



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Licenciatura en Matemáticas

Integrabilidad y simetrías de Sistemas Hamiltonianos

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Licenciado en
Matemáticas

Presenta:

Luis Alberto Trujillo Ortega

Director de Tesis: Dr. Misael Avendaño Camacho

Hermosillo, Sonora, México, 4 de noviembre de 2015

SINODALES

Dr. Yury Vorobiev
Universidad de Sonora

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora

M.C. Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora

Dr. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora

REVISORES

Dr. Yury Vorobiev
Universidad de Sonora

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora

M.C. Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora

Dr. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora

Agradecimientos

A mi familia.

Índice general

Introducción	1
1. Nociones Fundamentales de Geometría Diferencial	3
1.1. Definición de variedades diferenciables y ejemplos.	3
1.2. Funciones diferenciables, inmersiones y submersiones.	5
1.3. Subvariedades.	6
1.4. Campos vectoriales.	7
1.5. Formas diferenciales.	13
1.6. Integración en variedades.	16
1.7. Acciones de grupos de Lie en una variedad.	19
1.8. Acciones de grupos discretos en una variedad.	21
2. Sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^{2n}	27
2.1. El corchete de Poisson en \mathbb{R}^{2n} . Definición, propiedades y ejemplos.	27
2.2. Campos Hamiltonianos, criterios de Hamiltonización y flujos Hamiltonianos.	29
2.3. Transformaciones canónicas.	31
2.4. El álgebra de integrales primeras de un sistema Hamiltoniano.	32
2.5. Sistemas Hamiltonianos lineales en el plano.	35
3. Integrabilidad y superintegrabilidad	37
3.1. Sistemas Hamiltonianos completamente integrables y el Teorema de Liouville-Arnold.	37
3.2. Ejemplos de sistemas completamente integrables.	39
3.3. Sistemas Hamiltonianos superintegrables.	42
3.4. Ejemplos de sistemas superintegrables.	43
4. Acciones lineales de grupos de Lie compactos en \mathbb{R}^n y el Teorema de Schwarz	45
4.1. La topología C^∞ para el espacio de funciones suaves.	45
4.2. Funciones G -invariantes y el operador de promedios	47
4.3. El álgebra de polinomios G -invariantes y el teorema de las bases de ideales de Hilbert.	50
4.4. Teorema de Schwartz.	53
5. El álgebra de simetrías del oscilador armónico con dos grados de libertad	57
5.1. Coordenadas acción-ángulo para el oscilador armónico.	58
5.2. El álgebra de simetrías del oscilador armónico.	59

5.3. Generadores del álgebra de simetrías y sus relaciones de conmutación.	61
5.4. Resonancia 1 : 1 para el oscilador armónico 2-dimensional	64
5.5. Resonancia 0	64

Introducción

En la Mecánica Clásica, uno de los sistemas más conocidos es el oscilador armónico unidimensional, el cual describe la dinámica de una masa puntual sujeta al final de un resorte que oscila sin fricción. Este sistema modela la fuerza ejercida sobre la masa en términos de la posición. En este trabajo de tesis hacemos un énfasis particular en el oscilador armónico con dos grados de libertad, el cual puede ser modelado en \mathbb{R}^4 debido a que la dinámica del sistema queda completamente definida conociendo la posición y el momento.

En general, sabemos que cada sistema dinámico define un flujo, el cual describe las trayectorias del sistema. En ocasiones, al aplicar una transformación al espacio fase, el conjunto de trayectorias queda invariante. En tal caso, a esa transformación se le conoce como *simetría* del sistema. Vemos también que hay una relación muy estrecha entre funciones invariantes a lo largo del flujo y las simetrías del sistema. Con el fin de estudiar las simetrías de un sistema dinámico, mostraremos explícitamente cómo una función invariante induce simetrías del sistema. Tal relación nos permite centrar nuestro enfoque únicamente en las funciones invariantes a lo largo del flujo, a las cuales las llamamos integrales primeras.

Un resultado conocido es que el álgebra de integrales primeras del oscilador armónico con dos grados de libertad es finitamente generado. Sin embargo, no es común encontrar este resultado en la literatura, por ello decidimos realizar esta aportación. En este trabajo se demuestra que el álgebra de integrales primeras del oscilador armónico con dos grados de libertad es finitamente generado y además se exhibe explícitamente un conjunto de generadores.

