UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Topologías en espacios de operadores lineales

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Anel Margarita Galaviz Cuen

Director de tesis: Dr. Jesús F. Espinoza

Hermosillo, Sonora, México

Noviembre de 2014

SINODALES

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

M.C. Rosalía Guadalupe Hernández Amador
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por todo lo que me ha dado, gracias a Él por permitirme lograr mis metas y todo lo que me he propuesto hasta hoy, tanto en lo personal como profesional, por estar conmigo en todo momento, desde el comienzo de mis estudios hasta hoy. A Él le debo todo lo que soy, ya que sin sus bendiciones no lo hubiera logrado.

Le doy gracias a mi familia, que es el apoyo más importante para mi, gracias a ellos por estar siempre a mi lado, por su cariño y esfuerzos dedicados. Un agradecimiento especial a Francisca Cuen y Jesús Galaviz, mis padres, que son el pilar de lo que soy y de lo que he logrado, por su amor, por brindarme su apoyo, comprensión y dedicación, gracias por sus esfuerzos, por sus consejos y guiar mi camino, mis logros son de ustedes.

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro, por sus enseñanzas, por su apoyo y su paciencia, no solo en la realización de este trabajo, si no también en la licenciatura. Le agradezco por haberme dedicado su tiempo y recibirme siempre con una sonrisa. Es una gran persona, un excelente profesor y un ejemplo a seguir para mi, lo admiro mucho.

Muchas gracias a mis sinodales M.C. Rosalía Guadalupe Hernández Amador, Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa y M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá, por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo, gracias por sus observaciones y correcciones.

Gracias a todos mis profesores y asesores durante la licenciatura, por ayudarme y orientarme durante estos años, son maravillosas personas que forman parte importante de mi formación academica.

Y finalmente quiero mostrar mis agradecimientos a mis amigos y compañeros de clase, por que gracias a su apoyo, a su compañia y sus buenos consejos me han hecho saber que cuento con ustedes, son personas con las que he compartido grandes experiencias en el transcurso de mi vida y carrera.

Índice general

Introducción

El objetivo principal del trabajo es el estudio del espacio $B(\mathcal{H})$, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ y $U(\mathcal{H})$ que son los espacios de operadores acotados, invertibles y unitario, respectivamente y sus topologías, con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, su relación al dotarlos con ciertas topologías y su contractibilidad con las mismas, que se presenta como el teorema de Kuiper, el trabajo de Atiyah-Segal y el trabajo de Dixmier-Douady.

En la primera parte se presentan resultados primordiales para el desarrollo del trabajo, como lo son definiciones y aportaciones de la topología elemental y resultados necesarios del área de análisis funcional. Concluye con elementos del álgebra y algunos resultados de grupo y ejemplos. Se presenta un pequeño acercamiento a los llamados complejos celulares, como algunas propiedades.

En el capítulo dos comienza con la descripción del espacio $B(\mathcal{H})$ y el espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ y sus topologías, algunos ejemplos para el desarrollo del trabajo. Incluye un resultado de Atiyah-Segal [4] que es la contractibilidad del espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ con la topología compacto-abierta y concluye con el teorema de Kiuper [10] en el que se necesitan resultados preliminares de [13] y el artículo [12]. El resultado de la contractibilidad del grupo de operadores acotados fue probado por el holandés Nicoolas Kuiper, para el caso de un espacio de Hilbert separable. El mismo resultado, pero para la topología fuerte de operadores en lugar de la topología de la norma, fue publicado en 1963 por Jacques Dixmier y Adrien Douady. [6]

El trabajo termina con un capítulo relacionado con el espacio de operadores unitarios $U(\mathcal{H})$, comienza con lo que es un grupo topológico, donde se mezclan resultados del álgebra y topología. Se presentan resultados del trabajo Topological properties of the unitary group [7] de como las topologías en el espacio $U(\mathcal{H})$ coinciden y termina con el resultado obtenido de Dixmier-Douady [6], que dice que el espacio $U(\mathcal{H})$ es contraíble con la topología fuerte.

Como resumen se tiene que sobre $B(\mathcal{H})$ existe una norma inducida de manera natural por la norma en $\mathcal{H}$, a saber, $|T| = \sup_{|x|\leq 1} |Tx|$ y la topología inducida por ésta es llamada la topología de la norma. Adicionalmente, se puede dotar a $B(\mathcal{H})$ con otras topologías, tales como la topología fuerte, la débil, la compacto-abierto, y sus correspondientes $*$-topologías.

En el trabajo discutiremos la forma en la que se relacionan tales topologías en $B(\mathcal{H})$, las cuales esquemáticamente podemos representar por el siguiente diagrama conmutativo de funciones identidad

$$\begin{tikzcd}
B(\mathcal{H})_n \arrow[r] & B(\mathcal{H})_{co^*} \arrow[r] \arrow[d] & B(\mathcal{H})_{s^*} \arrow[r] \arrow[d] & B(\mathcal{H})_{w^*} \arrow[d] \\
& B(\mathcal{H})_{co} \arrow[r] & B(\mathcal{H})_s \arrow[r] & B(\mathcal{H})_w
\end{tikzcd}$$

con la propiedad que todas son continuas, pero ninguna es homeomorfismo; presentaremos algunos ejemplos.

Si el diagrama anterior se restringe al subconjunto de operadores unitarios $U(\mathcal{H})$ entonces cada una de las funciones identidad es un homeomorfismo. Mostraremos explícitamente este hecho en un lema para el caso de la topología fuerte y la topología compacto-abierto sobre $U(\mathcal{H})$. Lema que se utiliza para mostrar el teorema principal en el capítulo 3 que nos dice cuales topologías coinciden en el espacio $U(\mathcal{H})$, concluyendo que podemos restringirnos a la topología de la norma y la fuerte. El grupo $U(\mathcal{H})$ dotado con la topología de la norma es un grupo topológico, resultado que se prueba adelante, y es el ejemplo típico de lo que se conoce como un grupo de Lie de Banach.

Un resultado final se presenta como la contractibilidad del espacio $U(\mathcal{H})$, para ello se maneja el concepto de retracto por deformación fuerte y usando el teorema de Kuiper, se obtiene que el espacio $U(\mathcal{H})$ es contráctil, para $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable e infinito dimensional. Por último se presenta un trabajo de Dixmier-Douady [6], que nos dice que el espacio $U(\mathcal{H})$ es contraíble a un punto con la topología fuerte.

Capítulo 1

Elementos de topología y álgebra

1.1. Preliminares topológicos

Una **topología** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\varnothing$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$.
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama **espacio topológico**. A continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.1. Si X es un conjunto arbitrario, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X. El conjunto compuesto únicamente por X y $\varnothing$ también es una topología sobre X.

Ejemplo 1.1.2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es finito o es todo X, entonces $\mathcal{T}$ es una topología sobre X, llamada topología de los complementos finitos.

Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, se define la topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{B}$ de la siguiente manera: un subconjunto U de X se dice que es un abierto de X, si para cada $x \in X$ existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Una sub-base $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por la sub-base $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Entonces $\mathcal{B}$ satisface ambas condiciones para una base, se puede ver que para la segunda condición si tenemos un punto del plano en la intersección de dos regiones circulares, existe siempre otra región circular contenida en la intersección y que contiene al punto. Si $\mathcal{B}$ consiste de regiones rectangulares, también se satisfacen las dos condiciones para una base.

Recordemos que una **métrica** en un conjunto X es una función

$$m : X \times X \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. $m(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$ la igualdad se cumple si, y sólo si, $x = y$.
2. $m(x,y) = m(y,x)$ para todos $x, y \in X$.
3. $m(x,y) + m(y,z) \geq m(x,z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Dada una métrica m en X, el número $m(x,y)$ se llama la distancia entre x e y en la métrica m. Luego, si m es una métrica en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_m(x,\epsilon)$ de radio ϵ, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada la **topología métrica** inducida por m.

Ejemplo 1.1.4. Sea X el conjunto de las sucesiones de números reales o complejos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

para un número fijo $p \geq 1$. Definimos la distancia entre $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Es sencillo probar que esta función satisface los primeros dos axiomas para una métrica. De acuerdo con la desigualdad de Minkowski [3] , para todo n se cumple que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

además las series $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p$ y $\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p$ convergen, por lo tanto obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Esto demuestra que la distancia tiene sentido para cualquier par de sucesiones. Además, muestra que se satisface el tercer axioma para una métrica. Denotamos por l^p el espacio de todas las sucesiones de números complejos con la métrica d_p. Será de particular importancia el espacio l^2 para el resto de este trabajo.

De esta manera la topología métrica en l^2 inducida por d_2 es la generada por los elementos básicos de la forma $B_{d_2}(x,\epsilon)$.

Definición 1.1.5. *Si x es un elemento del espacio topológico X, un subconjunto V de X es una vecindad de x en el espacio X si podemos encontrar un abierto A que satisfaga $x \in A \subseteq V$. Se llama sistema de vecindades del punto x a la colección de vecindades de x en X y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$*

Como consecuencia inmeditada se sigue que un subconjunto abierto no vacío es vecindad de cada uno de sus puntos.

Para un punto x en un espacio topológico X, una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ es una base de vecindades de x en X si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ podemos encontrar $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq V$. En particular la colección de subconjuntos abiertos de X que contienen a x forma una base de vecindades de x.

Sea X un espacio topológico con la topología $\mathcal{T}$. Si Y es un subconjunto de X, la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre Y, llamada topología relativa, y si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces la colección

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología relativa sobre Y.

Ejemplo 1.1.6. Sea $\mathbb{R}^2$ con la topología de la métrica euclidiana ($\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$), entonces podemos inducir una topología en $\mathbb{R}$ ($\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) como $\mathbb{R} \cap B_m(x,r)$ donde $x \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, donde $B_m(x,r)$ son los elementos básicos de la topología $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$, que generan conjuntos de la forma $(a,b) \subset \mathbb{R}$, conjuntos básicos para la topología en $\mathbb{R}$. También notamos que $\mathbb{R} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ y $\varnothing \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ya que $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \cap \varnothing = \varnothing$ donde $\mathbb{R}^2 \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ y $\varnothing \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$.

Definición 1.1.7. *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que cubre a X, o que es una cubierta de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X si es una cubierta de X formado por conjuntos abiertos de X.*

Definición 1.1.8. *Un espacio X se dice que es compacto si de cada cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita de elementos de la cubierta que también cubre X.*

Ejemplo 1.1.9. El subconjunto $(0,1) \subset \mathbb{R}$ no es un subconjunto compacto con la topología usual de $\mathbb{R}$ ya que si tomamos una cubierta abierta de la forma $\{(0,1-1/n)\}_{n>1}$ dada cualquier subfamilia finita existe un intervalo $(0,1-1/k)$ que contiene a los demás, como $1-\frac{1}{p}$ no está si $p > k$, ninguna subfamilia finita cubre a $(0,1)$.

Tenemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado es compacto, por el teorema de Heire-Borel [2], un ejemplo de un subconjunto compacto en $\mathbb{R}$ es el que se presenta a continuación.

Ejemplo 1.1.10. Tenemos que $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto compacto con la toplogía usual de $\mathbb{R}$, ya que es cerrado y acotado con esa topología, y por el teorema de Heire-Borel, es compacto.

Un refinamiento de una cubierta C de X es un nuevo recubrimiento D de X tal que todo conjunto de D esté contenido en algún conjunto de C, es decir, si $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ es un refinamiento de una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ entonces para todo $\beta \in B$ existe un $\alpha \in A$ tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$. A continuación se presentan definiciones importantes para el desarrollo del trabajo.

Definición 1.1.11. *Un espacio es separable si contiene un subconjunto denso y numerable, es decir X es separable si existe $D \subseteq X$ numerable tal que la cerradura de D es igual al conjunto X.*

Definición 1.1.12. *Un espacio paracompacto es un espacio topológico en que toda cubierta abierta admite un refinamiento localmente finito, es decir, si todo punto del espacio tiene una vecindad que intersecta sólo a un número finito de abiertos del refinamiento.*

Definición 1.1.13. *Se dice que dos puntos x, y de X satisfacen la propiedad de Hausdorff si existen dos vecindades U_x y U_y de x y y, respectivamente, tales que $U_x \cap U_y = \varnothing$. Se dice que un espacio topológico es Hausdorff si todo par de puntos distintos del espacio satisfacen la propiedad de Hausdorff.*

Para X un espacio topológico Hausdorff le asociamos un espacio compacto generado $k(X)$, donde el espacio $k(X)$ es el conjunto X cuya topología es definida sobre los conjuntos cerrados de la siguiente manera: un conjunto en $k(X)$ es cerrado si su interesección con cada conjunto compacto en X es cerrado. Sabemos que la función identidad $k(X) \to X$ es continua, que $k(X)$ es compacto generado, que $k(X)$ y X tienen los mismos conjuntos compactos y que $X = k(X)$ siempre que X es compacto generado.

Definición 1.1.14. *Una separación de un espacio topológico X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación, esto es, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.*

Ejemplo 1.1.15. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo. De hecho, los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos que constan de un solo punto; si Y es un subespacio de $\mathbb{Q}$ conteniendo dos puntos p y q, es posible elegir un número irracional a entre p y q, y escribir Y como la unión de los abiertos

$$(-\infty, a) \cap Y \quad y \quad (a, +\infty) \cap Y.$$

Definición 1.1.16. *Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.*

Ejemplo 1.1.17. Se define una topología llamada la topología del límite inferior en el espacio $\mathbb{R}$, que está generada por la base $\beta = \{[a,b) : a < b\}$ donde a, b son números reales. Denotamos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales con su topología usual, y por $\mathbb{R}_l$ a los reales con la topología del límite inferior, sea

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$$

la función identidad $f(x) = x$ para cada número real x. Entonces f no es una función continua, ya que, la imagen inversa del conjunto abierto $[a,b)$ de $\mathbb{R}_l$ nos da el mismo conjunto, que no es abierto en $\mathbb{R}$. Por otro lado, la función identidad

$$g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$$

si es continua, ya que la imagen inversa de (a,b) nos da el mismo conjunto, que es abierto en $\mathbb{R}_l$ ya que tenemos a $(a,b) = \bigcup_{n>N}[a+\frac{1}{n}, b]$.

Proposición 1.1.18. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*
4. *Para cada $x \in X$ y para cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.*

La prueba puede encontrarse en [11], p. 104.

Sean (X,d) y (Y,d') dos espacios métricos. Definimos el conjunto $C(X,Y)$ como el conjunto de funciones continuas y acotadas de X a Y. El conjunto $C(X,Y)$ se puede metrizar a través de la función

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)).$$

Esta función está bien definida, ya que f y g son funciones acotadas.

Definición 1.1.19. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$, tenemos que f es un homeomorfismo si es una biyección continua y si la función inversa*

$$f^{-1} : Y \to X$$

es continua.

Ejemplo 1.1.20. Si tomamos la función f tal que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{+} \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

tenemos que f es un homeomorfismo, ya que es una función continua, biyectiva y con inversa continua:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{+} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Definición 1.1.21. *Si f_1 y f_2 son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f_1 es homotópica a f_2 si existe una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ tal que*

$$F(x,0) = f_1(x) \quad y \quad F(x,1) = f_2(x)$$

para cada $x \in X$, donde $I = [0,1]$. La aplicación F se conoce como una ***homotopía*** *entre f_1 y f_2. Si f_1 es homotópica a f_2, escribimos $f_1 \simeq f_2$. Si $f_1 \simeq f_2$ y f_2 es una aplicación constante, decimos que f es homotópicamente nula.*

Es sencillo ver que $\simeq$ es una relación de equivalencia:

- $f \simeq f$, ya que podemos tomar la homotopía

$$\begin{aligned} h : [0,1] \times X &\to Y \\ (t,x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Si $f \simeq g$ entonces $g \simeq f$. Como $f \simeq g$, entonces existe una homotopía $h : [0,1] \times X \to Y$ tal que $h(0,x) = f(x)$ y $h(1,x) = g(x)$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \bar{h} : [0,1] \times X &\to Y \\ (t,x) &\mapsto h(1-t,x) \end{aligned}$$

- Si $f \simeq g$ y $g \simeq k$, entonces $f \simeq k$. Como $f \simeq g$ entonces existe una homotopía $h_1 : [0,1] \times X \to Y$ tal que $h_1(0,x) = f(x)$ y $h_1(1,x) = g(x)$. Luego, como $g \simeq k$, existe una homotopía $h_2 : [0,1] \times X \to Y$ tal que $h_2(0,x) = g(x)$ y $h_2(1,x) = k(x)$. Para mostrar que $f \simeq k$, basta considerar la siguiente homotopía

$$\bar{h}(t,x) = \begin{cases} h_1(2t,x) & t \in [0,1/2] \\ h_2(2t-1,x) & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Como notación definiremos el espacio cociente $C(X,Y)/\simeq$ como $[X,Y]$, donde $\simeq$ es la relación de equivalencia de homotopía definida anteriormente. Aquí las clases $[f] \in [X,Y]$ son de la forma $[f] = \{g : X \to Y \,|\, g \simeq f\}$, por lo tanto hablamos de las clases de homotopía.

Ejemplo 1.1.22. Tenemos que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \simeq cte_{\mathbb{R}^n}$ ya que si tomamos $cte_{\mathbb{R}^n} = 0$ y tomamos la siguiente aplicación continua

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t,x) & \mapsto & tx \end{array}$$

es una homotopía ya que

$$F(0,x) = 0 \cdot x = cte_{\mathbb{R}^n} \quad y \quad F(1,x) = 1 \cdot x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x)$$

Decimos que $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$. Se dice entonces que los espacios X e Y son **homotópicamente equivalentes**.

