



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Invariantes polinomiales de nudos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Joselyn Soto Contreras

Director de tesis: Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa
Palafox.

Hermosillo, Sonora, México, Abril 12, 2019

SINODALES

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox.

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, México.

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

A mi padres.

A mis hermanas.

A los amigos hechos en el camino.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia; a mi papá por ser guía y apoyo inmutable en este camino elegido, a mi mamá por el cariño incondicional, y a mis tres hermanas, que no conformes con este lazo, han sido también confidentes y amigas.

Agradezco también a mi directora de tesis Dra. Gabriela Hinojosa por su apoyo, el tiempo brindado hasta en vacaciones y la confianza para realizar este trabajo a distancia, que decidió otorgar con solo un semestre de habernos conocido.

A mis sinodales: Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro, Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa y en especial a M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá, agradezco los consejos y el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis.

A mis profesores de licenciatura gracias por sus enseñanzas, paciencia y asesoría, por tomar un papel fundamental en mi formación.

Gracias infinitas a mis compañeros y amigos, Ireni, Luz, Malena, Paola, Félix, Chuy y tantos más, por hacer el camino ligero y alegre sin importar estrés.

Índice de contenido

Agradecimientos	III
Índice general	III
1. Teoría básica de nudos	4
1.1. Definiciones básicas	4
1.2. Diagramas y Movidas de Reidemeister	9
1.3. Superficie de Seifert	11
2. Invariantes elementales	14
2.1. Número de cruces	14
2.2. Quiralidad	15
2.3. Colorabilidad	16
2.4. Grupo fundamental	19
3. Invariantes polinomiales	36
3.1. Polinomio de Alexander	36
3.2. El polinomio del corchete de Kauffman	43
3.3. El polinomio de Jones	51
4. Una aplicación de la teoría de nudos	55
4.1. Ovillos	56
4.2. Modelo de Ovillos	59
4.2.1. La acción de la enzima Tn3-resolvasa	60
Bibliografía	64

Introducción

Los nudos son objetos que han existido desde la antigüedad, fueron creados para ayudar a cubrir las necesidades humanas. Se han encontrado vestigios prehistóricos de tiempos donde apenas se vislumbraban las primeras señales de organización social, donde ya se hacía uso de ellos. Podríamos decir que nacieron con la civilización humana y se han desarrollado junto a ella.

Un importante ejemplo de este desarrollo son los nudos hechos por marineros, quienes dependiendo del trabajo creaban nudos distintos apropiados a él, así los nudos más efectivos se enseñaban a las generaciones más jóvenes por medios orales. Empezamos a ver aquí la reelevancia que tuvo distinguir nudos en la práctica. Se volvieron tan importantes estas enseñanzas que, durante la Ilustración, se escribieron los primeros libros de nudos. Notemos que uno de los primeros autores de este tema fue John Smith, más conocido por sus aventuras con Pocahontas en el continente Americano [18].

Sin embargo, los marineros no eran los únicos creadores de nudos, podemos mencionar también otros oficios para los que son indispensables incluso hoy, como los pescadores, alpinistas y tejedores. Han sido usados por algunas culturas antiguas como símbolos místicos por su misteriosa belleza. Un uso más reciente es el que han tenido en manos de los magos. Escapes asombrosos de ataduras que se deshacen misteriosamente -resultado de nudos equivalentes a un círculo o trozo de cuerda no anudado. Vemos de nuevo la importancia de su distinción en términos prácticos, importancia que, por desgracia, las ciencias fallaron en notar por algunos cientos de años más.

Así, la primera idea de involucrar el estudio de nudos a la ciencia fue propuesta por el físico Lord Kelvin quien, alrededor de 1860 en sus estudios de la materia, propuso la existencia de un éter invisible a nuestro entorno, donde se encontraban componentes anudados tales que, componentes distintos equivalían a nudos distintos. De repente identificar nudos equivalentes se convirtió en una tarea sumamente relevante y se crearon las primeras tablas de nudos. Unos años más tarde la teoría se probó incorrecta y el estudio de nudos se abandonó, dejando atrás una serie de problemas sin resolver.

Fue casi cien años después cuando los matemáticos retomaron los problemas dejados, dándoles solución e iniciando así con la teoría de nudos. Notemos entonces que un nudo *matemático* difiere de un nudo en la práctica, uno usado por un marinero por ejemplo. Para obtener un nudo que servirá como tal en el contexto de nuestra teoría imaginemos una cuerda anudada y unimos los dos extremos, ahora no es posible desanudar la cuerda sin hacer algún corte, estos serán los nudos que más adelante definiremos de manera formal.

No olvidemos que el problema principal de esta rama matemática es lograr hacer una distinción segura de nudos diferentes, sin importar cómo sean aparentemente, por lo que nos enfocamos esencialmente en su forma, en sus aspectos geométricos. Nacen así los invariantes de nudos, que veremos con detalle más adelante, y se crean los invariantes polinomiales de nudos, que nos permitieron ver la íntima relación de nuestros objetos geométricos con el álgebra y además, en los últimos cincuenta años le dieron un particular impulso a la teoría de nudos, pues es en este tiempo donde se han dado más resultados que en toda su existencia. Incluso resultados que se intersecan con otras ciencias, como la biología, la física y la química, y han sido indispensables para el avance de las mismas.

Fue esta interesante y peculiar carrera histórica una de las razones que me llevaron a querer estudiar el área más a fondo, pero fue más aún su belleza matemática, su manipulación y la posibilidad de asomarme a otras áreas científicas que despertaron mi interés. Fue también la libertad que provee, en términos del nivel de dificultad que se desea trabajar, haciendo posible una tesis de licenciatura en matemáticas adaptada para la comprensión de cualquier estudiante de semestres avanzados de dicha licenciatura que tenga algún interés en el tema. A continuación explico el orden en el que está organizando este trabajo:

En el primer capítulo veremos los aspectos principales de la teoría de nudos; definiciones de nuestros objetos de estudio y aclaraciones de detalles que surgen con ellas, así como teoremas y propiedades que nos ayudarán a mostrar que operadores invariantes en efecto lo son. Asimismo, veremos el hecho de que hay distintos tipos de nudos y una operación entre ellos.

En el segundo capítulo definimos formalmente un invariante y se hace explícito cómo es un invariante ideal. Hablamos también de algunos invariantes geométricos y de uno algebraico de suma importancia, el grupo fundamental, que ampliará el panorama, abriendo así camino para el siguiente capítulo.

En el tercer capítulo entramos con los invariantes de mayor interés y que causaron una revolución dentro de la teoría de nudos, sacándola de su antiguo abandono, por lo que se logró crear gran parte de la teoría ahora existente, los invariantes polinomiales. Mencionaremos cuatro pero nos enfocaremos en tres, dos de ellos serán los primeros existentes, el polinomio de Alexander y el de Jones, responsables directos de la relación de la teoría de nudos con el álgebra, y por tanto de la revolución mencionada, el tercero es el polinomio de Kauffman, que facilitará la presentación del de Jones. Evitaremos el orden histórico, enfocándonos en su lugar en un orden que facilite la comprensión al lector.

En el cuarto y último capítulo presentamos una aplicación directa de la teoría de nudos en la biología, en particular en la interacción que tienen ciertas enzimas con nuestro ADN, e introduciremos algunos conceptos necesarios, pero no complicados, para su manejo.

1 | Teoría básica de nudos

El problema fundamental de la teoría de nudos es la clasificación de éstos, tener una forma eficaz de asegurarnos de que dos nudos que se ven distintos realmente lo son en un sentido topológico o si en realidad son topológicamente equivalentes. En el siguiente trabajo exploraremos algunos procedimientos y resultados que nos permitirán definir invariantes algebraicos los cuáles nos ayudarán a responder esta pregunta.

Antes de esto es prudente tener claras las diferencias entre un nudo que observamos en la vida diaria y los que usaremos en teoría de nudos. En esta primera sección nos aseguramos de tener una definición formal, así como algunos ejemplos, familias y otras nociones que serán de gran utilidad.

1.1. Definiciones básicas

Usualmente pensamos en un nudo como una cuerda anudada, ahora imagina que a esta cuerda le pegamos las orillas y obtendrás un objeto como con los que estaremos trabajando. Notemos que dichos objetos son una curva cerrada sin autointersecciones en \mathbb{R}^3 . De aquí nuestra definición matemática de nudos, donde consideramos un encaje topológico de la manera usual.

Definición 1.1.1. *Una aplicación f continua e inyectiva entre espacios topológicos X y Y es un **encaje topológico** si $f : X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.*

Definición 1.1.2. *Un encaje topológico $K : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ es llamado un **nudo**.*

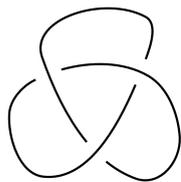
Definición 1.1.3. *Un encaje de n círculos disjuntos en \mathbb{R}^3 es llamado un **enlace de n componentes**.*

Es claro que un nudo es un caso particular de un enlace, pues se trata de un enlace de solo una componente.

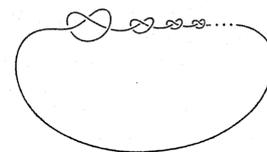
Notemos que una consecuencia de la Definición 1.1.2 es la existencia de dos clases de nudos, que definiremos a continuación.

Definición 1.1.4. Diremos que un punto $x \in K$ es localmente plano o localmente manso si existe una vecindad abierta U de x tal que hay un homeomorfismo de parejas: $(U, U \cap K) \sim (\mathbb{B}^3, (N, Z))$, donde \mathbb{B}^3 en \mathbb{R}^3 es la bola unitaria abierta en \mathbb{R}^3 y (N, Z) es el segmento de recta que conecta al polo norte y el polo sur de \mathbb{B}^3 . En caso contrario, se dice que x es un punto salvaje de K .

Definición 1.1.5. Un nudo K es manso si todos sus puntos son localmente mansos. En caso contrario diremos que K es un nudo salvaje.

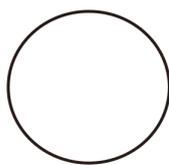


(A) Ejemplo de nudo manso

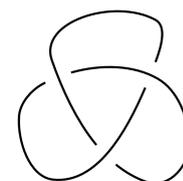


(B) Ejemplo de nudo salvaje

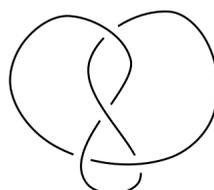
En esta tesis trabajaremos únicamente con nudos mansos, pues los nudos salvajes presentan dificultades que van más allá de los alcances de la misma. Así, en las siguientes páginas, siempre que mencionemos un nudo K , nos referiremos a un nudo manso. A continuación presentaremos tres de los nudos más sencillos, y a los que más estaremos haciendo referencia.



(A) Nudo trivial



(B) Nudo trébol



(C) Nudo ocho

Existen maneras de clasificar a los nudos mansos por familias de acuerdo a propiedades que comparten. Una familia importante, que más adelante nos permitirá simplificar algunos cálculos, es la familia de nudos tóricos.

Definición 1.1.6. *Sea K un nudo. Diremos que K es un **nudo tórico** si está contenido en el toro estándar T^2 .*

Antes de construir un nudo tórico recordemos que el toro T^2 es, intuitivamente, la superficie de una dona, por lo que existen distintas maneras de describirlo.

Aquí lo haremos de la manera más sencilla, por medio de su parametrización en \mathbb{R}^3 . Lo generaremos por medio de un círculo de radio r colocado en el plano yz , con centro en el eje y y a una distancia R del origen, que rotaremos alrededor del eje z . Así la parametrización de nuestro círculo es $(0, R + r\cos(\theta), r\sen(\theta))$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Sea $\phi \in [0, 2\pi]$ el ángulo de la parametrización de la rotación, entonces

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sen(\phi) & 0 \\ \sen(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R + r\cos(\theta) \\ r\sen(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sen(\phi)(R + r\cos(\theta)) \\ \cos(\phi)(R + r\cos(\theta)) \\ r\sen(\theta) \end{bmatrix}$$

es la parametrización de T^2 con parámetros (ϕ, θ) .

Ahora bien, usando la función f definida por

$$f(t) = (-\sen(qt)(R + r\cos(pt)), \cos(qt)(R + r\cos(pt)), r\sen(pt))$$

con $t \in [0, 2\pi]$ y p, q enteros primos relativos, obtenemos un nudo tórico parametrizado, lo denotaremos por $K_{p,q}$.

En el capítulo 10 de [4] podemos ver que tendremos un nudo distinto para diferentes valores de p y q .

Ya que el problema fundamental es la clasificación de nudos, será indispensable tener una definición que nos sea útil para diferenciarlos, así como para saber cuándo son equivalentes.

Definición 1.1.7. *Dos nudos K y K' son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(K) = K'$.*

Pero como ya comentamos, determinar si dos nudos son equivalentes o no, es un problema muy difícil. Un concepto que nos ayuda es el siguiente:

Definición 1.1.8. *Sean A y B subconjuntos de X . Una **isotopía de ambiente** de A a B es una función continua $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisface las siguientes tres condiciones. Consideremos $h_t(x) = h(x, t)$.*

- $h_t : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo para cada $t \in [0, 1]$.
- h_0 es la función identidad.
- $h_1(A) = B$.

Así, dos nudos K y K' son equivalentes si es posible transformar a uno en el otro por una serie de isotopías de ambiente. Si es el caso diremos que K es isotópico a K' , o bien $K \sim K'$.

Cabe mencionar que existe una definición equivalente a la de nudos mansos con la que se evita la posibilidad de que nuestro nudo sea salvaje, la de nudos poligonales.

