"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Descomposición de medidas y la equivalencia de los teoremas de representación de Riesz y de Radon-Nikodym

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Francisco Alejandro Villegas Acuña

Director de tesis: Dr. Fernando Luque Vásquez

Hermosillo, Sonora, México, 30 de junio de 2018

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Luque Vásquez

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. María Teresa Robles Alcaráz

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dedicatoria

A mi familia, amigos y a Lucía.

Agradecimientos

A lo largo de mi vida he tenido algunos obstáculos y dificultades que impedían lograr mis objetivos, por fortuna siempre he contado con personas que han creído en mí y me han apoyado en los momentos más complicados. Es por esto que quiero hacerles saber que todo lo que he logrado es y será gracias a ellos; principalmente quiero agradecer a mis padres Candelario y Norma, por su apoyo y sacrificio incondicional, a mi hermano David por siempre tratar de guiarme y enseñarme que el trabajo duro, tarde o temprano, traerá sus beneficios; a mi hermana por no solo limitarse a ser eso, sino también por ser amiga y mamá, por cuidarme y apoyarme cuando más lo he necesitado; a mis tías que sin su apoyo y sabiduría no estaría ni cerca de donde estoy; a mi amigo Héctor por su amistad sincera, por convertirse en un hermano y por compartirme de su hermosa familia que tanto cariño me entrega; a mi amigo Pedro por ser mi camarada de estudio, por ayudarme a convertirme en un mejor matemático y porque, con su bondad y asombrosa capacidad intelectual me ha ilustrado sobre las cosas importantes de la vida, también agradezco a su familia por arroparme y tratarme como un hijo más; a mi primo Efraín por motivarme a seguir mejorando y mostrarme que el sacrificio es necesario para lograr cosas grandes; a mi novia Lucía que, con su calidez, bondad, alegría y perseverancia me ayuda a superar los momentos más complicados y quien me motiva a lograr mis metas.

Quiero agradecer a mi director de tesis el Dr. Fernando Luque por confiar en mí, prácticamente sin haber sido su alumno, por guiarme con sabiduría y paciencia a lo largo de este trabajo; de igual manera a mis sinodales la Dra. Teresa Robles, el Dr. Adolfo Minjarez y la Dra. Martha Guzmán por revisar este trabajo, por darme sus mejores consejos y por la amabilidad y disponibilidad que mostraron siempre. Así mismo quiero reconocer la importancia de los siguientes profesores en mi paso por la universidad, por ir más allá de lo que el trabajo exige y darse el tiempo para aconsejar y platicar con sus alumnos sobre matemáticas y la vida: a la Dra. Carolina Espinoza, al Dr. Genaro Hernández, a la Dra. Marysol Navarro, al Dr. Martín Gildardo García, a la Dra. Luz del Carmen Rosas Rosas, a la Dra. Jessica Santana, a la Dra. Silvia Ibarra, al profesor Arturo Fragozo, al maestro

Carlos Robles y al maestro Alfredo Galaviz. Cada consejo suyo ha tenido y seguirá teniendo un gran impacto en mi vida. A mis compañeros del departamento de matemáticas: Aaron, Yitzhak, Paola, Nohemy, Dulce, Katya, Alberto, Ángel, Mario, Ying, Alejandra y Jesús por apoyarme y mejorar mis días malos en la universidad con un consejo, una charla amistosa, un buen chiste o una alegre sonrisa. Finalmente quiero señalar que muchas personas más han colaborado para que hoy pueda lograr este objetivo, y no olvidaré cada buen gesto que tuvieron conmigo.

Francisco Alejandro Villegas Acuña
Hermosillo, Sonora
3 de julio de 2018

Contenido

Introducción

Si f es una función medible no negativa definida en un espacio con medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$, es posible definir una medida en $(X, \mathcal{S})$ mediante

$$\nu_f(E) := \int_E f d\mu, \text{ para } E \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

El teorema de Radon-Nikodym es en cierta forma un resultado recíproco al enunciado anterior y establece condiciones bajo las cuales, dadas dos medidas ν, μ definidas en $(X, \mathcal{S})$, es posible representar ν como en (1) para alguna función f medible no negativa definida en $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Este resultado lo demostró Johann Radon para el caso $X = \mathbb{R}^n$ en 1913 y en 1930 Otto M. Nikodym lo extendió al caso de espacios de medida generales.
Por otra parte, un resultado muy importante del análisis funcional es el teorema de representación de Riesz en L_p el cual establece un isomorfismo isométrico entre el espacio de las funcionales lineales continuas en L_p (espacio dual topológico de L_p) con el espacio L_q donde q es el índice conjugado de p. Este teorema lo demostró Frigyes Riesz en 1910.

En este trabajo mostramos que el teorema de representación de Riesz en L_2 y el teorema de Radon-Nikodym son equivalentes en el siguiente sentido: partiendo de uno de los dos teoremas, es posible llegar a una demostración del otro teorema, utilizando herramientas básicas de teoría de la medida y el análisis funcional.
El camino que seguimos para mostrar lo anterior iniciará en el primer capítulo estableciendo algunas herramientas del análisis funcional y de la teoría de la medida que nos servirán para el desarrollo de este trabajo. El resultado más importante en este capítulo es el teorema de representación de Riesz en L_2. Luego, en el segundo capítulo partimos de un resultado debido a John von Neumann en el cual se determina una descomposición (partición) de un espacio medible a partir de dos medidas σ-finitas dadas en dicho espacio. Después, como consecuencia del teorema de von Neumann, demostramos el teorema de descomposición de Lebesgue el cual, como su nombre lo describe, descompone una medida como suma de dos medidas muy particulares. Luego, como consecuencia de

los dos teoremas anteriores, establecemos el teorema de Radon-Nikodym. Cerramos el capítulo definiendo la derivada de Radon-Nikodym, estableciendo algunas propiedades de ella y justificando la palabra «derivada» en su nombre. En el tercer capítulo definimos las medidas con signo y desarrollamos otro camino para demostrar el teorema de Radon-Nikodym y presentamos una extensión de este teorema al caso de medidas con signo. Después de probar algunas propiedades de las medidas con signo, establecemos el teorema de descomposición de Hahn, luego el teorema de descomposición de Jordan y concluímos con el teorema de Radon-Nikodym para medidas con signo. En el cuarto y último capítulo cerramos este trabajo con el teorema de representación de Riesz en L_p, el cual se demuestra utilizando el Teorema de Radon-Nikodym para medidas con signo.
Por supuesto, el caso particular $p = 2$ es el teorema que se demuestra en el primer capítulo con lo que tenemos entonces la equivalencia de los teoremas de representación de Riesz y de Radon-Nikodym.

Capítulo 1

El Teorema de representación de Riesz en L_2

El objetivo principal de este primer capítulo es demostrar el Teorema de Representación de Riesz para funcionales continuos en L_2. Iniciamos con algunos resultados que se utilizarán en la demostración del Teorema de representación de Riesz, el cual se presenta en la sección 1.2 y concluimos el capítulo con algunos resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo.

1.1. Resultados preliminares

En esta sección se presentan los espacios L_p, en particular L_2, así como algunos resultados de análisis funcional que serán utilizados a lo largo de este capítulo.

Definición 1.1.1. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida σ-finito. Para $1 \leqslant p < \infty$, el espacio $L_p(X, \mathcal{S}, \mu) = L_p(\mu)$ es el espacio de todas las funciones medibles definidas en $(X, \mathcal{S})$ con valores reales tales que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$.*

El espacio $L_p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si identificamos las funciones que coinciden μ-casi donde quiera, la función $\|\cdot\|_p : L_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

resulta una norma bajo la cual $L_p(\mu)$ es completo (ver [1], [4], [5]).
Recordemos que un producto interior en un espacio vectorial V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:
(i) Si $x, y \in V$, entonces $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
(ii) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y, z \in V$, entonces $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.
(iii) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ para toda $x \in V$.
(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Proposición 1.1.2. *La función $\langle\cdot,\cdot\rangle : L_2(\mu) \times L_2(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)g(x)d\mu(x), \tag{1.1}$$

resulta un producto interior en $L_2(\mu)$.

Demostración. Ver [4]. ■

Proposición 1.1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera $f, g \in L_2(\mu)$ se cumple que*

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2 \tag{1.2}$$

Demostración. Ver [4]. ■

Proposición 1.1.4. *Sea S cualquier subconjunto no vacío de $L_2(\mu)$ y sea*

$$S^\perp := \{h \in L_2(\mu) : \langle f, h\rangle = 0 \text{ para toda } f \in S\}.$$

Entonces $S^\perp$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mu)$.

El conjunto $S^\perp$ es llamado el complemento ortogonal de S.

Demostración. Ver [2]. ■

Teorema 1.1.5. *Sea $f \in L_2(\mu)$, S un subespacio cerrado propio de $L_2(\mu)$ y sea*

$$\alpha := \operatorname{ínf}\{\|f - g\|_2 : g \in S\}.$$

Entonces existe una única función $f_0 \in S$ tal que $\alpha = \|f - f_0\|_2$. Además, si $f \notin S$ entonces $0 \neq (f - f_0) \in S^\perp$.

Demostración. Para probar la existencia primero notemos que por la definición de α, existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S tal que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_2.$$

Como S es un subespacio, $(g_n + g_m)/2 \in S$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|(g_n + g_m)/2 - f\|_2 \geqslant \alpha, \tag{1.3}$$

luego por la identidad del paralelogramo (ver [3]) y (1.3) tenemos que

$$\|g_n - g_m\|_2^2 = 2\|f - g_n\|_2^2 + 2\|g_m - f\|_2^2 - \|g_n + g_m - 2f\|_2^2 \leqslant 2\|f - g_n\|_2^2 + 2\|g_m - f\|_2^2 - 4\alpha^2.$$

Por lo tanto, $\lim_{n,m\to\infty} \|g_n - g_m\|_2 = 0$, lo que muestra que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L_2(\mu)$. Dado que $L_2(\mu)$ es completo, existe $f_0 \in L_2(\mu)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f_0\|_2 = 0,$$

y puesto que S es cerrado, $f_0 \in S$. Además, por la desigualdad del triángulo

$$|\|f_0 - f\|_2 - \|g_n - f\|_2| \leqslant \|g_n - f_0\|_2,$$

por lo tanto

$$\|f_0 - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_2 = \alpha.$$

Ahora bien, supongamos que $f \notin S$, entonces $h := f_0 - f \neq 0$. Para todo $g \in S$ fijo, consideremos la función

$$\phi(\beta) = \|h + \beta g\|_2^2, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

De nuevo, como S es un subespacio, $(f_0 + \beta g) \in S$ y por lo tanto

$$\phi(\beta) = \|h + \beta g\|_2^2 = \|(f_0 + \beta g) - f\|_2^2 \geqslant \alpha^2,$$

es decir, $\phi(\beta) - \alpha^2 \geqslant 0$. Como $\alpha^2 = \|h\|_2^2$, tenemos que

$$0 \leqslant \phi(\beta) - \alpha^2 = \|h + \beta g\|_2^2 - \|h\|_2^2 = \langle h + \beta g, h + \beta g\rangle - \langle h, h\rangle = 2\beta\langle h, g\rangle + \beta^2\langle g, g\rangle.$$

En particular, si escogemos $\beta = t\langle h, g\rangle, t \in \mathbb{R}$, entonces

$$0 \leqslant 2t\langle h, g\rangle^2 + t^2\langle h, g\rangle^2\|g\|_2^2 \text{ para toda } t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que la parte derecha es una función cuadrática (en t), no-negativa y que tiene un máximo en $t = 0$. Por lo tanto el coeficiente del término lineal debe ser cero, es decir, $\langle h, g\rangle = 0$. Por lo tanto $h \perp S$.

Para probar la unicidad de f_0, supongamos que también existe $f_1 \in S$ tal que

$$\|f - f_1\|_2 = \text{ínf}\{\|f - g\|_2 : g \in S\},$$

entonces

$$\|f - f_0\|_2 = \|f - f_1\|_2 = \text{ínf}\{\|f - g\|_2 : g \in S\} := \alpha.$$

Como $f_0, f_1 \in S$ y S es un subespacio, tenemos que $(f_1 + f_2)/2 \in S$ y por lo tanto

$$\alpha \leqslant \|(f_1 + f_2)/2 - f\|_2 = (\|f_0 + f_1 - 2f\|_2)/2. \tag{1.4}$$

Luego, por la identidad del paralelogramo y (1.4),

$$\|f_1-f_0\|_2^2 = \|(f_1-f)-(f_0-f)\|_2^2 = 2\|f_1-f\|_2^2+2\|f-f_0\|_2^2-\|f_1+f_0-2f\|_2^2 \leqslant 2\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha^2 = 0.$$

Por lo tanto $\|f_1 - f_0\|_2^2 = 0$, es decir, $f_1(x) = f_0(x)$ para μ-casi toda x en X, con lo que terminamos la prueba. ■

Corolario 1.1.6. *Si S un subespacio cerrado propio de $L_2(\mu)$, entonces $S^{\perp} \neq \{0\}$.*

1.2. El Teorema de Representación de Riesz

En esta sección se presenta la definición de una funcional lineal continua, señalamos algunas propiedades importantes de ellas y conlcuímos con el Teorema de de representación de Riesz, el cual caracteriza a estas funciones especiales.

