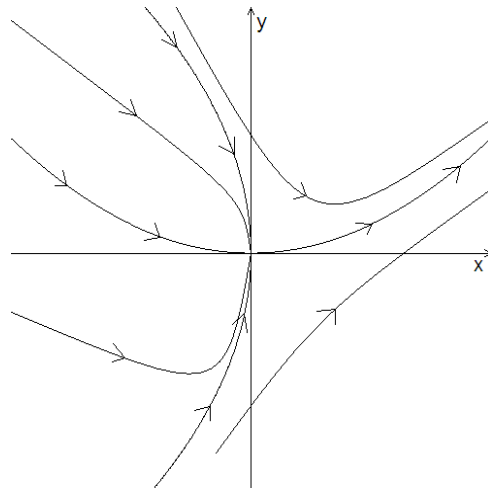


Figura 3.3: Equilibrio tipo silla-nodo.

■

### 3.2. Cálculo de $a_m$

En esta sección calcularemos los coeficientes  $a_2$  y  $a_3$ . El resto de los coeficientes se obtienen de manera análoga.

Supongamos que hemos transformado (3.1) bajo el cambio de coordenadas (3.2) obteniendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_2^2 + \alpha_4 y_1^3 + \dots \\ \dot{y}_2 &= \lambda_0 y_2 + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_1 y_2 + \beta_3 y_2^2 + \dots\end{aligned}\quad (3.5)$$

Desarrollando ambos lados de la ecuación homológica podemos determinar los coeficientes para la variedad central. Sea  $y_2 = h(y_1) = \gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_1^3 + \dots$ , procederemos a calcular los primeros coeficientes de  $h$  como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 &= h'(y_1)\dot{y}_1 \\ \lambda_0 h(y_1) + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_1 h(y_1) + \dots &\equiv (2\gamma_1 y_1 + 3\gamma_2 y_1^2 + \dots) \\ &\quad (\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \dots) \\ \lambda_0 (\gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_1^3 + \dots) + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_1 (\gamma_1 y_1^2 + \dots) + \dots &\equiv 2\alpha_1 \gamma_1 y_1^3 + \mathcal{O}(|y_1|^4) \\ (\lambda_0 \gamma_1 + \beta_1) y_1^2 + (\lambda_0 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) y_1^3 + \mathcal{O}(|y_1|^4) &\equiv 2\alpha_1 \gamma_1 y_1^3 + \mathcal{O}(|y_1|^4),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lambda_0 \gamma_1 + \beta_1 = 0 &\Rightarrow \gamma_1 = -\frac{\beta_1}{\lambda_0} \\ \lambda_0 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1 = 2\alpha_1 \gamma_1 &\Rightarrow \gamma_2 = \frac{\gamma_1(2\alpha_1 - \beta_2)}{\lambda_0} = -\frac{\beta_1}{\lambda_0^2}(2\alpha_1 - \beta_2)\end{aligned}$$

Por lo tanto la variedad central está dada como

$$y_2 = h(y_1) = -\frac{\beta_1}{\lambda_0} y_1^2 - \frac{\beta_1}{\lambda_0^2} (2\alpha_1 - \beta_2) y_1^3 + \dots \quad (3.6)$$

Finalmente, obtenemos la dinámica sobre la variedad central,

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 \left( -\frac{\beta_1}{\lambda_0} y_1^2 - \frac{\beta_1}{\lambda_0^2} (2\alpha_1 - \beta_2) y_1^3 + \dots \right) + \alpha_3 \left( -\frac{\beta_1}{\lambda_0} y_1^2 + \dots \right)^2 \\ &\quad + \alpha_4 y_1^3 + \dots \\ &= \alpha_1 y_1^2 + \left( -\frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_0} + \alpha_4 \right) y_1^3 + \mathcal{O}(|y_1|^4) \\ &= a_2 y_1^2 + a_3 y_1^3 + \mathcal{O}(|y_1|^4)\end{aligned}$$

donde

$$a_2 = \alpha_1 \text{ y } a_3 = -\frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_0} + \alpha_4.$$

En consecuencia si queremos conocer  $a_2$  y  $a_3$ , requerimos conocer los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  y  $\beta_1$ , por ello estableceremos como calcularlos. Calcularemos estos coeficientes relacionando las ecuaciones (3.4) y (3.5).

Notemos lo siguiente:

$$Py = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$\begin{aligned} D^2 f(x_0)(Py, Py) &= D^2 f(x_0)(v_1 y_1 + v_2 y_2, v_1 y_1 + v_2 y_2) \\ &= D^2 f(x_0)(v_1 y_1, v_1 y_1) + D^2 f(x_0)(v_1 y_1, v_2 y_2) \\ &\quad + D^2 f(x_0)(v_2 y_2, v_1 y_1) + D^2 f(x_0)(v_2 y_2, v_2 y_2) \\ &= D^2 f(x_0)(v_1, v_1) y_1^2 + D^2 f(x_0)(v_1, v_2) y_1 y_2 + D^2 f(x_0)(v_2, v_1) y_1 y_2 \\ &\quad + D^2 f(x_0)(v_2, v_2) y_2^2 \\ &= D^2 f(x_0)(v_1, v_1) y_1^2 + 2D^2 f(x_0)(v_1, v_2) y_1 y_2 + D^2 f(x_0)(v_2, v_2) y_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_1^T D^2 f(x_0)(Py, Py) &= \frac{1}{2} w_1^T D^2 f(x_0)(v_1, v_1) y_1^2 + w_1^T D^2 f(x_0)(v_1, v_2) y_1 y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} w_1^T D^2 f(x_0)(v_2, v_2) y_2^2 \\ \frac{1}{2} w_2^T D^2 f(x_0)(Py, Py) &= \frac{1}{2} w_2^T D^2 f(x_0)(v_1, v_1) y_1^2 + w_2^T D^2 f(x_0)(v_1, v_2) y_1 y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} w_2^T D^2 f(x_0)(v_2, v_2) y_2^2 \end{aligned}$$

De donde obtenemos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\beta_1$ , análogamente calculamos  $\alpha_4$ . Por lo que estos coeficientes son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} w_1^T D^2 f(x_0)(v_1, v_1) \\ \alpha_2 &= w_1^T D^2 f(x_0)(v_1, v_2) \\ \beta_1 &= \frac{1}{2} w_2^T D^2 f(x_0)(v_1, v_1) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{6} w_1^T D^3 f(x_0)(v_1, v_1, v_1) \end{aligned}$$

Ilustraremos el análisis anterior mediante el siguiente ejemplo.

### 3.3. Ejemplo

Analizaremos el comportamiento alrededor origen del sistema que se muestra a continuación

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 + \mu_1 x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + \mu_2 x_2^2 \end{cases}$$

donde  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ .

Primero notemos que el origen en efecto es un equilibrio del sistema, ahora, al calcular la matriz Jacobiana del sistema obtenemos

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -1 - x_2 + 2\mu_1 x_1 x_2 & 2 - x_1 + \mu_1 x_1^2 \\ 1 & 2(\mu_2 x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

al evaluarla en el origen tenemos

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hemos calculado los valores propios de la matriz A, obteniendo  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -3$  por lo que los vectores propios asociados a ellos son  $v_1 = (2, 1)^T$  y  $v_2 = (1, -1)^T$  respectivamente. Por lo que la matriz cambio de base del sistema y su inversa son

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, los vectores propios izquierdos de A son

$$\omega_1 = (1/3, 1/3)^T \text{ y } \omega_2 = (1/3, -2/3)^T.$$

Mediante algunos cálculos hemos obtenido que

$$D^2 f(0)(v_1, v_1) = (-4, 2\mu_2)^T, \quad D^2 f(0)(v_1, v_2) = (1, -2\mu_2)^T$$

$$\text{y } D^3 f(0)(v_1, v_1, v_1) = (24\mu_1, 0)^T,$$

por lo que al calcular los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  y  $\alpha_4$  resulta

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(-2 + \mu_2), \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}(1 - 2\mu_2), \quad \beta_1 = -\frac{2}{3}(1 + 4\mu_2) \text{ y } \alpha_4 = \frac{4}{3}\mu_1,$$

entonces  $a_2 = \frac{1}{3}(-2 + \mu_2)$  y si  $\mu_2 = 2$ ,  $a_3 = \frac{2}{3}(2\mu_1 + 1)$ .

Del teorema 6 podemos concluir lo siguiente:

- Si  $\mu_2 \neq 2$  entonces el origen es un equilibrio tipo silla-nodo.
- Si  $\mu_2 = 2$  y  $\mu_1 > -1/2$  entonces el origen es un equilibrio tipo silla.
- Si  $\mu_2 = 2$  y  $\mu_1 < -1/2$  entonces el origen es un nodo estable.
- Si  $\mu_2 = 2$  y  $\mu_1 = -1/2$  entonces  $a_2 = a_3 = 0$ . Se requiere calcular  $a_4$ .

La figura (3.4) es un diagrama que muestra la bifurcación del sistema de acuerdo al cambio en los parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .



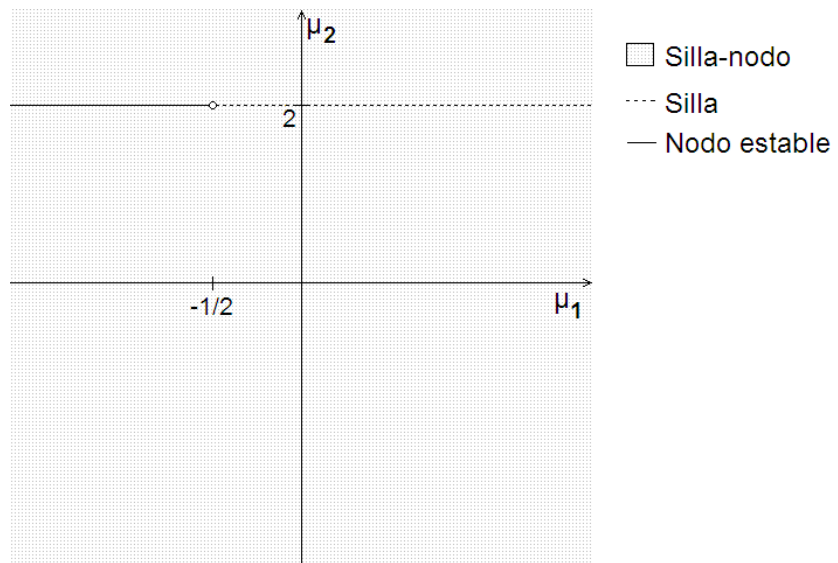


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación.

Los bosquejos de retrato fase de este sistema para cada caso se muestran en las figuras (3.5), (3.6) y (3.7).

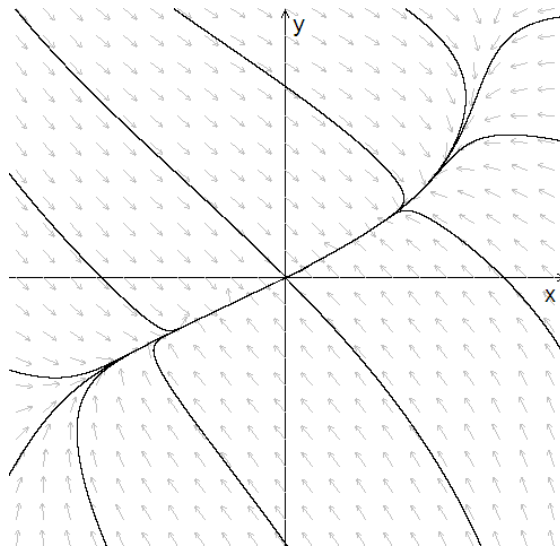


Figura 3.5: Nodo estable:  $\mu_2 = 2$  y  $\mu_1 < -1/2$ .

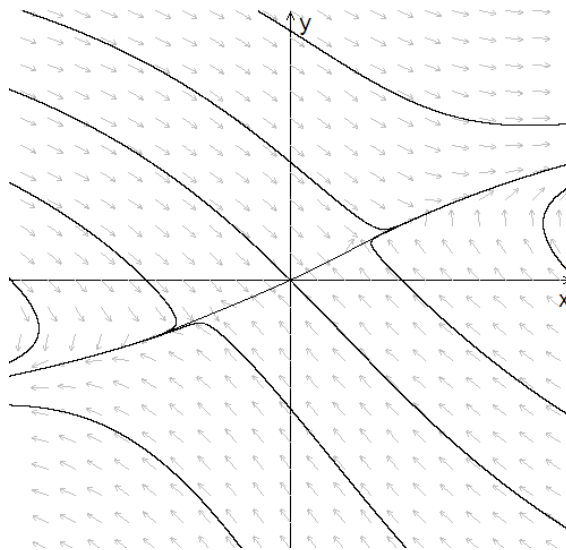


Figura 3.7: Silla:  $\mu_2 = 2$  y  $\mu_1 > -1/2$ .

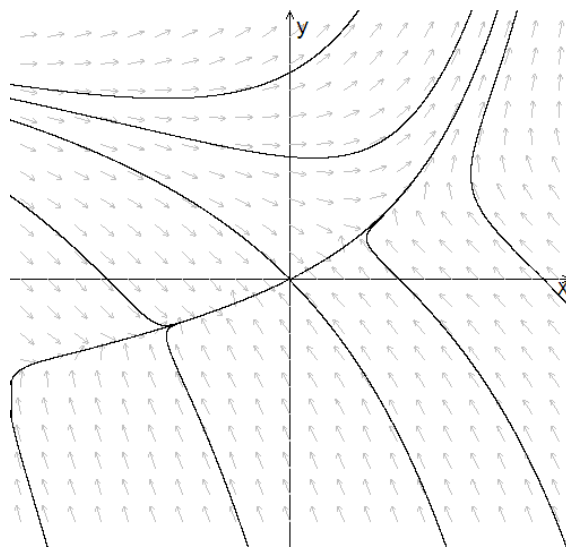


Figura 3.6: Silla-nodo:  $\mu_2 \neq 2$ .

## Capítulo 4

### Dos Valores Propios Cero con Multiplicidad Geométrica Dos

Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

con  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ . Supongamos que la matriz Jacobiana del sistema (4.1) es

$$Df(0, 0) \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La herramienta principal para estudiar el comportamiento en una vecindad del equilibrio es el uso de una simple transformación a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}\tag{4.2}$$

Las derivadas respecto al tiempo de  $(r, \theta)$  se encuentran usando la regla de la cadena en (4.2):

$$\begin{aligned}2r\dot{r} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow \sec^2 \theta \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta} [x\dot{y} - \dot{x}y],\end{aligned}$$

por lo que el sistema bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}), \end{cases}\tag{4.3}$$

con  $r \neq 0$ . Sustituyendo (4.2) y (4.3) en el sistema (4.1) y eliminando  $x$  e  $y$  de  $r$  y

$\theta$  tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r} [xP(r \cos \theta, r \sin \theta) + yQ(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ &= P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} [xQ(r \cos \theta, r \sin \theta) - yP(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ &= \frac{1}{r} [Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta].\end{aligned}\tag{4.4}$$

Dividiendo la ecuación  $\dot{r}$  por  $\dot{\theta}$  tenemos la ecuación para las curvas del retrato fase

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}{Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}.\tag{4.5}$$

#### 4.1. P y Q: Polinomios homogéneos del mismo grado

Como un caso simple, supongamos que  $P$  y  $Q$  son polinomios homogéneos de grado  $n$  en sus argumentos, esto es  $P(ax, ay) = a^n p(x, y)$  y similarmente para  $Q$ . En este caso,  $P(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n P(\cos \theta, \sin \theta)$ , entonces de (4.5) se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= r \frac{r^n [P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta]}{r^n [Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta]} \\ &= r \frac{P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}\end{aligned}$$

y separando variables tenemos,

$$\frac{dr}{r} = \frac{P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta} d\theta = g(\theta) d\theta,$$

con

$$g(\theta) = \frac{P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}.$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} &= \int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi \\ \Rightarrow \ln r - \ln r_0 &= \int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi \\ \Rightarrow r(\theta, (r_0, \theta_0)) &= r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Si el equilibrio fuera asintóticamente estable, entonces para todo  $(r_0, \theta_0)$ ,  $r(t, r_0) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para que esto ocurra, la integral de la función  $g$  debe converger a menos infinito. Note que  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$ , entonces una cantidad importante a considerar es

$$G = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta.\tag{4.7}$$

Estudiaremos tres casos:  $G = 0$ ,  $G \neq 0$  y que  $G$  sea infinita.

■ **Centro Topológico:**

**Teorema 7.** *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema (4.1). Si  $G = 0$  entonces, localmente, el origen es un **centro topológico**.*

**Demostración:**

$r(\theta) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi} \Rightarrow r(\theta_0 + 2\pi) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi}$ . Por otro lado tenemos que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi = \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi + \int_{2\pi}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi.$$

Hacemos el cambio de variable  $\omega = \phi - 2\pi$  y notemos que  $g(\omega) = g(\phi)$ , por lo que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi = \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi + \int_0^{\theta_0} g(\omega) d\omega = \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi = G = 0.$$

Por lo tanto,

$$r(\theta_0 + 2\pi) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi} = r_0 e^0 = r_0 = r(\theta_0)$$

■

■ **Foco No-hiperbólico:**

**Teorema 8.** *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema (4.1). Si  $G$  existe y es distinta de cero entonces, localmente, el origen es un **foco no-hiperbólico**.*

**Demostración:**

Supongamos que  $0 < \omega < \theta_0 < 2\pi$ , como  $r(\omega) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\omega} g(\phi) d\phi}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} r(\omega + 2\pi) &= r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\omega + 2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r_0 e^{\int_{2\pi}^{\omega + 2\pi} g(\phi) d\phi + \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r_0 e^{\int_0^{\omega} g(\phi) d\phi + \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r_0 e^{-\int_{\omega}^{\theta_0} g(\phi) d\phi} e^{\int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r(\omega) e^G \end{aligned}$$

■

Si  $G > 0$ , la curva forma una espiral hacia afuera (creciendo). En caso contrario, forma una espiral hacia adentro (decreciendo) como se muestra en la figura (4.1).

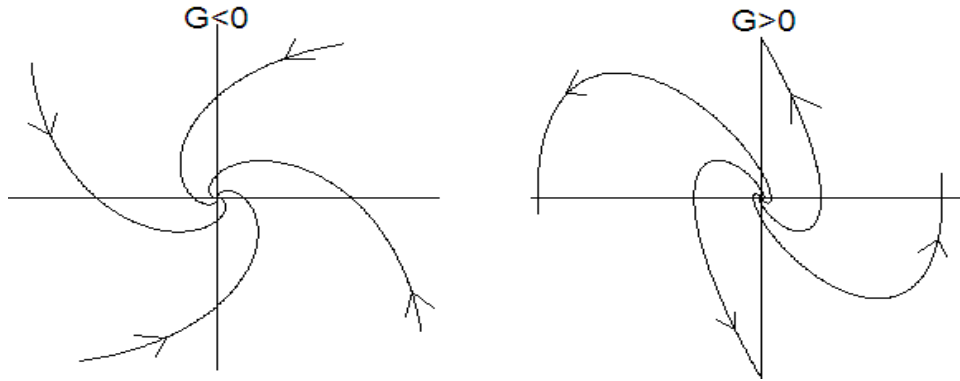


Figura 4.1: Retrato fase local si  $G$  existe y es distinta de cero.

- **Nodo No-hiperbólico:**

Si  $G$  no existe, entonces  $g$  tiene una singularidad no integrable en algún punto  $\theta_c$  donde el denominador es igual a cero.

$$D(\theta_c) = Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c - P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c = 0,$$

esto es  $\dot{\theta} = 0$ . En este caso, la integral en (4.6) no está acotada cuando  $\theta \rightarrow \theta_c$ . Este ángulo define una dirección asintótica de aproximación al origen cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$  si es inestable y  $t \rightarrow \infty$  si es estable).