Ejemplo 1.1.23. Se tiene que el conjunto $\mathbb{R}^n$ y el conjunto puntual $\{*\}$ son homotópicamente equivalentes. Ya que si consideramos

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \{*\} \\ x & \mapsto & * \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} g : \{*\} & \to & \mathbb{R}^n \\ * & \mapsto & 0 \end{array}$$

se sigue que

$$f \circ g \simeq \mathrm{Id}_* \quad y \quad g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

por el ejemplo anterior.

Se dice que X es **contraíble**, si es homotópicamente equivalente a un punto.

Algunos ejemplos de espacios contraíbles son los siguientes:

- El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.
- El n-disco cerrado $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq 1\}$.
- El n-disco abierto $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| < 1\}$.
- Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

Sea $A \subset X$ un subespacio. Un **retracto** es una función continua

$$r : X \to A$$

tal que $r|_A(x) = x$. Equivalentemente, si $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión, entonces $r : X \to A$ es un retracto si $r \circ i = \mathrm{Id}_A$.

Un **retracto por deformación** de X a un subespacio $A \subset X$ es una homotopía $F : [0,1] \times X \to X$ de la función identidad en X a un retracto de X en A. Si además, $F(t,x) = x$ para todo $x \in A$, entonces decimos que F es un **retracto por deformación fuerte**.

Si X es un conjunto y $\simeq$ una relación de equivalencia, entonces las clases de equivalencia forman una partición del conjunto X. Las clases de equivalencia de la relación integran entre sí un nuevo conjunto, denominado conjunto cociente y lo denotado por $X/\simeq$.

Si X es un espacio topológico y $\rho : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces es posible inducir una topología τ en Y a partir de la topología de X de la siguiente manera: A es un conjunto abierto en la topología de Y si $\rho^{-1}(A)$ es un conjunto abierto del espacio topológico X. La topología de Y se denomina topología cociente inducida por ρ.

Ahora, considérese una partición X' de X en clases disjuntas (es decir, considérese una relación de equivalencia). La función $\rho : X \to X'$ que asigna cada punto de X a la clase de equivalencia que lo contiene es una funciónn suprayectica.

El espacio X' con la topología cociente inducida por ρ se denomina **espacio cociente** de X (inducido por la relación de equivalencia).

1.1.1. Complejos celulares

Un complejo celular es un espacio topológico X construido de la siguiente manera:

1. Empezamos con un conjunto discreto X^0, cuyos elementos son llamados 0-celdas de X.

2. Inductivamente, formamos el n-ésimo esqueleto X^n a partir de X^{n-1} uniendo n-celdas e^n_α mediante funciones de pegado $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$. Esto significa que X^n es el espacio cociente de $X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha$ respecto a la identificación $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D^n_\alpha$. La celda e^n_α es homeomorfa a la imagen de $D^n_\alpha - \partial D^n_\alpha$ bajo φ, en el espacio cociente.

3. $X = \bigcup_n X^n$ con la topología débil: Un conjunto $A \subset X$ es abierto (o cerrado) si, y sólo si $A \cap X^n$ es abierto (o cerrado) para cada n.

Notemos que la condición 3 no es necesaria cuando X es de dimensión finita, así que $X = X^n$ para algún n. Si A es abierto en $X = X^n$, la definición de la topología cociente en X^n implica que $A \cap X^{n-1}$ es abierto en X^{n-1}, y entonces por el mismo razonamiento $A \cap X^{n-2}$ es abierto en X^{n-2}, y similarmente para todo esqueleto X^{n-i}.

Cada celda e^n_α tiene una función característica Φ_α, que es, por definición la composición,

$$D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha \to X^n \hookrightarrow X.$$

Esta es continua por ser la composición de funciones continuas; la inclusión $X^n \hookrightarrow X$ es continua por (3). La restricción de Φ_α al interior de D^n_α es un homemorfismo sobre e^n_α.

Una manera alternativa de describir la topología en X es decir que el conjunto $A \subset X$ es abierto (o cerrado) si, y sólo si, $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ es abierto (o cerrado) en D^n_α para cada función característica Φ_α. En un sentido esto se sigue de la continuidad de las

Φ_α, y en el otro, supone que $\Phi_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en D_α^n para cada Φ_α, y supone por inducción en n que $A \cap X^{n-1}$ es abierto en D_α^n para todo α, $A \cap X^n$ es abierto en X^n por la definición de la topología cociente en X^n. Por lo tanto, por (3), A es abierto en X.

Una consecuencia de esta caracterización de la topología en X es que X es un espacio cociente de $\bigsqcup_{n,\alpha} D_\alpha^n$.

Un subcomplejo de un complejo celular X es un subespacio $A \subset X$ que es una unión de celdas de X, tal que la cerradura de cada celda en A está contenida en A. Entonces para cada celda en A, la imagen de su función de pegado está contenida en A, así A es también un complejo celular. La topología en el complejo celular es la misma que la topología inducida de X, como se ve por inducción que las dos topologías coinciden en $A^n = A \cap X^n$. Es fácil ver, por inducción sobre el esqueleto, que un subcomplejo celular es un subespacio cerrado. Recíprocamente, un subcomplejo se puede definir como un subespacio cerrado, que es unión de celdas.

Es usual en la literatura encontrar los complejos celulares con el nombre de complejos CW que en la lengua inglesa hacen referencia a las siguientes propiedades:

1. Closure-finiteness: La cerradura de cada celda se intersecta con una cantidad finita de otras celdas.

2. Weak topology(Topología débil): Un conjunto es cerrado si y sólo si se intersecta con la cerradura de cada celula en un conjunto cerrado.

Un ejemplo clásico es la esfera $\mathbb{S}^n$ que siempre admite una estructura de complejo celular de la siguiente forma, el 0-esqueleto es un punto; luego, pegamos un disco de dimensión n identificando todo el borde a dicho punto. Esta estructura de complejo celular es muy útil, pero existe otra manera de ver la esfera $\mathbb{S}^n$ en la que podemos construir la esfera $\mathbb{S}^\infty$, que es un buen ejemplo de un complejo celular de dimensión infinita. Para ello construimos $\mathbb{S}^0$ como dos puntos, y construimos apartir de $\mathbb{S}^{n-1}$ la esfera $\mathbb{S}^n$ pegando dos celdas de dimensión n a $\mathbb{S}^{n-1}$ con una función $\partial D_n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Esto permite construir inductivamente un complejo celular $\mathbb{S}^\infty$ tal que su esqueleto X^n es una esfera de dimensión n.

Dada una sucesión de encajes cerrados, esto es, de funciones que son homeomorfismos a su imagen y a su vez cerrados,

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, hook, "f_{21}"] & X_2 \arrow[r, hook, "f_{32}"] & X_3 \arrow[r, hook, "f_{43}"] & \dots \end{tikzcd}$$

su colím (o límite directo) es un espacio topológico denotado por colím X_i (algunos autores también lo denotan por X_∞) junto con una familia de funciones continuas $f_i : X_i \to$ colím X_i tales que $f_k \circ f_{ki} = f_i : X_i \to$ colím X_i, donde $f_{ki} = f_{k,k-1} \circ \ldots \circ f_{i+1,i} : X_i \to X_k$, $k > i$, y el cual tiene la siguiente propiedad universal: Si $\{\phi_i : X_i \to Y | i \geq 1\}$ es una familia de funciones continuas tales que $\phi_{i+1} \circ f_{i+1,i} = \phi_i : X_i \to Y$ para todo $i \geq 1$, o equivalentemente, $\phi_k \circ f_{ki} = \phi_i : X_i \to Y$ para todos $k > i \geq 1$, entonces existe una única función continua $\phi :$ colím $X_i \to Y$ tal que $\phi \circ f_i = \phi_i$.

Podemos resumir la propiedad anterior en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ki}"] \arrow[dr, "f_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\phi_i"'] & & X_k \arrow[dl, "f_k"] \arrow[ddl, bend left, "\phi_k"] \\ & \text{colím } X_i \arrow[d, dotted, "\phi"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

El espacio colím X_i puede ser definido como el espacio cociente

$$\text{colím } X_i = (\bigsqcup X_i)/\sim$$

mediante la siguiente relación: para $x \in X_i$, $x \sim f_{i+1,i}(x) \in X_{i+1}$, para todo i. Las funciones $f_i : X_i \to$ colím X_i son definidas como la composición de la inclusión canónica en la unión ajena y la proyección en el cociente, esto es,

$$f_i : X_i \hookrightarrow \bigsqcup X_i \to \text{colím } X_i.$$

Ejemplo 1.1.24. Identificando $\mathbb{R}^n$ con el subespacio cerrado $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tenemos que

$$\mathbb{R}^\infty = \text{colím } \mathbb{R}^n \cong \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n$$

el cual está dotado con la topología débil. Así, $\mathbb{R}^\infty$ consiste de sucesiones infinitas de números reales $(x_1, x_2, \dots)$ con todas sus coordenadas cero, excepto un número finito, es decir, $x_k = 0$ para k suficientemente grande. Se puede identificar $\mathbb{R}^n$ con el subespacio $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

La topología de $\mathbb{R}^\infty$ es tal que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^\infty$ es cerrado si, y sólo si, $A \cap \mathbb{R}^n$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para todo n.

Definición 1.1.25. *Un espacio Y está dominado por un espacio X si existen funciones continuas*

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} Y$$

tales que $r \circ i \simeq \mathrm{Id}_Y$.

Proposición 1.1.26. *Un espacio dominado por un complejo celular es homotópicamente equivalente a un complejo celular.*

La demostración se puede ver en [8].

1.2. Preliminares algebraicos

Sea G un conjunto no vacío y $* : G \times G \to G$ una operación binaria y cerrada. Decimos que $(G, *)$ es un grupo si satisface las siguientes propiedades:

1. Asociatividad: Para a, b, $c \in G$ tenemos que $a * (b * c) = (a * b) * c$.

2. Elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$, para todo $g \in G$.

3. Existencia de inversos: Para cada $g \in G$, existe $h \in G$ tal que $g * h = h * g = e$, denotamos a h por g^{-1}.

Algunos ejemplos de grupos son los siguientes:

- El conjunto de los números reales respecto a la suma, este grupo se denota por $(\mathbb{R}, +)$.

- El conjunto de los números enteros con la operación suma, este grupo se denota por $(\mathbb{Z}, +)$.

- El conjunto de los números racionales con la operación suma, este grupo se denota por $(\mathbb{Q}, +)$.

- El conjunto $\mathrm{Sim}(X) = \{f : X \to X | f$ es biyectiva $\}$ con la operación composición. (Notamos que la función identidad es el elemento neutro y f^{-1} existe debido a que la función f es biyectiva.)

- El conjunto de los números reales sin el 0, respecto al producto; este grupo se denota por $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

- El grupo de permutaciones. Definimos los conjuntos

$$B_n = \{1, ..., n\} \quad y \quad S_n = \{\sigma : B_n \to B_n : \ \sigma \ \text{ es biyectiva } \}.$$

  S_n con la composición de funciones es un grupo.

Dado un grupo G con una operación binaria $*$, se dice que un subconjunto no vacío H de G es un **subgrupo** de G, si H también forma un grupo con la operación $*$.

Lema 1.2.1. *Un subconjunto no vacío H del grupo G es un subgrupo de G si, y sólo si, se satisfacen las siguientes propiedades*

(1) $a, b \in H$ implica que $ab \in H$

(2) $a \in H$ implica que $a^{-1} \in H$

Demostración. Si H es un subgrupo de G, entonces es claro que (1) y (2) deben cumplirse.

Ahora supongamos que H es subconjunto de G en el que se cumplen (1) y (2). Para verificar que H es un subgrupo falta probar que $e \in H$ y que cumple la asociatividad. Como la asociatividad es válida para G entonces también es válida para H. Si $a \in H$ según (2), $a^{-1} \in H$, despues usando (1) obtenemos que $e = aa^{-1}$, y con eso se completa la prueba. ■

Dados dos grupos $(G, \circ)$ y $(H, *)$ la aplicación $\varphi : G \to H$ es un **homomorfismo de grupos** si se verifica que para todos los pares de elementos $a, b \in G$

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b).$$

es decir, un homomorfismo de grupos es una función entre grupos que preserva la operación binaria.

A continuación presentaremos algunos tipos de homomorfismos y su nomenclatura:

- Epimorfismo: homomorfismo sobreyectivo.
- Monomorfismo: homomorfismo inyectivo.
- Isomorfismo: homomorfismo biyectivo.
- Automorfismo: isomorfismo de un grupo en sí mismo.
- Endomorfismo: homomorfismo de un grupo en sí mismo.

Ejemplo 1.2.2. Si X es un espacio topológico, entonces $\text{Homeo}(X) < \text{Sim}(X)$. Con la operación composición tenemos que es una operación cerrada ya que la composición de dos funciones continuas y biyectivas da como resultado una función en el conjunto de $\text{Homeo}(X)$, también se cumple la asociatividad. Además la función identidad es un homeomorfismo de X en X, ya que es continua, biyectiva y con inversa continua. Por último tenemos que para cada $f \in \text{Homeo}(X)$ existe una función inversa f^{-1}, gracias a que f es biyectiva, que satisface $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Ejemplo 1.2.3. Si tenemos $(G, \cdot_G)$ y $(H, \cdot_H)$ dos grupos y $\phi : G \to H$ es un homomorfismo, entonces $\text{Ker}(\phi) < G$ y $\text{Im}(\phi) < H$ donde $\text{Ker}(\phi) = \{x \in G | \, \phi(x) = 1_H\}$ e $\text{Im}(\phi) = \{h \in H | \, existe \, g \in G, \, \phi(g) = h\}$.

Ejemplo 1.2.4. Sea $Z(G) = \{z \in G | \, z \cdot g = g \cdot z \text{ para todo } g \in G\}$ definido como el centro de G, donde $(G, \cdot)$ es un grupo, entonces tenemos que $Z(G) < G$. Notemos que el elemento neutro es un elemento del centro. Si $a, b \in Z(G)$ y tomamos $g \in G$ arbitrarios se cumple que

$$(a \cdot b) \cdot g = a \cdot (b \cdot g) = a \cdot (g \cdot b) = (a \cdot g) \cdot b = (g \cdot a) \cdot b = g \cdot (a \cdot b)$$

es decir, $a \cdot b \in Z(G)$. Ahora bien si tomamos $a \in Z(G)$ y $g \in G$ entonces $a \cdot g = g \cdot a$, luego si multiplicamos por el elemento a^{-1} por la derecha y por la izquierda obtenemos que $a^{-1} \cdot g = g \cdot a^{-1}$ para todo $g \in G$ por lo tanto $a^{-1} \in Z(G)$.

Ejemplo 1.2.5. Sean $n \geq 2$ un entero y $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se define

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : \ A \, \text{es invertible}\}.$$

El conjunto $GL(n, \mathbb{K})$, con la operación de multiplicación de matrices es un grupo. En efecto, ya que la multiplicación de matrices es asociativa en $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, es asociativa en $GL(n, \mathbb{K})$. Tenemos elemento neutro en $GL(n, \mathbb{K})$, que es dado por la matriz identidad $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Por último sabemos que toda matriz $A \in GL(n, \mathbb{K})$ tiene un inverso, y este es igual a la matriz A^{-1}.

1.3. Preliminares de análisis funcional

Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Si $K = \mathbb{R}$, un producto escalar en V sobre $\mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica definida positivamente. Si $K = \mathbb{C}$, un producto escalar en V sobre $\mathbb{C}$ es una forma hermitiana definida positivamente (i.e. tal que $f(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$). Es decir, si V es un espacio vectorial real o complejo, la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow K$ tal que

(a) $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, v \rangle = \lambda \langle v_1, v \rangle + \mu \langle v_2, v \rangle$

(b) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

(c) $\langle v, v \rangle > 0$ si $v \neq 0$

se llama producto escalar, también se le conoce como producto interior. Un espacio vectorial que posee un producto escalar se llama *espacio con producto escalar*. Si el producto escalar es sobre $\mathbb{R}$, al espacio vectorial se le llama espacio euclidiano y si el campo es $\mathbb{C}$, se llama espacio unitario.

Ejemplos de espacios con producto interior:

- Sea $\langle \quad , \quad \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ donde se define el producto escalar euclideano en $\mathbb{R}^n$ del siguiente modo:

  $$\langle x, y \rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

  Es un producto escalar en $V = \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.

- Sea $\langle\ \ ,\ \ \rangle : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_m\overline{y_m}$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}^m$, es un producto escalar en $V = \mathbb{C}^m$ sobre $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.1. *Sea V un espacio con producto escalar. Un operador $\rho : V \longrightarrow V$ posee un operador adjunto ρ^* en V si se cumple que*

$$\langle \rho(v), u\rangle = \langle v, \rho^*(u)\rangle.$$

Teorema 1.3.2. *Para cualquier operador lineal T en un espacio con producto interno de dimensión finita existe un único operador lineal adjunto T^* sobre V.*

La prueba se encuentra en [9], p. 290.

A continuación se muestra un ejemplo de un espacio con producto interior con un operador y su operador adjunto.