Definición 1.1.9. *Un **nudo poligonal** K es una curva cerrada simple en \mathbb{R}^3 que consiste en un número finito de segmentos cerrados de recta e_1, e_2, \dots, e_n tales $e_i \cap e_{i+1}$ es el punto v_i para $i = 1, \dots, n - 1$ y $e_n \cap e_1 = v_n$.*

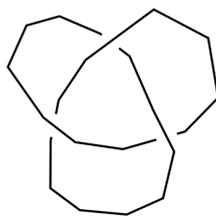


FIGURA 1.3: Ejemplo de nudo poligonal.

Por fines prácticos no haremos mucho uso de esta definición.

Otro aspecto importante que le podemos asignar a un nudo es una orientación. Basta con posicionarnos en algún punto de él y empezar a recorrerlo en alguna dirección hasta llegar al punto de inicio, esta dirección que elegimos será llamada **orientación del nudo**. Notemos que al posicionarnos en el nudo tenemos dos posibles direcciones en las cuales movernos, una en el sentido de las manecillas del reloj y otra en el sentido opuesto, estas serán las dos posibles orientaciones que le podemos asignar a un nudo.

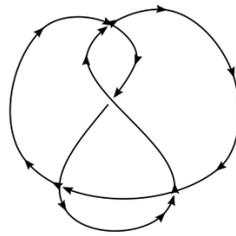


FIGURA 1.4: Nudo ocho orientado en el sentido de las manecillas del reloj.

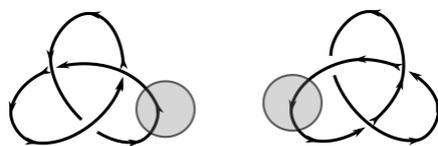
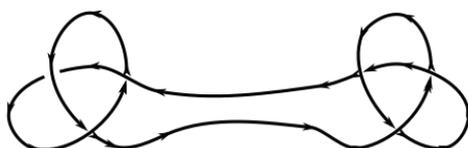
Veamos ahora que podemos definir una operación entre nudos orientados, llamada *suma conexa de nudos*. Sean K_1 y K_2 dos nudos orientados. Para llevar a cabo la operación es necesario deformar los nudos para que ambos estén sobre un mismo plano, salvo cruces, sin intersecarse entre ellos, como se muestra en la Figura 1.5.

Recordemos que para cada punto $x \in K_i$ existe una vecindad U tal que $(U, U \cap K_i) \cong (Int(\mathbb{B}^3), Int(I))$ por lo que podemos remover la pareja $(U, U \cap K_i)$ $i = 1, 2$ e identificar las parejas resultantes, respetando la orientación original de cada K_i , mediante el homeomorfismo

$$h : (\partial\mathbb{B}_2^3, \partial I_2) \longrightarrow (\partial\mathbb{B}_1^3, \partial I_1).$$

Por abuso de notación escribiremos la operación como $K_1 \# K_2$.

Ejemplo 1.1.10. *Suma conexa de un nudo ocho y un nudo trébol, denotados K_1 y K_2 respectivamente.*

FIGURA 1.5: Nudos K_1 y K_2 con (\mathbb{B}_i^3, I_i) .FIGURA 1.6: Removiendo las parejas $(Int(\mathbb{B}_i^3), Int(I_i))$.FIGURA 1.7: Después de identificar las parejas via el homeomorfismo h .

Observación 1.1.11. Si $K'_1 \sim K_1$ y $K'_2 \sim K_2$ entonces $K'_1 \# K'_2 \sim K_1 \# K_2$. En otras palabras $[K'_1] \# [K'_2] = [K_1 \# K_2]$, donde $[]$ denota la clase de isotopía [14].

Observación 1.1.12. Sea \mathcal{K} el conjunto de todas las clases de isotopía de nudos man-sos orientados. \mathcal{K} con la operación de suma conexa forma un semigrupo que posee un elemento neutro, que es la clase del nudo trivial \mathbb{S}^1 [14].

1.2. Diagramas y Movidas de Reidemeister

Aún con estas nuevas nociones y nuestra definición de equivalencia de nudos en muchas ocasiones resulta muy complicado encontrar la isotopía de ambiente en \mathbb{R}^3 , así que en su lugar trabajaremos con una proyección del nudo hacia un plano.

Definición 1.2.1. Le llamamos **diagrama de nudo** a aquellas proyecciones ortogonales del nudo a un plano que cumplen:

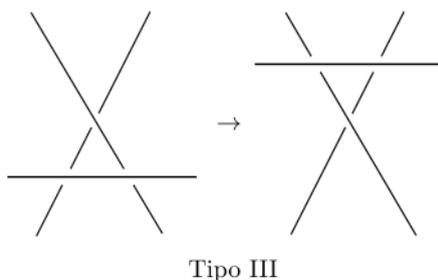
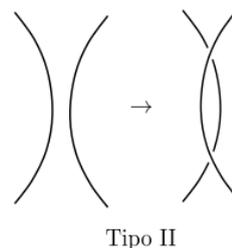
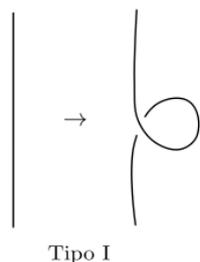
1. Que exista una cantidad finita de puntos múltiples proyectados sobre el plano.
2. Que los puntos múltiples en el plano solo provengan de dos puntos del nudo.

En el caso de un nudo orientado, el diagrama heredará la orientación asignada del nudo, por lo que será un diagrama orientado.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Reidemeister). *Si K_1 y K_2 son dos nudos con diagramas D_1 y D_2 , respectivamente, entonces los nudos K_1 y K_2 son equivalentes si y solo si D_1 y D_2 son equivalentes.*

Encontramos la prueba en [11].

Pero, ¿cómo saber si dos diagramas son equivalentes? Existen tres tipos de movimientos que nos resumen las alteraciones que podemos hacer para ir de un diagrama de un nudo a un diagrama de cualquier nudo equivalente. Estos tres movimientos son llamados los **movimientos de Reidemeister**.



Tanto los inversos como imágenes espejo de cada movimiento serán también movimientos de Reidemeister del mismo tipo.

Definición 1.2.3. *Dos diagramas de nudos D y D' son equivalentes si y solo si existe una sucesión finita de movimientos de Reidemeister que transformen a D en D' .*

1.3. Superficie de Seifert

Una característica de suma importancia de la teoría de nudos actual, y que le permitió a las matemáticas llegar más lejos de lo que otras áreas habían logrado, es que se consideran las propiedades topológicas de un nudo. Entre ellas encontramos la existencia de la superficie de Seifert, una herramienta tan útil que permite definir el género de un nudo, e incluso es posible obtener un método para llegar al polinomio de Alexander por medio de ella. En esta sección nos limitaremos a probar dicha existencia, pues es indispensable conocerla, pero profundizar más en este tema nos sacaría del contexto deseado.

Teorema 1.3.1. *Dado un nudo orientado K , existe una superficie F , en \mathbb{R}^3 , orientable y conexa que tiene por frontera a K . Llamaremos a esta superficie la **superficie de Seifert**.*

Antes de demostrar el teorema notemos que, en un diagrama de nudo orientado, la orientación asignada nos permite definir un signo para cada cruce. Lo haremos como se muestra en la Figura 1.9.



FIGURA 1.9: Signos de los cruces.

Demostración. Supongamos que K es un nudo orientado y D es un diagrama de K , lo que buscamos es descomponer D en curvas cerradas simples. Primero dibujaremos un pequeño círculo en algún cruce de D , con el punto de cruce como centro. Este círculo intersecará al diagrama en cuatro puntos, digamos a, b, c y d , y uniremos a con c y b con d , como se muestra en la Figura 1.10.

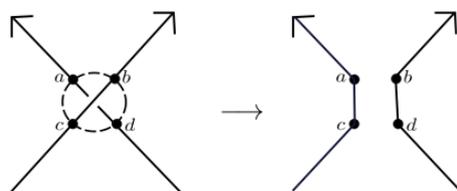


FIGURA 1.10

Hemos cambiado los segmentos originales ad y bc a los nuevos segmentos ac y bd . A esta operación, que nos permite remover un punto de cruce del diagrama D , se le llama *empalme* de un nudo K (de acuerdo a su orientación) en un cruce. Si efectuamos esta operación en cada cruce de D , obtendremos una descomposición de D en curvas cerradas simples, a las que llamaremos *curvas de Seifert*. Así transformamos a D en un diagrama regular de un enlace sin cruces sobre un plano.

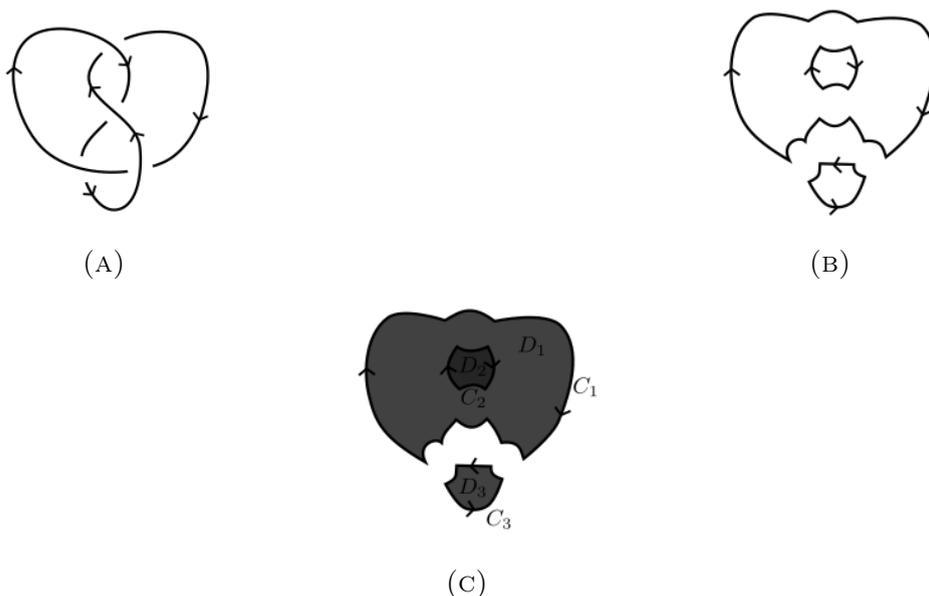
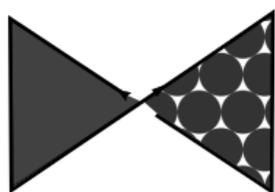
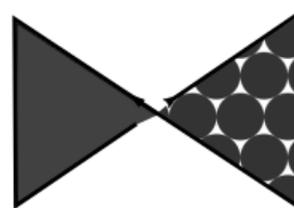


FIGURA 1.11

Notemos que cada una de las curvas cerradas simples puede ser generada por un disco. En el caso de la Figura 1.11c tenemos tres discos, D_1 , D_2 y D_3 , donde la frontera de D_i es la curva de Seifert C_i . Estos discos pueden estar sobrepuestos, lo que ocasiona problemas que son resueltos con facilidad en [14]. Ahora bien, para crear una superficie es necesario unir los discos obtenidos, y lo haremos por medio de bandas con una torsión, para las cuales tomaremos un cuadrado $acdb$ y haremos una sola torsión con él, que puede ser positiva o negativa, como se muestra en la Figura 1.12.



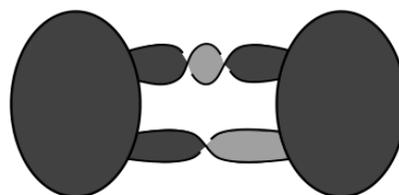
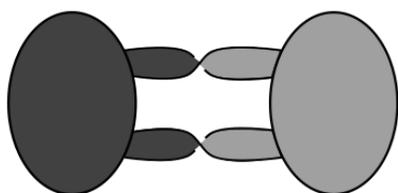
(A) Torsión positiva.



(B) Torsión negativa.

FIGURA 1.12

Si unimos las bandas positivas (o negativas) en los lugares de D a los que correspondían cruces positivos (o negativos) antes de ser empalmados, entonces obtenemos una superficie conexa y orientable F , cuya frontera es el nudo K .



En efecto, la superficie obtenida es orientable, pues como se muestra en la figura anterior, es posible sombrear el frente de la superficie de un color, y usar otro en el lado de atrás para distinguirlos, lo que nos permite asignar una orientación a la superficie. Es importante observar que si una de las bandas tiene una doble torsión, no será posible distinguir los lados de enfrente y atrás. ■

2 | Invariantes elementales

Pese a que ya tenemos una noción de equivalencia, esta puede resultar poco práctica, así que definiremos propiedades de nudos tales que no cambien bajo isotopías de ambiente. Es decir, si dos nudos son equivalentes entonces tales propiedades permanecen igual. Llamaremos a dichas propiedades **invariantes de nudos**.

Definición 2.0.1. *Un **invariante de nudos** es una función la cual asigna a cada nudo K un objeto $f(K)$ de tal manera que a nudos equivalentes les son asignados objetos equivalentes.*

Así podremos determinar cuando K y K' no son equivalentes, pues si $f(K)$ y $f(K')$ no son equivalentes forzosamente se debe cumplir que K y K' tampoco lo son. Existen invariantes que proporcionan más información que otros.

Definición 2.0.2. *Sea f un invariante, diremos que f es un **invariante completo** si se cumple la siguiente condición: Si $f(K)$ es equivalente a $f(K')$, entonces K es equivalente a K' .*

Lo que buscamos de un invariante es que sea efectivo, es decir, que no sea muy complicado de calcular y que nos provea de los resultados que necesitamos dependiendo del contexto del problema.

2.1. Número de cruces

En el capítulo anterior mencionamos que una de las condiciones de un diagrama regular es que los puntos múltiples en el plano solo vengan de dos puntos del nudo. A los puntos

donde el diagrama del nudo se interseca consigo mismo, los llamaremos **cruces del nudo**.