En el primer capítulo se revisa material preliminar básico para este trabajo, donde se aclara el lenguaje a utilizar y aparecen algunas propiedades importantes con las que se trabaja en capítulos posteriores.

El segundo capítulo trata de los sistemas Hamiltonianos en general, así como de sus propiedades. También estudiamos el conjunto de integrales primeras, en donde se encuentra que posee estructura de álgebra y de álgebra de Lie, es decir, un álgebra de Poisson.

El tercer capítulo trata sobre un teorema de gran importancia, el Teorema de Liouville-Arnold, el cual brinda una descripción de los sistemas Liouville integrables, es decir, aquellos que tienen un conjunto finito de integrales primeras que cumple con ciertas propiedades. También obtenemos información de otro tipo de sistemas,

a saber, los superintegrables, donde las condiciones sobre el conjunto de integrales primeras exigen menos.

El capítulo cuarto contiene el material suficiente para abordar el Teorema de Schwarz, el cual da condiciones para que un conjunto de funciones invariantes bajo la acción de un grupo sea finitamente generado.

Para el quinto y último capítulo, mostramos cómo se ajustan los resultados previos al oscilador armónico en dos grados de libertad para demostrar que su álgebra de integrales primeras es finitamente generado. Además, se hace el cálculo de una base de integrales primeras generadoras.

Capítulo 1

Nociones Fundamentales de Geometría Diferencial

El material que se presenta en este capítulo es estándar y se puede consultar con mayor detalle en [3, 4, 19].

1.1. Definición de variedades diferenciables y ejemplos.

En este primer capítulo se revisan conceptos básicos para el desarrollo del presente trabajo y se exponen el espacio y las estructuras con las que se desarrolla este estudio. Empecemos con nuestra primera definición:

Definición 1.1.1. Una **variedad diferenciable** n -dimensional M es un espacio topológico Hausdorff con una base topológica numerable, que satisface:

- 1) Existe una colección de parejas (U_α, Φ_α) , con U_α abierto de M , $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ y $\Phi : U_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfismo.
- 2) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ entre abiertos de \mathbb{R}^n .

A cada pareja (U_α, Φ_α) de la colección anterior lo llamamos **carta local** o **sistema de coordenadas** sobre M .

La noción de variedad es una generalización de espacio euclidiano, pues localmente se comporta como uno, y al considerar variedades diferenciables pedimos que el cambio de una carta a otra sea suave. A una colección de cartas locales cuyos dominios cubren M le llamamos un **atlas** \mathcal{A} de dimensión n . Además, para las cartas (U, Φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\Phi})$ el difeomorfismo

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\Phi}(U \cap \tilde{U})$$

es llamado **función de transición** o **cambio de coordenadas**. Un atlas de clase \mathcal{C}^∞ en M es llamado **maximal** cuando este contiene todas las cartas locales $(\tilde{U}, \tilde{\Phi})$ cuyo cambio de coordenadas con elementos $(U, \Phi) \in \mathcal{A}$, $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$, son difeomorfismos de clase \mathcal{C}^∞ . Además, en un atlas maximal, los dominios de las cartas locales forman una base para la topología de M . Por **estructura diferenciable** nos referiremos a una variedad diferenciable junto con un atlas para esta variedad.

Observemos que \mathbb{R}^n como espacio euclidiano es una variedad diferenciable donde $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$ es una estructura diferenciable. Otra variedad que resulta de nuestro interés en este trabajo es $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Mostraremos que \mathbb{S}^1 es variedad diferenciable.