Ejemplo 1.3.3. Sea $\rho : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dado por la matriz A asociada a ρ respecto a la base canónica, tenemos que $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$ entonces la matriz asociada a ρ^* es $A^* = \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$. Sea $u = u_1 + iu_2, \tilde{u} = \tilde{u_1} + i\tilde{u_2}, v = v_1 + iv_2, \tilde{v} = \tilde{v_1} + i\tilde{v_2} \in \mathbb{C}^2$. Como es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y dotado de un producto escalar, se cumple que:

$$\langle \rho((u, \tilde{u})^T), (v, \tilde{v})\rangle = \langle (u, \tilde{u}), \rho^*((v, \tilde{v})^T)\rangle$$

donde $\rho(u, \tilde{u}) = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} u \\ \tilde{u} \end{smallmatrix}\right)$ y $\rho^*(v, v') = \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} v \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right)$

Definición 1.3.4. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo tal que con un producto escalar y que es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge, esto es, $\|x_m - x_n\| \to 0$ implica que existe un elemento x tal que $\|x_n - x\| \to 0$.*

El ejemplo más conocido de un espacio de Hilbert es el espacio l^2 como a continuación se demuestra.

Teorema 1.3.5. *El espacio l^2 ($l^2(\mathbb{C}^2)$) es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.*

Demostración. Primero demostraremos que $l^2 = \{(x_n) \subset \mathbb{C} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i \mid^2 < \infty\}$ es un espacio de Hilbert, es decir, un espacio con producto interior que es completo con respecto a la norma definida por el producto interior. Dotamos al espacio l^2 con el siguiente producto escalar $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \overline{y_i}$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots)$ en l^2 y definimos la norma de un vector como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Por lo tanto tomamos $x_k^n = (x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots)$ una sucesión de Cauchy en l^2. Para cada $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^m - x^n\|^2 = \sum_{k=1}^{j} |x^n - x^m|^2 < \epsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq K$$

tenemos que $x^n = (\lambda_k^n)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$|\lambda_k^m - \lambda_k^n|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^m - \lambda_j^n|^2 = \|x^m - x^n\|^2$$

mostrando que la sucesión $\lambda_k^1, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \ldots$ de k's componentes es de Cauchy. Donde los números complejos son completos, entonces $\lambda_k^n \to \lambda_k$ cuando $n \to \infty$. Ahora probaremos que $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$, y que x^n converge a $x = (\lambda_k)$.

Dado $\epsilon > 0$, sea $P > 0$ tal que $\|x^m - x^n\|^2 \leq \epsilon$ cuando $m, n > p$. Fijando cualquier entero r, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{r} |\lambda_k^m - \lambda_k^n|^2 \leq \|x^m - x^n\|^2 \leq \epsilon,$$

con $m, n \geq p$; cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{r} |\lambda_k - \lambda_k^n|^2 \leq \epsilon$$

y como r es arbitrario podemos tomar

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_k^n|^2 \leq \epsilon, \qquad \text{cuando } n \geq p. \tag{1.1}$$

En particular, $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_k^p|^2 \leq \epsilon$, donde las sucesiones $(\lambda_k - \lambda_k^p)$ y (λ_k^p) pertenecen al espacio l^2, y como podemos ver a $\lambda_k = (\lambda_k - \lambda_k^p) + (\lambda_k^p)$, tenemos por consiguiente que $x = (\lambda_k)$ es un elemento de l^2. Por último, de (1.1) tenemos que $\|x - x^n\|^2 \leq \epsilon$ cuando $n \geq p$, entonces $x^n \to x$. Para demostrar que es un espacio separable se toma $x_k \in l^2$, por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ con $x_k = (x_1, x_2, \ldots)$. Ahora consideramos los elementos $p_j + iq_j \longrightarrow x_j \quad con \quad p_j, q_j \in \mathbb{Q}$, donde la convergencia se obtiene gracias a que $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$, por lo tanto tomando $r_k = (p_1 + iq_1, p_2 + iq_2, \ldots, p_j + iq_j, \ldots)$, sabemos que va a converger a x_k entrada por entrada, por lo tanto el conjunto $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ es un conjunto denso y numerable en l^2.

Para demostrar que es de dimensión infinita basta con tomar el siguiente conjunto linealmente independiente de elementos en l^2: $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde e_k es una sucesión de ceros excepto en la k-ésima entrada donde es 1, que claramente forma una base para el espacio. ■

En el desarrollo del trabajo se necesitará un espacio de Hilbert muy importante en el análisis, que es el espacio $\mathrm{L}^2([0,1])$, que son las funciones Lebesgue integrables en el $[0,1]$, para ello se necesita la definición de un espacio de medida.

En un conjunto X una σ-álgebra es una familia de subconjuntos que satisface las siguientes propiedades:

1. X y $\varnothing$ son elementos de la familia de subconjuntos $\mathcal{F}$.
2. Si tenemos un elemento A en $\mathcal{F}$, entonces también se encuentra el elemento $\bar{A} = X \setminus A$.
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ son elementos en $\mathcal{F}$, entonces la unión de ellos también es un elemento de $\mathcal{F}$.

Un **espacio de medida** es un conjunto para el que se ha definido una σ-álgebra de conjuntos medibles y una función medida concreta que asigna un valor real o medida a cada elemento de la σ-álgebra.

Con la definición anterior, tenemos que una función de un espacio de medida a otro es medible si la imagen de un conjunto medible también es un conjunto medible en el dominio.

Finalmente, podemos definir el espacio $\mathrm{L}^p([0,1])$ en un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, donde $\mathcal{F}$ representa la σ-álgebra de X, que es la familia de conjuntos medibles, y μ

la medida en X, de la siguiente manera:

$$\mathrm{L}^p([0,1]) = \{[f] | \int_0^1 |f|^p d\mu < \infty\}.$$

con $1 \leq p \leq \infty$, y $[f]$ es las clases de funciones definidas con la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \quad \text{si, y sólo si,} \quad \mu\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

En el capítulo 2 se usa el espacio $\mathrm{L}^p([0,1])$ para $p = 2$.

Como se presentó para el caso l^2, también tenemos que el espacio $\mathrm{L}^p([0,1])$ es un espacio de Hilbert con el siguiente producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

y donde el espacio $\mathrm{L}^p([0,1])$ es normado, con

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$$

donde definimos la siguiente métrica

$$d_p(f,g) = \|f - g\|_p$$

para $f, g \in \mathrm{L}^p([0,1])$.

Proposición 1.3.6. *Sea $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal entre dos espacios de Hilbert, son equivalentes:*

a) T es continuo;

b) T es continuo en $x = 0$;

c) T es acotado, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C|x|$.

Donde $\|.\|$ es la norma asociada al producto escalar en $\mathcal{H}_2$ y $|.|$ es la norma asociada al producto escalaren $\mathcal{H}_1$.

A continuación tenemos el siguiente teorema en el espacio $\mathrm{L}^p([0,1])$, que es de gran importancia.

Teorema 1.3.7. *Para* $1 \leq p < \infty$ *el espacio* $(\mathrm{L}^p([0,1]), d_p(.,.))$ *es completo.*

La demostración se puede ver en [3], p. 91.

Por último, tenemos que un espacio es de **Banach** si es un espacio vectorial normado completo. Esto quiere decir que, un espacio de Banach es un espacio vectorial V sobre el campo de los números reales o complejos con una norma $\|.\|$, tal que toda sucesión de Cauchy (con respecto a la métrica $d(x,y) = \|x - y\|$) en V, tiene un límite en V.

Como se menciona anteriormente, cada espacio de Hilbert es un espacio de Banach, ya que por definición, un espacio de Hilbert es completo con respecto a la norma asociada a su producto escalar.

No todos los espacios de Banach son espacios de Hilbert. Una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach sea también un espacio de Hilbert es que se cumpla la identidad del paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

para u y v elementos en el espacio de Banach.

Capítulo 2

Topologías en el grupo de operadores invertibles $GL(\mathcal{H})$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable con un producto interior $\langle , \rangle$ que induce la norma $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, donde $x \in \mathcal{H}$. Sea $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ el espacio vectorial de operadores lineales de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ y denotamos por $B(\mathcal{H})$ el espacio vectorial de los operadores lineales acotados:

$$B(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}) : \exists M > 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad |Tx| \leq M|x|\}.$$

El espacio de los operadores lineales acotados $B(\mathcal{H})$ dotado con la norma

$$|T| = \sup_{|x| \leq 1} |Tx|$$

es un espacio de Banach.

El espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados e invertibles, es decir, $\mathrm{GL}(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$ y para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ existe $A^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$.

Denotamos el operador adjunto T^* como el operador definido por la igualdad $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

El espacio $B(\mathcal{H})$ puede ser dotado con varias topologías y enlistaremos algunas a continuación. Todas ellas son definidas especificando qué son las sucesiones convergentes. Si $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores lineales en $B(\mathcal{H})$, y decimos que T_k converge a T en la topología $\star$ como $T_k \to_\star T$, y denotamos $B(\mathcal{H})_\star$ el espacio de los operadores acotados dotado con la topología $\star$. Con la siguiente notación $x_k \to x$ denotamos que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ converge a x.

2.1. Topologías en $B(\mathcal{H})$

En esta sección se introducirán las diferentes topologías de $B(\mathcal{H})$, que después se podrán restringir al espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Más aún, se presenta un diagrama que muestra la relación en el espacio $B(\mathcal{H})$ con las topologías ha mencionar.

- **Topología de la Norma (Convergencia uniforme):**
  $T_k \to_n T\, si\ \sup_{|x|\leq 1}\{|T_k x - Tx|\} \to 0.$

- **Topología fuerte (Convergencia puntual):**
  $T_k \to_s T$ si para todo $x \in \mathcal{H}$, $T_k x \to Tx$.

- **Topología débil:**
  $T_k \to_w T$ si para todo $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle T_k x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$

- **Topología compacto-abierto (Convergencia uniforme en conjuntos compactos):**
  $T_k \to_{co} T$ si para todo subconjunto compacto $C \subset \mathcal{H}$, la sucesión restringida $\{T_k|_C\}_k$ converge uniformemente a $T|_C$.

- **Topología fuerte*:**
  $T_k \to_{s^*} T$ si se cumple que $T_k \to_s T$ y $T_k^* \to_s T^*$.

- **Topología débil*:**
  $T_k \to_{w^*} T$ si se cumple que $T_k \to_w T$ y $T_k^* \to_w T^*$.

- **Topología compacto-abierto*:**
  $T_k \to_{co^*} T$ si se cumple que $T_k \to_{co} T$ y $T_k^* \to_{co} T^*$.

Ahora bien, ¿Por qué tenemos que una topología se puede expresar conforme a sus sucesiones convergentes? para eso tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} T_k \to_s T \quad &\Leftrightarrow \quad T_k x \to_{\mathcal{H}} Tx \text{ cuando } k \to \infty \text{ para cada } x \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow \quad |T_k x - Tx| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N}, |T_k x - Tx| < \epsilon \text{ si } k > N. \end{aligned}$$

Por lo tanto un sub-básico en la topología fuerte son los elementos de la forma

$$U(T, \epsilon, x) = \{S \in B(\mathcal{H}) \mid |Sx - Tx| < \epsilon\}$$

con $x \in \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0$ fijos, y un básico es de la forma

$$A(T, \epsilon, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{S \in B(\mathcal{H}) \,|\, |Sx_i - Tx_i| < \epsilon \text{ con } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Para el caso de la topología débil tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} T_k \to_w T \quad &\Leftrightarrow \quad \langle T_k x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle \text{ para cada } x, y \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow \quad |\langle t_k x, y\rangle - \langle Tx, y\rangle| \to 0 \text{ para cada } x, y \in \mathcal{H} \text{ cuando } k \to \infty \\ &\Leftrightarrow \quad |\langle T_k x - Tx, y\rangle| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty \\ &\Leftrightarrow \quad |\langle (t_k - T)x, y\rangle| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N}, |\langle (T_k - T)x, y\rangle| < \epsilon \text{ si } k > N. \end{aligned}$$

Por lo tanto un sub-básico en la topología débil es de la forma

$$U(T, \epsilon, x) = \{S \in B(\mathcal{H}) \mid |\langle (T_k - T)x, y\rangle| < \epsilon\}$$

con $x, y \in \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0$ fijos. Y un básico son elementos de la forma

$$A(T, \epsilon, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{SB(\mathcal{H}) \mid |\langle (T_k - T)x, y\rangle| < \epsilon \text{ con } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

En el caso de la topología compacto-abierto tenemos la convergencia uniforme para subconjuntos compactos, por lo tanto, es análogo a la topología fuerte, solamente que el número entero $N \in \mathbb{N}$ encontrado es independiente de la elección del elemento x tomando en cada subconjunto compacto. Para el caso de las correspondientes $*$-topologías tenemos que se debe cumplir lo anterior y también para los operadores adjuntos, es decir, que T_k^* también debe converger.

La función identidad sobre $B(\mathcal{H})$ induce el siguiente diagrama conmutativo de funciones continuas

$$\begin{tikzcd} B(\mathcal{H})_n \arrow[r, "\textbf{(1)}"] & B(\mathcal{H})_{co^*} \arrow[r, "\textbf{(2)}"] \arrow[d, "\textbf{(4)}"] & B(\mathcal{H})_{s^*} \arrow[r, "\textbf{(3)}"] \arrow[d, "\textbf{(5)}"] & B(\mathcal{H})_{w^*} \arrow[d, "\textbf{(6)}"] \\ & B(\mathcal{H})_{co} \arrow[r, "\textbf{(7)}"] & B(\mathcal{H})_{s} \arrow[r, "\textbf{(8)}"] & B(\mathcal{H})_{w} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

con la propiedad que ninguna de los funciones es homeomorfismo, excepto la función identidad (6), que se mostrará con un lema.

A continuación se presentaran ejemplos que muestra dicha propiedad. Considere $\mathcal{H} := l^2(\mathbb{N})$ el espacio de Hilbert antes definido, notaremos que todos los inversos de las funciones identidad no son continuas, y por lo tanto, mostraremos como el espacio $B(\mathcal{H})$ con las topologías antes mencionadas no coinciden.

(1) Tomemos la sucesión de operadores $T_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que para todo $x = (\xi_n) \in \mathcal{H}$ la n-ésima coordenada de $T_k x$ se define por

$$(T_k x)_n = \begin{cases} \xi_n & n \neq k \\ i\xi_n & n = k, \end{cases}$$

se sigue que $T_k^* = T_k^{-1}$ y por lo tanto $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U(\mathcal{H})$. Tenemos que la sucesión no converge con la topología de la norma ya que si $x_k = (\xi_n^{(k)}) \in \mathcal{H}$ es definido por

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ i & n = k, \end{cases}$$

entonces $|T_k x_k - \mathrm{Id} x_k| = |1 - i| = \sqrt{2}$ y por consiguiente $\sup_{|x|\leq 1}\{|T_k x - \mathrm{Id} x|\} \nrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, por lo tanto $T_k \nrightarrow_n \mathrm{Id}$. Tenemos que con la topología compacto-abierto* la sucesión T_k converge al operador identidad $\mathrm{Id} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ya que tenemos que para cualquier subconjunto compacto C de $\mathcal{H}$ se satisface que dado $\epsilon > 0$ existe $N_x > 0$ tal que

$$|T_x x - \mathrm{Id}x| = |T_k x - x| = |i\xi_k - \xi_k| \leq |\xi_k||i-1| < \epsilon$$

cuando $k > N_x$ (se satisface la convergencia puntual). En ese caso para $\epsilon > 0$ dado tomamos $N = \sup_{x\epsilon C}\{N_x\}$, que existe ya que evaluamos sólo sobre subconjuntos compactos, por lo tanto es en un conjunto acotado. Finalmente tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$, que no depende de la x tomada en C, y se satisface que

$$|T_k x - \mathrm{Id}x| = |T_k x - x| = |i\xi_k - \xi_k| \leq |\xi_k||i-1| < \epsilon$$

cuando $k > N$. Por lo tanto T_k converge uniformemente a Id.

Falta probar que T_k^* también converge a la identidad en cualquier subconjunto compacto de $\mathcal{H}$. Sea

$$(T_k^* x)_n = \begin{cases} \xi_n & n \neq k \\ -i\xi_n & n = k \end{cases}$$

De igual forma se obtiene la convergencia puntual ya que dado $\epsilon > 0$ existe $N_x > 0$ tal que

$$|T_k^* x - \mathrm{Id}x| = |T_k^* x - x| = |-i\xi_k - \xi_k| \leq |\xi_k||-i-1| < \epsilon$$

de la misma manera se toma $N = \sup_{x\epsilon C}(N_x)$ y con esa $N > 0$ se satisface la convergencia uniforme.

Entonces tenemos que $T_k \nrightarrow_n \mathrm{Id}$ y que $T_k \rightarrow_{co^*} \mathrm{Id}$ por lo tanto se obtiene que $B(\mathcal{H})_n$ tiene más conjuntos abiertos que $B(\mathcal{H})_{co^*}$.

(2) Consideremos la sucesión de operadores

$$T_k : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, 0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots)$$

cada uno de los cuales cambia por ceros las primeras k coordenadas. Tenemos que la sucesión no converge a 0 en la topología compacto-abierto, ya que $|T_k| = 1$ para todo $k > 0$.

Veamos que efectivamente $|T_k| = 1$. Por un lado

$$|T_k(x)| = |\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}| \leqslant |\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}| = |x| \Rightarrow |T_k| \leqslant 1.$$

Por otro lado

$$|T_k| = \sup_{|x|=1} |T_k(x)| \geqslant |T_k(e_{n+1})| = 1.$$

Por lo tanto $T_k \nrightarrow_{co} 0$. Como consecuencia $T_k \nrightarrow_{co*} 0$. Falta probar que $T_k \rightarrow_{s*} 0$.