Cuando un equilibrio es un nodo no-hiperbólico, existen una o más direcciones correspondientes a órbitas de convergencia o divergencia. Estas órbitas dividen un pequeño disco alrededor del equilibrio en sectores, acotados por curvas asintóticas. Los sectores pueden ser de tres tipos: *elíptico*, *hiperbólico* o *parabólico*, como se muestra en la figura (4.2).

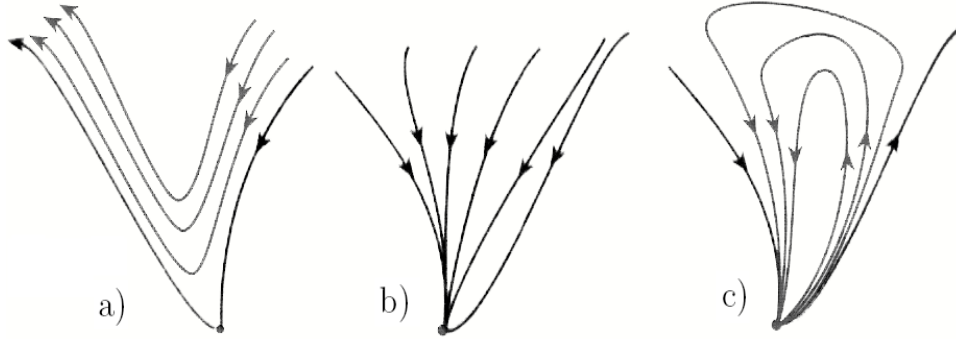


Figura 4.2: Sectores: a) hiperbólico, b) parabólico y c) elíptico.

Un sector parabólico está acotado por dos curvas del mismo tipo asintótico, ambas convergentes o divergentes. Los casos hiperbólicos y elípticos se distinguen por el signo de  $\dot{\theta}$ ; por ejemplo en la figura (4.2),  $\dot{\theta} > 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ , entonces si la dirección de convergencia es contra-reloj de la divergente, es elíptico; en otro caso es hiperbólico. La dinámica local en el caso no hiperbólico es no acotada: toda órbita en el sector que no está en la dirección de convergencia eventualmente abandona cualquier disco alrededor del equilibrio.

Una silla hiperbólica provee el ejemplo estándar de un equilibrio con sectores hiperbólicos, cada sector acotado por un eigenvector es hiperbólico. Un nodo no-hiperbólico puede ser una combinación de sectores dependiendo del sistema (4.1).

**Lema 2.** Si  $\theta_c$  es tal que  $D(\theta_c) = 0$  entonces  $D(\theta_c + \pi) = 0$ .

**Demostración:**

Dado que  $\cos(\theta_c + \pi) = -\cos \theta_c$  y  $\sin(\theta_c + \pi) = -\sin \theta_c$ , y que estamos suponiendo que  $P$  y  $Q$  son homogéneos, tenemos

$$Q(-\cos \theta_c, -\sin \theta_c) = (-1)^n Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c),$$

análogamente para  $P$ . Entonces,

$$\begin{aligned} D(\theta_c + \pi) &= Q(\cos(\theta_c + \pi), \sin(\theta_c + \pi)) \cos(\theta_c + \pi) \\ &\quad - P(\cos(\theta_c + \pi), \sin(\theta_c + \pi)) \sin(\theta_c + \pi) \\ &= Q(-\cos \theta_c, -\sin \theta_c)(-\cos \theta_c) - P(-\cos \theta_c, -\sin \theta_c)(-\sin \theta_c) \\ &= (-1)^{n+1} Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c - (-1)^{n+1} P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c \\ &= (-1)^{n+1} [Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c - P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c] \\ &= (-1)^{n+1} D(\theta_c) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Así que, si existe una dirección asintótica de aproximación al origen, entonces existen dos direcciones, en una línea recta que cruza por el origen con pendiente  $\tan \theta_c$ . La velocidad en  $r$  sobre una dirección asintótica  $\theta_c$  queda determinada por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^n [P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c + Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c] \\ &= r^n \left[ P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c + \frac{P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c}{\cos \theta_c} \sin \theta_c \right] \\ &= r^n \left[ \frac{P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos^2 \theta_c + P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin^2 \theta_c}{\cos \theta_c} \right] \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= \frac{r^n P(\cos \theta_c, \sin \theta_c)}{\cos \theta_c}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $D(\theta_c) = 0$  fue utilizado para eliminar  $Q$ . En consecuencia,  $r$  crece o decrece asintóticamente dependiendo del signo de (4.8), implicando que el rayo  $\theta = \theta_c$  es una dirección asintóticamente estable o inestable. Note que  $\text{sgn} \left( \frac{dr}{dt} \right)$  para  $\theta_c + \pi$  es  $(-1)^{n+1}$  el de  $\theta_c$ . Entonces cuando  $P$  y  $Q$  tienen un grado par en  $r$ , un signo nos da aproximación y el otro divergencia, pero si tiene grado impar tienen el mismo comportamiento.

Procederemos a ver algunos ejemplos donde se muestra los distintos casos para  $G$ .

#### 4.1.1. Ejemplos

**Ejemplo 6.** *Considere el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = -x^2y - y^3 \\ \dot{y} = Q(x, y) = x^3 + xy^2 \end{cases} \quad (4.9)$$

*En coordenadas polares, usando (4.3), el sistema (4.9) se transforma en*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{r} (-x^3y - x^3 + yx^3 + xy^3) = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} (x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4) = \frac{1}{r^2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = \frac{1}{r^2} (x^2 + y^2)^2 = \frac{(r^2)^2}{r^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = r^2 \end{cases}$$

por lo que tenemos que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{0}{r^2} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 0d\theta,$$



de donde se tiene

$$g(\theta) \equiv 0 \Rightarrow G = \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0.$$

En consecuencia, el origen es un **centro topológico**; además, toda órbita periódica fuera del origen tiene un periodo  $T = 2\pi r^2$ , lo cual se obtiene de  $\dot{\theta}$ . La figura (4.3) nos muestra el retrato fase del sistema (4.9).

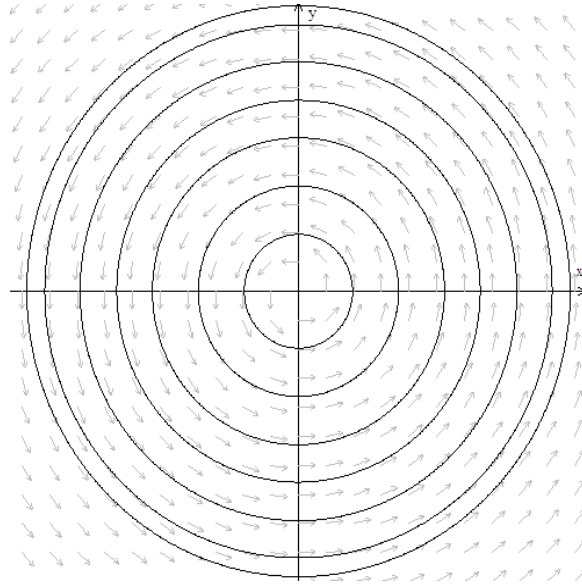


Figura 4.3: Retrato fase del sistema (4.9).

**Ejemplo 7.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = -(x^2 + y^2)(x + y) \\ \dot{y} = Q(x, y) = (x^2 + y^2)(x - y) \end{cases} \quad (4.10)$$

observe que

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= -x(x^2 + y^2)(x + y) + y(x^2 + y^2)(x - y) \\ &= (x^2 + y^2)(-x^2 - xy + xy - y^2) \\ &= -r^4 \\ r^2\dot{\theta} &= x(x^2 + y^2)(x - y) + y(x^2 + y^2)(x + y) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - xy + xy - y^2) \\ &= r^4. \end{aligned}$$

Por lo que el sistema en coordenadas polares se transforma en

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = r^2 \end{cases},$$

luego,  $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^3}{r^2} = -r$  y separando variables obtenemos,

$$\frac{dr}{r} = -1d\theta \Rightarrow g(\theta) \equiv -1.$$

Por lo que  $\int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi = \int_{\theta_0}^{\theta} -1 d\phi = -\phi \Big|_{\theta_0}^{\theta} = -\theta + \theta_0$ , si  $\theta \rightarrow \pm\infty$  la integral  $G \rightarrow \pm\infty$ . Por lo tanto, el origen es un **foco no-hiperbólico**. En este caso, todas las trayectorias giran en espiral alrededor del origen infinitas veces cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow 0$ . La figura (4.4) nos muestra el retrato fase para este ejemplo.

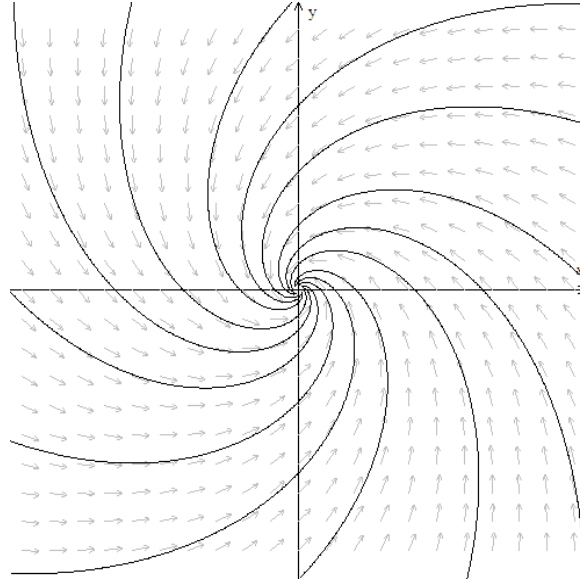


Figura 4.4: Retrato fase del sistema (4.10).

**Ejemplo 8.** Considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = -2xy \end{cases} \quad (4.11)$$

Aplicando la transformación a coordenadas polares a este sistema tenemos

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= xy^2 - x^3 - 2xy^2 = -xy^2 - x^3 = -x(x^2 + y^2) = -r^3 \cos \theta \\ \Rightarrow \dot{r} &= -r^2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= -2x^2y - y^3 + yx^2 = -y(x^2 + y^2) = -r^3 \sin \theta \\ \Rightarrow \dot{\theta} &= -r \sin \theta, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r^2 \cos \theta}{-r \sin \theta} = r \cot \theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \cot \theta d\theta$$

$$\Rightarrow g(\theta) = \cot \theta.$$

Lo cual implica que  $g(\theta) = \cot(\theta)$  tiene una singularidad en  $\theta = 0$  y  $\pi$ . Por lo tanto, toda trayectoria que se aproxime al origen lo debe de hacer a lo largo del eje  $x$  y el origen es un **nodo no-hiperbólico**. Note que  $\dot{r} < 0$  en  $\theta = 0$  y  $\dot{r} > 0$  en  $\theta = \pi$ . Entonces el eje  $x$  positivo es estable y el eje  $x$  negativo inestable, lo cual es fácil de ver si restringimos el sistema a  $y = 0$ , entonces  $\dot{x} = -x^2$  por lo que el origen es semiestable. El retrato fase del sistema (4.11) se observa en la figura (4.5).

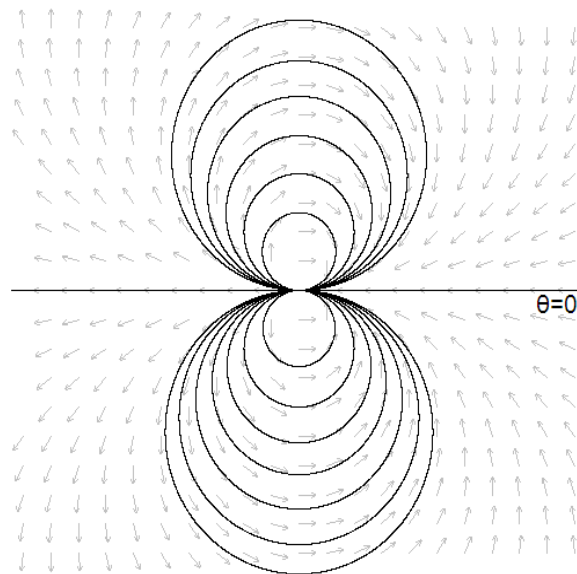


Figura 4.5: Retrato fase del sistema (4.11).

**Ejemplo 9.** *El sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2x - x^2y \\ \dot{y} = x^3 + y^3, \end{cases} \quad (4.12)$$

en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} &= y^2x^2 - x^3y + yx^3 + y^4 = r^4 \sin^2(\theta \cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^4 \sin^2\theta \\ r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} &= x^4 + xy^3 - y^3x + x^2y^2 = r^4 \cos^2(\theta \cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^4 \cos^2\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = r^3 \sin^2\theta \\ \dot{\theta} = r^2 \cos^2\theta, \end{cases}$$

entonces se sigue que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^3 \sin^2\theta}{r^2 \cos^2\theta} = r \tan^2\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \tan^2\theta d\theta.$$

Por lo tanto,  $g(\theta) = \tan^2 \theta$ , cuyas singularidades son  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$ . En ambos casos,  $\dot{r} > 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . En consecuencia, los sectores definidos por  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  y  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  son ambos parabólicos. Para este caso, (4.6) puede ser resuelta explícitamente

$$\begin{aligned} \ln r &= \ln r_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \tan^2 \phi d\phi \\ &= \ln r_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} (\sin^2 \phi - 1) d\phi \\ &= \tan \theta - \theta - \tan_{\theta_0} + \theta_0 \\ \Rightarrow r(\theta) &= ce^{\tan \theta - \theta} \end{aligned}$$

De modo que  $r(\theta) \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} |_{+}$  y cuando  $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2} |_{+}$ ; aquí los límites solo de un lado. De este manera mostramos un comportamiento típico en un sector parabólico: todas las órbitas en el interior del sector en el que solo uno de los sectores frontera es tal que  $r \rightarrow 0$ . Este retrato fase es mostrado en la figura (4.6).

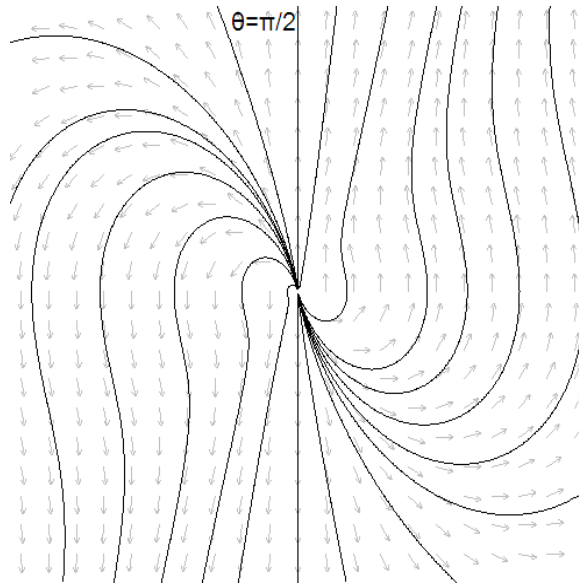


Figura 4.6: Retrato fase del sistema (4.12).

**Ejemplo 10.** Analicemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(y - x) \\ \dot{y} = y^2(y - 2x), \end{cases} \quad (4.13)$$

pasando a coordenadas polares se obtiene

$$\begin{aligned}
r\dot{r} &= x^3(y-x) + y^3(y-2x) = r^4 [\cos^3\theta \sin\theta - \cos^4\theta + \sin^4\theta - 2\cos\theta \sin^3\theta] \\
&= r^4 [\sin\theta \cos\theta [\cos^2\theta - 2\sin^2\theta] + [\sin^2\theta - \cos^2\theta]] \\
&= r^4 \left[ \frac{1}{2} \sin(2\theta) \left[ -\frac{1}{2} \sin^2\theta - \frac{3}{2} \sin^2\theta + \frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \cos^2\theta \right] - \cos(2\theta) \right] \\
&= r^4 \left[ \frac{1}{2} \sin(2\theta) \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\theta) \right] - \cos(2\theta) \right] \\
\Rightarrow \dot{r} &= \frac{r^3}{4} [(3 \sin(2\theta) - 4) \cos(2\theta) - \sin(2\theta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2\dot{\theta} &= xy^2(y-2x) - yx^2(y-x) = r^4 [\cos\theta \sin^3\theta - 3\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin\theta \cos^3\theta] \\
&= 2r^4 \sin\theta \cos\theta \left[ \frac{1}{2} \sin^2\theta - \frac{3}{2} \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2} \cos^2\theta \right] \\
&= r^4 \sin(2\theta) \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin\theta \cos\theta \right] \\
\Rightarrow \dot{\theta} &= \frac{r^2}{4} \sin(2\theta) [2 - 3 \sin(2\theta)]
\end{aligned}$$

entonces  $\dot{\theta} = 0$  para  $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ,  $\theta^* = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 20.9^\circ$  y  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta^* \approx 69.1^\circ$ . A lo largo del eje  $x$  y en  $\theta^*$ ,  $\dot{r} < 0$ , mientras que a lo largo del eje  $y$  y en  $\frac{\pi}{2} - \theta^*$ ,  $\dot{r} > 0$ . El sector  $[0, \theta^*]$  es parabólico, ya que ambas asíntotas son convergentes. El sector  $[\theta^*, \frac{\pi}{2} - \theta^*]$  es elíptico ya que  $\dot{\theta} < 0$  en el sector. El sector  $[\frac{\pi}{2} - \theta^*, \frac{\pi}{2}]$  es parabólico, y finalmente,  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  es hiperbólico ya que en este sector  $\dot{\theta} < 0$ . El análisis para el resto de los sectores se realiza de forma semejante. Esto nos da la configuración mostrada en la figura (4.7).

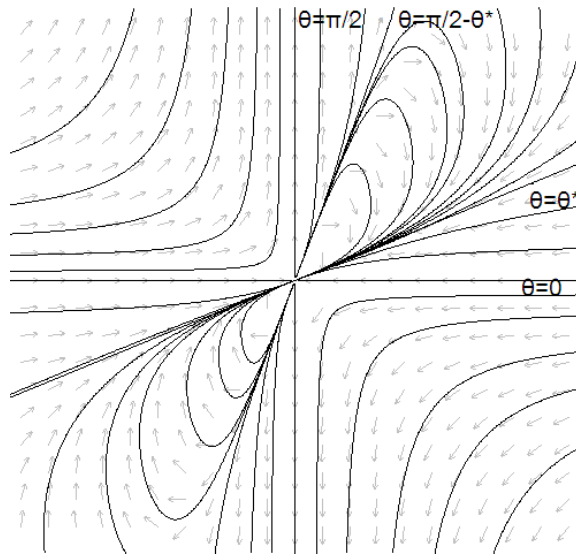


Figura 4.7: Retrato fase del sistema (4.13).

## 4.2. P y Q: Polinomios homogéneos de distinto grado

Supongamos ahora que  $P$  y  $Q$  son polinomios homogéneos de grado  $n$  y  $m$ , respectivamente, tales que  $n \neq m$ ,  $n, m \geq 2$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ .

En general, para este caso podemos escribir el sistema (4.1) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_0x^m + b_1x^{m-1}y + b_2x^{m-2}y^2 + \dots + b_{m-1}xy^{m-1} + b_my^m,\end{aligned}\tag{4.14}$$

con  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $m > n$ .

