UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

La Constante de Euler

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Karla Leticia López Arreola

Directora de Tesis: Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy

Hermosillo, Sonora, México, Octubre del 2015

SINODALES

Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy

Universidad de Sonora.

Dr. Agustín Brau Rojas

Universidad de Sonora.

Dr. Fernando Luque Vásquez

Universidad de Sonora.

Dr.Jesús Adolfo Minjárez Sosa

Universidad de Sonora.

Agradecimientos

Gracias a todas esas personas que estuvieron a mi lado, poniendo su granito de arena...

A mi familia, en especial a mis padres Hernán López Montiel y Carmen Leticia Arreola Valle porque sin su apoyo no estaría donde estoy ahora, gracias por su cariño, su comprensión, por sus consejos y por estar siempre al pendiente de mi en cada paso de mi vida, son lo más especial que tengo. Gracias también a mi hermano Aarón López Arreola, por aguantarme tanto tiempo, por ayudarme en tantos aspectos técnicos de mi tesis, por sus consejos y porque gracias a él ingresé a esta carrera.

A todos mis profesores de la carrera, por compartir todos sus conocimientos conmigo, en especial a mis coordinadores en turno de la Licenciatura en matemáticas, Martín Gildardo García Alvarado y Eduardo Tellechea Armenta, porque también tuve la fortuna de tenerlos como profesores de análisis matemático que fue de gran ayuda para la realización de este trabajo.

A mis sinodales los Doctores Agustín Brau Rojas, Fernando Luque Vásquez y Jesús Adolfo Minjárez Sosa, gracias por tomarse el tiempo para leer, corregir y dar sus mejores consejos para que este trabajo se realizara de la mejor manera posible. En especial a mi directora de tesis Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy, por su paciencia para trabajar conmigo, por todas sus enseñanzas, es una gran profesora y persona.

A mis amigos y compañeros de la licenciatura, porque entre todos siempre nos apoyamos para salir adelante en cada paso que dabamos.

Muy en especial a Dios, porque gracias a Él soy lo que soy ahora, porque decidió el mejor camino para mí y me guió para llegar hasta esta meta de mi vida.

Por último, quiero agradecerle al Dr. Georgy Omelianov Medvedey por su apoyo con el proyecto 178690, financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de nuestra vida, se nos han dado a conocer diferentes constantes, como lo son π, e, i, etc. Todas ellas se han vuelto famosas por sus diferentes aplicaciones en las matemáticas y son tan utilizadas que se volvió necesario ponerles un nombre y representarlas por un símbolo, ya que su valor numérico podría resultar difícil de expresar con exactitud. En el siguiente trabajo, nos enfocaremos principalmente en dar a conocer otra constante matemática, llamada "constante de Euler", universalmente conocida con la letra griega γ (Gamma), nombrada así por el famoso matemático suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) pues ésta apareció por primera vez en un artículo escrito por él en el año 1734 llamado "De Progressionibus harmonicis observationes".

La constante de Euler tiene un valor aproximado de $0.5772156649\ldots$, la racionalidad o irracionalidad de γ está entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas. Se define como

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} ((1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) - \ln(n))$$

es decir, se define como la diferencia entre la sucesión de sumas parciales H_n de la serie armónica y el logaritmo neperiano.

Para poder comprender sus propiedades adecuadamente, en el segundo capítulo veremos algunos preliminares, que nos ayudarán para que todo lo que se trate sea mejor comprendido y fundamentado, principalmente, recordaremos teoremas sobre series y sucesiones en el análisis matemático.

Enseguida, en el capítulo tercero, se muestran algunas propiedades sobre la función logaritmo natural, ésta es de nuestro interés, pues además de aparecer en la definición de γ, muchas de sus propiedades son útilizadas a lo largo del trabajo.

En el cuarto capítulo daremos especial atención a una serie, conocida como "serie armónica " pues sus sumas parciales también tiene su aparición en la definición de γ. Se define esta serie como

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

y denotamos a su n-ésima suma parcial como:

$$H_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

La analizaremos más a fondo ya que posee muchas propiedades interesantes como el hecho de que es una serie divergente, resultado que parece difícil de creer, ya que diverge tan lentamente que la suma del primer $1,000,000$ de términos nos da apenas $14.392\ldots$, de donde daremos cuatro diferentes demostraciones de este hecho. Veremos también que esta serie nunca es un entero, es decir, que no importa la cantidad de términos que tenga H_n, su suma nunca será un número entero. Finalmente en el capítulo, demostraremos que la suma para cualquier n a excepción de 1, 2 y 6 siempre nos dará un decimal infinito y no uno finito.

Para terminar, en el último capítulo, hablaremos sobre lo relacionado a la constante de Euler, veremos diversas demostraciones sobre la existencia de ésta, dos demostraciones clásicas encontradas en libros de textos, una basada en propiedades de las sucesiones monótonas acotadas y otra en series alternantes y tres encontradas en diversos artículos, desarrolladas y explicadas de forma más minuciosa, éstas relacionadas con el número e, con la monotonía de ln y una prueba utilizando una sucesión alternativa que no involucre logaritmo natural basada principalmente en operaciones algebraicas. Enseguida, daremos dos formulaciones equivalentes de la constante de Euler, es decir, otras formas en que γ puede ser expresada y demostraremos esta equivalencia. Para finalizar, presentaremos una curiosa aparición de γ en relación con la función exponencial.

Capítulo 2

Sucesiones y series infinitas

2.1. Sucesiones.

Definición **2.1.1.** *Si a cada entero positivo n le asociamos un número real a_n, entonces al conjunto ordenado*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

le llamamos una sucesión infinita, la cual denotamos como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definición **2.1.2.** *Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un límite L si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N(\varepsilon)$ tal que:*

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

En este caso, decimos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L y denotamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Definición **2.1.3.**

- *Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a $+\infty$ ó*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

  si para cada $M > 0$ existe N natural tal que

  $$a_n > M \quad si \quad n > N.$$

- *Decimos que una sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverge a* $-\infty$ *ó*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

si para cada $M < 0$ *existe* N *natural tal que*

$$a_n < M \quad si \quad n > N.$$

DEFINICIÓN **2.1.4.**

- *Una sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es creciente si*

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *Una sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es decreciente si*

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si una sucesión es creciente o decreciente, se le dice monótona.

DEFINICIÓN **2.1.5.** *Sea* S *un conjunto de números reales.*

- *Decimos que* S *está acotado superiormente si existe* $M_1 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \leq M_1 \quad \forall x \in S.$$

A M_1 *se la llama una cota superior de* S*.*

- S *está acotado inferiormente si existe* $M_2 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \geq M_2 \quad \forall x \in S.$$

A M_2 *se la llama una cota inferior de* S*.*

En general, decimos que S *está acotado si existe* M *positivo tal que*

$$|x| \leq M \quad \forall x \in S.$$

DEFINICIÓN **2.1.6.** *Sea S una conjunto acotado superiormente, diremos que α es la mínima cota superior o supremo de S si cumple:*

- *α es cota superior de S.*
- *Si β es otra cota superior de S, entonces $\alpha < \beta$*

y lo denotamos como:

$$\alpha = \sup S$$

De forma similar, si S está acotado inferiormente, decimos que α es la máxima cota inferior o el ínfimo de S si cumple:

- *α es cota inferior de S*
- *Si β es otra cota inferior de S, entonces $\alpha > \beta$*

y lo denotamos como:

$$\alpha = \text{ínf}\, S$$

El Axioma de Completez nos dice que todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, tiene un supremo.

Teorema 2.1.1. *Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona converge si y sólo si está acotada.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y no está acotada, entonces para cada M existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N \geq M$ y como la sucesión es creciente, entonces $a_n \geq M \quad \forall n \geq N$ y entonces por la definición 2.1.3 $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$. De forma similar, si la sucesión es decreciente diverge a $-\infty$.

Por lo tanto si la sucesión converge entonces está acotada.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada. Por el axioma de completez existe L su mínima cota superior, así:

$$a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probaremos que la sucesión converge a L.

Sea $\varepsilon > 0$, como $L - \varepsilon$ no puede ser una cota superior de $\{a_n\} \Rightarrow L - \varepsilon < a_N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

Si $n \geq N$ tenemos que $a_N \leq a_n$, pues $\{a_n\}$ es creciente. Así

$$L - \varepsilon < a_N < a_n \leq L \quad \forall n \geq N.$$

Así nos queda que

$$0 \leq L - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

lo que nos dice que a_n converge a L.

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, procedemos de manera análoga. □

Definición **2.1.7.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada y definamos las siguientes sucesiones por:*

$$V_N = sup\{a_n | n \geq N\} \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$U_N = inf\{a_n | n \geq N\} \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

- *El límite superior de $\{a_n\}$ lo definimos como*

$$\limsup a_n = \lim_{N \to \infty} V_N$$

- *El límite inferior de $\{a_n\}$ como*

$$\liminf a_n = \lim_{N \to \infty} U_N$$

Observación: El límite superior de una sucesión acotada siempre existe, pues:

$$V_1 \geq V_2 \geq V_3 \geq \ldots$$

y como $\{a_n\}$ está acotada entonces V_N está también acotada y por el Teorema 2.1.1 su límite existe.

De la misma forma podemos decir que el límite inferior existe.

DEFINICIÓN **2.1.8.** *Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad si \quad n, m \geq N.$$

Teorema 2.1.2. *Si $\{a_n\}$ converge entonces $\{a_n\}$ es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, buscamos una N tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad si \quad n, m \geq N.$$

Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, como $\{a_n\}$ converge, digamos a L, sabemos que existe N_1 tal que:

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad si \quad n > N_1.$$

Sean $n, m \geq N_1$, entonces

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

así

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, para $N \equiv N_1$,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad si \quad n, m \geq N.$$

□

2.2. Series infinitas.

DEFINICIÓN **2.2.1.** *Dada una sucesión de números* $\{a_n\}$ *podemos definir la sucesión correspondiente de sumas parciales* $\{s_n\}$ *como*

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de sumas parciales se le llama* <u>*serie infinita*</u> *y se denota como*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

DEFINICIÓN **2.2.2.** *Si existe un número real s tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

decimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente y que su suma es s.*

Teorema 2.2.1. *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *series convergentes. Entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *también converge y además*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Demostración. Haciendo tender $n \to \infty$ en la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k),$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

□

Ejemplos de series

Teorema 2.2.2. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que*

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad para \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión $\{b_n\}$ converge. Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L \quad donde \quad L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

A este tipo de serie le llamamos serie telescópica.

Demostración. Sea s_n la n-ésima suma parcial de $\{a_n\}$. Entonces

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Así:

$$\{s_n\} converge \Leftrightarrow \{b_n\} converge$$

y

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(b_1 - b_n) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Si $\{b_n\}$ converge a L entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - L$$

y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces

$$b_1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

y por tanto $\{b_n\}$ converge. $\square$

Teorema 2.2.3. *Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, es decir,*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}.$$

Entonces

- *Si $|x| < 1$ la serie converge y $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$.*
- *Si $|x| \geq 1$ la serie diverge.*

A este tipo de serie le llamamos serie geométrica.

Demostración. Si $|x| \neq 1$ podemos simplificar la suma como

$$(1-x)s_n = (1-x)\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(x^{k-1} - x^k) = 1 - x^n.$$

Entonces:

$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Así, tenemos que $\{s_n\}$ depende de x^n.

