"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Productos infinitos y aplicaciones

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Javier Armando Rubio Rivera

Directora de tesis: Dra. Martha Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Junio de 2019

SINODALES

Dra. Martha Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. Ma. Teresa Robles Alcaraz
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M. C. Eduardo Tellechea Armenta
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

A mis padres, por apoyarme en cada momento de mi vida, y son quienes me han permitido llegar tan lejos.

A mis profesores, que me han enseñado a seguir adelante.

A mis compañeros, El Aaron, Jara, Yitzhak, Josh, Donny, Itzia, Cristal, Angelito, y Diana, por hacer la licenciatura una de la mejores experiencias de mi vida.

Contenido

Introducción

En matemáticas, hay ocasiones donde se requiere sumar una infinidad de números, pero ¿cómo hacemos esto si la suma esta definida para dos números? Gracias a la asociatividad, podemos sumar una cantidad finita de números sin problemas. Para una cantidad infinita de números, entra la herramienta del límite introducida en el siglo XVII y formalizada hasta el siglo XIX.

Este mismo proceso lo podemos hacer para la operación del producto, tal cual es el propósito de este trabajo. Esta idea de tener productos infinitos viene desde los inicios del cálculo, y desde entonces ha sido utilizada por grandes matemáticos como Newton, Euler, Cauchy, Gauss, Riemann, hasta que Weierstrass formalizo la herramienta. Aquí veremos la teoría para números complejos, así como funciones de una variable compleja.

En el primer capítulo, presentaremos algunos resultados básicos de variable compleja, enfocándonos en los que más utilizaremos durante este trabajo, principalmente la fórmula integral de Cauchy, el teorema del residuo, y el principio de identidad, junto con otras propiedades de las funciones analíticas.

En el segundo capitulo, desarrollaremos la teoría de los productos infinitos aprovechando lo que sabemos para series. Primero definiendo lo que es un producto infinito y su convergencia o divergencia, luego estableciendo que clase de relación existe entre estos productos y un tipo particular de series, prosiguiendo, haremos productos infinitos de funciones analíticas, al igual que se tienen sumas infinitas de estas funciones en las series de Taylor, desarrollando teoría de la convergencia de estas funciones, y finalmente obteniendo el teorema de factorización de Weierstrass, el cual nos permite expresar cualquier función analítica como producto infinito de funciones analíticas más sencillas.

En el tercer capítulo, aplicamos el teorema de factorización de Weierstrass a tres funciones en particular: la función seno, la función Gamma, y la función Zeta de Riemann.

Para la función seno, la factorizamos de la misma manera que lo hizo Euler en su tiempo. Para la función Gamma, primero la escribimos como un producto infinito usando el teorema de factorización de Weierstrass, luego encontramos algunas de sus propiedades, como ser una de las pocas extensiones analíticas de la función factorial al plano complejo, y finalmente probamos que su forma en producto coincide con la forma en integral que es más conocida. Para la función Zeta de Riemann, utilizaremos lo que sabemos de la función Gamma para establecer una relación importante entre estas funciones, que nos permite extender Zeta al plano complejo, y veremos algunos hechos básicos sobre la hipótesis de Riemann.

Para finalizar, en el cuarto capítulo deduciremos la fórmula de Jensen y estudiaremos un poco de los productos de Blaschke. El primer resultado nos ayuda a calcular ciertas integrales de funciones armónicas o analíticas a partir de su valor en el origen, mientras que los productos de Blaschke son una aplicación del teorema de factorización de Weierstrass que nos ayuda a caracterizar las funciones analíticas en el disco unitario. Ambas herramientas tratan con funciones en el disco unitario, por lo que uno puede verlas como material introductorio para los espacios de Hardy.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección, presentaremos algunos resultados canónicos de variable compleja que usaremos a lo largo de esta tesis. Enunciaremos estos resultados sin prueba, pero sus demostraciones se pueden encontrar en [1] o [3].

Comenzaremos con uno de los resultados más importantes de variable compleja, que nos dice que la integral sobre una curva cerrada se anula si la curva se puede deformar continuamente a un solo punto. Esto nos lo dice el teorema de Cauchy.

Teorema 1.0.1 (Teorema de Cauchy)**.** *Sea f una función analítica en una región G. Sea γ una curva cerrada en G que es homotópica a un punto en G. Entonces*

$$\int_\gamma f = 0.$$

A partir de este teorema, se deduce la formula integral de Cauchy, la cual nos ayuda a calcular varias integrales, y determina completamente los valores de una función analítica dentro de una curva a partir del valor de cierta integral.

Teorema 1.0.2 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea f una función analítica en una región G, sea γ una curva cerrada en G que es homotópica a un punto, y sea $z_0 \in G$ un punto que no este en γ. Entonces*

$$f^{(k)}(z_0) \cdot I(\gamma; z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $I(\gamma; z_0)$ es el índice de la curva γ con respecto al punto z_0, se interpreta como el número de vueltas en sentido positivo que hace la curva γ alrededor del punto z_0, y se *define como*

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Como una aplicación de esta fórmula, junto con el teorema de Fubini, se obtiene el siguiente resultado, que no es tan utilizado, pero lo emplearemos algunas veces durante este trabajo.

Proposición 1.0.3. *Sea $f(z,t)$ una función continua en z y t, para z en una región G, y t en una curva γ. Para cada t en γ, suponga que f es analítica en z. Sea*

$$F(z) = \int_\gamma f(z,t)dt.$$

Entonces F es analítica en G y

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Un resultado clásico del análisis es la caracterización de cierto tipo de funciones mediante una serie de potencias. Aquí su análogo para las funciones analíticas.

Teorema 1.0.4 (Teorema de Taylor)**.** *Sea f una función analítica en un conjunto abierto A de $\mathbb{C}$. Sea $z_0 \in A$ y $A_r = \{z : |z - z_0| < r\}$ contenido en A. Entonces para cada $z \in A_r$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge en A_r, y además

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

El teorema de Taylor no nos permite expresar a ciertas funciones, ya que no son analíticas en ciertos puntos. Para estas, requerimos otro tipo de expansión, llamada la expansión de Laurent.

Teorema 1.0.5. *Sean $0 \le r_1 < r_2$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, y considere la región $A = \{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, donde posiblemente $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$. Sea f analítica en A. Entonces podemos escribir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

donde ambas series convergen absolutamente en conjuntos de la forma $B_{\rho_1,\rho_2} = \{z : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$*, donde* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$*. Esta serie para* f *se le conoce como su serie de Laurent alrededor de* z_0 *en el anillo* A*. Si* γ *es un círculo alrededor de* z_0 *de radio* R*, donde* $r_1 < r < r_2$*, entonces los coeficientes son*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Para cada punto z_0 *y región* A*, la serie de Laurent de* f *es única.*

El siguiente teorema también es de los más importantes de la variable compleja. Muchas veces las curvas por las que debemos integrar contienen polos dentro de la región que encierran, por lo que no podemos aplicar el teorema de Cauchy, sin embargo, si podemos calcular los residuos en cada polo, entonces el próximo resultado nos da una forma de calcular tales integrales.

Teorema 1.0.6 (Teorema del Residuo). *Sea* G *una región y sean* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n *puntos distintos en* G*. Sea* f *analítica en* $G - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$*. Sea* γ *una curva cerrada en* G *homotópica a un punto en* G*. Suponga que ningún* z_j *está en* γ*. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \left[\operatorname{Res}(f; z_i)\right] I(\gamma; z_i).$$

Como aplicación del teorema del residuo, se pueden calcular varias integrales de variable real, considerándolas como de variable compleja y eligiendo curvas en el plano complejo apropiadas. Los siguientes dos resultados se obtienen de tal forma.

Proposición 1.0.7 (Integral de Mellin). *Sea* f *analítica en* $\mathbb{C}$ *excepto por un número finito de singularidades aisladas, de las cuales ninguna esta en el eje real positivo. Sea* $a > 0$ *no entero, y suponga que se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Existen constantes* $M_1 > 0$*,* $R_1 > 0$ *y* $b > a$ *tal que* $|f(z)| \leq M_1/|z|^b$ *para* $|z| > R_1$*.*
- *Existen constantes* $M_2 > 0$*,* $R_2 > 0$ *y* d *con* $0 < d < a$ *tal que* $|f(z)| \leq M_2/|z|^d$ *para* $0 < |z| \leq R_2$*.*

Entonces la integral $\int_0^\infty x^{a-1} f(x)dx$ *existe en el sentido de ser absolutamente convergente y*

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x)dx = \frac{\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen} \pi a} \sum \left\{ \textit{residuos de } z^{a-1} f(z) \right\}.$$

donde la suma es sobre todas las singularidades de f *excluyendo el residuo en* 0, *y* $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ *tomando la rama* $0 < \arg z < 2\pi$.

El teorema del residuo también nos da una forma de calcular series de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, donde f es una función meromorfa dada, con un número finito de polos, todos distintos a los enteros.

Teorema 1.0.8 (Teorema de la adición)**.** *Sea* f *analítica en* $\mathbb{C}$ *excepto por un número finito de singularidades aisladas. Sea* C_N *el cuadrado con vértices en* $(N + 1/2) \times (\pm 1 \pm i)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. *Supongamos que* $\int_{C_N} (\pi \cot \pi z) f(z)dz \to 0$ *cuando* $N \to \infty$. *Si ninguna de las singularidades de* f *esta en los enteros, entonces* $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n)$ *existe, es finito, y*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum \left\{ \textit{residuos de } (\pi \cot \pi z) f(z) \textit{ en las singularidades de } f \right\}.$$

El siguiente resultado que se obtiene de la fórmula integral de Cauchy, nos habla de la convergencia de sucesiones de funciones analíticas, las cuales se comportan de manera agradable y como uno quisiera.

Teorema 1.0.9. *Si* (f_n) *es una sucesión de funciones analíticas en* G, *y* f *es una función continua tal que* $f_n \to f$, *entonces* f *es analítica y* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *para todo* $k \geq 1$.

Esto nos dice que el espacio de funciones analíticas en G es un subespacio cerrado del espacio de funciones continuas en G, y que el operador $f \to f'$ es continuo. Como el espacio de funciones continuas en G es completo con la norma del supremo, esto implica que el espacio de funciones analíticas en G es un espacio vectorial completo.

En varias ocasiones, se requiere trabajar con el comportamiento de sucesiones o funciones en el infinito. Para ello, al plano complejo se le agrega el punto al infinito, y se compactifica mediante la proyección estereográfica a la esfera de Riemann. En este objeto, se le asigna una métrica especifica que es la siguiente.

Lema 1.0.10 (Métrica cordal)**.** *La función* ρ *definida en la esfera de Riemann por*

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}$$

es una métrica.

Una característica importante de esta métrica es su equivalencia entre la convergencia con la métrica usual. Esta métrica también se usa para el espacio de funciones meromorfas en subconjuntos de la esfera de Riemann.