Definición 1.2.1. *Una función $T : L_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada una funcional lineal acotada si tiene las siguientes propiedades:*
(i) Para cualesquiera $f, g \in L_p(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

(ii) Existe un número real M tal que

$$|T(f)| \leqslant M\|f\|_p, \text{ para toda } f \in L_p(\mu).$$

Proposición 1.2.2. *Sea $T : L_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada, y sea*

$$\text{Ker}(T) := \{f \in L_p(\mu) : T(f) = 0\}.$$

Entonces $\mathrm{Ker}(T)$ *es un subespacio cerrado de* $L_p(\mu)$.

Demostración. Que $\mathrm{Ker}(T)$ sea subespacio se sigue de la linealidad T y que sea cerrado es inmediato de la definición. ∎

El conjunto $\mathrm{Ker}(T)$ es llamado el espacio nulo de T o kernel de T. A continuación se presenta el teorema de representación de Riesz para el caso particular de $L_2(\mu)$.

Teorema 1.2.3 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea* $T : L_2(\mu) \to \mathbb{R}$ *una funcional lineal acotada, entonces existe una única función* $g_0 \in L_2(\mu)$ *tal que*

$$T(f) = \langle f, g_0 \rangle \text{ para todo } f \in L_2(\mu). \tag{1.5}$$

Demostración. Primero notemos que si existe la función g_0 entonces $0 = T(f) = \langle f, g_0 \rangle$ para toda $f \in \mathrm{Ker}(T)$, es decir, $g_0 \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$.
Lo anterior sugiere en dónde buscar g_0. Por la proposición 1.2.2 tenemos que $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mu)$. Luego, tenemos dos posibilidades. La primera de ellas es que $\mathrm{Ker}(T) = L_2(\mu)$, es decir, $T(f) = 0$ para toda $f \in L_2(\mu)$ y en tal caso, $T(f) = \langle f, 0 \rangle$ para $f \in L_2(\mu)$. La segunda posibilidad es que $T(f) \neq 0$ para algún $f \in L_2(\mu)$, por lo tanto $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio cerrado propio de $L_2(\mu)$. Entonces, por el Corolario 1.1.6, $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp} \neq \{0\}$. Sea $0 \neq g \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$; notemos que g no necesariamente es el elemento g_0 que buscamos pues g_0 debe cumplir

$$T(g_0) = \langle g_0, g_0 \rangle.$$

Sea $\alpha := T(g)$, entonces $\alpha \neq 0$; pues $\alpha = 0$ implica $g = 0$. Luego, definimos $g_0 \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ por

$$g_0 := \frac{\alpha}{\langle g, g \rangle} g.$$

Entonces para todo $\beta \in \mathbb{R}$

$$\langle \beta g, g_0 \rangle = \beta \langle g, g_0 \rangle = \beta \langle g, \frac{\alpha}{\langle g, g \rangle} g \rangle = \alpha\beta$$

y

$$T(\beta g) = \beta T(g) = \alpha\beta.$$

Por lo tanto

$$T(\beta g) = \langle \beta g, g_0 \rangle \ \textit{para toda } \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Además, debido a que $g_0 \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$, tenemos que

$$T(f) = 0 = \langle f, g_0 \rangle \ \textit{para toda} \ f \in \mathrm{Ker}(T). \tag{1.7}$$

Por otra parte, para cualquier $f \in L_2(\mu)$ tenemos que $(f - \beta g) \in \mathrm{Ker}(T)$ si y sólo si

$$0 = T(f - \beta g) = T(f) - \beta T(g),$$

lo cual se cumple si y sólo si

$$\beta = \frac{T(f)}{T(g)}.$$

Por lo tanto, si f es una función arbitraria en $L_2(\mu)$, entonces por (1.6), (1.7) y la linealidad de T

$$\begin{aligned} T(f) =& T\left(f - \frac{T(f)}{T(g)}g + \frac{T(f)}{T(g)}g\right) = T\left(f - \frac{T(f)}{T(g)}g\right) + T\left(\frac{T(f)}{T(g)}g\right) \\ =& \left\langle f - \frac{T(f)}{T(g)}g, g_0 \right\rangle + \left\langle \frac{T(f)}{T(g)}g, g_0 \right\rangle = \langle f, g_0 \rangle \end{aligned} \tag{1.8}$$

y por lo tanto g_0 satisface 1.5.

Para probar la unicidad de g_0, supongamos que también existe g_1 con la propiedad de que $T(f) = \langle f, g_1 \rangle$ para todo $f \in L_2(\mu)$, entonces por linealidad del producto interior tenemos, $\langle f, g_0 - g_1 \rangle = 0$ para todo $f \in L_2(\mu)$, luego si $f = g_0 - g_1$, se sigue $\|g_0 - g_1\|^2 = \langle g_0 - g_1, g_0 - g_1 \rangle = 0$, lo que implica que $g_0 = g_1$. ■

1.3. Elementos de teoría de la medida

Esta sección está dedicada a señalar resultados de teoría de la medida que serán el capítulos posteriores.

Proposición 1.3.1. *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y sean μ, ν medidas σ-finitas en $(X, \mathcal{S})$, entonces existe una sucesión de subconjuntos $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ mutuamente ajenos tal que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \quad \text{y} \qquad \mu(X_n) < +\infty, \ \nu(X_n) < +\infty, \ \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como ambas medidas son σ-finitas, para μ y ν existen sucesiones de subconjuntos medibles mutuamente ajenos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente, tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \quad \text{y} \quad \mu(A_n) < \infty, \nu(B_n) < \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\{C_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}} := \{A_n \cap B_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles mutuamente ajenos tal que

$$\bigcup_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} = X, \;\; \mu(C_{n,m}) < \infty,$$

$$\text{y } \nu(C_{n,m}) < \infty, \text{para toda } n, m \in \mathbb{N}.$$

Luego, indexamos la sucesión $\{C_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ para obtener la sucesión $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

■

Las demostraciones de los siguientes teoremas pueden verse en [1],[4], [5].

Teorema 1.3.2 (Teorema de Convergencia monótona). *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente de funciones medibles no-negativas que convergen a una función f, entonces f es medible y*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 1.3.3 (Teorema de Convergencia Dominada). *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones μ-integrables que convergen en μ-casi toda x de X a una función medible real-valuada f. Si existe una función μ-integrable g tal que $|f_n| \leqslant g$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces f es μ-integrable y*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Proposición 1.3.4. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida y sea f una función medible no-negativa en $(X, \mathcal{S})$, entonces la función $\nu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\nu(E) := \int_E f d\mu,$$

es una medida en $(X, \mathcal{S})$.

Demostración. Es inmediato que $\nu(\emptyset) = 0$ y tenemos que ν es no negativa pues la integral de una función no negativa es no negativa, además si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en

$\mathcal{S}$ cuyos elementos son mutuamente ajenos tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y si $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, entonces $\chi_{A_n} f \nearrow \chi_E f$ puntualmente, luego por la linealidad de la integral y el Teorema de Convergencia Monótona 1.3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{E_n} f d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{A_n} f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \chi_{A_n} f d\mu \\ &= \int_E f d\mu = \nu(E).\end{aligned}$$

Por lo tanto ν es una medida. ■

Las demostraciones de las proposiciones siguientes pueden verse en [4].

Proposición 1.3.5. *Sea $f \in L_1(\mu)$, donde $\mu(X) < \infty$ y sea S un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ tal que para todo $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) > 0$,*

$$\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \right) \in S.$$

Entonces $f(x) \in S$ para *μ-casi toda x en X.*

Proposición 1.3.6. *Sea $f \in L_p(\mu), 1 \leqslant p < \infty$, y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función simple $s \in L_p(\mu)$ tal que $\|f - s\|_p < \epsilon$ y $|s| \leqslant |f|$.*

Capítulo 2

El Teorema de Radon-Nikodym

El objetivo principal de este capítulo es presentar una demostración del Teorema de Radon-Nikodym utilizando el Teorema de descomposición de J. von Neumann el cual se basa en el Teorema de Representación de Riesz. Para ello, dividimos el capítulo en dos secciones: en la primera sección, demostramos el teorema mencionado de J. von Neumann, el cual establece una importante relación entre dos medidas σ-finitas arbitrarias definidas en un espacio medible; después continuamos con el Teorema de Descomposición de Lebesgue, introducimos el concepto de continuidad absoluta entre medidas, y concluimos con la demostración del Teorema de Radon-Nikodym. En la segunda sección del capítulo definimos la derivada de Radon-Nikodym y presentamos un ejemplo de medidas en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ que justifica el uso de la palabra «derivada». Finalmente, cerramos el capítulo con una importante aplicación del Teorema de Radon-Nikodym en la teoría de probabilidad.

2.1. Descomposición de medidas

En esta sección establecemos dos teoremas que serán fundemanetales para la demostración del Teorema de Radon-Nikodym, tal resultados son: el Teorema de descomposición de von Neumann y el Teorema de descompoisción de Lebesgue.

2.1.1. Teorema de descomposición de von Neumann

Cuando se tienen dos medidas arbitrarias en un espacio medible $(X, \mathcal{S})$, la relación entre ellas es en principio nula, pero si ambas medidas son σ-finitas, resulta que están estrechamente relacionadas. A continuación se presenta un teorema que muestra dicha afirmación.

Teorema 2.1.1. *Sean ν y μ medidas σ-finitas en un espacio medible $(X, \mathcal{S})$. Entonces existen conjuntos $X_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, 3$ mutuamente ajenos, tal que se cumple lo siguiente:*
(i) $\bigcup_{i=1}^{3} X_i = X$,
(ii) $\nu(X_3) = \mu(X_1) = 0$,
(iii) existe una función medible no negativa g en X tal que $g(x) > 0$ para toda $x \in X_2$ y para $E \in \mathcal{S}$ con $E \subseteq X_2$ se tiene

$$\nu(E) = \int_E g d\mu.$$

Demostración. Caso (1) : ν y μ son finitas.
Como ν y μ son medidas finitas, entonces $\mu + \nu$ también es una medida finita en $(X, \mathcal{S})$. Afirmamos que

$$L_2(\mu + \nu) \subseteq L_1(\mu + \nu) \subseteq L_1(\nu).$$

En efecto, si $f \in L_2(\mu+\nu)$ entonces $|f| \in L_2(\mu+\nu)$; por otro lado, dado que $(X, \mathcal{S}, \mu+\nu)$ es un espacio medida finita, todas las funciones constantes están en $L_2(\mu+\nu)$, en particular $h \equiv 1$. Luego, por la desiguladad de Cauchy-Schwarz para $|f|$ y h

$$\int_X |f| d(\mu + \nu) = |\langle |f|, h\rangle| \leqslant \|f\|_2 \|h\|_2 = \|f\|_2 ((\mu + \nu)(X))^{1/2} < +\infty,$$

por lo tanto $f \in L_1(\mu + \nu)$. Ahora, si $f \in L_1(\mu + \nu)$, dado que la medida de cualquier conjunto en $\mathcal{S}$, con respecto a la medida $(\mu + \nu)$, es mayor o igual que la medida del mismo conjunto, con respecto a la medida ν, es inmediato de la definicion de integral que

$$\int_X |f| d\nu \leqslant \int_X |f| d(\mu + \nu) < +\infty,$$

es decir, $f \in L_1(\nu)$. Ahora, sea $T : L_2(\mu + \nu) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(f) := \int_X f d\nu.$$

Entonces, por la afirmación anterior T es una función bien definida, es lineal y para toda $f \in L_2(\mu+\nu)$,

$$|T(f)| = |\int_X f d\nu| \leqslant \int_X |f| d\nu \leqslant \int_X |f| d(\mu+\nu) \leqslant ((\mu+\nu)(X))^{1/2} \|f\|_2.$$

Por lo tanto, T es una funcional lineal acotada en $L_2(\mu+\nu)$, luego por el Teorema de representación de Riesz 1.2.3, existe una función $f_0 \in L_2(\mu+\nu)$ tal que

$$T(f) = \int_X f f_0 d(\mu+\nu), \ \ f \in L_2(\mu+\nu),$$

es decir,

$$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d(\mu+\nu), \ \ f \in L_2(\mu+\nu).$$

Así, tomando $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\nu(E) = \int_E f_0 d(\mu+\nu).$$

Como esto se cumple para cualquier $E \in \mathcal{S}$, se sigue que $f_0(x) \geqslant 0$ para $(\mu+\nu)$-casi toda x en X, pues si existe $B \in \mathcal{S}$ con $(\mu+\nu)(B) > 0$ tal que $f_0(x) < 0$ para toda $x \in B$, tendríamos que $\nu(B) = \int_B f_0 d(\mu+\nu) < 0$ lo cual no es posible pues ν es una medida. Además, para $E \in \mathcal{S}$, tenemos que

$$\int_E 1 d(\mu+\nu) = (\mu+\nu)(E) \geqslant \nu(E) = \int_E f_0 d(\mu+\nu),$$

por lo tanto,

$$\int_E (1-f_0) d(\mu+\nu) \geqslant 0,$$

lo cual implica, por el mismo argumento anterior, que $0 \leqslant f_0(x) \leqslant 1$ para $(\mu+\nu)$-casi toda x en X. Sean

$N := \{x \in X : f_0(x) < 0\} \cup \{x \in X : 1 < f_0(x)\}$,

$X_1' := \{x \in X : f_0(x) = 1\}, X_1 := N \cup X_1'$,

$X_2 := \{x \in X : 0 < f_0(x) < 1\}$,

$X_3 := \{x \in X : f_0(x) = 0\}$.