**Teorema 9.** *Sea el origen un punto de equilibrio aislado para el sistema (4.14) y sea  $k = m - n > 0$ . Si  $a_0 \neq 0$  entonces el origen es un **nodo no-hiperbólico**. Aún más, existen al menos una y a lo más  $n + 1$  soluciones invariantes a través del origen, las cuales se encuentran determinadas como sigue:*

$$(i) \quad y = \alpha_{k+1}x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}),$$

con  $\alpha_{k+1} = \frac{b_0}{(k+1)a_0}$ . Si  $b_0 = 0$  entonces  $y = 0$  es invariante.

$$(ii) \quad y = \alpha_1^r x + \alpha_{k+1}x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}),$$

donde  $\alpha_1^r$  es un real diferente de cero que satisface  $P(1, \alpha_1^r) = 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r) \neq 0$ ,  $y$ ,  $\alpha_{k+1} = \frac{Q(1, \alpha_1^r)}{\alpha_1^r \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r)} \neq 0$ .

### Demostración:

Primero proponemos una curva en serie de Taylor tal que  $y = h(x)$  y  $h(0) = 0$  como sigue

$$y = h(x) = \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \dots = xg(x)$$

donde  $g(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \dots$

Si  $y = h(x)$  es solución de (4.14), entonces satisface la ecuación homológica  $\dot{y} = h'(x)\dot{x}$ . Luego,

$$\begin{aligned}\dot{y} - h'(x)\dot{x} &= 0 \\ Q(x, h(x)) - h'(x)P(x, h(x)) &= 0 \\ x^m Q(1, g(x)) - h'(x)x^n P(1, g(x)) &= 0 \\ x^n [x^{m-n} Q(1, g(x)) - h'(x)P(1, g(x))] &= 0 \\ x^k Q(1, g(x)) - h'(x)P(1, g(x)) &= 0\end{aligned}\tag{4.15}$$

donde

$$\begin{aligned} P(1, g(x)) &= a_0 + a_1g(x) + a_2g^2(x) + \dots + a_n g^n(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \dots, \\ Q(1, g(x)) &= b_0 + b_1g(x) + b_2g^2(x) + \dots + b_m g^m(x) = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1x + \tilde{b}_2x^2 + \dots, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= P(1, \alpha_1) \\ \tilde{a}_1 &= \alpha_2 \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \\ \tilde{a}_2 &= \frac{1}{2!} \alpha_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, \alpha_1) + \alpha_3 \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \\ \tilde{a}_3 &= \frac{1}{3!} \alpha_2^3 \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(1, \alpha_1) + \alpha_2 \alpha_3 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, \alpha_1) + \alpha_4 \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \\ \tilde{a}_4 &= \frac{1}{4!} \alpha_2^4 \frac{\partial^4 P}{\partial y^4}(1, \alpha_1) + \frac{1}{2} \alpha_2^2 \alpha_3 \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(1, \alpha_1) + \frac{1}{2} (\alpha_3^2 + 2\alpha_2 \alpha_4) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, \alpha_1) + \alpha_5 \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \\ \tilde{a}_5 &= \frac{1}{5!} \alpha_2^5 \frac{\partial^5 P}{\partial y^5}(1, \alpha_1) + \frac{1}{6} \alpha_2^3 \alpha_3 \frac{\partial^4 P}{\partial y^4}(1, \alpha_1) + \frac{1}{2} (\alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_4) \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(1, \alpha_1) \\ &\quad + (\alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, \alpha_1) + \alpha_6 \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \\ &\quad \vdots \\ \tilde{a}_k &= \frac{1}{k!} \alpha_2^k \frac{\partial^k P}{\partial y^k}(1, \alpha_1) + \dots + \alpha_{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

entonces de (4.15) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x^k (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1x + \tilde{b}_2x^2 + \dots) - (\alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2 + \dots) (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \dots) \\ 0 &= -\alpha_1 \tilde{a}_0 - (\alpha_1 \tilde{a}_1 + 2\alpha_2 \tilde{a}_0)x - (\alpha_1 \tilde{a}_2 + 2\alpha_2 \tilde{a}_1 + 3\alpha_3 \tilde{a}_0)x^2 - \dots \\ &\quad - (\alpha_1 \tilde{a}_{k-1} + 2\alpha_2 \tilde{a}_{k-2} + \dots + k\alpha_k \tilde{a}_0)x^{k-1} \\ &\quad + (\tilde{b}_0 - \alpha_1 \tilde{a}_k - 2\alpha_2 \tilde{a}_{k-1} - \dots - (k+1)\alpha_{k+1} \tilde{a}_0)x^k + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

De donde  $\alpha_1 \tilde{a}_0 = 0$  por lo que tenemos dos caminos:  $\alpha_1 = 0$  ó  $\tilde{a}_0 = 0$ .

- Si  $\alpha_1 = 0$  entonces  $\tilde{a}_0 = P(1, 0) = a_0 \neq 0$ . De (4.16) y (4.17) se sigue que  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$ , y

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 - (k+1)\alpha_{k+1} \tilde{a}_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{b}_0 - (k+1)\alpha_{k+1} a_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_{k+1} &= \frac{\tilde{b}_0}{(k+1)a_0}, \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos siempre la solución invariante que cruza horizontalmente a través del origen,

$$y = \alpha_{k+1} x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}).$$

- Para que  $\tilde{a}_0 = P(1, \alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_1^n = 0$ , esta ecuación debe tener soluciones  $\alpha_1^r$  reales y distintas de cero ya que  $a_0 \neq 0$  por hipótesis, las cuales pueden o no existir. Por el teorema fundamental del algebra, sabemos que existen a lo más  $n$  soluciones reales a la ecuación, por lo que tenemos a lo mas  $n$  direcciones invariantes para este caso.

Sea  $\alpha_1^r$  tal que satisface  $P(1, \alpha_1^r) = 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r) \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\alpha_1^r \tilde{a}_1 + 2\alpha_2 \tilde{a}_0 &= 0 \\ \alpha_1^r \alpha_2 \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= 0.\end{aligned}$$

Análogamente tenemos

$$\alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0,$$

por lo que  $\tilde{a}_k = \alpha_{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r)$ , entonces de (4.17) se obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0 - \alpha_1^r \tilde{a}_k &= 0 \\ \Leftrightarrow Q(1, \alpha_1^r) - \alpha_1^r \alpha_{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_{k+1} &= \frac{Q(1, \alpha_1^r)}{\alpha_1^r \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r)}.\end{aligned}$$

Afirmamos que  $\alpha_{k+1} = \frac{Q(1, \alpha_1^r)}{\alpha_1^r \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r)} \neq 0$ , lo cual es lo mismo que afirmar que  $Q(1, \alpha_1^r) \neq 0$ . Supongamos que no lo es, entonces, como  $Q$  es un polinomio homogéneo de grado  $m$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}Q(1, \alpha_1^r) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^m Q(1, \alpha_1^r) &= 0, \quad x \neq 0 \\ \Leftrightarrow Q(x, \alpha_1^r x) &= 0.\end{aligned}$$

por lo que si analizamos el campo sobre la recta  $y = \alpha_1^r x$  tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, \alpha_1^r x) = x^n P(1, \alpha_1^r) = 0 \\ \dot{y} &= Q(x, \alpha_1^r x) = x^m Q(1, \alpha_1^r) = 0\end{aligned}$$

por lo tanto, la recta  $y = \alpha_1^r x$  es un continuo de equilibrios que pasa por el origen, lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis el origen es un equilibrio aislado del sistema. En consecuencia  $Q(1, \alpha_1^r) \neq 0$ .

En conclusión, si existen soluciones reales a la ecuación  $P(1, \alpha_1) = 0$ , que además cumplan que  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1) \neq 0$ , entonces cada solución  $\alpha_1^r$  aporta una dirección invariante dada por

$$y = \alpha_1^r x + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2})$$

■



Una vez que conocemos la aproximación para  $h(x)$  procedemos a evaluarla en  $\dot{x} = P(x, y)$ , es decir, analizamos  $P(x, h(x))$  para determinar el comportamiento sobre las separatrices, análogamente al análisis para  $P$  y  $Q$  homogéneos del mismo grado. Por lo que bajo este razonamiento y del teorema anterior se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 1.** (*Comportamiento sobre las separatrices*)

- Sea  $y = \alpha_{k+1}x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2})$ ,
  - Si  $a_0 > 0$ , entonces:
    - (i) para  $n$  par, el flujo sobre la curva es hacia la derecha.
    - (ii) para  $n$  impar, la curva es inestable.
  - Si  $a_0 < 0$ , entonces:
    - (i) para  $n$  par, el flujo sobre la curva es hacia la izquierda.
    - (ii) para  $n$  impar, la curva es estable.
- Sea  $y = \alpha_1^r x + \alpha_{k+1}x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2})$ ,
  - Si  $A_0 > 0$ , entonces:
    - (i) para  $m$  par, el flujo sobre la curva es hacia la derecha.
    - (ii) para  $m$  impar, la curva es inestable.
  - Si  $A_0 < 0$ , entonces:
    - (i) para  $m$  par, el flujo sobre la curva es hacia la izquierda.
    - (ii) para  $m$  impar, la curva es estable.

$$\text{donde } A_0 = \alpha_{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r).$$

**Demostración:**

Si consideramos la curva  $y = \alpha_{k+1}x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2})$  (del teorema anterior), entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, h(x)) \\ &= x^n P(1, \alpha_{k+1}x^k + \dots) \\ &= x^n \left[ a_0 + a_1(\alpha_{k+1}x^k + \dots) + a_2(\alpha_{k+1}x^k + \dots)^2 + \dots + a_n(\alpha_{k+1}x^k + \dots)^n \right] \\ &= a_0x^n + \mathcal{O}(|x|^{n+1}) \end{aligned}$$

por lo que el término que domina en el comportamiento sobre la curva es  $a_0x^n$ . Sabemos que  $a_0 \neq 0$  por hipótesis, entonces si  $a_0 > 0$  y  $n$  es par el flujo es siempre positivo, pero si  $n$  es impar la curva es inestable, ya que si  $x > 0$  el flujo es positivo y si  $x < 0$  el flujo es negativo. Análogamente, si  $a_0 < 0$ , para  $n$  es par el flujo es negativo y si  $n$  es impar, la curva es estable.

Ahora analicemos el comportamiento sobre  $y = \alpha_1^r x + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2})$ :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= P(x, h(x)) \\
&= x^n P(1, \alpha_1^r x + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \dots) \\
&= x^n [a_0 + a_1(\alpha_1^r x + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \dots) + a_2(\alpha_1^r x + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \dots)^2 + \dots \\
&\quad + a_n(\alpha_1^r x + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \dots)^n] \\
&= x^n \left[ \underbrace{(a_0 + a_1 \alpha_1^r + \dots + a_n \alpha_1^{rn})}_{P(1, \alpha_1^r)=0} + (a_1 \alpha_{k+1} + 2a_2 \alpha_1^r \alpha_{k+1} + \dots \right. \\
&\quad \left. + n a_n \alpha_1^{r(n-1)} \alpha_{k+1}) x^k + \dots \right] \\
&= (\alpha_{k+1} \sum_{i=1}^n i a_i \alpha_1^{r(i-1)}) x^m + \mathcal{O}(|x|^{m+1}) \\
&= \alpha_{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r) x^m + \mathcal{O}(|x|^{m+1}) \\
&= A_0 x^m + \mathcal{O}(|x|^{m+1})
\end{aligned}$$

donde  $A_0 = \alpha_{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r)$ . Recordemos que  $\alpha_{k+1} \neq 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_1^r) \neq 0$ , así que  $A_0 \neq 0$ . Entonces, si  $A_0 > 0$ , para  $m$  par  $\dot{x} > 0$ , por lo que el flujo es a la derecha y si  $m$  es impar, la curva es inestable. Si  $A_0 < 0$ , para  $m$  par el flujo es hacia la izquierda y si  $m$  es impar, la curva es estable. ■

Teniendo el comportamiento sobre las separatrices, los sectores comprendidos entre dos direcciones que entran o dos que salen son sectores parabólicos, pero si tenemos una dirección que converge y una que diverge, analizamos  $\dot{\theta}$  en cada sector comprendido entre dos separatrices para determinar si tenemos un sector elíptico o hiperbólico.

Mostraremos como aproximar las separatrices de los sectores y determinar el comportamiento en cada sector del nodo no hiperbólico, cuando  $P$  y  $Q$  son polinomios homogéneos de distinto grado, de acuerdo al teorema (9) mediante los siguientes ejemplos.

#### 4.2.1. Ejemplos

**Ejemplo 11.** *Consideremos el siguiente sistema*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x^2 - y^2 \\
\dot{y} &= xy^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Como  $n = 2$  y  $m = 3$ ,  $k = 1$ . Por el teorema (9) existe una dirección invariante que pasa por el origen, entrando de forma horizontal, la cual es justamente el eje

$x$  ya que el coeficiente  $b_0$  del sistema es cero. Para conocer el resto de las curvas invariantes debemos encontrar las raíces del polinomio  $P(1, \alpha_1)$ , como sigue:

$$\begin{aligned} P(1, \alpha_1) &= 0 \\ 1 - \alpha_1^2 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_1^1 = 1 &\quad y \quad \alpha_1^2 = -1 \end{aligned}$$

Por lo que tenemos tres direcciones invariantes que pasan por el origen para este sistema.

Notemos que  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, 1) = -2 \neq 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, -1) = 2 \neq 0$ . Por lo que para  $\alpha_1^1 = 1$  tenemos  $\alpha_2 = -1/2$  y para  $\alpha_1^2 = -1$  tenemos  $\alpha_2 = -1/2$ . En consecuencia las aproximaciones de las curvas invariantes alrededor del origen son  $h_1(x) = 0$ , la curva  $h_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$  y  $h_3(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$ , por lo que debemos determinar como es  $\dot{x}$  sobre estas curvas.

Observemos que sobre  $h_1(x) = 0$ ,  $\dot{x} = x^2$  por lo que el flujo se mueve siempre hacia la derecha. Para  $h_2$  tenemos que  $\dot{x} = x^3 + \dots$ , este primer término es el significativo, ya que nos encontramos en una vecindad del origen, por lo que si  $x > 0$  el flujo se mueve hacia la derecha y para  $x < 0$  el flujo se mueve hacia la izquierda; para  $h_3$  resulta  $\dot{x} = -x^3 + \dots$ , por lo que  $\dot{x} > 0$  si  $x < 0$  y  $\dot{x} < 0$  en el otro caso.

Estas curvas nos dividen un disco alrededor del origen en seis sectores los cuales debemos determinar de que tipo son. Podemos concluir que existirán dos sectores parabólicos comprendidos entre el eje  $x$  y  $h_2$  en el semiplano  $y > 0$ , ya que tenemos dos direcciones que se alejan del origen, así como entre el eje  $x$  y  $h_3$  en el mismo semiplano, ya que aparecen dos direcciones que convergen al origen. En el resto de los sectores podemos tener sectores elípticos o hiperbólicos ya que se encuentran entre una dirección que entra y una que sale del origen en todos los casos, por lo que debemos determinar como es  $\dot{\theta}$  en cada sector.

Mediante un calculo sencillo tenemos que  $\dot{\theta} = r \left[ \left( \frac{1}{4} - \cos \theta \right) \sin(2\theta) + \sin \theta \right]$ , hemos calculado  $\dot{\theta}$  para cada sector. El sector comprendido entre  $h_2$  y  $h_3$  en el semiplano positivo para  $y$  tenemos que  $\dot{\theta} > 0$  por lo que tenemos un sector elíptico, en el sector opuesto tenemos  $\dot{\theta} < 0$  lo cual nos produce un sector hiperbólico, mientras que en los dos sectores restantes del semiplano  $y$  negativo obtuvimos que  $\dot{\theta} > 0$ , teniendo sectores hiperbólicos en ambos. Finalmente el retrato fase para el sistema se muestra en la figura (4.8).

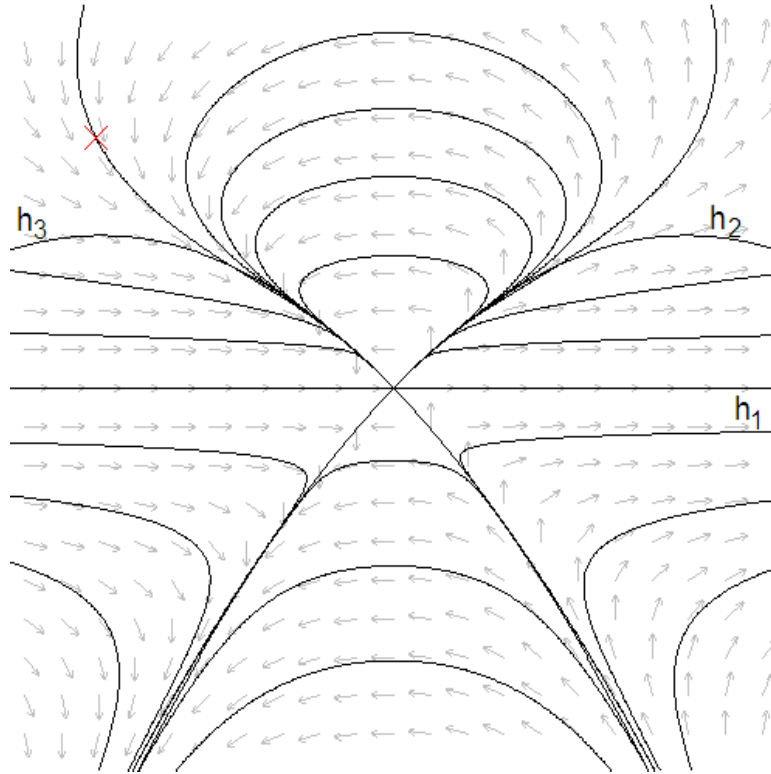


Figura 4.8: Retrato fase del sistema (4.18).

**Ejemplo 12.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^3 - \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + y^3, \\ \dot{y} &= 5x^5 + 3x^3y^2 - 2y^5. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En este caso tenemos  $n = 3$ ,  $m = 5$  por lo tanto  $k = 2$ , observemos que  $a_0 \neq 0$ , entonces haremos uso del teorema (9) para determinar las curvas invariantes de este sistema.

Inicialmente tenemos la dirección que atraviesa horizontalmente por el origen, la cual es

$$h_1(x) = \alpha_3 x^3 + \dots = \frac{5}{4}x^3 + \dots$$

Las soluciones de la ecuación

$$P(1, \alpha_1) = \alpha_1^3 - \frac{3}{2}\alpha_1^2 - \frac{3}{2}\alpha_1 + 1 = 0$$

son

$$\alpha_1^1 = -1, \alpha_1^2 = 1/2 \text{ y } \alpha_1^3 = 2,$$

por lo que tenemos cuatro direcciones invariantes para el sistema.

Ahora, notemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(1, -1) = \frac{9}{2} \neq 0, \frac{\partial P}{\partial y}(1, 1/2) = -\frac{9}{4} \neq 0 \text{ y } \frac{\partial P}{\partial y}(1, 2) = \frac{9}{2} \neq 0,$$

por lo que podemos hacer uso del teorema para calcular el coeficiente  $\alpha_3$  respectivo a cada solución. Como  $Q(1, -1) = 10$ ,  $Q(1, 1/2) = 91/16$  y  $Q(1, 2) = -47$ , para  $\alpha_1^1 = -1$  tenemos  $\alpha_3 = -20/9$ , para  $\alpha_1^3 = 1/2$  tenemos  $\alpha_3 = -91/18$  y finalmente para  $\alpha_1^3 = 2$  tenemos  $\alpha_3 = -47/9$ . Por lo que las curvas invariantes respectivas a cada raíz de  $P(1, \alpha_1)$  son

$$\begin{aligned} h_2(x) &= -x - \frac{20}{9}x^3 + \dots \\ h_3(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{91}{18}x^3 + \dots \\ h_4(x) &= 2x - \frac{47}{9}x^3 + \dots \end{aligned}$$

A continuación determinaremos la dinámica sobre cada una de estas curvas invariantes de acuerdo a  $\dot{x}$ . Sobre la curva  $h_1(x)$  tenemos  $\dot{x} = x^3 + \dots$ , por lo que  $\dot{x}$  es positiva para  $x > 0$  y  $\dot{x}$  es negativa para  $x < 0$ ; para  $h_2(x)$ ,  $\dot{x} = -\frac{10}{729}x^5 + \dots$  así que  $\dot{x} > 0$  en  $x < 0$  y  $\dot{x} < 0$  en  $x > 0$ . En  $h_3(x)$  tenemos  $\dot{x} = \frac{91}{8}x^5 + \dots$ , por lo tanto  $\dot{x} > 0$  para  $x > 0$  y  $\dot{x} < 0$  para  $x < 0$ . Finalmente, la dinámica sobre  $h_4(x)$  esta dada por  $\dot{x} = -\frac{47}{2}x^5 + \dots$ , entonces  $\dot{x} > 0$  para  $x < 0$  y  $\dot{x} < 0$  para  $x > 0$ .