Si $|x| < 1$ entonces $x^n \to 0$ si $n \to \infty$ y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}.$$

Como $s_{n+1} - s_n = x^n$, si $\{s_n\}$ converge entonces $x^n \to 0$ si $n \to \infty$. Así, si $|x| > 1$, la sucesión $\{s_n\}$ diverge.

Si $x = 1$ entonces $s_n = n$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

$\square$

2.3. Criterios de convergencia.

Criterio de Cauchy

Definición **2.3.1.** *Se dice que una serie $\sum a_n$ satisface el criterio de Cauchy si su sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

Teorema 2.3.1. *La serie $\sum a_n$ converge si y sólo si satisface el criterio de Cauchy.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\sum a_n$ converge, esto es, su sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ converge, entonces $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy (Teo. 2.1.2) y por lo tanto $\sum a_n$ satisface el criterio de Cauchy.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\sum a_n$ satisface el criterio de Cauchy. Entonces $\{s_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto $\{s_n\}$ converge, es decir, $\sum a_n$ converge.

□

Teorema 2.3.2. *Si $\sum a_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Si $\sum a_n$ converge entonces $\{s_n\}$ converge a un número real, pero $a_n = s_n - s_{n+1}$; así que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = 0$$

□

Criterio de comparación

Teorema 2.3.3. *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos no negativos, entonces:*

1. *Si $\sum\, a_n$ converge y $0 \le b_n \le a_n$ $\forall n$ entonces $\sum b_n$ converge.*
2. *Si $\sum a_n = \infty$ y $0 \le a_n \le b_n$ $\forall n$ entonces $\sum b_n = \infty$.*

Demostración.

1. Sea $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, sabemos que $\{t_n\}$ es creciente pues $b_k \geq 0 \quad \forall n$.

   Además, $\{t_n\}$ está acotada, pues
   $$\sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   ya que por hipótesis $0 \leq b_n \leq a_n$.

   Así, por el Teorema 2.1.1 de convergencia monótona para sucesiones, se tiene que $\{t_n\}$ converge y por tanto $\sum b_n$ converge.

2. Para ver que $\sum b_n$ diverge, hay que ver que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$.

   Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Como $b_n \geq a_n \quad \forall n$, se tiene que
   $$t_n \geq s_n \quad \forall n$$
   y entonces:
   $$\lim_{n\to\infty} t_n \geq \lim_{n\to\infty} s_n;$$
   pero como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$.

$\square$

Definición **2.3.2.**

a) *Si $\sum |a_n|$ converge entonces se dice que la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.*

b) *Si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge entonces se dice que la serie $\sum a_n$ converge condicionalmente.*

Teorema 2.3.4. *Si una serie converge absolutamente entonces converge.*

Demostración. Supongamos que $\sum a_n$ converge absolutamnte, es decir $\sum |a_n|$ converge, así, por el criterio de Cauchy (Teo. 2.3.1), dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que
$$|a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon \quad \forall n > m > N.$$

Pero ya que

$$|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon$$

entonces

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\sum a_n$ converge.

$\square$

Criterio de la razón

Teorema 2.3.5. *Sea $\sum a_n$ una serie de términos diferentes de cero. Entonces:*

i) Si $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ *entonces la serie converge absolutamente.*

ii) Si $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ *entonces la serie diverge.*

iii) De otra forma $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq 1 \leq \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. *En este caso, el criterio no da información acerca de la convergencia.*

Demostración.

i) Sea $L = \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Tenemos por hipótesis que $L < 1$, entonces podemos elegir r tal que $L < r < 1$.
Como $L = \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existe N tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq r$ $\forall n \geq N$, es decir,

$$|a_{n+1}| \leq r|a_n| \quad \forall n \geq N.$$

De aquí podemos mostrar por inducción que $|a_{N+k}| \leq r^k |a_N|$ $\forall k \in \mathbb{N}$:

- Para $k = 1$ tenemos

$$|a_{N+1}| \leq r|a_N|,$$

lo cual teníamos que se cumple para $n \geq N$.

- Supongamos que se cumple para $k = m$, es decir, tenemos como hipótesis de inducción que

$$|a_{N+m}| \leq r^m |a_N|.$$

Queremos demosotrar que $|a_{N+m+1}| \leq r^{m+1}|a_N|$.

Tenemos que

$$|a_{N+m+1}| \leq r|a_{N+m}|$$

pues $N + m \geq N$. Usando la hipótesis de inducción obtenemos

$$|a_{N+m+1}| \leq r^{m+1}|a_N|$$

Por lo tanto, $|a_{N+k}| \leq r^k|a_N| \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Ahora, como $0 < r < 1$ se tiene que la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|r^k$ es convergente (Teo. 2.2.3). Por el criterio de comparación (Teo. 2.3.3) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}|$ es también convergente.

Por lo tanto $\sum |a_n|$ es convergente o $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

ii) Sea $R = \liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ y tenemos por hipótesis que $R > 1$.
Como $R = \liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \Rightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ para n grande.
Esto es $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para n grande. Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ no puede converger a 0 y por el Teorema 2.3.2 la serie $\sum a_n$ diverge.

iii) Podemos observar el caso de las series, $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n}$ en ambas se cumple la condición iii) y sin embargo, la primera sí converge y la segunda diverge.

$\square$

Criterio de la raíz

Teorema 2.3.6. *Sea $\sum a_n$ una serie y sea $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$. Entonces:*

i) Si $\alpha < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

ii) *Si $\alpha > 1$, entonces la serie diverge.*

iii) *Si $\alpha = 1$, entonces el criterio no da información acerca de la convergencia de la serie.*

Demostración.

i) Si $\alpha < 1$, podemos tomar r tal que $\alpha < r < 1$.

Como $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$ existe N tal que,

$$|a_n|^{1/n} < r \quad \forall n \geq N,$$

entonces,

$$|a_n| < r^n \quad \forall n \geq N.$$

Como $0 < r < 1$, se tiene que la serie geométrica $\sum r^n$ es convergente (Teo.2.2.3), así, por el criterio de comparación (Teo. 2.3.3), la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Por lo tanto, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.

ii) Sea $\alpha > 1$ y como $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$ entonces $|a_n|^{1/n} \geq 1$, para un número infinito de $n's$, es decir, $|a_n| \geq 1$, para un número infinito de $n's$.

Por lo tanto, $\{a_n\}$ no puede converger a 0 y por el Teorema 2.3.2, la serie $\sum a_n$ diverge.

iii) Podemos considerar las mismas series del criterio de la razón, pues ambas cumplen con la hipótesis iii) y sólo una converge.

$\square$

Criterio para series alternantes

Teorema 2.3.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.*

Demostración. Consideremos la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ donde:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 - a_2$$

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n}$$

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\vdots$$

Así, debemos considerar dos clases de suma, si sumamos un número par o un número impar de términos.

Por hipótesis $\{a_n\}$ es decreciente, es decir, $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para toda k.

Consideremos la subsucesión $\{s_{2n}\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_{2(n+1)} &= (a_1 - a_2 + \ldots - a_{2n}) - (a_1 - a_2 + \ldots - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}) \\ &= -a_{2n+1} + a_{2n+2}. \end{aligned}$$

Como $\{a_n\}$ es decreciente, entonces

$$-a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$$

y de aquí obtenemos

$$s_{2n} - s_{2(n+1)} \leq 0.$$

Por tanto, la subsucesión $\{s_{2n}\}$ es creciente. Además, $\{s_{2n}\}$ está acotada superiormente, pues:

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

ya que $a_k - a_{k+1} \geq 0$.

Así, por el Teorema 2.1.1, $\{s_{2n}\}$ converge a un número s.

Consideremos ahora la subsucesión $\{s_{2n+1}\}$. Tenemos

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2(n+1)+1} &= (a_1 - \ldots + a_{2n+1}) - (a_1 - \ldots + a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3}) \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \end{aligned}$$

y como $\{a_n\}$ es decreciente, entonces

$$a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$$

y por lo tanto

$$s_{2n+1} - s_{2(n+1)+1} \geq 0.$$

Lo que implica que la subsucesión $\{s_{2n+1}\}$ es decreciente. Además está acotada inferiormente, pues

$$s_{2n+1} = -(a_2 - a_1) - (a_4 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n-1}) - (-a_{2n+1}) \geq 0,$$

donde $a_{k+1} - a_k \leq 0$. Como $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ y por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Así, podemos demostrar que $\{s_n\}$ converge, pues dado $\varepsilon > 0$ existen N_1 y N_2 tal que:

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

y

$$|s_{2n+1} - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2.$$

Sea $N = max\{2(N_1), 2(N_2) + 1\}$, entonces:

$$n > N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$$

□

Criterio de la integral

Teorema 2.3.8. *Sea* $f : [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, positiva y decreciente, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$$

exsite como un número real.

Demostración. Sean $a_n = f(n)$ y $b_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$. Como f es decreciente, tenemos que

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) \quad \forall x \in [n, n+1].$$

Entonces

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$$

$$(f(n+1))x \mid_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq (f(n))x \mid_n^{n+1}$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

Así, nos queda que $0 < a_{n+1} \leq b_n \leq a_n$ para cada n.

Ahora, usando el criterio de comparación tenemos que $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge.

Pero la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de $\sum b_n$ son las integrales:

$$s_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx,$$

así, la serie $\sum b_n$ converge cuando:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$$

existe como un número real. $\square$

2.4. Sucesiones y series de funciones

En esta sección veremos las sucesiones de la forma $\{f_n\}$ donde para cada n, f_n es una función, así para cada x en el dominio, tendríamos la sucesión de números $\{f_n(x)\}$. Los teoremas que se muestran en ésta sección se utilizan a lo largo del trabajo, sin embargo, las demostraciones pueden ser consultadas en [10].

DEFINICIÓN **2.4.1.** *Decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f si para cada x en $[a,b]$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

DEFINICIÓN **2.4.2.** *la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \quad \forall x \in [a,b]$$

DEFINICIÓN **2.4.3.** *Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, concideremos la siguiente sucesión*

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

entonces

- *Si la sucesión $\{F_n\}$ converge a F, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge y se escribe*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

- *Si la sucesión $\{F_n\}$ converge uniformmente entonces la serie converge uniformemente.*

- *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge entonces la serie converge absolutamente.*

Teorema 2.4.1. *(M-Test de Weierstrass) Sean $\{M_k\}$ una sucesión de números reales y $\{f_k\}$ una sucesión tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| < M_k$ para toda k. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente y absolutamente.*

Demostración. [10] pag. 548. □

Teorema 2.4.2. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Riemann integrable en el intervalo $[a, b]$. Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces es Riemman integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Demostración. [10] pag. 566 □

Corolario 2.4.3 *Si una serie infinita de funciones integrables $\sum f_k$ converge uniformemente a una función f en el intervalo $[a, b]$, entonces f también es integrable y*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Demostración. Aplicamos el teorema anterior para las sumas parciales S_n de una serie. □

Capítulo 3

La función logaritmo natural

En este capítulo, demostraremos algunas propiedades de la función logaritmo natural, ya que se hará uso de ellas a lo largo este trabajo.

Definición **3.0.4.** *Sea* $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función logaritmo natural definida como la integral:*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Podemos interpretarla geométricamente como el área bajo la curva de $y = 1/t$ desde 1 hasta x para $x \geq 1$ como se ve en la Figura 3.1 y menos el área para $x < 1$.