Entonces, como ya demostramos $(\mu+\nu)(N) = 0$, lo que implica $\mu(N) = 0$. Además, por la medibilidad de f_0, los conjuntos $X_i, i = 1, 2, 3$ pertenecen a $\mathcal{S}$, son mutuamente ajenos y $\cup_{i=1}^3 X_i = X$. También,

$$\nu(X_3) = \int_{X_3} f_0 d(\mu + \nu) = 0$$

y

$$\mu(X_1') = (\mu + \nu)(X_1') - \nu(X_1') = \int_{X_1'} (1 - f_0) d(\mu + \nu) = 0,$$

por lo tanto, $\mu(X_1) = \mu(N \cup X_1') = \mu(N) + \mu(X_1') = 0$. Finalmente, para todo $E \in \mathcal{S}$, $E \subset X_2$,

$$\nu(E) = \int_E f_0 d(\mu + \nu) = \int_E f_0 d\mu + \int_E f_0 d\nu.$$

Por lo tanto,

$$\nu(E) - \int_E f_0 d\nu = \int_E f_0 d\mu,$$

es decir,

$$\int \chi_E (1 - f_0) d\nu = \int_E (1 - f_0) d\nu = \int_E f_0 d\mu = \int \chi_E f_0 d\mu.$$

Como esto se cumple para todo $E \in \mathcal{S}$, tal que $E \subset X_2$ se sigue que

$$\int_{X_2} s(1 - f_0) d\nu = \int_{X_2} s f_0 d\mu,$$

para toda función medible simple no-negativa s. Luego, como $f \geqslant 0$ es medible si y sólo si existe una sucesión de funciones medibles simples no negativas que convergen crecientemente a f, utilizando el teorema de convergencia monótona tenemos que

$$\int_{X_2} f(1 - f_0) d\nu = \int_{X_2} f f_0 d\mu,$$

para toda función medible no negativa f. En particular, para $E \in \mathcal{S}$, con $E \subset X_2$, sea

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\chi_E(x)}{1 - f_0(x)} & \text{si } x \notin X_1 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Por lo tanto, para $E \in \mathcal{S}$, con $E \subset X_2$,

$$\nu(E) = \int_E \frac{f_0(x)}{1 - f_0(x)} d\mu.$$

Luego, si $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f_0(x)}{1-f_0(x)} & \text{si } x \notin X_1 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

entonces, g es una función medible no negativa tal que $g(x) > 0$ para toda $x \in X_2$ y para $E \in \mathcal{S}$, $E \subset X_2$,

$$\nu(E) = \int_E g d\mu,$$

con lo que se concluye la demostración para el caso (1).
Caso (2) : ν y μ son σ-finitas.
Dado que ambas medidas son σ-finitas, la proposición 1.3.1 implica que existe una sucesión de subconjuntos medibles $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mutuamente ajenos tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, $\mu(Y_n) < \infty$ y $\nu(Y_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$. Por el caso (1), para toda $i \in \mathbb{N}$, podemos encontrar conjuntos mutuamente ajenos $X_i^1, X_i^2, X_i^3 \in \mathcal{S}$ tales que $Y_i = X_i^1 \cup X_i^2 \cup X_i^3$ con $\nu(X_i^3) = \mu(X_i^1) = 0$ y existe una función medible (en $(Y_i, S \cap Y_i)$) no negativa g_i tal que $g_i > 0$ para toda x en X_i^2, $g_i(x) = 0$ para toda x en $X_i^1 \cup X_i^3$, y para $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E \cap X_i^2) = \int_{E\cap X_i^2} g_i d\mu.$$

Definiendo,

$$X_1 := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i^1,\ X_2 := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i^2,\ X_3 := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i^3,$$

y

$$g(x) := \begin{cases} g_i(x) & \text{si } x \in X_i^2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

tenemos que X_1, X_2, X_3 y g cumplen las propiedades requeridas. ∎

2.1.2. Teorema de descomposición de Lebesgue

Una consecuencia del Teorema de descomposición de von Neumann es un teorema debido a H.L. Lebesgue el cual muestra que podemos descomponer cualquier medida σ-finita en la suma de dos medidas muy particulares, las cuales motivan las definiciones de medidas singulares (Definición 2.1.3) y medidas absolutamente continuas (Definición 2.2.1).

Teorema 2.1.2. *] Sean ν y μ medidas σ-finitas en un espacio medible $(X, \mathcal{S})$, entonces existen medidas ν_a y ν_s en X que satisfacen lo siguiente:*
(i) $\nu = \nu_a + \nu_s$.
(ii) Existe una función medible no negativa f tal que

$$\nu_a(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{S}.$$

(iii) Existe un conjunto $A \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(A^c) = \nu_s(A) = 0$.
Además, tal descomposición es única.

Demostración. Por el teorema de Von Neumann (2.1.1), existen conjuntos $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{S}$ mutuamente ajenos tales que $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$, $\nu(X_3) = \mu(X_1) = 0$ y además,

$$\nu(E \cap X_2) = \int_{E \cap X_2} g d\mu, \text{ para } E \in \mathcal{S},$$

para alguna función medible no negativa g en X, con $g(x) > 0$ para $x \in X_2$. Sea $A := X_2 \cup X_3$ (entonces $A^c = X_1$). Luego, para $E \in \mathcal{S}$, definimos

$$\nu_a(E) := \nu(E \cap A) \;\text{ y }\; \nu_s(E) := \nu(E \cap A^c).$$

Entonces, si $E \in \mathcal{S}$ tenemos que

$$\nu_a(E) + \nu_s(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E),$$

por lo tanto $\nu = \nu_a + \nu_s$; además,

$$\nu_s(A) = \nu(A \cap A^c) = 0 = \mu(X_1) = \mu((X_2 \cup X_3)^c) = \mu(A^c)$$

y finalmente, para $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_2 \cup X_3) = \nu(E \cap X_2) + \nu(E \cap X_3) = \nu(E \cap X_2) = \int_{E \cap X_2} g d\mu.$$

Defínase

$$f(x) := \chi_{X_2}(x) g(x) \text{ para } x \in X.$$

Entonces f es una función medible no negativa en X y $E \in \mathcal{S}$

$$\nu_a(E) = \int_E f d\mu.$$

Hemos probado la parte de la existencia en el teorema. Para probar la unicidad, supongamos que también existen medidas ν_a' y ν_s', un conjunto $A' \in \mathcal{S}$ y una función medible no negativa f' tales que

$$\nu = \nu_a^{'} + \nu_s^{'},$$

$$\mu((A')^c) = \nu_s'(A') = 0,$$

$$\nu_a'(E) = \int_E f' d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Entonces

$$0 \leqslant \mu((A' \cap A)^c) = \mu((A')^c \cup A^c) \leqslant \mu((A')^c) + \mu(A^c) = 0 = \nu_s(A' \cap A) = \nu_s'(A' \cap A).$$

De lo anterior se sigue que

$$\nu_a((A' \cap A)^c) = \int_{(A' \cap A)^c} f d\mu = 0 = \int_{(A' \cap A)^c} f' d\mu = \nu_a'((A' \cap A)^c). \tag{2.1}$$

Luego, dado que

$$\nu_a(E) + \nu_s(E) = \nu(E) = \nu_a'(E) + \nu_s'(E),$$

tenemos que, para $E \in \mathcal{S}$ con $\nu(E) < +\infty$,

$$\nu_a(E) - \nu_a'(E) = \nu_s'(E) - \nu_s(E).$$

Como

$$\nu_a(E \cap (A' \cap A)^c) - \nu_a'(E \cap (A' \cap A)^c) = 0$$

lo anterior implica que

$$\nu_a(E \cap (A' \cap A)) - \nu_a'(E \cap (A' \cap A)) = \nu_s(E \cap (A' \cap A)) - \nu_s'(E \cap (A' \cap A)) = 0.$$

Por lo tanto, si $E \in \mathcal{S}$ con $\nu(E) < +\infty$,

$$\nu_a(E \cap (A' \cap A)) = \nu_a'(E \cap (A' \cap A)). \tag{2.2}$$

Luego, por (2.1) y (2.2), tenemos $\nu_a(E) = \nu_a'(E)$, $\nu_s(E) = \nu_s^{'}(E)$ para todo $E \in \mathcal{S}$ con $\nu(E) < +\infty$. Ahora, dado que ν es una medida σ-finita, podemos encontrar una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos mutuamente ajenos en $\mathcal{S}$ tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\nu(E_n) < +\infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$; entonces para cualquier $E \in \mathcal{S}$ tenemos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap E_n)$ y $\nu(E \cap E_n) < +\infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, usando que ν_a y ν_a' son iguales en conjuntos de medida ν-finita se sigue que

$$\nu_a(E) = \nu_a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap E_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\nu_a(E \cap E_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\nu_a'(E \cap E_k) =$$
$$\nu_a'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap E_n)\right) = \nu_a'(E).$$

Por lo tanto ν_a y ν_a' son iguales. Utilizando el mismo argumento que se utilizó para ν_a llegamos a que ν_s y ν_s' son iguales en $\mathcal{S}$. Por lo tanto la descomposición es única. ■

Definición 2.1.3. *Sean ν y μ medidas en $(X, \mathcal{S})$. Decimos que μ es singular con respecto a ν si para algún $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \nu(E^c) = 0$. En tal caso escribimos $\mu \perp \nu$.*

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ y las medidas $\mu_{a,b}, \mu_{c,d}$ inducidas por las funciones de densidad uniformes $U_{(a,b)}$, $U_{(c,d)}$ con $a < b \leqslant c < d$. Entonces, tenemos que*

$$\mu_{a,b}(c, d) = 0 \ \text{ y } \ \mu_{c,d}((-\infty, c] \cup [d, +\infty)) = 0,$$

por lo tanto, $\mu_{a,b} \perp \mu_{c,d}$.

Observemos que en el Teorema de descomposición de Lebesgue 2.1.2, la medida ν_s es tal que $\nu_s \perp \mu$ y $\nu_s \perp \nu_a$.

2.2. El Teorema de Radon-Nikodym

Retomando la Proposición 1.3.4 del capítulo 1, notemos una propiedad muy interesante que tiene ν: si $E \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) = 0$ entonces $\nu(E) = 0$. Esto se debe a que si $E \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = \int_E f d\mu = 0$. Esta situación motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Sean μ y ν dos medidas en $(X, \mathcal{S})$. Decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ si $E \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$. Denotamos esto mediante $\nu \ll \mu$.*

Como consecuencia de esta definición, μ y ν de la Proposición 1.3.4 son tales que $\nu \ll \mu$.

Una caracterización muy importante del concepto de continuidad absoluta para el caso $\nu(X) < \infty$ se tiene en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sean μ, ν medidas en $(X, \mathcal{S})$. Entonces lo siguiente se cumple:*
(i) Si ν es finita y $\nu \ll \mu$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $E \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) < \delta$ implica $\nu(E) < \epsilon$.
(ii) Si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $E \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) < \delta$ implica $\nu(E) < \epsilon$, entonces $\nu \ll \mu$.

Demostración. (i) Supongamos que esta afirmación es falsa, entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión de conjuntos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tal que

$$\mu(E_n) < \tfrac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad \nu(E_n) \geqslant \epsilon, \quad n = 1, 2, ...$$

Sea

$$A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \quad \text{y} \quad A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces para toda n,

$$\mu(A) \leqslant \mu(A_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por lo tanto $\mu(A) = 0$. Como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y ν es una medida finita, tenemos que

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geqslant \epsilon.$$

Esto contradice que $\nu \ll \mu$, con lo que se concluye la demostración de (i).
(ii) Supongamos que $E \in \mathcal{S}$ y que $\mu(E) = 0$. Entonces $\mu(E) < \delta$ para todo $\delta > 0$. Luego, por hipótesis, se sigue que $\nu(E) < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, por lo tanto $\nu(E) = 0$, es decir, $\nu \ll \mu$. ∎

A partir de la Definición 2.2.1, nos podríamos preguntar sobre condiciones necesarias para que una medida μ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesuge λ. La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que μ_F, la medida inducida por una función monótona F, sea absolutamente continua con respecto a λ.