Notemos que tenemos dos sectores parabólicos comprendidos entre  $h_1$  y  $h_3$ , ambos saliendo del origen; y tenemos otros dos sectores parabólicos comprendidos entre  $h_2$  y  $h_4$  ambos convergiendo al origen. Nos resta determinar como son los cuatro sectores comprendidos entre una dirección que entra y una que sale, para ello hemos determinado el signo de  $\dot{\theta}$  en cada sector, para el sector comprendido entre  $h_1$  y  $h_2$  del lado derecho del eje y obtuvimos  $\dot{\theta} > 0$  por lo tanto, éste es un sector hiperbólico, de igual modo tenemos otro sector hiperbólico en el sector comprendido entre  $h_1$  y  $h_2$  del lado contrario, ya que  $\dot{\theta}$  también es positivo. Por último, para los dos sectores que se encuentran entre  $h_3$  y  $h_4$  a ambos lados tenemos que  $\dot{\theta} > 0$  por lo que ambos sectores son elípticos. En conclusión, el retrato fase del sistema (4.19) queda determinado por la figura (4.9).

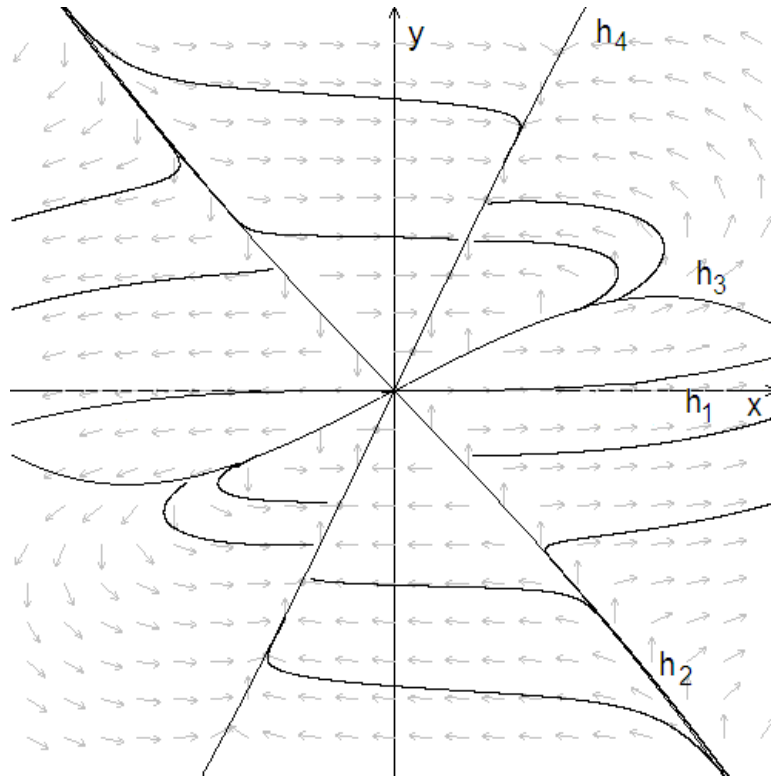


Figura 4.9: Retrato fase del sistema (4.19).

**Ejemplo 13.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x^3 + 4x^2y - 3xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= x^4 - x^2y^2 + xy^3, \end{aligned} \quad (4.20)$$

como  $n = 3$ ,  $m = 4$  entonces  $k = 1$ . Notemos que  $a_0 = 2 \neq 0$ , por lo tanto, del teorema (9) tenemos la dirección invariante

$$y = h_1(x) = \alpha_2 x^2 + \dots = -\frac{1}{4}x^2 + \dots$$

Para determinar si existen más direcciones invariantes requerimos buscar las raíces del polinomio  $P(1, \alpha_1) = \alpha_1^3 - 3\alpha_1^2 + 4\alpha_1 - 2$ . Hemos calculado estas raíces y estas son

$$\alpha_1^1 = 1, \alpha_1^2 = 1 + i \text{ y } \alpha_1^3 = 1 - i,$$

notemos que tenemos una solución real y dos complejas, pero sólo la raíz real nos aporta una curva invariante, por lo que en total tenemos dos direcciones. Determinaremos de acuerdo al teorema el segundo coeficiente correspondiente a  $\alpha_1^1 = 1$  el cual podemos utilizar ya que  $\frac{\partial P}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0$  por lo que el siguiente coeficiente es

$$\alpha_2 = \frac{Q(1, 1)}{(1) \frac{\partial P}{\partial y}(1, 1)} = \frac{1}{(1)(1)} = 1$$

por lo tanto tenemos una segunda curva invariante, la cual es

$$y = h_2(x) = x + x^2 + \dots$$

Procederemos a analizar la dinámica en cada una de estas dos curvas invariantes que atraviesan por el origen. Primero, para  $h_1(x)$  tenemos que  $\dot{x} = -2x^3 + \dots$ , por lo que la velocidad en  $x$  es positiva para  $x$  negativas e inversamente, la velocidad en  $x$  es negativa para  $x$  positivas. En el caso de  $h_2(x)$ ,  $\dot{x} = x^4 + \dots$ , entonces el flujo sobre  $h_2(x)$  se mueve siempre hacia la derecha.

Una vez teniendo las separatrices y su dinámica resta determinar de qué tipo es cada sector. Debajo de  $h_1(x)$  tenemos dos sectores comprendidos entre dos direcciones que convergen al origen por lo que ambos sectores son parabólicos. En el sector que se encuentra arriba de  $h_1$  y del lado derecho de  $h_2$ ,  $\theta > 0$ , por lo tanto ese sector es hiperbólico; del lado izquierdo  $\dot{\theta} < 0$ , así que ese sector es también hiperbólico. Finalmente obtenemos el retrato fase para el sistema (4.20), el cual se presenta en la figura (4.10).

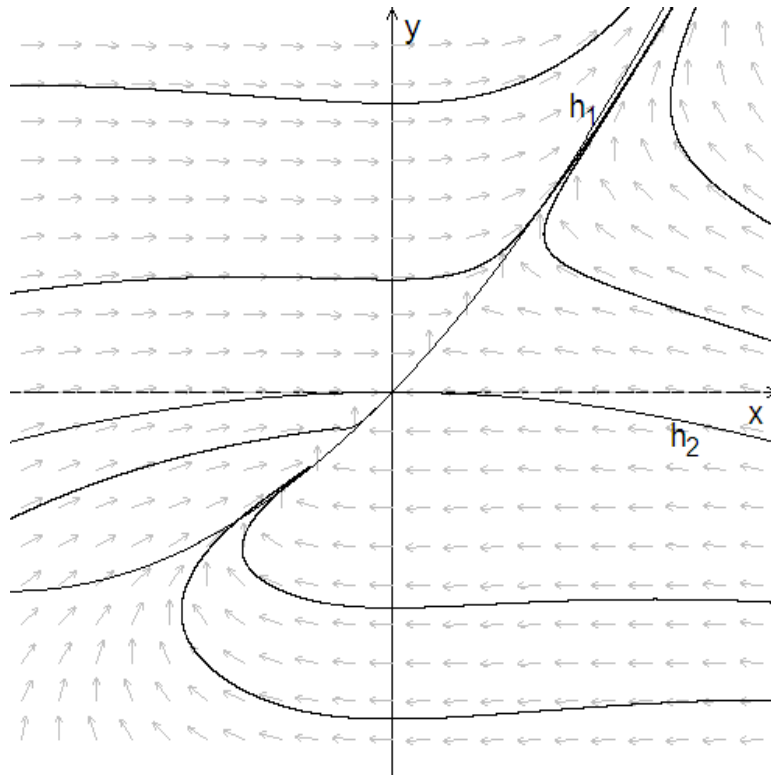


Figura 4.10: Retrato fase del sistema (4.20).





## Capítulo 5

### Dos Valores Propios Cero con Multiplicidad Geométrica Uno

Consideremos el caso cuando la matriz  $A$  tiene dos valores propios cero con multiplicidad geométrica uno, es decir,

$$Df(0,0) \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, como se vio en Preliminares en la Teoría de Formas Normales (sección 2.2.1.) , el sistema puede ser escrito en su forma normal como se sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + g(x)] + b_n x^n y [1 + h(x)] + y^2 R(x, y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $h(x)$ ,  $g(x)$  y  $R(x, y)$  son analíticas en una vecindad del origen,  $h(0) = g(0) = 0$ ,  $k \geq 2$ ,  $a_k \neq 0$  y  $n \geq 1$ .

Podemos determinar la forma del retrato fase del sistema (5.1) en base a los siguientes dos teoremas.

**Teorema 10.** *Sea  $k = 2m + 1$  con  $m \geq 1$  en (5.1) y sea  $d = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$ . Entonces:*

I. *Si  $a_k > 0$ , el origen es una silla (topológica).*

II. *Si  $a_k < 0$ , el origen es*

1. *Foco o centro si:*

a)  $b_n = 0$ .

b)  $b_n \neq 0$  y  $n > m$ .

c)  $b_n \neq 0$ ,  $n = m$  y  $d < 0$ .

2. *Nodo si:*

a)  $b_n \neq 0$ ,  $n$  un número par y  $n < m$ .

b)  $b_n \neq 0$ ,  $n$  un número par,  $n = m$  y  $d \geq 0$ .

*Para ambos casos, si  $b_n < 0$  es estable y  $b_n > 0$  es inestable.*

3. Punto crítico con dominio elíptico si:

- a)  $b_n \neq 0$ ,  $n$  un número impar y  $n < m$ .
- b)  $b_n \neq 0$ ,  $n$  un número impar,  $n = m$  y  $d \geq 0$ .

**Demostración:**

Procederemos a encontrar curvas solución invariantes del sistema (5.1). Para ello proponemos una curva  $H$  en su expansión de Taylor tal que

$$y = H(x) = \alpha_r x^r + \alpha_{r+1} x^{r+1} + \dots, \quad (5.2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= H'(x)\dot{x} \\ &= H'(x)y \\ &= H'(x)H(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

De (5.1), (5.2) y (5.3)

$$(a_{2m+1}x^{2m+1} + \dots) + b_n x^n (\alpha_r x^r + \dots) = r\alpha_r^2 x^{2r-1} + \dots \quad (5.4)$$

La idea será tratar de “balancear” la ecuación (5.4), notemos que el lado derecho es  $\mathcal{O}(|x|^{2r-1})$ , sin embargo, el lado izquierdo es  $\mathcal{O}(|x|^{2m+1})$  ó  $\mathcal{O}(|x|^{n+r})$ , dependiendo de cuál sea el número menor entre  $2m + 1$  y  $n + r$ .

- Si  $2m + 1 \leq n + r$ , entonces  $\dot{y} = \mathcal{O}(|x|^{2m+1})$  por lo que deberemos hacer  $2m + 1 = 2r - 1$ , lo cual se logra haciendo,  $r = m + 1$ . En este caso

$$\begin{aligned} 2m + 1 &\leq n + r \\ 2m + 1 &\leq n + m + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ m &\leq n. \end{aligned}$$

- Si  $2m + 1 \leq n + r$ , entonces hacemos  $n + r = 2r - 1$ , es decir  $r = n + 1$ , luego

$$\begin{aligned} 2m + 1 &> n + r \\ 2m + 1 &> n + n + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ m &> n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, consideraremos dos casos  $m \leq n$  y  $m > n$ .

▪ **Caso  $m \leq n$ :**

Si  $m \leq n$  entonces proponemos

$$H(x) = \alpha_{m+1}x^{m+1} + \alpha_{m+2}x^{m+2} + \dots \quad (5.5)$$

De (5.4) tenemos

$$(a_{2m+1}x^{2m+1} + \dots) + b_n x^n (\alpha_{m+1}x^{m+1} + \dots) = (m+1)\alpha_{m+1}^2 x^{2m+1} + \dots$$

- Si  $m < n$  entonces

$$a_{2m+1} = (m+1)\alpha_{m+1}^2$$

luego,

$$\alpha_{m+1} = \pm \sqrt{\frac{a_k}{m+1}}. \quad (5.6)$$

**Observación 6.** *Observemos que si  $b_n = 0$  se sigue el procedimiento anterior, por lo que el coeficiente  $\alpha_{m+1}$  para este caso es también (5.6).*

- Si  $m = n$  entonces

$$a_{2m+1} + b_n \alpha_{m+1} = (m+1)\alpha_{m+1}^2$$

luego,

$$\alpha_{m+1} = \frac{b_n \pm \sqrt{b_n^2 + 4(m+1)a_k}}{2(m+1)} = \frac{b_n \pm \sqrt{d}}{2(m+1)}. \quad (5.7)$$

Por lo tanto si  $m < n$  tenemos dos direcciones y si  $m = n$  podemos tener una o dos direcciones de acuerdo al valor de  $d$ . En cualquiera de los casos la velocidad sobre estas curvas esta determinada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_{m+1}x^{m+1} + \dots \\ \dot{y} &= (m+1)\alpha_{m+1}^2 x^{2m+1} + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

▪ **Caso  $m > n$ :**

Si  $m > n$  proponemos  $H(x)$  como

$$H(x) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + \alpha_{n+2}x^{n+2} + \dots \quad (5.9)$$

En consecuencia, de (5.4) tenemos

$$(a_{2m+1}x^{2m+1} + \dots) + b_n x^n (\alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots) = (n+1)\alpha_{n+1}^2 x^{2n+1} + \dots$$

Como  $m > n$  obtenemos que

$$\begin{aligned} b_n \alpha_{n+1} &= (n+1) \alpha_{n+1}^2 \\ &\Leftrightarrow \\ \alpha_{n+1} = 0 &\quad \text{ó} \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}. \end{aligned}$$

Si  $\alpha_{n+1} = 0$  procederemos a encontrar el primer  $\alpha_{n+q} \neq 0$  con  $q \neq 1$ , de este modo tenemos

$$\begin{aligned} H(x) &= \alpha_{n+q} x^{n+q} + \dots \\ H'(x) &= (n+q) \alpha_{n+q} x^{n+q-1} + \dots \end{aligned}$$

Para que  $\alpha_{n+q} \neq 0$  necesitamos que  $2m+1 = 2n+q$ , por lo tanto  $q = 2(m-n)+1$  y obtenemos

$$(a_{2m+1} + \alpha_{n+q} b_n) x^{2n+q} + \dots = (n+q) \alpha_{n+q}^2 x^{2(n+q)-1} + \dots$$

Por lo que  $a_{2m+1} + \alpha_{n+q} b_n = 0$  esto ocurre si y solo si  $\alpha_{2m-n+1} = -\frac{a_k}{b_n}$ . Entonces

$$H(x) = \alpha_{2m-n+1} x^{2m-n+1} + \dots \quad (5.10)$$

Por lo tanto si  $m > n$  tenemos dos direcciones invariantes cuyos primeros coeficientes de su expansión en serie de Taylor son

$$\alpha_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} \quad (5.11)$$

para la primera curva y

$$\alpha_{2m-n+1} = -\frac{a_k}{b_n} \quad (5.12)$$

para la segunda.

Por lo tanto si  $m > n$  tenemos dos direcciones de grado distinto. La velocidad sobre estas curvas esta determinada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_{n+1} x^{n+1} + \dots \\ \dot{y} &= (n+1) \alpha_{n+1}^2 x^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

para la primer dirección, y

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_{2m-n+1} x^{2m-n+1} + \dots \\ \dot{y} &= (2m-n+1) \alpha_{2m-n+1}^2 x^{2(2m-n)+1} + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

para la segunda curva.

Notemos además que fuera de las curvas  $H(x)$  se cumple que  $\dot{x} > 0$  para  $y > 0$ ,  $\dot{x} = 0$  para  $y = 0$  y  $\dot{x} < 0$  para  $y < 0$ .

Una vez establecido lo anterior en forma general, procederemos a analizar cada uno de los casos que menciona el teorema (10).

- **I:** Si  $a_k > 0$  tenemos que  $d > 0$ . Por lo tanto, de (5.6) y (5.7) se sigue que para  $m \leq n$  ó  $b_n = 0$  (notemos en (5.7) que  $b_n < \sqrt{d}$ ), tenemos dos curvas invariantes tales que sus primeros términos son del mismo grado pero con signo distinto.

Analicemos primero el caso  $m + 1$  *par*. Sobre la curva con  $\alpha_{m+1} > 0$ , observemos de (5.8) que  $\dot{x} > 0$ ,  $\dot{y} < 0$  para  $x < 0$  y  $\dot{y} > 0$  para  $x > 0$ . Análogamente sobre la curva con  $\alpha_{m+1} < 0$ , tenemos  $\dot{x} < 0$ ,  $\dot{y} < 0$  para  $x < 0$  y  $\dot{y} > 0$  para  $x > 0$ . Seguimos un análisis análogo para  $m + 1$  *impar*.

Los retratos fase para los casos  $m + 1$  *par* y  $m + 1$  *impar* se observan en la figuras (5.1) y (5.2), respectivamente.

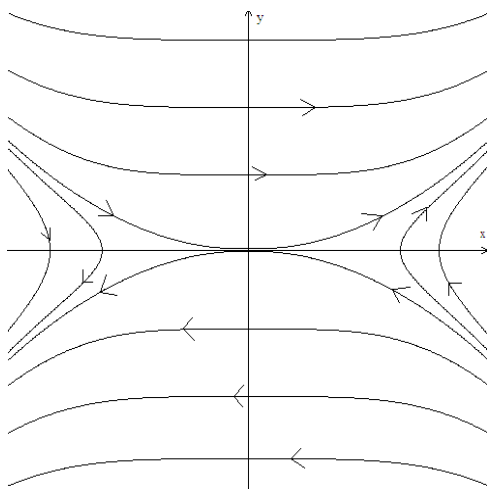


Figura 5.1:  $a_k > 0$  y  $m + 1$  *par*:  $m \leq n$  ó  $b_n = 0$ .

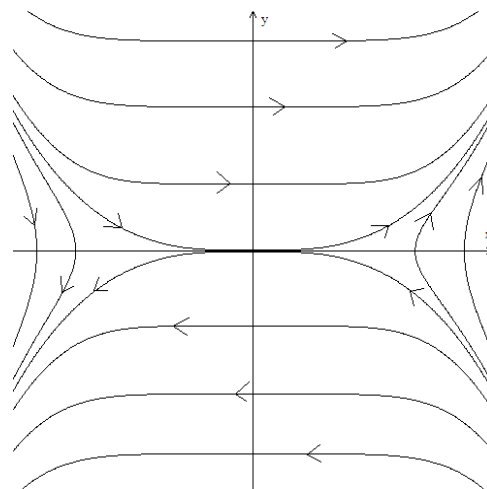


Figura 5.2:  $a_k > 0$  y  $m + 1$  *impar*:  $m \leq n$  ó  $b_n = 0$ .