Definición 2.1.1. *El número de cruces de un nudo K es el mínimo número de cruces de todos los diagramas de nudos equivalentes a K .*

Ejemplo 2.1.2. *Veamos en la figura siguiente el primer diagrama de nudo que, en un principio, tiene 9 cruces pero al hacer una serie de movidas de Reidemeister lo desanudamos hasta convertirlo en el nudo trivial, por lo que su número de cruces es cero.*

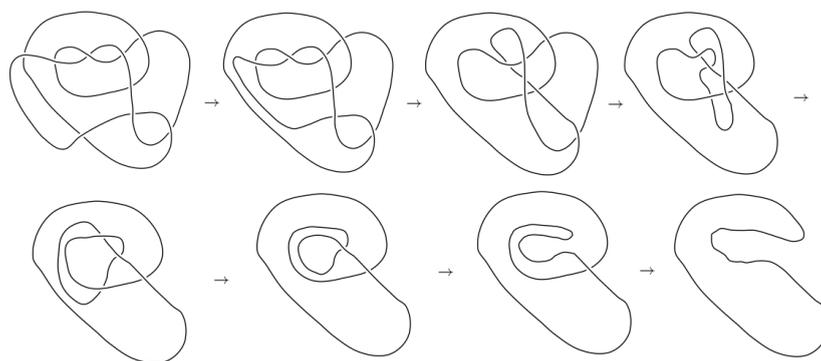
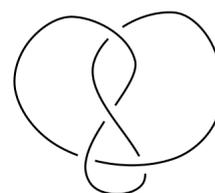


FIGURA 2.1: Nudo con número de cruces cero.

Ejemplo 2.1.3. *El número de cruces del nudo trébol y del nudo ocho es tres y cuatro respectivamente.*



(A) Nudo trébol con mínimo número de cruces.



(B) Nudo ocho con mínimo número de cruces.

2.2. Quiralidad

Si reflejamos algún nudo K en un espejo es posible obtener un nudo K' , que no será necesariamente equivalente a K , pues esto es una operación válida como homeomorfismo de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 que nos lleva de un nudo a su reflejo, es decir que cambia los cruces del nudo original, pero no es válido como una isotopía.

Definición 2.2.1. Un nudo K es **quiral** si no es isotópico a su imagen espejo. En caso contrario se dice que K es **antiquiral**.

Veamos a continuación un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 2.2.2. El nudo ocho es un nudo antiquiral.

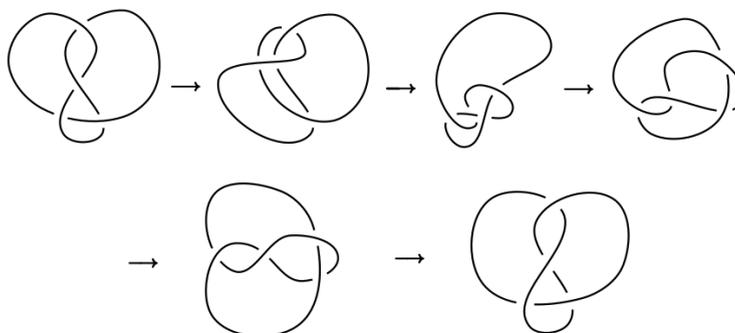


FIGURA 2.3: Isotopía del nudo ocho a su imagen espejo.

Ejemplo 2.2.3. El trébol es un nudo quirar. Haremos una distinción entre el nudo trébol y su imagen espejo, llamaremos al primero nudo trébol izquierdo y al segundo nudo trébol derecho.



(A) Nudo trébol izquierdo.



(B) Nudo trébol derecho.

Esto será notable en el Capítulo 3 y demostrado con el Teorema 3.3.5.

2.3. Colorabilidad

Al igual que el nudo del Ejemplo 2.1, existen muchos otros que son equivalentes al nudo trivial. De hecho, mencionamos antes que lo que se busca en la teoría de nudos es una forma efectiva de diferenciarlos entre sí, y lograr clasificarlos, pero ¿existen otros nudos que no son equivalentes al trivial? ¿realmente podemos encontrar un nudo que sea imposible de desanudar?, claramente la respuesta es que sí, Reidemeister probó que el nudo trébol y el trivial no son equivalentes usando el concepto que introduciremos a

continuación.

Definición 2.3.1. *El diagrama de un nudo es **tricoloreable** si a cada arco se le puede asignar uno de tres colores de acuerdo a las siguientes condiciones:*

1. *Tiene al menos dos colores.*
2. *Cualquier cruce donde coincidan dos colores, coinciden los tres colores.*

Observemos que es imposible asignar más de un color al diagrama más sencillo de un nudo trivial, pues no tiene cruces, entonces el nudo trivial es no tricoloreable. Pero, como vemos en la Figura 2.5 el trébol sí lo es.



FIGURA 2.5

Teorema 2.3.2. *La tricolorabilidad es un invariante de nudos.*

Demostración. Es un caso particular del Teorema 2.3.7.

Concluimos que el nudo trébol y el trivial no son equivalentes.

Posteriormente se generaliza la tricolorabilidad de Reidemeister a lo que llamaremos n -coloraciones, obtenidas por medio del procedimiento de *juego de los colores* para el cual usaremos una rueda con un número impar n de rayos distribuidos uniformemente, a los que les asignaremos un color, por ejemplo,

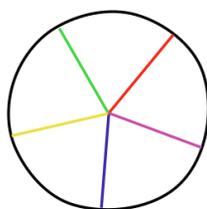


FIGURA 2.6: Rueda de cinco colores.

Definición 2.3.3 (Juego de los colores). *Dado un nudo K , usaremos los n colores distintos de la rueda para iluminar cada uno de los arcos del diagrama de K de acuerdo a las siguientes reglas:*

- a) *Se usarán al menos dos colores distintos (no necesariamente todos).*
- b) *En un cruce, el color del arco que pasa por delante debe ser el que corresponde a la bisectriz (única) del ángulo que forman los rayos con los colores de los arcos que inciden en el cruce y pasan por detrás (estos tres colores pueden ser iguales).*

Es importante notar que al hacer uso de un número impar n de colores garantizamos que, dados cualesquiera dos colores, existe uno único que es bisectriz. Si usáramos un número par de colores, en cambio podría haber dos bisectrices o ninguna.

Definición 2.3.4. *A una coloración que cumpla las reglas a) y b) le llamaremos **n -coloración admisible**.*



FIGURA 2.7: Una coloración admisible.

Ejemplo 2.3.5. *El nudo ocho tiene una 5-coloración admisible pero el nudo trébol no.*



Definición 2.3.6. *Dado un diagrama del nudo K , se define su **número cromático** como el mínimo número impar $n > 1$ tal que la proyección admite una n -coloración de acuerdo a las reglas a) y b) de la Definición 2.3.3. Si no admite ninguna coloración con estas reglas, se define este número como 1 (es el caso de cualquier proyección regular del nudo trivial).*

Teorema 2.3.7. *El número cromático es un invariante de nudos.*

Demostración. Demostraremos que el número cromático es, en efecto, invariante bajo las tres movidas de Reidemeister.

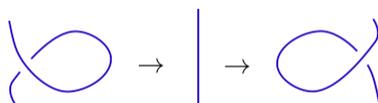


FIGURA 2.9: Coloración bajo movida de tipo I.

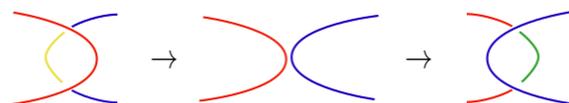


FIGURA 2.10: Coloración bajo movida de tipo II.

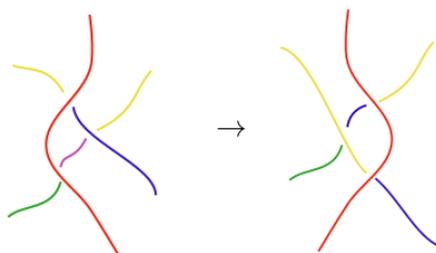


FIGURA 2.11: Coloración bajo movida de tipo III.

Con este teorema y el Ejemplo 2.3.5, concluimos que el nudo ocho tampoco es equivalente al trébol.

Sin embargo, el número cromático no es un invariante completo. Claramente el trébol y su imagen espejo tienen número cromático 3 aunque no son isotópicos. Tendremos además, que resultaría poco práctico buscar el número cromático de nudos muy complicados, por lo que continuaremos en la búsqueda de invariantes más efectivos.

2.4. Grupo fundamental

Otra forma de dar respuesta a las preguntas planteadas anteriormente es por medio de un invariante llamado grupo fundamental de un nudo, para lo cual debemos primero

hablar sobre una serie de conceptos que nos lleven a la definición de grupo fundamental en general. En particular definiremos objetos sobre los cuales tendremos una relación de equivalencia, que nos induzca a obtener distintas clases de equivalencia y una operación válida sobre la colección de estas clases.

Definición 2.4.1. *Dado un espacio topológico X y dos puntos $x, y \in X$, un **camino** en X que une a x con y es una aplicación continua $f : [a, b] \rightarrow X$ tal que $f(a) = x$ y $f(b) = y$.*

Sin embargo, para calcular grupos fundamentales solo necesitaremos un caso particular de caminos, llamado *lazos*. La teoría a continuación es válida para caminos en general pero nos limitaremos a expresarla en términos de lazos, por ser el objeto de nuestro interés.

Definición 2.4.2. *Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X . Le llamaremos **lazo** basado en x_0 a un camino que inicia y termina en x_0 .*

Definición 2.4.3. *Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Decimos que f es **homotópica** a g si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$, donde I es el intervalo $[0, 1]$, tal que*

$$F(x, 0) = f(x) \quad y \quad F(x, 1) = g(x)$$

para cada $x \in X$. La aplicación F se conoce como **homotopía** entre f y g .

Si f y g son homotópicas lo denotaremos por $f \simeq g$, o bien $F : f \simeq g$ si queremos hacer explícita la homotopía.

Para lazos pediremos además que

$$F(0, t) = x_0 \quad y \quad F(1, t) = x_0$$

es decir, que la homotopía empiece y termine en el mismo punto, al que llamaremos punto base.

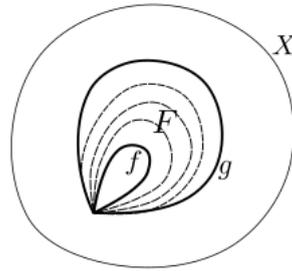


FIGURA 2.12: Homotopía entre los lazos f y g .

Lema 2.4.4. *La relación \simeq es una relación de equivalencia.*

La demostración se encuentra en [9].

Sea f un lazo, denotaremos por $[f]$ a su clase de equivalencia de homotopía.

Definición 2.4.5. *Sean f y g dos lazos de X basados en un punto x_0 . Definimos el producto $f * g$ como el lazo h dado por*

$$h = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observemos que h es un lazo con punto base x_0 , pues está bien definida y, por el lema del pegado [9], es continua. Notemos que h recorre el lazo f al doble de la velocidad usual y después el lazo g , también al doble de su velocidad usual.

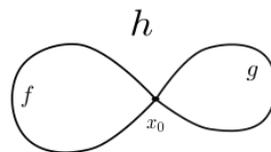


FIGURA 2.13

La operación $*$ será válida para cualquier par de lazos que tengan el mismo punto base, es fácil probar que induce una operación bien definida para clases de equivalencia [9], la cual está dada por

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Definición 2.4.6. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en el punto x_0 se denomina el grupo fundamental de X relativo al punto x_0 y se denota $\pi_1(X, x_0)$.

Mostraremos a continuación que $\pi_1(X, x_0)$ con la operación $*$ satisface los axiomas de grupo.

Teorema 2.4.7. El conjunto $\pi_1(X, x_0)$ con la operación $*$ es un grupo.

Demostración. Vamos a probar las siguientes propiedades.

1) Asociatividad:

Dados tres lazos f, g , y h en X y con punto base x_0 , tenemos que $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * h$.

En efecto, consideremos los siguientes productos de caminos, donde identificaremos 0 con 1 al final para obtener el lazo deseado.



Definimos cada producto de la siguiente manera

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ g(4t - 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ h(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

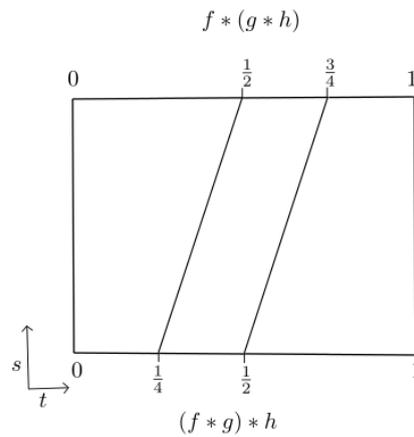
y

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(4t - 2) & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ h(4t - 3) & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definimos así los productos de caminos pues buscamos funciones sencillas (en este caso lineales) para componer con nuestros caminos f, g y h , de manera que nos permitan ir del nuevo intervalo donde se encuentra t , al intervalo $[0, 1]$. En $(f * g) * h$,

por ejemplo, tenemos $t \rightarrow 4t - 1$ que nos lleva de $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$.

Para construir una homotopía entre $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$ imitaremos este método. Comenzaremos por definir los intervalos en los que nos moveremos, para lo que el siguiente diagrama servirá de guía.



Fijemos en valor de s y veamos en el diagrama que f se moverá en el intervalo $[0, \frac{s+1}{4}]$, g en el intervalo $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$, y h en $[\frac{s+1}{4}, 1]$.

Así eligiendo funciones sencillas para componer con f , g , h , y que lleven cada uno de nuestros intervalos $[0, \frac{s+1}{4}]$, $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ y $[\frac{s+1}{4}, 1]$, al $[0, 1]$, obtenemos la homotopía $F : I \times I \rightarrow X$,

$$F(t, s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t - 1 - s) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

El lema del pegado nos permite ver que F es continua. Además, haciendo las sustituciones con $s = 0$ y $s = 1$ comprobamos que nos lleva de $(f * g) * h$ a $f * (g * h)$, manteniendo fijos los puntos de inicio y fin, por lo que F es la homotopía deseada, y concluimos las clases de equivalencia de caminos son asociativas.