Vemos que efectivamente $T_k \rightarrow_s 0$, ya que,

$$|T_k x - 0x| = |T_k x| = |\left(\sum_{i=1}^{k} |0|^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}| \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Solo falta ver que $T_k^* \rightarrow_s 0$, para eso veremos como es la sucesión T_k^*, tomemos a $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ e $y = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, entonces

$$\langle T_k x, y\rangle = 0\bar{\lambda}_1 + 0\bar{\lambda}_2 + \ldots + 0\bar{\lambda}_k + \xi_{k+1}\bar{\lambda}_{k+1} + \xi_{k+2}\bar{\lambda}_{k+2} + \ldots$$

$$= \xi_1 0 + \xi_2 0 + \ldots + \xi_k 0 + \xi_{k+1}\bar{\lambda}_{k+1} + \xi_{k+1}\bar{\lambda}_{k+2} + \ldots = \langle x, T_k^* y\rangle$$

por lo tanto tenemos que $T_k = T_k^*$, por lo mismo tenemos que $T_k^* \rightarrow_s 0$ y por consecuencia $T_k \rightarrow_{s*} 0$. Eso muestra que $B(\mathcal{H})_{co*}$ tiene mas conjuntos abiertos que $B(\mathcal{H})_{s*}$.

(3) Consideremos la sucesión de operadores

$$T_k : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, 0, \ldots, 0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

cada uno de los cuales traslada la sucesión k lugares, anteponiendo ceros. Y también consideremos la sucesión de operadores adjuntos

$$T_k^* : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \xi_{k+3}, \ldots).$$

La sucesión de operadores cumple que $T_k \rightarrow_w 0$ pero que $T_k \nrightarrow_s 0$, debido a que si tomamos a $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ y a $y = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ elementos arbitrarios de l^2, tenemos que

$$\langle T_k x, y\rangle = (0, 0, \dots, , 0,\ \xi_1\lambda_{k+1},\ \xi_2\lambda_{k+2,\dots}) \to (0, 0, \dots) = \langle 0, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

al tomar el límite cuando k tiende a infinito, por lo tanto $T_k \to_w 0$.
Ahora probaremos que la sucesión de operadores no converge al operador 0 con la topología fuerte. Consideremos un elemento de l^2 como $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ por lo tanto

$$|T_k x - 0| = |T_k x| = |\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}| \nrightarrow 0$$

Cuando k tiende a infinito, por lo tanto $T_k \nrightarrow_s 0$.

Para demostrar que esa sucesión cumple que $T_k \to_{w^*} 0$ y que $T_k \nrightarrow_{s^*} 0$, falta probar que para todo elemento $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ e $y = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ se cumple que $\langle T_k^* x, y\rangle \to \langle 0x, y\rangle$. Por lo tanto al desarrollar

$$\langle T_k x, y\rangle = (0, 0, \dots, , 0,\ \xi_1\bar{\lambda}_{k+1},\ \xi_2\bar{\lambda}_{k+2,\dots}) \to (0, 0, \dots) = \langle 0, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

que converge al tomar el límite cuando k tiende a infinito. Por lo tanto tenemos que $B(\mathcal{H})_{s^*}$ tiene mas abiertos que $B(\mathcal{H})_{w^*}$.

(4) Sea $C \subset \mathcal{H}$ un subconjunto compacto del espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2$. Consideremos la sucesión de operadores lineales $T_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definidos por

$$T_k : (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots).$$

Estos operadores son acotados, ya que $|T_k x| \leq |x|$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y por lo tanto $\|T_k\| \leq 1$.

Luego, debido a que cada operador T_k es una función continua, se sigue que $T_k C$ es compacto para cada k. Denotamos por x_k al elemento en C tal que $T_k x_k$ tiene norma máxima en $T_k C$, esto es, $|T_k x_k| \geq |T_k x|$ para todo $x \in C$; el hecho de que $x_k \in C$ se sigue de la compacidad de $T_k C$.

Así, hemos formado una sucesión $\{x_k\}$ de elementos en el subconjunto compacto $C \subset \mathcal{H}$ y por lo tanto, existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}$ convergente a un elemento $c \in C$.

Sea L tal que $|x_{k_j} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k_j > L$ y, sea M tal que $|T_k c| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k > M$. Finalmente, si $N := k_j$ es tal que $k_j > \max\{L, M\}$, entonces para cada $x \in C$ y $k \geq N$ se tiene,

$$\begin{aligned} |T_k x| &\leq |T_N x| \\ &\leq |T_N x_N| = |T_N x_N - T_N c + T_N c| \\ &\leq |T_N x_N - T_N c| + |T_N c| \\ &\leq \|T_N\| |x_N - c| + |T_N c| \\ &< 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que la sucesión de operadores $\{T_k\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathcal{H}$ al operador cero, esto es, $T_k \to_{\text{co}} 0$.

Veamos ahora que $T_k \not\to_{\text{co}^*} 0$. Es evidente que los correspondientes operadores adjuntos de la sucesión considerada están dados por

$$T_k^* : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \cdots, 0, \xi_1, \xi_2, \ldots),$$

esto es, T_k^* antepone k ceros a la primer coordenada. Se sigue que para cada $x \in C$, $|T_k^* x| = |x|$ para todo $k \geq 0$, de modo que no es posible que exista N tal que $|T_k^* x| < \varepsilon$ para $k > N$ y por lo tanto, $T_k^* \not\to_{\text{co}} 0$.

(5) Mostraremos que si tomamos ahora la sucesión T_k como:

$$T_k : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots)$$

vamos a tener que $T_k \to_s 0$, pero tenemos que $T_k \nrightarrow_{s^*} 0$, ya que si desarrollamos lo siguiente

$$|T_k x - 0x| = |T_k x| = |\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right)^{1/2}| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Para que la sucesión no converja en la topología fuerte* falta probar que los operadores adjuntos no convergen, para eso definimos la sucesión de operadores adjuntos de la siguiente manera

$$T_k^* : (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, 0, \dots, 0, \xi_1, \xi_2, \dots)$$

con $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathcal{H}$ y $k \in \mathbb{N}$, cada uno de los cuales traslada la sucesión k lugares, anteponiendo ceros. Entonces tenemos que la sucesión no converge en la topología fuerte, ya que

$$|T_k x - 0| = |T_k x| = |\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}| \nrightarrow 0$$

Cuando k tiende a infinito. Por consiguiente concluimos que $B(\mathcal{H})_{s^*}$ tiene mas conjuntos abiertos que $B(\mathcal{H})_s$.

(6) Tenemos que el espacio $B(\mathcal{H})_w$ coincide con $B(\mathcal{H})_{w^*}$ como consecuencia inmediata del siguiente lema. Es importante señalar que el siguiente resultado se usará más adelante en nuestro trabajo.

Lema 2.1.1. *La aplicación* $B(\mathcal{H})_w \to B(\mathcal{H})_w, T \mapsto T^*$ *es continua. En particular* $B(\mathcal{H})_{w^*} = B(\mathcal{H})_w$.

Demostración. Consideremos $T_k \to_w T$ y $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\langle x, T_k^* y\rangle = \langle T_k x, y\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle,$$

y por lo tanto $T_k^* \to_w T^*$, lo que prueba que $T \mapsto T^*$ es continua.

Por lo tanto, concluimos que las topologías débil y débil* coinciden en $B(\mathcal{H})$, ya que debido a que la aplicación en el lema es continua, tenemos que si una sucesión $T_k \to T$ converge débilmente, entonces $T_k^* \to_w T^*$, por lo tanto tenemos que

$$T_k \to_{w^*} T \Leftrightarrow T_k \to_w T$$

ya que el lado derecho también implica que $T_k^* \to T^*$, como consecuencia las topologías coinciden. ∎

(7) Consideremos la sucesión de operadores

$$T_k : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, 0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots)$$

cada uno de los cuales corta la sucesión k lugares, anteponiendo ceros. Tenemos que $T_k \to_s 0$ ya que

$$|T_k x - 0x| = |T_k x| = |\left(\sum_{i=1}^{k} |0|^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Ahora bien tenemos que la sucesión $T_k \nrightarrow_{co} 0$, ya que no se cumple la convergencia uniforme en un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$.

Tenemos que T_k no converge uniformemente a 0, ya que $|T_k| = 1$ para todo $k > 0$. Veamos que efectivamente $|T_k| = 1$. Por un lado

$$|T_k(x)| = |\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}| \leqslant |\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}| = |x| \Rightarrow |T_k| \leqslant 1.$$

Por otro lado

$$|T_k| = \sup_{|x|=1} |T_k(x)| \geqslant |T_k(e_{n+1})| = 1.$$

Por lo tanto $T_k \nrightarrow_{co} 0$. Como conclusión obtenemos que $B(\mathcal{H})_{co}$ tiene mas conjuntos abiertos que $B(\mathcal{H})_s$

(8) Consideremos la sucesión de operadores

$$T_k : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, 0, \ldots, 0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

cada uno de los cuales traslada la sucesión k lugares, anteponiendo ceros. Tenemos que la sucesión T_k converge a 0 con la topología débil, ya que si tomamos a $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ y a $y = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ elementos arbitrarios de l^2 tenemos que

$$\langle T_k x, y\rangle = (0, 0, \ldots, , 0,\ \xi_1\lambda_{k+1},\ \xi_2\lambda_{k+2,\ldots}) \to (0, 0, \ldots) = \langle 0, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

al tomar el límite cuando k tiende a infinito, por lo tanto $T_k \to_w 0$.
Ahora probaremos que la sucesión de operadores no converge al operador 0 con

la topología fuerte. Consideremos un elemento de l^2 como $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ por lo tanto

$$|T_k x - 0| = |T_k x| = |\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}| \nrightarrow 0$$

Cuando k tiende a infinito, por lo tanto $T_k \nrightarrow_s 0$. Con lo que se obtiene que $B(\mathcal{H})_s$ tiene mas abiertos que $B(\mathcal{H})_w$.

2.2. El espacio de operadores invertibles

2.2.1. Contractibilidad de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$

En esta parte se usa un espacio de Hilbert estándar, que es el espacio $\mathrm{L}^2([0,1])$, para las pruebas de que el espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es contraíble con las topologías compacto-abierto y la fuerte. La contractibilidad con la topología fuerte se refiere al teorema de Kuiper, que se probará con algunos resultados preliminares.

Teorema 2.2.1. *El espacio* $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ *es contraíble a un punto, con la topología compacto-abierto, mediante una homotopía*

$$h_t : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \times [0,1] \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$$

que es continua sobre todo subconjunto compacto.

Demostración. El punto esencial de la demostración es que podemos identificar a $\mathcal{H}$ con el espacio de Hilbert estandar $L^2([0,1])$ de funciones en los complejos sobre el intervalo unitario, entonces tenemos el operador proyección P_t que proyecta en el primer factor en

$$L^2([0,1]) = L^2([0,t]) \oplus L^2([t,1])$$

que depende continuamente sobre $t \in [0,1]$ en la topología compacto-abierto, es decir,

$$\mathrm{P}_t(f)(x) := \begin{cases} f(x) & x \leq t \\ 0 & x \geq t \end{cases}$$

es continua en la topología compacto-abierto ya que para cada subconjunto compacto C de $L^2([0,1])$ tenemos que

$$|\mathrm{P}_t f(x) - \mathrm{P}_{t'} f(x)| \to 0$$

cuando $t \to t'$. Ya que tenemos la convergencia puntual, pero si analizamos sobre un conjunto compacto C podemos ver que existe una cubierta abierta a la que se le puede extraer una cubierta finita, donde en cada abierto se satisface que

$$|\mathrm{P}_t f_k(x) - \mathrm{P}_{t'} f_k(x)| < \epsilon \quad \text{cuando } |t - t'| < \delta_{f(x)}$$

para $\delta_{f_k(x)} > 0$ donde se escoge f_k el centro de cada elemento de la cubierta finita. Pero si tomamos $\delta = min\{\delta_{f(x)}\}$ se satisface la convergencia uniforme sobre todo C subconjunto compacto.

Consideremos la factorización de P_t como $i_t R_t$, donde

$$R_t : L^2([0,1]) \to L^2([0,t])$$

es la restricción e i_t es la inclusión de $L^2([0,t])$ en $L^2([0,1])$, y al tomar $0 < t \leq 1$ escribimos

$$Q_t : L^2([0,t]) \to L^2([0,1])$$

Para el isomorfismo isométrico dado por

$$(Q_t f)(x) = t^{1/2} f(tx).$$

que es isométrico ya que

$$\|(Q_t f)(x)\|^2 = \langle \sqrt{t} f(tx), \sqrt{t} f(tx) \rangle = \int_0^1 t|f(tx)|^2 dx$$

y con el cambio de variable $x' = xt$ tenemos lo siguiente

$$\|Q_t f(x)\|^2 = \int_0^t |f(x')|^2 dx' = \|f\|^2$$

debido a que para $x \in (t,1]$ definimos $f(x) = 0$. Para demostrar que es un isomorfismo basta con probar que la función es lineal y biyectiva, como

$$(Q_t(f+g))(x) = \sqrt{t}(f+g)(tx) = \sqrt{t}(f(tx) + g(tx))$$

$$= \sqrt{t} f(tx) + \sqrt{t} g(tx) = (Q_t f)(x) + (Q_t g)(x)$$

es lineal, además es biyectiva, ya que si consideramos la función inversa

$$(Q_t^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}f\left(\frac{1}{t}\right),$$

al componer obtenemos la función identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, en efecto

$$(Q_t f)(x) \circ (Q_t^{-1}f)(x) = (Q_t^{-1}f)(x) \circ (Q_t f)(x) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

por lo tanto es biyectiva, así es un isomorfismo. A continuación definimos la siguiente homotopía $h_t : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ donde

$$h_t(A) = i_t Q_t^{-1} A Q_t R_t + (1 - \mathrm{P}_t)$$

con $t \in (0, 1]$, y $h_0(a) = 1$. Porque tenemos que

$$\|Q_t R_t f(x)\| = \|P_t f(x)\|,$$

igualdad que se obtiene al desarrollar,

$$\|(Q_t R_t f)(x)\|^2 = \|\sqrt{t} f(tx)\|^2 = \int_0^1 t|f(tx)|^2 dx$$

y con el cambio de variable $x' = tx$ y $dx' = tdx$ se obtiene

$$\int_0^t |f(tx)|^2 dx = \int_0^t |f(x')|^2 dx' = \|\mathrm{P}_t f\|^2$$

es continua en t y tiende a cero cuando $t \to 0$. Además

$$\begin{aligned}
\|(i_t Q_t^{-1})f\|^2 &= \left\| i_t \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{1}{t}\right)\right\|^2 \\
&= \int_0^t \left|\frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{t}\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_0^1 |f(x')|^2 dx' = \|f\|^2
\end{aligned}$$

al tomar el cambio de variable $x' = \frac{x}{t}$. Por lo tanto la homotopía h_t que va desde $h_0 = cte = Id_{Hil}$ a $h_1 = Id_{\mathrm{GL}(\mathcal{H})}$ es continua. ∎

Para la demostración del teorema de Kuiper se presentarán algunos resultados preliminares.

Definición 2.2.2. *Si $x_0 \in X$ es un punto base, se define $\pi_1(X, x_0) = [(\mathbb{S}^1, s_0), (X, x_0)]$.*

Tenemos que $\pi_1(x, x_0) \simeq \pi_1(x, y_0)$ si existe $\sigma : [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = y_0$. Análogamente, podemos definir

$$\pi_n(X, x_0) = [(\mathbb{S}^n, s_0), (X, x_0)],$$

que son las clases de homotopía de las funciones continuas que preservan el punto base.

Teorema 2.2.3. *Si X es paracompacto y Hausdorff y $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$, esto es, una familia de funciones continuas*

$$\lambda_i : X \to [0,1]$$

con $i \in \Lambda$ tales que

1. *El soporte $Sop(\lambda_i) := \overline{\{x \in X \mid \lambda_i(x) \neq 0\}} \subset V_i$*
2. *Para cada subconjunto compacto $C \subset X$ corresponde un número entero m y un conjunto abierto $W \subset V_i$ para algun $i \in \Lambda$, con $C \subset W$, tal que*

   $$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \ldots + \lambda_m(x) = 1$$

   para todo $x \in W$.
3. *Para cada $x \in X$ tenemos que*

   $$\sum_{i\in\Lambda} \lambda_i(x) = 1$$

Referencia: [14] Pag. 162.

Definición 2.2.4. *Sea* $a, b \in L \subset \mathbb{R}^n$*, el conjunto* $\{c \mid c = tb + (1-t)a;\ 0 \leq t \leq 1\}$ *es llamado el segmento que une a con b. Un subconjunto* $C \subset L$ *es* ***convexo*** *si para todo par* $a, b \in C$*, el segmento que los une está contenido en* C*.*

Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial real (o complejo) entonces una combinación convexa de estos es un vector de la forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

tal que $a_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. La envolvente convexa es el conjunto de todas las combinaciones convexas.