Ahora, si  $m > n$  podemos observar de (5.11) y (5.12) que nuevamente tenemos dos curvas cuyos primeros coeficientes tienen signos opuestos y grados distintos pero con la misma paridad. De (5.13) y (5.14), análogamente a como lo hicimos en el caso  $m \leq n$ , obtenemos los siguientes retratos fase, figuras (5.3) y (5.4) para  $n + 1$  *par* y  $m + 1$  *impar* (estos retratos fase se hacen considerando  $b_n > 0$ , el caso contrario se realiza de forma semejante).

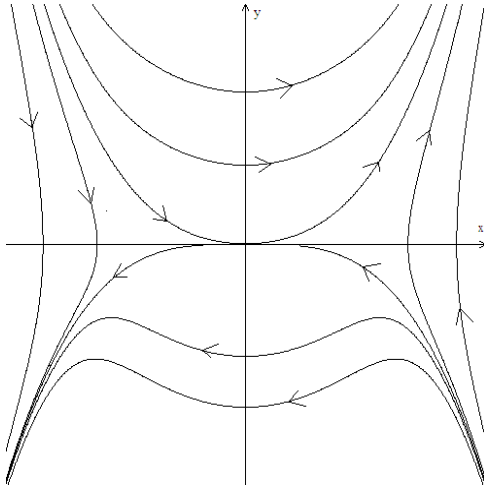


Figura 5.3:  $a_k > 0$  y  $n+1$  par:  $m > n$ .

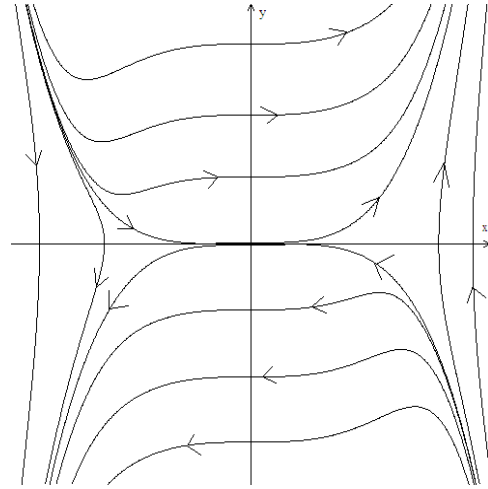


Figura 5.4:  $a_k > 0$  y  $n+1$  impar:  $m > n$ .

Por lo tanto, si  $a_k > 0$  el origen es un punto **Silla**.

■ **II:** Supongamos que  $a_k < 0$  y analicemos los siguientes casos:

1. a) Si  $b_n = 0$  entonces  $\alpha_{m+1}$  se encuentra determinado en (5.6) pero  $a_k < 0$ , por lo que este coeficiente no está definido.
- b) Si  $b_n \neq 0$  y  $m < n$ , nuevamente  $\alpha_{m+1}$  está determinado en (5.6) y no está definido.
- c) Si  $b_n \neq 0$  y  $m = n$ ,  $\alpha_{m+1}$  está determinado en (5.7), en consecuencia si  $d < 0$  tenemos que  $\alpha_{m+1}$  nuevamente se indefine.

En ninguno de los tres casos podemos encontrar curvas invariantes que pasen por el origen, por lo que podemos descartar sillas, sillas-nodos, nodos, cúspides o la existencia de sectores, pues no hay separatrices, como posibles escenarios para el origen.

Por otro lado, de (5.1) podemos notar en  $\dot{x}$  que el sistema bajo las condiciones anteriormente mencionadas se encuentra girando en el sentido de las manecillas del reloj, un ejemplo de ello se muestra en la figura (5.5). Por lo tanto, el origen es un **foco** o un **centro**.

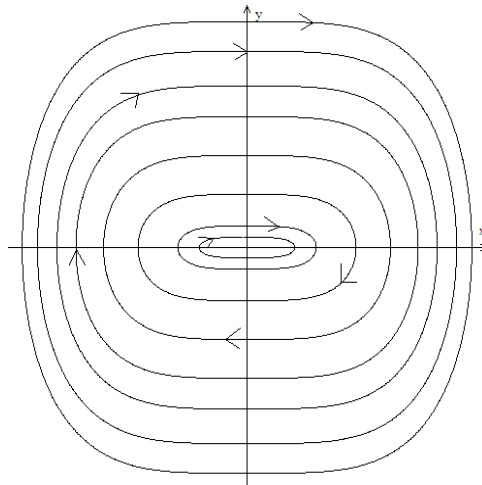


Figura 5.5: Centro.

2. a) Si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es par y  $n < m$  podemos ver en (5.11) y (5.12) que tenemos dos direcciones del mismo signo y diferente grado pero ambos impares.

De (5.13) y (5.14) si consideremos  $b_n > 0$  (el caso  $b_n < 0$  es análogo), obtenemos para ambas curvas que si  $x > 0$  y  $y > 0$  tenemos  $\dot{x} > 0$  y  $\dot{y} > 0$ ; si  $x < 0$  y  $y < 0$  tenemos  $\dot{x} < 0$  y  $\dot{y} < 0$ . Por lo que estas dos separatrices siguen el mismo flujo (ambas inestables).

Por lo tanto el origen es un **nodo** e incluso podemos conocer su estabilidad, si  $b_n > 0$  el origen es *inestable* y por el contrario si  $b_n < 0$  el origen es un *nodo estable*.

- b) Si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es par,  $n = m$  y  $d \geq 0$ , observemos de (5.7) que podemos tener dos direcciones ó una en el caso  $d = 0$ , notemos también que  $\sqrt{d} < b_n$  ya que  $a_k < 0$ , en consecuencia ambas direcciones tienen el mismo signo (el signo de  $b_n$ ) y como  $n$  es par las curvas  $H(x)$  cuyos primeros coeficientes son  $\alpha_{m+1}$  comienzan en grado impar. De (5.8) podemos observar que nuevamente el sistema se comporta como en el caso anterior y nuevamente el signo de  $b_n$  determina la estabilidad, con  $b_n < 0$  para el caso estable (incluso en el caso de una sola curva invariante). Por lo tanto, el origen es un **nodo**.

La figura (5.6) muestra el retrato fase que presentan ambos casos, considerando  $b_n > 0$  el otro caso ( $b_n < 0$ ) arroja un retrato fase similar pero estable.

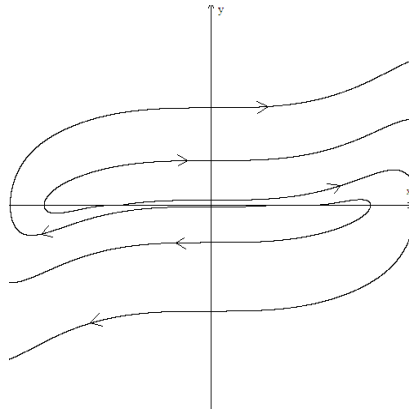


Figura 5.6: Nodo para  $k$  impar,  $b_n > 0$ .

3. a) Si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número impar y  $n < m$ . Nos encontramos en el caso en que tenemos dos direcciones  $\alpha_{n+1}$  y  $\alpha_{2m-n+1}$ , como se expresa en (5.11) y (5.12), por lo que tenemos dos curvas  $H(x)$  tales que su primer término es de grado par distinto pero sus coeficientes son del mismo signo para ambas. Por lo que sobre estas curvas, de (5.13) y (5.14), observamos que si  $b_n > 0$  (el otro caso es análogo) entonces  $\dot{x} > 0$ ,  $\dot{y} > 0$  para  $x > 0$  y  $\dot{y} < 0$  para  $x < 0$ .

Las curvas invariantes son separatrices, fuera de éstas curvas que pasan por el origen, como ya mencionamos antes,  $\dot{x} > 0$  para  $y > 0$  y  $\dot{x} > 0$  para  $y < 0$ , por lo que para este caso tenemos dos sectores parabólicos entre una curva y otra, un sector hiperbólico en la parte superior a las curvas (de acuerdo a  $\dot{x}$ ) y un sector elíptico en la parte inferior a ambas curvas, recordando que estamos considerando  $b_n > 0$ . Si esto ocurre decimos que el origen es un **Punto Crítico con Dominio Elíptico**. Podemos observar el retrato fase para este caso en la figura (5.7).



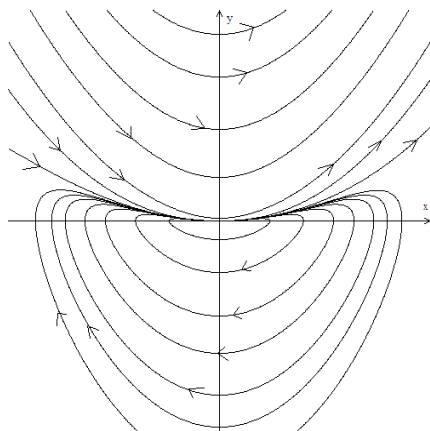


Figura 5.7: Dominio elíptico con dos sectores parabólicos, uno elíptico y uno hiperbólico.

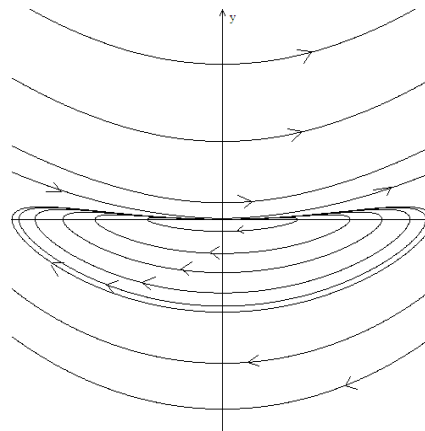


Figura 5.8: Dominio elíptico con un sector elíptico y uno hiperbólico.

- b) Si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número impar,  $n=m$  y  $d \geq 0$ , de (5.7) tenemos dos casos, para  $d > 0$  tenemos como en el caso anterior dos direcciones del mismo signo y de grado par igual, de modo que tenemos un retrato fase como en el caso anterior, como en la figura (5.7). Si  $d = 0$  tenemos una sola dirección cuyo signo está determinado por el signo de  $b_n$  y de grado par, así que si  $b_n > 0$  tenemos que  $\dot{x} > 0$  sobre la curva, en la parte superior a la curva el flujo se mueve hacia la derecha por lo que tenemos un sector hiperbólico y bajo la curva el flujo se mueve hacia la izquierda (dirección contraria a la curva separatriz) por lo que tenemos un sector elíptico. En este caso también se dice que el origen es un **Punto Crítico con Dominio Elíptico**. El retrato fase en este caso se observa en la figura (5.8).

■

**Teorema 11.** Sea  $k = 2m$  con  $m \geq 1$  en (5.1). Entonces el origen es:

1. Cúspide si:

a)  $b_n = 0$ .

b)  $b_n \neq 0$  y  $n \geq m$ .

2. Silla-nodo si  $b_n \neq 0$  y  $n < m$ .

**Demostración:** Recordemos que el sistema es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + g(x)] + b_n x^n y [1 + h(x)] + y^2 R(x, y)\end{aligned}$$

- 1: a) En el caso en que  $b_n = 0$  el sistema es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k + \dots\end{aligned}$$

luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_k x^k + \dots}{y},$$

separando variables tenemos

$$y dy = (a_k x^k + \dots) dx,$$

e integrando ambos lados de la ecuación anterior obtenemos que las soluciones del sistema son

$$y = \pm \sqrt{2 \left( \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \dots \right)} + c.$$

Notemos que si la constante  $c = 0$  obtenemos las curvas invariantes que pasan por el origen y la velocidad en  $x$  esta dada por el signo de la raíz, por lo que tenemos una dirección que converge al origen y una que sale, como se muestra en la figura (5.9). Este tipo de comportamiento se conoce como cúspide.

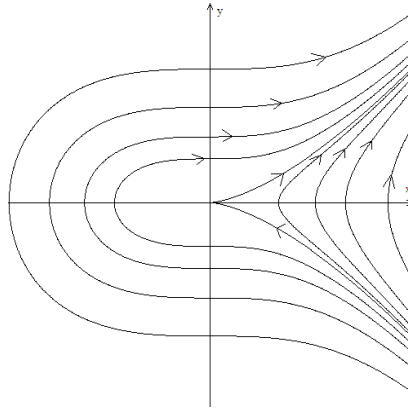


Figura 5.9: Cúspide,  $k$  par y  $b_n = 0$ .

- b) Consideremos el caso en el que  $m$  es par,  $b_n \neq 0$  y  $n \geq m$ . Para este caso utilizaremos la técnica del blow-up aplicada al sistema (5.1), haremos uso del blow-up en la dirección  $x$  positiva, y del blow-up en la dirección  $x$  negativa, analizados en los ejemplos 4 y 5 de Preliminares, respectivamente.

Consideremos  $a_k > 0$ , entonces hacemos el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= u^2 \\ y &= u^{k+1}v\end{aligned}$$

de donde tenemos que  $\dot{x} = 2u\dot{u}$ , entonces

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}}{2u} = \frac{u^{k+1}v}{2u} = \frac{u^k v}{2}.$$

Por otro lado,  $\dot{y} = (k+1)u^k \dot{u}v + u^{k+1} \dot{v}$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{\dot{y} - (k+1)u^k \dot{u}v}{u^{k+1}} \\ &= \frac{1}{u^{k+1}} \left[ u^{2k} \left( a_k(1+g(u^2)) + b_n u^{2n-k+1}v(1+h(u^2)) \right) \right. \\ &\quad \left. + v^2 \left( u^2 R(u,v) - \frac{(k+1)}{2} \right) \right] \\ &= a_k u^{k-1} + b_n u^{2n} v - \frac{(k+1)}{2} u^{k-1} v^2 \\ &\quad + u^{k-1} \left( a_k g(u^2) + b_n u^{2n-k+1} v h(u^2) + u^2 v^2 R(u,v) \right), \end{aligned}$$

por lo que el sistema bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} u^k v \\ \dot{v} &= a_k u^{k-1} + b_n u^{2n} v - \frac{(k+1)}{2} u^{k-1} v^2 \\ &\quad + u^{k-1} \left( a_k g(u^2) + b_n u^{2n-k+1} v h(u^2) + u^2 v^2 R(u,v) \right). \end{aligned}$$

Ahora dividimos el sistema anterior por  $u^{k-1}$  para obtener un nuevo sistema el cual es que analizaremos, notemos que nos encontramos en el caso en que  $n \geq m$  por lo que  $2n - k + 1 > 0$ , entonces el nuevo sistema bajo el blow-up es

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} uv \\ \dot{v} &= a_k + b_n u^{2n-k+1} v - \frac{(k+1)}{2} v^2 \\ &\quad + \left( a_k g(u^2) + b_n u^{2n-k+1} v h(u^2) + u^2 v^2 R(u,v) \right), \end{aligned}$$

los puntos de equilibrio para este sistema son  $P_{1,2} = \left( 0, \pm \sqrt{\frac{2a_k}{k+1}} \right)$ . Mientras que la matriz Jacobiana del sistema en general es

$$D\tilde{f}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u \\ (2n-k+1)b_n u^{2n-k}v + \dots & \dots - (k+1)v \end{pmatrix},$$

evaluando en los puntos de equilibrio tenemos

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(P_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a_k}{k+1}} & 0 \\ 0 & -(k+1)\sqrt{\frac{2a_k}{k+1}} \end{pmatrix} y, \\ D\tilde{f}(P_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a_k}{k+1}} & 0 \\ 0 & (k+1)\sqrt{\frac{2a_k}{k+1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que ambos equilibrios son ahora hiperbólicos por lo que podemos utilizar el teorema de Hartman-Grobman, por lo que se puede observar que ambos equilibrios son tipo silla.  $P_1$  tiene una variedad inestable tangente a la recta  $v = \sqrt{\frac{2a_k}{k+1}}$  y una variedad estable sobre la recta  $u = 0$ , inversamente  $P_2$  tiene una variedad estable tangente a la recta  $v = -\sqrt{\frac{2a_k}{k+1}}$  y una variedad inestable sobre la recta  $u = 0$ , como podemos ver en la figura (5.10).

Recordemos que con este blow-up, al efectuarse la transformación del plano  $u-v$  al  $x-y$ , solo consideramos la dirección  $u$  positiva y ésta a su vez, solo nos aporta el retrato fase en la dirección  $x$  positiva, por lo que la figura (5.10) en  $u-v$ , al contraer el origen, se transforma en la figura (5.11) en  $x-y$ .

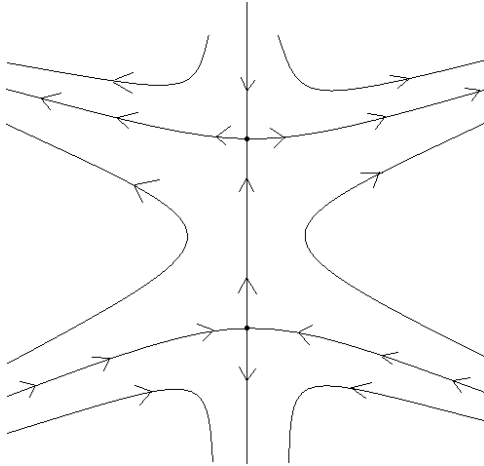


Figura 5.10: Blow-up dirección  $x^+$ .

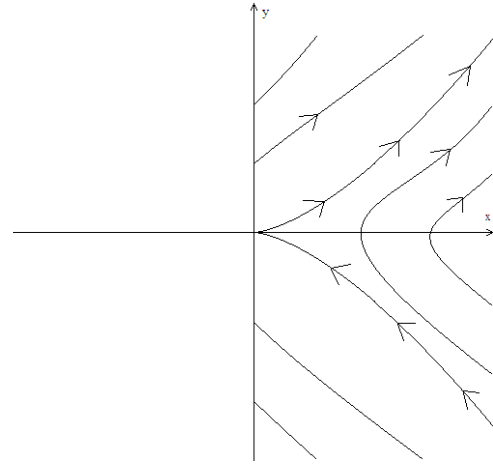


Figura 5.11: Retrato fase en  $x$  positiva.

Ahora, resta analizar como es el retrato fase en el lado izquierdo del plano, para ello emplearemos el blow-up en dirección  $x$  negativa. Para este caso el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned} x &= -u^2 \\ y &= u^{k+1}v \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2}u^k v \\ \dot{v} &= a_k u^{k-1} + (-1)^n b_n u^{2n} v + \frac{(k+1)}{2} u^{k-1} v^2 \\ &\quad + u^{k-1} \left( a_k g(u^2) + b_n u^{2n-k+1} v h(u^2) + u^2 v^2 R(u, v) \right), \end{aligned}$$

dividiendo el campo por  $u^{k-1}$  tenemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{1}{2}uv \\ \dot{v} &= a_k + (-1)^n b_n u^{2n-k+1}v + \frac{(k+1)}{2}v^2 \\ &\quad + \left( a_k g(-u^2) + b_n u^{2n-k+1}v h(-u^2) + u^2 v^2 R(-u, v) \right).\end{aligned}$$

Notemos que  $\dot{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0$  ó  $v = 0$ . Si  $u = 0$  entonces  $v = \sqrt{\frac{-2a_k}{k+1}}$ , lo cual no puede ocurrir ya que supusimos  $a_k > 0$ , por lo que no tenemos ningún equilibrio en el eje  $v$ . Luego, si  $v = 0$ , entonces  $\dot{v} = 0 \Leftrightarrow 1 + g(-u^2) = 0$ , por lo que pueden existir equilibrios aislados en el eje  $u$ , de ser así, restringimos nuestro dominio a una vecindad menor del origen, es decir, de modo que localmente no tengamos ningún equilibrio. Para  $u = 0$  tenemos una dirección invariante con flujo positivo. Observemos también que si  $v = 0$  las soluciones no tienen velocidad en  $u$ , por lo que atraviesan el eje  $u$  de forma vertical. Como nos encontramos en una vecindad del origen, el término que domina en  $\dot{v}$  es  $a_k$ , por ser positivo, el flujo en la dirección  $v$  sobre todas las soluciones también lo es, mientras que en la dirección  $u$  el flujo dependerá del cuadrante en el que nos encontremos, por ejemplo, en el segundo y tercer cuadrante, éste será negativo. De lo anterior obtenemos el retrato fase en  $u-v$ , observado en la figura (5.12).