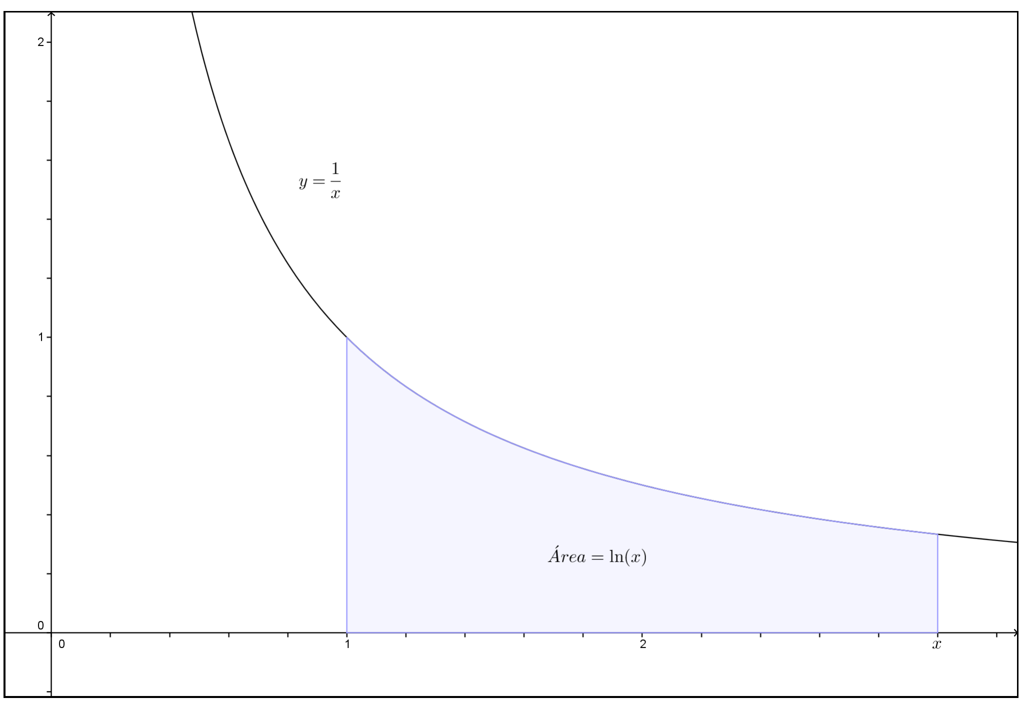

Figura 3.1: Interprertación geométrica de ln

3.1. Propiedades de ln

Teorema 3.1.1. *La función* ln *posee las siguientes propiedades:*

a) $\ln(1) = 0$

b) *Es uniformemente continua en* $[a, \infty)$ *con* $a \in \mathbb{R}^+$

c) $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

d) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

e) $\ln(a^n) = n\ln(a)$

f) $\ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$

g) $\ln(a^x) = xln(a)$ *para* $x \in \mathbb{R}$

Demostración.

a) Por definición
$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

b) Como $g(x) = 1/x$ es integrable y decreciente en el intervalo $[a, \infty)$ entonces existe $M_a = 1/a$ tal que $|g(x)| \leq M_a \quad \forall x \in [a, \infty)$, es decir, está acotada en el intervalo. Para demostrar que $\ln(x)$ es uniformemente continua en $[a, \infty)$ tomemos $\varepsilon > 0$. Si $x, y \in [a, \infty)$ con $a < y < x$ y $|x - y| < \varepsilon/M_a$, entonces
$$|\ln(x) - \ln(y)| = \Big|\int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^y \frac{dt}{t}\Big| = \Big|\int_y^x \frac{dt}{t}\Big|$$
$$\leq \int_y^x \Big|\frac{dt}{t}\Big| \leq \int_y^x M_a dt = M_a|x - y| < \varepsilon$$

Por tanto la función ln es uniformemente continua en $[a, \infty)$

c) Podemos utilizar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, ya que tenemos que $g(x) = 1/x$ es una función continua.

d) Por definición
$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln(a) + \int_a^{ab} \frac{dt}{t},$$

haciendo cambio de variable con $u = \frac{t}{a}$ y $du = \frac{dt}{a}$, la integral nos queda

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{du}{u} = \ln(b),$$

por lo tanto

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

e) Haremos la prueba por inducción

- Para $n = 1$ tenemos

$$\ln(a^1) = 1\ln(a) = \ln(a)$$

- Supongamos que se cumple para $n = k$, entonces tenemos como hipótesis de inducción que $\ln(a^k) = k\ln(a)$.

  Queremos demostrar que se cumple para $n = k + 1$. Entonces tenemos

$$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k\ln(a) + \ln(a) = (k+1)\ln(a)$$

Por lo tanto, $\ln(a^n) = n\ln(a)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

f) Tenemos que

$$\ln(a) = \ln(\frac{a}{b} \cdot b) = \ln(\frac{a}{b}) + ln(b),$$

por tanto

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

g) Primeramente, veremos que se cumple para $x \in \mathbb{Q}^+$, es decir, para x de la forma p/q con p y q en los naturales. Tenemos por el inciso b) que

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln(a^{1/q})^q \\ \ln a &= q \ln a^{1/q} \\ \frac{1}{q}\ln a &= \ln a^{1/q}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\ln a^{p/q} = \ln(a^{1/q})^p = p\ln a^{1/q} = \frac{p}{q}\ln a$$

Ahora, queremos demostrarlo para $x_0 \in \mathbb{R}$. Sea $\{r_n\}$ sucesión de racionales tal que $r_n \longrightarrow x_0$. Como a^x es una función continua, si $r_n \longrightarrow x_0$ entonces

$$a^{r_n} \longrightarrow a^{x_0},$$

y como $\ln(x)$ también es continua, entonces

$$\ln(a^{r_n}) \longrightarrow \ln(a^{x_0}),$$

es decir

$$r_n \ln(a) \longrightarrow \ln(a^{x_0}).$$

Pero por otro lado, tenemos que

$$r_n \ln(a) \longrightarrow x_0 \ln(a),$$

pero como el límite es único, concluimos que

$$ln(a^{x_0}) = x_0 \ln(a)$$

$\square$

3.1.1. La gráfica de la función ln

Teorema 3.1.2. *La función* $\ln(x)$ *es una funión continua, estrictamente creciente, cóncava y no acotada*

Demostración.

- Sea $x \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, queremos demostrar que ln es continua en x. Sabemos por la propiedad Arquimediana, que existe un número a tal que $0 < a < x$ y por el Teorema 3.1.1 b) tenemos que la función ln es uniformemente continua en $[a, \infty)$ y por tanto continua en todo el intervalo. Como x está en el intervalo $[a, \infty)$ entonces ln es continua en x arbitrario.

- Por el Teorema 3.1.1 c) que
$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} > 0$$
para todo x en el dominio. Por tanto ln es estrictamente creciente.

- Tenemos que la segunda derivada de $\ln(x)$ es $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2} < 0$ para toda $x > 0$. Por tanto ln es una función cóncava.

- Supongamos que existe M tal que

$$\ln(x) < M \quad \forall x > 0.$$

Así para $x = 2^n$ tenemos por el Teorema 3.1.1 e) que

$$\ln(2^n) = n\ln(2) < M,$$

pero para $n > \frac{M}{\ln(2)}$ llegamos a una contradicción, por tanto ln no está acotada superiormente.

Por otro lado, si suponemos que

$$\ln(x) > -M, \quad \forall x > 0$$

podemos tomar $x = (\frac{1}{2})^n$ y por el Teorema 3.1.1 f) tenemos

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -n\ln(2) > -M,$$

pero para $n > \frac{M}{\ln(2)}$ tendríamos una contradicción, por lo tanto ln tampoco está acotada inferiormente.

□

Del teorema anterior y por algunas propiedades dadas en Teorema 3.1.1 podríamos tener un bosquejo de la gráfica de ln. Tenemos que $\ln(1) = 0$ y como es una función creciente, entonces la gráfica se encuentra sobre el eje de las x para $x > 1$ y por debajo de éste para $x < 1$, como se observa en la Figura 3.2

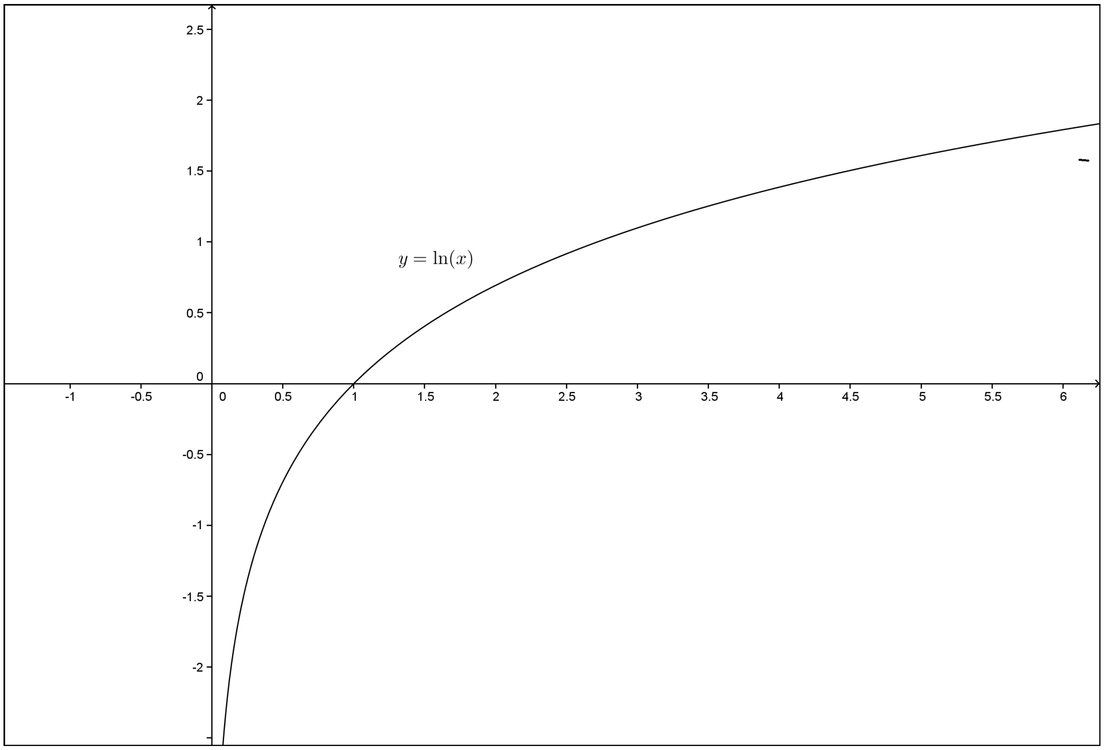

Figura 3.2: Gráfica de la función ln

Teorema 3.1.3. *Para todo número real* b *existe un único número positivo* a *tal que* $\ln(a) = b$

Demostración. Podemos observar en la gráfica que si trazamos cualquier linea horizontal, esta coincide con la gráfica únicamente en un punto. Podemos argumentarlo de la siguiente forma: si $b > 0$ podemos tomar un entero $n > b/\ln(2)$ entonces $\ln(2^n) > b$, así tenemos que la función en el intervalo $[1, 2^n]$ tiene como valores en sus extremos $\ln(1) = 0$ y $\ln(2^n)$ y como $0 < b < \ln(2^n)$ por el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas sabemos que existe un número a entre 1 y 2^n tal que $\ln(a) = b$. Si existiera a' tal que $\ln(a') = b$ entonces $\ln(a) = \ln(a')$ para $a \neq a'$ contradiciendo el hecho de que ln es una función creciente.