Proposición 2.2.3. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente continua por la derecha y sea μ_F la medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por F en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ (ver [4],[1]). Entonces $\mu_F \ll \lambda$ si y sólo si F es absolutamente continua en todo intervalo acotado.*

Demostración. Supongamos que μ_F es absolutamente continua con respecto a λ y sea $[a, b]$ cualquier intervalo acotado. Para demostrar que F es absolutamente continua, consideremos la restricción de μ_F en $[a, b]$ y sea $\epsilon > 0$ dado. Como μ_F es finita en $[a, b]$, por el Teorema 2.2.2 (i), podemos escoger $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq [a, b]$ y $\lambda(A) < \delta$ entonces $\mu_F(A) < \epsilon$. En particular, si A es unión de un número finito de intervalos disjuntos a pares $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \lambda(A) < \delta \text{ implica } \sum_{i=n}(F(b_i) - F(a_i)) = \mu_F(A) < \epsilon,$$

por lo tanto F es absolutamente continua en $[a, b]$.
Recíprocamente, supongamos que F es absolutamente continua en todo intervalo acotado. Sea $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ tal que $\lambda(E) = 0$. Mostraremos que $\mu_F(E) = 0$. Notemos que es suficiente mostrar que $\mu_F(E \cap [a, b]) = 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, pues podemos escribir E como unión disjunta de conjuntos de la forma $E \cap [a, b]$. Como F es absolutamente continua en $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$, podemos escoger $\delta > 0$ tal que si $[a_i, b_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, son subintervalos disjuntos de $[a, b]$ y

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n}|F(b_i) - F(a_i)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, podemos encontrar un conjunto abierto U tal que $E \subseteq U$ y $\lambda(U) < \frac{\delta}{2}$. Como U es abierto, se puede representar como unión de una sucesión de intervalos disjuntos. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que tenemos una sucesión de la forma

$((a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, es una sucesión de intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha, tal que

$$E \cap [a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] =: \widetilde{U}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a_n, b_n] = \lambda(\widetilde{U}) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda(a_n, b_n] = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

lo que implica

$$\sum_{n=1}^{k} [F(b_n) - F(a_n)] < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para toda } k.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] < \epsilon.$$

Así

$$\mu_F(E \cap [a, b]) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(a_n, b_n] = \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] < \epsilon.$$

Como lo anterior se cumple para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $\mu_F(E \cap [a, b]) = 0$. Por lo tanto $\mu_F \ll \lambda$. ∎

La relación entre dos medidas en la Definición 2.2.1, resulta ser un concepto muy importante, pues con esta condición, es posible representar una medida por medio de la integral de una función medible no negativa respecto a otra medida, tal y como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sean μ y ν medidas σ-finitas en un espacio medible $(X, \mathcal{S})$ tales que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función medible no negativa f tal que para $E \in \mathcal{S}$,*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu. \tag{2.3}$$

Además, si existe otra función g que satisface (2.3) entonces $f(x) = g(x)$ para μ-casi toda x en X.

Demostración. Por el Teorema de Descomposición de Lebesgue 2.1.2 y el Teorema de Von Neumann 2.1.1, podemos descomponer a la medida ν como suma de dos medidas ν_a y ν_s, donde ν_s está definida por $\nu_s(E) := \nu(E \cap A^c) = \nu(E \cap X_1)$ para $E \in \mathcal{S}$, además de acuerdo al teorema de Von Neumann $\mu(X_1) = 0$; luego dado que $\nu \ll \mu$, tenemos que $\nu(X_1) = 0$. Por lo tanto $\nu_s(E) = \nu(E \cap X_1) = 0$ para $E \in \mathcal{S}$, es decir, $\nu_s = 0$. Esto implica que $\nu_a = \nu$, por lo que existe una función medible no negativa f tal que para $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Para mostrar la unicidad de f, supongamos que existe otra función medible no negativa g tal que para $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \int_E g d\mu.$$

Consideremos $E := \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ y supongamos que $\mu(E) > 0$. Debido a que μ y ν son σ-finitas y $\mu(E) > 0$, podemos escoger $A \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(A) < +\infty$, $\nu(A) < +\infty$ y $\mu(E \cap A) > 0$. Entonces

$$0 < \int_{A \cap E} (f(x) - g(x)) d\mu(x) = \nu(E \cap A) - \nu(E \cap A) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(x) \leqslant g(x)$ para μ-casi toda x en X. Similarmente podemos demostrar que $f(x) \geqslant g(x)$ para μ-casi toda x en X, lo que demuestra el resultado. ∎

De manera natural uno podría preguntarse si podemos quitar o debilitar alguna hipótesis en el Teorema de Radon-Nikodym, el siguiente ejemplo muestra la necesidad de la σ-finitud en el mismo y la observación subsecuente muestra la necesidad de la continuidad absoluta.

Ejemplo 2.2.5. *Sean μ, λ la medida de contar y la medida de Lebesgue, respectivamente, en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$. Entonces, $\lambda \ll \mu$ pero no existe una función medible tal que para $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

En efecto, como μ sólo asigna el valor cero al conjunto vacío, es claro que $\lambda \ll \mu$. Ahora bien, supongamos que existe f medible tal que $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

Entonces, para $x \in \mathbb{R}$, si consideramos el conjunto $\{x\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ tenemos que,

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x).$$

Luego, $f \equiv 0$, lo que implica

$$1 = \lambda(0, 1) = \int_0^1 f d\mu = 0,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto no puede existir tal función.

Observación. *Retomando el Ejemplo 2.1.4, notemos que $\mu_{c,d}$ no es absolutamente continua con respecto a $\mu_{a,b}$ pues $\mu_{a,b}(c, d) = 0$ pero $\mu_{c,d}(c, d) = 1$ Además, notemos que ambas medidas son finitas, pero no existe una función medible tal que para $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*

$$\mu_{c,d}(E) = \int_E f d\mu_{a,b}, \tag{2.4}$$

pues si suponemos que existe f tal que cumple (2.4) para todo $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, particularmente lo cumple para (c, d) y entonces

$$1 = \mu_{c,d}(c, d) = \int_{(c,d)} f d\mu_{a,b} = 0,$$

lo cual es una clara contradicción.

2.3. La derivada de Radon-Nikodym

En esta sección se obtiene la derivada de Radon-Nikodym (Definición 2.3.1) para la familia de medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$ y se presenta una aplicación del Teorema de Radon-Nikodym en la teoría de Probabilidad.

Definición 2.3.1. *Sean μ y ν medidas σ-finitas en un espacio medible $(X, \mathcal{S})$ tales que $\nu \ll \mu$. La única función medible f del Teorema de Radon-Nikodym tal que, para todo $E \in \mathcal{S}$,*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu,$$

se llama la derivada de Radon-Nikodym de ν *con respecto a* μ *y se denota por* $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$.

Ejemplo 2.3.2. *Sea* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función monótona creciente absolutamente continua y sea* μ_F *la medida de Lebesgue-Stieljtes inducida por* F *en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. *Entonces* $\mu_F \ll \lambda$ *y*

$$F'(x) = \frac{d\mu_F}{d\lambda}(x) \text{ para } \lambda\text{-casi toda } x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, dado que F *es monótona,* F' *existe* λ*-casi en todas partes (ver [5], cap. 5), además como* F *es absolutamente continua, tenemos por la Proposición 2.2.3 que* $\mu_F \ll \lambda$*, luego para* $a < b$*, del Teorema fundamental del cálculo (ver [5], cap. 5) y el Teorema de Radon-Nikodym 2.2.4 se sigue que*

$$\int_a^b F'(x) d\lambda(x) = F(b) - F(a) = \mu_F(a, b] = \int_a^b \frac{d\mu_F}{d\lambda}(x) d\lambda(x). \tag{2.5}$$

Por otro lado, de la misma manera que en el Ejemplo 1.3.4, podemos demostrar que las funciones conjuntistas $\nu_1 : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\nu_2 : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definidas para cualquier* $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *mediante*

$$\nu_1(E) = \int_E F' d\lambda \quad \text{y} \quad \nu_2(E) = \int_E \frac{d\mu_F}{d\lambda} d\lambda,$$

son medidas en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. *Luego, por (2.5), dichas medidas coinciden en* $\mathcal{I}*$*, la familia de los intervalos en* $\mathbb{R}$*, entonces por el Teorema de extensión de medidas de Caratheodory (ver [4], [1],[5]), la extensión de* ν_1 y ν_2 *a* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *se hace de manera única, por lo tanto,* $\nu_1 = \nu_2$ *en* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*, es decir,*

$$\int_E F'(x) d\lambda(x) = \int_E \frac{d\mu_F}{d\lambda}(x) d\lambda(x), \qquad \text{para} \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Finalmente, por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym,

$$F'(x) = \frac{d\mu_F}{d\lambda}(x), \qquad \text{para } \lambda - \text{casi toda } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

La siguiente proposición motiva el nombre de la derivada de Radon-Nikodym.

Proposición 2.3.3. *Sea* μ *una medida finita en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *y defínase*

$$F(x) := \mu(-\infty, x], \ x \in \mathbb{R}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:
(i) F es diferenciable en λ-casi toda x en $\mathbb{R}$, *y en esos puntos*

$$F'(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(x-r, x+r)}{\lambda(x-r, x+r)}.$$

(ii) Si $\mu \ll \lambda$, entonces para λ-casi toda x en $\mathbb{R}$,

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = F'(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(x-r, x+r)}{\lambda(x-r, x+r)}.$$

Demostración. Debido a la monotonía de μ, F resulta monótona creciente lo que implica que F' exista para λ-casi toda $x \in \mathbb{R}$ (Consultar apéndice B). Luego, observemos que F es una función continua por la derecha y $\mu = \mu_F$, es la medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por F. Ahora, si $\mu \ll \lambda$ el Teorema de Radon-Nikodym 2.2.4 y el ejemplo 2.3.2 implican que $\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = F'(x)$ para λ-casi toda x en $\mathbb{R}$. Para probar (i), sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo tal que $F'(x_0)$ exista y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Tomemos $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - F'(x_0) \right| < \epsilon.$$

Sea $r > 0$ tal que $2r < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x_0 + r) - F(x_0 - r)}{2r} - F'(x_0) \right| \leqslant & \left| \frac{F(x_0 + r) - F(x_0) - rF'(x_0)}{2r} \right| \\
& + \left| \frac{F(x_0) - F(x_0 - r) - rF'(x_0)}{2r} \right| \\
\leqslant & \frac{1}{2} \left| \frac{F(x_0 + r) - F(x_0)}{r} - F'(x_0) \right| \\
& + \frac{1}{2} \left| \frac{F(x_0 - F(x_0 - r)}{r} - F'(x_0) \right| \\
< & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $0 < r < \frac{\delta}{2}$,

$$\left| \frac{\mu(x_0 - r, x_0 + r)}{\lambda(x_0 - r, x_0 + r)} - F'(x_0) \right| < \epsilon,$$

con lo que se concluye la demostración. ∎

Una aplicación del Teorema de Radon-Nikodym en la teoría de probabilidad se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.4 (Existencia de la esperanza condicional). *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea $\mathcal{F}_0$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$. Entonces, existe una función $\hat{Y} : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:*
(i) $\hat{Y}$ es $\mathcal{F}_0$-medible y P-integrable.
(ii) Para todo $E \in \mathcal{F}_0$,

$$\int_E \hat{Y} dP = \int_E Y dP.$$

Demostración. Consideremos Y^+, la parte positiva de Y, entonces Y^+ es medible, no negativa y tiene integral finita, es decir, $Y^+ \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Para $E \in \mathcal{F}_0$, sea

$$\nu(E) := \int_E Y^+ dP,$$

entonces ν es una medida finita en $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ con $\nu \ll P$. Por lo tanto, por el Teorema de Radon-Nikodym, existe una función no negativa, $\mathcal{F}_0$-medible y P-integrable $g_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_E g_1 dP = \nu(E) = \int_E Y^+ dP, \qquad \textit{para } E \in \mathcal{F}_0.$$

De la misma manera, si consideramos Y^-, la parte negativa de Y, obtenemos una función no negativa, $\mathcal{F}_0$-medible y P-integrable g_2 tal que

$$\int_E g_2 dP = \int_E Y^- dP \qquad \textit{para } E \in \mathcal{F}_0.$$

entonces, definiendo $\hat{Y} := g_1 - g_2$ obtenemos la función deseada. ■

A la función $\hat{Y}$ se le llama la esperanza condicional de Y dada $\mathcal{F}_0$ y se denota $E(Y|\mathcal{F}_0)$.

Capítulo 3

Medidas con signo

Es bien sabido que la suma de medidas es una medida y un múltiplo no negativo de una medida también lo es. Por otra parte, la diferencia de dos medidas no necesariamente es una medida, lo que motiva el concepto de medida con signo el cual estudiamos en este capítulo. En la primera sección introducimos el concepto de medida con signo y establecemos algunas de sus propiedades, además introducimos los conceptos de conjuntos positivos, negativos y nulos, los cuales juegan un papel importante para las secciones subsecuentes. En la sección 3.2 se demuestran el Teorema de Descomposición de Hahn y el Teorema de Descomposición de Jordan que establece que todas las medidas con signo pueden representarse como diferencia de dos medidas, donde al menos una de ellas es finita. En la última sección del capítulo presentamos otra demostración, más común en la literatura, del Teorema de Radon-Nikodym para medidas y utilizando el trabajo previo, lo extendemos para medidas con signo.

3.1. Propiedades de las medidas con signo

Definición 3.1.1. *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible. Una función conjuntista $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^*$ es llamada una medida con signo si tiene las siguientes propiedades:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) μ *toma a lo más uno de los valores* $+\infty$ *o* $-\infty$.
(iii) Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de conjuntos mutuamente ajenos en* $\mathcal{S}$ *tal que* $E := \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ *entonces,*

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

donde la igualdad se cumple en el sentido de que todo reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ *converge a* $\mu(E)$ *si* $|\mu(E)| < +\infty$*, y diverge a* $\mu(E)$ *en otro caso.*

Notemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ es absolutamente convergente siempre que $|\mu(E)| < \infty$ (pues toda serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si y sólo si la serie converge ante cualquier reordenamiento). Por otro lado, es inmediato que si $c \in \mathbb{R}$ y μ es una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$, entonces $c\mu$ también lo es.
Una medida con signo μ en $(X, \mathcal{S})$ se dice ser finita si $|\mu(X)| < +\infty$, y se dice σ-finita si existen conjuntos $A_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, ...$, tales que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $|\mu(A_n)| < +\infty$ para toda n.