Como vimos en Preliminares, consideramos la dirección  $u$  positiva para obtener el retrato fase en el lado izquierdo del plano  $x-y$ . De este modo, al transformar éstas curvas obtenemos el retrato fase observado en la figura (5.13).

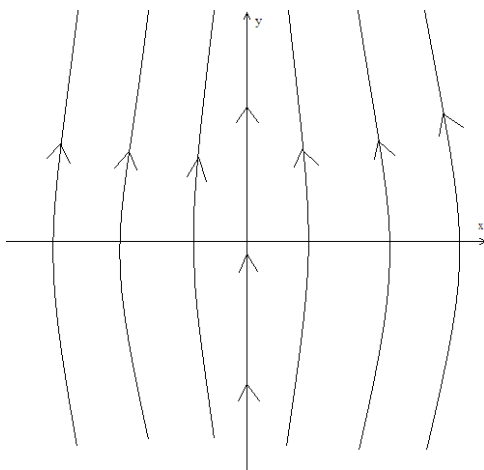


Figura 5.12: Blow-up dirección  $x^-$ .

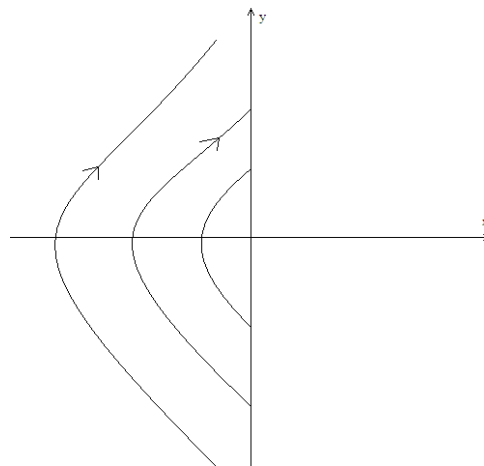


Figura 5.13: Retrato fase en  $x$  negativa.

Finalmente, unimos los retratos fase (5.11) y (5.13) para obtener la cúspide (figura 5.14). Si  $a_k < 0$ , la situación es análoga.

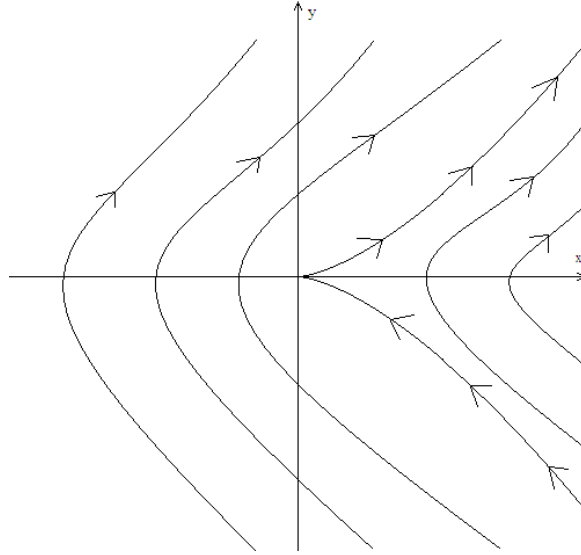


Figura 5.14: Retrato fase final: cúspide.

En conclusión, si  $k$  es par y tenemos,  $b_n = 0$  ó  $b_n \neq 0$  con  $n \geq m$  el origen es punto de equilibrio tipo **cúspide**.

- 2: Supongamos que  $n < m$ ,  $b_n \neq 0$  y  $k = 2m$ . Buscamos una curva  $H(x)$  en serie de Taylor tal que  $H(0) = 0$  y  $y = H(x)$ , por lo que  $\dot{y} = H'(x)H(x)$  propondremos la curva  $H(x)$  de la siguiente forma y procederemos a encontrar su primer coeficiente:

$$\begin{aligned} H(x) &= \alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots \\ \Rightarrow H'(x) &= (n+1)\alpha_{n+1}x^n + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

Entonces

$$(a_{2m}x^{2m} + \dots) + b_n x^n (\alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots) = (n+1)\alpha_{n+1}^2 x^{2n+1} + \dots$$

Notemos que si  $n < m$ ,  $2n+1 < 2m$  de este modo obtenemos que

$$\begin{aligned} b_n \alpha_{n+1} &= (n+1)\alpha_{n+1}^2 \\ \Leftrightarrow \\ \alpha_{n+1} = 0 &\quad \text{ó} \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} \end{aligned}$$

Si  $\alpha_{n+1} = 0$  debemos encontrar el primer coeficiente  $\alpha_{n+q}$  de  $H(x)$  distinto de cero. Por lo que propondremos

$$H(x) = \alpha_{n+q}x^{n+q} + \dots$$

en consecuencia,

$$(a_{2m}x^{2m} + \dots) + b_n x^n (\alpha_{n+q}x^{n+q} + \dots) = (n+1)\alpha_{n+q}^2 x^{2(n+q)-1} + \dots$$

así, para que  $\alpha_{n+q} \neq 0$  necesitamos que  $2m = 2n + q$  por lo que debemos hacer  $q = 2(m - n)$ . Notemos que

$$2(n+q) - 1 = 4m - 2n - 1 = 2m + [(m-n) - 1] + (m-n) > 2m,$$

por lo que

$$\begin{aligned} a_{2m} + b_n \alpha_{n+q} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_{2m-n} &= -\frac{a_{2m}}{b_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $b_n \neq 0$  y  $n < m$  tenemos dos curvas invariantes cuyos primeros coeficientes son

$$\alpha_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} \quad (5.16)$$

por lo que

$$\begin{aligned} H(x) &= \alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots \text{ y} \\ \dot{x} &= \alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots \\ \dot{y} &= (n+1)\alpha_{n+1}^2 x^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

para la primera curva y

$$\alpha_{2m-n} = -\frac{a_k}{b_n} \quad (5.18)$$

para la segunda, con

$$\begin{aligned} H(x) &= \alpha_{2m-n}x^{2m-n} + \dots \text{ y} \\ \dot{x} &= \alpha_{2m-n}x^{2m-n} + \dots \\ \dot{y} &= (2m-n)\alpha_{2m-n}^2 x^{2(2m-n)-1} + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

Analicemos el comportamiento del flujo sobre estas curvas invariantes. Supondremos  $a_k > 0$  y  $b_n > 0$  (los otros casos se analizan de forma análoga), supongamos también que  $n+1$  es impar, entonces para la curva  $H(x) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots$ , con  $\alpha_{n+1}$  especificado en (5.16), tenemos  $\dot{x} > 0$  y  $\dot{y} > 0$  si  $x > 0$ , por el contrario  $\dot{x} < 0$  y  $\dot{y} < 0$  si  $x < 0$ . La otra curva,  $H(x) = \alpha_{2m-n}x^{2m-n} + \dots$ , con  $\alpha_{2m-n} < 0$  de acuerdo a (5.18), inicia en grado par por lo que  $\dot{x} < 0$  sobre toda la curva,  $\dot{y} > 0$  si  $x < 0$  y  $\dot{y} < 0$  si  $x > 0$ . El retrato fase para este caso se observa en la figura (5.15), el caso  $n+1$  las soluciones tienen el mismo comportamiento pero se invierten las paridades de el grado inicial de las curvas.

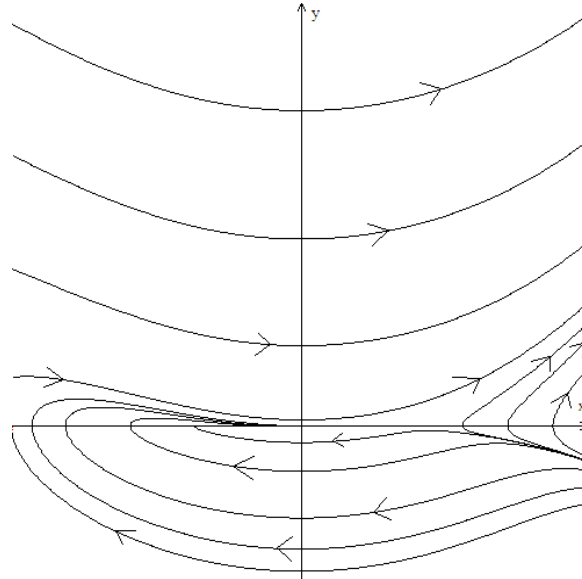


Figura 5.15: Punto de equilibrio tipo Silla-nodo.

Por lo tanto, bajo estas condiciones el origen es un punto de equilibrio tipo *silla-nodo*.

■

## 5.1. Ejemplos

Para mostrar la utilización de los dos teoremas anteriores presentaremos los ejemplos siguientes:

**Ejemplo 14.** *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= ax^3 + bx^2y, \quad a \neq 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

*En este caso tenemos  $k$  impar con  $m = 1$  y  $n = 2$ . Notemos que el origen es el único punto de equilibrio del sistema, gracias a nuestros teoremas fácilmente podemos determinar que:*

- *Si  $a > 0$  el origen es un punto de equilibrio tipo silla.*
- *Si  $a < 0$  el origen es un punto de equilibrio tipo foco ó centro.*

*Los retratos fase para este ejemplo se muestran en las figuras (5.16) y (5.17).*



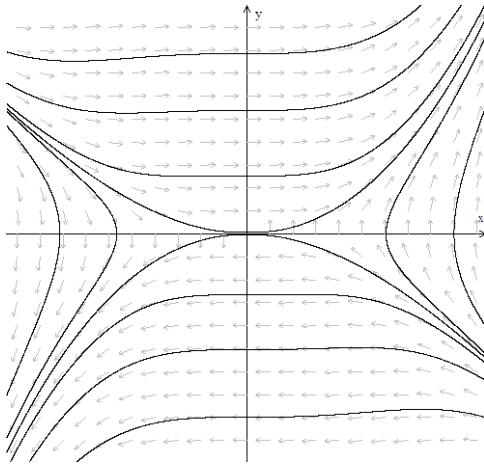


Figura 5.16: Retrato fase de (5.20),  $a > 0$ : punto silla.

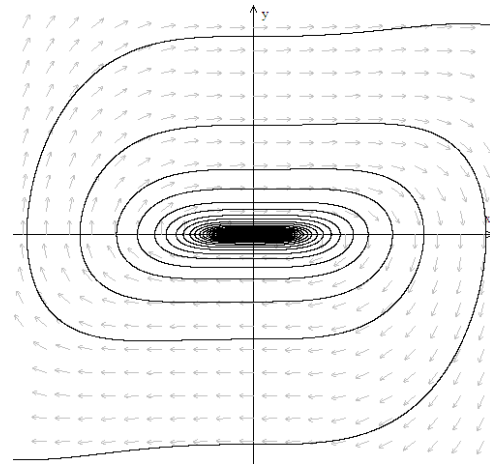


Figura 5.17: Retrato fase de (5.20),  $a < 0$ : foco o centro.

**Ejemplo 15.** *Analícemos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + \alpha x_1^3 + \beta x_2^4, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Los puntos de equilibrio para este sistema son  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta})$ , notemos que si  $\alpha = 0$  el origen es el único equilibrio. La matriz Jacobiana del sistema es

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 + 3\alpha x_1^2 & -1 + 4\beta x_2^3 \end{pmatrix},$$

evaluando la Jacobiana en  $P_2$  tenemos

$$Df(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 + \frac{3\alpha^3}{\beta^2} & -1 + 4\frac{\alpha^3}{\beta^2} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz  $Df(P_2)$  son  $\lambda_{1,2} = 2\frac{\alpha^3}{\beta^2} \pm \sqrt{4\frac{\alpha^6}{\beta^4} - \frac{\alpha^3}{\beta^2}}$ , si  $\alpha \neq 0$  este equilibrio es hiperbólico por lo que su comportamiento puede ser determinado mediante el teorema de Hartman-Grobman de acuerdo con los valores para  $\alpha$  y  $\beta$ . Por lo que ahora nos enfocaremos en determinar como es el retrato fase en una vecindad del origen.

La matriz Jacobiana del sistema evaluada en el origen es

$$A = Df(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son  $\lambda_{1,2} = 0$  y los vectores propios asociados a ellos son  $v_1 = (1, -1)^T$  y  $v_2 = (1, 0)^T$ . Por lo que la matriz  $P$  de cambio de coordenadas y su inversa son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

como la matriz  $P$  es tal que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , introducimos ahora el cambio de coordenadas  $y = P^{-1}x$ . Bajo este cambio de coordenadas el sistema queda como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - \alpha(y_1 + y_2)^3 - \beta y_1^4 \\ \dot{y}_2 &= \alpha(y_1 + y_2)^3 + \beta y_1^4, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $z_1 = y_1 + y_2$  y  $z_2 = y_2$  tenemos el finalmente el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \alpha z_1^3 + \beta z_1^4 - 4\beta z_1^3 z_2 + 6\beta z_1^2 z_2^2 - 4\beta z_1 z_2^3 + \beta z_2^4, \end{aligned}$$

el sistema se encuentra ahora en su forma normal por lo que podemos ahora emplear el teorema, notemos que  $n = 3$ ,

- Si  $\alpha \neq 0$  entonces  $k$  es impar con  $m = 1$ , por lo que  $n > m$ , se sigue que
  - Si  $\alpha > 0$  entonces el origen es un punto de equilibrio tipo silla.
  - Si  $\alpha < 0$  entonces el origen es un punto de equilibrio tipo foco o centro.
- Si  $\alpha = 0$  entonces  $k$  es par con  $m = 2$  y  $n > m$  entonces el origen es un punto de equilibrio tipo cúspide.

Los retratos fase del sistema (5.21), en una vecindad del origen, para cada caso se muestran en las figuras (5.18), (5.19) y (5.20).

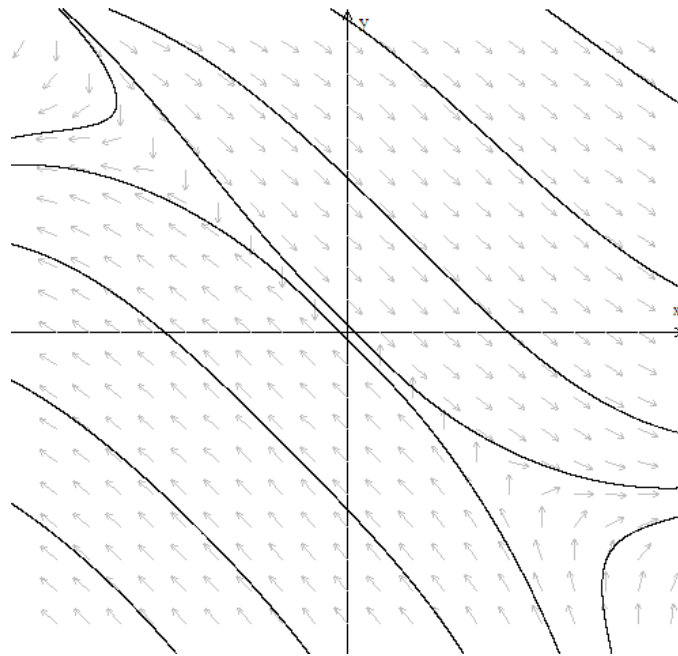


Figura 5.18: Retrato fase de (5.21),  $\alpha > 0$ : punto silla.

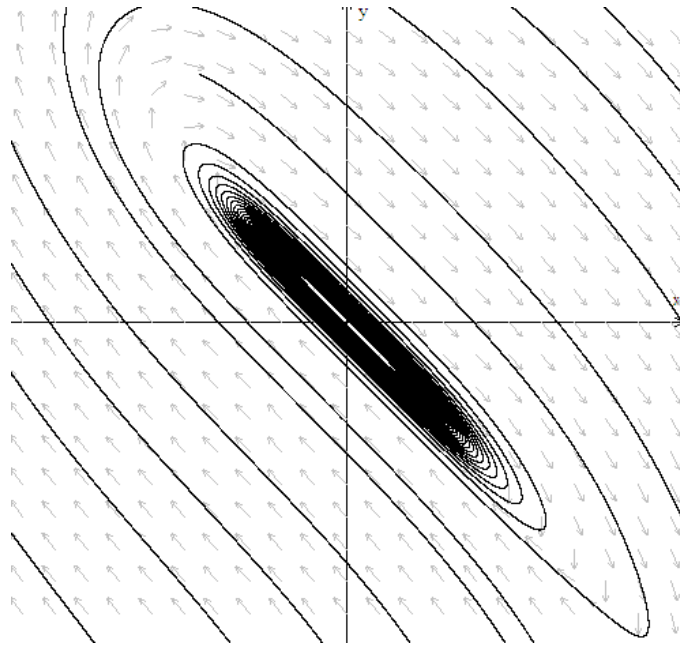


Figura 5.19: Retrato fase de (5.21),  $\alpha < 0$ : foco.

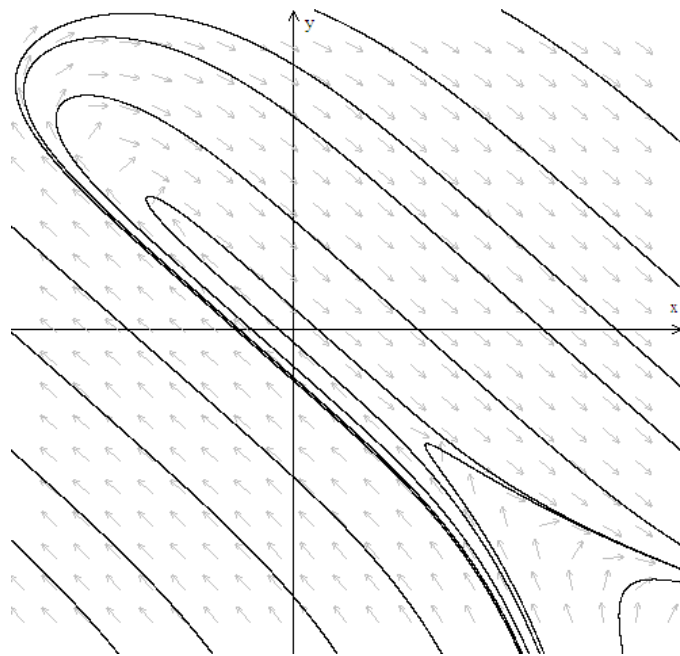


Figura 5.20: Retrato fase de (5.21),  $\alpha = 0$ : cúspide.



## Capítulo 6

### Valores propios imaginarios

En general, el poder distinguir si un punto de equilibrio en el plano es un foco o un centro es un problema clásico, el cual sigue quedando abierto, pues no se ha logrado dar una caracterización explícita para ello. Sin embargo, existen ciertas herramientas, como el cambio a coordenadas polares, que nos permiten distinguir entre uno y otro, así como también existen caracterizaciones para ciertos tipos específicos de campos, algunas de éstas serán tratadas en el capítulo presente.

Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $f(0) = 0$  y

$$A = Df(0) \approx J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \omega > 0.$$

Notemos que los valores propios de la matriz  $A$  son los números complejos  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Sin pérdida de generalidad, podemos hacer un cambio de coordenadas tal que la matriz Jacobiana del sistema puede ser escrita en su forma normal  $J$ , por lo que el sistema alrededor del origen puede ser transformado como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + p(x, y) \\ \dot{y} &= \omega x + q(x, y) \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $p, q = o(x, y)$ .