Se puede caracterizar la envolvente convexa como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Teorema 2.2.5. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, entonces* $\mathcal{H}$ *es separable si, y sólo si, existe una base ortonormal numerable de* $\mathcal{H}$*.*

Demostración. Suponemos que $\mathcal{D}$ es un subconjunto numerable y denso de $\mathcal{H}$ y suponemos que $\{e_i : i \in I\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Notemos que

$$\text{si } i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\|^2 = 2. \tag{2.2}$$

Donde $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$ por lo tanto podemos encontrar un vector $x_i \in D$ tal que $\|x_i - e_i\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, para cada $i \in I$. La identidad (2.2) muestra que la función que manda a cada $i \in I$ a el elemento $x_i \in \mathcal{D}$ es necesariamente inyectiva, donde $\mathcal{D}$ es numerable, por lo tanto concluimos que I también debe serlo.

Ahora suponemos que I es un conjunto (finito o infinito) numerable y que $\{e_i : i \in I\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, sea $\mathcal{D}$ el conjunto de elementos de la forma $\sum_{j \in J} \alpha_j e_j$ donde J es un subconjunto finito de I y α_j son los números complejos donde su parte real e imaginaria son ambos números racionales; podemos entonces ver que $\mathcal{D}$ es un conjunto denso y numerable de $\mathcal{H}$. ∎

Teorema 2.2.6. *(Teorema del operador abierto) Si* $A : B_1 \to B_2$ *es un operador lineal acotado entre dos espacios de Banach y* $A(B_1) = B_2$ *(es decir,* A *es sobreyectivo), entonces* A *es abierto:* $A(U) \subset B_2$ *es abierto para* $U \subset B_1$ *abierto. [13].*

Teorema 2.2.7. *Todo espacio métrico es paracompacto. Artículo: [12].*

Lema 2.2.8. *Si* $A \in B(\mathcal{H})$ *y* $\|A\| < 1$ *entonces* $\mathrm{Id} - A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$*.*

Demostración. Se tiene que para cada $j \geq 0$,

$$\|A^j\| \leq \|A\|^j,$$

y si $\|A\| < 1$ entonces la serie de Neumman $B = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$ converge absolutamente en $B(\mathcal{H})$, ya que

$$\|B\| = \|\sum_{j=0}^{\infty} A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j$$

y como tenemos que $\|A\| < 1$ tenemos la serie geométrica, por lo tanto $\sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j < \infty$, por lo tanto B está acotado, es decir, $B \in B(\mathcal{H})$.

Además tenemos la continuidad de la aplicación producto en $B(\mathcal{H})$, respecto a la norma, ya que, si tomamos dos sucesiones $\{T_k\}, \{S_k\}$ en $B(\mathcal{H})$ tales que $T_k \to T$, $S_k \to S$ cuando $k \to \infty$ y $(S_n, T_n) \to_n (S, T)$ cuando $n \to \infty$, es decir

$$\|(S_n, T_n) - (S, T)\| = \|S_n - S\| + \|T_n - T\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, así la continuidad de la aplicación producto se obtiene de las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \|S_n T_n - ST\| &\leq \|S_n T_n - S_n T\| + \|S_n T - ST\| \\ &= \|S_n(T_n - T)\| + \|(S_n - S)(T)\| \\ &\leq \|S_n\| \|T_n - T\| + \|S_n - S\| \|T\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ya que $S_n, T \in B(\mathcal{H})$, es decir son operadores acotados. Usando la continuidad del producto, se tiene que

$$\begin{aligned} AB &= A \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} A^j \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n+1} A^j \\ &= B - \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

Análogamente, $BA = B - \mathrm{Id}$. Así,

$$(\mathrm{Id} - A)B = \mathrm{Id} = B(\mathrm{Id} - A)$$

se sigue que $\mathrm{Id} - A$ tiene un inverso por ambos lados, por lo tanto $\mathrm{Id} - A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$.
■

Proposición 2.2.9. $\mathrm{GL}(\mathcal{H})_n$ *es abierto en* $B(\mathcal{H})_n$*.*

Demostración. Dado $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ debemos probar que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(A) := \{B \in B(\mathcal{H}) \mid \|A - B\| < \epsilon\} \subset \mathrm{GL}(\mathcal{H}).$$

Sea $B \in B(\mathcal{H})$ tal que $B + A \in B_\epsilon(A)$.
De modo que buscamos $\epsilon > 0$ tal que si $\|B\| < \epsilon$, entonces $B + A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$.

Observemos que $B + A = A(A^{-1}B + \mathrm{Id})$, como $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, basta garantizar que

$$A^{-1}B + \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}).$$

Por otro lado, si $\|A^{-1}B\| < 1$ entonces $A^{-1}B + \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ (por el lema 2.2.8), pero $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\|$, de modo que si

$$\|B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

entonces $A^{-1}B + \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Así, tomamos $\epsilon = \|A^{-1}\|^{-1}$ y se sigue que $B_\epsilon(A) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es abierto en $B(\mathcal{H})$. ■

2.3. Teorema de Kuiper

Teorema 2.3.1. *(Teorema de Kuiper) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, complejo, separable y de dimensión infinita. Si X es un espacio topológico Hausdroff compacto, entonces $[X, \mathrm{GL}(\mathcal{H})] = 0$, es decir, toda función continua $X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es homotópica a la función constante $x \mapsto \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.*

Para la demostración del teorema de Kuiper son necesarios varios lemas y resultados que se presentan a continuación

Lema 2.3.2. *Sea X un espacio compacto y Hausdorff, entonces toda función continua $X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es homotópica a una función cuya imagen está contenida en un subespacio de $B(\mathcal{H})$ de dimensión finita.*

Demostración. Por la compacidad de X, la imagen de la función continua

$$X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$$

es compacta en $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ y por lo tanto, está contenida en un conjunto abierto de la forma

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(A_i)$$

para algunos $A_i \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, $r_i > 0$ y tales que $B_{2r_i}(A_i) \subseteq \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, pues basta tomar una cubierta de la imagen de $X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ mediante bolas abiertas $B_{r_\alpha}(A_\alpha)$ tales que

$$r_\alpha < \frac{1}{2} \|A_\alpha^{-1}\|^{-1}$$

pues esto garantiza que $2r_\alpha < \|A_\alpha^{-1}\|^{-1}$ y $B_{2r_\alpha} \subset \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ debido a la proposición 2.2.9. Luego extraemos una subcubierta finita de esa cubierta, por la compacidad, de la forma

$$\bar{U} = \bigcup B_{\frac{1}{2}\|A_\alpha^{-1}\|^{-1}}(A_\alpha)$$

con $A_\alpha \in \mathrm{Im}(X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$, entonces tenemos que $\mathrm{Im}(X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})) \subset U = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(A_i) \subset \bar{U}$.

Se sigue que, es suficiente probar que la inclusión $U \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es homotópica a una función $U \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ cuya imagen está contenida en un subespacio de $B(\mathcal{H})$ de dimensión finita.

Sea $\{\lambda_i : U \to [0,1]\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{B_{r_i}(A_i)\}$. Esta partición existe ya que $B(\mathcal{H})$ es un espacio métrico y por lo tanto paracompacto y Hausdorff (Ref. [12]). Definimos $h : [0,1] \times U \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ por

$$h(t,A) := h_t(A) = (1-t)A + t\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)A_i$$

se sigue que h es continua, h_0 es la inclusión $U \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ y $h_1(U)$ está contenido en el espacio generado por $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ el cual es de dimensión finita.

Sólo resta probar que h toma valores en $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Sea $A \in U$ fijo. Sea $I = \{i \,|\, A \in B_{r_i}(A_i)\}$ entonces

$$h_t(A) = (1-t)A + t\sum_{i\in I} \lambda_i(A)A_i$$

ya que, si $j \notin I$ entonces $\lambda_j(A) = 0$, pues $Sop(\lambda_j) \subset B_{r_j}(A_j)$. Además, como $1, t, t\lambda_i(A_i) \geqslant 0$ y

$$(1-t) + \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i(A_i) = 1 - t + t = 1$$

se sigue que $h_t(A)$ es una combinación convexa de A y $\{A_i\}_{i\in I}$. Sea $m \in I$ tal que $r_i \leqslant r_m$ para todo $i \in I$, luego

$$\begin{aligned} \|A_m - A_i\| &= \|A_m - A + A - A_i\| \\ &\leqslant \|A_m - A\| + \|A_i - A\| \\ &< r_m + r_i \leqslant 2r_m \end{aligned}$$

para todo $i \in I$. Por lo tanto $A, A_i \in B_{2r_m}(Am) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Por consiguiente toda combinación convexa de A y $\{A_i\}_{i\in I}$ pertenece a $B_{2r_m}(A_m)$. Así, $h_t(A) \in B_{2r_m}(A_m) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ para todo $t \in [0,1]$. ■

Lema 2.3.3. *Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Hilbert de dimensión $n+2$, $b \in \mathbb{N}$ un vector unitario de $\mathcal{W}$ ($\|b\| = 1$) y $V \subseteq \mathcal{W}$ un subespacio de dimensión n. Entonces existe una homotopía $h : [0,1] \times (V\backslash\{0\}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{W})$, tal que $h_0(v) = \mathrm{Id}_{\mathcal{W}}$ y $h_1(v)b = v$ para todo $v \in V\backslash\{0\}$. Además, esta homotopía puede tomarse tal que*

$$\|h_t(v)\| \leq \textit{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\}$$

y $\|h_t(v) - h_s(v)\| \leq \pi|t-s|\textit{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\}$ para todos $t, s \in [0,1]$ y $v \in V\backslash\{0\}$.

Demostración. De las hipótesis se sigue que existe un vector unitario $b' \in \mathcal{W}$ tal que $b' \perp V$ y $b' \perp b$, basta tomar $b' \in (V + \mathrm{Spam}(b))^{\perp}$ y normalizar si es necesario. Consideremos la trayectoria $h' : [0,1] \to \mathrm{GL}(\mathcal{W})$ definida por

$$h'_t := \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{sobre } \{b, b'\}^{\perp} \\ \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & -\mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} \\ \mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{bmatrix} & \text{con respecto a la base ortonormal } \mathcal{B} = \{b, b'\} \text{ de } \mathrm{Span}(b, b'). \end{cases}$$

Observemos que en la base $\mathcal{B}$ se tiene

$$\begin{aligned} b = 1 \cdot b + 0 \cdot b' &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \\ b' = 0 \cdot b + 1b' &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

así $h'_1(b) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b'$ y además $h'_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{W}}$. Definimos la siguiente homotopía

$$h'' : [0,1] \times V\backslash\{0\} \to \mathrm{GL}(\mathcal{W})$$

por

$$h''_t(v) := \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{sobre } \{b', v\}^{\perp} \\ \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & -\mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} \\ \mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{bmatrix} & \text{con respecto a la base } \{b', v\} \text{ de } \mathrm{Span}(b', v) \end{cases}$$

notemos que $\{b', v\}$ es un conjunto linealmente independiente ya que $b' \perp v$ para todo $v \in V\backslash\{0\}$. Así, tenemos que $h''_0(v) = \mathrm{Id}_{\mathcal{W}}$ y

$$h''_1(v)b' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\{b', v\}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v$$

además

$$h''_1(v)v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\{b', v\}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -b'.$$

La base $\{b', v\}$ no necesariamente es ortonormal, pero si lo es $\{b', \frac{v}{\|v\|}\}$. Además

$$h''_t(v)b' = v$$

$$h_t''(v)\frac{v}{\|v\|} = -\frac{b'}{\|v\|}$$

entonces tenemos que $\|h_t''(v)b'\| = \|v\|$ y $\left\|h_t''(v)\frac{v}{\|v\|}\right\| = \left\|\frac{-b'}{\|v\|}\right\| = \frac{1}{\|v\|}$, así

$$\|h_t''(v)\| \leqslant \text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\}$$

ya que $\|h_t''(v)\|$ es la mínima cota superior, y claramente $\|h_t'\| = 1$. Definimos $h : [0,1] \times (V - \{0\}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{W})$ dada por

$$h_t(v) := h_t''(v)h_t'$$

es evidente que $\|h_t(v)\| \leqslant \text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\}$. Se tiene que

- $h_0(v) = h_0''(v)h_0' = \mathrm{Id}_{\mathcal{W}}\mathrm{Id}_{\mathcal{W}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{W}}$
- $h_1(v)b = h_1''(v)(h_1'(b)) = h_1''(v)(b') = v$.

Además, haciendo los cálculos apropiados se obtiene que

$$\|\frac{\partial}{\partial t}h_t'\| \le \frac{\pi}{2} \text{ y } \|\frac{\partial}{\partial t}h_t''(v)\| \le \frac{\pi}{2}\text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\},$$

ya que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}h_t'\right\| = \frac{\pi}{2}\left\|\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \\ \cos\frac{\pi t}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}\right\| \le \frac{\pi}{2}$$

y de manera análoga para $\|\frac{\partial}{\partial t}h_t''(v)\|$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial t}h_t(v)\right\| &= \left\|\frac{\partial}{\partial t}h''(v)h_t' + h_t''(v)\frac{\partial}{\partial t}h_t'\right\| \\ &\le \pi\,\text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\}.\end{aligned}$$

De modo que, usando el teorema fundamental del cálculo, para $0 \le s < t \le 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\|h_t(v) - h_s(v)\| &= \left\|\int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau}h_\tau(v)d\tau\right\| \\ &\le \int_s^t \left\|\frac{\partial}{\partial \tau}h_\tau(v)\right\| d\tau \\ &\le \pi\,(t-s)\text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\}\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Lema 2.3.4. *Sea V un subespacio de $B(\mathcal{H})$ de dimensión finita. Entonces existe un subespacio cerrado $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$, de dimensión infinita, tal que la inclusión canónica $V \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es homotópica a una función $V \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ con valores en $\mathrm{GL}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0) := \{A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \mid A|_{\mathcal{H}_0} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_0}\}$. Además, podemos tomar $\mathcal{H}_0$ con codimensión infinita.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $V \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ genera V. Sea $n := \dim V$. Entonces existen $A_1, A_2, \dots A_n \in V \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ tales que $\mathrm{Span}(A_1, \dots, A_n) = V$.

Sea $b_1 \in \mathcal{H}$ un vector unitario y consideremos un subespacio $W_1 \subset \mathcal{H}$ de dimensión $n+2$ tal que $b_1 \in W_1$ y $Vb_1 := \{A(b) \mid A \in V\} \subseteq W_1$. Recursivamente, podemos construir vectores unitarios $b_i \in \mathcal{H}$ y subespacios $W_i \subseteq \mathcal{H}$ de dimensión $n+2$ tales que

$$b_i \in W_i, \quad Vb_i \subseteq W_i \quad \text{y} \quad W_j \perp W_i \text{ para } j \leq i \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

En efecto, si tenemos $b_1, \dots b_i$ y $W_1, \dots, W_i$ satisfaciendo $(*)$ entonces existe un vector unitario

$$b_{i+1} \in (W_1^{\perp} \cap \dots \cap W_i^{\perp}) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j^{-1}(W_1^{\perp} \cap \dots \cap W_i^{\perp}) \right)$$

ya que tal subespacio tiene codimensión finita en $\mathcal{H}$ y por lo tanto es de dimensión infinita. Luego, como $b_{i+1} \in W_1^{\perp} \cap \dots W_i^{\perp}$ y $A_j b_{i+1} \in W_1^{\perp} \cap \dots W_i^{\perp}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$ se sigue que

$$Vb_{i+1} \subseteq W_1^{\perp} \cap \dots \cap W_i^{\perp}$$

pues $V = \mathrm{Span}(A_1, \dots, A_n)$. Por lo tanto, existe un subespacio $W_{i+1} \subseteq W_1^{\perp} \cap \dots \cap W_i^{\perp} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j^{-1}(W_1^{\perp} \cap \dots \cap W_i^{\perp}) \right)$ de dimensión $n+2$ tal que $b_{i+1} \in W_{i+1}$ y $Vb_{i+1} \subseteq W_{i+1}$ y esto completa la construcción de b_i y W_i dados por $(*)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por el lema 2.3.3, existen homotopías

$$h^i : [0,1] \times (Vb_i \backslash \{0\}) \to \mathrm{GL}(W_i)$$

tales que $h_0^i(v) = \mathrm{Id}_{W_i}$ y $h_1^i(v) b_i = v$, para todo $v \in Vb_i \backslash \{0\}$. Además

$$\|h_t^i(v)\| \leqslant \text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\} \tag{2.3}$$

y

$$\|h_t^i(v) - h_s^i(v)\| \leqslant \pi\,|t-s|\text{máx}\{\|v\|, \|v\|^{-1}\} \tag{2.4}$$

para todos $t, s \in [0,1]$ y $v \in Vb_i - \{0\}$. Se sigue que

$$h_t(A) := \begin{cases} \bigoplus_i h_t^i(Ab_i) & \text{sobre } \bigoplus_i W_i \\ \text{Id} & \text{sobre } (\bigoplus_i W_i)^\perp \end{cases}$$

define una homotopía

$$h : [0,1] \times (V \cap \text{GL}(\mathcal{H})) \to \text{GL}(\mathcal{H})$$

tal que $h_0(A) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ y $h_1(A)b_i = Ab_i$ para todo $A \in V \cap \text{GL}(\mathcal{H})$. Luego, por (2.3) y (2.4) se tiene que

$$\|h_t(A)\| \leq \text{máx}\{\|A\|, \|A\|^{-1}\}$$

y

$$\|h_t(A) - h_s(A)\| \leq \pi|t-s|\ \text{máx}\{\|A\|, \|A\|^{-1}\}$$

para todos los $s, t \in [0,1]$ y $A \in V \cap \text{GL}(\mathcal{H})$.