Teorema 1.0.11. *El espacio de funciones meromorfas en una región* G *junto con la función constante igual al punto infinito es un espacio completo con la métrica*

$$d(f, g) = \sup_{z \in \mathbb{C}} \rho(f(z), g(z)),$$

donde ρ *está definida como en el lema 1.0.10*

En el plano complejo, las funciones analíticas tienen una relación especial con las funciones armónicas, la cual está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.0.12. *Si* f *es una función analítica en una región* G*, entonces* $\operatorname{Re} f$ *y* $\operatorname{Im} f$ *son funciones armónicas en* G*. Recíprocamente, si* u *es una función armónica en* G *simplemente conexo, entonces existe una función analítica en* G *tal que* $u = \operatorname{Re} f$*.*

Los siguientes dos resultados son de mucha importancia en variable compleja. Ambos son consecuencia de la fórmula de Cauchy.

Teorema 1.0.13 (Propiedad del valor medio)**.** *Sea* f *analítica dentro de y en un disco de radio* r *y centro* z_0*. Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Este teorema tiene un análogo para funciones armónicas que también se utiliza bastante.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy, y la propiedad de valor medio, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.0.14 (Principio del módulo máximo). *Sea G una región acotada y supongamos que $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en G y continua en $\overline{G}$. Entonces $|f|$ alcanza su valor máximo finito en ∂G. Si además lo alcanza en el interior de G, entonces f es constante en $\overline{G}$.*

Al igual que la propiedad del valor medio, este teorema tiene un análogo para funciones armónicas.

Entre las técnicas para encontrar el dominio más grande donde una función f es analítica es el principio de identidad, que nos dice que si dos funciones coinciden en un conjunto con puntos de acumulación, entonces ambas son la misma función. Dicho de forma precisa, está el siguiente teorema.

Teorema 1.0.15 (Principio de identidad). *Sean f y g funciones analíticas en una región G. Supongamos que existe una sucesión $z_1, z_2, \ldots$ de puntos distintos en G que convergen a $z_0 \in G$ tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo n. Entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en G.*

Como consecuencia del teorema del residuo, el siguiente resultado, que es bastante utilizado en variable compleja, principalmente nos da información del número de ceros de una función dentro de una curva cerrada.

Teorema 1.0.16 (Teorema de Rouché). *Sean f y g analíticas en una región G excepto por un número finito de ceros y polos en G. Sea γ una curva cerrada en G homotópica a un punto y no pasa por ningún cero o polo de f o g. Supongamos que para todo z en γ,*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

entonces $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, donde $Z_f = \sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j)$, donde los a_j son los ceros de f repetidos de acuerdo a su multiplicidad, y P_f, Z_g, P_g definidos de forma similar.

Una de las aplicaciones principales del teorema de Rouché es lo siguiente.

Teorema 1.0.17 (Teorema de Hurwitz). *Sea (f_n) una sucesión de funciones analíticas en una región G que converge uniformemente en cualquier disco cerrado en G a una función f. Supongamos que f no es idénticamente cero, y sea $z_0 \in G$. Entonces $f(z_0) = 0$ si y solo si existe una sucesión $z_n \to z_0$ y un natural N tal que $f_n(z_n) = 0$ cuando $n \geq N$.*

Capítulo 2

Teorema de Factorización de Weierstrass

El principal objetivo de este capítulo es, para cualquier sucesión (a_j), construir una función entera tal que se anule únicamente en el conjunto $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Para un número finito de puntos $a_1, \ldots, a_n$, con cero de multiplicidad m_i en el punto a_i , el polinomio $f(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots(z-a_n)^{m_n}$ cumple con lo que queremos. Si deseamos hacer lo mismo para una sucesión infinita de puntos, una forma de hacer esto es estudiar los productos infinitos.
En lugar de crear nueva teoría para los productos, nos apoyaremos del conocimiento ya desarrollado para las series, y veremos a los productos como un análogo de las sumas infinitas.

Definición 2.0.1. *Si (z_k) es una sucesión en $\mathbb{C}$ y $z = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} z_k$ existe, entonces z es el producto infinito de los z_k y lo denotaremos por*

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Observamos que si $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ existe y es distinto de cero, entonces podemos escribir a z_n como

$$z_n = \frac{\prod_{j=1}^{n} z_j}{\prod_{j=1}^{n-1} z_j},$$

y por la definición de z, que es distinto de cero, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} z_j}{\prod_{j=1}^{n-1} z_j} = \frac{\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j}{\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n-1} z_j} = \frac{z}{z} = 1.$$

Este resultado, análogo a la convergencia a cero de los términos de una serie, nos inspira para definir la convergencia de los productos infinitos.

Definición 2.0.2. *Sea (z_n) una sucesión de números complejos tales que $z_n \neq -1$ para todo n. Diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+z_n)$ converge si la sucesión de productos parciales converge a un número distinto de cero.*
En caso que los productos parciales converjan a cero, diremos que el producto infinito diverge a cero.

Algunos autores permiten que un número finito de los z_n sean igual a -1, y luego estudian la subsucesión que resulta a partir del punto donde todos los factores sean distintos de cero. Para estudiar la convergencia de los productos, nosotros no haremos esto, simplemente supondremos que todos los z_n son distintos de -1.

Ejemplo 2.0.3.

1. *Tomando $z_n = -2$ para todo n, tenemos que $\prod_{n=1}^{\infty} (1+z_n)$ no existe.*

2. *Sea $z_n = -\frac{1}{n+1}$, entonces el n-ésimo producto parcial es*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

como la sucesión de productos parciales converge a cero, tenemos que el producto infinito diverge a cero.

3. *El producto* $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *tiene productos parciales*

$$\begin{aligned} P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\ &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\prod_{k=2}^{n-1}\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k}\right)\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el producto converge a $\frac{1}{2}$.

El siguiente resultado nos permite apreciar más la relación entre los productos infinitos y las series, ayudándonos a caracterizar los productos convergentes.

Teorema 2.0.4. *Sea* (z_n) *una sucesión en* $\mathbb{C}$ *tal que* $z_n \neq -1$ *para todo* n

a) Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge, entonces* (z_n) *converge a cero.*

b) Supongamos que $\operatorname{Re} z_n > -1$ *para todo* n*. Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+z_n)$ *converge, considerando la rama principal del logaritmo.*

c) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ *converge si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *converge.*

d) Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ *converge, entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge.*

Demostración. a) Sea $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$. Por hipótesis, P_n converge a $P = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$, con $P \neq 0$ y tenemos que $1+z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}(1+z_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to\infty}P_n}{\lim_{n\to\infty}P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1,$$

lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

b) Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1+z_k)$ y $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$. Para cada n, tenemos que $P_n = e^{S_n}$.

Si S_n converge a S, entonces por la continuidad de e^z, P_n converge a $P = e^S$.

Recíprocamente, supongamos que P_n converge a $P \neq 0$. Para probar que S_n converge, es suficiente mostrar que a partir de cierto índice, todas las S_n yacen en una misma franja periódica de e^z, pues ahí la función logaritmo es continua.

Tomamos una rama de log tal que P este en su dominio de analiticidad G. Como P_n converge a P, entonces $P_n \in G$ para n suficientemente grande, lo que implica

$$S_n = \log P_n + 2\pi i k_n$$

para k_n entero, y así tenemos

$$2\pi i\,(k_{n+1} - k_n) = \log(1+z_{n+1}) - \log P_{n+1} + \log P_n;$$

como el lado izquierdo es imaginario puro, también se cumple

$$2\pi i\,(k_{n+1} - k_n) = i\left[\arg(1+z_{n+1}) - (\arg P_{n+1} - \arg P_n)\right]. \tag{2.1}$$

Por la parte a) del teorema, sabemos que z_n converge a cero, por lo que $\lim_{n\to\infty} \arg(1+z_{n+1}) = 0$. Además, $\lim_{n\to\infty}(\arg P_{n+1} - \arg P_n) = 0$.

Combinando esto con (2.1), tenemos que $\lim_{n\to\infty}(k_{n+1} - k_n) = 0$, es decir, existe un entero n_0 tal que $k_n = k$ para un entero k y $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$S_n = \log P_n + 2\pi i k$$

para $n \geq n_0$, y por la continuidad de log tenemos

$$S_n \longrightarrow S = \log P + 2\pi i k.$$

c) Como $|z_n| \geq 0$ para todo n, por la parte b) del teorema, es suficiente ver para $x_n \geq 0$, $\sum x_n$ converge si y solo si $\sum \log(1+x_n)$ converge. Por la expansión de Maclaurin de $\log(1+z)$, tenemos

$$\frac{\log(1+z)}{z} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots$$

para $|z| < 1$, es decir, tiene una singularidad removible en $z = 0$, y así

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1. \tag{2.2}$$

Supongamos que $\sum x_n$ converge. Entonces x_n converge a cero, así para $\epsilon > 0$, debido a (2.2), tenemos

$$0 \leq \log(1+x_n) \leq (1+\epsilon)\, x_n \tag{2.3}$$

para n suficientemente grande. Por el criterio de comparación para series, tendremos que $\sum \log(1+x_n)$ converge. Si utilizamos la desigualdad

$$(1-\epsilon)\, x_n \leq \log(1+x_n)$$

que se deduce de (2.2), obtenemos que la convergencia de $\sum \log(1+x_n)$ implica la convergencia de $\sum x_n$.

d) Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ converge. Entonces por la parte c) del teorema, $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converge. De (2.2), se desprende que

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\log(1+z)|}{|z|} = 1.$$

Argumentando como en c) se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+z_n)|$ converge. Al ser $\mathbb{C}$ completo, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+z_n)$ converge, y por la parte b) del teorema, se sigue que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge.

■

Notemos que la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty}|1+z_n|$ no implica la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$, pues el Ejemplo 1 da una sucesión que muestra esto. De forma análoga a las series absolutamente convergentes, la parte d) del teorema 2.0.4 nos inspira a decir que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge absolutamente si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ converge. Observemos que esto es equivalente a decir que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+z_n)$ converge absolutamente.

Ahora queremos aplicar este teorema a la convergencia de productos de funciones. Una técnica útil es encontrar condiciones bajo las cuales la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (f_n) a una función f definidas de un conjunto X y con valores en $\mathbb{C}$, garanticen la convergencia uniforme de $\exp(f_n(x))$ a $\exp(f(x))$ para x en X. El siguiente lema nos da una condición suficiente para lo que deseamos hacer.

Lema 2.0.5. *Sea X un conjunto, y sean $f, f_1, f_2, \ldots$ funciones de X a $\mathbb{C}$ tales que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en X. Si existe una constante a tal que $\operatorname{Re} f(x) \leq a$ para todo x en X, entonces $\exp(f_n(x))$ converge uniformemente a $\exp(f(x))$ en X.*

Demostración. Para $\epsilon > 0$ dado, elegimos $\delta > 0$ de tal forma que $|e^z - 1| < \epsilon e^{-a}$ cuando $|z| < \delta$. Por la convergencia uniforme, podemos elegir n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para todo x en X y $n \geq n_0$. Así

$$\begin{aligned}\epsilon e^{-a} &> |\exp[f_n(x) - f(x)] - 1| \\ &= \left|\frac{\exp f_n(x)}{\exp f(x)} - 1\right| = \frac{|\exp f_n(x) - \exp f(x)|}{|\exp f(x)|}\end{aligned}$$

Se sigue que para cualquier x en X y para $n \geq n_0$,

$$|\exp f_n(x) - \exp f(x)| < \epsilon e^{-a} |\exp f(x)| \leq \epsilon.$$

■

El siguiente lema nos da una idea de cómo queremos usar la convergencia uniforme de la suma para ver la convergencia del producto.