Para comenzar, dotemos a \mathbb{S}^1 de la topología relativa y con ello los conjuntos $U_1 = \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$ y $U_2 = \mathbb{S}^1 - \{(-1, 0)\}$ son abiertos en \mathbb{S}^1 . Luego, definamos las funciones $\Phi_1 : U_1 \rightarrow (0, 2\pi)$ y $\Phi_2 : U_2 \rightarrow (-\pi, \pi)$ de la siguiente manera:

$$\Phi_1(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y = 1 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & -1 < x < 0, -1 < y < 1 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y = -1 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & 0 < x < 1, -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_2(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & -1 < x < 0, -1 < y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y = -1 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & 0 < x < 1, -1 < y < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y = 1 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & -1 < x < 0, 0 < y < 1 \end{cases}$$

Estas funciones son homeomorfismos y pueden ser interpretados como las funciones que asignan al vector (x, y) su ángulo con respecto al eje horizontal. Veremos que la colección $\{(U_1, \Phi_1), (U_2, \Phi_2)\}$ es una estructura diferenciable para \mathbb{S}^1 . Para ello, habrá que mostrar que $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ y $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ son difeomorfismos.

Para $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ se tiene que $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(t) = t$ cuando $t \in (0, \pi)$ y $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(t) = t - 2\pi$ cuando $t \in (\pi, 2\pi)$. Esto hace que $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ sea un difeomorfismo y, análogamente, $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ es un difeomorfismo.

Otros ejemplos de variedades diferenciables son \mathbb{S}^2 y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, para mayor información sobre variedades diferenciables se puede consultar [19].

Proposición 1.1.2. *Sean M, N variedades diferenciables. Entonces existe una estructura diferenciable en $M \times N$.*

Demostración. Dotemos a $M \times N$ de la topología producto. $M \times N$ con esta topología es de Hausdorff y posee una base numerable, pues tales propiedades son heredadas de las variedades M y N . Sean $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \Psi_\beta)\}_{\beta \in I}$ los atlas en M y N , respectivamente. Definamos el conjunto

$$A = \{(U_\alpha \times V_\beta, \tilde{\Phi}_{\alpha\beta}) | (U_\alpha, \Phi_\alpha) \in \mathcal{A}, (V_\beta, \Psi_\beta) \in \mathcal{B}\}$$

donde $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta)$ con $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(x, y) := (\Phi_\alpha(x), \Psi_\beta(y))$ es un homeomorfismo de $U_\alpha \times V_\beta$ con su imagen. Luego, dadas las parejas $(U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1}, \tilde{\Phi}_{\alpha_1\beta_1}), (U_{\alpha_2} \times V_{\beta_2}, \tilde{\Phi}_{\alpha_2\beta_2}) \in A$ tal que $(U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1}) \cap (U_{\alpha_2} \times V_{\beta_2}) \neq \emptyset$ se tiene que

$$\tilde{\Phi}_{\alpha_2\beta_2} \circ \tilde{\Phi}_{\alpha_1\beta_1}^{-1} : \tilde{\Phi}_{\alpha_1\beta_1}(U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cap U_{\alpha_2} \times V_{\beta_2}) \rightarrow \tilde{\Phi}_{\alpha_2\beta_2}(U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cap U_{\alpha_2} \times V_{\beta_2})$$

con $\tilde{\Phi}_{\alpha_2\beta_2} \circ \tilde{\Phi}_{\alpha_1\beta_1}^{-1}(x, y) = (\Phi_{\alpha_2} \circ \Phi_{\alpha_1}^{-1}(x), \Psi_{\beta_2} \circ \Psi_{\beta_1}^{-1}(y))$ es un difeomorfismo debido a que $\Phi_{\alpha_2} \circ \Phi_{\alpha_1}^{-1}$ y $\Psi_{\beta_2} \circ \Psi_{\beta_1}^{-1}$ son difeomorfismos. Por lo tanto, A es un atlas para $M \times N$. ■

Ejemplo 1.1.3. Debido a la proposición anterior y a que \mathbb{S}^1 es variedad diferencial, se tiene que para

$$\mathbb{T}^k := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$

con la estructura diferencial del producto cartesiano es una variedad diferencial. Esta variedad diferencial es conocida como el toro k -dimensional.

1.2. Funciones diferenciables, inmersiones y submersiones.

La noción de variedades diferenciables permite introducir la noción de diferenciabilidad para funciones entre variedades.