2) Existencia de neutro:

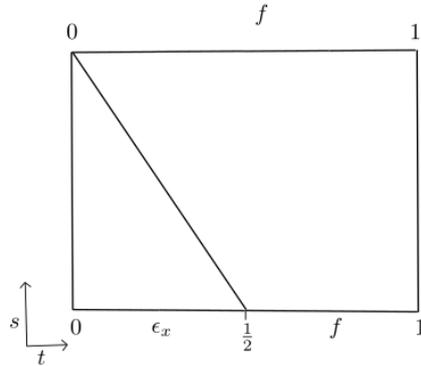
Sea $x_0 \in X$, denotemos por e_{x_0} al lazo constante que lleva todo I al punto x_0 . Si f es un lazo en X con punto base x_0 , entonces,

$$[e_{x_0}] * [f] = [f] \quad \text{y} \quad [f] * [e_{x_0}] = [f].$$

En efecto, definamos explícitamente el primer producto $[e_{x_0}] * [f] = [f]$,

$$(\epsilon_x * f)(t) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Siguiendo el procedimiento descrito en 1), observemos el siguiente diagrama donde, al fijar s , ϵ_x se mueve en el intervalo $[0, \frac{1-s}{2}]$ y f en $[\frac{1-s}{2}, 1]$



de donde $F : I \times I \rightarrow X$ dada por

$$F(t, s) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es la homotopía que buscamos.

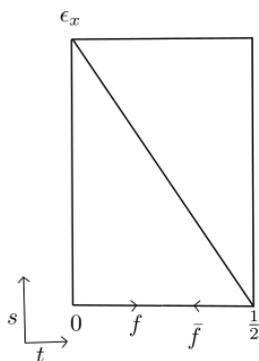
El caso $[f] * [e_{x_0}] = [f]$ será análogo.

3) Existencia de inversos:

Dado un lazo f con punto base x_0 , definiremos el **inverso** de f como el lazo $\bar{f}(s) = f(1 - s)$, entonces,

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{y} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_0}].$$

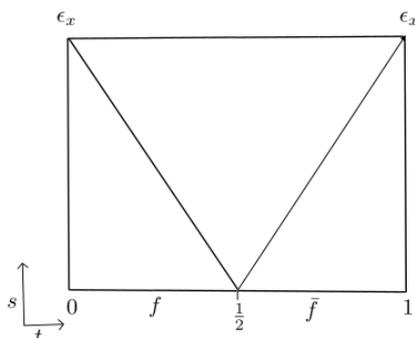
De nuevo haremos uso de un diagrama para obtener la homotopía que nos permite concluir que será, en efecto, el camino inverso.



En el diagrama tenemos a f y \bar{f} sobrepuestas y parametrizadas en la mitad de su tiempo original, por lo que su producto estará definido como

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(2 - 2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Al “desdoblar” el diagrama obtenemos



De donde f está definido en $[0, \frac{1-s}{2}]$ y \bar{f} en $[\frac{s+1}{2}, 1]$. Notemos que aquí nos moveremos en un tiempo proporcional a $(1 - s)$. Es decir, primero nos movemos por f en un tiempo $\frac{1-s}{2}$, luego esperamos en $f(1 - s)$ y regresamos por \bar{f} en la última mitad del tiempo $(1 - s)$.

Entonces definimos $F : I \times I \rightarrow X$ por

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(1 - s) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(2 - 2t) & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Claramente F es continua y, haciendo las sustituciones necesarias, obtenemos la homotopía deseada. Por tanto, las clases de equivalencia de caminos tendrán un elemento inverso.

Así hemos probado que las clases de homotopía asociadas a lazos basados en un punto $x_0 \in X$, con la operación $*$ forman un grupo. ■

Ahora, para ver que el grupo fundamental es, en efecto, un invariante de nudos, es necesario hacer algunas aclaraciones sobre los efectos de una aplicación continua en lazos.

Proposición 2.4.8. *Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre los espacios topológicos X y Y , entonces se cumple que:*

- I) *Si f es un lazo en X con punto base $x \in X$, entonces $(\varphi \circ f)$ es un lazo en Y con punto base $\varphi(x)$.*
- II) *Dados dos lazos f y g en X , si $f \simeq g$, entonces $(\varphi \circ f) \simeq (\varphi \circ g)$.*
- III) *Dados dos lazos f y g en X con mismo punto base, entonces $\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$.*

Demostración.

- I) Como $f : I \rightarrow X$ es un lazo, entonces es una aplicación continua que empieza y termina en x , por lo que $\varphi \circ f : I \rightarrow Y$ está bien definida, también es continua y empieza y termina en $\varphi(x)$.
- II) Si $f \simeq g$, entonces existe una homotopía $F : I \times I \rightarrow X$ que nos lleva de una a la otra, es decir, tal que $F(t, 0) = f(t)$ y $F(t, 1) = g(t)$. Ahora consideremos la homotopía $G : I \times I \rightarrow Y$ dada por $G(t, s) = \varphi \circ F(t, s)$ y observemos que es la homotopía deseada, pues $G(t, 0) = \varphi \circ f(t)$ y $G(t, 1) = \varphi \circ g(t)$, por tanto $(\varphi \circ f) \simeq (\varphi \circ g)$.
- III) Esta relación se obtiene directamente de la definición de la operación $*$. ■

Notemos que de la proposición anterior se sigue que si $[f] \in \pi_1(X, x)$, entonces $[\varphi \circ f] \in \pi_1(Y, \varphi(x))$, el cual también por la proposición anterior está bien definido, y por tanto podemos definir

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

como $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$.

Lema 2.4.9. *La aplicación $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Sean $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$, entonces

$$\varphi_*([f]*[g]) = \varphi_*([f*g]) = [\varphi \circ (f*g)] = [(\varphi \circ f)*(\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f]*[\varphi \circ g] = \varphi_*([f])\varphi_*([g]).$$

■

Definición 2.4.10. *Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces el homomorfismo $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ definido por $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$, se llama el **homomorfismo inducido** por φ .*

Mencionaremos algunas propiedades importantes del homomorfismo inducido.

Teorema 2.4.11. (1) *Si $\varphi : X \rightarrow Y$ y $\psi : Y \rightarrow Z$ son aplicaciones continuas, entonces*

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*.$$

(2) *Si $i : X \rightarrow X$ es la identidad y $x \in X$ es su punto base, entonces i_* es el homomorfismo identidad de $\pi(X, x)$.*

(3) *Si $\psi \simeq \varphi : X \rightarrow Y$, entonces $\psi_* = \varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$; es decir, los homomorfismos inducidos son el mismo.*

Demostración. Sea $[h] \in \pi_1(X, x)$, entonces:

$$(1) (\psi \circ \varphi)_*[h] = [(\psi \circ \varphi)(h)] = [\psi(\varphi(h))] = \psi_*[\varphi(h)] = \psi_* \circ \varphi_*[h].$$

$$(2) i_*[h] = [i(h)] = [h].$$

(3) Si $F : \psi \simeq \varphi$, entonces $G(t, s) = F(h(t), s)$ realiza la equivalencia $(\varphi \circ h) \simeq (\psi \circ h)$, por lo que $\varphi_*[h] = [\varphi \circ h] = [\psi \circ h] = \psi_*[h]$. ■

Corolario 2.4.12. *Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ya que φ es un homeomorfismo, existe $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ tal que $\varphi \circ \varphi^{-1} = i_Y$ y $\varphi^{-1} \circ \varphi = i_X$, entonces aplicando (1) y (2) del teorema anterior tenemos que $\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = i_{Y_*}$ y $\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = i_{X_*}$. ■

Con este corolario concluimos que, en efecto, el grupo fundamental es un invariante.

Claro está, aún tenemos la interrogante de cómo se calcula el grupo fundamental de un nudo, pues por lo general el grupo fundamental de un espacio es muy complicado de calcular, pero esto no deberá preocuparnos demasiado, ya que el cálculo del grupo fundamental de un nudo es sencillo gracias al Teorema 2.4.14, para el cual nos serán de utilidad las siguientes definiciones.

Definición 2.4.13. *Dada una colección de grupos $\{G_\alpha\}$, el **producto libre** $*_\alpha G_\alpha$ consiste de todas las palabras $g_1g_2\dots g_m$ de longitud finita arbitraria $m \geq 0$, donde cada letra $g_i \in G_{\alpha_i}$ y no es la identidad de G_{α_i} , además letras adyacentes g_i y g_{i+1} pertenecen a diferentes grupos G_α . Palabras que cumplan tales condiciones se llaman reducidas, la idea es que las palabras no-reducidas se pueden simplificar a palabras reducidas escribiendo letras adyacentes, que pertenecen al mismo G_{α_i} , como una sola letra y cancelando letras triviales. La operación en $*_\alpha G_\alpha$ es la yuxtaposición, $(g_1g_2\dots g_m)(h_1h_2\dots h_n) = g_1g_2\dots g_mh_1h_2\dots h_n$.*

Una propiedad básica del producto libre $*_\alpha G_\alpha$ es que dada cualquier colección de homomorfismos $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H_\alpha$ se extiende de manera única a un homomorfismo $\varphi : *_\alpha G_\alpha \rightarrow H$. Es decir $\varphi(g_1g_2\dots g_n)$ con $g_i \in G_{\alpha_i}$ es tal que $\varphi(g_1g_2\dots g_n) = \varphi_{\alpha_1}\dots\varphi_{\alpha_n}$.

Teorema 2.4.14 (Teorema de Van Kampen). *Si X es una unión de conjuntos abiertos A_α conexos por trayectorias, cada uno conteniendo al punto base $x_0 \in X$, y si cada intersección $A_\alpha \cap A_\beta$ es también conexa por trayectorias, entonces el homomorfismo $\phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$, donde ϕ es inducido por los homomorfismos inducidos por las inclusiones $i_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$, es sobreyectivo.*

*Si además cada intersección $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ es conexa por trayectorias, entonces el kernel de ϕ es el subgrupo normal N generado por todos los elementos de la forma $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, donde $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow A_\alpha$ es el homomorfismo inducido por la inclusión $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, y, por tanto, ϕ induce un isomorfismo $\pi_1(X) \approx *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$.*

Una demostración del teorema se puede encontrar en [7].

Definición 2.4.15. *Dado un nudo K , el **grupo fundamental de K** se define como el grupo fundamental de su complemento, es decir,*

$$\pi_1(K) := \pi_1(\mathbb{R}^3 - K).$$

Recordemos que, en un principio, introducimos el invariante del grupo fundamental para dar una demostración alternativa de que realmente existen nudos distintos al trivial, para lo cual usaremos el teorema siguiente.

Teorema 2.4.16 (Teorema del desanudamiento). *Un nudo manso $K \subset \mathbb{R}^3$ es trivial si y solo si $\pi_1(K)$ es cíclico infinito.*

La demostración de este teorema necesita resultados que aún no hemos abordado pero puede encontrarse en [17].

El teorema y la definición anteriores nos proporcionan un contexto más firme del grupo fundamental de un nudo, acercándonos un poco más a lo que buscamos dar respuesta, pero aún no sabemos *cómo* calcular el grupo de un nudo distinto al trivial. La realidad es que existen diferentes formas, aquí usaremos la **presentación de Wirtinger** donde podremos calcularlo directamente del diagrama de un nudo dado.

Empecemos por nombrar a los arcos del nudo K , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y por conveniencia asumiremos que el nudo K tiene una orientación que siga la numeración de los arcos. Dibujaremos una pequeña flecha x_i que pasa por debajo del arco α_i cuya dirección sigue la regla de la mano derecha con la orientación del arco (supongamos, por ejemplo, que la palma de la mano nunca debe voltear hacia nosotros y que el dedo índice sigue la dirección de la orientación, entonces, al colocar el pulgar en “ángulo recto” con él, tendremos la dirección de x_i , de igual manera podemos suponer que la palma siempre debe voltear hacia nosotros), estas pequeñas flechas representarán a los lazos en $\mathbb{R}^3 - K$ con los que calcularemos el grupo fundamental de K .

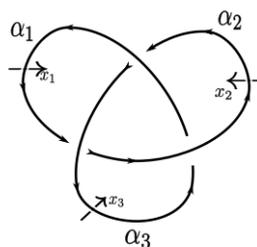


FIGURA 2.15: Nudo K orientado con α_i 's, y x_i 's indicados

De cualquier manera que sigamos la regla de la mano derecha, obtenemos una relación entre las x_i 's que se mantiene. La relación se puede dar de las dos maneras siguientes:



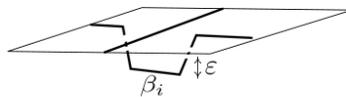
Denotemos por r_i cualquiera de las posibilidades que sea cierta. Habrá exactamente n relaciones en el nudo.

Teorema 2.4.17 (La presentación de Wirtinger). *El grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ está generado por las x_i y tiene presentación*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n).$$

Esto se sostiene incluso si alguna de las r_i es omitida.

Demostración. Coloquemos los arcos del nudo K sobre un plano, digamos $P = \{z = 0\}$. Para evitar autointersecciones en sus cruces, dejamos la parte superior del cruce sobre el mismo plano y bajamos la parte inferior una distancia ε , llamaremos a la parte inferior β_i . Así la unión de todos los a_i y β_i nos dará el nudo K .