Lema 2.0.6. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea (g_n) una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{C}$ tal que $\sum g_n(x)$ converge uniformemente y absolutamente para x en X. Entonces el producto*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

converge uniformemente y absolutamente en X. Además, existe un entero n_0 tal que $f(x) = 0$ si y solo si $g_n(x) = -1$ para algún n, con $1 \leq n \leq n_0$.

Demostración. Como $\sum g_n(x)$ converge uniformemente para x en X, existe un entero n_0 tal que $|g_n(x)| < 1$ para todo x en X y $n > n_0$. Esto implica que $\operatorname{Re}[1 + g_n(x)] > 0$, y también, por (2.3), $|\log(1 + g_n(x))| \leq |g_n(x)|$ para todo x en X y $n \geq n_0$. Luego, por el criterio de comparación

$$h(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \log(1 + g_n(x))$$

converge uniformemente y absolutamente para x en X. Al ser h continua y X compacto, se sigue que h debe ser acotada, en particular, existe una constante a tal que Re $h(x) < a$ para todo x en X. Por lo tanto, aplicando el lema 2.0.5, tenemos que

$$\exp h(x) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

converge uniformemente para x en X.

Finalmente,

$$f(x) = [1 + g_1(x)] [1 + g_2(x)] \cdots [1 + g_{n_0}(x)] \exp h(x)$$

y $\exp h(x) \neq 0$ para todo x en X. Así que si $f(x) = 0$, debe suceder que $g_n(x) = -1$ para alguna n, con $1 \leq n \leq n_0$.

■

Como caso particular de este lema, veremos que también se cumple para funciones analíticas.

Teorema 2.0.7. *Sea G un dominio en $\mathbb{C}$, y sea (f_n) una sucesión de funciones analíticas en G tal que ninguna f_n sea idénticamente cero. Si $\sum [f_n(z) - 1]$ converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G, entonces $\prod f_n(z)$ converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G a una función analítica $f(z)$.*

Si a es un cero de f, entonces a es un cero solamente de un número finito de las funciones f_n, y la multiplicidad del cero de f en a es la suma de las multiplicidades de los ceros de las funciones f_n en a.

Demostración. Como $\sum [f_n(z) - 1]$ converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G, por el lema 2.0.6, se tiene que $f(z) = \prod f_n(z)$ converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G. Como cada producto parcial es analítico en G, por la convergencia uniforme, se sigue que f es analítica en G.

Suponga que $f(a) = 0$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(a) \subseteq G$. Por hipótesis, $\sum [f_n(z) - 1]$ converge uniformemente y absolutamente en $\overline{B}_r(a)$. Por el lema 2.0.6, existe un entero n_0 tal que $f(z) = f_1(z) \dots f_{n_0}(z) g(z)$, donde g no se anula en $\overline{B}_r(a)$. Por lo tanto, solo $f_1, \dots, f_{n_0}$ pueden anularse en a. Más aun, por la forma de f, la suma de las multiplicidades del cero de las funciones f_n en a es la multiplicidad del cero de f en a. ∎

Si tenemos una sucesión (a_n) en un dominio G sin punto de acumulación en G, consideremos las funciones $(z - a_n)$. El producto $\prod (z - a_n)$ nunca sera analítico, así que para encontrar una función que se anule solamente en (a_n), requerimos más que eso. Si podemos encontrar funciones $g_n(z)$ que son analíticas en G, no se anulen en G, y que $\sum |(z - a_n) g_n(z) - 1|$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de G, por el teorema 2.0.7, $f(z) = \prod (z - a_n) g_n(z)$ es analítica en G, y tiene ceros solo en los puntos $z = a_n$.

La forma más segura de garantizar que $g_n(z)$ no se anula es expresarla como $g_n(z) = \exp h_n(z)$ para alguna función analítica $h_n(z)$. De hecho si G es simplemente conexo, entonces como $h_n'(z) = g_n'(z)/g_n(z)$ tiene una antiderivada en G, se sigue que $g_n(z)$ debe tener esa forma. Las funciones que nos van a servir fueron introducidas por Karl Weierstrass en 1866.

Definición 2.0.8. *Un factor elemental de Weierstrass es una de las siguientes funciones $E_p(z)$ para $p = 0, 1, 2, \dots$*

$$E_0(z) = 1 - z,$$
$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right), \qquad p \geq 1.$$

La función $E_p(z/a)$ tiene un cero de orden 1 en $z = a$ y en ninguna otra parte. Además si b es un punto fuera de G, entonces $E_p\left((a - b)/(z - b)\right)$ tiene un cero de orden 1 en $z = a$ y es analítica en G. Éstas serán las funciones que nos ayuden a generar funciones analíticas con ceros donde queramos y multiplicidad a elegir.
Para ver que este producto converge, usaremos esta útil desigualdad.

Lema 2.0.9. *Si $|z| \leq 1$ y $p \geq 0$, entonces $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.*

Demostración. El caso $p = 0$ se cumple trivialmente. Para $p \geq 1$ fijo, sea

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

la expansión en serie de Taylor de $E_p(z)$ alrededor de $z = 0$. Si derivamos la serie de Taylor junto con la expresión de $E_p(z)$ de la Definición 2.0.8, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = E_p'(z) = -z^p \exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right). \tag{2.4}$$

Comparando las expresiones de la izquierda y derecha, deducimos que $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$. Como los coeficientes en la expansión en serie de Taylor de $\exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)$ son todos positivos, entonces por (2.4), se tiene que $a_k \leq 0$ para $k \geq p+1$, así $0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Por lo tanto, para $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned}|E_p(z) - 1| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right| \\ &= |z|^{p+1} \left|\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-(p+1)}\right| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1}\end{aligned}$$

■

Antes de resolver el problema general, estudiaremos el caso particular donde $G = \mathbb{C}$. Este teorema nos habla de la existencia de funciones enteras en el plano con ceros únicamente en una sucesión sin puntos de acumulación, del orden que queramos en cada punto. A este teorema también se le conoce como teorema de Weierstrass.

Teorema 2.0.10. *Sea (a_n) una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $\lim |a_n| = \infty$, $a_n \neq 0$ para todo n y ningún punto se repite una infinidad de veces. Si (p_n) es una sucesión de enteros tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \tag{2.5}$$

converge para todo $r > 0$, entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ y es entera con ceros solo en los puntos a_n.

Si z_0 aparece m veces en la sucesión (a_n), entonces f tiene un cero en $z = z_0$ de orden m. Además, si $p_n = n - 1$, entonces la sucesión satisface (2.5).

Demostración. Suponga que existen enteros p_n tales que (2.5) converge para todo $r > 0$, entonces por el lema 2.0.9

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}.$$

Esto sucede cuando $|z| \leq r$ y $r \leq |a_n|$. Si fijamos $r > 0$, como $\lim |a_n| = \infty$, existe un entero N tal que $|a_n| \geq r$ para $n \geq N$. Por lo tanto, para cada $r > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/a_n)|$ esta dominada por la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (r/|a_n|)^{p_n+1}$ en el disco $\overline{B}_r(0)$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/a_n)|$ converge uniformemente y absolutamente en $\mathbb{C}$.

Por el teorema 2.0.7, el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge uniformemente y absolutamente en $\mathbb{C}$, y de nuevo por el teorema 2.0.7, el cero en $z = z_0$ es de orden m.

Falta ver la existencia de los enteros que satisfagan (2.5). Para cada r, existe N tal que $|a_n| > 2r$ para $n \geq N$. Esto resulta en $r/|a_n| < \frac{1}{2}$ para $n \geq N$, así que si tomamos $p_n = n-1$, la cola de la serie (2.5) está dominada por $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Por lo tanto, (2.5) converge con $p_n = n - 1$.

∎

Notemos que la condición $\lim |a_n| = \infty$ es equivalente a que la sucesión no tenga puntos de acumulación en $\mathbb{C}$, lo cual concuerda con el hecho que los ceros de una función analítica (o entera) que no sean idénticamente cero no deben tener puntos de acumulación en su región de analiticidad. El mismo teorema nos da muchas formas de elegir p_n, pues si $p_n > n - 1$, también se tiene la convergencia. La mayor ventaja de elegir p_n tan pequeña como sea posible, es que los factores elementales se vuelven más sencillos.

El siguiente teorema, que es el tema central de este capítulo, nos da una forma de representar a cualquier función entera como un producto de funciones analíticas.

Teorema 2.0.11 (de Factorización de Weierstrass)**.** *Sea f una función entera y (a_n) los ceros (distintos de $z = 0$) de f repetidos tantas veces como su multiplicidad. Suponga que f tiene un cero en $z = 0$ de orden $m \geq 0$. Entonces existe una función entera g y una sucesión de enteros (p_n) tal que*

$$f(z) = z^m \exp\left(g(z)\right) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

Demostración. Por el teorema 2.0.10, existe una sucesión de enteros (p_n) tal que

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

tiene los mismos ceros de f con las mismas multiplicidades. Entonces f/h tiene singularidades removibles en $z = 0, a_1, a_2, \ldots$. Por lo tanto, f/h es una función entera que no se anula. Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, existe una función entera tal que

$$\frac{f(z)}{h(z)} = \exp\left(g(z)\right)$$

y de ahí se sigue que f tiene la forma deseada. ■

Ahora sí, regresamos al problema más general, donde la función es analítica en cualquier dominio G del plano. El siguiente teorema nos da una respuesta afirmativa al problema.

Teorema 2.0.12 (Weierstrass)**.** *Sea G un dominio en $\mathbb{C}$ y (a_j) una sucesión de puntos distintos en G sin punto de acumulación en G, y sea (m_j) una sucesión de enteros. Entonces existe una función analítica f definida en G cuyos únicos ceros son los puntos a_j. Además, a_j es un cero de f de multiplicidad m_j.*

Demostración. El primer paso es probar que el teorema se cumple para el caso donde existe un número $R > 0$ tal que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq G, \qquad |a_j| \leq R, \quad j \geq 1. \tag{2.6}$$

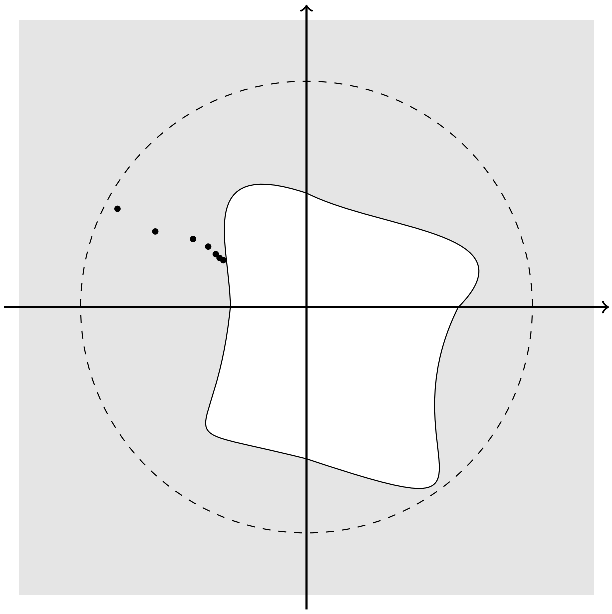

FIGURA 2.1: Una ilustración de un dominio que cumple (2.6), donde la parte sombreada representa el dominio, y el círculo punteado representa $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Si siempre pudiéramos encontrar una función f que satisface (2.6) para algún conjunto, tomamos G_1 un conjunto arbitrario abierto en $\mathbb{C}$, con (α_j) una sucesión de puntos distintos en G_1 sin punto límite, y sea (m_j) una sucesión de enteros. Si $\overline{B}_r(a)$ es un disco en G_1 tal que ningún α_j esté en tal disco, consideramos la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{r^2}{z-a}.$$

Tomando $G = T(G_1) - \{\infty\}$ y $a_j = T(\alpha_j)$, entonces $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq G$, ya que $\overline{B}_r(a) \subseteq G_1$, y además $|a_j| \leq r$, pues $|\alpha_j - a| \geq r$ para todo j, así, G satisface (2.6).
Si existe f analítica en G, con un cero en cada a_j de multiplicidad m_j y ningún otro cero, y tal que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 1 \tag{2.7}$$

entonces la función definida por $g(z) = f(T(z))$ es analítica en $G_1 - \{a\}$, con una singularidad removible en $z = a$, y g tiene un cero en $z = \alpha_j$ de multiplicidad m_j y ningún otro cero.