Por lo tanto, $h_t(A)$ es un operador acotado y la función h es continua. Se sigue que

$$g : [0,1] \times (V \cap \text{GL}(\mathcal{H})) \to \text{GL}(\mathcal{H})$$

dada por $g_t(A) = h_t(A)^{-1}A$ es una homotopía de la inclusión $g_0 : V \cap \text{GL}(\mathcal{H}) \to \text{GL}(\mathcal{H})$ a la función $g_1 : V \cap \text{GL}(\mathcal{H}) \to \text{GL}(\mathcal{H})$ tal que $g_1(A)b_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $A \in V \cap \text{GL}(\mathcal{H})$. Así, el subespacio $\mathcal{H}_0 = \overline{\langle b_1, b_2, \ldots \rangle}$ tiene la propiedad deseada. ■

Identificando $\mathcal{H}$ con $\mathcal{H}_0^\perp \oplus \mathcal{H}$ tenemos que

$$\text{GL}(\mathcal{H}; \mathcal{H}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & \text{Id} \end{pmatrix} \middle|\ A \in \text{GL}(\mathcal{H}_0^\perp),\ B \in B(\mathcal{H}_0^\perp; \mathcal{H}) \right\},$$

sea

$$\begin{aligned} i:\mathrm{GL}(\mathcal{H}_0^\perp) &\to \mathrm{GL}(\mathcal{H};\mathcal{H}_0)\\ A &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & \mathrm{Id}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

la inclusión canónica y sea

$$\begin{aligned} r:\mathrm{GL}(\mathcal{H};\mathcal{H}_0) &\to \mathrm{GL}(\mathcal{H}_0^\perp)\\ \begin{pmatrix} A & 0\\ B & \mathrm{Id}\end{pmatrix} &\mapsto A\end{aligned}$$

claramente estas funciones son continuas en la topología de la norma y $r\circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H}_0^\perp)}$. De modo que r es un retracto, más aún

$$\begin{aligned} f:[0,1]\times\mathrm{GL}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0^\perp) &\to \mathrm{GL}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0^\perp)\\ \left(t,\begin{pmatrix} A & 0\\ B & \mathrm{Id}\end{pmatrix}\right) &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0\\ tB & \mathrm{Id}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

es una homotopía entre $f_0 = i\circ r$ y $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)}$ y además, $f_t(A) = A$ para todo $A\in\mathrm{GL}(\mathcal{H}^\perp)$. Así, hemos probado el siguiente resultado.

Lema 2.3.5. *La inclusión $i:\mathrm{GL}(\mathcal{H}_0^\perp)\to\mathrm{GL}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)$ es un retracto por deformación fuerte. En particular, $i\circ r$ es homotópica a la función identidad $\mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)}$.*

Lema 2.3.6. *La inclusión*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(\mathcal{H}) &\to \mathrm{GL}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})\\ A &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & \mathrm{Id}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

es homotópica a la función constante

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(\mathcal{H}) &\to \mathrm{GL}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})\\ A &\mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Demostración. Consideremos la homotopía

$$g:[0,1]\times\mathrm{GL}(\mathcal{H})\to\mathrm{GL}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$$

definida por

$$g_t(A) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & -\mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} \\ \mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & \mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} \\ -\mathrm{sen}\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}$$

tenemos que $g_0(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}$ y $g_1(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Se sigue que la homotopía

$$g' : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H})$$

definida por

$$g'_t(A) = \begin{pmatrix} g_t(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_t(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

satisface que $g'_0(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & & \\ & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & \\ & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & \\ & & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$ y $g'_1(A) = \begin{pmatrix} A & & & & \\ & A^{-1} & & & \\ & & A & & \\ & & & A^{-1} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$ para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Además, la homotopía

$$g'' : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H})$$

definida por

$$g''_t(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & \\ & g_t(A) & & \\ & & g_t(A) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

satisface que

$$g''_0(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & & \\ & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & \\ & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & \\ & & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ y } g''_1(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & & \\ & A & & & \\ & & A^{-1} & & \\ & & & A & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la homotopía $g''' : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H})$ definida por $g'''_t(A) = g'_t(A) g''_t(A)$ es tal que

$$g'''_0(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & & \\ & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & \\ & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & \\ & & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ y } g'''_1(A) = \begin{pmatrix} A & & & & \\ & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & & \\ & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & & \\ & & & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Luego, como $\mathcal{H}$ es separable y de dimensión finita, existe un isomorfismo isométrico $\phi : \mathcal{H} \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}$, y conjugando con g''', obtenemos la homotopía que establece el lema:

$$\begin{aligned} h : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) &\to \mathrm{GL}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \\ (t, A) &\mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}^{-1} g_t'''(A) \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tal que $h_0(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}$ y $h_1(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}$ para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. ∎

Finalmente, como consecuencia de los lemas anteriores, hemos probado que el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía y se sigue el resultado que deseábamos demostrar:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{GL}(\mathcal{H};\mathcal{H}_0) \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[dd] & \mathrm{GL}(\mathcal{H}_0^{\perp}) \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r, leftrightarrow, "\cong", "\psi_1"'] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_0} \end{pmatrix}"] & \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \arrow[dd, "\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}"] \\
X \arrow[r, dotted, "h_1"] \arrow[drr, bend right] & V \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \arrow[ur, bend left, "g_1"] \arrow[dr, bend right] & & & \\
 & & \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \arrow[r, equal] & \mathrm{GL}(\mathcal{H}_0^{\perp} \oplus \mathcal{H}_0) \arrow[r, leftrightarrow, "\psi_1 \oplus \psi_0", "\cong"'] & \mathrm{GL}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

donde $\psi_0 : \mathcal{H}_0 \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}$ y $\psi_1 : \mathcal{H}_0^{\perp} \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}$ son isomorfismos isométricos, ya que $\mathcal{H}, \mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_0^{\perp}$ son espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

Corolario 2.3.7. *(Kuiper). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (real o complejo), separable y de dimensión infinita. Entonces existe una función continua*

$$g : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$$

tal que $g_0(A) = A$ y $g_1(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ para todo $t \in [0,1]$. En particular, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es contraíble.

Demostración. Escogemos $A_i \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ y $r_i > 0$ tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(A_i) = \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ y $B_{2r_i}(A_i) \subseteq \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, sea $\lambda_i : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to [0,1]$ una partición de la unidad subordinada tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \equiv 1$ y $\mathrm{Sop}(\lambda_i) \subseteq B_{r_i}(A_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Tenemos que el soporte de λ_i es localmente finito, la función

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(\mathcal{H}) & \to & \mathbb{R}^\infty := \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{R}^n \\ A & \mapsto & (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots) \end{array}$$

se factoriza a través de los subespacios de dimensión finita, de donde es continua. Notemos que esta función toma valores en el subconjunto $N := \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$ de $\mathbb{R}^\infty$, donde

$$N_k := \bigcup_{i_0,\dots,i_k \in \mathbb{N}} \langle e_{i_0}, \dots, e_{i_k} \rangle$$

$$\mathrm{Sop}(\lambda_{i_0}) \cap \dots \cap \mathrm{Sop}(\lambda_{i_k}) \neq \varnothing$$

y e_i denota el i-ésimo vector unitario. Denotamos la función continua resultante por

$$\lambda : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to N, \quad \lambda(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots).$$

Por lo tanto por la propiedad universal del límite directo, $\mathbb{R}^\infty \to B(\mathcal{H})$, $(s_1, s_2, s_3, \dots) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} s_i A_i$, define una función continua. Usando $B_{2r_i}(A_i) \subseteq \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ en $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$, por lo tanto tenemos una función continua:

$$\begin{array}{rcl} \rho : \quad N & \to & \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \\ \rho(s_1, s_2, s_3, \dots) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i A_i. \end{array} \tag{2.5}$$

Similarmente, ahora mostraremos que $h : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, dada por

$$h_t(A) := (1-t)A + t \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(A) A_i,$$

define una homotopía de $h_0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H})}$ a $h_1 = \rho \circ \lambda$. En otras palabras, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es dominado por el CW complejo celular N.

Por el teorema 2.3.1, todos los grupos homotópicos de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ son triviales. Usando resultados elementales de complejos celulares, nos permite concluir que la función 2.5 es homotópica a la función constante $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Consecuentemente, $\mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H})} : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, es homotópica a la función constante, $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Así, tenemos que existe una función continua $g : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, tal que $g_0(A) = A$

y $g_1(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Reemplazando $g_t(A)$ con $g_t(\mathrm{Id})^{-1}g_t(A)$, obtenemos una homotopía que fija la identidad también, es decir, $g_t(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, para todo $t \in [0,1]$. ∎

Teorema 2.3.8. *Para cada operador positivo $T \in B(\mathcal{H})$, existe una única raíz cuadrada $S \in B(\mathcal{H})$. Más aún, si $T \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, entonces $S \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$.*

La demostración se puede encontrar en[14], p. 331.

Es importante presentar las siguientes propiedades de la raiz cuadrada. Tenemos que $T = S^2$ si, y sólo si, $S := T^{\frac{1}{2}}$. Entonces,

- Tenemos que $(T^{\frac{1}{2}})^{-1} = (T^{-1})^{\frac{1}{2}}$, ya que, $S^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ S)^{-1} = (S^2)^{-1} = T^{-1}$, por lo tanto
$$(T^{\frac{1}{2}})^{-1} = S^{-1} = (T^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$
- Tenemos que $(T^{\frac{1}{2}})^* = (T^*)^{\frac{1}{2}}$, ya que $S^* \circ S^* = (S \circ S)^* = (S^2)^* = T^*$, por lo tanto
$$(T^{\frac{1}{2}})^* = S^* = (T^*)^{\frac{1}{2}}$$

Lema 2.3.9. *Si $A \subset X$ es un retracto por deformación fuerte, entonces A es homotópicamente equivalente a X, es decir, existe $i : A \hookrightarrow X$ una inclusión y $r : X \to A$ un retracto, tal que $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$ y $r \circ i \simeq \mathrm{Id}_A$.*

La demostración se puede encontrar en [8], p. 3.

El estudio detallado del espacio de operadores unitarios se realiza en el siguiente capítulo. El siguiente corolario es un resultado del teorema de Kuiper, resultado que incluye, como consecuencia, la contractibilidad del espacio de operadores unitarios, así se tiene $U(\mathcal{H})$ el grupo de operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$, es decir,

$$U(\mathcal{H}) := \{U \in B(\mathcal{H}) : UU^* = U^*U = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\},$$

notemos que $U^{-1} = U^*$ y que $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, U^{-1}Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, por lo tanto preserva normas. Como $U(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$, el grupo $U(\mathcal{H})$ puede ser dotado con cualquier topología previamente definida en $B(\mathcal{H})$, al tomar la topología relativa a ese espacio.

Corolario 2.3.10. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. El grupo unitario* $U(\mathcal{H})$ *es un retracto por deformación fuerte de* $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$*, es decir, tenemos que*

$$h : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}), \qquad h_t(A) = A((1-t)\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + t(A^*A)^{-1/2})$$

define una homotopía continua tal que toma valores en $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ *y conecta* $h_0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H})}$ *con una retracción,* $h_1 : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to U(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{GL}(\mathcal{H})$*. Por lo tanto la inclusión canónica,* $U(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$*, es equivalencia homotópica.*

Demostración. Mostraremos que efectivamente $U(\mathcal{H})$ es un retracto por deformación de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Al tomar

$$h_t(A) = A((1-t)\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + t(A^*A)^{-1/2})$$

tenemos que $h_0(A) = A$, por lo tanto $h_0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\mathcal{H})}$. Observemos que

$$h_1(A) = A(A^*A)^{-\frac{1}{2}} = A[(A^*A)^{-1}]^{\frac{1}{2}} = A[(A^*A)^{\frac{1}{2}}]^{-1},$$

por demostrar que $h_1(A) \in U(\mathcal{H})$, por lo tanto probaremos que $h_1(A) \circ (h_1(A))^* = (h_1(A))^* \circ h_1(A) = \mathrm{Id}$. Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} [A(A^*A)^{-\frac{1}{2}}][A(A^*A)^{-\frac{1}{2}}]^* &= A(A^*A)^{-\frac{1}{2}}(A^*A)^{-\frac{1}{2}}A^* \\ &= A(A^*A)^{-1}A^* \\ &= A(A^{-1})(A^*)^{-1}A^* \\ &= \mathrm{Id} \end{aligned}$$

análogamente tenemos que $[A(A^*A)^{-\frac{1}{2}}]^*[A(A^*A)^{-\frac{1}{2}}] = \mathrm{Id}$, entonces $h_1(A) \in U(\mathcal{H})$. Además para el espacio $h_t|_{U(\mathcal{H})} = \mathrm{Id}_{U(\mathcal{H})}$, ya que

$$h_t(A) = A(1-t)\mathrm{Id} + t(A^*A)^{-\frac{1}{2}}) = A - t\mathrm{Id} + t\mathrm{Id} = A.$$

Entonces $h_t(A)$ es un retracto por deformación fuerte. Usando el teorema de Kuiper mostramos que el grupo unitario $U(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert separable e infinito dimensional es contráctil, al tomar la composición de la homotopía en $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ con el retracto por deformación fuerte h_t. Más aún, mostramos que existe una función continua $g : [0,1] \times U(\mathcal{H}) \to U(\mathcal{H})$ tal que $g_0(A) = A$, $g_1(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, para todo $A \in U(\mathcal{H})$, y $g_t(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ para todo $t \in [0,1]$. ∎

Capítulo 3

El grupo unitario infinito

En este capítulo se presentan algunos resultados importantes del artículo [7], donde se prueba que nos podemos restringir a dos topologías, la fuerte y la topología de la norma en el espacio de operadores unitarios $U(\mathcal{H})$. El capítulo comienza con resultados sobre grupos topológicos que se usan en el transcurso del trabajo. También se presenta un teorema sobre la contractibilidad del espacio $U(\mathcal{H})_s$, teorema que se presenta en el trabajo de Dixmier-Douady [6].

3.1. Grupos topológicos

Los grupos topológicos fueron estudiados por primera vez por Schreirer en 1926 y por F.Leja en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* en 1927 donde se establece por primera vez la definición de grupo topológico, aunque la idea ya estaba vigente dentro del análisis en los grupos continuos de transformaciones y en el desarrollo de los grupos de Lie, donde los grupos de Lie son una variedad diferenciable real o compleja que son también un grupos tal que las operaciones de grupo son funciones diferenciables o analíticas, según el caso. De esto último no se adentrará en el tema.

3.1.1. Grupo Topológico

Definición 3.1.1. *Un* ***grupo topológico*** *G es un grupo que es también un espacio topológico y satisface que las aplicaciones*

$$\begin{array}{rcl} p : G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g \cdot h \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{inv} : G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

son continuas.

Un ejemplo de un grupo topológico sería $(\mathbb{R},+)$ que es un grupo y donde

$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{inv}:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

son funciones continuas con la topología usual de $\mathbb{R}$. Otro ejemplo es $(\mathbb{R}^{+},\times)$ que es un grupo y que con la topología usual de $\mathbb{R}$ las funciones

$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R}^{+} \\ (x,y) & \mapsto & x\times y \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{inv}:\mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R}^{+} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

son continuas.

Podemos reescribir que p es continua si se cumple que para cualquier $U\subseteq G$ abierto y $g_1g_2\in U$, entonces existen subconjuntos abiertos V_1,V_2 tal que $g_1\in V_1, g_2\in V_2$ y que $V_1V_2=\{h_1h_2 : h_1\in V_1, h_2\in V_2\}\subseteq U$. Podemos reescribir, en vez de que la aplicación inv sea continua, se cumpla que para cualquier $U\subseteq G$ abierto, entonces $U^{-1}=\{g^{-1}: g\in U\}$ es abierto.

Algunos ejemplos de grupos topológicos que son sencillos de verificar son los siguientes:

1. Sea G cualquier grupo y dotamos a G con la topología discreta.

2. Sea G cualquier grupo y dotamos a G con la topología indiscreta.

3. $(\mathbb{R},+)$ con la topología usual es un grupo topológico.

4. Cualquier subgrupo de un grupo topológico dotado con la topología relativa es un grupo topológico.

Ejemplo 3.1.2. Sea $\mathbb{S}^1_l$ con la operación multiplicación y con la topología relativa en $\mathbb{R}^2_l$, entonces tenemos que $\mathrm{inv}(z)=1/z=\overline{z}$ no es una función continua. Ya que al tomar la topología relativa tenemos que en el primer y tercer cuadrante el conjunto puntual es un abierto en dicha topología. De ese modo al tomar un conjunto abierto $A=\{x_0+iy_0\}$ en alguno de esos cuadrantes, tenemos que $\mathrm{inv}(A)^{-1}$, es igual a x_0-iy_0

que es un punto en el cuarto cuadrante, por lo tanto, no es un conjunto abierto. Con eso se concluye que inv no es una función continua.

En el caso del ejemplo anterior, al tomar la topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$, tenemos que las funciones $f(z,w) = z \cdot w$ y $g(z) = \overline{z}$ son continuas. Por lo tanto si es un grupo topológico.

Sea $GL(n,\mathbb{R})$ dotado con la métrica euclidiana que es heredada por una identificación de cada matriz $n \times n$ con un vector en $\mathbb{R}^{n^2}$. Similarmente dotamos a $GL(n,\mathbb{C})$ con una identificación de cada matriz con un vector en $\mathbb{R}^{2n^2}$.