Para $b < 0$ tomemos $n > b/\ln(\frac{1}{2})$, entonces tendríamos que $\ln(1/2^n) < b$, así los valores de la función en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, 1]$ quedarían $\ln(\frac{1}{2^n})$ y 0 y como $\ln(\frac{1}{2^n}) < b < 0$ por el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas existe a tal que $ln(a) = b$. $\square$

En particular, para $b = 1$ en el teorema anterior, llamamos e (número de Euler) al número tal que $\ln(e) = 1$.

Así, del Teorema 3.1.1 g) tendríamos para la función exponencial e^x que

$$ln(e^x) = xln(e) = x.$$

Es decir, concluimos que e^x es la función inversa de la función $\ln(x)$.

3.2. Aproximación polinomial a logaritmo natural

Teorema 3.2.1. *Sea f una función representada por la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

con un radio de convergencia R. Entonces para cada punto x en ese intervalo, f es integrable en $[c, x]$ (o $[x, c]$ si $x < c$) y

$$\int_c^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-c)^{k+1}$$

En otras palabras, podemos integrar término a término la serie de potencias.

Demostración. Primero veremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ es uniformemente convergente en cualquier intervalo $[a, b]$ contenido en el intervalo $(c-R, c+R)$. Sea $0 < \rho < R$ de modo que $[a, b]$ este contenido en $(c - \rho, c + \rho)$, vamos a fijar $\rho_0 \in (\rho, R)$ entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho_0}$$

de donde, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{\rho_0} \quad \forall k \geq N,$$

así tenemos que

$$|a_k(x-c)^k| \leq |a_k|\rho^k \leq \frac{1}{{\rho_0}^k}\rho^k = (\frac{\rho}{\rho_0})^k$$

para $k \geq N$ y $|x - c| \leq \rho$, como $\frac{\rho}{\rho_0} < 1$ se sigue que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\rho}{\rho_0})^k < \infty.$$

Por el Teorema 2.4.1 la serie converge uniformemente.

Sea x un punto en el intervalo de convergencia, ya demostramos que la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ es uniforme en $[c, x]$ (o en $[x, c]$ si $x < c$) entonces la serie puede ser integrada término a término por el Corolario 2.4.3. $\square$

Queremos tener una aporximación polinomial del logaritmo. Para hacer los cálculos más sencillos, empezaremos por remplazar x por $1-x$ en la defininción de logaritmo y obtener

$$\ln(1-x) = \int_1^{1-x} \frac{dt}{t}$$

para $x < 1$, haciendo un cambio de variable de $t = 1-u$ tenemos

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{du}{1-u}.$$

Sabemos que la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} u^k$ converge a $\frac{1}{1-u}$ en un radio de convegencia 1.

Por lo tanto, por el Teorema 3.2.1 tenemos para $|x| < 1$

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{du}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

Capítulo 4

La serie armónica y propiedades

En este capítulo estudiaremos más a fondo la serie armónica, que aparece en la definición de la constante de Euler. Julian Havil [3] presenta muchas de sus propiedades que veremos a continuación, como en la Sección 4.1 que se da a conocer su función generadora, después en la 4.2 se dan cuatro diferentes demostraciones de su divergencia y finalmente en las Secciones 4.3 y 4.4 se ven dos propiedades interesantes de su sucesión de sumas parciales, como que nunca es un entero (excepto para $n = 1$) y que siempre es un decimal infinito para $n \notin \{1, 2, 6\}$.

DEFINICIÓN **4.0.1.** *Definimos a la serie armónica como la serie*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

y denotamos a su n-ésima suma parcial como

$$H_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

4.1. H_n y su función generadora.

DEFINICIÓN **4.1.1.** *Dada una sucesión $\{a_n\}$ se define su función generadora como la serie de potencias*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

Mostraremos que la función generadora de H_n está dada por

$$\sum_{r=1}^{\infty} H_r x^r = \frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Podemos escribir a H_n como

$$H_r = H_{r-1} + \frac{1}{r}.$$

Multiplicando por x^r en ambos lados tenemos

$$x^r H_r = x^r H_{r-1} + \frac{x^r}{r}.$$

Haciendo la suma finita desde 2 hasta n nos queda

$$\sum_{r=2}^{n} x^r H_r = \sum_{r=2}^{n} x^r H_{r-1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{x^r}{r}.$$

Sumando x a ambos lados tenemos

$$\sum_{r=1}^{n} x^r H_r = \sum_{r=2}^{n} x^r H_{r-1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{x^r}{r},$$

y así obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} x^r H_r &= x \sum_{r=2}^{n} x^{r-1} H_{r-1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{x^r}{r} \\ &= x \sum_{r=1}^{n-1} x^r H_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{x^r}{r}.\end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$\sum_{r=1}^{n} x^r H_r - x \sum_{r=1}^{n-1} x^r H_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{x^r}{r},$$

y finalmente, factorizando se obtiene

$$(1-x) \sum_{r=1}^{n} x^r H_r + x^{n+1} H_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{x^r}{r}.$$

Sacando límites tenemos para $|x| < 1$

$$(1-x) \sum_{r=1}^{\infty} x^r H_r + \lim_{n\to\infty} x^{n+1} H_n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r}.$$

Entonces, con la aproximación polinomial de ln vista en el Capítulo 3 nos queda

$$(1-x) \sum_{r=1}^{\infty} x^r H_r + \lim_{n\to\infty} x^{n+1} H_n = -\ln(1-x).$$

Si probáramos que $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} H_n = 0$ obtendríamos que

$$(1-x)\sum_{r=1}^{\infty} x^r H_r = -\ln(1-x),$$

y por tanto,

$$\frac{1}{1-x}\ln\big(\frac{1}{1-x}\big) = \sum_{r=1}^{\infty} x^r H_r.$$

Así que solo nos resta probar que $\lim_{n\to\infty} x^{n+1}H_n = 0$ o que $\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1}H_n = 0$

Tenemos que

$$|x|^{n+1}H_n = |x|^{n+1}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}) \leq |x|^{n+1}(n),$$

pues cada término de la serie es menor que 1.

Podemos escribir a $|x|$ como $\frac{1}{h}$ con $h>1$. Entonces

$$n|x|^{n+1} = n(\frac{1}{h})^{n+1} = \frac{n}{h^{n+1}} = \frac{n}{(1+\alpha)^{n+1}}$$

para algún $\alpha > 0$. Pero

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\alpha^k = 1+(n+1)\alpha+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^2+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}+\ldots\\ &\geq 1+(n+1)\alpha+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^2,\end{aligned}$$

y así,

$$n|x|^{n+1} = \frac{n}{(1+\alpha)^{n+1}} \leq \frac{n}{1+(n+1)\alpha+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^2}.$$

Tomando límites tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} n|x|^{n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+(n+1)\alpha+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\alpha+\frac{1}{n}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{n}} = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}H_n \leq \lim_{n\to\infty} n|x|^{n+1} \leq 0,$$

y por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}H_n \geq \lim_{n\to\infty}|x|^{n+1} = 0,$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} H_n = 0.$$

4.2. Divergencia de H_n.

Una de las series frecuentemente utilizadas para demostrar que la recíproca del Teorema 2.3.2 no se cumple es precisamente la serie armónica. Como contraejemplo es especialmente ilustrativo, pues diverge tan lentamente que el resultado parece difícil de creer: la suma de los primeros 100 términos es 5.187... , la suma de los primeros 1,000 es 7.486... y la del primer 1,000,000 de términos nos da apenas 14.392... .

Enseguida veremos cuatro pruebas de la divergencia de esta serie.

4.2.1. Prueba usando el criterio de Cauchy.

Para esta prueba, haremos referencia al Teorema 2.1.2, es decir, para mostrar que la sucesión $\{H_n\}$ no converge, demostraremos que no es una sucesión de Cauchy.

Sea $m > n$. Entonces

$$\begin{aligned} H_m - H_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m} \\ &> \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m} \\ &= 1 - \frac{n}{m}, \end{aligned}$$

así, para $m = 2n$ tendríamos:

$$H_{2n} - H_n > \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\{H_n\}$ no es una sucesión de Cauchy y por tanto no converge.

4.2.2. Prueba de Oresme.

El matemático francés Nicolás Oresme (1323 - 1382) dio una de las primeras demostraciones de su divergencia por comparación, la cual se presenta a continuación con notación moderna.

Tenemos que:

$$H_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots .$$

Como tenemos puros términos positivos, podemos agruparlos de la siguiente forma:

$$H_\infty = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots ,$$

agrupando después los siguientes 8 términos, luego los siguientes 16, y así sucesivamente duplicando la cantidad de términos.

Tenemos entonces que,

$$H_\infty \geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots ,$$

pues estamos sustituyendo cada término por el menor del grupo, así:

$$\begin{aligned} H_\infty &\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{2}{4}) + (\frac{4}{8}) + (\frac{8}{16}) + (\frac{16}{32}) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots , \end{aligned}$$

lo que obviamente diverge.

4.2.3. Prueba de Euler.

Empecemos calculando la siguiente integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1-e^x}dx &= \lim_{\substack{x\to\ 0\\ y\to -\infty}} \int_y^x e^t(1-e^t)^{-1}dt\\ &= \lim_{\substack{x\to\ 0\\ y\to -\infty}} \int_y^x e^t \sum_{k=1}^{\infty}(e^t)^{k-1}dt\\ &= \lim_{\substack{x\to\ 0\\ y\to -\infty}} \int_y^x (e^t+e^{2t}+e^{3t}+\ldots)dt;\end{aligned}$$

podemos demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e^{kt}$ es uniformemente convergente haciendo uso del Teorema 2.4.1 para $y < t < x$ con y, x fijas en el intervalo $(-\infty, 0]$ con $M_k = e^{xk}$ así según el Teorema,

$$f_k = e^{kt} \le e^{kx} = M_k$$

y como

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx} = \sum_{k=1}^{\infty}(e^x)^k$$

converge por el Teorema 2.2.3 con $e^x < 1$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kt}$ converge uniormemente, entonces por el Teorema 2.4.2 podemos integrar término a término para obtener,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\ 0\\ y\to -\infty}} \int_y^x (e^t+e^{2t}+e^{3t}+\ldots)dt &= \lim_{\substack{x\to\ 0\\ y\to -\infty}} \left(e^t+\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{4}e^{4t}+\ldots\right)\Big|_y^x\\ &= \lim_{\substack{x\to\ 0\\ y\to -\infty}} \left[\left(e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3x}+\ldots\right)-\left(e^y+\frac{1}{2}e^{2y}+\frac{1}{3}e^{3y}+\ldots\right)\right]\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1-e^x}dx = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots \tag{4.1}$$

Por otro lado, también tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1-e^x}dx &= \lim_{\substack{x\to\ 0 \\ y\to -\infty}} \int_{y}^{x} \frac{e^t}{1-e^t}dt \\
&= \lim_{\substack{x\to\ 0 \\ y\to -\infty}} \left(-\ln(1-e^t)\right)\Big|_{y}^{x} \\
&= \lim_{\substack{x\to\ 0 \\ y\to -\infty}} \left[\ln(1-e^y) - \ln(1-e^x)\right] \\
&= \ln\big(\lim_{\substack{x\to\ 0 \\ y\to -\infty}} (1-e^y)\big) - \ln\big(\lim_{\substack{x\to\ 0 \\ y\to -\infty}} (1-e^x)\big) \\
&= \ln(1) - \ln(0) = \infty. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Por tanto, de (1) y (2) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1-e^x}dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty.$$

4.2.4. Prueba por contradicción.

Una prueba muy sencilla y elegante es la siguiente:

$$\begin{aligned}
H_\infty &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots \\
&= \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \frac{2}{10} + \frac{2}{12} + \ldots \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \ldots.
\end{aligned}$$

Pero si $H_\infty < \infty$ entonces

$$\begin{aligned}
H_\infty =& (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \ldots \\
&< (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots \\
&= H_\infty
\end{aligned}$$

llegando a una contradicción.