Ejemplo 3.1.2. *Sean* μ_1 *y* μ_2 *medidas en un espacio medible* $(X, \mathcal{S})$*, tales que al menos una de ellas es finita. Defínase para todo* $E \in \mathcal{S}$*,*

$$\nu(E) := \mu_1(E) - \mu_2(E).$$

Entonces ν *es una medida con signo en* $\mathcal{S}$*, pues es inmediato que* $\nu(\emptyset) = 0$*, además sea* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$*, donde los* E_n*'s son elementos disjuntos a pares en* $\mathcal{S}$*. Entonces* $\mu_i(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(E_n)$*,* $i = 1, 2$*. Supongamos que* μ_1 *es la medida finita, entonces* $\mu_1(A) < +\infty$ *para todo* $A \in \mathcal{S}$*. Si* $\mu_2(E) < +\infty$*, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_1(E_n) - \mu_2(E_n))$ *es absolutamente convergente y converge a* $\mu_1(E) - \mu_2(E)$*. Por lo tanto*

$$\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu_1(E_n) - \mu_2(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

En caso de que $\mu_2(E) = +\infty$ *o* $-\infty$*, tenemos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_1(E_n) - \mu_2(E_n))$ *es divergente y diverge a* $-\mu_2(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$*. Por lo tanto,* ν *es una medida con signo. Si ambas medidas* μ_1 *y* μ_2 *son medidas finitas, entonces*

$$|\nu(X)| \leqslant |\mu_1(X)| + |\mu_2(X)| < +\infty,$$

es decir, ν *es una medida con signo finita. Similarmente, si ambas medidas* μ_1 *y* μ_2 *son* σ*-finitas, entonces* ν *será también* σ*-finita.*

Proposición 3.1.3. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces lo siguiente se cumple:*
(i) Si $A, B \in \mathcal{S}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
(ii) Si $A \in \mathcal{S}$ con $|\mu(A)| < +\infty$ y $B \subset A$, entonces $|\mu(B)| < +\infty$ y $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
(iii) μ es finita si y sólo si $|\mu(A)| < +\infty$ para todo $A \in \mathcal{S}$.

Demostración. La prueba de (i) es inmediata de la aditividad numerable de μ. Para probar (ii), sea $A \in \mathcal{S}$ tal que $|\mu(A)| < +\infty$. Si $B \in \mathcal{S}$ y $B \subseteq A$, entonces $A = (A \setminus B) \cup B$, y por (i) tenemos

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

Como $|\mu(A \setminus B) + \mu(B)| = |\mu(A)| < +\infty$ y μ toma a lo más uno de los valores $+\infty$ o $-\infty$, obtenemos que $|\mu(A \setminus B)| < +\infty$ y $|\mu(B)| < +\infty$. Además,

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

(iii) se sigue de (ii). ∎

Proposición 3.1.4. *Sean μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$ y $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}$. Entonces se cumple lo siguiente:*
(i) Si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

(ii) Si $E_{n+1} \subseteq E_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $|\mu(E_n)| < +\infty$ para algún n, entonces para $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$,

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Demostración. (i) Supongamos $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, donde $E_n \in \mathcal{S}$ con $E_n \subseteq E_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$A_1 := E_1 \text{ y } A_n := E_n \setminus E_{n-1} \text{ para } n \geqslant 2.$$

Entonces $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos ajenos a pares en $\mathcal{S}$ tal que $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, luego por la σ-aditividad de las medidas con signo y por 3.1.3 (i) tenemos

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

(ii) Sea $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_k$, donde $E_k \in \mathcal{S}$ con $E_n \supseteq E_{n+1}$ para toda n, y sea $|\mu(E_{n_0})| < +\infty$. Luego, para $n \geqslant n_0$, sea $A_n := E_{n_0} \setminus E_n$. Entonces, $A_n \in \mathcal{S}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ para toda $n \geqslant n_0$, y $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n = E_{n_0} \setminus E$. Por lo tanto, usando (i) y la proposición 3.1.3 (ii), tenemos

$$\begin{aligned}\mu(E_{n_0}) - \mu(E) = \mu(E_{n_0} \setminus E) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n_0} \setminus E_n) &= \lim_{n\to\infty} [\mu(E_{n_0}) - \mu(E_n)] \\ &= \mu(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$. ■

Definición 3.1.5. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Un conjunto $A \in \mathcal{S}$ se llama un conjunto positivo para μ si*

$$\mu(E) \geqslant 0 \textit{ para todo } E \subseteq A,\ E \in \mathcal{S}.$$

Similarmente, un conjunto $A \in \mathcal{S}$ se llama un conjunto negativo para μ si

$$\mu(E) \leqslant 0 \textit{ para todo } E \subseteq A,\ E \in \mathcal{S}.$$

Un conjunto $A \in \mathcal{S}$ que es un conjunto tanto positivo como negativo para μ, se llama un conjunto μ-nulo.

Lema 3.1.6. *Sea μ una medida con signo en $\mathcal{S}$. Entonces se cumple lo siguiente:*
(i) Si A es un conjunto positivo para μ y $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{S}$, entonces B también es un conjunto positivo para μ.
(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos positivos para μ, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ también es un conjunto positivo para μ.
(iii) si $E \in \mathcal{S}$ y $0 < \mu(E) < +\infty$, entonces existe un conjunto $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{S}$, tal que A es un conjunto positivo para μ y $\mu(A) > 0$.

Demostración. (i) es inmediato de la definición de conjunto positivo para μ.
(ii) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos positivos para μ, y sea $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Defínase

$$B_1 := A_1 \text{ y } B_n := A_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k), \text{ para } n \geqslant 2.$$

Entonces los conjuntos B_n, $n = 1, 2, ...$, son conjuntos mutuamente ajenos en $\mathcal{S}$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Sea $E \in \mathcal{S}$ con $E \subseteq A$. Entonces $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap E)$. Como $(B_n \cap E) \subseteq A_n$ y A_n es un conjunto positivo para μ, $\mu(B_n \cap E) \geqslant 0$ para toda n. Por lo tanto,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap E) \geqslant 0,$$

de donde se sigue que A es un conjunto positivo para μ.
(*iii*) Sea $E \in \mathcal{S}$ y $0 < \mu(E) < +\infty$. Entonces, E es un conjunto positivo para μ (y la demostración se sigue inmediatamente) o E contiene algún conjunto con medida negativa. En el segundo caso, sea η_1 el entero positivo más pequeño tal que existe un conjunto $E_1 \subseteq E$ con $E_1 \in \mathcal{S}$ y $\mu(E_1) < -1/\eta_1$. Notemos que $\mu(E \setminus E_1) < \infty$ (por la Proposición 3.1.3 (*ii*)) y $\mu(E \setminus E_1) > 0$ (pues a un conjunto con medida positiva (E) le estamos quitando un conjunto con medida negativa (E_1)). Por lo tanto podemos aplicar el argumento anterior a $E \setminus E_1$. Procediendo de manera inductiva, terminamos en una cantidad finita pasos, o bien obtendremos una sucesión $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números positivos y conjuntos $E_k \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$, con las propiedades que para $k \in \mathbb{N}$,

$$E_k \subseteq E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right)$$

y η_k es el entero positivo más pequeño tal que $\mu(E_k) < -1/\eta_k$. Definamos

$$A := E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

Entonces $E = A \cup (\cup_{k=1}^{\infty} E_k)$ y estos conjuntos son mutuamente ajenos. Por lo tanto

$$\mu(E) = \mu(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Como $\mu(E) < +\infty$, la serie del lado derecho de la igualdad anterior es absolutamente convergente. Por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\eta_k$ es convergente, lo que implica $\eta_k \to +\infty$ cuando $k \to \infty$. También, como $\mu(E_k) \leqslant 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\mu(E) > 0$, entonces $\mu(A) > 0$. Para completar la prueba, mostraremos que A es un conjunto positivo para μ. Sea $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{S}$, y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Escogemos η_k tal que $1/(\eta_k - 1) < \epsilon$. Como para todo

$B \subseteq E \setminus (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)$ con $B \in \mathcal{S}$ tenemos que $\mu(B) \geqslant -1/(\eta_k - 1)$ (por la propiedad con la que definimos los η_k's). En particular, para todo $B \subseteq A \subseteq E \setminus (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)$ con $B \in \mathcal{S}$ tenemos que

$$\mu(B) \geqslant -1/(\eta_k - 1) > -\epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\mu(B) \geqslant 0$. ∎

Corolario 3.1.7. *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos negativos (nulos) para μ. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es también un conjunto negativo (nulo) para μ.*

Demostración. Para el caso en que los conjuntos son negativos para μ, notemos que la misma sucesión de conjuntos, es una sucesión de conjuntos positivos para $-\mu$, entonces por el lema anterior (ii) tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto positivo para $-\mu$, por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto negativo para μ.
Para el caso de los conjuntos nulos, como son tanto conjuntos positivos como negativos para μ, resulta que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto tanto positivo como negativo para μ, es decir, es un conjunto μ-nulo. ∎

3.2. Descomposición de medidas con signo

En esta sección se presentan dos resultados que se utilizarán en la sección 3.3 para otra demostración del Teorema de Radon-Nikodym.

3.2.1. El Teorema de descomposición de Hahn

Teorema 3.2.1 (Teorema de descomposición de Hahn)**.** *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces existen conjuntos $A, B \in \mathcal{S}$ tales que se cumple lo siguiente:*
(i) $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.
(ii) A es un conjunto positivo para μ y B es un conjunto negativo para μ.

Demostración. Dado que μ toma a lo más uno de los valores $+\infty$ o $-\infty$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que, $-\infty \leqslant \mu(E) < +\infty$ para todo $E \in \mathcal{S}$ (en caso contrario consideramos $-\mu$). La idea de esta demostración es construir un conjunto A, el cual es un conjunto positivo para μ, donde $\mu(A)$ es el valor más grande que asigna μ y además, $B := X \setminus A$ es un conjunto negativo para μ. Así, sea

$$\beta := \sup\{\mu(E) : E \text{ es un conjunto positivo para } \mu\}.$$

Entonces $\beta \geqslant 0$ pues $\emptyset$ es un conjunto positivo para μ. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos positivos para μ tales que

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

y sea $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Por el lema anterior, A es un conjunto positivo para μ y por lo tanto $\mu(A) \leqslant \beta$. Además, como $A \setminus E_n \subseteq A$ y A es positivo, tenemos que $\mu(A \setminus E_n) \geqslant 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\mu(A) = \mu(E_n) + \mu(A \setminus E_n) \geqslant \mu(E_n) \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que $\mu(A) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \beta$. Por lo tanto $\mu(A) = \beta$ y dado que estamos suponiendo que μ no toma el valor $+\infty$, tenemos que $\beta < +\infty$. Sea $B := X \setminus A$. Para mostrar que B es un conjunto negativo para μ, sea $E \subseteq B$ tal que $E \in \mathcal{S}$. Si $\mu(E) > 0$ entonces $0 < \mu(E) < \beta < +\infty$ y, por el lema anterior, existe un conjunto $F \in \mathcal{S}$, $F \subseteq E$, tal que $\mu(F) > 0$ y F es un conjunto positivo para μ. Pero entonces $F \cup A$ es también un conjunto positivo y

$$\beta \geqslant \mu(F \cup A) = \mu(F) + \mu(A) = \mu(F) + \beta.$$

Esto implica que $\mu(F) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, para todo $E \in \mathcal{S}$ con $E \subseteq B$ tenemos que $\mu(E) \leqslant 0$, es decir, B es un conjunto negativo para μ. ∎

Definición 3.2.2. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Un par de conjuntos $(A, B) \in \mathcal{S}$ se llama una descomposición de Hahn de X con respecto a μ si $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, donde A es un conjunto positivo para μ y B es un conjunto negativo para μ.*

Notemos que el Teorema de descomposición nos garantiza que siempre existe una descomposición de Hahn para X. Sin embargo, tal descomposición de Hahn no es única, tal y como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$ y sea (A, B) una descomposición de Hahn de X con respecto a μ. Sea $N \in \mathcal{S}$ un conjunto μ-nulo, entonces $((A \setminus N), (B \cup N))$ es también una descomposición de Hahn de X. Además, si (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son dos descomposiciones de Hahn de X con respecto a μ, entonces $\mu(A_1 \triangle A_2) = \mu(B_1 \triangle B_2) = 0$, y para todo $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap A_2)$* y *$\mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B_2)$.*

Demostración. Notemos que

$$(A \setminus N) \cup (B \cup N) = (A \cup N \cup B) = X$$

y

$$(A \setminus N) \cap (B \cup N) = ((A \setminus N) \cap B) \cup ((A \setminus N) \cap N) = \emptyset.$$

Además, dado que $A \setminus N \subseteq A$, tenemos por el Lema 3.1.6 (i) que $A \setminus N$ es un conjunto positivo para μ y como B, N son conjuntos negativos para μ, por el Lema 3.1.6 (ii) $B \cup N$ es un conjunto negativo para μ. Por lo tanto $A \setminus N, B \cup N$ es una descomposición de Hahn con respecto a μ para X.