Sea $F : N \rightarrow M$ una función entre variedades diferenciables. Diremos que F es **suave** si para cada $p \in N$ existen vecindades coordenadas (U, Φ) de p y (V, Ψ) de $F(p)$, con $F(U) \subset V$, tales que $\hat{F} = \Psi \circ F \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \rightarrow \Psi(U)$ es diferenciable en $\Phi(p)$. Llamaremos a \hat{F} la **representación local** de F en las cartas (U, Φ) y (V, Ψ) .

En otras palabras, F se dice suave si su representación local (o sea, traducción al lenguaje euclidiano) es diferenciable.

Definición 1.2.1. Una función $F : N \rightarrow M$ suave es un **difeomorfismo** si F es un homeomorfismo y F^{-1} es diferenciable (suave). M y N se dicen ser **variedades difeomorfas** si existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$.

Ejemplo 1.2.2. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t^3$. A continuación daremos dos estructuras diferenciables de \mathbb{R} , tal que para solo una de ellas F^{-1} es diferenciable.

Dotemos a \mathbb{R} de la estructura diferenciable inducida por $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})\}$. Consideremos también $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}, \Psi)\}$ con $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Psi(t) := t^3$. Notemos que los atlas \mathcal{A} y $\tilde{\mathcal{A}}$ no son compatibles pues $\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \Psi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}} \circ \Psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{3}}$ no es un difeomorfismo de clase C^∞ .

Ahora, sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t^{\frac{1}{3}}$. Probaremos que F es un difeomorfismo cuando \mathbb{R} tiene la estructura diferencial inducida por el atlas (\mathbb{R}, Ψ) . F es suave dado que $\hat{F}(t) = \Psi \circ F \circ \text{id}_{\mathbb{R}}^{-1}(t) = \Psi \circ F(t) = \Psi(t^{\frac{1}{3}}) = t$ es diferenciable en \mathbb{R} , F es homeomorfismo y $F^{-1} = t^3$ es diferenciable, pues $\widehat{F^{-1}}(t) = t$ es diferenciable.

Sea $F : N \rightarrow M$ diferenciable. Se define el **rango** de F en $p \in N$ por el rango de \widehat{F} en $\Phi(p)$ y se denota por $\text{rank}_p F$, esto es, el rango de la diferencial de \widehat{F} .

A continuación damos la definición de algunos conceptos que nos servirán para la construcción de nuevas variedades diferenciables.

Definición 1.2.3. Sea $F : N \rightarrow M$ suave. F se dice ser una **inmersión** si $\text{rank} F = \dim N$ para toda $p \in N$.

Definición 1.2.4. Un **encaje** es una **inmersión inyectiva** $F : N \rightarrow M$ que además es un homeomorfismo de N en su imagen.

Teorema 1.2.5. Sea $F : N \rightarrow M$ una **inmersión**. Entonces para cada $p \in N$ existe una vecindad U tal que $F|_U$ es un **encaje** de U en M .

La prueba de este resultado se puede consultar en [4].

Definición 1.2.6. Sea $F : N \rightarrow M$ suave. F es una **submersión** si $\text{rank} F = \dim M$.

1.3. Subvariedades.

Así como en los espacios euclidianos podemos encontrar subespacios euclidianos, en las variedades diferenciables podemos encontrar subvariedades diferenciables, y para eso ya contamos con las herramientas necesarias para dar varios tipos de subvariedades tales como los encajes y las subvariedades regulares.

Sea F una **inmersión**. Si F es inyectiva, entonces N se puede identificar con su imagen $\widetilde{N} = F(N)$ y además se puede dotar a \widetilde{N} de una estructura diferenciable. Como N es una variedad diferenciable con atlas

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\},$$

donde $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, a \widetilde{N} se le puede asociar el atlas

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(V_\alpha, \Psi_\alpha)\},$$

donde $V_\alpha = F(U_\alpha)$ y $\Psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\Psi_\alpha := \Phi_\alpha \circ F^{-1}$. Notemos que $\cup V_\alpha = \widetilde{N}$ y para cualquier par de cartas coordenadas (V_α, Ψ_α) y (V_β, Ψ_β)

$$\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(V_\beta \cap V_\alpha) \rightarrow \Psi_\alpha(V_\beta \cap V_\alpha)$$

resulta ser un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ . \widetilde{N} es llamada **subvariedad inmersa** en M .