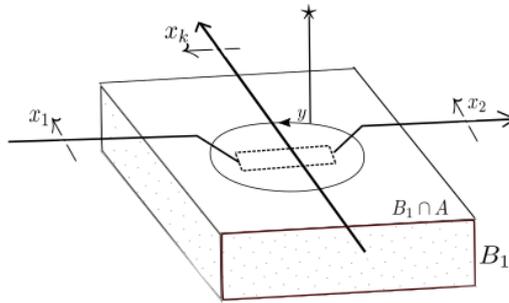
El punto $(0, 0, 1) = \star$ será el punto base, y cada lazo consistirá del triángulo orientado que empieza en \star luego sigue a la cola de x_i , viaja por la flecha hasta la cabeza, y termina en \star .

Con el fin de aplicar el teorema de Van Kampen partiremos $X = \mathbb{R}^3 - K$ en $n + 2$ piezas; $A, B_1, B_2, \dots, B_n, C$. Sea

$$A = \{z \geq -\varepsilon\} - K.$$

Notaremos que la frontera inferior de A es el plano $P' = \{z = -\varepsilon\}$ con los segmentos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ removidos. Sea B_i una caja rectangular sólida cuya tapa está en P' y rodea a β_i . Pero también removeremos β_i de B_i , y, para que B_i contenga a \star , uniremos un arco que vaya por la tapa hasta \star sin intersectarse con K . Podemos considerar a los B_i disjuntos uno de otro. Por último, sea

$$C = \{\text{la cerradura de lo que está debajo de } A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \text{ y un arco a } \star\}$$



Afirmamos que $\pi_1(A)$ es un grupo libre generado por x_1, x_2, \dots, x_n . Veremos ahora el efecto de unir B_1 a A ; B_1 es simplemente conexo y $B_1 \cap A$ es un rectángulo menos el segmento β_1 unión el arco \star , entonces $\pi_1(B_1 \cap A)$ es cíclico infinito, con generador y . Como se observa en la figura, cuando incluimos y en A , asumiendo que el cruce es del primer tipo, obtenemos la palabra $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_1$. Así, por Van Kampen, $\pi_1(A \cup B_1)$ tiene generadores x_1, \dots, x_n y una única relación $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_1 = 1$, la cual es equivalente a $x_k x_1 = x_2 x_k$, que será r_1 . Por lo que

$$\pi_1(A \cup B_1) = (x_1, \dots, x_n; r_1).$$

De manera similar, al unir B_2 tenemos que

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup B_2) = (x_1, \dots, x_n; r_1, r_2).$$

continuamos hasta unir B_n

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (x_1, \dots, x_n; r_1, r_2, \dots, r_n).$$

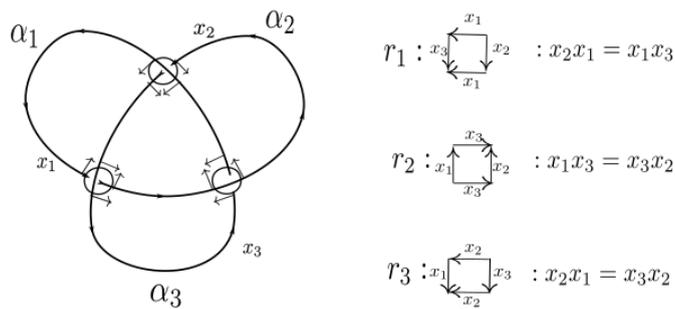
Finalmente, unir C a $A \cup B_1 \cup \dots, \cup B_n$ no afecta al grupo fundamental, pues tanto C como $C \cap (A \cup B_1 \cup \dots, \cup B_n)$ son simplemente conexos.

Demostraremos ahora que podemos remover alguna r_i , para esto, omitiremos r_n y trabajaremos en $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Sean $A' = A \cup \{\infty\}$ y $C' = C \cup B_n \cup \{\infty\}$. Es claro que $A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup C' = \mathbb{S}^3 - K$, $\pi_1(A') = \pi_1(A)$ y unir B_1, \dots, B_{n-1} tiene el mismo efecto que antes.

Ahora notemos que $C' \cap (A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$ es una 2-esfera menos un arco, por lo que es simplemente conexo, al igual que C' . Llegamos a la misma conclusión sin usar la relación r_n . ■

Ejemplo 2.4.18. *Calculemos el grupo fundamental del nudo trébol usando la presentación de Wirtinger.*

Empezamos por obtener la relación que se da en cada cruce.



Ahora recordando el teorema, podemos omitir alguna relación, digamos r_3 . Entonces, de la segunda relación tenemos $x_1 = x_3 x_2 x_3^{-1}$, y sustituyendo en r_1 ,

$$x_2 x_3 x_2 x_3^{-1} = x_3 x_2 x_3^{-1} x_3$$

Multiplicando por x_3 en ambos lados

$$x_2 x_3 x_2 = x_3 x_2 x_3$$

por lo que $\pi_1(\text{trébol}) = x_2, x_3 : x_2 x_3 x_2 = x_3 x_2 x_3$

Observación 2.4.19. *Aunque el cálculo del grupo fundamental de nudos es relativamente sencillo usando la presentación de Wirtinger, nos lleva al problema de distinguir cuándo dos presentaciones nos definen el mismo grupo.*

Proposición 2.4.20. *El grupo de nudo $\pi_1(K)$ es un invariante de la clase de equivalencia de K . Es decir, si K y K' son equivalentes, entonces $\pi_1(K)$ y $\pi_1(K')$ son isomorfos.*

Imaginemos que queremos verificar que un diagrama más complicado de un nudo trébol es, en efecto equivalente a este, para lo cual calculamos su presentación de Wirtinger, claramente las presentaciones deben ser isomorfas, pero demostrarlo puede llegar a ser muy complicado.

Más aún, si calculamos el grupo fundamental por vías distintas a la presentación de Wirtinger podemos obtener presentaciones isomorfas pero muy diferentes inclusive para el mismo diagrama. Veamos, por ejemplo, los nudos tóricos que están representados por una pareja de enteros relativos $\langle a, b \rangle$, cuyo grupo fundamental queda definido la siguiente manera,

$$\pi_1(\langle a, b \rangle) = \{x, y; x^a = y^b\}.$$

En particular, recordemos del primer capítulo, que el trébol es un nudo tórico generado por $\langle 2, 3 \rangle$, entonces su grupo fundamental también será $\pi_1(\langle 2, 3 \rangle) = \{x, y; x^2 = y^3\}$, una presentación muy distinta a la anterior.

Observación 2.4.21. *El grupo fundamental del nudo no es un invariante completo.*

Hemos calculado ya el grupo fundamental del nudo trébol derecho, haciendo los cálculos para el trébol izquierdo podemos ver que $\pi_1(\text{trébol derecho}) = \pi_1(\text{trébol izquierdo})$ pero recordemos que el trébol derecho no es isotópico al trébol izquierdo.

Otro ejemplo interesante de la observación anterior, donde además podemos ver cómo funciona el grupo fundamental bajo la suma conexa es el siguiente:

Sean K_1 y K_2 los nudos trébol izquierdo y derecho respectivamente, llamaremos a $K_1 \# K_2$ *nudo cuadrado* o “square knot” y a $K_1 \# K_1$ *nudo de tejedor* o “granny knot”.

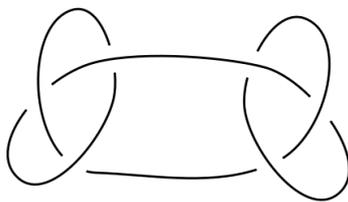


FIGURA 2.17: Nudo cuadrado.

Supongamos que hay una bola que separa a K_1 de K_2 (y al mismo tiempo los cierra) y observemos que el complemento de cada uno es equivalente al complemento del trébol izquierdo y derecho respectivamente.



Ahora bien, es claro que la unión de estos complementos es equivalente al complemento del nudo cuadrado y, como ya conocemos el grupo fundamental de los anteriores, podemos usar el Teorema de Van Kampen para ver que

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{nudo cuadrado}) &= (x, y, w, z; xyx = yxy, wzw = zwz, x = w) \\ &= (x, y, z; xyx = yxy, xzx = zxz). \end{aligned}$$

Usando un procedimiento análogo para el nudo de tejedor, obtenemos que

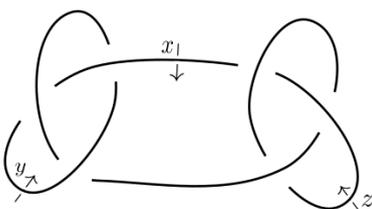


FIGURA 2.19: Nudo de tejedor.

$$\pi_1(\text{nudo de tejedor}) = (x, y, z; xyx = yxy, xzx = zxz).$$

De nuevo sucede que obtenemos el mismo grupo fundamental para nudos no isotópicos [17].

Lo mencionado en las dos observaciones anteriores nos lleva a concluir que, aunque el grupo fundamental es un buen invariante de nudos, es conveniente estudiar invariantes de otros tipos, como el **polinomio de Jones** que veremos más adelante.

3 | Invariantes polinomiales

3.1. Polinomio de Alexander

Empezaremos esta sección con el primer invariante polinomial asociado a nudos y enlaces. Introducido en 1928 por J.W. Alexander, fue un punto crucial para la teoría de nudos, pues además de ser de las primeras relaciones descubiertas entre la teoría de nudos y el álgebra, tiene una prueba sencilla, se calcula de manera relativamente directa y permite distinguir nudos de enlaces efectivamente. A continuación, veremos su cálculo y la prueba de que es invariante bajo movimientos de Reidmester.

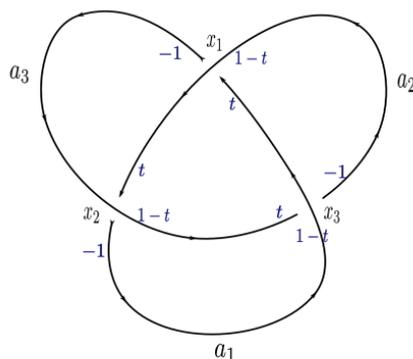
Sea K un nudo, para obtener su polinomio de Alexander es necesario nombrar los cruces del diagrama de K , digamos, (x_1, x_2, \dots, x_n) y los arcos (a_1, a_2, \dots, a_n) , recordemos que el arco de un nudo es el arco que se encuentra, al recorrer el nudo, desde la primera vez que se pasa por debajo en un cruce hasta que volvemos a pasar por debajo en otro cruce, entonces en cada cruce empieza un arco y otro termina, por esto el número de cruces y de arcos es el mismo.

Asignaremos además una orientación al nudo, así como índices a cada uno de los arcos que lo forman, es decir, al que comienza ahí, al que termina y al que pasa por arriba de ambos. Para esto empezaremos a recorrer el nudo en la orientación elegida y al llegar a la parte superior de un cruce asignaremos $1 - t$ a ese arco, t al arco que quede a la izquierda y -1 al arco de la derecha.

Haremos una matriz con los índices de los arcos como columnas, los índices de los vértices como renglones y las etiquetas asignadas como entradas de manera que la ij -ésima entrada será la etiqueta del cruce x_i con el arco a_j , si el arco a_j no pasa por x_i la entrada

será 0. Removeremos una columna y un renglón de manera arbitraria y el determinante de la matriz que nos queda será el polinomio de Alexander, que denotaremos $\Delta(t)$. Veremos cómo calcularlo con ayuda de algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.1.1. *Polinomio de Alexander para el nudo trébol.*



Considerando cada cruce del nudo obtenemos la siguiente matriz

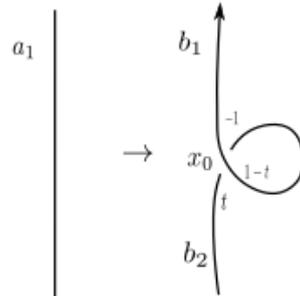
$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & \begin{bmatrix} t & 1-t & -1 \end{bmatrix} \\ x_2 & \begin{bmatrix} -1 & t & 1-t \end{bmatrix} \\ x_3 & \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t \end{bmatrix} \end{matrix}$$

elegimos quitar el tercer renglón y la tercera columna, entonces,

$$\Delta_T(t) = \det \begin{bmatrix} t & 1-t \\ -1 & t \end{bmatrix} = t^2 - (-1)(1-t) = t^2 - t + 1.$$

Ejemplo 3.1.2. *Polinomio de Alexander para el nudo ocho.*

Demostración. Consideremos que en cada movimiento habrá diferentes casos, dependiendo de la orientación y la imagen espejo del movimiento, pero bastará con demostrar uno de ellos pues los otros serán análogos.

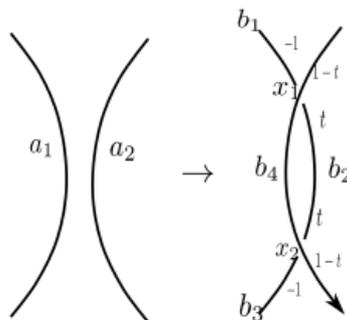


Obtenemos un nuevo cruce x_0 y del arco a_1 nacen dos nuevos arcos b_1 y b_2 , así

$$\begin{array}{c}
 a_1 \\
 x_1 \begin{bmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ Q \\ \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 b_1 \quad b_2 \\
 x_0 \begin{bmatrix} (1-t) - 1 & t & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & Q \\ * & * & * & & \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Podemos eliminar el renglón x_1 de ambas matrices, la columna a_1 de la primera y la columna b_2 de la segunda. Así, el polinomio de Alexander de la primera matriz será igual a $\det[Q]$, mientras que el polinomio de la segunda será igual a $\det(-t)[Q]$ pero $-t$ es un factor que podemos remover cuando normalizamos el polinomio, por tanto el polinomio de Alexander se mantiene invariante bajo el primer movimiento.

Consideremos el segundo movimiento de Reidemeister.



Ahora obtenemos dos nuevos cruces y el arco a_1 se parte en tres arcos b_1 , b_2 , y b_3 , mientras que a_2 no se corta pero para facilitar la lectura de la nueva matriz lo renombraremos b_4 .