Ahora bien, sean (A_1, B_1) y (A_2, B_2) dos descomposiciones de Hahn de X con respecto a μ. Notemos que

$$\begin{aligned} A_1 \triangle A_2 &= (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) = (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \\ &= (B_2 \cap A_1) \cup (B_2 \cap A_1) = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1) = B_2 \triangle B_1 = B_1 \triangle B_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(A_1 \triangle A_2) = \mu(B_1 \triangle B_2)$. Por otro lado, observemos que

$$E \cap A_1 = E \cap A_1 \cap X = (E \cap A_1) \cap (A_2 \cup B_2) = (E \cap A_1 \cap A_2) \cup (E \cap A_1 \cap B_2),$$

$$E \cap A_2 = E \cap A_2 \cap X = (E \cap A_2) \cap (A_1 \cup B_1) = (E \cap A_2 \cap A_1) \cup (E \cap A_2 \cap B_1),$$

y que

$$\mu(E \cap A_1 \cap B_2) = 0 = \mu(E \cap A_2 \cap B_1),$$

pues $A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_1$ son subconjuntos μ-nulos de X. Entonces

$$\begin{aligned} \mu(E \cap A_1) =& \mu(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu(E \cap A_1 \cap B_2) \\ =& \mu(E \cap A_1 \cap A_2) = \mu(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu(E \cap A_2 \cap B_1) \\ =& \mu(E \cap A_2). \end{aligned}$$

Análogamente, tenemos

$$E \cap B_1 = (E \cap B_1 \cap A_2) \cup (E \cap B_1 \cap B_2),$$

$$E \cap B_2 = (E \cap B_2 \cap A_1) \cup (E \cap B_2 \cap B_1),$$

por lo tanto $\mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B_2)$. ■

3.2.2. El Teorema de Descomposición de Jordan

En el siguiente teorema se presenta una caracterización de las medidas con signo.

Teorema 3.2.4 (Teorema de descomposición de Jordan)**.** *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces existen medidas μ^+ y μ^- en $(X, \mathcal{S})$ con las siguientes propiedades:*
(i) $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y al menos una de las medidas μ^+ y μ^- es finita.
(ii) $\mu^+ \perp \mu^-$, es decir, existe un conjunto $A \in \mathcal{S}$ tal que $\mu^+(A^c) = \mu^-(A) = 0$.
(iii) Si $\mu = \nu - \eta$, donde ν y η son medidas donde al menos una de ellas es finita y $\nu \perp \eta$, entonces $\mu^+ = \nu$ y $\mu^- = \eta$.En otras palabras, la descomposición de μ como diferencia de dos medidas singulares es única.

Demostración. Sea $A, B \in \mathcal{S}$ una descomposición de Hahn de X con respecto a μ, donde A es un conjunto positivo para μ y B es un conjunto negativo para μ. Definamos μ^+ y μ^- en $\mathcal{S}$ como sigue:

$$\mu^+(E) := \mu(A \cap E) \text{ y } \mu^-(E) := \mu(B \cap E), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Entonces μ^+ y μ^- son medidas en $\mathcal{S}$ y debido a que A y B son tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $\mu = \mu^+ - \mu^-$; además, dado que μ toma a lo más uno de los valores $+\infty$ o $-\infty$ tenemos que al menos una de las medidas μ^+ y μ^- es finita. Notemos también que $\mu^+ \perp \mu^-$ pues A y B son complementarios. Finalmente, sea $\mu = \nu - \eta$, donde ν y η son medidas con $\nu \perp \eta$, y supongamos ν finita. Entonces μ nunca toma el valor $+\infty$ y por lo tanto μ^+ es también finita. Sean $C, D \in \mathcal{S}$ tales que $\nu(D) = \eta(C) = 0$ con $C \cap D = \emptyset$ y $C \cup D = X$. Entonces C es un conjunto positivo para μ y D es un conjunto negativo para μ. Por lo tanto C, D es también es una descomposición de Hahn de X con respecto a μ. Luego, por la proposición anterior, tenemos que para todo $E \in \mathcal{S}$,

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) = \mu(E \cap C) = \nu(E)$$

y

$$\mu^-(E) = \mu(E \cap B) = \mu(E \cap D) = \eta(E).$$

■

Definición 3.2.5. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Las medidas μ^+ y μ^- del teorema anterior, son llamadas las variaciones superior e inferior (o parte positiva y parte negativa) de μ, respectivamente. La medida $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ se llama la variación total de μ.*

Maneras alternativas de definir a las medidas μ^+, μ^- y $|\mu|$ se presentan en el siguiente teorema.
Para $E \in \mathcal{S}$ decimos que $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ es una partición medible de E si $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{S}$ son mutuamente ajenos y $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$.

Teorema 3.2.6. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces para todo $E \in \mathcal{S}$, lo siguiente se cumple:*
(i) $\mu^+(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{S}\}$.
(ii) $\mu^-(E) = \sup\{-\mu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{S}\}$.
(iii) $|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(F_i)| : \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *es una partición medible de* $E\}$.

Demostración. (*i*) Sea A, B una descomposición de Hahn de X con respecto a μ. Para $E \in \mathcal{S}$, es claro que

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \leqslant \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{S}\}. \tag{3.1}$$

Como B es un conjunto negativo para μ, si $F \subseteq E$ con $F \in \mathcal{S}$, entonces

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \cap B) \leqslant \mu(F \cap A) = \mu^+(F) \leqslant \mu^+(E).$$

Por lo tanto

$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{S}\} \leqslant \mu^+(E). \tag{3.2}$$

Por lo tanto (*i*) se sigue de (3.6) y (3.2). También, observemos que $\mu^- = (-\mu)^+$, de aquí que (*ii*) se sigue de (*i*). Finalmente, para probar (*iii*), tomemos cualquier $E \in \mathcal{S}$, luego supongamos que α denota el lado derecho de la igualdad en (*iii*). Entonces para cualquier colección finita $\{F_1, ..., F_n\}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$ con $E = \bigcup_{i=1}^n F_i$ y $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(F_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\mu^+(F_i) - \mu^-(F_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu^+(F_i)| + \sum_{i=1}^{n} |\mu^-(F_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\mu|(F_i) = |\mu|(E).$$

Por lo tanto $\alpha \leqslant |\mu|(E)$. Por otro lado, si consideramos la partición medible $\{E \cap A, E \cap B\}$, entonces

$$\alpha \geqslant |\mu(E \cap A)| + |\mu(E \cap B)| = \mu^+(E) + \mu^-(E) = |\mu|(E).$$

Por lo tanto $\alpha = |\mu|(E)$, lo que prueba (iii). ∎

Proposición 3.2.7. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*
(i) *μ es finita (σ-finita).*
(ii) *μ^+, μ^- son ambas finitas (σ-finitas).*
(iii) *$|\mu|$ es finita (σ-finita).*

Demostración. Notemos que si demostramos los casos finitos, los σ-finitos son inmediatos pues si existe una sucesión de conjuntos medibles disjuntos a pares cuya unión sea X tal que la medida de todo elemento de la sucesión es finita, con respecto a alguno de los tres casos, tendríamos que cada elemento de la sucesión tiene medida finita en los casos restantes, es decir, las medidas restantes también resultan σ-finitas.
Sea (A, B) una descomposición de Hahn de X con respecto a μ.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que μ es finita, entonces

$$|\mu(E)| < +\infty \text{ para todo } E \in \mathcal{S},$$

en particular

$$\mu^+(X) = \mu(A) < +\infty \ \text{ y } \ \mu^-(X) = -\mu(B) < +\infty,$$

y por lo tanto μ^+ y μ^- son finitas.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que tanto μ^+ como μ^- son medidas finitas, entonces

$$|\mu(X)| = |\mu(A) + \mu(B)| = |\mu^+(X) - \mu^-(X)| \leqslant \mu^+(X) + \mu^-(X) < +\infty.$$

Por lo tanto μ es finita.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Es inmediato pues $|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$ para todo $E \in \mathcal{S}$. ∎

Proposición 3.2.8. *Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces*

$$|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{S},$$

y $|\mu|$ es la medida más pequeña en $\mathcal{S}$ con esta propiedad, es decir, si ν es cualquier otra medida en $\mathcal{S}$ tal que $|\mu(E)| \leqslant \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{S}$, entonces $|\mu|(E) \leqslant \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{S}$.

Demostración. La primera parte es inmediata pues para $E \in \mathcal{S}$

$$|\mu(E)| = |\mu^+(E) - \mu^-(E)| \leqslant |\mu^+(E)| + |\mu^-(E)| = \mu^+(E) + \mu^-(E) = |\mu|(E).$$

Para la otra parte, sea (A, B) una descomposición de Hahn de X, luego para $E \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \leqslant \nu(E \cap A), \tag{3.3}$$

$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap B) \leqslant \nu(E \cap B), \tag{3.4}$$

entonces, por 3.3 y 3.4 tenemos

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E) \leqslant \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu(E).$$

■

3.3. El Teorema de Radon-Nikodym para medidas con signo

En esta sección se presenta una demostración alternativa del Teorema de Radon-Nikodym y se extiende este resultado al caso de medidas con signo. Otras demostraciones de este Teorema pueden ser verse en [6] y [7].

Lema 3.1. *Sean ν, μ medidas finitas en $(X, \mathcal{S})$ tales que $\nu \neq 0$ y $\nu \ll \mu$. Entonces existen $E_0 \in \mathcal{S}$ con $\nu(E_0) > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que $\nu(F) \geqslant \epsilon\mu(F)$ para todo $F \subseteq E_0$, $F \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Para cada n, consideremos la medida con signo $(\nu - \mu/n)$. Luego, sea (A_n, B_n) una descomposición de Hahn de X con respecto a $(\nu - \mu/n)$. Entonces,

$$(\nu - \mu/n)(B_n) \leqslant 0 \quad \text{y} \quad (\nu - \mu/n)(A_n) \geqslant 0 \quad \text{para toda } n.$$

Sean $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces,

$$\nu(B) \leqslant \nu(B_n) \leqslant \mu(B_n)/n \leqslant \mu(X)/n, \quad \text{para toda } n.$$

Por lo tanto $\nu(B) = 0$. Luego, como $X = A \cup B$, tenemos que $\nu(A) = \nu(X) > 0$. Por lo tanto $\nu(A_{n_0}) > 0$ para algún n_0. Entonces, dado que A_{n_0} es un conjunto positivo para $(\nu - \mu/n_0)$, haciendo $E_0 = A_{n_0}$ y $\epsilon = 1/n_0$ concluimos la demostración. ■

Teorema 3.3.1 (Teorema de Radon-Nikodym). *Sean μ, ν medidas σ-finitas en $(X, \mathcal{S})$ y supongamos $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función no negativa $f \in L_1(\mu)$ tal que*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad \textit{para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Además, si g es cualquier otra función tal que

$$\nu(E) = \int_E g d\mu, \quad \textit{para todo } E \in \mathcal{S},$$

entonces $f(x) = g(x)$ para μ-casi toda x en X.

Demostración. Supóngase que ν y μ son medidas finitas y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones medibles no-negativas g en X tales que

$$\int_E g d\mu \leqslant \nu(E), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues al menos la función $g_0 = \epsilon \chi_{E_0} \in \mathcal{F}$, donde ϵ y E_0 son como los del lema anterior. Sea

$$\alpha := \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \in \mathcal{F} \right\}.$$

Observemos que $0 < \alpha < \infty$ pues $0 < \int g_0 d\mu$ y $\alpha \leqslant \nu(X) < \infty$. Sean $g_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, ...,$ tales que

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Defínase

$$f(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x), x \in X.$$

Probaremos que f es la función deseada. Primero, notemos que para cualesquier $g, h \in \mathcal{F}$,

$$(g \vee h)(x) := \sup\{g(x), h(x)\}, \ x \in X,$$

también está en $\mathcal{F}$. Para esto, sea $E \in \mathcal{S}$ fijo y $E_1 = \{x \in E : g(x) \geqslant h(x)\}$, entonces

$$\int_E (g \vee h) d\mu = \int_{E_1} (g \vee h) d\mu + \int_{E \setminus E_1} (g \vee h) d\mu \leqslant \int_{E_1} g d\mu + \int_{E \setminus E_1} h d\mu \leqslant \nu(E_1) + \nu(E \setminus E_1) = \nu(E). \tag{3.5}$$

Por lo tanto $g \vee h \in \mathcal{F}$. Luego, sea

$$h_n := g_1 \vee g_2 \vee ... \vee g_n \text{ para toda } n.$$

Entonces, aplicando el argumento anterior inductivamente, tenemos que $h_n \in \mathcal{F}$. Además, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece hacia f y así, por el teorema de convergencia monótona y por (3.5),

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \leqslant \nu(E). \tag{3.6}$$

Por lo tanto

$$f \in S \quad \text{y} \quad \int_X f d\mu \leqslant \alpha.$$

Además, como $g_n \leqslant f$ para toda n,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu.$$