Ahora suponiendo que G satisface (2.6), debemos probar que existe una función analítica f con los puntos (a_j) como sus únicos ceros, con m_j la multiplicidad del cero en $z = a_j$, y que f satisfaga (2.7).

Definimos una segunda sucesión de puntos (z_n) que consiste de los puntos de (a_j), pero cada punto en (a_j) se repite tantas veces como su multiplicidad m_j. Para cada n, existe un punto w_n en $\mathbb{C} - G$ tal que

$$|z_n - w_n| = d\left(z_n, \mathbb{C} - G\right).$$

Si $G = \mathbb{C}$, como la sucesión (a_j) está acotada, y no tiene puntos de acumulación, entonces (a_j) es finita, y el producto finito de los factores lineales que aparecen en el Teorema Fundamental del Álgebra cumple con las características de la función que buscamos.

Supongamos que (a_j) es infinito. Como esta sucesión está acotada y tiene una infinidad de puntos, entonces debe tener un punto de acumulación en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, pero como (a_j) no tiene puntos de acumulación en G, entonces debe estar en $\mathbb{C} - G$, lo que implica que $\mathbb{C} - G$ es no vacío. Como $\mathbb{C} - G$ también es compacto, y (a_j) es una sucesión en G, el punto de acumulación de la sucesión está en la frontera de G, por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - w_n| = 0.$$

Consideramos las funciones

$$E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right),$$

cada una de ellas tiene un cero simple en $z = z_n$. Probaremos que el producto infinito de estas funciones converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G.

Para hacer esto, tomamos K un subconjunto compacto de G para que $d\left(\mathbb{C} - G, K\right) > 0$. Entonces para cualquier z en K, tenemos

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{|z_n - w_n|}{d(w_n, K)} \leq \frac{|z_n - w_n|}{d(\mathbb{C}, K)}.$$

Como $\lim |z_n - w_n| = 0$, para cualquier δ con $0 < \delta < 1$, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| < \delta$$

para todo z en K y $n \geq N$. Luego, por el lema 2.0.9, tenemos que

$$\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \delta^{n+1} \tag{2.8}$$

para todo z en K y $n \geq N$. Por comparación , tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) - 1 \right]$$

converge uniformemente y absolutamente en K. Por lo tanto, utilizando el teorema 2.0.7, tenemos que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right)$$

converge uniformemente y absolutamente en K, lo cual implica que f es analítica en G. Además, el teorema 2.0.7 nos dice que los únicos ceros de f son los puntos z_n, cada uno de orden 1, pero esto implica que los puntos a_j son los únicos ceros de f, y cada uno tiene multiplicidad m_j por ser el número de veces que aparece a_j en la sucesión (z_n).

Falta probar que $\lim_{z \to \infty} f(z) = 1$. Sea $\epsilon > 0$ y $R_1 > R$. Como $|z_n| \leq R$ y $|w_n| \leq 2R$ entonces $|z_n - w_n| \leq R$. Para $|z| \geq R_1$, se tiene que $|z - w_n|^{-1} \leq (R_1 - R)^{-1}$. Por lo tanto, para $|z| \geq R_1$,

$$\left| \frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right| \leq \frac{2R}{R_1 - R}.$$

Así, si elegimos R_1 de tal forma que $2R < \delta (R_1 - R)$ para algún δ, $0 < \delta < 1$, se satisface (2.8) para $|z| \geq R_1$ y para todo n. En particular $\mathrm{Re}\left[E_n\left((z_n - w_n) / (z - w_n)\right)\right] > 0$ para $|z| \geq R_1$ y para todo n, así que

$$|f(z) - 1| = \left| \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) \right) - 1 \right| \tag{2.9}$$

tiene sentido con la rama principal de log. Por otra parte, de (2.3) y (2.8), se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \log E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) - 1 \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} \\ &= \frac{\delta^2}{1 - \delta} \end{aligned}$$

para $|z| \geq R_1$. Si le aplicamos otra restricción a δ de tal forma que $|e^w - 1| < \epsilon$ cuando

$$|w| < \frac{\delta^2}{1-\delta}$$

entonces por (2.9), tenemos que $|f(z) - 1| < \epsilon$ cuando $|z| \geq R_1$, es decir f satisface (2.7). ∎

Ejemplo 2.0.13. *Si G es un conjunto abierto y (f_n) es una sucesión de funciones analíticas en G tal que $f(z) = \prod f_n(z)$ converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G, entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k'(z) \prod_{n \neq k} f_n(z) \right]$$

converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G y es igual a $f'(z)$. Si además f no es idénticamente cero y K es un subconjunto compacto de G tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en K, entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

Demostración. Sea P_n el n-ésimo producto parcial de f. Por la convergencia uniforme de P_n a f, tenemos que P_n' converge uniformemente a f'. Por inducción, se puede verificar que

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} \left[f_k'(z) \prod_{m \neq k}^{n} f_m(z) \right],$$

y esto converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de G. Por la unicidad del límite, finalmente obtenemos

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k'(z) \prod_{n \neq k} f_n(z) \right]. \tag{2.10}$$

Si f no es idénticamente cero, y no se anula en un subconjunto compacto K de G, entonces $\dfrac{P_n'(z)}{P_n(z)}$ converge uniformemente a $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, y para cada n, por (2.10) se tiene que

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}.$$

Por lo tanto, al tomar límite, obtenemos lo que queríamos. ∎

Un corolario importante del teorema 2.0.12 es, para cualquier abierto G de $\mathbb{C}$, el campo de cocientes del dominio entero de todas las funciones analíticas, es el campo de todas las funciones meromorfas. En otras palabras:

Corolario 2.0.14. *Si f es una función meromorfa en un conjunto abierto G, entonces existen funciones analíticas g y h en G tales que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Demostración. Sean (a_j) los polos de f, y sea m_j el orden del polo en a_j. Por el teorema anterior, existe una función analítica h con ceros de multiplicidad m_j en cada punto a_j y ningún otro cero. Por lo tanto hf tiene singularidades removibles en los puntos a_j. Se sigue que $g = hf$ es analítica en G. ■

En conclusión, podemos representar a cualquier función entera como producto infinito de funciones analíticas no constantes, y además podemos construir funciones analíticas en un dominio G con los ceros donde nosotros queramos, con la multiplicidad que deseemos.

Capítulo 3

Ejemplos de Factorización de Funciones

En este capítulo, aplicaremos el teorema de factorización de Weierstrass a un par de funciones conocidas para poder expresarlas como un producto de funciones analíticas. Adicionalmente, estudiaremos la función Zeta de Riemann, su relación con la función Gamma y algunas de sus propiedades.

3.1. La Función Seno

Aquí tomaremos la función $\operatorname{sen} \pi z$ por la simplicidad de la distribución de sus ceros. Para sumas y productos infinitos, cuando el símbolo del operador esté acompañado de una apóstrofe, entonces la suma o el producto se debe tomar sobre todos los índices n enteros excepto por $n = 0$.

Los ceros de la función $\operatorname{sen} \pi z$ son exactamente los enteros, y además cada cero es de multiplicidad 1. Como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{r}{n}\right)^2 < \infty$$

para cada $r > 0$, podemos elegir los enteros p_n en el teorema 2.0.10 como $p_n = 1$ para todo n. Así, por el teorema de factorización de Weierstrass tenemos

$$\operatorname{sen} \pi z = z \exp\left(g(z)\right) \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$$

Si asociamos adecuadamente, esto resulta en

$$\operatorname{sen} \pi z = z \exp\left(g(z)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{3.1}$$

para alguna función entera g. Eligiendo a $f(z)$ como $\operatorname{sen} \pi z$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi z &= \frac{f'(z)}{f(z)} \\
&= \frac{\left(z \exp\left(g(z)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right)'}{z \exp\left(g(z)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} \\
&= g'(z) + \frac{1}{z} + \frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right)'}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Pero por el ejemplo 2.0.13,

$$\frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right)'}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)'}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Por lo tanto,

$$\pi \cot \pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \tag{3.2}$$

Por otro lado, debido al teorema 1.0.8 , sabemos que

$$\pi \cot \pi z = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z - n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \tag{3.3}$$

Combinando (3.2) y (3.3), se concluye que $g'(z) = 0$, es decir, g debe ser constante, digamos $g(z) = a$. De (3.1), se sigue que

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \frac{e^a}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Tomando límite cuando z tiende a 0, obtenemos $e^a = \pi$, por lo tanto

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Una aplicación de esta formula es la comprobación de la fórmula de Wallis, la cual fue introducida en 1655 por John Wallis a través de las integrales de Wallis. Este producto fue la forma más rápida y sencilla de calcular el valor numérico de π en esa época.

Ejemplo 3.1.1 (Fórmula de Wallis)**.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración. Aplicamos la fórmula de la factorización del seno a $z = \frac{1}{2}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} 1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 1}{4n^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

■

3.2. La Función Gamma

En esta sección, estudiaremos un poco de la función Gamma. Primero lo haremos utilizando la herramienta de los productos infinitos que Carl Friedrich Gauss ideó en los inicios del siglo XIX y Karl Weierstrass formalizó a mediados del siglo XIX, y comprobando que el producto infinito coincide con la forma que Leonhard Euler definió como la función Gamma en 1738 [4].

Sea G un conjunto abierto en el plano, y sea (f_n) una sucesión de funciones analíticas. Si (f_n) converge uniformemente, en subconjuntos compactos de G, a una función f y no es idénticamente cero, entonces con la métrica cordal ρ definida por

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}$$

también tenemos la convergencia de (f_n) a f en la esfera de Riemann. Si K es un subconjunto compacto de G donde ninguna f_n se anula, entonces por el teorema de Hurwitz, f no se anula en K. Notemos que $\rho(z_1, z_2) = \rho\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)$, lo cual implica que $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ converge uniformemente a $\frac{1}{f}$ en K.

De acuerdo al teorema de factorización de Weierstrass, el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

converge a una función entera, la cual sólo tiene ceros simples en $z=-1,-2,\ldots$.