4.3. H_n nunca es un entero para $n \neq 1$.

A excepción del caso $H_1 = 1$ y a pesar de que $\{H_n\}$ crece sin cota, sorprendentemente, ésta nunca toma un valor entero al hacerlo. Mostraremos que cualquier subserie consecutiva de $\{H_n\}$ nunca es un entero, es decir, para cualquier entero positivo n, m con $m < n$

$$S_{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

no puede ser un entero.

Sabemos que S_{mn} siempre es una fracción, queremos demostrar que S_{mn} siempre tendrá una representación como una fracción con un numerador impar y un denominador par, lo que nos dice que no puede ser entero.

Para esto, ocuparemos el siguiente resultado:

"En cualquier subsucesión finita y consecutiva de la sucesión $1, 2, 3, 4, \ldots$ hay un único término con la mayor potencia de 2 en su descomposición de primos".

Demostraremos primeramente este resultado.

Dada alguna subsucesión de $1, 2, 3, 4, \ldots$, estamos buscando en ella un número que sea el de la potencia más grande de 2 al momento de descomponerlo en números primos.

Si la subsucesión contiene términos que sean potencias de 2, es decir, de la forma 2^α entonces el que tenga la mayor potencia sería el número buscado.

De no ser así, entonces la sucesión se encuentra entre dos potencias consecutivas de 2, digamos, entre 2^α y $2^{\alpha+1}$, que es lo mismo que $2 \cdot 2^{\alpha-1}$ y $4 \cdot 2^{\alpha-1}$, entonces el número con la mayor potencia de 2 entre ellos sería $3 \cdot 2^{\alpha-1}$. Si este número se encuentra en la subsucesión entonces éste sería el número buscado.

De lo contrario la subsucesión debe encontrarse entre $2 \cdot 2^{\alpha-1}$ y $3 \cdot 2^{\alpha-1}$ o entre $2 \cdot 3^{\alpha-1}$

y $4 \cdot 2^{\alpha-1}$. Si tuviéramos el primer caso, entonces la subsucesión se encuentra entre $4 \cdot 2^{\alpha-2}$ y $6 \cdot 2^{\alpha-2}$ en donde la mayor potencia de 2 sería $5 \cdot 2^{\alpha-2}$. Si tuviéramos el segundo caso, entonces la subsucesón se encuentra entre $6 \cdot 2^{\alpha-2}$ y $8 \cdot 2^{\alpha-2}$ y el número con la mayor potencia de 2 entre ellos sería $7 \cdot 2^{\alpha-2}$. Si se encontrara alguno de ellos en la subsucesión, sería el número buscado y de no ser así se continua de la misma forma hasta encontrarlo. (Éste debe existir, pues de tener mínimo 2 números consecutivos uno debe ser par).

Ahora, para empezar con la demostración, necesitamos ver que el denominador de S_{mn} siempre es par y para ello haremos uso de la proposición ya demostrada.
Para

$$S_{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n} \quad m < n$$

tenemos que para la subsucesión consecutiva de los naturales $\{m, m+1, \ldots, n\}$ ésta tiene un único término con el factor mayor de 2, llamémosle k, así, al momento de sacar el mínimo común múltiplo (denominador) para sumar los términos, tendremos por lo menos una potencia de 2, por lo que el denominador será par.

Por otro lado, sabemos que el término $\frac{1}{k}$ tiene al factor más grande de 2 en su denominador, así, al momento de poner $\frac{1}{k}$ en la forma $\frac{r_k}{m.c.m.}$, r_k debe ser impar, ya que sólo se ocupará múltiplicarlo por primos impares para alcanzar el m.c.m.

Para los demás términos de S_{mn} sabemos que ninguno tiene la potencia más grande de 2 en su denominador, entonces al momento de escribirlos de la forma $\frac{r_n}{m.c.m.}$, r_n debe ser par para $n \neq k$.

Así, la suma de los numeradores $r_m + r_{m+1} + \ldots + r_k + \ldots + r_n$ es impar, pues r_k es impar y los demás son pares.

Por tanto, nos queda que S_{mn} tiene una representación con numerador impar y denominador par y por tanto, S_{mn} no puede ser entero.

Para el caso de H_n sólo basta tomar $m = 1$.

4.4. H_n es un decimal infinito para $n \notin \{1, 2, 6\}$.

Como ya lo habíamos dicho H_n siempre es un racional, pues es la suma de términos racionales, por lo que su desarrollo decimal es finito o infinito periódico.

Podemos observar en los primeros 6 valores de H_n:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= 1 \\
H_2 &= 1.5 \\
H_3 &= 1.8\overline{3} \\
H_4 &= 2.08\overline{3} \\
H_5 &= 2.28\overline{3} \\
H_6 &= 2.45 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

que H_1, H_2 y H_6 son los únicos que tienen una expansión decimal finita.

Queremos demostrar, que para todos los valores que siguen, es decir, para $n \geq 7$, H_n siempre será un decimal infinito periódico.

Para nuestra prueba, haremos uso de la llamada "Conjetura de Bertrand", uno de los resultados más significativos en teoría de números.

El matemático francés Joseph Bertrand (1822 - 1900) conjeturó que para cada entero positivo $n > 1$ existe por lo menos un primo p que satisface $n < p < 2n$, lo cual logró verificar para $n < 3,000,000$. La demostración de esta conjetura fue dada por el matemático ruso Chebychev (1821-1894) en 1850.

Para empezar, es claro que si un número tiene un desarrollo decimal finito, entonces puede ser representado como una fracción con denominador un múltiplo de 10, por ejemplo:

$$2.34 = \frac{234}{10^2}$$

Sabemos que $10 = 2 \cdot 5$, por lo que el denominador puede ser representado como una potencia de $2 \cdot 5$ y después de posibles cancelaciones, quedaría de la forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$, como en el ejemplo anterior:

$$\frac{234}{10^2} = \frac{2 \cdot 117}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{117}{2 \cdot 5^2}$$

Para demostrar que H_n es un decimal infinito, es suficiente con demostrar que para $n \geq 7$ en la representación de H_n como cociente de primos relativos, el denominador contiene factores primos mayores a 5.

Sea $H_n = \frac{a_n}{b_n}$ con $n \geq 7$ y $(a_n, b_n) = 1$. Queremos demostrar que b_n es divisible por un primo $p > 5$.

Para ello, probaremos que para todos los primos p tales que

$$p \in [\frac{1}{2}(n+1), n]$$

p divide a b_n, lo cual demostraremos por inducción para toda $n \geq 7$.

- Para $n = 7$ tenemos el intervalo $[4, 7]$ y el conjunto de primos $\{5, 7\}$ y como,

  $$H_7 = \frac{363}{140}$$

  y tanto 7 como 5 divide a 140 entonces terminamos.

- Supongamos que se cumple para n, es decir, para $H_n = \frac{a_n}{b_n}$ los primos en el intervalo $[\frac{1}{2}(n+1), n]$ dividen a b_n.

  Queremos demostrar que para todo $p \in [\frac{1}{2}(n+2), n+1]$, p divide a b_{n+1}. Tenemos que,

  $$H_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n(n+1) + b_n}{b_n(n+1)}.$$

Como en este nuevo intervalo solo podríamos agregar el número $(n+1)$ a la nueva lista de primos, en caso de ser $(n+1)$ primo, $b_{n+1} = b_n(n+1)$ no tendría factores comunes con a_{n+1}, pues $a_{n+1} = a_n(n+1) + b_n$ y b_n no es divisible por $n+1$ y como obviamente $(n+1)$ divide a b_{n+1} el resultado se cumple para $n+1$ y por tanto para toda $n \geq 7$.

Ahora nos resta demostrar la existencia de un primo en el intervalo $[\frac{1}{2}(n+1), n]$ para $n \geq 7$.

Gracias a la conjetura de Betrand podemos demostrar que los intervalos $[p, 2p-1]$ con p primo se traslapan, pues entre p y $2p$, existe un primo p_0 por lo que los intervalos $[p, 2p-1]$ y $[p_0, 2p_0 - 1]$ se intersectan.

Así, para toda $n \geq 7$ existe un primo $p \geq 7$ tal que $n \in [p, 2p-1]$. Es decir

$$p \leq n \leq 2p - 1.$$

Entonces, tenemos $n \geq p$ por un lado y $p \leq \frac{1}{2}(n+1)$ por el otro, entonces $p \in [\frac{1}{2}(n+1), n]$.

Por lo tanto, para $n \geq 7$ siempre existe algún primo $p \geq 7$ entre $\frac{1}{2}(n+1)$ y n y por tanto, el desarrollo decimal de H_n siempre es infinita periódica para $n \geq 7$.

Capítulo 5

La constante γ de Euler

En este capítulo hablaremos sobre la constante matemática conocida como constante de Euler, que al igual que otras famosas constantes como π, i y e, se denota con un símbolo especial; en este caso, con la letra griega γ, siendo precisamente el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), quien la dio a conocer por primera vez. La constante de Euler, se define como el siguiente límite:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left((1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) - \ln(n)\right) \tag{5.1}$$

Su valor es aproximadamente $0.5772156649\ldots$ y hasta hoy en día se desconoce si es un número racional o irracional.

En la Sección 4.1 se presentan dos pruebas clásicas de la existencia del límite (5.1) dadas en los libros de texto [1][2]. Después se da en la Sección 4.2 algunas demostraciones alternativas encontradas en publicaciones periódicas, basadas en diferentes resultados y métodos del análisis matemático. Enseguida, en la Sección 4.3 exponemos dos formulaciones equivalentes de la constante y finalmente, en la 4.4 presentamos una curiosa relación de γ con la función exponencial.

5.1. Pruebas de la existencia de γ en los libros de texto.

a) En el texto de Lipman Berns [2], la prueba está basada en propiedades de las series monótonas acotadas.

Sea

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n),$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Empecemos con la desigualdad:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \ln(n) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \tag{5.2}$$

que se ve fácilmente en la Figura 5.1.