Por lo tanto $\alpha = \int_X f d\mu$. Para mostrar que la igualdad se cumple en (3.6) para todo E, consideremos

$$\eta(E) := \nu(E) - \int_E f d\mu, \;\; E \in \mathcal{S}$$

Entonces η es una medida finita y $\eta \ll \mu$. Supongamos que $\eta \neq 0$, entonces por el lema anterior, existe $\epsilon > 0$ y un conjunto $E_0 \in \mathcal{S}$ tal que $\eta(E_0) > 0$ y E_0 es un conjunto positivo para $\eta - \epsilon\mu$. Por lo tanto, para todo $E \subseteq E_0$ con $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E) - \int_E f d\mu - \epsilon\mu(E) > 0,$$

es decir,

$$\nu(E) \geqslant \int_E (f + \epsilon) d\mu.$$

Por lo tanto, para $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \nu(E \cap E_0) + \nu(E \cap E_0^c) \geqslant \int_{E\cap E_0} (f + \epsilon)d\mu + \int_{E\cap E_0^c} f d\mu =$$
$$\int_{E\cap E_0} (f + \epsilon\chi_{E_0})d\mu + \int_{E\cap E_0^c} (f + \epsilon\chi_{E_0})d\mu = \int_E (f + \epsilon\chi_{E_0})d\mu.$$

Es decir, $(f + \epsilon\chi_{E_0}) \in \mathcal{F}$. Por otro lado,

$$\int_X (f + \epsilon\chi_{E_0})d\mu = \int_X f d\mu + \epsilon\mu(E_0) = \alpha + \epsilon\mu(E_0) > \alpha,$$

lo cual es una contradicción, pues α es el supremo. Por lo tanto, $\eta \equiv 0$, es decir,

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \text{ para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Para la demostración de la unicidad y la extensión al caso de medidas σ-finitas se procede igual que en la demostración del Teorema 2.2.4. ■

Definición 3.3.2. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida. Una medida con signo ν en $(X, \mathcal{S})$ se dice ser absolutamente continua con respecto a μ si $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = 0$ entonces $\nu(E) = 0$. Denotamos esto por $\nu \ll \mu$.*

Proposición 3.3.3. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida y sea ν una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces son equivalentes:*
(i) $\nu \ll \mu$.
(ii) $\nu^+ \ll \mu$ *y* $\nu^- \ll \mu$.
(iii) $|\nu| \ll \mu$.

Demostración. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Sea $A, B \in \mathcal{S}$ una descomposición de Hahn de X con respecto a ν. Supongamos que $\mu(E) = 0$, entonces

$$\mu(A \cap E) = \mu(B \cap E) = 0,$$

luego, por hipótesis tenemos

$$\nu(E \cap A) = \nu(E \cap B) = 0,$$

es decir,

$$\nu^+(E) = \nu(A \cap E) = 0 \text{ y } \nu^-(E) = -\nu(B \cap E) = 0.$$

Por lo tanto $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ es inmediato pues $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $\mu(E) = 0$. Entonces $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$, por lo tanto $\nu^+(E) = 0 = \nu^-(E)$, luego $\nu(E) = 0$. ∎

Una primera extensión del Teorema de Radon-Nikodym se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.4 (Radon-Nikodym). *Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida σ-finito y ν una medida con signo σ-finita en $(X, \mathcal{S})$ tal que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función medible con valores reales f tal que $f^+ \in L_1(\mu)$* o *$f^- \in L_1(\mu)$ y*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{S}. \tag{3.7}$$

Además, la función f es única en el sentido de que si existe alguna otra función medible g tal que para todo $E \in \mathcal{S}$

$$\nu(E) = \int_E g d\mu,$$

entonces $f(x) = g(x)$ para μ-casi toda $x \in X$.
Este única f es denotada por $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ y se llama la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ.

Demostración. Por la Proposición 3.2.7, ambas medidas ν^+, ν^- son σ-finitas. Luego, por la Proposición 3.3.3, $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$. Entonces, por el Teorema de Radon-Nikodym, existen funciones medibles f_1 *y* f_2 tales que, para todo $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu^+(E) = \int_E f_1 d\mu \quad \text{y} \quad \nu^-(E) = \int_E f_1 d\mu.$$

Luego, dado que al menos una ν^+, ν^- es finita, entonces $f_1 \in L_1(\mu)$ o $f_2 \in L_1(\mu)$ y

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \int_E (f_1 - f_2) d\mu.$$

La función $f := f_1 - f_2$ satisface la primera igualdad en (3.7). Puesto que

$$\int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

se sigue la segunda desigualdad en (3.7). La demostración de la unicidad es análoga a la demostración en el Teorema 2.2.4. ∎

Observación. *1) La función* $\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$ *si y sólo si* ν *es una medida con signo finita.*
2) Si μ *es una medida* σ*-finita y* ν *una medida con signo* σ*-finita en* $(X, \mathcal{S})$ *tales que* $\nu \ll \mu$*, entonces*

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \frac{d\nu^+}{d\mu}(x) - \frac{d\nu^-}{d\mu}(x) \text{ para } \mu\text{-casi toda } x \in X.$$

Definición 3.3.5. *Sea* $(X, \mathcal{S})$ *un espacio medible y sea* μ *una medida con signo en* $(X, \mathcal{S})$*.*
(i) Si una función medible f *en* X *con valores en* $\mathbb{R}$ *es tal que* $f \in L_1(\mu^+)$ *o* $f \in L_1(\mu^-)$ *definimos*

$$\int_X f d\mu := \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-.$$

En caso de que $f \in L_1(\mu^+)$ *y* $f \in L_1(\mu^-)$ *se cumplan simultáneamente, decimos que* f *es integrable con respecto a la medida con signo* μ*.*
(ii) Si una función medible f *en* X *con valores en* $\mathbb{R}$ *es tal que* f^+ *es integrable con respecto a* μ *o* f^- *es integrable con respecto a* μ*, escribimos*

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Decimos que f *es integrable con respecto a* μ *si tanto* f^+ *como* f^- *son integrables con respecto a* μ*.*

Denotamos por $L_1(\mu)$ al espacio de todas las funciones con valores en $\mathbb{R}$ en X las cuales son integrables con respecto a μ.
Sea μ una medida con signo en $(X, \mathcal{S})$. Entonces son equivalentes:
(i) $f \in L_1(\mu)$.
(ii) $f \in L_1(\mu^+) \cap L_1(\mu^-)$.
(iii) $f \in L_1(|\mu|)$.
En efecto as implicaciones *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)* son inmediatas pues sólo se está reacomodando la definición. Las implicaciones *(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)* se siguen del hecho de que

$$\int_X f d|\mu| = \int_X f d\mu^+ + \int_X f d\mu^-,$$

para toda función medible f, siempre que ambos lados de la igualdad existan.

Definición 3.3.6. *Sean* μ, ν *medidas con signo en* $(X, \mathcal{S})$*. Decimos que* ν *es absolutamente continua con respecto a* μ *si* $|\mu|(E) = 0$ *implica* $\nu(E) = 0$*. Denotamos esto por* $\nu \ll \mu$*.*

Ahora extendemos el Teorema de Radon-Nikodym al caso de medidas con signo σ-finitas.

Teorema 3.3.7 (El Teorema de Radon-Nikodym para medidas con signo)**.** *Sean μ, ν dos medidas con signo σ-finitas en $(X, \mathcal{S})$ tales que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función medible con valores en $\mathbb{R}$, f tal que*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \text{ para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Además, la función f es única en el sentido de que si existe alguna otra función medible g tal que

$$\nu(E) = \int_E g d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{S},$$

entonces $f(x) = g(x)$ para $|\mu|$-casi toda x en X.
Esta única función f se denota por $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ y se llama la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ.

Demostración. Sea A, B una descomposición de Hahn de X con respecto a μ. Entonces

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E) \;\; y \;\; \mu^-(E) = -\mu(B \cap E) \text{ para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Luego, para $E \subseteq A$, se tiene $\mu(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E) = |\mu|(E)$. Por lo tanto $\mu^+(E) = 0$ implica que $\nu(E) = 0$. Por lo tanto $\nu \ll \mu^+$ en $(A, \mathcal{S} \cap A)$. Como tanto ν como μ^+ son σ-finitas, el Teorema 3.3.4 nos dice que existe una función medible f_A en A tal que para todo $E \in A \cap \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \int_E f_A d\mu^+.$$

Análogamente, existe una función medible f_B en B tal que para todo $E \in B \cap \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \int_E f_B d\mu^-.$$

Defínase $f_A = 0$ en B y $f_B = 0$ en A. Entonces $f := f_A + f_B$ es una función medible en X y para todo $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \int_{E \cap A} f_A d\mu^+ + \int_{E \cap B} f d\mu^- = \int_E f d\mu^+ + \int_E f d\mu^- = \int_E f d\mu.$$

Para la demostración de la unicidad se utilizan argumentos análogos a los que se usan en la demostración del Teorema 2.2.4. ■

3.4. El espacio de las medidas con signo finitas

Como hemos visto en los capítulos anteriores, las medidas con signo finitas son cerradas bajos las operaciones de suma y multiplicación por escalar. En la primera sección demostramos que el conjunto de todas las medidas finitas en un espacio medible conforman un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar, más aún en esta sección, demostramos que es un espacio vectorial normado completo .

Teorema 3.4.1. *Sea $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$ el conjunto de todas las medidas con signo finitas en $(X,\mathcal{S})$. Para $\mu,\nu \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{S}), \alpha \in \mathbb{R}$ y $E \in \mathcal{S}$, defínase*

$$(\mu+\nu)(E) := \mu(E) + \nu(E) \quad y \quad (\alpha\mu)(E) := \alpha(\mu(E)).$$

Entonces $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$ se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ bajo estas operaciones. Además, para $\mu \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$, sea

$$\|\mu\| := |\mu|(X). \tag{3.8}$$

Entonces $\|\mu\|$ es una norma en $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$, más aún, $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$ es un espacio de Banach bajo esta norma.

Demostración. La demostración de que $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$ es un espacio vectorial, se sigue de la cerradura entre las medidas con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar y las propiedades de $\mathbb{R}$.

Para mostrar que $\|\cdot\|$ definida en (3.8) es una norma en $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$ observemos lo siguiente:

(*i*) Si $\mu \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$ entonces $\|\mu\| = |\mu|(X) \geqslant 0$, pues $|\mu|$ es una medida.

(*ii*) Si $\|\mu\| = 0$ entonces $\mu^+(X) + \mu^-(X) = |\mu|(X) = 0$, lo que implica $\mu^+(X) = 0$ y $\mu^-(X) = 0$, es decir, $\mu \equiv 0$.

(*iii*) Sean $\alpha \in \mathbb{R}, \mu \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{S})$, si $\alpha \geqslant 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mu\| = |\alpha\mu|(X) =& (\alpha\mu)^+(X) + (\alpha\mu)^-(X)\\
=& \alpha\mu^+(X) + \alpha\mu^-(X)\\
=& \alpha(\mu^+(X) + \mu^-(X))\\
=& \alpha\|\mu\|.
\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$, entonces

$$\begin{aligned}\|\alpha\mu\| = |\alpha\mu|(X) =& (\alpha\mu)^+(X) + (\alpha\mu)^-(X)\\ =& -\alpha\mu^-(X) - \alpha\mu^+(X)\\ =& -\alpha(\mu^-(X) + \mu^+(X))\\ =& |\alpha|\|\mu\|.\end{aligned}$$

(iv) Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b(X, \mathcal{S})$ entonces, por 3.2.6 (iii),

$$\begin{aligned}\|\mu+\nu\| = |\mu+\nu|(X) =& \sup\{\sum_{i=1}^{n} |(\mu+\nu)(F_i)| : \{E_1, E_2, ..., E_n\} \text{ es una partición medible de } X\}\\ \leqslant& \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(F_i)| : \{E_1, E_2, ..., E_n\} \text{ es una partición medible de } X\}\\ +& \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(F_i)| : \{E_1, E_2, ..., E_n\} \text{ es una partición medible de } X\}\\ =& |\mu|(X) + |\nu|(X) = \|\mu\| + \|\nu\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\cdot\|$ define una norma en $\mathcal{M}_b(X, \mathcal{S})$. Para mostrar que $\mathcal{M}_b(X, \mathcal{S})$ es un espacio de Banach bajo esta norma, sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}_b(X, \mathcal{S})$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\| \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Dado que para $E \in \mathcal{S}$ tenemos

$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leqslant |\mu_n - \mu_m|(E) \leqslant |\mu_n - \mu_m|(X) = \|\mu_n - \mu_m\|, \tag{3.9}$$

por lo que $(\mu_n(E))_{n\in\mathbb{N}}$ resulta ser una sucesión de Cauchy de números reales. Luego, para $E \in \mathcal{S}$, sea

$$\mu(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(E), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Afirmamos que $\mu \in \mathcal{M}_b(X, \mathcal{S})$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0$. En efecto, notemos que $\mu(\emptyset) = 0$ pues $\mu_n(\emptyset) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además, sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ una unión disjunta de elementos en $\mathcal{S}$. Debemos mostrar que $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Para esto, notemos que para toda $k \in \mathbb{N}$

y para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} |\mu(E) - \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)| &= |\mu(E) - \mu_n(E) + \mu_n(E) - \sum_{j=1}^{k} \mu_n(E_j) + \sum_{j=1}^{k} \mu_n(E_j) - \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)| \\ &\leqslant |\mu(E) - \mu_n(E)| + |\mu_n(E) - \sum_{j=1}^{k} \mu_n(E_j)| + |\sum_{j=1}^{k} \mu_n(E_j) - \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mu_n - \mu_m\| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \text{ para toda } n, m \geqslant k_0.$$