Por la discusión anterior, si tomamos $f_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$, entonces el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}$$

converge a una función meromorfa con polos en $z=-1,-2,\ldots$.

Definición 3.2.1. *La función gamma $\Gamma(z)$ es la función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $z=0,-1,-2,\ldots$ definida por*

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}$$

donde γ se elige de forma que $\Gamma(1)=1$.

Para ver que esta definición tiene sentido, debemos ver que existe tal γ. Si sustituimos $z=1$ en la definición 3.2.1, obtenemos

$$\begin{aligned}1=&\Gamma(1)\\ =&e^{-\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}e^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

lo cual implica

$$e^{\gamma}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}e^{\frac{1}{n}}. \tag{3.4}$$

Como ambos miembros de (3.4) son positivos, la función logaritmo es continua ahí, y al aplicarlo en ambos lados resulta en

$$\begin{aligned}\gamma &= \log\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} e^{\frac{1}{k}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} e^{\frac{1}{k}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\left(k+1\right)+\log k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log\left(n+1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n.\end{aligned}$$

También notemos que

$$\begin{aligned}e^{-\gamma z}\exp\left(z\left(1+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right) &= \exp\left(z\left(-\gamma+1+\ldots+\frac{1}{n}+\log n-\log n\right)\right)\\ &= n^{z}\exp\left(z\left(-\gamma+1+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir de (**??**) y la definición de $\Gamma(z)$, podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}}\\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{ke^{\frac{z}{k}}}{z+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\gamma z}n!}{z\left(z+1\right)\ldots\left(z+n\right)}\cdot\exp\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

pero por (3.5), para $z \neq 0, -1, \ldots$, se cumple que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\, n^{z}}{z\left(z+1\right)\ldots\left(z+n\right)}. \tag{3.6}$$

A esta última expresión se le conoce como *Fórmula de Gauss*. Si sustituimos $z+1$ por z en (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)\,(z+2)\ldots(z+n+1)} \\ &= z \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z}}{z\,(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \frac{n}{z+n+1} \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned} \tag{3.7}$$

expresión que se le llama la **ecuación funcional de Gamma**. Haciendo el proceso inductivo, resulta que para cualquier natural n y $z \neq 0, -1, \ldots$,

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\,(z+n-2)\ldots(z+1)\,z\Gamma(z).$$

En particular para $z=1$, se cumple

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

y como Γ es meromorfa en todo el plano y coincide con la función factorial en los naturales, podemos considerar a Γ como una extensión analítica de la función factorial a todo el plano complejo (excepto por los polos).

Por la forma que se definió $\Gamma(z)$, sabemos que cada polo es simple. Como son polos simples, podemos calcular los residuos de Γ por

$$\mathrm{Res}\,(\Gamma; -n) = \lim_{z\to -n} (z+n)\,\Gamma(z)$$

para n entero no negativo. Pero por la ecuación funcional

$$(z+n)\,\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\,(z+n-2)\ldots(z+1)\,z},$$

y haciendo z tender a $-n$, obtenemos

$$\mathrm{Res}\,(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Si calculamos la derivada de $\log \Gamma(z)$, vemos que es igual a $\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, y utilizando el ejemplo 2.0.13, resulta en

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{n}} \frac{n}{z+n}\right)'}{\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{n}} \frac{n}{z+n}} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n\,(n+z)}.$$

Como la convergencia de la suma es uniforme, podemos calcular $\left(\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)'$ derivando término a término, y por lo tanto

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}$$

Por definición de $\Gamma(z)$, se tiene que $\Gamma(x) > 0$ si $x > 0$, por lo tanto la función $\log \Gamma(x)$ está bien definida para $x > 0$, y como

$$(\log \Gamma(x))'' = \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} > 0,$$

se tiene que $\log \Gamma(x)$ es una función convexa en $(0, \infty)$. Esta propiedad, junto con la ecuación funcional y el hecho que $\Gamma(1) = 1$ caracterizan a la función Gamma, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 (Bohr-Mollerup)**.** *Sea f una función definida en $(0, \infty)$ tal que $f(x) > 0$ para $x > 0$. Suponga que f tiene las siguientes propiedades:*

(a) $\log f(x)$ *es convexa.*

(b) $f(x+1) = xf(x)$ *para todo* x.

(c) $f(1) = 1$.

Entonces f(x) $= \Gamma(x)$ *para todo* x.

Demostración. Por las propiedades (b) y (c), la función también satisface

$$f(x+n) = (x+n-1)\dots(x+1)\,xf(x) \tag{3.8}$$

para todo n. Sea $0 < x \leq 1$ y $n \geq 2$. Por la propiedad (a), se tiene que

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1) - n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1) - n},$$

como se cumple que $f(m) = (m-1)!$ para todo $m \geq 1$, tenemos

$$-\log{(n-2)!} + \log{(n-1)!} \leq \frac{\log f(x+n) - \log{(n-1)!}}{x} \leq \log n! - \log{(n-1)!},$$

es decir,

$$x \log{(n-1)} \leq \log f(x+n) - \log{(n-1)!} \leq x \log n.$$

Sumando $\log{(n-1)!}$ a cada parte de la desigualdad, y aplicando la función exponencial, obtenemos

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!.$$

Utilizando (3.8), esto se convierte en

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}.$$

Como f es independiente de n, y la desigualdad de la izquierda es válida para todo entero $n \geq 2$, en particular vale para $n+1$, por lo que

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, tenemos $\Gamma(x) = f(x)$ para $0 < x \leq 1$. Por la ecuación funcional, se cumple para todo $x > 0$. ■

Un resultado importante de la función Gamma es poder expresarla como una integral, quizás su forma más conocida. Esta forma es una de las primeras que se utilizaron para representar esta función, después de un producto infinito similar a (3.6).

La función Gamma tiene varias aplicaciones, ya que aparece en varias transformadas de Fourier y Mellin en ecuaciones diferenciales que se usan para modelar fenómenos físicos. Además, se utiliza en probabilidad y estadística para la distribución que lleva el mismo nombre.

El siguiente teorema nos da la equivalencia entre su forma integral y la que definimos en 3.2.1.

Teorema 3.2.3. *Si* $\mathrm{Re}\,(z) > 0$*, entonces*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Dependiendo del valor de z, esta integral se descontrola en $t = 0$ o en $t = \infty$. Para ver que esta integral tiene sentido, recurriremos al siguiente lema.

Lema 3.2.4. *Sea* $S = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \text{Re } z \leq A\}$, *donde* $0 < a < A < \infty$.

(a) Para $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* z *en* S,

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1} dt \right| < \epsilon$$

cuando $0 < \alpha < \beta < \delta$.

(b) Para $\epsilon > 0$, *existe* κ *tal que para todo* z *en* S,

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1} dt \right| < \epsilon$$

cuando $\beta > \alpha > \kappa$.

Demostración. Para probar (a), notemos que si $0 < t \leq 1$ y z está en S, entonces $\text{Re } (z-1) \log t \leq (a-1) \log t$. Como $e^{-t} \leq 1$,

$$\left| e^{-t} t^{z-1} \right| \leq t^{\text{Re } z - 1} \leq t^{a-1}.$$

Así que al limitar $0 < \alpha < \beta < 1$, tenemos

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_\alpha^\beta t^{a-1} dt = \frac{1}{a} \left(\beta^a - \alpha^a \right)$$

Si $\epsilon > 0$, por la continuidad de x^a, podemos encontrar $0 < \delta < 1$ tal que $\frac{1}{a}\left(\beta^a - \alpha^a\right) < \epsilon$ cuando $\beta - \alpha < \delta$. Esto prueba (a). Para probar (b), notemos que para z en S y $t \geq 1$, $|t^{z-1}| \leq t^{A-1}$. Como $t^{A-1} e^{-\frac{1}{2}t}$ es continua en $[1, \infty)$ y converge a cero cuanto t tiende a infinito, existe una constante c tal que $t^{A-1} e^{-\frac{1}{2}t} \leq c$ para todo $t \geq 1$. Esto nos dice que

$$\left| e^{-t} t^{z-1} \right| \leq c e^{-\frac{1}{2}t}$$

para todo z en S y $t \geq 1$. Si $\beta > \alpha > 1$, entonces

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq c \int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2}t} dt = 2c \left(e^{-\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\beta} \right)$$

y como $e^{-\frac{1}{2}t}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\kappa > 1$ tal que $2c\left(e^{-\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\beta}\right) < \epsilon$ cuando $\beta > \alpha > \kappa$, lo cual prueba (b) ∎

Este lema nos dice que las integrales

$$\int_{\alpha}^{1} e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad \int_{1}^{\alpha} e^{-t}t^{z-1}dt$$

satisfacen un criterio de Cauchy cuando α tiende a 0 y ∞, respectivamente. La siguiente proposición es la que nos da la respuesta definitiva de la definición de la integral en el teorema 3.2.3.

Proposición 3.2.5. *Si* $G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0\}$ *y*

$$f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}t^{z-1}dt$$

para $n \geq 1$ *y* z *en* G*, entonces cada* f_n *es analítica en* G*, y converge uniformemente a una función analítica en* G*.*

Demostración. Como la integral en cada intervalo $\left[\frac{1}{n}, n\right]$ es finita, y el integrando es continuo como función de t y analítico como función de z, se sigue del teorema de Fubini y de la fórmula integral de Cauchy que cada f_n es analítica. Si K es un subconjunto compacto de G, existen a y A tales que $K \subset \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}\ z \leq A\}$. Como

$$f_m(z) - f_n(z) = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_{n}^{m} e^{-t}t^{z-1}dt$$

para $m > n$, por el lema 3.2.4, (f_n) es una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones analíticas en G, pero este espacio es completo, así que (f_n) debe converger a una función f analítica en G. ■

Si f es la función límite de la proposición 3.2.5, entonces se cumple que

$$f(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

cuando $\mathrm{Re}\ z > 0$. Para ver que la función f es la función Gamma, por el principio de identidad, es suficiente ver que $f(x) = \Gamma(x)$ para $x \geq 1$.

Si integramos por partes consecutivamente, obtenemos

$$\int_{0}^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} t^{x-1}dt = \frac{n^x n!}{x\,(x+1)\ldots(x+n)},$$

la cual converge a $\Gamma(x)$ cuando n tiende a infinito por la fórmula de Gauss. Al probar que $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$ converge a f, se estaría probando el teorema 3.2.3. Para hacer esto, nos apoyaremos del siguiente lema.

Lema 3.2.6. *(a)* $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)$ *converge a* e^z *uniformemente en subconjuntos compactos del plano.*

(b) Si $t \geq 0$, *entonces* $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ *para todo* $n \geq t$.

Demostración. Sea K un subconjunto compacto en el plano. Entonces para n suficientemente grande, $|z| < n$ para todo z en K. Por la continuidad de la función exponencial, es suficiente probar que

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{z}{n}\right) = z$$

uniformemente para z en K. Recordamos la serie de Maclaurin para el logaritmo, la cual es

$$\log(1+w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{w^k}{k}$$

para $|w| < 1$. Sea $n > |z|$ para todo z en K. Si z está en K, entonces

$$n\log\left(1+\frac{z}{n}\right) = z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{n} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^2} - \dots$$

es decir

$$n\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - z = z\left[-\frac{1}{2}\frac{z}{n} + \frac{1}{3}\frac{z^2}{n^2} - \dots\right] \tag{3.9}$$

Tomando el módulo, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|n\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - z\right| &\leq |z|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{z}{n}\right|^{k-1} \\
&\leq |z|\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z}{n}\right|^{k} \\
&= \frac{|z|^2}{n}\frac{1}{1-\left|\frac{z}{n}\right|} \\
&\leq \frac{R^2}{n-R},
\end{aligned}$$

donde elegimos R de forma que $R \geq |z|$ para todo z en K. Si tomamos límite, obtenemos la convergencia uniforme.