Ejemplo 1.3.1. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$. Entonces,

$$DF = \frac{dF}{dt} = (-2\pi \sin 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t, 1)$$

Observemos que $\text{rank}_t F = \dim \mathbb{R} = 1$ para todo t y F es inyectiva, por lo que F es una **inmersión** y su imagen es una **subvariedad inmersa** en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1.3.2. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

$$DF = \frac{dF}{dt} = (-2\pi \sin 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t).$$

F no es inyectiva y, en este caso, el rango de F vuelve a ser 1, por lo que es una inmersión no inyectiva.

Consideremos un encaje $F : N \rightarrow M$. Como F es un homeomorfismo de N sobre su imagen $\tilde{N} = F(N)$ con la topología de \tilde{N} inducida como subespacio de M , \tilde{N} es una subvariedad de M y es llamada un **encaje**.

Definición 1.3.3. Sea $N \subset M$. N se dice tener la propiedad de **n -subvariedad** si para cada $p \in N$ existe una carta coordenada (U, Φ) en M , $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))$ tal que:

- $\Phi(p) = (0, \dots, 0)$
- $\Phi(U) = B_\epsilon^m(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < \epsilon\}$
- $\Phi(U \cap N) = \{x \in B_\epsilon^m(0) \mid x^{n+1} = x^{n+2} = \dots = x^m = 0\}$

Las cartas coordenadas de este tipo son llamadas **coordenadas especiales** (relativas a N).

Considerando que N con la topología relativa es una variedad topológica, cada sistema de coordenadas especiales (U, Φ) de M define una carta coordenada en N , $(V, \hat{\Phi})$, con $V = U \cap N$ y $\hat{\Phi} = \pi \circ \Phi|_V$, donde $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n)$ es la proyección usual. Definamos también $i : N \rightarrow M$, como $i(x) = x$ la inclusión. Las cartas inducidas por las coordenadas especiales son compatibles y la estructura diferenciable que se define en N hace que i sea un encaje. En este caso, N es llamada una **subvariedad regular**.

El siguiente teorema es un criterio muy útil para garantizar que tenemos una subvariedad regular.

Teorema 1.3.4. Sea $F : N \rightarrow M$ diferenciable, donde $\dim M \leq \dim N$ y $\text{rank} F = \dim M$ en todo $A = F^{-1}(a)$ para algún $a \in M$. Entonces A es una subvariedad regular de N de dimensión $n - m$.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [4].

Ejemplo 1.3.5. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \|x\|$. F tiene rango 1 en $\mathbb{R}^n / \{0\}$, por lo que $F^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$ es una variedad regular.

1.4. Campos vectoriales.

Antes de definir a los campos vectoriales, haremos énfasis en la noción de **espacio tangente**. Para esto, consideremos a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ y sea $a \in \mathbb{R}^n$ con

$a = (a_1, \dots, a_n)$. Buscamos asociarle al punto a un espacio vectorial que denotaremos $T_a\mathbb{R}^n$ y lo llamaremos espacio tangente en $a \in \mathbb{R}^n$. Dado que \mathbb{R}^n tiene estructura de espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sobre \mathbb{R} , utilizaremos sus propiedades para definir las operaciones que harán a $T_a\mathbb{R}^n$ espacio vectorial.

Geoméricamente, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ se interpreta como el segmento dirigido que une el origen con (u_1, \dots, u_n) . Utilizando esta noción, $T_a\mathbb{R}^n = \{a\vec{x} | x \in \mathbb{R}^n\}$, donde $a\vec{x}$ es el segmento dirigido que une a con x . Visto de este modo, podemos definir la biyección $\Phi_a : \mathbb{R}^n \rightarrow T_a\mathbb{R}^n$, donde $\Phi_a(x) = a\vec{x}$.

Para definir las operaciones en $T_a\mathbb{R}^n$, sean $X_a, Y_a \in T_a(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y definamos:

$$X_a + Y_a := \Phi_a(\Phi_a^{-1}(X_a) + \Phi_a^{-1}(Y_a)),$$

$$\alpha \cdot X_a := \Phi_a(\alpha \cdot \Phi_a^{-1}(X_a)).$$

Es fácil comprobar que $T_a\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estas operaciones. Además, si consideramos la base canónica en \mathbb{R}^n , $\{E^i\}_{i=1}^n$ con $E^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y definimos $E_a^i := \Phi_a(E^i)$, entonces $\{E_a^i\}_{i=1}^n$ es base de $T_a\mathbb{R}^n$.