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Q \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & \\ -1 & t & 0 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & -1 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & 0 & b_{13} & a_{12} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & Q \\ b_{m1} & 0 & b_{m3} & a_{m2} & & & \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior agregamos los nuevos cruces y cambiamos las columnas por los nuevos arcos. Sin embargo, ahora no podemos simplemente eliminar el mismo renglón en ambas y después elegir una columna en la segunda. Pero al observar la nueva matriz, es notable que si no tomamos en cuenta los primeros dos renglones y las primeras tres columnas tenemos una matriz casi igual a la original excepto por la primera columna, pero esa columna es b_3 que, sumada con b_1 nos regresa a a_1 .

Entonces tenemos una situación similar a la del tipo anterior (donde teníamos a la matriz Q dentro de la nueva matriz) y para que sea más similar aún y evitar problemas con los cálculos, haremos las entradas que están sobre nuestra matriz original iguales a cero por medio de combinaciones lineales con la columna b_2 .

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 + b_1 + t^{-1}b_2 & b_4 + (1 - t^{-1})b_2 & & & \\ -1 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & 0 & a_{11} & a_{12} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & Q \\ b_{m1} & 0 & a_{m1} & a_{m2} & & & \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz anterior es una matriz por bloques del tipo

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & t \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots & Q \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix},$$

y recordemos que para este tipo de matrices tenemos

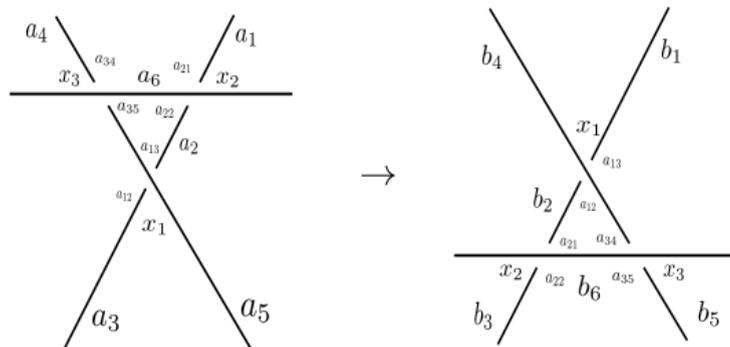
$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \det A \det C.$$

Notemos también que el bloque C es la matriz obtenida antes de efectuar el segundo movimiento, entonces elijamos la columna y el renglón que serán eliminados en la nueva matriz de forma que su determinante coincida con el de la matriz original, llamemosle P . De aquí que

$$P' = P \det A = (-t)P,$$

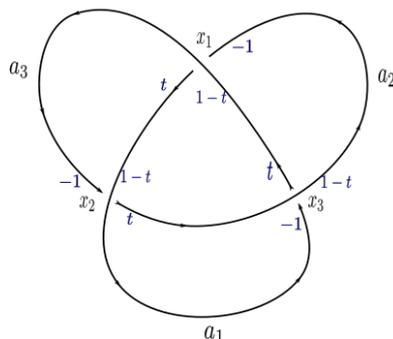
donde de nuevo podemos eliminar el factor $-t$ y entonces los polinomios normalizados serán iguales.

Por último, consideremos el tercer movimiento de Reidemeister.



En este caso podremos generalizar un poco más y evitando usar una orientación específica, asignaremos $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{34}$ y a_{35} para denotar los cruces que quedan por debajo, es decir cada uno será -1 ó t una vez añadida la orientación. Al hacer el tercer movimiento obtenemos una rotación en los índices de los cruces y la misma cantidad de arcos pero con nuevos índices.

Recurramos de nuevo al trébol. Hemos calculado ya el polinomio de Alexander del trébol izquierdo, calculemos ahora el polinomio del trébol derecho para comprobar que, en efecto, resultan ser el mismo.



Considerando cada cruce del nudo obtenemos la matriz

$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & \begin{bmatrix} t & -1 & 1-t \end{bmatrix} \\ x_2 & \begin{bmatrix} 1-t & t & -1 \end{bmatrix} \\ x_3 & \begin{bmatrix} -1 & 1-t & t \end{bmatrix} \end{matrix}$$

de nuevo elegimos quitar el tercer renglón y la tercera columna, entonces,

$$\Delta_{T'}(t) = \det \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1-t & t \end{bmatrix} = t^2 - (-1)(1-t) = t^2 - t + 1.$$

Obteniendo así, exactamente el mismo polinomio de Alexander que el trébol izquierdo aunque no sean isotópicos.

3.2. El polinomio del corchete de Kauffman

Para calcular el polinomio del corchete de Kauffman de un nudo dado K , nos enfocaremos en los cruces de algún diagrama de K con el fin de deshacerlos o suavizarlos bajo el siguiente procedimiento, pero antes de describirlo, debemos aclarar que en lo que resta de esta sección consideraremos diagramas que sean idénticos, salvo por una pequeña región

que encerraremos en un círculo, usualmente será un cruce.

Un cruce L de un diagrama de un enlace puede deshacerse o suavizarse por medio de dos métodos a los que llamaremos A y B . El método A nos lleva del diagrama original al diagrama L_A , mientras que el método B nos lleva al diagrama L_B de la Figura 3.1.

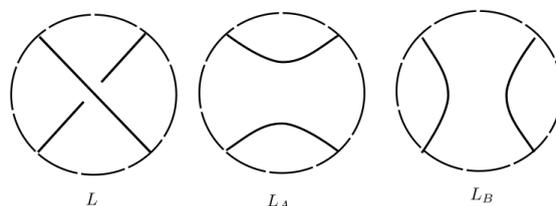


FIGURA 3.1

El cruce también puede estar invertido, como se ve en L' .

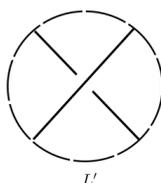


FIGURA 3.2

Definición 3.2.1. El polinomio del corchete de Kauffman de un diagrama de enlace, denotado $[L]$, es el único polinomio de una variable que satisface los siguientes axiomas:

- 1) $[L] = a[L_A] + a^{-1}[L_B]$.
- 2) $[L \cup O] = (a^2 - a^{-2})[L]$, donde O es el diagrama sin cruces del nudo trivial.
- 3) $[O] = 1$.

Donde a es la variable independiente de $[L]$.

Teorema 3.2.2. Existe un único polinomio que satisface los axiomas del corchete del Kauffman.

Demostración. Para mostrar esto definiremos el polinomio explícitamente.

Sea L el diagrama de un enlace con n cruces, le llamaremos *estado de L* al diagrama que

obtenemos cada vez que suavizamos uno de los cruces de L usando el método A o B , por lo que un diagrama L tiene 2^n estados. Sea $\alpha(s)$ el número de cruces suavizados por el método A en un estado s , análogamente, sea $\beta(s)$ el número de cruces suavizados por el método B en el estado s y sea $\gamma(s)$ el número de nudos triviales disjuntos en s . El polinomio del corchete considera todas las posibles formas de suavizar cada cruce, por lo que nuestra definición explícita del polinomio tomará la suma de todos los estados de L . Es claro que llegamos a cada estado suavizando n cruces, ya sea por el método A o el B . Por el primer axioma de la definición anterior podemos ver que cada vez que suavizamos un cruce con el método A el término que representa al estado en ese momento gana un coeficiente a en la suma y, de la misma manera, cuando suavizamos un cruce con el método B , el término gana un coeficiente a^{-1} . Así un estado s contribuye $a^{\alpha(s)-\beta(s)}[s]$. Ahora bien, considerando los Axiomas 2) y 3) y el hecho de que no habrá cruces en los estados y cada uno consistirá solo de $\gamma(s)$ nudos triviales disjuntos, podemos concluir que $[s] = (-a - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$. De aquí que cada estado s provee el término $a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$ a la suma.

Considerando la suma de todos los estados obtenemos

$$[L] = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a - a^{-2})^{\gamma(s)-1}. \quad (3.1)$$

Ahora solo debemos verificar que el polinomio satisface los tres axiomas.

Consideremos un diagrama L y alguno de sus cruces en particular. Para verificar el primer axioma denotemos al estado de L con el cruce elegido suavizado por el método A por s_A , y s_B al estado con el cruce suavizado por el método B . Ya que estas son nuestras únicas dos opciones para suavizar un cruce, tenemos que $s_A + s_B = s$.

Consideremos la ecuación (3.1), de donde

$$[L_A] = \sum_{s_A} a^{\alpha(s_A)-\beta(s_A)-1}(-a - a^{-2})^{\gamma(s_A)-1}$$

y

$$[L_B] = \sum_{s_B} a^{\alpha(s_B)-\beta(s_B)+1}(-a - a^{-2})^{\gamma(s_B)-1}.$$

Entonces,

$$a[L_A] + a^{-1}[L_B] = \sum_{s_A} a^{\alpha(s_A)-\beta(s_A)}(-a - a^{-2})^{\gamma(s_A)-1} + \sum_{s_B} a^{\alpha(s_B)-\beta(s_B)}(-a - a^{-2})^{\gamma(s_B)-1}$$

pero, como $s_A + s_B = s$,

$$a[L_A] + a^{-1}[L_B] = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a - a^{-2})^{\gamma(s)-1} = [L].$$

Por lo que se cumple el Axioma 1).

Para verificar el Axioma 2), veamos que agregar un nudo trivial desanudado al diagrama L resulta equivalente a agregar un nudo trivial desanudado a cada estado de L , entonces obtenemos

$$[L \cup O] = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)}$$

que, al distribuir, es igual a $(a^2 - a^{-2})[L]$, por lo que este axioma también se satisface.

Por último $[O] = (a^2 - a^{-2})^0 = 1$, así que el tercer axioma también se satisface.

Creamos este polinomio por medio de los axiomas, sin elementos a elegir, y además los satisface, por lo que es único. ■

Teorema 3.2.3. *El polinomio del corchete de Kauffman es invariante bajo el segundo y tercer movimiento de Reidemeister, pero no el primero.*

Demostración. Consideremos un diagrama con los siguientes cruces



Cuando suavizamos el cruce de arriba, por el primer axioma, obtenemos:

$$[\text{Cruce de arriba}] = a[\text{Cruce de arriba suavizado}] + a^{-1}[\text{Cruce de abajo suavizado}]$$

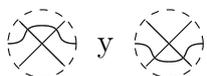
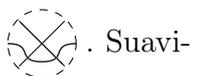
y cuando suavizamos el cruce de abajo

$$= (a^2 + a^{-2})[\text{Cruce de arriba suavizado}] + [\text{Cruce de arriba suavizado}] + [\text{Cruce de abajo suavizado}].$$

Ahora, aplicando el axioma 3, veamos que esto es igual a:

$$((a^2 + a^{-2}) - (a^2 + a^{-2}))[\text{Cruce de arriba suavizado}] + [\text{Cruce de arriba suavizado}] = [\text{Cruce de arriba suavizado}].$$

Por lo que este polinomio es invariante bajo el segundo movimiento de Reidemeister.

Para verificar el tercer movimiento, consideremos los diagramas  y . Suavizando el cruce del centro nos queda

$$[\text{Diagram 1}] = a[\text{Diagram 2}] + a^{-1}[\text{Diagram 3}]$$

y

$$[\text{Diagram 4}] = a[\text{Diagram 5}] + a^{-1}[\text{Diagram 6}].$$

Observemos que, bajo el segundo movimiento,

$$[\text{Diagram 7}] = [\text{Diagram 8}] \text{ y } [\text{Diagram 9}] = [\text{Diagram 10}].$$

Por lo que

$$[\text{Diagram 11}] = [\text{Diagram 12}].$$

Recordemos que el primer movimiento nos agrega un cruce en el diagrama, lo que, de acuerdo al primer axioma, cambiará el polinomio $[L]$ a $p(-a^2 - a^{-2})[L] + p^{-1}[L]$, con $p = \pm 1$ dependiendo de la orientación del nuevo cruce. Entonces el diagrama cambiará de $[L]$ a $(-a^{\pm 3})[L]$. ■

Ahora, para que este polinomio sea realmente un invariante, necesitamos una manera de tomar en cuenta los nuevos cruces creados por el primer movimiento. Lo haremos asignando una orientación al diagrama.

Definición 3.2.4. A cada cruce orientado le asignaremos un signo positivo o negativo, como se muestra en la Figura 1.9. Sea w_+ el número de cruces positivos y w_- el número de cruces negativos. El **número de torsiones** (writhe number) de un diagrama D , denotado $w(D)$, está definido por la ecuación $w(D) = w_+ - w_-$.

Definición 3.2.5. Definimos el polinomio normalizado del corchete de un diagrama D como

$$X(D) = (-a^3)^{-w(D)}[|D|],$$

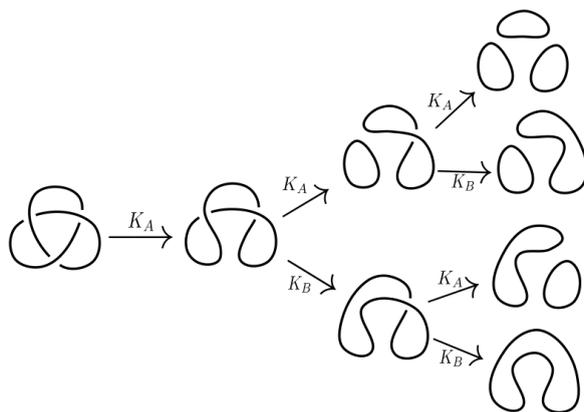
donde $|D|$ es el diagrama sin orientación correspondiente a D .