Ahora tomemos $t \geq 0$ y sustituyamos $-t$ por z en (3.9), con $t \leq n$, y así obtenemos

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t = -t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{-t}{n}\right)^{k-1} \leq 0$$

por lo cual

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$$

y como la función exponencial es monótona creciente, al aplicarse en ambos lados se obtiene la desigualdad deseada. ■

Ahora tenemos las herramientas necesarias para probar el teorema 3.2.3.

Prueba del Teorema 3.2.3. Sea $x > 1$ fijo, y sea $\epsilon > 0$. Por el lema 3.2.4, existe κ tal que

$$\int_{\kappa}^{r} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{4} \tag{3.10}$$

cuando $r > \kappa$. Sea n cualquier entero mayor a κ, y sea f_n definida como en la proposición 3.2.5. Entonces

$$f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = -\int_0^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} dt.$$

Luego, por la parte (a) del lema 3.2.4 y la parte (b) del lema 3.2.6, tenemos

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{4} \tag{3.11}$$

para n suficientemente grande. Además, por la parte (a) del lema 3.2.6, tenemos

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{\epsilon}{4M\kappa}$$

para t entre 0 y κ, y n suficientemente grande, donde $M = \int_0^{\kappa} t^{x-1} dt$. Por lo tanto

$$\left| \int_{\frac{1}{n}}^{\kappa} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} dt \right| \leq \frac{\epsilon}{4}. \tag{3.12}$$

Usando la parte (b) del lema 3.2.6 y (3.10), resulta en

$$\left| \int_{\kappa}^{n} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} dt \right| \leq 2 \int_{\kappa}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para $n > \kappa$; combinando esta desigualdad con (3.11) y (3.12), finalmente obtenemos

$$\left| f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \right| < \epsilon$$

para n suficientemente grande. Por lo tanto, para $x \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \left[f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[f_n(x) - \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \right] \\ &= f(x) - \Gamma(x) \end{aligned}$$

y por el principio de identidad, esto es válido para Re $z > 0$. ■

Ejemplo 3.2.7 (Formula de Reflexión de Euler)**.** *Para z distinto de un entero,*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Demostración. Primero notemos que por la ecuación funcional

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z).$$

Utilizamos la forma de Gamma como producto infinito, y la forma del producto del Seno y obtenemos

$$\begin{aligned} -z\Gamma(z)\Gamma(-z) &= -z \left(\frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \right) \left(\frac{e^{\gamma z}}{-z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{-z}{n}} \right) \\ &= -z \left(\frac{1}{-z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} \right) \\ &= \left(z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

■

Evaluando con $z = \frac{1}{2}$ en 3.2.7, se concluye fácilmente que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
Como aplicación de esta forma de Γ, y el hecho que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, observamos que

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s^2 = t$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \int_0^\infty e^{-s^2} s^{-1} 2s\ ds \\ &= 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds,\end{aligned}$$

es decir

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

o bien, por la simetría de la función

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

3.3. La Función Zeta de Riemann

En esta sección, estudiaremos un poco la función Zeta de Riemann. Primero definiéndola de la forma usual y finalmente extendiéndola a todo el plano complejo utilizando lo que sabemos de la función Gamma.

Sea z un número complejo, y n un natural. Entonces $|n^z| = |\exp(z \log n)| = \exp(\text{Re } z \log n)$. Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^n \left|k^{-z}\right| = \sum_{k=1}^n \exp(-\text{Re } z \log k) = \sum_{k=1}^n k^{-\text{Re } z},$$

así que al tomar z tal que $\text{Re } z \geq 1 + \epsilon$, con $\epsilon > 0$ tenemos

$$\sum_{k=1}^n k^{-\text{Re } z} \leq \sum_{k=1}^n k^{-(1+\epsilon)},$$

es decir, la serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 1 + \epsilon\}$, lo cual implica que converge en subconjuntos compactos de $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1\}$ a una función analítica, la cual definiremos a continuación.

Definición 3.3.1. *La función Zeta de Riemann está definida para* $\operatorname{Re} z > 1$ *por la ecuación*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

Esta función ha sido estudiada e investigada extensamente desde su introducción por Leonhard Euler en 1737, y su estudio se amplio más cuando Berndhard Riemann en 1859, la extiende al plano complejo como función meromorfa [5]. El análisis de esta función ha influenciado a la teoría de números. De hecho, uno de los problemas abiertos más famosos nos da información sobre la distribución de los números primos. Esta función fue la que inicio el estudio de las L-funciones [6].

Queremos demostrar cierta relación entre la función Zeta y la función Gamma. Para esto, utilizaremos la representación integral de Gamma que obtuvimos en 3.2.3, es decir, para $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t = nu$, tenemos

$$\Gamma(z) = n^z \int_0^{\infty} e^{-nu} u^{z-1} du$$

es decir

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt.$$

Si nos restringimos a $\operatorname{Re} z > 1$, y sumamos esta ecuación sobre todas las n, obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\Gamma(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La relación que buscamos involucra tomar la suma dentro de la integral. Para probar esto, requeriremos el siguiente lema que es análogo al lema 3.2.4.

Lema 3.3.2. *(a) Sea* $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$, *donde* $a > 1$. *Si* $\epsilon > 0$, *entonces existe* $0 < \delta < 1$ *tal que para todo* z *en* S

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt \right| < \epsilon$$

cuando $0 < \alpha < \beta < \delta$.

(b) Sea $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z \leq A\}$*, donde* $-\infty < A < \infty$*. Si* $\epsilon > 0$*, entonces existe* $\kappa > 1$ *tal que para todo* z *en* S

$$\left| \int_\alpha^\beta \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt \right| < \epsilon$$

cuando $\beta > \alpha > \kappa$*.*

Demostración. (a) Como $e^t - 1 \geq t$, tenemos que para $0 < t \leq 1$ y z en S,

$$\left| \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} \right| \leq t^{a-2}.$$

Al tener $a > 1$, la integral $\int_0^1 t^{a-2} dt$ es finita, así que podemos encontrar el valor δ que satisfaga la ecuación.

(b) Si $t \geq 1$ y z está en S, entonces como en la prueba de la parte (b) del lema 3.2.4 , existe una constante c tal que

$$\left| \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} \right| \leq \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{A-1} \leq c e^{\frac{1}{2}t} \left(e^t - 1\right)^{-1}.$$

Como el lado derecho de la desigualdad es integrable en $[1, \infty)$, entonces podemos encontrar tal κ.

■

Corolario 3.3.3. *(a) Si* $S = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}\ z \leq A\}$*, donde* $1 < a < A < \infty$*, entonces la integral*

$$\int_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt$$

converge uniformemente en S*.*

(b) Si $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z \leq A\}$*, donde* $-\infty < A < \infty$*, entonces la integral*

$$\int_1^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt$$

converge uniformemente en S*.*

Proposición 3.3.4. *Para* $\mathrm{Re}\ z > 1$

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt.$$

Demostración. Por el corolario anterior, esta integral es analítica en la región $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1\}$. Por el principio de identidad, es suficiente mostrar que la igualdad se cumple para $x > 1$. Del lema 3.3.2, existen α y β tales que

$$\int_0^\alpha \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\int_\beta^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{4}.$$

Como $\sum_{k=1}^n e^{-kt} \leq \sum_{k=1}^\infty e^{-kt} = (e^t - 1)^{-1}$ para todo n, se cumple que

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\alpha e^{-nt} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \int_\beta^\infty e^{-nt} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{4}.$$

Luego al aplicar (3.13), obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\zeta(x)\Gamma(x) - \int_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt\right| &= \left|\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nt} t^{x-1} dt - \int_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^\alpha \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt\right| + \left|\sum_{n=1}^\infty \int_0^\alpha e^{-nt} t^{x-1} dt\right| \\
&+ \left|\int_\beta^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt\right| + \left|\sum_{n=1}^\infty \int_\beta^\infty e^{-nt} t^{x-1} dt\right| \\
&+ \left|\sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta e^{-nt} t^{x-1} dt - \int_\alpha^\beta \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt\right| \\
&< \epsilon + \left|\sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta e^{-nt} t^{x-1} dt - \int_\alpha^\beta \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{x-1} dt\right|
\end{aligned}$$

Pero $\sum_{n=1}^\infty e^{-nt}$ converge a $(e^t - 1)^{-1}$ uniformemente en $[\alpha, \beta]$, así que el lado derecho de la desigualdad es exactamente ϵ, resultando en la igualdad deseada. ∎

Queremos usar esta proposición para extender el dominio de $\zeta(z)$ a $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > -1\}$. Para hacer esto, primero consideramos la expansión de Laurent de $(e^z - 1)^{-1}$. Esta es

$$(e^z - 1)^{-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$$

con $a_1, a_2, \ldots$ constantes. Por lo tanto, $\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t}$ está acotada en una vecindad de $t = 0$. Esto implica que la integral

$$\int_0^1 \left(\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1} dt$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos del semiplano derecho, y por lo tanto representa una función analítica ahí. Así

$$\begin{aligned}
\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(e^t - 1\right)^{-1} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\right] t^{z-1} dt + \int_1^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt \qquad (3.14) \\
&= \int_0^1 \left[\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t}\right] t^{z-1} dt + \frac{1}{z-1} + + \int_1^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1} dt
\end{aligned}$$

y por el corolario 3.3.3, todos los sumandos anteriores, excepto por $\frac{1}{z-1}$, son analíticos en el semiplano derecho. Así podemos definir $\zeta(z)$ para $\operatorname{Re} z > 0$ por el lado derecho multiplicado por $[\Gamma(z)]^{-1}$. Definida de esta forma, $\zeta(z)$ es meromorfa en el semiplano derecho con un polo simple en $z = 1$, cuyo residuo es 1. Ahora, si suponemos que $0 < \operatorname{Re} z < 1$, también se cumple que

$$\frac{1}{z-1} = -\int_1^\infty t^{z-2} dt.$$

Aplicando esto para $0 < \operatorname{Re} z < 1$, tenemos

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1} dt. \qquad (3.15)$$

Por otro lado, de nuevo al considerar la expansión de Laurent de $\frac{1}{e^z - 1}$, tenemos que $\left[\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] \leq ct$ para una constante c y t en el intervalo $[0, 1]$. Así, la integral

$$\int_0^1 \left(\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{z-1} dt$$

es uniformemente convergente en subconjuntos compactos de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$. Además, como

$$\lim_{t \to \infty} t\left(\left(e^t - 1\right)^{-1} - \frac{1}{t}\right) = 1$$

existe una constante c' tal que

$$\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}\right)\leq\frac{c'}{t}$$

para $t\geq 1$. Así tenemos que la integral

$$\int_1^\infty\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt$$

converge en subconjuntos compactos de $\{z\in\mathbb{C}:\text{Re }z<1\}$. Usando estas dos integrales y (3.15), obtenemos