Existen distintas formas de definir el espacio tangente, es por ello que veremos una segunda definición de $T_a\mathbb{R}^n$.

Nuevamente sea $a \in \mathbb{R}^n$ y sean $\epsilon > 0$ y $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$. Consideremos $\gamma_1, \gamma_2 : I_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas suaves (diferenciables) con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$. Diremos que las curvas γ_1 y γ_2 son equivalentes si sus derivadas en 0 coinciden, esto es,

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0).$$

Es inmediato comprobar que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ define una relación de equivalencia de curvas en a . Luego, a cada $\gamma : I_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma(0) = a$ lo podemos asociar con un elemento de \mathbb{R}^n , su derivada en 0.

Por lo anterior, podemos definir el espacio tangente como $T_a\mathbb{R}^n := \{\gamma'(0) | \gamma : I_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ y } \gamma(0) = a\}$. En esta definición sólo basta mostrar que existe una curva suave γ con $\gamma(0) = a$ tal que $\gamma'(0) = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, para esto, consideramos $\gamma(t) = tx + a$, la cual cumple con lo requerido.

Los elementos del espacio tangente tienen una estructura más rica en propiedades. Por ello veremos un par de definiciones que nos permitirán aprovechar la estructura de $T_a\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4.1. Sea K un campo. Un **álgebra** sobre K (o K -álgebra) es un espacio vectorial \mathcal{A} sobre K con una operación binaria $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para

todo $u, v, w \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in K$:

$$(i) \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w,$$

$$(ii) \quad (v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u,$$

$$(iii) \quad \lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v).$$

La operación \cdot es llamada una multiplicación en \mathcal{A} .

Ejemplo 1.4.2. Sean $K = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R})$. \mathcal{A} es una \mathbb{R} -álgebra con la multiplicación usual.

Definición 1.4.3. Un **álgebra de Lie** es una pareja $(V, [,])$ donde V es un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} y $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ es una operación binaria que satisface las siguientes propiedades para $\lambda \in \mathbb{F}$ y $u, v, w \in V$:

i) *Bilinealidad:*

$$[u, \lambda v + w] = \lambda[u, v] + [u, w],$$

$$[\lambda u + v, w] = \lambda[u, w] + [v, w],$$

ii) *Antisimetría:*

$$[u, v] = -[v, u],$$

iii) *Identidad de Jacobi:*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Algunos ejemplos de álgebras de Lie son (\mathbb{R}^3, \times) , donde \times es el producto cruz y $(M_{n \times n}, [,])$, con $[\cdot, \cdot]$ el conmutador de matrices. A continuación tenemos una noción elemental sobre el corchete de Lie:

Definición 1.4.4. Sean $(V_1, [,]_1)$, $(V_2, [,]_2)$ dos álgebras de Lie. Se dice que una transformación lineal $T : V_1 \rightarrow V_2$ es un **morfismo de álgebras de Lie** si:

$$[T(v), T(w)]_1 = T([v, w]_2) \text{ para todo } v, w \in V_1$$

es decir, un morfismo de álgebras de Lie **preserva** el corchete de Lie.

Definición 1.4.5. Una **derivación** de la K -álgebra \mathcal{A} es una transformación K -lineal $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisface la regla de Leibniz, es decir, si $f, g \in \mathcal{A}$:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g.$$

Ahora procederemos a darle una interpretación a los elementos de $T_a\mathbb{R}^n$ que nos permitirá operarlos con facilidad; para esto, llamemos $\mathcal{C}^\infty(a)$ a las funciones \mathcal{C}^∞ que contienen a a en su dominio. Sea $X_a \in T_a\mathbb{R}^n$, y expresémoslo en términos de la base $\{E_a^i\}_{i=1}^n$ como $X_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_a^i$. Luego, X_a induce una función

$$X_a^* : \mathcal{C}^\infty(a) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$X_a^*(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

De esta forma, podemos definir con mayor precisión a la función como $X_a^* := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_a$. Además, si consideramos las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f_j(x) = x_j$, obtenemos que $X_a^*(f_j) = \alpha_j$, por lo que X_a^* está completamente determinada por los valores en cada f_j .