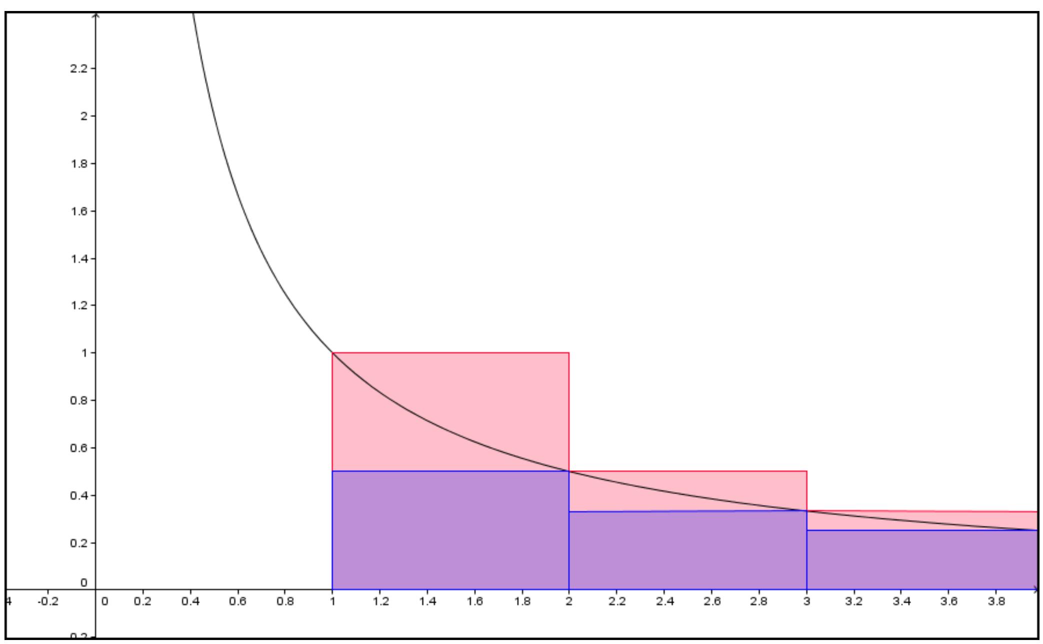

Figura 5.1: Gráfica de la función $y = 1/x$

Recordemos que podemos escribir la suma de los rectángulos "altos" para $f(x) = 1/x$

y la partición $P = \{1, 2, .., n\}$ de $[1, n]$ como:

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [i-1, i]\}$, y la suma de los rectángulos “bajos” como:

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

donde $m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [i-1, i]\}$.

La integral superior se define como:

$$\overline{I}(f) = \text{ínf}\{\overline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}[1, n]\}$$

y la integral inferior como:

$$\underline{I}(f) = \sup\{\underline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}[1, n]\}$$

donde $\mathcal{P}[1, n]$ es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[1, n]$. Así tenemos que,

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{I}(f)$$

y

$$\overline{I}(f) \leq \overline{S}(f, P),$$

pero como

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_1^n (1/x)dx,$$

entonces

$$\underline{S}(f, P) \leq \int_1^n \frac{1}{x}dx \leq \overline{S}(f, P),$$

que es lo mismo que

$$\underline{S}(f, P) \leq \ln(n) \leq \overline{S}(f, P).$$

Sea

$$b_n = \ln(n) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}).$$

Para ver la convergencia de esta sucesión, usaremos el Teorema 2.1.1. Restando $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ de (5.2) nos queda:

$$0 < b_n < 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

donde vemos que la sucesión $\{b_n\}$ está acotada superiormente.

Podemos ver en la Gráfica 5.1 que b_n es la suma de las áreas entre la gráfica y los rectángulos inferiores, lo que muestra que la sucesión $\{b_n\}$ es creciente.

Por tanto, tenemos que $\{b_n\}$ es convergente, y como

$$\gamma_n = 1 - b_n,$$

entonces $\{\gamma_n\}$ también resulta convergente.

b) En el texto de Apostol [1], para la prueba de existencia se utilizan propiedades de las series alternantes.

Sea $\{a_n\}$ la siguiente sucesión:

$$a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, \ldots, a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \ldots$$

y

$$a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}, \ldots, a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}, \ldots.$$

Podemos ver que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ pues:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \ln(x)\Big|_n^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) = \lim_{n\to\infty} \ln\big(\frac{n+1}{n}\big),$$

y como ln es una función continua, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\Big(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\Big) = \ln(1) = 0.$$

Además, $\{a_n\}$ es decreciente, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx = \frac{1}{n+1} = a_{2n+1},$$

como se puede ver más fácilmente en la Gráfica 5.1, y así

$$a_{2n-1} > a_{2n} > a_{2n+1}.$$

Por el Teorema 2.3.7 se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

converge.

Como la $(n-1)-$ésima suma parcial es

$$\begin{aligned}
c_{2n-1} &= 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \left(\int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

existe.

5.2. Algunas demostraciones dadas en la literatura.

5.2.1. La constante de Euler y el número e.

En [4] se da prueba de la existencia de la constante a partir de la definición de logaritmo natural:

$$\ln(x) = \int_1^x t^{-1} dt.$$

El número e lo definiremos como el número para el cual $\ln(e) = 1$, es decir

$$\ln(e) = \int_1^e t^{-1} dt = 1. \tag{5.3}$$

Primero mostraremos que e también puede ser expresado como

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Para ello, empezemos por considerar la integral

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1)\Big|_{1/(n+1)}^{1/n}; \tag{5.4}$$

de aquí evaluamos y desarrollamos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(x)dx &= \Big[\frac{1}{n}\big(\ln(\frac{1}{n}) - 1\big)\Big] - \Big[\frac{1}{n+1}\big(\ln(\frac{1}{n+1}) - 1\big)\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{\ln(\frac{1}{n})}{n}\Big) - \Big(\frac{\ln(\frac{1}{n+1})}{n+1}\Big) \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\Big((n+1)\ln\big(\frac{1}{n}\big) - n\ln\big(\frac{1}{n+1}\big)\Big) \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\Big(n\big[\ln\big(\frac{1}{n}\big) - \ln\big(\frac{1}{n+1}\big)\big] + \ln\big(\frac{1}{n}\big)\Big) \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\Big(n\big[\ln\big(\frac{n+1}{n}\big)\big] + \ln\big(\frac{1}{n}\big)\Big) \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\Big(\ln\big(\frac{(n+1)^n}{n^n}\big) + \ln\big(\frac{1}{n}\big)\Big) \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\ln\Big(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\Big);
\end{aligned}$$

así, tenemos que

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(x)dx = \frac{1}{n(n+1)}\ln\Big(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\Big) - \frac{1}{n(n+1)}. \tag{5.5}$$

Por otro lado, el Teorema del Valor Medio para Integrales nos dice que existe una $c_n \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ tal que

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(x)dx = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \ln(c_n).$$

Igualando la ecuación anterior con (5.5) obtenemos:

$$\frac{1}{n(n+1)} \ln\Big(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\Big) - \frac{1}{n(n+1)} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \ln(c_n).$$

Entonces

$$\ln\Big(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\Big) - 1 = \ln(c_n),$$

o lo que es lo mismo

$$\ln\Big(\frac{(n+1)^n/n^{n+1}}{c_n}\Big) = 1.$$

Así, por la definición (5.3)

$$e = \frac{(n+1)^n/n^{n+1}}{c_n} = \frac{1}{nc_n}(1 + \frac{1}{n})^n, \tag{5.6}$$

y como teníamos que $\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n}$, entonces nos queda que

$$1 < \frac{1}{nc_n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Sea $a_n = \frac{1}{nc_n}$, podemos calcular el límite de a_n cuando $n \to \infty$ por el llamado “Teorema del sándwich”, pues:

$$\lim_{n\to\infty} (1) = 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1,$$

y como $1 < a_n < 1 + \frac{1}{n}$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ existe y es igual a e.

Ahora, en la ecuación $e = a_n\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ tomaremos logaritmo en ambos lados y tendremos:

$$\begin{aligned}
\ln(e) &= \ln\big(a_n(1+\frac{1}{n})^n\big)\\
1 &= \ln(a_n) + \ln(1+\frac{1}{n})^n\\
1 &= \ln(a_n) + n\big(\ln(1+n) - \ln(n)\big)\\
1 &= \ln\big((\sqrt[n]{a_n})^n\big) + n\big(\ln(1+n) - \ln(n)\big)\\
\frac{1}{n} &= \ln(\sqrt[n]{a_n}) + \ln(1+n) - \ln(n),
\end{aligned}$$

y así tenemos la sucesión

$$1 = \ln(a_1) + \ln(2) - \ln(1)$$

$$\frac{1}{2} = \ln(\sqrt{a_2}) + \ln(3) - \ln(2)$$

$$\frac{1}{3} = \ln(\sqrt[3]{a_3}) + \ln(4) - \ln(3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n} = \ln(\sqrt[n]{a_n}) + \ln(n+1) - \ln(n).$$

Sumando las igualdades obtenemos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = \ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n}).$$

Queremos ver que el límite de la izquierda existe; para ello, demostraremos que la sucesión $\{\ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n})\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Usando el Teorema 2.1.1 veremos que esta sucesión es creciente y está acotada superiormente.

Para ver que es creciente, usaremos el hecho de que la función $\ln(x)$ es creciente. Vemos que

$$a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n} < a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n} {a_{n+1}}^{1/(n+1)}$$

pues teníamos que $a_n > 1$ para toda n. Aplicando logaritmo se conserva la desigualdad, es decir

$$\ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n}) < \ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n} {a_{n+1}}^{1/(n+1)}),$$

lo que prueba que la sucesión es creciente.

Por otro lado, para ver que la sucesión está acotada, tenemos

$$\begin{aligned}\ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n}) &= \ln(a_1) + \frac{1}{2}\ln(a_2) + ... + \frac{1}{n}\ln(a_n)\\ &< \ln(1+1) + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{2}) + ... + \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}),\end{aligned}$$

pues $a_n < 1 + \frac{1}{n}$. Ahora, como $e = (1+\frac{1}{n})^n(\frac{1}{nc_n})$, tenemos que

$$1 < (1+\frac{1}{n})^n < e \quad \forall n$$

y como la función $\ln(x)$ es creciente, se sigue que:

$$\ln(1) < \ln(1+\frac{1}{n})^n < \ln(e)$$

ó

$$0 < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n};$$

así la desigualdad nos queda

$$\ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n}) < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \frac{1}{n^2}.$$

Consecuentemente, la sucesión $\{\ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n})\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente pues

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i})^2 < \frac{\pi^2}{6}.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\ln(a_1 {a_2}^{1/2} {a_3}^{1/3} ... a_n^{1/n})\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y de aquí podemos concluir finalmente que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}) - \ln(n+1)\right)$$

existe.

<u>NOTA:</u>

Podemos demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) - \ln(n+1)\right) = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) - \ln(n)\right) = \gamma$$

por algunas propiedades sobre límites y propiedades de ln vistas en el Capítulo 3.

Sea $\beta = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-\ln(n+1)\right)$, queremos demostrar que $\beta=\gamma$, es decir, que $\gamma-\beta=0$

$$\begin{aligned}
\gamma-\beta &= \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-\ln(n)\right)-\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-\ln(n+1)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-\ln(n)\right)-\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-\ln(n+1)\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+1)-\ln(n)\right]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=\ln(1)=0
\end{aligned}$$

5.2.2. Demostración de la existencia de γ basada en la monotonía de ln.

Para demostrar la existencia del límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\ln(n)\right)$$

En [9] utilizan la desigualdad demostrada en la prueba anterior:

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

y el hecho de que $\ln(x)$ es una función creciente.