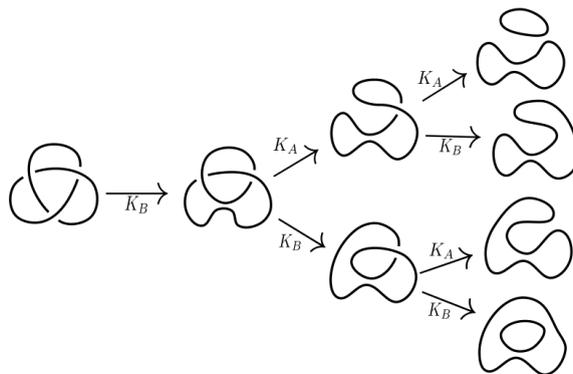
Teorema 3.2.6. El corchete normalizado es un invariante de diagramas de enlaces orientados.

Demostración. Ya que el corchete es invariante bajo el segundo y tercer movimiento de Reidemeister y ninguno cambia el número de torsión, el corchete normalizado es invariante bajo los mismos. Ahora bien, vimos que el primer movimiento multiplica al polinomio por un factor $-a^{\pm 3}$, pero también cambia el número de torsión por ± 1 , lo que cancela al factor anterior. Así el corchete normalizado es invariante bajo los tres movimientos de Reidemeister, y por tanto es un invariante de nudos. ■

Ejemplo 3.2.7. Calculemos el corchete normalizado de Kauffman del nudo trébol izquierdo.

En el siguiente diagrama indicaremos con K_A cada vez que suavicemos algún cruce por el método A , y K_B cada vez que suavicemos por el método B . Así, nos resultará muy sencillo contabilizar los pasos que tomamos para llegar a cada estado y usar la ecuación (3.1) de la demostración de unicidad en el Teorema 3.2.2.





Entonces para el primer estado, llamémosle L_1 , tenemos que

$$[L_1] = a^3(-a^2 - a^{-2})^2,$$

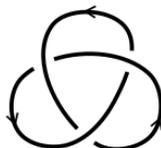
sustituyendo los demás estados

$$\begin{aligned} [L_2] &= a(-a^2 - a^{-2}) & [L_3] &= a(-a^2 - a^{-2}) \\ [L_4] &= a^{-1} & [L_5] &= a(-a^2 - a^{-2}) \\ [L_6] &= a^{-1} & [L_7] &= a^{-1} \\ [L_8] &= a^{-3}(-a^2 - a^{-2}) \end{aligned}$$

al sumarlos

$$\begin{aligned} [L] &= a^3(-a^2 - a^{-2})^2 + 3a(-a^2 - a^{-2}) + 3a^{-1} + a^{-3}(-a^2 - a^{-2}) \\ &= a^7 - a^3 - a^{-5}. \end{aligned}$$

Recordemos que aún no hemos considerado la orientación del nudo, que es lo que nos permite que sea un invariante. Entonces, sea L el nudo trébol izquierdo orientado en el sentido contrario a las manecillas del reloj.



Notemos que todos sus cruces son negativos, por lo que $W(L) = -3$.

Así, el corchete normalizado de Kauffman de nuestro nudo es

$$\begin{aligned} X(L) &= (-a^3)^3(a^7 - a^3 - a^{-5}) \\ &= -a^{16} + a^{12} + a^4. \end{aligned}$$

Definición 3.2.8. Una *tripleta de Conway* es un conjunto de tres nudos que difieren en un cruce, como se muestra en la figura siguiente.



FIGURA 3.3: Tripletta de Conway

Una *relación de skein* es una expresión que relaciona los tres términos diferentes de una tripletta de Conway.

El polinomio del corchete normalizado satisface una relación de skein que nos ayudará en su cálculo. Consideremos una tripletta de Conway, sin pérdida de generalidad podemos asumir que el número torsiones fuera del cruce es 0, lo que nos permite obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} w(\text{diagrama 1}) &= 1 \\ w(\text{diagrama 2}) &= -1 \\ w(\text{diagrama 3}) &= 0. \end{aligned}$$

Sean K_A y K_B los cruces de la tripletta de Conway suavizados por los métodos A y B respectivamente. Entonces, el corchete normalizado de cada uno de acuerdo a nuestros tres axiomas,

$$X(\text{diagrama 1}) = (a^{-3})(-a[K_A] - a^{-1}[K_B]) = -a^{-2}[K_A] - a^{-4}[K_B]$$

$$X(\text{diagrama 2}) = (a^3)(-a[K_A] - a^{-1}[K_B]) = -a^2[K_A] - a^4[K_B]$$

$$X(\text{diagrama 3}) = [K_A].$$

Pero podemos escribir los primeros dos como

$$a^4 X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = -a^2 [K_A] - [K_B]$$

$$a^{-4} X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = -a^{-2} [K_A] - [K_B]$$

y, tomando en cuenta su diferencia obtenemos

$$a^4 X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) - a^{-4} X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = (a^{-2} - a^2) [K_A].$$

Por lo que nuestra relación es

$$a^4 X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) - a^{-4} X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = (a^{-2} - a^2) X \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right).$$

3.3. El polinomio de Jones

Por casi cincuenta años se creyó que el polinomio de Alexander era el único invariante polinomial de nudos, por lo que, cuando Vaughan Jones creó el suyo, por medio de álgebras de Von Neumann, fue necesario demostrar que no era en realidad una nueva técnica para calcular su predecesor. Pidió consejo a Joan Birman, y en 1984 se reunieron y usaron la quiralidad del nudo trébol para obtener un indudable contraejemplo [4], como veremos más adelante.

El segundo invariante polinomial tuvo un impacto inmenso en la sociedad matemática, pues abrió nuevas visiones y se comenzó a buscar nuevos invariantes polinomiales por métodos principalmente combinatorios y algebraicos. El polinomio del corchete de Kauffman fue uno de los resultados de esta búsqueda, aunque llegó después en el tiempo, hemos decidido mencionarlo primero en este trabajo, pues por su simple construcción resulta sumamente práctico, además de que normalizado, y bajo el cambio de variable mencionado, es equivalente al poderoso polinomio de Jones.

Definición 3.3.1. *El polinomio resultante al realizar el cambio de variable $a = q^{-1/4}$ en el corchete polinomial normalizado se denomina **polinomio de Jones**, denotado por $V(K)$.*

Entonces nuestra relación de skein para el polinomio de Jones es la siguiente,

$$q^{-1}V(\text{diagrama de cruce positivo}) - qV(\text{diagrama de cruce negativo}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{diagrama de arco izquierdo})V(\text{diagrama de arco derecho}).$$

Observemos que es más sencilla de calcular con este cambio de variable y que esto es sumamente conveniente, pues es nuestra principal forma de obtener el polinomio.

Además el polinomio de Jones hereda la propiedad de ser invariante de enlaces orientados directamente del polinomio del corchete normalizado, pero en general, no es independiente de orientación. La excepción a esto son los enlaces de solo un elemento, es decir, los nudos.

Teorema 3.3.2. *El polinomio de Jones del diagrama de un nudo es invariante bajo cambios de orientación.*

Demostración. La única parte del polinomio que se ve afectada por la orientación es el número de torsiones, pero un nudo está formado por solo una componente así que cambiar la orientación del nudo provoca que se invierta la orientación de ambos arcos en cada cruce. Basta con rotar el cruce para ver que si era positivo se mantendrá positivo y lo mismo para cruces negativos. ■

Es importante resaltar que no sucede lo mismo con enlaces, pues es posible tener cambios de orientación que no necesariamente inviertan la orientación de cada cruce.

Observación 3.3.3. *El nudo trivial tiene polinomio de Jones trivial, es decir, $V(O) = 1$.*

Ejemplo 3.3.4. *El polinomio de Jones del nudo trébol izquierdo orientado del Ejemplo 3.2.7 es $-q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}$.*

Recordemos que los invariantes que ya hemos revisado no nos permiten distinguir un nudo de su imagen espejo aunque éstos no sean isotópicos, esto cambia con el polinomio de Jones y la razón principal de su particular relevancia.

Teorema 3.3.5. *El polinomio de Jones de la imagen espejo de un nudo K , es el polinomio de Jones de K , sustituyendo q por q^{-1} .*

Demostración. Sea K' la imagen espejo de K . En K' cada cruce L de K es remplazado por un cruce L' , véase las Figuras 3.1 y 3.2. Para suavizar el cruce, lo rotamos (y todo el diagrama del nudo) 90 grados, haciendo así que el cruce L' se vea como el original L . Ahora podemos suavizar el cruce de manera usual, y una vez suavizado rotamos para obtener el ángulo original. Así, un cruce suavizado por el método A se verá como L_B y viceversa.

Los estados del diagrama son los mismos, pero ya que los métodos para llegar a ellos fueron intercambiados, los números para cada tipo de cruce estarán cambiados también, por lo que el polinomio del corchete de Kauffman de K será el mismo que el de K' pero con a y a^{-1} intercambiadas. De la misma manera, la imagen espejo de un nudo cambia el signo del número de torsiones, entonces el término de normalización cambia a $(-a^3)^{-w(K')} = (-a^3)^{w(K)} = (-a^{-3})^{-w(K)}$.

Al sustituir a^4 por q obtenemos que el polinomio de Jones de K' es el polinomio de Jones de K , reemplazando q por q^{-1} . ■

Esto implica que el polinomio de Jones del nudo trébol derecho es $-q^4 + q^3 + q$.

Teorema 3.3.6. Sean K_1 y K_2 dos nudos, entonces $V(K_1 \# K_2) = V(K_1)V(K_2)$.

Demostración. Al calcular el polinomio de Jones de $K_1 \# K_2$ se sigue el mismo procedimiento que al calcular el polinomio de K_1 , pero sucederá que, cuando K_1 quede reducido al nudo trivial, aún nos quedará K_2 , por lo que el polinomio de Jones de $K_1 \# K_2$ es el polinomio de K_1 con un coeficiente $V(K_2)$ en cada elemento. Factorizando resulta en $V(K_1 \# K_2)$. ■

Hoy en día se han descubierto muchos más invariantes polinomiales, uno de los más poderosos es el polinomio de HOMFLY, llamado así por las iniciales que quienes lo descubrieron casi simultáneamente en 1985; Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish, Yetter [18]. Aquí veremos su definición pero no mostraremos su existencia como invariante de enlaces orientados [4], como lo hemos hecho con polinomios anteriores, pues necesitaremos herramientas que van más allá de los alcances de esta tesis.

Definición 3.3.7. El polinomio de HOMFLY, P , de un diagrama de enlace L está definido como el polinomio en variables x, y y z , que satisface los siguientes axiomas:

$$a) xP(\text{diagrama}) + yP(\text{diagrama}) + zP(\text{diagrama}) = 0.$$

b) $P(L) = 1$ si L es el nudo trivial.

4 | Una aplicación de la teoría de nudos

Hemos mencionado ya que a partir de que se descubre el polinomio de Jones hay un resurgimiento en la búsqueda de invariantes polinomiales. Es así como en los últimos casi cuarenta años se ha avanzado inmensamente en la teoría de nudos, pero no solo por medio de estos invariantes, hay resultados que nos demuestran la relación con otras áreas, como topología o teoría de números, e incluso con áreas aparentemente ajenas a las matemáticas, como la química o la biología.

La aplicación en la que nos enfocaremos se encuentra relacionada con la segunda, ya que desde la década de los 80's se ha venido dando una aproximación al estudio del efecto de ciertas enzimas en el ADN desde el punto de vista topológico, esto porque la estructura de sus moléculas influye en cómo actúan en la naturaleza.

Lo estudiamos con teoría de nudos, en particular, pues una molécula de ADN es mucho más larga que el núcleo de la célula donde se encuentra, por lo que tiene que estar enredada y, también en la década de los 80, algunos biólogos moleculares se dieron cuenta de que, además de la conocida molécula lineal de ADN, esta podía tomar una forma cerrada, formando así una molécula de ADN anudada. Más aún, la manera como se enreda, se tuerce o se anuda, interfiere directamente con los procesos vitales de replicación, transcripción y recombinación del ADN. A su vez, al realizar estos procesos, las enzimas (topoisomerasas) lo manipulan y cambian la forma en que este está colocado. Por ejemplo, una molécula que tiene forma de un círculo sin anudar se puede convertir en un nudo trébol.

Desafortunadamente, aún no existen métodos para observar a las enzimas en acción, solo podemos ver las moléculas antes y después de que la enzima actúe, con esa información se busca, por medio de la teoría de nudos, deducir el proceso que hubo.

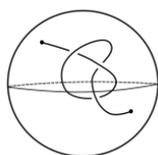
Para observar el efecto de la acción de una enzima, se empieza con una gran cantidad de moléculas circulares, no anudadas, no enlazadas. Luego se hace reaccionar una concentración alta de enzima purificada con estas moléculas. Finalmente se observan las moléculas que quedan después de la reacción con el método que describimos arriba. Las moléculas antes de la reacción se llaman el sustrato, después de la reacción se llaman el producto.

Uno de los primeros matemáticos que pensó en aplicar la teoría de nudos en la biología fue De Witt Sumners. En uno de sus trabajos Sumners explica que, después de ver los nudos que resultaban en los experimentos con algunas enzimas, pensó que era posible aplicar teoría de nudos para entender mejor su forma de actuar en el ADN [10]. Así, Ernst y Sumners [6] proponen un modelo, llamado Modelo de Ovillos, que explica cómo es la acción de la enzima Tn3-resolvasa. Este modelo es precisamente el que nos interesa exponer.

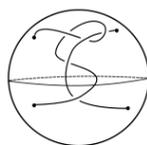
4.1. Ovillos

El modelo hace uso de objetos matemáticos muy útiles llamados ovillos o marañas. En efecto, son tan útiles que resultaron indispensables en el capítulo anterior, donde nos encontrábamos en un contexto totalmente distinto.

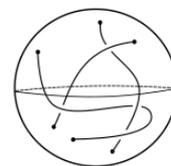
Para construir un n -ovillo colocaremos $2n$ puntos en \mathbb{S}^2 y uniremos estos puntos por n curvas tales que no se intersecan entre si y están contenidas en la bola \mathbb{B}^3 cuya frontera es la esfera donde se encuentran los $2n$ puntos.