Utilizando el hecho de que $\mathcal{C}^\infty(a)$ es un álgebra, X_a^* es un operador lineal en $\mathcal{C}^\infty(a)$, puesto que para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(a)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$X_a^*(f + \lambda g) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = X_a^*(f) + \lambda X_a^*(g).$$

Más aún, satisface la propiedad de Leibniz:

$$X_a^*(f \cdot g) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i=1}^n \alpha_i g \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f X_a^*(g) + g X_a^*(f).$$

Esto nos permite definir un nuevo conjunto $\mathcal{D}(a)$ como el conjunto de operadores de $\mathcal{C}^\infty(a)$ a \mathbb{R} que satisfacen linealidad y la propiedad de Leibniz. $\mathcal{D}(a)$ es llamado el **conjunto de derivaciones** de $\mathcal{C}^\infty(a)$ en \mathbb{R} .

A $\mathcal{D}(a)$ podemos dotarle de una estructura de espacio vectorial de manera natural definiendo para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a)$ la suma $(D_1 + D_2)(f) := D_1(f) + D_2(f)$ y el producto por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ como $\alpha \cdot D_1(f) := \alpha \cdot D_1(f)$. Claramente, $D_1 + D_2$ y $\alpha \cdot D_1$ heredan la \mathbb{R} -linealidad y la propiedad de Leibniz de D_1 y D_2 .

Hemos visto cómo a un elemento X_a se le puede asociar una derivación X_a^* , y extendiendo de la misma forma esa asociación podemos considerar la transformación $*$: $T_a(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(a)$. Veremos que esta transformación, además de ser lineal, es un isomorfismo de espacios vectoriales. Probemos primero la linealidad de $*$. Para esto, sean $X_a, Y_a \in T_a\mathbb{R}^n$, con $X_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_a^i$ y $Y_a = \sum_{i=1}^n \beta_i E_a^i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(a)$. Luego:

$$(\lambda X_a + Y_a)^*(f) = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda X_a^*(f) + Y_a^*(f)$$

La transformación $*$: $T_a(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(a)$ resulta ser inyectiva, pues para $X_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_a^i$, $X_a^* = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$. Además, podemos mostrar que también es sobreyectiva. Sea $D \in \mathcal{D}(a)$ y sean $\alpha_i = D(f_i)$, con $f_i(x) = x_i$. Definamos $X_a := \sum_{i=1}^n \alpha_i E_a^i$ y consideremos los siguientes lemas:

Lema 1.4.6. *Sea $D \in \mathcal{D}(a)$. Entonces D es cero en cualquier $f \in C^\infty(a)$ que sea constante en una vecindad de a .*

Lema 1.4.7. *Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función C^∞ definida en un abierto U tal que $a \in U$. Entonces existe una vecindad abierta B de a , con $B \subset U$ y funciones C^∞ g^1, g^2, \dots, g^n definidas en B tales que:*

- $g^i(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)$,
- $f(x_1, \dots, x_n) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g^i(x)$.

La demostración del Lema 1,4,6 es inmediata, y el Lema 1,4,7 es conocido como Lema de Hadamard.

Por el Lema 1,4,7, restringiéndonos a B tenemos que:

$$D(f) = D(f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g^i(a)) = D(f(a)) + \sum_{i=1}^n D((x_i - a_i)g^i(a))$$

Y utilizando el Lema 1,4,6, la \mathbb{R} -linealidad y la propiedad de Leibniz de la derivación, se sigue que:

$$D(f) = \sum_{i=1}^n D(x_i)g^i(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = X_a^*(f)$$

Por lo tanto, $D = X_a^*$ y con esto concluimos que $*$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $T_a\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{D}(a)$. Otro punto importante a notar es que el conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}_{j=1}^n$ es una base para el espacio de derivaciones $\mathcal{D}(a)$.