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z)&=\int_0^\infty\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt\\&=\int_0^1\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)t^{z-1}dt+\int_1^\infty\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt\\&=\int_0^1\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)t^{z-1}dt-\frac{1}{2z}+\int_1^\infty\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt\end{aligned}\tag{3.16}$$

para $0<\text{Re }z<1$. Pero como ambas integrales convergen uniformemente cuando $-1<\text{Re }z<1$, podemos usar (3.16) para definir a $\zeta(z)$ en $\{z\in\mathbb{C}:-1<\text{Re }z<1\}$. Aunque el término $\frac{1}{2z}$ aparezca en la extensión de la función, $\zeta(z)$ no va a tener polo ahí, ya que al dividir entre $\Gamma(z)$, se convierte en $\frac{1}{2z\Gamma(z)}=\frac{1}{2\Gamma(z+1)}$, la cual es analítica en $z=0$. Así, hemos definido a $\zeta(z)$ como una función analítica en $\{z\in\mathbb{C}:-1\geq\text{Re }z\}$, con un polo simple en $z=1$, cuyo residuo es 1.
Si $-1<\text{Re }z<0$, entonces

$$\int_1^\infty t^{z-1}dt=-\frac{1}{z}.$$

Si aplicamos esto a (3.16), tenemos

$$\zeta(z)\Gamma(z)=\int_0^\infty\left((e^t-1)^{-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)t^{z-1}dt\tag{3.17}$$

para $-1<\text{Re }z<0$. Por otra parte, se cumple la siguiente identidad

$$(e^t-1)^{-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^t+1}{e^t-1}\right)=\frac{i}{2}\cot\left(\frac{1}{2}it\right)$$

Por la prueba de [3, p. 305], sabemos que $\pi \cot \pi a = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2}$. Aplicando esto obtenemos

$$\cot\left(\frac{1}{2}it\right) = \frac{2}{it} - 4it\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}$$

para $t \neq 0$. Por lo tanto

$$\left(\left(e^t-1\right)^{-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{t} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}.$$

Usando este hecho en (3.17), tenemos

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z) &= 2\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}\right)t^z dt \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^z}{t^2+4n^2\pi^2}dt \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi n)^{z-1}\int_0^{\infty}\frac{t^z}{t^2+1}dt \\ &= 2\,(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\int_0^{\infty}\frac{t^z}{t^2+1}dt\end{aligned} \tag{3.18}$$

para $-1 < \operatorname{Re} z < 0$. Ahora para x real entre -1 y 0, haciendo el cambio de variable $s = t^2$, esto se conviete en una integral de Mellin, cuya solución empleando el teorema del residuo es

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{t^x}{t^2+1}dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{s^{\frac{1}{2}(x-1)}}{s+1}ds \\ &= \frac{\pi}{2}\csc\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{\pi}{2}x\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Pero por el ejemplo 3.2.7, obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi}\operatorname{sen}\pi x = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi}2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Combinando esto, junto con (3.18) y (3.19), concluimos con la siguiente ecuación

$$\zeta(z) = 2\,(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}z\right) \tag{3.20}$$

para $-1 < \operatorname{Re} z < 0$. A esta ecuación se le conoce como **ecuación funcional de Riemann**.

Esta igualdad solo fue probada para x real entre -1 y 0, pero aplicamos el principio de identidad para ver que se cumple si $-1 < \text{Re } z < 0$. Utilizamos el mismo razonamiento para ver que la igualdad también se cumple para $-1 < \text{Re } z < 1$ (el polo simple de $\zeta(1-z)$ en $z = 0$ se cancela con el cero de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ ahí). Como la parte derecha de la ecuación funcional es analítica si $\text{Re } z < 0$, entonces podemos utilizarla para definir $\zeta(z)$ en todo el plano complejo. Esto se puede resumir como el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5. *La función Zeta ζ se puede definir como función meromorfa en el plano complejo, con un único polo simple en $z = 1$ con residuo 1. Para $z \neq 1$, ζ satisface la ecuación funcional de Riemann.*

Como $\Gamma(1-z)$ tiene polos simples en $z = 1, 2, \ldots$, y como $\zeta(z)$ es analítica en $z = 2, 3, \ldots$, necesariamente

$$\zeta(1-z)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}z\right) = 0$$

en $z = 2, 3, \ldots$. Aun más, los ceros ahí deben ser simples. Como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$ cuando z es entero par positivo, se sigue que $\zeta(1-z) = 0$ para $z = 3, 5, \ldots$, lo cual implica que $\zeta(z) = 0$ para enteros pares negativos.

Por la forma en la que está definida $\zeta(z)$ para $\text{Re } z > 1$, la función no se anula en esta región. Por la ecuación funcional de Riemann, se puede verificar que $\zeta(z) \neq 0$ para $\text{Re } z < 0$ se manera similar. Esto nos dice que los otros ceros de $\zeta(z)$ deben estar en la región $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$.

Definición 3.3.6. *Los puntos $z = -2, -4, -6, \ldots$ se llaman los ceros triviales de la función Zeta, mientras que la región $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$ se llama la franja crítica.*

Ahora plantearemos una de las preguntas abiertas en matemáticas más célebres en la actualidad a saber, si se cumple lo siguiente:

Hipótesis de Riemann. *Si z es un cero no trivial de ζ, entonces* $\text{Re } z = \frac{1}{2}$.

Se ha demostrado que no hay ceros en las rectas $\text{Re } z = 0$ ni en $\text{Re } z = 1$, y que hay una infinidad de ceros en la línea crítica $\text{Re } z = \frac{1}{2}$, pero nadie ha demostrado que todos los ceros deben estar ahí.
Si se prueba esta hipótesis, se tendrán varios beneficios para la teoría de números, pues ya hay varias afirmaciones que suponen cierta esta conjetura. Una de las mejores formas de ver la relación entre esta función y la teoría de números es a través del siguiente teorema.

Teorema 3.3.7. *Si* Re $z > 1$, *entonces*

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right)$$

donde (p_n) *es la sucesión de números primos.*

Demostración. Primero, usando la serie geométrica, para cualquier n se cumple

$$\frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} p_n^{-mz}.$$

Si tomamos $n \geq 1$ fijo y el producto $\frac{1}{1-p_k^{-z}}$ para $1 \leq k \leq n$, entonces por la propiedad distributiva del producto obtenemos

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-z}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-z},$$

donde los enteros $n_1, n_2, \ldots$ son todos los enteros positivos que se pueden expresar como producto de potencias de los primos $p_1, p_2, \ldots$, y por el teorema fundamental de la aritmética, cada número tiene representación única como producto de primos, por lo que todos los n_j son distintos. Haciendo n tender a infinito, obtenemos el resultado deseado. ■

Capítulo 4

Fórmula de Jensen y productos de Blaschke

Como vimos en el capítulo 2, podemos hacer que cualquier conjunto sin puntos de acumulación sea el conjunto de ceros de alguna función analítica.

Aquí estudiaremos un poco sobre funciones analíticas en el disco centrado en 0 y radio 1. En este capítulo, denotaremos a este disco unitario por $\mathbb{D}$.

Supongamos que g es una función analítica en alguna vecindad de $\mathbb{D}$ y no se anula ahí. Entonces $\log|g| = \operatorname{Re}\log g$ es armónica, y por la propiedad del valor medio para estas funciones,

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta. \tag{4.1}$$

Esta fórmula nos da información de la escala de g en $\partial\mathbb{D}$ en términos de su valor en 0 y viceversa.

El primer paso que haremos es generalizar esta fórmula para discos de cualquier radio y permitir que tenga ceros. Para realizar esto, requerimos alguna forma de manipular los ceros de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$. Para ello, usaremos los factores de Blaschke que se definen de la siguiente manera.

Definición 4.0.1. *Si $a \in \mathbb{D}$, entonces se define el factor de Blaschke por*

$$B_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Éste no es más que un caso particular de una transformación de Möbius, la cual tiene ciertas propiedades deseables que veremos en la siguiente proposición.

Proposición 4.0.2. *La función B_a es analítica en una vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$. Tiene únicamente un cero de orden 1 en a. También satisface que $|B_a(z)| = 1$ si $|z| = 1$.*

Demostración. Si $|z| < \frac{1}{|a|}$, entonces $1 - \overline{a}z \neq 0$, por lo que B_a es analítica en $D\left(0, \frac{1}{|a|}\right)$, el cual es un conjunto abierto que contiene a $\mathbb{D}$. Claramente el único cero de B_a es a, y como

$$B_a'(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2},$$

el orden del cero es 1. Finalmente, si $|z| = 1$, entonces $|\overline{z}| = 1$ y $|z\overline{z}| = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} |B_a(z)| &= \frac{1}{|\overline{z}|} \cdot \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \\ &= \left| \frac{z - a}{\overline{z} - \overline{a}\,|z|^2} \right| \\ &= \left| \frac{z - a}{\overline{z - a}} \right| = 1. \end{aligned}$$

∎

Ahora veremos un lema que nos será de utilidad.

Lema 4.0.3.

$$\int_0^{2\pi} \log\left|1 - e^{it}\right| dt = 0.$$

Demostración. Como $1 - z$ es analítica en $\mathbb{D}$ y no se anula ahí, entonces $\log|1 - z|$ es una función armónica en $\mathbb{D}$, y por la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tenemos

$$\int_0^{2\pi} \log\left|1 - re^{it}\right| dt = 0 \tag{4.2}$$

para todo r tal que $0 \leq r < 1$. Si $0 \leq t \leq \pi/3$ o $5\pi/3 \leq t \leq 2\pi$, entonces se cumple

$$\left|\log\left|1 - re^{it}\right|\right| = \log\frac{1}{|1 - re^{it}|} = \log\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos t}} \leq \log\frac{1}{|\operatorname{sen} t|} \leq \frac{C_\alpha}{|t|^\alpha}$$

para cualquier α tal que $0 < \alpha < 1$. Si $\pi/3 \leq t \leq 5\pi/3$, entonces $\sqrt{3}/2 \leq |1 - re^{it}| \leq 2$, por lo tanto $|\log|1 - re^{it}|| \leq \log 2$. Por lo tanto, el integrando en (4.2) está acotado por una función integrable. Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se cumple para $r = 1$. ∎

Teorema 4.0.4 (Fórmula de Jensen). *Sea f analítica en una vecindad de $\overline{D}(0,r)$, y supongamos que $f(0)\neq 0$. Sean $a_1,\dots a_n$ los ceros de f en $\overline{D}(0,r)$, repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces*

$$\log|f(0)|+\sum_{k=1}^{n}\log\frac{r}{|a_k|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta.$$

Demostración. Supongamos que $a_1,\dots a_m\in D(0,r)$, y $|a_{m+1}|=\ldots=|a_n|=r$. Notemos que

$$B_{\frac{a}{r}}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{\frac{z}{r}-\frac{a}{r}}{1-\frac{\overline{a}z}{r^2}}$$

es analítica en una vecindad de $\overline{D}(0,r)$. Definimos

$$g(z)=f(z)\left(\prod_{k=1}^{m}B_{\frac{a_k}{r}}\left(\frac{z}{r}\right)\prod_{k=m+1}^{n}\frac{z-a_k}{a_k}\right)^{-1}.$$