(A) 1-Ovillo.



(B) 2-Ovillo.



(C) 3-Ovillo.

Al igual que con nudos y enlaces, diremos que dos n -ovillos T_1 y T_2 son *equivalentes* si existe una isotopía de \mathbb{B}^3 en sí misma que mantenga fija su frontera y nos lleve de T_1 a T_2 . Es decir, si podemos mover las curvas de uno hasta llegar a la forma del otro, sin romperlas y sin mover sus $2n$ puntos.

Para simplificar nuestro trabajo y, de nuevo, al igual que con nudos y enlaces, trabajaremos con lo que se conoce como *diagramas de ovillo* asociado a T , el cual es una proyección regular de nuestro ovillo T al plano YZ . También aquí podremos hacer uso del Teorema de Reidemeister 1.2.2, por lo que dos ovillos son equivalentes si, y solo si, podemos pasar del diagrama de uno al diagrama del otro por medio de una sucesión finita de movidas de Reidemeister.



FIGURA 4.2: Movimientos de Reidemeister en ovillos.

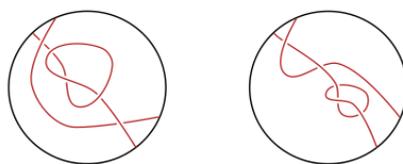


FIGURA 4.3: Diagramas de ovillos equivalentes.

De aquí en adelante nos restringiremos al caso de 2-ovillos, por lo que solo nos referiremos a ellos solo como ovillos y los trabajaremos por medio de sus diagramas.

Veamos ahora algunas operaciones que podemos hacer con nuestros ovillos. Empezaremos por fijar cuatro puntos en la esfera \mathbb{S}^2 , nombrados acorde a los puntos cardinales NE, NO, SE, SO, como se muestra en la Figura 4.4.

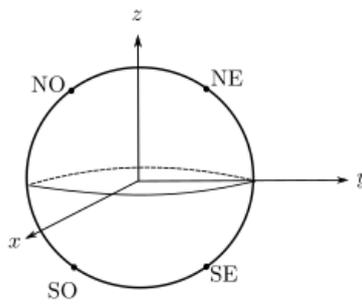
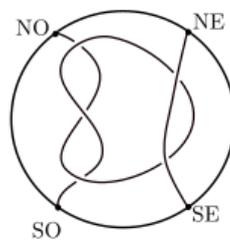
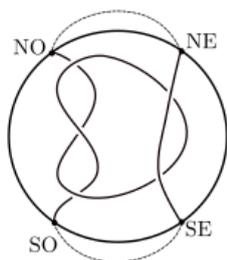


FIGURA 4.4

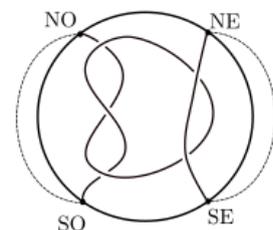
Uniendo estos cuatro puntos por medio de dos curvas contenidas en \mathbb{B}^3 podemos formar un ovillo.



Así mismo, es posible hacer otras construcciones dado este ovillo. Por ejemplo, el nudo (o enlace) obtenido al unir los puntos NO y NE, SO y SE por curvas simples fuera de \mathbb{B}^3 , es llamado el *numerador* del ovillo y es denotado por $N(T)$. Obtenemos el *denominador* del ovillo, $D(T)$, de manera similar, esto es, al unir los puntos NO y SO, NE y SE por curvas simples fuera de \mathbb{B}^3 .



(A) Numerador.



(B) Denominador.

FIGURA 4.5

Estas operaciones nos permiten asignar dos nudos (o enlaces) a cada ovillo, por lo que nos serán de suma utilidad al ver el Modelo de Ovillos más adelante.

Existe además una operación de suma que podemos hacer dados dos ovillos, que nos resultará en un tercer ovillo. Esto es, conectando los puntos NE y SE de uno con los puntos NO y SO del otro, respectivamente. Las bolas que contenían a cada uno se convierten en una tercera bola que contiene al nuevo ovillo. Es claro que podemos calcular el numerador del resultado de una suma.

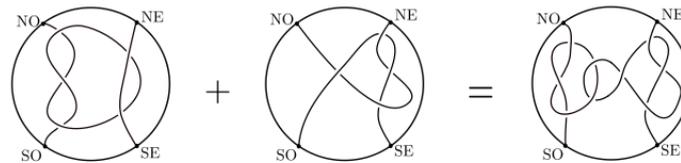


FIGURA 4.6: Suma de ovillos.

4.2. Modelo de Ovillos

Para llegar al modelo de ovillos es necesario ver una simplificación de la acción de las enzimas de recombinación en sitio específico, que es una de las maneras mediante las cuales la naturaleza reordena secuencias de ADN. A veces durante este proceso se cambia un bloque de ADN de posición dentro de la molécula, a veces se integra un bloque de ADN de otra molécula.

En esta acción tendremos el sustrato, (recordemos que así se le llama a la molécula original y que en nuestro caso será circular y no anudada) que al entrar en contacto con la enzima sufrirá cambios como retorcimiento, lo que permite el alineamiento de ciertos sitios específicos, después la enzima se adhiere al sustrato, actúa y lo libera como lo que se ha denominado producto, que es la molécula con posibles cambios en su topología.

Es aquí donde entra nuestro uso de teoría de nudos. Pensemos en la enzima como una bola de dimensión tres y notemos que divide su entorno en dos partes: adentro (donde actúa) y afuera (donde no actúa). En el modelo se supone que ambas partes son ovillos.

Al conjunto de la enzima adherida a la molécula se le llama complejo sináptico, y al complejo sináptico sin los arcos no rodeados por la enzima se le llama sinaptosoma. Así el sinaptosoma se puede ver como la suma de dos ovillos, y el complejo sináptico como el numerador de esta suma.

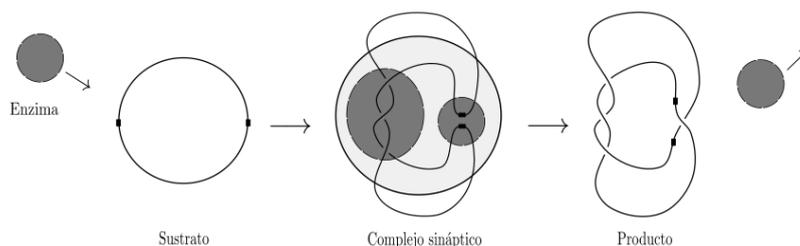


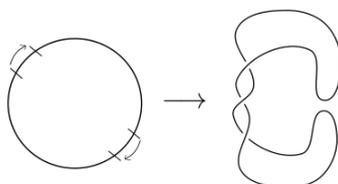
FIGURA 4.7: Esquema de la acción de una enzima.

De la misma manera el producto resulta el numerador de otros dos ovillos, pues la acción de la enzima ha reemplazado uno de los que teníamos originalmente por otro.

El proceso anterior es similar para varias enzimas de la familia de las topoisomerasas y recombinasas (Int, Tn3 resolvasa, Gin, Gyrase, Topoisomerasa I, etc.). En cada una se puede aplicar un modelo que involucre ovillos y que tome en cuenta las acciones observadas que produce cada enzima.

4.2.1. La acción de la enzima Tn3-resolvasa

A continuación aplicaremos el Modelo de Ovillos a la enzima Tn3-resolvasa, que es una enzima de recombinación de sitio específico. En ella, los sitios de recombinación tienen la misma orientación global (hay enzimas cuyos sitios de recombinación tienen orientaciones opuestas), lo cual nos permite obtener un retorcimiento como el siguiente y aplicar el modelo sin mayores problemas.



Ahora bien, llamémosle S al ovillo donde no actúa la enzima, T al ovillo donde sí actúa y R al ovillo que reemplaza a T después de la acción de la enzima. Así, tomando en cuenta que el sustrato es circular, y que podemos observar el producto de la acción de la enzima, tenemos que:

$$1) N(S + T) = \bigcirc.$$

$$2) N(S + R) = \bigcirc \cap \bigcirc.$$

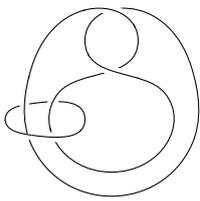
Es decir, dos ecuaciones con tres variables, por lo que necesitamos una condición extra. Recordemos que nuestra enzima actúa sobre el ovillo T , entonces supondremos que fuera de T no hay alteraciones y además, que su frontera se mantiene fija. Por lo tanto la acción de la enzima solo depende de R y T , pero no de S . Queremos ver si podemos determinar la forma que tienen R y T . Podría haber muchas formas en las que estas cumplan 1) y 2), por ejemplo:

$$a) T = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram of a vertical rectangle containing a vertical figure-eight knot} \\ \hline \end{array} \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram of a vertical rectangle containing a horizontal figure-eight knot} \\ \hline \end{array}.$$

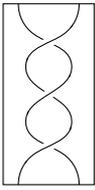
$$b) T = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram of a vertical rectangle containing a complex knotted structure} \\ \hline \end{array} \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram of a vertical rectangle containing a horizontal figure-eight knot} \\ \hline \end{array}.$$

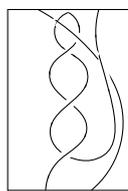
Por lo que necesitamos más información. En general, después de la recombinación la enzima suelta a la molécula, pero una de cada 20 veces no la suelta y vuelve a actuar. Cuando actúa dos y tres veces tenemos que:

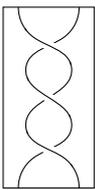
$$3) N(S + R + R) = \text{Diagram of a figure-eight knot} .$$

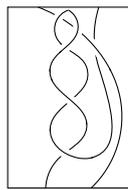
4) $N(S + R + R + R) =$  .

Usando esta información se puede deducir cómo son T y R . Primero es necesario probar un resultado sobre el tipo de ovillos que tenemos (racionales), pero será omitido aquí, pues se hace uso de resultados más fuertes de los que esta tesis abarca. Ya que se tiene esta condición se hace un cálculo [6] para probar que, si se cumplen 1), 2), y 3), entonces R y T deben ser alguna de las siguientes parejas.

a) $T =$  $R =$  .

c) $T =$  $R =$  .

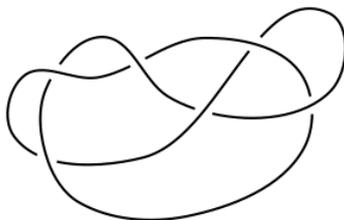
b) $T =$  $R =$  .

d) $T =$  $R =$  .

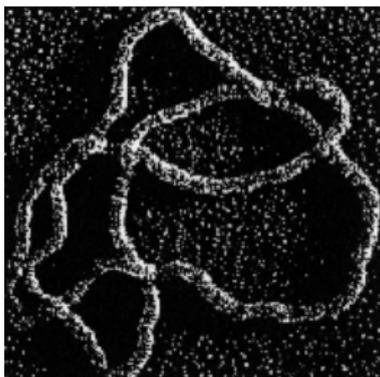
Si se cumplen 1), 2), 3) y 4) entonces R y T tienen que ser a).

El modelo pasó una prueba adicional: si R y T son los que pensamos, entonces cuando la enzima actúa cuatro veces nos quedaría,

5) $N(S + R + R + R + R) =$



y, en efecto, lo que se observó experimentalmente es



En [15] se propone un método alternativo para ver el funcionamiento de esta enzima, aquí se demuestra que el uso de los polinomios de Alexander y Jones no es favorable en este caso particular.

Bibliografía

- [1] Colin Conrad Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [2] Will Adkisson. *An overview of knot invariants*. University of Chicago REU, 2015.
- [3] Margareta Boege and Gabriela Hinojosa. Nudos para explicar enzimas. *Inventio, la génesis de la cultura universitaria en Morelos*, (4):41–48, 2006.
- [4] Peter R. Cromwell. *Knots and links*. Cambridge University Press, first edition, 2004. [6](#), [51](#), [53](#)
- [5] Tobias Ekholm, Lenhard Ng, and Vivek Shende. A complete knot invariant from contact homology. *Inventiones mathematicae*, 211(3):1149–1200, 2018.
- [6] C. Ernst and D. W. Sumners. A calculus for rational tangles: applications to dna recombination. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 108(3), 1990. [56](#), [62](#)
- [7] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, first edition, 2002. [28](#)
- [8] Louis H. Kauffman. *On knots*. Annals of Mathematics Studies 115. Princeton University Press, 1987.
- [9] Czes Kosniowski. *Topología algebraica*. Reverté, 1992. [21](#)
- [10] JC Gómez Larranaga and H Cabrera Ibarra. Nudos en biología. *Miscelánea Matemática 44*, pages 53–66, 2007. [56](#)
- [11] Charles Livingston. *Knot theory*, volume Twenty-four of *The Carus mathematical monographs 24*. Mathematical Association of America, 1996. [10](#)
- [12] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991.
- [13] R. Messer and P. Straffin. *Topology Now!* Classroom resource materials. Mathematical Association of America, 2006.
- [14] Kunio Murasugi. *Knot theory and its applications*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, first edition, 1996. [9](#), [12](#)

-
- [15] Robert Planqué. *The role of knot theory on DNA research*. 2000. [63](#)
- [16] Carlos Prieto. *Topología básica*. Ciencia y Tecnología Series. Fondo De Cultura Economica USA, 2005.
- [17] Dale Rolfsen. *Knots and links*. AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society, ams edition, 2003. [29](#), [35](#)
- [18] Alexei Sossinsky and Giselle Weiss. *Knots: Mathematics with a twist*. Harvard University Press, harvard edition, 2002. [1](#), [53](#)
- [19] DW Sumners. *Using knot theory to analyze DNA experiments*. Springer, 1988.