**Ejemplo 16.** *Consideremos el sistema no lineal*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ \dot{y} &= x + y\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

para  $x^2 + y^2 \neq 0$  y definimos  $f(0) = 0$ . Cambiamos el sistema a coordenadas polares

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -xy + x^2\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) + xy + y^2\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ &= r^3 \sin(1/r) \\ \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\ &= x^2 + xy\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) + y^2 - xy\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

entonces el sistema bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^2 \sin(1/r) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

para  $r > 0$  y  $\dot{r} = 0$  para  $r = 0$ . Podemos ver que para  $r = \frac{1}{n\pi}$ ,  $n = 1, 2, \dots$   $\dot{r}$  es igual cero, por lo que las circunferencias  $r = \frac{1}{n\pi}$  son soluciones del sistema. Además para  $\frac{1}{n\pi} > r > \frac{1}{(n+1)\pi}$  tenemos  $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi$  entonces observemos que  $\dot{r} < 0$  si  $n$  es impar, por otro lado si  $n$  es par  $\dot{r} > 0$ . Por lo tanto las trayectorias entre las circunferencias  $r = \frac{1}{n\pi}$  giran acercando o alejándose a una de estas circunferencias, como se muestra en la figura (6.1). Este comportamiento alrededor del origen es llamado foco-centro y lo definimos a continuación.

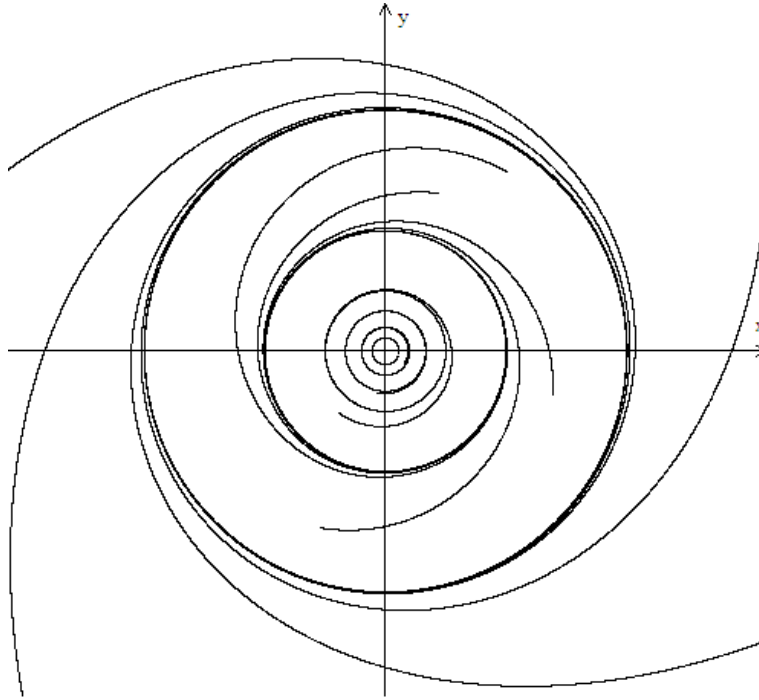


Figura 6.1: Foco-centro.

**Definición 4.** El origen es llamado **foco-centro** de (6.1) si existe una sucesión de curvas solución cerradas  $\Gamma_n$  con  $\Gamma_{n+1}$  en el interior de  $\Gamma_n$  tal que  $\Gamma_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y tal que toda trayectoria entre  $\Gamma_n$  y  $\Gamma_{n+1}$  converge a una de estas curvas cerradas cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

En general, si el origen es un equilibrio para el sistema (6.1), en una vecindad de él existen tres posibles escenarios los cuáles se muestran en el siguiente teorema.

**Teorema 12.** Sea  $E$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo al origen y sea  $f \in C^1(E)$ . Supongamos que el origen es un equilibrio aislado para el sistema (6.1). En-

tonces el origen es un punto de equilibrio tipo **centro**, **foco** o **foco-centro**.

### Demostración:

Haciendo el cambio del sistema (6.1) a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -\omega xy + xp(x, y) + \omega xy + yq(x, y) \\ &= r \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\ &= \omega x^2 + xq(x, y) + \omega y^2 - yp(x, y) \\ &= \omega r^2 + r \cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned}$$

por lo que el sistema en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega + \frac{1}{r} [\cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Luego, por hipótesis  $p, q = o(r)$ , es decir,  $|p(r \cos \theta, r \sin \theta)/r| \rightarrow 0$  y  $|q(r \cos \theta, r \sin \theta)/r| \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{r}|}{r} &= |\cos \theta| \frac{|p(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r} + |\sin \theta| \frac{|q(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r} \\ &\leq \frac{|p(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r} + \frac{|q(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

entonces  $\dot{r} = o(r)$  y de manera semejante obtenemos que  $\dot{\theta} = \omega + o(1)$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Por lo tanto existe una  $\delta$  tal que si  $0 < r < \delta$  entonces

$$|\dot{\theta} - \omega| < \epsilon$$

haciendo  $\epsilon = \omega/2$  tenemos que  $\dot{\theta} > \omega/2 > 0$ . Entonces para  $0 < r_0 < \delta$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\theta(t, r_0, \theta_0) > \frac{\omega t}{2} + \theta_0 \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

además tenemos que  $\theta(t, r_0, \theta_0)$  es una función de  $t$  monótona y creciente. Sea  $t = h(\theta)$  la inversa de esta función monótona. Definimos

$$\tilde{r}(\theta) = r(h(\theta), r_0, \theta_0) \text{ para } 0 < r_0 < \delta \text{ y } \theta_0 \in \mathbb{R}$$

entonces de (6.2)  $\tilde{r}(\theta)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\tilde{r}}{d\theta} = \tilde{F}(\tilde{r}, \theta) = \frac{\cos \theta p(\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta) + \sin \theta q(\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta)}{\omega + (\cos \theta / \tilde{r}) q(\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta) - (\sin \theta / \tilde{r}) p(\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta)}.$$

Supongamos que el origen no es un centro ni un foco-centro del sistema no lineal (6.1). Entonces para una  $\delta > 0$  suficientemente pequeña, no existen trayectorias cerradas en la vecindad  $N_\delta(0) \setminus \{0\}$ . Entonces para  $0 < r_0 < \delta$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tenemos dos casos  $\tilde{r}(\theta_0 + 2\pi) < \tilde{r}(\theta_0)$  ó  $\tilde{r}(\theta_0 + 2\pi) > \tilde{r}(\theta_0)$ . Supongamos que el primer caso ocurre. El segundo caso lo podemos tratar de forma similar. Si  $\tilde{r}(\theta_0 + 2\pi) < \tilde{r}(\theta_0)$  entonces  $\tilde{r}(\theta_0 + 2k\pi) < \tilde{r}(\theta_0 + 2(k-1)\pi)$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$ , de otra manera tendríamos dos trayectorias de (6.1) pasando por el mismo punto, lo cual es imposible. La sucesión  $\tilde{r}(\theta_0 + 2k\pi)$  es monótona, decreciente y acotada por cero, por lo tanto el siguiente límite existe y es no negativo:

$$\tilde{r}_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{r}(\theta_0 + 2k\pi).$$

Si  $\tilde{r}_1 = 0$  entonces  $\tilde{r}(\theta) \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \infty$ , es decir,  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  y  $\theta(t, r_0, \theta_0) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  por lo que el origen es un foco estable para el sistema (6.1). Si  $\tilde{r}_1 > 0$  entonces, como  $|\tilde{F}(r, \theta)| \leq M$  con  $M \in \mathbb{R}$  para  $0 \leq r \leq \delta$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , la sucesión  $\tilde{r}(\theta_0 + \theta + 2k\pi)$  es uniformemente continua en  $[0, 2\pi]$ . Por lo tanto, por el lema de Ascoli (probado en Rudin: Teorema 7.25), existe una subsucesión convergente de  $\tilde{r}(\theta_0 + \theta + 2k\pi)$  convergiendo a la solución  $\tilde{r}_1(\theta)$  que satisface  $\tilde{r}_1(\theta) = \tilde{r}_1(\theta + 2k\pi)$ ; es decir,  $\tilde{r}_1$  es una órbita periódica de (6.2), lo cual es una contradicción, ya que supusimos que no existían trayectorias cerradas de (6.1) en  $N_\delta(0) \setminus \{0\}$  donde el origen no es un centro ni un foco-centro. Por lo tanto si el origen no es un centro ni un foco-centro,  $\tilde{r} = 0$  por lo que el origen es un foco para el sistema (6.1). ■

Un foco-centro no puede ocurrir en un sistema analítico. Esto es consecuencia del Teorema de Dulac, cuya prueba la podemos encontrar en el libro de J. Ecalle. Dicho teorema establece lo siguiente:

**Teorema 13. (Dulac)** *En cualquier región acotada del plano, el sistema analítico  $\dot{x} = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^2$  tiene a lo más un número finito de ciclos límite.*

Del teorema anterior y el teorema (12) se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 2.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene al origen y sea  $f$  una función analítica en  $E$ . Supongamos que  $f$  alrededor del origen es de la forma (6.1). Entonces el origen es un foco o un centro para el sistema  $\dot{x} = f(x)$ .*

**Ejemplo 17.** *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} &= x - x^2y - y^3 \end{aligned} \tag{6.3}$$



notemos que el sistema (6.3) es un centro en la linealización, analizaremos el comportamiento alrededor del origen para este sistema no lineal. Realizamos el cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= -xy - x^4 - x^2y^2 + xy - x^2y^2 - y^4 \\ &= -r^4 \\ r^2\dot{\theta} &= x^2 - x^3y - xy^3 + y^2 + x^3y + xy^3 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

por lo que el sistema es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

Notemos que  $\dot{r} < 0$  y  $\dot{\theta} > 0$  por lo que las soluciones giran convergiendo al origen. Por lo tanto el origen es un foco no hiperbólico estable para el sistema (6.3). El retrato fase del sistema se muestra en la figura (6.2).

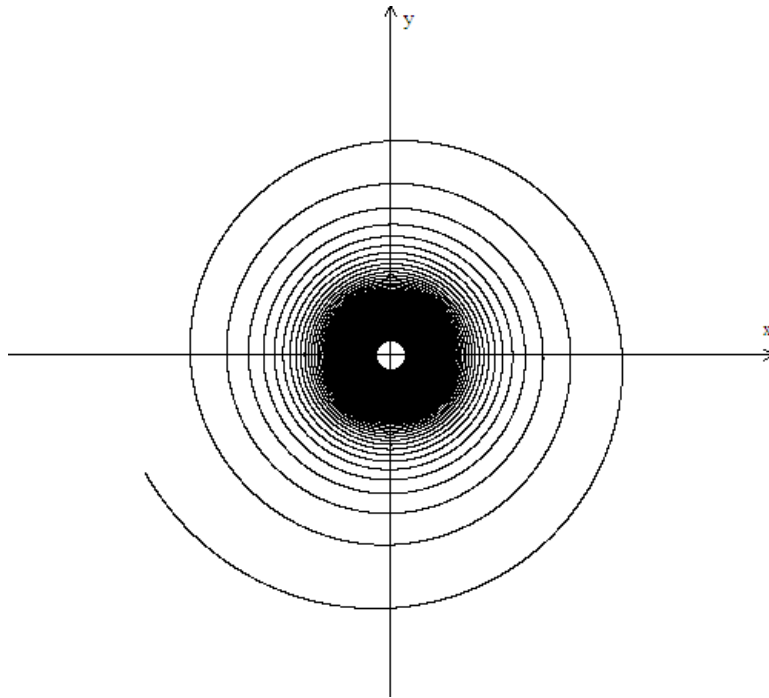


Figura 6.2: Foco no-hiperbólico.

Como hemos visto, una herramienta que nos permite identificar si el sistema es un foco o un centro es el uso de coordenadas polares, otra herramienta que nos ayuda a determinar el comportamiento del origen es la existencia de simetrías en la ecuación diferencial. Las simetrías más sencillas de observar son las simetrías respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ .

**Definición 5.** El sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^2$ , es simétrico con respecto al eje  $x$  si es invariante bajo la transformación  $(t, y) \mapsto (-t, -y)$ ; es simétrico con respecto al eje  $y$  si es invariante bajo la transformación  $(t, x) \mapsto (-t, -x)$ .

La existencia de estas simetrías nos permite establecer el siguiente teorema:

**Teorema 14.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo el origen y sea  $f \in C^1(E)$  si el sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  es simétrico con respecto al eje  $x$  o respecto al eje  $y$ , y si el origen es un centro para la linealización del sistema, entonces el origen es también un centro para el sistema no lineal.

**Demostración:**

Por el teorema (12) sabemos que cualquier trayectoria en la vecindad  $N_\delta(0)$  que cruce el eje  $x$  positivo, cruza también el eje  $x$  negativo. Si el sistema es simétrico respecto al eje  $x$  entonces las trayectorias en  $N_\delta(0)$  serán simétricas respecto al eje  $x$  y en consecuencia todas las trayectorias en  $N_\delta(0)$  serán cerradas. Por lo tanto, será un centro para el sistema no lineal. ■

**Ejemplo 18.** Analicemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - xy \\ \dot{y} &= x + x^2.\end{aligned}\tag{6.4}$$

En coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{r}(-xy - x^2y + xy + yx^2) = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{r^2}(x^2 + x^3 + y^2 + xy^2) = \frac{1}{r^2}(r^2 + r^3 \cos\theta) = 1 + x > 0\end{aligned}$$

para  $x > -1$ , entonces a lo largo de toda trayectoria en el semiplano  $x > -1$ , tenemos  $r(t)$  constante y  $\theta(t)$  es creciente y no acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto el origen es un centro para el sistema no lineal sistema (6.4).

Notemos que este sistema tiene simetría respecto al eje  $x$ , ya que al aplicar la transformación  $(-t, -y)$  al sistema, tenemos que si  $x(t) \mapsto x(-t)$  entonces  $\dot{x}(t) \mapsto -\dot{x}(-t)$ , y además si  $y(t) \mapsto -y(-t)$  entonces  $\dot{y}(t) \mapsto \dot{y}(-t)$ , así que

$$\begin{aligned}\dot{x}(-t) &= -(-(-y) - x(-y)) = -y - xy \\ \dot{y}(-t) &= x + x^2.\end{aligned}$$

por lo que efectivamente el sistema es invariante bajo la transformación  $(-t, -y)$ . Por lo tanto, de forma alternativa, si inicialmente notamos que el sistema tiene simetría, por el teorema (14) podemos concluir que el origen es un centro para el sistema (6.4), como hemos comprobado al pasar el sistema a coordenadas polares. El retrato fase del sistema se muestra en la figura (6.3).

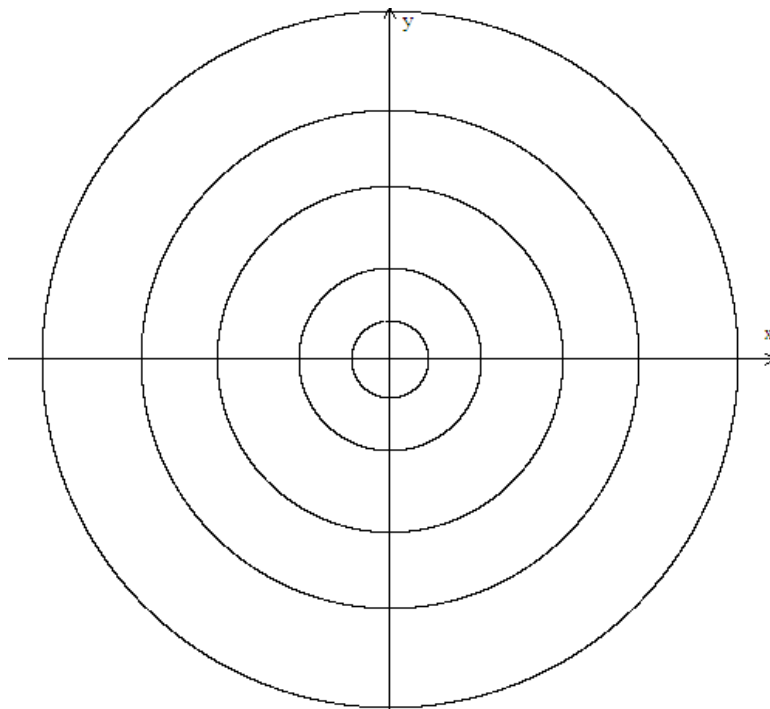


Figura 6.3: Centro topológico.

**Ejemplo 19.** Consideremos en una vecindad del origen el sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y - x^2 \\
 \dot{y} &= -x + 2xy \\
 &\Leftrightarrow \\
 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

con Hamiltoniano  $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - x^2y$ . El Hamiltoniano representa la energía del sistema, la cual es invariante, es decir,  $dH/dt = 0$ , por lo que en los sistemas Hamiltonianos se cumple que  $\dot{x} = \partial H/\partial y$  y  $\dot{y} = -\partial H/\partial x$ .

Sabemos que el sistema es analítico por lo que descartamos la posibilidad de que el origen sea un punto de equilibrio tipo foco-centro. Por otro lado, el sistema (6.5) no tiene simetría respecto al eje  $x$  ni respecto al eje  $y$ , por lo que no podemos afirmar de esta forma que el origen sea un centro.

Sin embargo, haciendo uso de las propiedades de los Hamiltonianos dibujamos las curvas del nivel del Hamiltoniano  $H$ , es decir,

$$x^2 + y^2 - 2x^2y = c$$

las cuales son curvas cerradas alrededor del origen, por lo que el sistema (6.5) es un centro, a pesar de no ser simétrico, como se muestra en la figura (6.4).

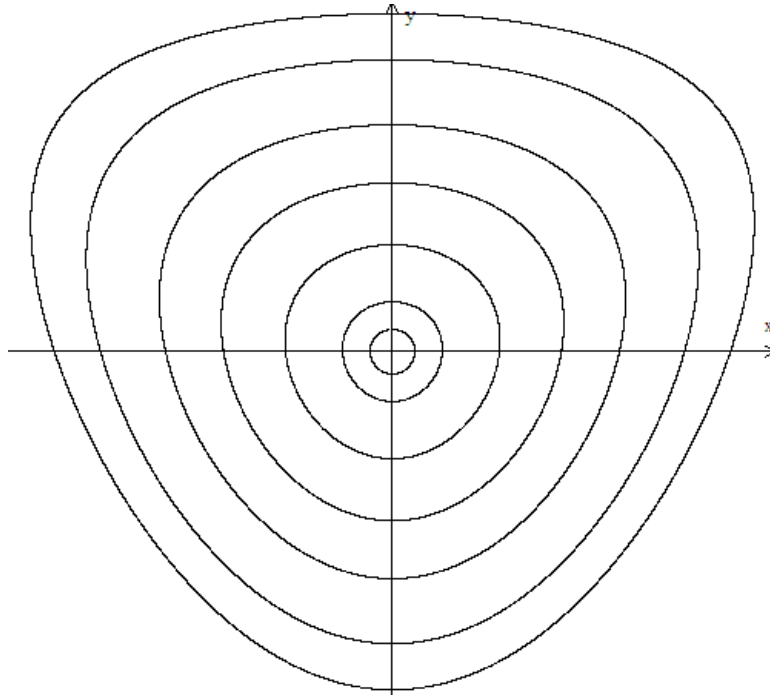


Figura 6.4: Centro topológico del Sistema Hamiltoniano.

## Capítulo 7

### Continuos de equilibrios

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios homogéneos de grado  $n$  y  $m$ , respectivamente, con  $n, m \geq 2$ .

Supongamos ahora que  $P$  y  $Q$  son tales que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = h(x, y)f(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) = h(x, y)g(x, y)\end{aligned}\tag{7.2}$$

Como  $P$  y  $Q$  son polinomios homogéneos los factores  $h, f$  y  $g$  son también polinomios homogéneos, los cuáles pueden descomponerse en producto de factores lineales o cuadráticos (véase apéndice).

Analizaremos el comportamiento del retrato fase de acuerdo a las características de  $h(x, y)$ .