De la desigualdad anterior, podemos obtener las desigualdades siguientes:

$$(1+\frac{1}{n})^n < e \Rightarrow 1+\frac{1}{n} < e^{1/n} \Rightarrow \frac{n+1}{n} < e^{1/n} \Rightarrow 1 < \frac{e^{1/n}}{(n+1)/n} \tag{5.7}$$

y

$$\begin{aligned}
&(1+\frac{1}{n})^{n+1} > e \Rightarrow 1+\frac{1}{n} > e^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \frac{n+1}{n} > e^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)/n} < e^{\frac{-1}{n+1}}\\
&\Rightarrow \frac{1}{(n+1)/n} < e^{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)/n} < e^{\frac{1}{n(n+1)}}e^{\frac{-1}{n}} \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{n}}}{(n+1)/n} < e^{\frac{1}{n(n+1)}}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Sea $\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\ln(n)$. Mostraremos que $\{\gamma_n\}$ es una sucesión monótona y acotada y la existencia del límite se seguirá del Teorema 2.1.1.

Para demostrar que es monótona, vemos que

$$\gamma_n = \ln\Big[\frac{e^1}{2/1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3/2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{3}}}{4/3}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{\frac{1}{n-1}}}{n/(n-1)}\Big].$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned}
&\ln\Big[\frac{e^1}{2/1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3/2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{3}}}{4/3}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{\frac{1}{n-1}}}{n/(n-1)}\Big]\\
&\quad= \ln\Big(\frac{e^1}{2/1}) + \ln(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3/2}) + \ln(\frac{e^{\frac{1}{3}}}{4/3}) + \ldots + \ln(\frac{e^{\frac{1}{n-1}}}{n/(n-1)}\Big)\\
&\quad= \big[\ln(e^1) - \ln(2/1)\big] + \big[\ln(e^{\frac{1}{2}}) - \ln(3/2)\big] + \ldots + \big[\ln(e^{\frac{1}{n-1}}) - \ln(n/(n-1))\big]\\
&\quad= \big[1 - \ln(2/1)\big] + \big[\frac{1}{2} - \ln(3/2)\big] + \ldots + \big[\frac{1}{n-1} - \ln(n/(n-1))\big]\\
&\quad= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln\Big(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\Big)\\
&\quad= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln(n).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\ln\Big[\frac{e^1}{2/1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3/2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{3}}}{4/3}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{\frac{1}{n-1}}}{n/(n-1)}\Big] < \ln\Big[\frac{e^1}{2/1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3/2}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}}{(n+1)/n}\Big]$$

por la desigualdad (5.7) y el hecho de que $\ln(x)$ es una función creciente. Por tanto, $\gamma_n < \gamma_{n+1}$.

Para probar que $\{\gamma_n\}$ está acotada vemos que:

$$\gamma_n = \ln\Big[\frac{e^1}{2/1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3/2}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{\frac{1}{n-1}}}{n/(n-1)}\Big] < \ln\big[e^{\frac{1}{(1)(2)}}\cdot e^{\frac{1}{(2)(3)}}\cdot\ldots e^{\frac{1}{(n+1)(n)}}\big],$$

por la desigualdad (5.8) y el hecho de que $\ln(x)$ es una función creciente. Tenemos entonces,

$$\gamma_n < \sum_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{k(k+1)}\big) = \sum_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\big) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Como $\{\gamma_n\}$ es creciente y acotada concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$ existe.

5.3. Formulaciones equivalentes de la constante γ.

Existen otras formas en que la constante de Euler puede ser expresada, que se dan en los artículos [7] y [8] las cuales se presentan respectivamente a continuación.

5.3.1. Equivalencia 1.

Habiendo demostrado que $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-\ln(n)\right)$, en [7] se presenta la siguiente igualdad

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} \tag{5.9}$$

con $f_n(x) = x^n \ln x$.

Nos podemos fijar que

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= [x^n(\frac{1}{x})] + [nx^{n-1}\ln x] \\
&= x^{n-1}n[\frac{1}{n} + \ln x] \\
f_n''(x) &= n[(\frac{1}{n} + \ln x)((n-1)(x^{n-2}) + (x^{n-1})(\frac{1}{x})] \\
&= nx^{n-2}[(n-1)(\frac{1}{n} + \ln x) + 1] \\
&= x^{n-2}n(n-1)[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ln x].
\end{aligned}$$

y así, podemos demostrar por inducción que para $k \leq n$

$$f_n^{(k)}(x) = x^{n-k}[n(n-1)\dots(n-k+1)][\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} + \ln x]$$

- Para $k = 1$

$$f_n'(x) = x^{n-1}[n][\frac{1}{n} + \ln x],$$

que es lo que ya habíamos calculado.

- Supongamos que se cumple para $k = i$ (Hipótesis de inducción), es decir

$$f_n^i(x) = x^{n-i}[n(n-1)\dots(n-i+1)][\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-i+1} + \ln x].$$

Queremos demostrar que se cumple para $k = i+1$, para ello, derivamos $f_n^i(x)$, entonces

$$\begin{aligned} f_n^{i+1}(x) &= n(n-1)\cdots(n-i+1) \\ &\quad \big[(n-i)x^{n-i-1}\big(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n-i+1}+\ln x\big)+\big(\frac{1}{x}x^{n-i}\big)\big] \\ &= n(n-1)\cdots(n-i+1)x^{n-i-1} \\ &\quad \big[(n-i)\big(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n-i+1}+\ln x\big)+1\big] \\ &= n(n-1)\cdots(n-i+1)(n-i)x^{n-(i+1)} \\ &\quad \big[\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n-i+1}+\frac{1}{n-i}+\ln x\big], \end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto, para $k \leq n$

$$f_n^{(k)}(x) = x^{n-k}\big[n(n-1)\ldots(n-k+1)\big]\big[\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{n-k+1}+\ln(x)\big].$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(1/n) &= x^{n-n}\big[n(n-1)\cdots(1)\big]\big(\frac{1}{n}+\ldots+1+\ln(1/n)\big) \\ &= \big[n(n-1)\cdots(1)\big]\big[\frac{1}{n}+\ldots+1-\ln(n)\big] \\ &= n!\big[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)\big], \end{aligned}$$

Entonces la sucesión nos quedaría

$$\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)$$

de donde, el límite buscado es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} = \lim_{n\to\infty}\big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)\big) = \gamma$$

5.3.2. Equivalencia 2.

En [8] se muestra la siguiente equivalencia a la constante de Euler

$$\gamma = \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{g_r}{r}$$

con $g_r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$.

Empezaremos primeramente con la expansión de logaritmo dada en el Capítulo 3

$$\ln(1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Ahora, sea $x = \frac{1}{k}$,

$$\ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\frac{1}{k})^{m+1}}{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m+1)k^{m+1}}, \tag{5.10}$$

o bien,

$$\ln\big(1+\frac{1}{k}\big) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \ldots \quad (k \geq 1).$$

Ahora, sumando para k con valores desde 1 hasta $n-1$ en la igualdad (5.10) tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\big(1+\frac{1}{k}\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \big(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \ldots\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m+1)k^{m+1}}.$$

Como la suma de un número finito de series convergentes es convergente (Teo. 2.2.1), entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\big(1+\frac{1}{k}\big) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^m \frac{1}{(m+1)k^{m+1}}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \ldots.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\big(1+\frac{1}{k}\big) = \ln(2) + \ln\big(\frac{3}{2}\big) + \ln\big(\frac{4}{3}\big) + \ldots + \ln\big(\frac{n}{n-1}\big) = \ln\big(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1}\big) = \ln(n),$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \ldots = \ln(n),$$

ó

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} + \dots .$$

Sumando y restando $\frac{1}{n}$ en el lado derecho de la igualdad tenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} + ... = -\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n). \tag{5.11}$$

Para terminar, sólo falta tender n a ∞. Para ello debemos justificar la convergencia de las sumas del lado izquierdo.

Definamos

$$s(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4} - \dots .$$

Queremos mostrar que el $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = 0$ y para ello, mostraremos primero que $s(n)$ converge

Podemos ver que $s(n)$ es una serie alternante

$$s(n) = \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{rk^r}$$

por lo que podemos utilizar el Teorema 2.3.7 para demostrar la convergencia.

Sea $U_r(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{rk^r}$. Demostraremos que $U_r(n)$ es decreciente y que $\lim\limits_{r\to\infty} U_r(n) = 0$.

- Primeramente,

$$\begin{aligned} U_{r+1}(n) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(r+1)k^{r+1}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{rk^{r+1}} \\ &< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{rk^r} = U_r(n) \end{aligned}$$

  pues $k^{r+1} > k^r \quad \forall k \geq 1$, y por lo tanto $U_r(n)$ es decreciente.

- Para comprobar la convergencia observemos primeramente que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq c$$

para $r \geq 2$, ya que $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

Por otro lado, como $k \geq 1$, tenemos

$$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^r} \leq c$$

$$0 \leq \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^r} \leq \frac{c}{r}$$

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^r} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{c}{r}$$

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^r} \leq 0$$

de donde

$$\lim_{r\to\infty} U_r(n) = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar. Ahora, asociando los términos de $s(n)$ de la siguiente forma:

$$s(n) = U_2(n) - (U_3(n) - U_4(n)) - (U_5(n) - U_6(n)) - \dots$$

vemos que

$$s(n) < U_2(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k^2},$$

ya que $U_{r+1}(n) < U_r(n) \Rightarrow U_r(n) - U_{r+1}(n) > 0$ y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} s(n) < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Pero sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2}$ converge, de donde su cola $(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2k^2})$ tiende a 0. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} s(n)=0$

Sea $t(n)=\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{rk^r}$ y tenemos que $s(n)=\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{rk^r}$

sumando s(n) a ambos lados de la ecuación (5.11) tenemos

$$s(n)+\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{rk^r}=s(n)-\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n),$$

que es lo mismo que

$$\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r}{r}=s(n)-\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n).$$

Ahora podemos tomar límite de ambos lados, y nos queda:

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r}{r}&=\lim_{n\to\infty}\left(s(n)-\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma\end{aligned}$$

5.3.3. Demostración elemental de la existencia del límite de γ_n (sin recurrir a la monotonía de ln)

Ahora veremos una forma dada en [5] de demostrar la existencia de la constante γ de Euler mediante una sucesión alternativa que evita el uso de la función logaritmo natural y cuya convergencia puede ser demostrada con álgebra y el Teorema 2.1.1.

Para ello, consideraremos la siguiente sucesión:

$$a_1=1$$
$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ldots-\frac{1}{n^2}.$$

Obsérvese que la suma de la igualdad anterior tiene $n(n-1)$ términos negativos. Ahora, escribiendo la sucesión $\{a_n\}$ en términos de $\{\gamma_n\}$, donde

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n),$$

tendríamos:

$$a_n = 2\gamma_n - \gamma_{n^2},$$

pues

$$2\gamma_n = 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n))$$

y

$$\begin{aligned}\gamma_{n^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \ln(n^2)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2} - 2\ln(n).\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}2\gamma_n - \gamma_{n^2} &= 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n))\\ &\quad - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2} - 2\ln(n))\\ &= 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) - 2\ln(n)\\ &\quad - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2}) + 2\ln(n)\\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2})\\ &= a_n.\end{aligned}$$

Podemos observar que en caso de que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n$ existiera y fuera igual a γ tendríamos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2\gamma_n - \gamma_{n^2}) = 2\lim_{n\to\infty} \gamma_n - \lim_{n\to\infty} \gamma_{n^2} = 2\gamma - \gamma = \gamma.$$

Así, tenemos una sucesión alternativa sin logaritmos para demostrar la existencia de γ, para ello debemos demostrar (Teo. 2.1.1) que $\{a_n\}$ es monótona y que está acotada.