Por la forma que definimos a g, ésta es analítica en una vecindad de $\overline{D}(0,r)$, y no tiene ceros ahí. Así, podemos aplicar (4.1) a g. También observamos que

$$\log|g(0)|=\log|f(0)|+\sum_{k=1}^{m}\log\left|\frac{r}{a_k}\right|=\log|f(0)|+\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{r}{a_k}\right|,$$

además,

$$\left|B_{\frac{a_k}{r}}\left(\frac{re^{it}}{r}\right)\right|=\left|\frac{re^{it}-a_k}{r-e^{it}\overline{a_k}}\right|=1 \tag{4.3}$$

y

$$\left|\frac{a_k}{re^{it}-\overline{a_k}}\right|=\left|\frac{re^{it_k}}{r\left(e^{it}-e^{it_k}\right)}\right|=\frac{1}{\left|1-e^{i(t-t_k)}\right|}. \tag{4.4}$$

Por lo tanto, por la propiedad del valor medio de g, (4.3) , (4.4) y el lema 4.0.3, obtenemos

$$\begin{aligned}\log|f(0)|+\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{r}{a_k}\right|&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\\&+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(\left|B_{\frac{a_k}{r}}\left(\frac{re^{i\theta}}{r}\right)\right|^{-1}\right)d\theta\\&+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(\left|1-e^{i(\theta-\theta_k)}\right|^{-1}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta.\end{aligned}$$

■

Corolario 4.0.5 (Desigualdad de Jensen)**.** *Si f cumple las condiciones del teorema 4.0.4, entonces*

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

Demostración. Como $|a_k| \leq r$, los términos $\log \frac{r}{|a_k|}$ son no negativos. ∎

Ahora regresamos a nuestro objetivo: obtener información de la distribución de los ceros de una función analítica a través de su crecimiento. Para el disco unitario, esto resulta ser una aplicación de la fórmula de Jensen.

Teorema 4.0.6. *Si f es una función analítica acotada no constante en $\mathbb{D}$, y $a_1, a_2, \ldots,$ son los ceros de f repetidos de acuerdo a su multiplicidad, entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|) < \infty.$$

Demostración. Supongamos que $f(0) \neq 0$. Como (a_k) es numerable, podemos encontrar $r < 1$ tal que $|a_k| \neq r$ para todo k. Le aplicamos la fórmula de Jensen a f en la región $\overline{D}(0,r)$ y tenemos

$$\log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n(r)} \log\frac{r}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

donde $n(r)$ es el número de ceros de f en $D(0,r)$. Como f está acotada en $\mathbb{D}$, digamos por M, al hacer r tender a 1 por la izquierda obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{1}{|a_k|} \leq \log M - \log|f(0)|.$$

Luego, por la serie de Taylor de la función logaritmo, resulta en

$$-\log\alpha = -\log(1-(1-\alpha)) = (1-\alpha) + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 + \frac{1}{3}(1-\alpha)^3 + \ldots.$$

Por lo tanto $\log\frac{1}{\alpha} = -\log\alpha > 1-\alpha$, y por el criterio de comparación, la serie converge. Si permitimos que $f(0) = 0$, sea m el orden del cero en 0. Entonces le aplicamos la fórmula de Jensen a $f(z)/z^m$, para ver que la serie con los ceros distintos del 0 converge, y los ceros en 0 solo añaden m a la serie, por lo que su convergencia no se altera. ∎

Un resultado notable es que el recíproco del teorema 4.0.6 se cumple sin tener que imponer restricciones adicionales. Precisamente, el resultado nos dice lo siguiente.

Teorema 4.0.7. *Si* $(a_n) \subseteq \mathbb{D}$ *satisface*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

y ningún $a_n = 0$*, entonces existe una función analítica y acotada en* $\mathbb{D}$ *tal que solo se anula en los puntos* a_n*, con cero de multiplicidad igual a las veces que el punto se repite en la sucesión. Específicamente, el producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$*, a una función analítica y acotada* $B(z)$*. Los ceros de* B *son los puntos* a_n*, con cero de multiplicidad igual a las veces que el punto se repite en la sucesión.*

Demostración. Para ver que el producto converge, por el teorema 2.0.7, es suficiente probar que para $0 < r < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z) \right|$$

converge uniformemente en $\overline{D}(0, r)$. Para $z \in \overline{D}(0, r)$,

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z) \right| &= \left| \frac{|a_n| - |a_n| \overline{a_n} z + \overline{a_n} z - |a_n|^2}{|a_n| (1 - z\overline{a_n})} \right| \\ &= \left| \frac{(|a_n| + z\overline{a_n})(1 - |a_n|)}{|a_n| (1 - z\overline{a_n})} \right| \\ &\leq \frac{(1 + r)}{(1 - r)|a_n|} (1 - |a_n|) . \end{aligned}$$

Como la serie converge, $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 1$, así, sabemos que $|a_n| \geq \frac{1}{2}$ para n suficientemente grande, por lo que

$$\left| 1 + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z) \right| \leq 2 \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right) (1 - |a_n|) .$$

Como la serie $\sum (1 - |a_n|)$ converge, por el M-test de Weierstrass,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z) \right|$$

converge uniformemente en $\overline{D}(0,r)$. Como cada factor $B_{a_n}(z)$ cumple que $|B_{a_n}(z)| \leq 1$, se tiene que $|B(z)| \leq 1$, y por la forma del producto, los únicos ceros son los puntos a_n, de multiplicidad igual a las veces que se repite. ∎

Al producto de la forma

$$z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)$$

se le llama un producto de Blaschke, con m un entero no negativo. Cuando $\sum(1-|a_n|) < \infty$, el teorema 4.0.7 garantiza que el producto converge.

Corolario 4.0.8. *Supongamos que f es una función analítica y acotada en $\mathbb{D}$, con cero de multiplicidad $m \geq 0$ en 0, y (a_n) sus otros ceros, repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces*

$$f(z) = z^m \cdot \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)\right] \cdot F(z),$$

donde F es una función analítica y acotada en $\mathbb{D}$, F no se anula, y

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |F(z)|.$$

Es decir, f es el producto de una función acotada que no se anula y un producto de Blaschke.

Demostración. Definimos a F por

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^m \cdot \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)\right]}.$$

Por la posición de los ceros de $z^m \cdot \left(\prod \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)\right)$, y por ser f analítica en $\mathbb{D}$, se sigue que F es analítica en $\mathbb{D}$ y no se anula.

Como $|z^m| \cdot \left|\prod \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)\right| \leq 1$ en $\mathbb{D}$, esto implica

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |F(z)| \geq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Para la otra desigualdad, sea N un número natural y definimos

$$B_N(z) = \prod_{n=1}^{N} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z), \qquad F_N(z) = \frac{f(z)}{z^m \cdot B_N(z)}.$$

Sea $\epsilon > 0$. Como B_N es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, podemos elegir $r_0 < 1$ tal que si $r_0 < r < 1$, entonces

$$\left|B_N\left(re^{i\theta}\right)\right| > 1-\epsilon,$$

pero por el principio del módulo máximo,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |F_N(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}\,,|z|>r_0} |F_N(z)| \leq r_0^{-m} \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{1-\epsilon} \to \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{1-\epsilon},$$

cuando $r_0 \to 1^-$. Como ϵ es arbitrario, se cumple que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |F_N(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Como F_N converge uniformemente a F, se sigue la desigualdad

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |F(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

∎

El siguiente ejemplo es una de las muchas formas de aplicar la teoría de productos de Blaschke.

Ejemplo 4.0.9. *Si f es una función entera tal que $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$, entonces*

$$f(z) = \alpha z^m,$$

con m entero no negativo y $|\alpha| = 1$.

Demostración. Por el principio de módulo máximo, $|f(z)| \leq 1$ si $|z| \leq 1$. Si además suponemos que f no se anula en $\mathbb{D}$, entonces aplicando el principio de módulo mínimo a f, concluimos que $|f(z)| = 1$ para todo z en el disco unitario, por lo tanto $f(z) \equiv \alpha$.

En caso que f se anule dentro del disco unitario, como f no se anula si $|z| = 1$ el conjunto de ceros no puede tener puntos de acumulación en $\mathbb{D}$, por lo tanto f tiene un número finito de ceros en $\mathbb{D}$. Sean $a_1, a_2, \ldots a_k$ los ceros de f. Sin pérdida de generalidad, sean los primeros m ceros el punto 0. Como f es analítica y acotada en $\mathbb{D}$, entonces por el corolario 4.0.8,

$$f(z) = z^m \cdot \left[\prod_{n=m+1}^{k} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z)\right] \cdot F(z).$$

Como $|z^m| = 1$ y $|B_{a_n}(z)| = 1$ si $|z| = 1$, entonces necesariamente $|F(z)| = 1$ si $|z| = 1$. De nuevo, como F no se anula, aplicando el principio de módulo máximo y de módulo mínimo a F, se tiene que $F(z) \equiv \alpha$, con $|\alpha| = 1$.

Como f es entera, y cada factor de Blaschke tiene un polo en $z = \frac{1}{\overline{a_n}}$, entonces

$$\prod_{n=m+1}^{k} \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} B_{a_n}(z) = 1$$

para todo z. Es decir, f solo tiene m ceros, y todos son el punto 0, por lo tanto $f(z) = \alpha z^m$. ■

Conclusiones

En esta tesis, hemos desarrollado la teoría básica de los productos infinitos, asociándolos con series de convergencia equivalente; con el teorema de Weierstrass podemos convertir cualquier conjunto sin puntos de acumulación en el conjunto donde alguna función analítica se anula. Gracias al teorema de factorización de Weierstrass, pudimos expresar a cualquier función analítica como producto infinito de factores elementales, los cuales tienen un único cero, más fácil de manejar.

Esta teoría, la aplicamos a las funciones seno, Gamma y Zeta, y logramos expresarlas en forma que nos permite identificar fácilmente sus ceros. Después obtuvimos la fórmula de Jensen y desarrollamos un poco de los productos de Blaschke, ambas herramientas útiles para desarrollar la teoría de los espacios de Hardy H^p.

En conclusión podemos ver al teorema de factorización de Weierstrass como un análogo al teorema de Taylor para el producto. Aunque este trabajo haya sido breve, la teoría desarrollada aquí sirve de base para otras líneas de investigación.

Bibliografía

[1] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I.* Springer-Verlag, 1978.

[2] R. E. Greene and S. G. Krantz, *Function theory of one complex variable.* American Mathematical Soc., 2006, vol. 40.

[3] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Basic complex analysis.* Macmillan, 1999.

[4] P. J. Davis, "Leonhard euler's integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton abramowitz," *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, no. 10, pp. 849–869, 1959.

[5] R. Ayoub, "Euler and the zeta function," *The American Mathematical Monthly*, vol. 81, no. 10, pp. 1067–1086, 1974.

[6] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series.* Cambridge University Press, 1993, no. 26.

[7] G. Ernesto, *La conjetura fundamental sobre los números primos Riemann.* RBA Coleccionables, S.A., 2017.

[8] J. García-Cuerva and J. R. De Francia, *Weighted norm inequalities and related topics.* Elsevier, 1985, vol. 116.