#### 7.1. Caso I

Sea  $h(x, y) = ax + by$  entonces la recta  $ax + by = 0$  representa un continuo de equilibrios que pasan por el origen. Notemos que la recta  $h(x, y) = 0$  divide el plano en dos regiones, en las cuales, de un lado de la recta  $h(x, y)$  tiene signo positivo, y del otro lado tiene signo negativo. Ahora analicemos el comportamiento fuera del continuo de equilibrios, entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\ &= \frac{h(x, y)g(x, y)}{h(x, y)f(x, y)} \text{ con } h(x, y) \neq 0, \\ &= \frac{g(x, y)}{f(x, y)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las trayectorias fuera de la recta  $ax + by = 0$  siguen las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{7.3}$$

salvo el signo de  $h(x, y)$  que cambia la dirección de la trayectoria, es decir, si  $h(x, y) > 0$  la dirección de la trayectoria se conserva igual a la solución del sistema (7.3) y si  $h(x, y) < 0$  las direcciones se invierten.

Por lo tanto, el problema se reduce a analizar el comportamiento de las soluciones del sistema (7.3), de acuerdo a lo estudiado anteriormente para los casos en que el origen es el único equilibrio, ya sea hiperbólico o no-hiperbólico.

**Ejemplo 20.** *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x^2 + xy - 2y^2) = (x + 2y)(y - x) \\ \dot{y} &= -(x^2 + 3xy + 2y^2) = -(x + 2y)(x + y)\end{aligned}\tag{7.4}$$

entonces (7.4) tiene como factor común  $h(x, y) = x + 2y$  por lo que la recta  $x + 2y = 0$  es un continuo de equilibrios. Notemos que en el semi-plano superior a la recta  $x + 2y = 0$  el factor  $h(x, y)$  es positivo y negativo en el semi-plano inferior a ella. Procederemos a analizar el comportamiento de las soluciones fuera de la recta  $h(x, y) = 0$ , es decir, analizar las soluciones para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}\tag{7.5}$$

Este sistema lineal cuya matriz Jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene como valores propios a  $\lambda_1 = -1 + i$  y  $\lambda_2 = -1 - i$ , por lo que el sistema (7.5) representa un foco estable.

Por lo tanto, las soluciones del sistema original (7.4) en el semi-plano superior a la recta  $x + 2y = 0$  tienen la misma dirección que las soluciones del sistema (7.5), ya que  $x + 2y > 0$ , mientras que en el semi-plano inferior al continuo de equilibrios cambian de dirección, debido a que  $x + 2y < 0$ .

El retrato fase del sistema (7.4) en una vecindad del origen se muestra en la figura (7.1). Notemos que los equilibrios en el semiplano izquierdo son inestables, mientras que en el derecho son estables.

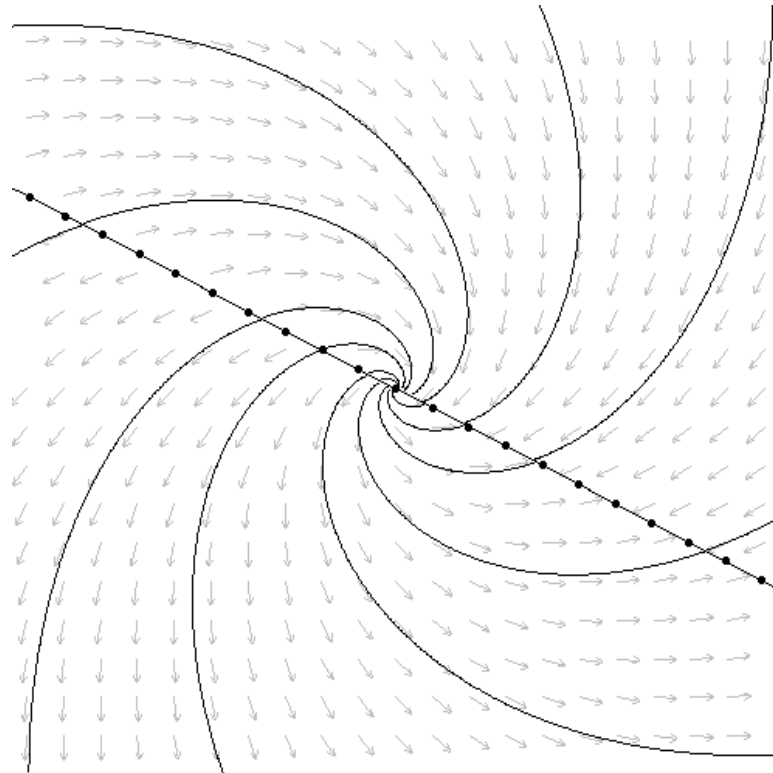


Figura 7.1: Retrato fase del sistema (7.4)

## 7.2. Caso II

Supongamos ahora que  $h(x, y) = |c|^2 x^2 - 2 \operatorname{Re}(c)xy + y^2$ , donde  $c$  y su conjugado son raíces complejas de los polinomios homogéneos  $P$  y  $Q$  (véase apéndice), por lo que  $h(x, y) = 0$  es elipse degenerada, es decir, el origen. Notemos también que si  $c = \alpha + \beta i$  entonces

$$\begin{aligned} h(x, y) &= |c|^2 x^2 - 2 \operatorname{Re}(c)xy + y^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2\alpha xy + y^2 \\ &= (\alpha x - y)^2 + \beta^2 x^2 \geq 0, \end{aligned}$$

por lo que, en este caso, el factor  $h(x, y)$  al ser cancelado en

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\ &= \frac{h(x, y)g(x, y)}{h(x, y)f(x, y)} \text{ con } h(x, y) \neq 0, \\ &= \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \end{aligned}$$

no altera el comportamiento de las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{7.6}$$

por lo que el sistema (7.2) se comporta como el sistema (7.6).

**Ejemplo 21.** *Analicemos el comportamiento de las soluciones del siguiente sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (5x^2 - 4xy + y^2)(y - x) \\ \dot{y} &= -(5x^2 - 4xy + y^2)(x + y)\end{aligned}\tag{7.7}$$

Notemos entonces que  $h(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2 = 0$  representa una elipse degenerada, la cual es solo el origen, y fuera del origen el factor  $h(x, y) > 0$  por lo que el problema queda reducido a analizar las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= -(x + y)\end{aligned}\tag{7.8}$$

que como vimos en el ejemplo anterior, es un foco estable. Por lo que el sistema (7.7) es también un foco estable, como se muestra en la figura (7.2).

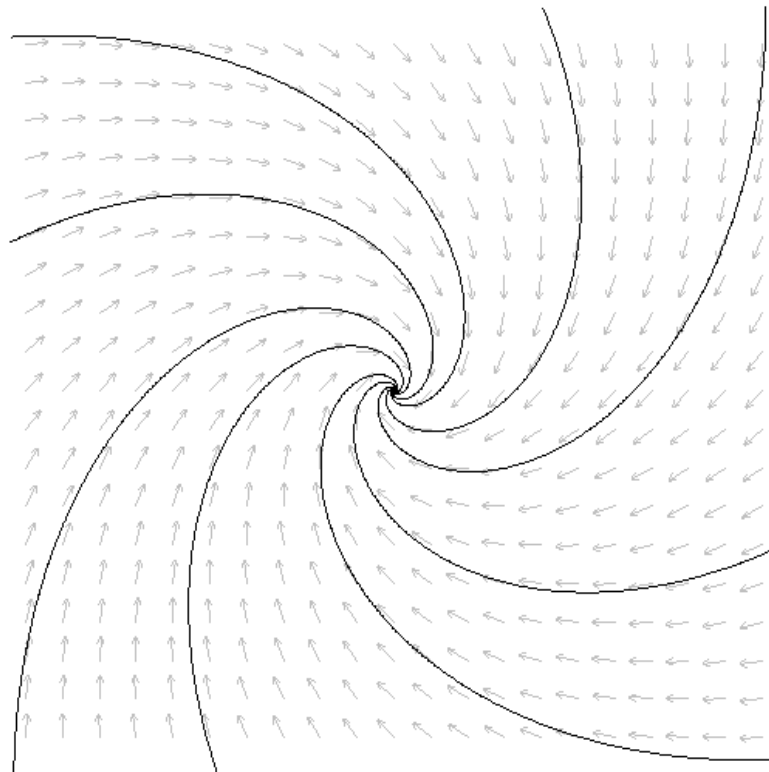


Figura 7.2: Retrato fase del sistema (7.7)



### 7.3. Caso III

Un tercer y último caso es cuando el factor  $h(x, y)$  es combinación de factores lineales y/o cuadráticos, por ejemplo,  $h(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) \dots (|c_1|^2x^2 - 2\text{Re}(c_1)xy + y^2) \dots$ . Por lo que los factores lineales igualados a cero, representan rectas que pasan por el origen que son continuos de equilibrios, y los factores cuadráticos igualados a cero representan únicamente al origen.

Como vimos en el caso anterior, los factores cuadráticos fuera del origen siempre son positivos, y cada uno de los factores lineales es una recta que divide al plano en dos semiplanos, en los cuales de un lado de la recta el factor lineal es positivo y del otro negativo. Entonces, nuevamente si nuestro sistema es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = h(x, y)f(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) = h(x, y)g(x, y)\end{aligned}$$

cuando  $h(x, y) \neq 0$  las trayectorias de las soluciones se comportan como las trayectorias de las soluciones de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{7.9}$$

salvo el producto de los signos de cada factor lineal de acuerdo al sector del plano donde se encuentre la condición inicial. Por ejemplo si  $(x_1, y_1)$  se encuentra en un sector comprendido entre dos continuos de equilibrios supongamos las rectas  $a_1x + b_1y = 0$  y  $a_2x + b_2y = 0$ , y este sector los factores  $a_1x + b_1y > 0$  y  $a_2x + b_2y > 0$  entonces las direcciones de las soluciones de (7.9) no se alteran, de igual modo si ambos son negativos. En cambio si estamos en un sector donde alguno de estos factores es negativo y el otro positivo, las direcciones de las soluciones se invierten.

**Ejemplo 22.** *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x + 2y)(3x - y)(5x^2 - 4xy + y^2)(y - x) \\ \dot{y} &= -(x + 2y)(3x - y)(5x^2 - 4xy + y^2)(x + y)\end{aligned}\tag{7.10}$$

entonces las rectas  $h_1(x, y) = x + 2y = 0$  y  $h_2(x, y) = 3x - y = 0$  son dos continuos de equilibrios que pasan por el origen y  $h_3(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2 = 0$  es justamente el origen. Fuera de las rectas  $h_1 = 0$  y  $h_2 = 0$  las trayectorias de las soluciones se comportan como las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= -(x + y)\end{aligned}$$

el cual de los ejemplos anteriores, sabemos que es un foco estable. Por lo que basta con analizar el signo del producto  $h_1(x, y)h_2(x, y)$  el cual queda determinado por

la región del plano donde se localiza la condición inicial. Si  $(\hat{x}, \hat{y})$  se encuentran en el sector comprendido arriba de  $h_1(x, y) = 0$ , donde  $h_1(x, y) > 0$  y arriba de  $h_2(x, y) = 0$  donde  $h_2(x, y) < 0$  entonces el sentido de las soluciones en esa región se invierte, análogamente en el resto de los sectores.

El retrato fase del sistema (7.10) se muestra en la figura (7.3).

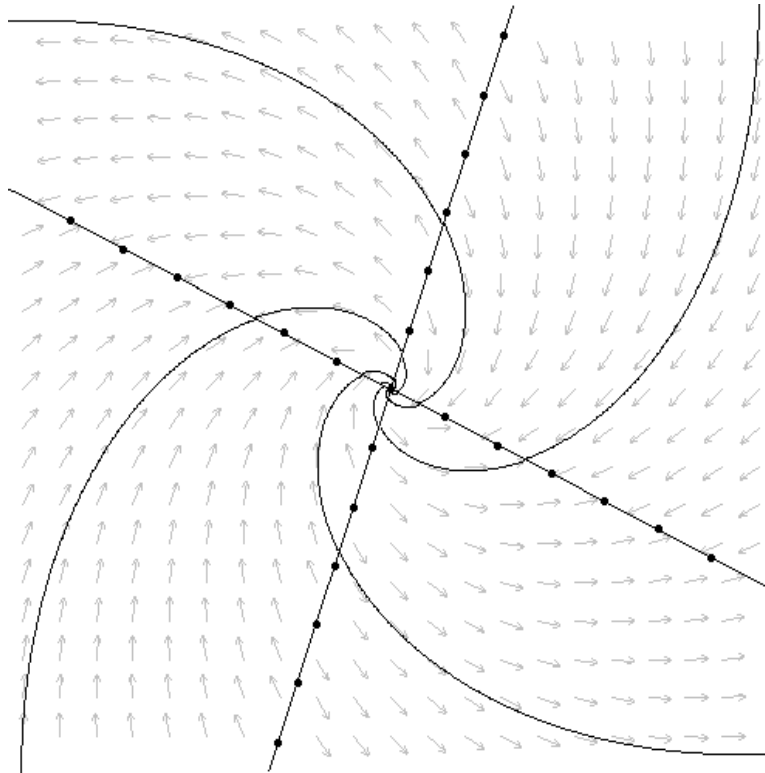


Figura 7.3: Retrato fase del sistema (7.10)

# Apéndice



## Apéndice A

### Factorización de Polinomios Homogéneos

Notemos primero que cualquier polinomio  $p$  es una suma de polinomios homogéneos. Entonces  $p = P_0 + P_1 + \dots + P_n$ , donde  $P_r$  es homogéneo de grado  $r$  con  $0 \leq r \leq n$  y  $n = \text{grado } p$  (algunos  $P_r$  pueden ser iguales a 0. Así que el grado 0 puede ser interpretado como cualquier entero no negativo).

**Teorema 15.** *Un factor de un polinomio homogéneo  $P \neq 0$  es un polinomio homogéneo.*

**Demostración:**

Supongamos que  $P = pq$  donde  $p, q$  son polinomios y  $p$  es no homogéneo.

Luego,

$$\begin{aligned} p &= P_i + \dots + P_m, \text{ donde } 0 \leq i < m \text{ y } P_i, P_m \neq 0, \\ q &= Q_j + \dots + Q_n, \text{ donde } 0 \leq j \leq n \text{ y } Q_j, Q_n \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P = \sum_{i \leq r \leq m, j \leq s \leq n} P_r Q_s \tag{A.1}$$

$P_i Q_j$  y  $P_m Q_n$  son polinomios homogéneos distintos de cero de grados  $i + j$  y  $m + n$  respectivamente. Como  $i + j < m + n$  tenemos entonces al menos dos sumandos con grados distintos, concluimos que  $P$  es no homogéneo, lo cual contradice nuestra hipótesis. ■

**Teorema 16.** *Sea  $P(x_1, x_2)$  un polinomio homogéneo de grado  $n > 0$ . Entonces existen constantes  $c_i, d_i$  tales que*

$$P(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^n (c_i x_1 + d_i x_2) \tag{A.2}$$

Las constantes  $c_i, d_i$  son determinados únicamente por un factor de proporcionalidad.

**Demostración:**

Sea  $P = x_1^r Q$ , donde  $Q$  es homogéneo de grado  $n-r$  y  $x_1 \nmid Q$ . Sea  $Q = \sum_{i=0}^{n-r} a_i x_1^i x_2^{n-r-i}$ . Entonces  $a_0 \neq 0$ , ya que en caso contrario  $x_1 \mid Q$ . Se sigue que  $Q(1, x_2)$  es de grado  $n-r$ , entonces, del Teorema Fundamental del Álgebra

$$Q(1, x_2) = a_0 \prod_{i=1}^{n-r} (x_2 - b_i)$$

para algunas constantes  $b_1, \dots, b_{n-r} \in \mathbb{C}$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= x_1^{n-r} Q\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) \\ &= a_0 x_1^{n-r} \prod_{i=1}^{n-r} \left(\frac{x_2}{x_1} - b_i\right) \\ &= a_0 \prod_{i=1}^{n-r} (x_2 - x_1 b_i) \end{aligned} \tag{A.3}$$

de donde se sigue (A.2).

A continuación, probaremos la unicidad de la factorización (A.2). Renombremos los índices tal que  $d_1, \dots, d_k = 0$  y  $d_{k+1}, \dots, d_n \neq 0$ . Como  $P \neq 0$ , los factores lineales en (A.2) también son distintos de cero. Por lo tanto,  $a := c_1 \dots c_k d_{k+1} \dots d_n \neq 0$ . Por lo que tenemos

$$P = x_1^k Q, \text{ donde } Q(x_1, x_2) = a \prod_{i=k+1}^n \left(x_2 + \frac{c_i}{d_i} x_1\right).$$

Expandiendo el producto para  $Q$ , obtenemos que  $x_2^{n-k}$  aparece en  $Q$ ; por lo tanto  $x_1 \nmid Q$ . Además  $-\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}, \dots, -\frac{c_n}{d_n}$  son las raíces de  $Q(1, x_2)$ , contadas de acuerdo a sus multiplicidades. Se sigue que los pares  $(c_i, d_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , están únicamente determinados por un factor de proporcionalidad. ■

**Corolario 3.** *Sea  $P(x_1, x_2)$  un polinomio homogéneo de grado  $n > 0$ , entonces su factorización real es de la forma*

$$P(x_1, x_2) = a_0 \prod_{i=1}^n (a_i x_2 - b_i x_1) \prod_{i=k+1}^{\frac{n-k}{2}} (|c_i|^2 x_1^2 - 2 \operatorname{Re}(c_i) x_1 x_2 + x_2^2)$$

para algún  $0 \leq k \leq n$ , donde  $a_0, a_i, b_i \in \mathbb{R}$  y  $c_i \in \mathbb{C}$ .

**Demostración:** Por el Teorema 2 tenemos que si  $P = x_1^r Q$ , para algún  $0 \leq r \leq n$ ,

$$P(x_1, x_2) = a_0 x_1^r \prod_{i=r+1}^n (x_2 - d_i x_1)$$

donde  $d_i \in \mathbb{C}$  es una raíz de  $Q(1, \frac{x_2}{x_1})$ . Si  $c_i$  es raíz compleja entonces  $\bar{c}_i$  también lo es, así que los factores  $(x_2 + c_i x_1)$  y  $(x_2 + \bar{c}_i x_1)$  aparecen en la factorización de  $P$ . Haciendo el producto de ambos factores tenemos

$$\begin{aligned} (x_2 - c_i x_1)(x_2 - \bar{c}_i x_1) &= (c_i \bar{c}_i) x^2 - (c_i + \bar{c}_i) x_1 x_2 + x_2^2 \\ &= |c_i|^2 x^2 - 2 \operatorname{Re}(c_i) x_1 x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

■





## Bibliografía

- [1] Carr, J.; *Applications of Center Manifold Theory*, Springer Verlag, 1981.
- [2] Meiss, James D.; *Differential Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, E.U.A, 2007.
- [3] Perko, Lawrence; *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Third Edition, 2001.
- [4] Dumortier, Freddy; Llibre, Jaume; Artés, Joan C.; *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Berlin Heidelberg New York, 2006.
- [5] Arrowsmith, D. R. and Place, C. M.; *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, Gran Bretaña 1990.
- [6] Ecalle, Jean *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Math., Hermann, Paris, 1992
- [7] Rudin, Walter; *Principios del Análisis Matemático*, McGraw Hill, Tercera Edición, 1980.
- [8] Flatto, Leopold; *Poncelet's Theorem*, American Mathematical Society, E.U.A, 2008.
- [9] Newton, Tyre A.; *Two Dimensional Homogeneous Quadratic Differential Systems*, SIAM REVIEW, Vol. 20, No. 1, January 1978.
- [10] Coppel, W. A.; *A Survey of Quadratic Systems*, Journal of Differential Equations 2, 293-304, 1996.