- Para probar que la sucesión es monótona, mostraremos que $a_{n+1} - a_n < 0$, es decir, que $\{a_n\}$ es decreciente.

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)\\ &\quad - \Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{n^2}\Big)\\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n^2+1} - \ldots - \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (5.12)\end{aligned}$$

con $2n+1$ términos negativos para $n \geq 1$.

Haremos uso de la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{n^2+i} + \frac{1}{(n+1)^2 - i + 1} \geq \frac{2}{n^2+n+1}, \tag{5.13}$$

para $1 \leq i \leq 2n+1$, la cual demostraremos al final de esta sección.

Vamos a demostrar que los términos negativos en (5.12) los podemos acotar de la siguiente forma

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{2n+1}{n^2+n+1}.$$

Para $i = 1$ en la desigualdad (5.13) tenemos

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{2}{n^2+n+1},$$

para $i = 2$

$$\frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} \geq \frac{2}{n^2+n+1};$$

así, para $i = 2n+1$

$$\frac{1}{n^2+2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 - 2n} \geq \frac{2}{n^2+n+1};$$

sumando las desigualdades de cada lado para $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$ nos queda:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\Big) + \Big(\frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{(n+1)^2-1}\Big) + \ldots \\ + \Big(\frac{1}{n^2+2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2-2n}\Big) \geq \frac{2(2n+1)}{n^2+n+1},\end{aligned}$$

la cual es equivalente a

$$\frac{2}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{2}{n^2+2n+1} \geq \frac{2(2n+1)}{n^2+n+1}.$$

Es decir

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n+1}\geq\frac{2n+1}{n^2+n+1}.$$

Sustituyendo en (5.12) nos queda

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{2}{n+1}-\frac{1}{n^2+1}-\ldots-\frac{1}{(n+1)^2}\\
&\leq \frac{2}{n+1}-\frac{2n+1}{n^2+n+1}\\
&= \frac{2(n^2+n+1)-(2n+1)(n+1)}{(n+1)(n^2+n+1)}\\
&= \frac{-n}{(n+1)(n^2+n+1)}<0
\end{aligned}$$

es decir, $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

- Falta demostrar que $\{a_n\}$ está acotada inferiormente.

Para ver que $a_n > 0$ consideremos el siguiente arreglo:

$$\begin{aligned}
a_n = 1 &- \frac{1}{n+1}-\ldots-\frac{1}{2n-1}\\
&+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-\ldots-\frac{1}{3n-1}\\
&\qquad\vdots\\
&+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2-n+2}-\ldots-\frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

en general, para cada renglón tenemos:

$$\frac{1}{i}-\frac{1}{(n-1)i+2}-\ldots-\frac{1}{(n-1)i+n}\qquad i=1,\ldots,n,$$

con $n-1$ términos negativos.

Vamos a sustituir en cada uno de los n renglones los $n-1$ términos negativos por el término más grande y como $\frac{1}{(n-1)i+k}\leq\frac{1}{(n-1)i+2}$ para $k\geq 2$ tendríamos por ejemplo en el i-ésimo renglón

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}-\frac{1}{(n-1)i+2}-\ldots-\frac{1}{(n-1)i+n} &\geq \frac{1}{i}-\frac{1}{(n-1)i+2}-\ldots-\frac{1}{(n-1)i+2}\\ &= \frac{1}{i}-\frac{n-1}{(n-1)i+2}\\ &= \frac{1}{i}-\frac{1}{i+\frac{2}{n-1}} > 0\end{aligned}$$

pues $\frac{2}{n-1} > 0$ para $n \geq 2$. Por lo tanto $\{a_n\}$ está acotada inferiormente.

Por el Teorema 2.1.1 tenemos que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente.

Por último, demostraremos la desigualdad (5.13). Observemos que es suficiente con demostrarla para $1 \leq i \leq n+1$ pues la desigualdad es la misma para las parejas 1 y $2n+1$, 2 y $2n$, 3 y $2n-1$, es decir, en general para k y $2n-k+2$, pues para k la desigualdad queda

$$\frac{1}{n^2+k}+\frac{1}{(n+1)^2-k+1} \geq \frac{2}{n^2+n+1}$$

y para $2n-k+2$,

$$\frac{1}{n^2+(2n-k+2)}+\frac{1}{(n+1)^2-(2n-k+2)} \geq \frac{2}{n^2+n+1},$$

es decir,

$$\frac{1}{(n+1)^2-k+1}+\frac{1}{n^2+k} \geq \frac{2}{n^2+n+1}$$

que es equivalente a la desigualdad para k.

Entonces, vamos a demostrar que

$$\frac{1}{n^2+i}+\frac{1}{(n+1)^2-i+1} \geq \frac{2}{n^2+n+1}$$

para $1 \leq i \leq n+1$.

Multiplicando ambos lados por n^2+n+1

$$\frac{n^2+n+1}{n^2+i}+\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2-i+1} \geq 2,$$

agregando y restando términos

$$\frac{n^2+n+1+i-i}{n^2+i}+\frac{n^2+n+1+n-n+i-i+1-1}{(n+1)^2-i+1} \geq 2,$$

agrupando términos

$$\frac{(n^2+i)+(n+1-i)}{n^2+i}+\frac{((n+1)^2-i+1)-(n-i+1)}{(n+1)^2-i+1}\geq 2,$$

que es lo mismo que

$$2+\frac{n+1-i}{n^2+i}-\frac{n-i+1}{(n+1)^2-i+1}\geq 2.$$

Debemos demostrar ahora que

$$\frac{n+1-i}{n^2+i}-\frac{n-i+1}{(n+1)^2-i+1}\geq 0;$$

como $n+1-i\geq 0$, entonces basta con probar que $n^2+i\leq (n+1)^2-i+1$. Desarrollando la desigualdad tenemos:

$$n^2+i\leq (n+1)^2-i+1$$

$$n^2+i\leq n^2+2n+2-i$$

$$2i\leq 2(n+1)$$

$$i\leq n+1$$

lo cual es cierto. Como todos los pasos son reversibles la desigualdad utilizada (5.13) queda demostrada y con ello se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

existe.

5.4. Una curiosa relación de γ con la función exponencial.

En [6] se muestra que si $x=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, entonces $n=[e^{x-\gamma}]$, donde $[a]$ denota la parte entera de a.

Empezemos por definir la siguiente función

$$f(y)=\frac{1}{y+1}-\ln\left(\frac{y+1}{y}\right).$$

Entonces:

- $f(1) < 0$,

  pues evaluando tenemos que

$$f(1) = \frac{1}{(1)+1} - \ln\Big(\frac{(1)+1}{1}\Big) = \frac{1}{2} - \ln(2) < 0.$$

- $f'(y) > 0 \quad \forall y \geq 1$,

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{-1}{(y+2)^2} - (\frac{y}{y+1})(\frac{y-(y+1)}{y^2}) \\ &= \frac{-1}{(y+1)^2} - \frac{-y}{(y+1)y^2} \\ &= \frac{-y^2 + y(y+1)}{y^2(y+1)^2} \\ &= \frac{y}{y^2(y+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{y\to\infty} f(y) = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} f(y) &= \lim_{y\to\infty} \Big(\frac{1}{y+1} - \ln(\frac{y+1}{y})\Big) \\ &= \lim_{y\to\infty} (\frac{1}{y+1}) - \lim_{y\to\infty} \ln(\frac{y+1}{y}). \end{aligned}$$

  Como ln es una función continua podemos “meter” el límite

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} f(y) &= 0 - \ln\Big(\lim_{y\to\infty}(\frac{y+1}{y})\Big) \\ &= -\ln(1) = 0. \end{aligned}$$

  De los puntos anteriores podemos concluir que la función $f(y) < 0$ para toda $y \geq 1$

Ahora mostraremos que la sucesión

$$a_n = x - \ln(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)$$

es monótona decreciente. Efectivamente

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= (\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \ln(n+1)) - (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= f(n) < 0
\end{aligned}$$

ya que $n \geq 1$.

De forma similar, podemos ver que $x - \ln(n+1)$ es monótona creciente.

Sea

$$g(y) = \frac{1}{y+1} + \ln\left(\frac{y+1}{y+2}\right).$$

Entonces

- $g(1) > 0$,

  pues evaluando:

  $$g(1) = \frac{1}{(1)+1} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) > 0.$$

- $g'(y) < 0, \quad \forall y \geq 1.$

  $$\begin{aligned}
  g'(y) &= \frac{-1}{(y+1)^2} + \frac{y+2}{y+1}\Big(\frac{(y+1)-(y+2)}{(y+1)^2}\Big) \\
  &= \frac{-1}{(y+1)^2} + \frac{-(y+2)}{(y+1)(y+2)^2} \\
  &= \frac{-(y+2)^2 - (y+2)(y+1)}{(y+1)^2(y+2)^2} \\
  &= \frac{-2y^2 - 7y - 6}{(y+1)^2(y+2)^2} \\
  &= \frac{-(2y+3)(y+2)}{(y+1)^2(y+2)^2} < 0.
  \end{aligned}$$

- $\lim_{y \to \infty} g(y) = 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} g(y) &= \lim_{y\to\infty}\Big(\frac{1}{y+1}+\ln(\frac{y+1}{y+2})\Big)\\ &= 0+\ln(1)=0.\end{aligned}$$

Así por los puntos anteriores, $g(y)>0$ para toda $y\geq 1$.

Ahora, sea $b_n = x-\ln(n+1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n+1)$. Entonces

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n &= [\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}-\ln(n+2)]-[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n+1)]\\ &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)\\ &= \frac{1}{n+1}+\ln\,(\frac{n+1}{n+2}) = g(n),\end{aligned}$$

por lo tanto, $\{b_n\}$ es una sucesión monótona creciente.

Como $\{a_n\}$ es decreciente, entonces

$$a_n > \lim_{n\to\infty} a_n$$

y como $\{b_n\}$ es creciente, entonces

$$b_n < \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Esto es,

$$x-\ln(n) > \lim_{n\to\infty}\,(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)) = \lim_{n\to\infty}\,(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n+1)) > x-\ln(n+1);$$

$$x-\ln(n) > \gamma > x-\ln(n+1);$$

$$-\ln(n) > \gamma - x > -\ln(n+1);$$

$$\ln(n) < x-\gamma < \ln(n+1)$$

$$n < e^{x-\gamma} < n+1.$$

Por lo tanto $n=[e^{x-\gamma}]$.

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M., *Calculus Vol.1*, segunda edición, John Wiley and sons , United States of America, 1967

[2] Bers, Lipman, *Calculus: Vol 1.*, Holt, Rinehart and Winston , New York, 1969

[3] Havil, Julian, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, New Jersey, 1952

[4] Barnes, C. W., *Euler's constant and e*, The american mathematical monthly, 1984

[5] Scott, J. A., *The Euler constant gamma without logarithms*, The mathematical gazette, 1996

[6] Sandham,H. F., *Euler's constant*, Elementary problems and solutions, 1950

[7] Littlejohn, Lance, *Euler's constant as a limit*, Problems and solutions, 1978

[8] Glicksman, A. M., *Euler's constant*, Problems and solutions, 1942

[9] Burk, Frank, *Euler's constant*, California State University

[10] S. Thomson Brian, B. Bruckner Judith, M. Bruckner Andrew, *Elementary Real Analysis*, Prentice Hall, 2001