Entonces, debido a (3.9), para toda $n, m \geqslant k_0$, tenemos

$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.11}$$

También, para toda $n, m \geqslant k_0$,

$$|\sum_{j=1}^{k} [\mu_n(E_j - \mu_m(E_j)]| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\mu_n(E_j) - \mu_m(E_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\mu_n - \mu_m|(E_j) = \|\mu_n - \mu_m\| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto, haciendo $m \to \infty$, obtenemos para toda $n \geqslant k_0$

$$|\sum_{j=1}^{k} [\mu_n(E_j) - \mu(E_j)] \leqslant \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Finalmente, como $\mu_n(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(E_j)$ para todo $n \geqslant k_0$ fijo, podemos escoger k_1 tal que para todo $k \geqslant k_1$

$$|\mu_n(E) - \sum_{j=1}^{k} \mu_n(E_j)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.13}$$

Por lo tanto, usando (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12), para toda $k \geqslant k_1$, tenemos

$$|\mu(E) - \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)| \leqslant \epsilon.$$

Esto implica que $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, y por lo tanto μ es una medida con signo. Además, como

$$|\mu(X)| = \lim_{n\to\infty} |\mu_n(X)| < +\infty,$$

$\mu \in \mathcal{M}_b(X, \mathcal{S})$. Finalmente mostraremos que $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Notemos que debido a (3.9), para toda $n, m \geqslant k_0$ y $E \in \mathcal{S}$ tenemos,

$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leqslant \epsilon.$$

Haciendo $m \to \infty$, obtenemos para toda $n \geqslant k$, $E \in \mathcal{S}$

$$|\mu_n(E) - \mu(E)| \leqslant \epsilon.$$

Combinando esto con el Teorema 3.1.13, obtenemos

$$(\mu_n - \mu)^+(X)) = \sup\{(\mu_n - \mu)(F) : F \in \mathcal{S}\} \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Análogamente, $(\mu_n - \mu)^-(X) \leqslant \epsilon/2$, por lo tanto, para toda $n \geqslant k$,

$$\|\mu_n - \mu\| = |\mu_n - \mu|(X) = (\mu_n - \mu)^+(X) + (\mu_n - \mu)^-(X) \leqslant \epsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0,$$

lo que completa la prueba. ■

Capítulo 4

El Teorema de Representación de Riesz en L_p $(1 \leqslant p < \infty)$

Para culminar este trabajo, cerramos con un capítulo en el que mostramos el Teorema de Representación de Riesz en el espacio L_p, el cual demuestra que existe un isomorfismo isométrico entre el dual topológico de L_p y el espacio L_q, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4.1. El Teorema de representación de Riesz para L_p

Teorema 4.1.1. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida σ-finita y sea $1 \leqslant p < \infty$. Si $T : L_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada, entonces existe una única función (salvo la identificación μ-casi en todas partes) $g \in L_q(\mu)$, donde q es el conjugado de p, tal que*

$$T(f) = \int_X fg d\mu, \text{ para toda } f \in L_p(\mu),$$

y $\|T\| = \|g\|_q$.

Demostración. Supongamos primero que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida finita. Así, consideremos la función $\nu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\nu(E) := T(\chi_E).$$

Entonces ν es una medida con signo finita bien definida en $\mathcal{S}$ por lo siguiente:
Dado que μ es finita, $\chi_E \in L_p(\mu)$ para todo $E \in \mathcal{S}$, entonces

$$|\nu(E)| = |T(\chi_E)| \leqslant \|T\|\|\chi_E\|_p < +\infty \text{ para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Además,

$$\nu(\emptyset) = T(\chi_\emptyset) = T(0) = 0.$$

Para probar la aditividad numerable, sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ una sucesión de subconjuntos de X mutuamente ajenos tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y sea $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Entonces $\chi_{A_n} \nearrow \chi_E$ y por el Teorema de Convergencia Dominada, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi_E - \chi_{A_n}\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_X |\chi_{A_n} - \chi_E|^p d\mu = 0. \tag{4.1}$$

También,

$$|T(\chi_E - \chi_{A_n})| \leqslant M\|\chi_E - \chi_{A_n}\|_p. \tag{4.2}$$

Por lo tanto, usando 4.1 y 4.2, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |T(\chi_E - \chi_{A_n})| \leqslant \lim_{n\to\infty} M\|\chi_E - \chi_{A_n}\|_p = 0.$$

Usando el hecho de que T es lineal, la ecuación anterior implica

$$\nu(E) = T(\chi_E) = \lim_{n\to\infty} T(\chi_{A_n}). \tag{4.3}$$

Como $\chi_{A_n} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}$, de 4.3 tenemos

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T(\chi_{E_k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k).$$

Por lo tanto, ν es una medida con signo bien definida en $(X, \mathcal{S})$. Supongamos que $\mu(E) = 0$, entonces $\|\chi_E\|_p = 0$ y por lo tanto

$$|\nu(E)| = |T(\chi_E)| \leqslant M\|\chi_E\|_p = 0,$$

lo cual implica $\nu \ll \mu$.
Luego, por el Teorema de Radon-Nikodym 3.3.4, existe la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ. Sea

$$g(x) := \frac{d\nu}{d\mu}(x) \text{ para } \mu - \text{casi toda } x \text{ en } X.$$

Notemos que

$$T(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{S}.$$

Por lo tanto, por la linealidad de T y de la integral, tenemos

$$T(s) = \int_X sg d\mu, \tag{4.4}$$

para toda función medible simple no-negativa s en $(X, \mathcal{S})$.
Para mostrar que $g \in L_q(\mu)$, supongamos primero que $1 < p < \infty$. Luego, escojamos una sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles simples no-negativas tales que $\phi_n \nearrow |g|^q$. Sean

$$A := \{x \in X : g(x) \geqslant 0\} \quad \text{y} \quad B := \{x \in X : g(x) < 0\}.$$

Defínase

$$S_n(x) := (\chi_A - \chi_B)(x)(\phi_n(x))^{1/p}, \quad x \in X.$$

Entonces $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles simples, y

$$\|S_n\|_p = \left(\int_X \phi_n(x) d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Además, como

$$g(x)S_n(x) = |g(x)|(\phi_n(x)))^{1/p} \quad \text{y} \quad (\phi_n(x)))^{1/q} \leqslant |g(x)|,$$

tenemos

$$g(x)S_n(x) \geqslant (\phi_n(x)))^{1/q+1/q} = \phi_n(x)$$

lo que implica

$$0 \leqslant \int_X \phi_n(x) d\mu(x) \leqslant \int_X S_n(x) g(x) d\mu(x) \leqslant T(S_n).$$

Por lo tanto

$$\int_X \phi_n(x) d\mu(x) \leqslant T(S_n) \leqslant \|T\| \|S_n\|_p = \|T\| \left(\int_X \phi_n d\mu\right)^{1/p},$$

es decir,

$$\left(\int_X \phi_n d\mu\right)^{1-1/p} \leqslant \|T\|.$$

Por lo tanto,

$$\int_X \phi_n d\mu \leqslant \|T\|^q.$$

Como esto se cumple para toda n en $\mathbb{N}$, el Teorema de Convergencia Monótona implica,

$$\int_X |g|^q d\mu \leqslant \|T\|^q.$$

Esto prueba que $g \in L_q(\mu)$ y $\|g\|_q \leqslant \|T\|$ en el caso $1 < p < \infty$. Para el caso $p = 1$, notemos que debido a que

$$T(\chi_E) = \int_E g d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{S},$$

tenemos

$$\left| \int_E g d\mu \right| = |T(\chi_E)| \leqslant \|T\| \mu(E).$$

Entonces por la Proposición 1.3.5

$$|g(x)| \leqslant \|T\| \text{ para } \mu\text{-casi toda } x \text{ en } X,$$

por lo tanto $g \in L_\infty(\mu)$ y $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$.

Sea $f \in L_p(\mu)$. Entonces, por la Proposición 1.3.6 podemos escoger una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples en $L_p(\mu)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p = 0$. Entonces, por la continuidad de T, $T(f) = \lim\limits_{n\to\infty} T(s_n)$ y usando la desigualdad de Hölder para el caso $1 < p < \infty$, tenemos

$$\left| \int_X f g d\mu - \int_X s_n g d\mu \right| \leqslant \int_X |f - s_n||g| d\mu \leqslant \|f - s_n\|_p \|g\|_q.$$

Para el caso $p = 1$, tenemos

$$\left| \int_X f g d\mu - \int_X s_n g d\mu \right| \leqslant \int_X |f - s_n||g| d\mu \leqslant \|f - s_n\|_1 \|g\|_\infty.$$

Por lo tanto, para $1 \leqslant p < \infty$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

De (4.4) se sigue entonces que

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

Por la desigualdad de Hölder, tenemos entonces que $\|T\| \leqslant \|g\|_p$, y por lo tanto $\|T\| = \|g\|_q$. Para probar la unicidad de g, supongamos que existe $g_1 \in L_p(\mu)$ tal que

$$\int_X fgd\mu = T(f) = \int_X fg_1 d\mu.$$

Entonces $g - g_1 \in L_p(\mu)$ y

$$(T_{g-g_1})(f) := \int_X fgd\mu - \int_X fg_1 d\mu = 0, \text{ para toda } f \in L_p(X, \mathcal{S}, \mu).$$

Por lo tanto

$$0 = \|T_{g-g_1}\| = \|g - g_1\|_q,$$

es decir, $g = g_1$ μ-casi donde quiera. Esto completa la prueba para el caso en que $\mu(X) < \infty$.

Para probar el teorema cuando μ es σ-finita, sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{S}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ y $\mu(X_n) < +\infty$ para toda n en $\mathbb{N}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la aplicación lineal continua (es lineal y continua pues es la restricción de una funcional lineal y continua) $T_n : L_p(X_n, \mathcal{S} \cap X_n, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$T_n(f) = T(f), \text{ para toda } f \in L_p(X_n, \mathcal{S} \cap X_n, \mu),$$

donde cada f es tratada como una función en X, con $f \equiv 0$ en X_n^c. Entonces, por el caso finito, existe una función $g_n \in L_q(X_n, \mathcal{S} \cap X_n, \mu)$ tal que, para toda $f \in L_p(X_n, \mathcal{S} \cap X_n, \mu)$,

$$T(\chi_{X_n} f) = \int_{X_n} fg_n d\mu.$$

Si tratamos a g_n como elemento de $L_q(X, \mathcal{S}, \mu)$, con $g_n \equiv 0$ en X_n^c, entonces

$$\|g_n\|_q \leqslant \|T\|.$$

Como $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y toda g_n está determinada de manera única (excepto por conjunto de medida μ-cero), podemos asumir que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) = g_n(x)$ para $x \in X_n$. Defínase g en X mediante

$$g(x) := g_n(x), \text{ para } x \in X_n.$$

Luego, g es una función medible bien definida en $(X, \mathcal{S})$, y la sucesión $\{|g_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ crece hacia $|g|$, para toda $x \in X$. Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia Monótona y la continuidad de T, tenemos que, para el caso $1 < p < \infty$,

$$\int_X |g|^q d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |g_n|^q d\mu \leqslant \|T\|^q. \tag{4.5}$$

Por lo tanto $g \in L_q(X, \mathcal{S}, \mu)$. Si $p = 1$, entonces $\|g_n\|_\infty \leqslant \|T\|$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y esto implica que $g \in L_\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ con $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$.
Finalmente, para $f \in L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$, como $\chi_{X_n} f \to f$ puntualmente y $|\chi_{X_n} f| \leqslant |f|$, por el Teorema de Convergencia Dominada, $\chi_{X_n} f \to f$ en $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$. También, $\chi_{X_n} fg \to fg$ y $|\chi_{X_n} fg| \leqslant |fg| \in L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$. Por lo tanto, de nuevo por el Teorema de Convergencia Dominada, para toda $f \in L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$,

$$\int_X fgd\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} fgd\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} fg_n d\mu = \lim_{n\to\infty} T(\chi_{X_n} f) = T(f).$$

■

Puesto que el caso $p = 2$ es un caso particular del teorema anterior, concluímos que el teorema de Radon-Nikodym «implica» el teorema de representación de Riesz. Por otra parte de lo demostrado en el capítulo 2 tenemos que el teorema de representación de Riesz «implica» el teorema de Radon-Nikodym. Concluímos entonces que los teoremas son equivalentes.

Bibliografía

[1] R.G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley and Sons, 2014.

[2] H. Fetter-Nathansky y B. Gamboa de Buen. *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometrıa de Espacios de Banach.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1997.

[3] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, volume 1. Wiley New York, 1978.

[4] I.K. Rana. *An Introduction to Measure and Integration.* American Mathematical Society, 2002.

[5] H.L. Royden. *Real Analysis. 2nd ed.* Macmillan Company. New York, 1968.

[6] A.R. Schep. And still one more proof of the Radon-Nikodym Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 110-6 (2003), 536–538.

[7] T. Sellke. Yet another proof of the Radon-Nikodym Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 109-1 (2002), 74-76.