Proposición 3.1.3. *Los grupos $GL(n,\mathbb{R})$ y $GL(n,\mathbb{C})$ son grupos topológicos.*

Demostración. Solo verificaremos el caso real. Veremos que el producto es continuo, fijamos $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ y $\epsilon > 0$. Usando la continuidad del producto sobre $\mathbb{R}$, nosotros podemos elegir para cada $1 \leq i,k,j \leq n$ un número δ_{ikj} tal que si $|a_{ik} - c_{ik}| < \delta_{ikj}$ y $|b_{kj} - d_{kj}| < \delta_{ikj}$ entonces

$$|a_{ik}b_{kj} - c_{ik}d_{kj}| < \epsilon/n^3.$$

Entonces tenemos que $|(AB - CD)_{ij}| = |\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} - c_{ik}d_{kj}| < \epsilon/n^2$. Para cada n^2 el producto de las entradas son cercanos, por lo tanto tenemos que $d(AB,CD) < \epsilon$ por lo tanto la función producto es continua.

Para ver la continuidad de la inversa, se utiliza que la función $\det : M_n \to \mathbb{R}$ es continua y la fórmula de Cramer (ver referencia de la fórmula de Cramer [1], p. 93). ∎

Proposición 3.1.4. *Sea G un grupo topológico, fijamos $g \in G$. Entonces las funciones $L_p : G \to G$ y $R_g : G \to G$ definidas por $L_g(h) = gh$ y $R_g(h) = hg$ son homeomorfismos. En consecuencia, $V \subseteq G$ es abierto(cerrado) si, y sólo si, gV es abierto(cerrado), más aún, gV es abierto(cerrado) si, y sólo si Vg, es abierto(cerrado).*

Demostración. La función $\gamma_g : G \to G \times G$ definida por $\gamma_g(h) = (g,h)$ es claramente continua. Por lo tanto, $L_g = p \circ \gamma_g$ es continua. Veremos que L_g es un homeomorfismo, note que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ es continua. El resultado de multiplicar por la derecha se sigue de manera similar.

Finalmente, las últimas equivalencias se siguen de $L_h^{-1}(V) = h^{-1}V$ con $h = g^{-1}$ y similarmente con la multiplicación por la derecha. ■

Proposición 3.1.5. *Sea G un grupo topológico, con $V \subseteq G$. Entonces V es abierto(cerrado) si y sólo si V^{-1} es abierto(cerrado).*

Demostración. Al definir el operador inv

$$\begin{aligned} \mathrm{inv} : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

notemos que como $\mathrm{inv} \circ \mathrm{inv}$ es la identidad, inv es un homeomorfismo. ■

Proposición 3.1.6. *Sea G un grupo topológico y sea $U \subseteq G$ un conjunto abierto con $e \in U$. Entonces existe un conjunto abierto V tal que $V = V^{-1}$ y $V \cdot V \subseteq U$.*

Demostración. Tenemos que p es continua por hipótesis, entonces $p^{-1}(U)$ es un abierto en $G \times G$ y $(e,e) \in p^{-1}(U)$. Por lo tanto existen conjuntos abiertos V_1, V_2 con $e \in V_1, e \in V_2$ tal que $V_1 \cdot V_2 \subseteq U$.

Por resultados anteriores, V_1^{-1}, V_2^{-1} también son abiertos, por lo tanto, $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ es también abierto, $e \in V$, $V = V^{-1}$ y $V \cdot V \subseteq V_1 \cdot V_2 \subseteq U$. ■

3.1.2. Homomorfismo de Grupos Topológicos

Definición 3.1.7. *Sea G, K dos grupos topológicos, queremos estudiar los homomorfismos continuos. Diremos que G y K son topológicamente isomorfos si existe una función $\pi : G \to K$ que es un isomorfismo de grupos y un homeomorfismo topológico. A la función la llamaremos un isomorfismo topológico.*

Si tomamos la función $exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ donde los dos espacios tienen como topología la usual en $\mathbb{R}$ tenemos que es un isomorfismo de grupos topológicos. Es sencillo ver que exp es una función continua ya que la imagen inversa de un abierto es un conjunto abierto. Ahora bien tenemos que es biyectiva y se cumple que $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$ para todos los elementos x, y en el conjunto $\mathbb{R}$.

A continuación veremos un ejemplo de grupos topológicos que no son isomorfos. Definimos la siguiente función como $Id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{std}) \to (\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$. Donde $\mathcal{T}_{std}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$ y la topología $2^{\mathbb{R}}$ es la que se define como la potencia de $\mathbb{R}$, es decir, todo subconjunto es un abierto con dicha topología. Es sencillo ver que no es una función isomorfa ya que no es una función continua. Si tomamos un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ como $A = \{x_0\}$ tenemos que $Id^{-1}(x_0) = x_0$ que no es un conjunto abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{std})$.

Proposición 3.1.8. *Sea $\pi : G \to K$ un homomorfismo. Si π es continuo en e_G, entonces π es continua en G.*

Demostración. Tenemos que π es continua en e_G, entonces dado cualquier subconjunto abierto $U \subseteq K$ con $e_k \in U$, entonces $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en G. Mostraremos que π es continua en g, para $g \in G$ arbitrario.

Sea $U \subseteq K$ abierto con $\pi(g) \in U$. Como $\pi(e_G) = e_K \in \pi(g)^{-1}U$ que es abierto en K, por lo tanto, por la continuidad en e_G entonces existe $V \subseteq G$ abierto con $\pi(V) \subseteq \pi(g)^{-1}U$. Pero entonces gV es una vecindad abierta de g, con $\pi(gV) = \pi(g)\pi(V) \subseteq \pi(g)\pi(g)^{-1}U = U$. Por lo tanto π es continua en g, con $g \in G$ arbitraria, entonces π es continua en G. ∎

3.2. El grupo de operadores unitarios

Recordemos que en el espacio de operadores acotados $B(\mathcal{H})$, teníamos algunas topologías, topologías que se definen con respecto a como es la convergencia de sus sucesiones. Para fines del desarrollo del capítulo, enlistaremos nuevamente las topologías definidas anteriormente.

- **Topología de la Norma (Convergencia uniforme):**
  $T_k \to_n T$ *si* $\sup_{|x| \leq 1}\{|T_k x - Tx|\} \to 0$.

- **Topología fuerte(Convergencia puntual):**
  $T_k \to_s T$ si para todo $x \in \mathcal{H}$, $T_k x \to Tx$.

- **Topología débil:**
  $T_k \to_w T$ si para todo $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle T_k x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$

- **Topología Compacto-abierto (Convergencia uniforme sobre un conjunto compacto):**
  $T_k \to_{co} T$ si para todo subconjunto compacto $C \subset \mathcal{H}$, la sucesión restringida $\{T_k|_C\}_k$ converge uniformemente a $T|_C$.

- **Topología Fuerte*:**
  $T_k \to_{s^*} T$ si se cumple que $T_k \to_s T$ y $T_k^* \to_s T^*$.

- **Topología Débil*:**
  $T_k \to_{w^*} T$ si se cumple que $T_k \to_w T$ y $T_k^* \to_w T^*$.

- **Topología compacto-abierto*:**
  $T_k \to_{co^*} T$ si se cumple que $T_k \to_{co} T$ y $T_k^* \to_{co} T^*$.

Sea $U(\mathcal{H})$ el grupo de operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$, es decir,

$$U(\mathcal{H}) := \{U \in B(\mathcal{H}) : UU^* = U^*U = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\},$$

y notemos que $U^{-1} = U^*$ y que $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, U^{-1}Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, por lo tanto preserva normas. Como $U(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$, el grupo $U(\mathcal{H})$ puede ser dotado con cualquier topología previamente definida al tomar la topología relativa a ese espacio. El grupo $U(\mathcal{H})_n$ dotado con la topología de la norma es un grupo topológico, resultado que se prueba adelante, y es el ejemplo típico de lo que se conoce como un grupo de Lie de Banach. El hecho de que $U(\mathcal{H})$ denotado con cualquier topología definida anteriormente es también un grupo topológico es el resultado principal de este capítulo.

El teorema con el que se concluye es que las topologías compacto-abierto, fuerte, débil y sus correspondientes topologías*, coinciden en el grupo $U(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, de dimensión infinita, es decir, un conjunto abierto en una topología lo es también en la otra, cosa que no pasa en $B(\mathcal{H})$ y más aún, el grupo $U(\mathcal{H})$ dotado con una de esas topologías es un grupo polaco, es decir, un grupo topológico completamente metrizable.

Para llegar a dichos resultados necesitaremos los siguientes lemas y sus demostraciones que también se encuentran en el artículo [7], para lo que se necesitarán resultados preliminares en este trabajo .

Lema 3.2.1. *La composición de operadores $U(\mathcal{H})_s \times U(\mathcal{H})_s \to U(\mathcal{H})_s$, $(T,S) \mapsto TS$ es continua con la topología fuerte.*

Demostración. Consideremos las sucesiones convergentes T_k y S_k y la aplicación $(T_k, S_k) \to_s (T,S)$ en $U(\mathcal{H})_s \times U(\mathcal{H})_s$. Para $x \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |T_k S_k x - TSx| &= |T_k S_k x - T_k Sx + T_k Sx - TSx| \\ &\leq |T_k S_k x - T_k Sx| + |T_k Sx - TSx| \\ &= |T_k(S_k x - Sx)| + |(T_k - T)Sx| \\ &= |S_k x - Sx| + |(T_k - T)Sx|, \end{aligned}$$

y como $S_k x \to Sx$ y $T_k(Sx) \to T(Sx)$, entonces $(T_k S_k)x \to (TS)x$. Por lo tanto, la composición de operadores es continua con la topología fuerte. ■

Lema 3.2.2. *La topología débil y la fuerte coinciden en $U(\mathcal{H})$. Por lo tanto, tenemos que $U(\mathcal{H})_s$ es un grupo topológico y más aún, que $U(\mathcal{H})_{s^*} = U(\mathcal{H})_s = U(\mathcal{H})_w$.*

Demostración. Consideremos la convergencia de las sucesiones $T_k \to_w T$ en $U(\mathcal{H})_w$. Para probar que $T_k \to_s T$ es suficiente mostrar la convergencia $T_k x \to Tx$ para x un vector unitario en $\mathcal{H}$. Tenemos que $|x| = 1$ y por lo tanto, $|T_k x| = 1 = |Tx|$. Luego

$$|T_k x - Tx|^2 = |T_k x|^2 - 2\mathrm{Re}\langle T_k x, Tx\rangle + |Tx|^2 = 2 - 2\mathrm{Re}\langle T_k x, Tx\rangle$$

y como $T_k \to_w T$, tenemos que $\langle T_k x, Tx\rangle \to \langle Tx, Tx\rangle = 1$. Como consecuencia $|T_k x - Tx|^2 \to 0$ y por lo tanto $T_k x \to Tx$. Esto muestra que la función identidad $U(\mathcal{H})_w \to U(\mathcal{H})_s$ es continua y así $U(\mathcal{H})_w = U(\mathcal{H})_s$.

Ahora, por el Lema 2.1.1 para operadores en $U(\mathcal{H})$, sabemos que la función inversa $T \mapsto T^* = T^{-1}$ es continua, y por el Lema 3.2.1 sabemos que la composición es continua. Entonces tenemos que $U(\mathcal{H})$ con la topología fuerte es un grupo topológico; el resultado de que la topología fuerte* coincide con la topología débil se obtiene de la continuidad de la función inversa. ■

Lema 3.2.3. *El grupo topológico $U(\mathcal{H})_s$ es metrizable.*

Demostración. Consideramos una base ortonormal $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$, la cual existe porque $\mathcal{H}$ es separable. Consideramos la función

$$\Psi : U(\mathcal{H})_s \to \mathcal{H}^{\mathbb{N}}, \quad T \mapsto (Te_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

donde $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ es dotado con la topología producto. Para una sucesión convergente $T_k \to_s T$ tenemos que $T_k e_j \to Te_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, lo que implica que las funciones $U(\mathcal{H})_s \to \mathcal{H}, T \mapsto Te_j$ son continuas y por lo tanto por las propiedades de la topología producto, en la que basta con verificar la convergencia entrada a entrada, obtenemos que la función Ψ es continua. Con la base $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ se genera un subconjunto denso de $\mathcal{H}$, nosotros tenemos que cualquier dos operadores que coinciden en la base $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deben ser iguales, por lo tanto Ψ es inyectiva.

Ahora mostraremos que la función Ψ es un encaje. Para este propósito tomaremos una sucesión convergente $\Psi(T_k) \to \Psi(T)$ en la imagen de Ψ. Donde $T_k e_j \to Te_j$ para todos los vectores de la base. Tenemos que la sucesión $\{T_k\}_k$ converge puntualmente a T en un subconjunto denso de $\mathcal{H}$ generado por la base $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, y donde los operadores son unitarios, nosotros concluiremos que $T_k \to_s T$. Veamos con más detalle este argumento: tomamos $x \in \mathcal{H}$ y sea $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ donde cada x_j pertenece al subconjunto denso generado por $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y tal que $x_j \to x$. Calculando

$$\begin{aligned} |T_k x - Tx| &\leq |T_k x - T_k x_j| + |T_k x_j - Tx_j| + |Tx_j - Tx| \\ &= |T_k(x - x_j)| + |T_k x_j - Tx_j| + |T(x_j - x)| \\ &= 2|x - x_j| + |T_k x_j - Tx_j|, \end{aligned}$$

como $T_k x_j \to Tx_j$ tenemos que $T_k x \to Tx$ y por lo tanto $T_k \to_s T$. Lo cual implica que la función Ψ induce un homeomorfismo con esa imagen, por lo tanto es un encaje.

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio métrico, y el producto $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ de copias numerables de $\mathcal{H}$ puede ser dotado con una métrica. Donde $U(\mathcal{H})_s \to \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ es un encaje, entonces

$U(\mathcal{H})_s$ hereda la métrica inducida y por lo tanto es metrizable. ■

Lema 3.2.4. *El grupo unitario $U(\mathcal{H})_s$ es un grupo polaco.*

La demostración del lema se encuentra contenida en los dos lemas anteriores.

Hasta aquí tenemos que $U(\mathcal{H})_s$ es un grupo polaco y que $U(\mathcal{H})_s = U(\mathcal{H})_{s^*} = U(\mathcal{H})_w = U(\mathcal{H})_{w^*}$. Notemos en particular que $U(\mathcal{H})_s$ es generado de forma compacta ya que es un espacio metrizable.

Ahora veremos la relación con la topología compacto-abierto en $U(\mathcal{H})$, para lo que se usa el siguiente teorema. Recordemos cuando una familia de operadores F es puntualmente acotada y uniformemente acotada.

1. F está **puntualmente acotada** en un conjunto $G \subseteq X$, cuando está acotada en cada punto $x \in G$, es decir, $\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} < \infty$ para todo $x \in G$ y para cada $T_i \in F$.

2. F está **uniformemente acotada** en un conjunto $G \subseteq X$ cuando existe $M > 0$ tal que $\|Ti(x)\| < M$ para todo $x \in G$ y todo $i \in I$, es decir, $\sup\{\|T_i(x)\| : x \in G, i \in I\} < \infty$.

A continuación se presenta el teorema d Banach-Steinhaus, ya que nos será de gran ayuda como herramienta en una demostración. Como referencia del teorema tenemos [5], p. 100.

Teorema 3.2.5. *(Teorema de Banach-Steinhaus). Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Supongamos que F es una colección de operadores lineales continuos de X a Y. Si para todo x en X tenemos que*

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y < \infty$$

entonces

$$\sup_{T \in F} \|T\|_{B(X,Y)} < \infty.$$

Lema 3.2.6. *La topología compacto abierto y la topología fuerte coinciden en $U(\mathcal{H})$, es decir, $U(\mathcal{H})_{co} = U(\mathcal{H})_s$.*

Demostración. Sea C un subconjunto compacto en $U(\mathcal{H})_s$. Tomamos una sucesión de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en C, donde C es compacto en $U(\mathcal{H})_s$, entonces existe una subsucesión convergente $\{T_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, y como $U(\mathcal{H})_s$ es completamente metrizable entonces C es además cerrado, la subsucesión $T_{n_k} \to_s T$ converge a un operador $T \in C$. Por el Teorema de Bannach-Steinhaus tenemos que la sucesión $\{T_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cada conjunto compacto de $\mathcal{H}$, y por lo tanto tenemos que $T_{n_k} \to_{co} T$. Así el espacio C es también un compacto en $U(\mathcal{H})_{co}$, y por el mismo argumento anterior, la topología inducida de C en $U(\mathcal{H})_{co}$ coincide con la topología inducida de C en $U(\mathcal{H})_s$.

Concluimos que el espacio $U(\mathcal{H})_{co}$ y $U(\mathcal{H})_s$ tienen los mismos conjuntos compactos con la misma topología inducida. Lo que implica que el funtor de retracción k aplicado sobre la función $U(\mathcal{H})_{co} \to U(\mathcal{H})_s$ induce un homeomorfismo

$$k(U(\mathcal{H})_{co}) \xrightarrow{\cong} k(U(\mathcal{H})_s).$$

Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} k(U(\mathcal{H})_{co}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & U(\mathcal{H})_{co} \arrow[d] \\ k(U(\mathcal{H})_s) \arrow[r, "\cong"] & U(\mathcal{H})_s \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

lo que implica que $U(\mathcal{H})_{co} = U(\mathcal{H})_s$. ■

Teorema 3.2.7. *Las topologías compacto-abierto, fuerte, débil y sus correspondientes topologías*, coinciden en el grupo $U(\mathcal{H})$, es decir,*

$$U(\mathcal{H})_{co^*} = U(\mathcal{H})_{s^*} = U(\mathcal{H})_{co} = U(\mathcal{H})_s = U(\mathcal{H})_w = U(\mathcal{H})_{w^*}.$$

Más aún, el grupo $U(\mathcal{H})$ dotado con una de esas topologías es un grupo polaco, es decir, un grupo topológico completamente metrizable.

Demostración. Por el Lema 3.2.2 tenemos que $U(\mathcal{H})_{s^*} = U(\mathcal{H})_s = U(\mathcal{H})_w$, la flecha vertical en el medio y la flecha horizontal inferior derecha del diagrama 3.2 son homeomorfismos, por el Lema 3.2.6 sabemos que $U(\mathcal{H})_{co} = U(\mathcal{H})_s$, entonces la flecha inferior izquierda es también un homeomorfismo. Con la demostración del Lema 3.2.6 puede mostrarse que $U(\mathcal{H})_{co^*} = U(\mathcal{H})_{s^*}$. Finalmente, la flecha vertical derecha es también un homeomorfismo por el Lema 2.1.1. Por lo tanto, el diagrama 3.2 restringido a $U(\mathcal{H})$ se convierte en

$$\begin{tikzcd} U(\mathcal{H})_n \arrow[r] & U(\mathcal{H})_{co^*} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & U(\mathcal{H})_{s^*} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & U(\mathcal{H})_{w^*} \arrow[d, "\cong"] \\ & U(\mathcal{H})_{co} \arrow[r, "\cong"] & U(\mathcal{H})_s \arrow[r, "\cong"] & U(\mathcal{H})_w \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

por lo tanto, ademas de $U(\mathcal{H})_n$, cualquier grupo topologíco en el diagrama 3.2 puede ser conectado usando un homeomorfismo con el grupo polaco $U(\mathcal{H})_s$. Lo que finaliza la demostración del teorema. ∎

La topología de la norma en $U(\mathcal{H})$ tiene estrictamente más conjuntos abiertos que la topología fuerte, como puede verse con la siguiente sucesión de operadores.

Considere $\mathcal{H} := l^2(\mathbb{N})$ y tomemos la sucesión de operadores $T_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que para todo $x = (\xi_n) \in \mathcal{H}$ la n-ésima coordenada de $T_k x$ se define por

$$(T_k x)_n = \begin{cases} \xi_n & n \neq k \\ i\xi_n & n = k \end{cases}$$

se sigue que $T_k^* = T_k^{-1}$ y por lo tanto $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U(\mathcal{H})$. En la topología fuerte la sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al operador identidad $\mathrm{Id} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, por lo tanto, tenemos que

$$|T_k x - \mathrm{Id}x| = |i\xi_k - \xi_k| = |\xi_k||i-1| \to 0$$

para todo $x = (\xi_n) \in \mathcal{H}$. Por otra parte, si $x_k = (\xi_n^{(k)}) \in \mathcal{H}$ es definido por

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ i & n = k \end{cases}$$

entonces $|T_k x_k - \mathrm{Id} x_k| = |1 - i| = \sqrt{2}$ y sigue que $\sup_{|x|\leq 1}\{|T_k x - \mathrm{Id} x|\} \nrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto tenemos que $T_k \to_s \mathrm{Id}$ pero $T_k \nrightarrow_n \mathrm{Id}$.

Por lo tanto, concluímos que las topologías definidas en el comienzo del capítulo se restringen sólo a dos en el grupo unitario. El grupo unitario con la topología de la norma, convierte $U(\mathcal{H})_n$ en un grupo de Lie de Banach, y la topología fuerte convierte a $U(\mathcal{H})_s$ en un grupo polaco.

Para terminar se presenta un resultado del trabajo de Dixmier-Douady, que se puede revisar el trabajo en [6].

3.3. Contractibilidad del espacio $U(\mathcal{H})$

Teorema 3.3.1. *El espacio $U(\mathcal{H})$ es contraíble a un punto con la topología fuerte.*

Para mostrar el teorema primero mostraremos el siguiente lema.

Lema 3.3.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Existen para cada $t \in [0,1]$ un subespacio vectorial cerrado $\mathcal{H}_t$ de $\mathcal{H}$ y una aplicación isométrica y lineal U_t de $\mathcal{H}_t$ en $\mathcal{H}$, con las siguientes propiedades:*

1. *La proyección $\mathrm{P}_t := \mathrm{P}_{\mathcal{H}_t}$ es una función fuertemente continua para $t \in [0,1]$; con $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0 = \{0\}$.*
2. *Los operadores $U_t, \mathrm{P}_t, U_t^{-1}$ son funciones fuertemente continuas para $t \in [0,1]$ y además $U_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$*

Demostración. Para la prueba identificaremos a $\mathcal{H}$ con $L^2([0,1])$. Si $\mathcal{H}_t$ es el conjunto de funciones $f \in L^2([0,1])$ tales que $f(x) = 0$ para $x \geqslant t$. Tenemos que efectivamente $\mathcal{H}_t$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, ya que para ver que es cerrado, tomamos f_n una sucesión de funciones en $\mathcal{H}_t$ tales que convergen a una función f, es decir, que satisfacen que

$$\begin{aligned} f_n \to f \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^t |f_n(x) - f(x)|^2 dx + \int_t^1 |f(x)|^2 dx \to 0 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\int_0^t |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{y} \quad \int_t^1 |f(x)|^2 dx \to 0$$

entonces $|f(x)| = 0$ para casi todo $x \in [t, 1]$, por lo tanto,

$$f|_{[0,t]} \in L^2([0,t]) \quad \text{y} \quad f|_{[t,1]} \equiv 0$$

así tenemos que $f \in \mathcal{H}_t$.

Tenemos que efectivamente $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ ya que

$$\mathcal{H}_1 = \{f \in \mathrm{L}^2([0,1]) \mid f(x) = 0,\ x \geq 1\}$$

y como se define $x \in [0,1]$, queda el caso cuando evaluamos en $x = 1$, pero tenemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, ya que $f|_{[0,1]} \sim f|_{[0,1)}$ con la medida de Lebesgue, por lo tanto $[f|_{[0,1]}] = [f|_{[0,1)}]$.

El espacio $\mathcal{H}_0 = \{0\}$, ya que

$$\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathrm{L}^2([0,1]) \mid f(x) = 0,\ x \geq 0\} = \{0\}.$$

Definimos la función proyección que para $f \in \mathcal{H}$, toma los siguientes valores

$$\mathrm{P}_t(f)(x) := \begin{cases} f(x) & x \leq t \\ 0 & x \geq t \end{cases}$$

que es continua en la topología fuerte, ya que

$$|\mathrm{P}_t f(x) - \mathrm{P}_{t'} f(x)| \to 0$$

cuando $t \to t'$.

Por consecuencia queda probada la propiedad 1. Para la prueba de la propiedad 2 sea $t \in [0,1]$ y $f \in \mathcal{H}_t$, definimos $U_t f \in \mathcal{H}$ como

$$(U_t f)(x) = \sqrt{t} f(tx).$$

donde U_t es isométrica, ya que

$$\|U_t f\|^2 = \langle \sqrt{t} f(tx), \sqrt{t} f(tx) \rangle = \int_0^1 t|f(tx)|^2 dx$$

y utilizando un cambio de variable $x' = xt$ tenemos que eso es igual a

$$\int_0^t |f(x')|^2 dx' = \|f\|^2,$$

ya que $f \in \mathcal{H}_t$ por lo que tenemos que $f(x) = 0$ para $x \geq t$.

También U_t es una función lineal de $\mathcal{H}_t$ en $\mathcal{H}$, ya que tomando $f, g \in \mathcal{H}_t$ se satisface que

- $(U_t(f+g))(x) = \sqrt{t}(f+g)(tx) = \sqrt{t}(f(tx) + g(tx)) = \sqrt{t} f(tx) + \sqrt{t} g(tx) = (U_t f)(x) + (U_t g)(x)$.
- y además $(U_t k f)(x) = \sqrt{t} k f(tx) = k\sqrt{t} f(tx) = k(U_t f)(x)$.

Si tenemos un elemento $g \in \mathcal{H}$, para $0 \leqslant x \leqslant t$ se presenta

$$(U_t^{-1} g)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(\frac{x}{t}).$$

ya que al componer se obtiene

$$(U_t(U_t^{-1} g)(x)) = U_t(\frac{1}{\sqrt{t}} g(\frac{x}{t})) = \sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{tx}{t}\right) = g(x)$$

y además

$$(U_t^{-1}(U_t g)(x)) = U^{-1}(\sqrt{t} f(tx)) = \sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{tx}{t}\right) = g(x)$$

por lo tanto, $U_t(U_t^{-1}) = U_t^{-1}(U_t) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.

Para verificar la continuidad en U_t sea $f \in \mathcal{H}$ entonces

$$\|U_t P_t f - U_{t'} P_{t'} f\|^2 = \int_0^1 |\sqrt{t} f(tx) - \sqrt{t'} f(t'x)|^2 dx$$

y esto tiende a cero cuando $t' \to t$. Por otra parte la continuidad de U_t^{-1} se obtiene ya que

$$\begin{aligned}\|U_t^{-1}f - U_{t'}^{-1}f\|^2 =& \langle U_t^{-1}f - U_{t'}^{-1}f, U_t^{-1}f - U_{t'}^{-1}f\rangle \\ =& 2\|f\|^2 - \langle U_t^{-1}f, U_{t'}^{-1}f\rangle - \overline{\langle U_t^{-1}f, U_{t'}^{-1}f\rangle} \\ =& 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle U_t^{-1}f, tU_{t'}^{-1}f\rangle) \\ =& 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\int_0^{\text{ínf}\,\{t,t'\}} \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t'}} \overline{f\left(\frac{x}{t'}\right)} dx;\end{aligned}$$

si, por ejemplo, $t \leqslant t'$ y suponemos que $t \leq t'$, por lo tanto tendriamos

$$\|U_t^{-1}f - U_{t'}^{-1}f\|^2 = 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\int_0^t \sqrt{\frac{t}{t'}} f(x') \overline{f\left(x'\frac{t}{t'}\right)} dx'$$

Es sencillo ver que el lado derecho de la igualdad tiende a cero cuando $t' \to t$, que prueba la propiedad 2. ■

Demostración. (**Demostración del Teorema 3.3.1**) Sean $\mathcal{H}_t, P_t, U_t$ funciones definidas como en el lema 3.3.2, Para $U \in U(\mathcal{H})$ y $t \in [0,1]$, definimos

$$\begin{aligned} \Phi : U(\mathcal{H}) \times [0,1] &\to U(\mathcal{H}) \\ (U,t) &\mapsto \Phi(U,t) \end{aligned}$$

donde

$$\Phi(U,t) = (\mathrm{Id} - P_t) + U_t^{-1} U U_t P_t;$$

que es un operador que va de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$, con $\mathcal{H} = L^2([0,1])$. Por lo tanto al tomar $f \in L^2([0,1])$ tenemos que

$$\Phi(U,t)(f) = (\mathrm{Id} - P_t)(f) + (U_t^{-1} U U_t P_t)(f);$$

Sea $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_t = \{f \in L^2([0,1]) \,|\, f(x) = 0 \text{ si } x \leq t\}$, al tomar una función $f \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_t$ y al evaluar, obtenemos que

$$\Phi(U,t)(f) = (\mathrm{Id} - P_t)(f) + (U_t^{-1} U U_t P_t)(f) = f$$

por lo tanto $\Phi(U,t)|_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_t} = Id_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_t}$.

Si tomamos a $f \in \mathcal{H}_t$ tenemos que $\Phi(U,t)(f) = U_t^{-1} U U_t(f)$. Por lo tanto, el operador satisface que $\Phi(U,t) \in U(\mathcal{H})$, ya que el operador restringido al espacio $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_t$ y $\mathcal{H}_t$ se puede ver de la siguiente forma

$$\Phi(U,t) = \Phi(U,t)|_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_t} \oplus \Phi(U,t)|_{\mathcal{H}_t}$$

que es igual a

$$\mathrm{Id}|_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_t} \oplus U_t^{-1}UU_t|_{\mathcal{H}_t}$$

donde ambos bloques del operador se encuentran en $U(\mathcal{H})$ y por lo tanto $\Phi(U,t) \in U(\mathcal{H})$ para todo $t \in [0,1]$.

Además $\Phi(U,1) = U$ y $\Phi(U,0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, ya que para $f \in \mathcal{H}$ verificamos que

$$\Phi(U,1)(f(x)) = (\mathrm{Id}-P_1)(f(x)) + (U_1^{-1}UU_1P_1)(f(x)) = f(x) - f(x) + (U_1^{-1}UU_1)(f(x)) = U(f(x))$$

$$\Phi(U,0)(f(x)) = (\mathrm{Id}-P_0)(f(x)) + (U_0^{-1}UU_0P_0)(f(x)) = f(x) - 0 + (U_0^{-1}UU_0)(0) = f(x).$$

Solo falta demostrar que la aplicación Φ que va de $U(\mathcal{H}) \times [0,1]$ a $U(\mathcal{H})$ es continua. En $U(\mathcal{H}) \times (0,1]$ se cumple por el lema 3.3.2. Para la continuidad en $t = 0$ suponemos que $(U',t') \in U(\mathcal{H}) \times [0,1]$ tiende a $(U,0) \in U(\mathcal{H}) \times [0,1]$. A continuación P_t, tiende fuertemente a cero, y, para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$\|U_{t'}^{-1}UU_{t'}P_{t'}f\| = \|P_{t'}f\| \to 0$$

cuando $t' \to 0$, y ya que $U_{t'}^{-1}UU_{t'}$ es una isometría, (ya tenemos que U_t' es isometría, y como $U \in U(\mathcal{H})$ tenemos que $\|Uf\|^2 = \langle Uf, Uf, \rangle = \langle f, U^*Uf\rangle = \langle f,f\rangle = \|f\|^2$, ya que $U^* = U^{-1}$, por lo tanto también es isométrica). Entonces $\Phi(U',t')$ tiende fuertemente a $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = \Phi(U,0)$ y por consiguiente tenemos la continuidad de $\Phi(U,t)$ en $t \in [0,1]$. ∎

Conclusiones

El trabajo presentado se centra en las diferentes topologías en los espacios de operadores lineales, comenzando con el espacio de operadores lineales acotados y como dichas topologías no son equivalentes en $B(\mathcal{H})$. Es necesario ese estudio debido a que se desarrollan algunos resultados para el espacio de operadores lineales invertibles $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$, uno es su contractibilidad, resultado en el que se centra la tesis. Se prueba que el espacio de operadores invertibles es contraíble con la topología compacto abierto. Es importante tener primeramente un acercamiento con clases de homotopías de funciones continuas que preservan el punto base, ya que el resultado principal del trabajo es el teorema de Kuiper que nos dice que toda función continua $X \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es homotópica a la función constante $x \to \mathrm{Id}$, en otras palabras, $[X, \mathrm{GL}(\mathcal{H})] = 0$.

Gracias al teorema de Kuiper en el capítulo 2 se concluye con el corolario (Kuiper) que demuestra la contractibilidad de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ con la topología de la norma, resultado central de la tesis. Es importante el estudio de los Complejos Celulares, ya que se prueba que el espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es dominado por un complejo celular, hecho que ayuda a la construcción de una función continua $g : [0,1] \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, tal que $g_0(A) = A$ y $g_1(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, para todo $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Un último análisis en el trabajo es sobre el espacio de operadores unitarios $U(\mathcal{H})$, comenzando con las diferentes topologías para dotar al espacio, y cuales son equivalentes, como resultado final se obtiene que nos podemos restringir a la topología fuerte de operadores y la topología de la norma.

Un resultado del teorema de Kuiper es la contractibilidad del espacio $U(\mathcal{H})$, resultado que dice que el grupo unitario $U(\mathcal{H})$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Para finalizar se presenta que el espacio de operadores unitarios $U(\mathcal{H})$ es contraíble con la topología fuerte. Como conclusión general se tiene, de manera poco intuitiva, que el espacio $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ es contraíble a un punto, es decir, puede ser deformado continuamente hasta convertirlo en un punto.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Calculus: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability.* Wiley, 1969.

[2] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis.* 1974.

[3] K. B. Athreya and S. N. Lahiri. *Measure Theory and Probability Theory.* Number 91 in Springer Texts in Statistics. Springer, July 27 2006.

[4] M. Atiyah and G. Segal. Twisted K-theory and cohomology, Octubre 2005.

[5] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis.* 1994.

[6] J. Dixmier and A. Douady. Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres. *Bull. Soc. Math. France*, 91:227–284, 1963.

[7] J. Espinoza and B. Uribe. Topological properties of the unitary group. *JP Journal of Geometry and Topology*, 16(1):45–55, October 2014.

[8] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge, New York, NY., 2002.

[9] K. Hoffman and R. Kunze. *Algebra Lineal.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., 1973.

[10] N. H. Kuiper. The homotopy type of unitary group of hilbert space. *Topology*, 3:19–30, 1965.

[11] J. R. Munkres. *Topología.* Pearson Educacíon, 2002.

[12] M. E. Rudin. A new proof that metric spaces are paracompact. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20:603, 1969.

[13] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, volume 74 of *International Series in Pure and Applied Mathematics.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math;, 3 edition, 1986.

[14] W. Rudin. *Functional Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2 edition, January 1991.