Por último, definimos como **haz tangente** en \mathbb{R}^n a la unión disjunta de los espacios tangentes, el cual denotamos por $T\mathbb{R}^n := \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4.8. *Un **campo vectorial** en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función X que asigna a cada punto $p \in U$ un vector $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$, esto es, $X : U \rightarrow T\mathbb{R}^n$ tal que $X(p) \in T_p\mathbb{R}^n \forall p \in U$.*

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n , denotemos por $\mathcal{F}(U)$ al conjunto de funciones reales definidas en U ,

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Notemos que $C^\infty(U) \subset \mathcal{F}(U)$, más aún, tomando en cuenta que $\mathcal{F}(U)$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma usual de funciones y producto por escalar, $C^\infty(U)$

es un subespacio de $F(U)$. Un campo vectorial X en U define una transformación lineal

$$\begin{aligned} X : \mathcal{C}^\infty(U) &\rightarrow \mathcal{F}(U) \\ \mathcal{C}^\infty(U) \ni f &\rightarrow Xf, \end{aligned}$$

donde $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $(Xf)(p) := X_p(f)$. Se dice que un campo vectorial X es diferenciable si para toda $f \in \mathcal{C}^\infty$ se tiene que $Xf \in \mathcal{C}^\infty$. El conjunto de campos vectoriales diferenciables en U se denota por $\mathfrak{X}(U)$. En este conjunto se puede definir una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} de manera natural. Además, $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo y, como tal, es finitamente generado. Se puede probar que si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{C}^\infty(U)$ es un sistema de coordenadas en U y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{X}(U)$ tales que $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_i^j$ entonces para cada $X \in \mathfrak{X}(U)$ existen $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que $X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Para una lectura más profunda se puede consultar [22, ?].

Existe una operación importante en $\mathfrak{X}(U)$ llamada el **corchete de campos**, que le asocia a dos campos vectoriales X, Y y un tercer campo vectorial $[X, Y]$. Este último campo vectorial se define como $[X, Y](f) := X \circ Y(f) - Y \circ X(f)$. El corchete de campos vectoriales es un operador bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi. Además, satisface la regla de Leibniz $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$. La prueba de estos hechos es directamente de la definición del corchete de campos vectoriales.

Proposición 1.4.9. *El espacio de campos vectoriales $\mathfrak{X}(U)$ junto con su estructura de espacio vectorial \mathbb{R} -lineal y el corchete de campos vectoriales es un álgebra de Lie.*

Definición 1.4.10. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo con $0 \in I$ y sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave. Se dice que γ es una **curva integral** del campo vectorial X si:*

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$$

Podemos interpretar a las curvas integrales como curvas tales que en cada punto su dirección es la misma que la del campo vectorial X . Con esta idea en mente, podemos definir un concepto más general, el del flujo de un campo vectorial:

Definición 1.4.11. *El **flujo** de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(U)$ es una función $\text{Fl} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para $p \in \mathbb{R}^n$ y $\text{Fl}^t := \text{Fl}(t, p)$ se satisface:*

- $\frac{d\text{Fl}^t}{dt}(p) = X(\text{Fl}^t(p))$
- $\text{Fl}^0(p) = p$

En general, existen campos vectoriales cuyo flujo no es completo, es decir, su flujo no está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, pero para nuestros fines, solo consideraremos campos completos.

Veremos a continuación un ejemplo clásico de campos vectoriales y su flujo, conocido como el oscilador armónico 1-dimensional.

Ejemplo 1.4.12. Consideremos en \mathbb{R}^2 el campo vectorial $X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Procederemos a encontrar el flujo del campo. Para ello, sea $p = (p_1, p_2)$. Nuestro objetivo es encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1. \end{aligned}$$

Donde obtenemos que el flujo es $\text{Fl}(t, p_1, p_2) = (p_1 \cos(t) - p_2 \sin(t), p_1 \sin(t) + p_2 \cos(t))$.

Un caso particular de flujo de un campo vectorial es cuando el campo vectorial X tiene un punto fijo, es decir, existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $X(x^*) = 0$. En este caso, la curva integral de X que pasa por x^* es la trayectoria constante dada por la curva $\gamma : I_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(t) = x^*$ para todo $t \in I_\epsilon$.

1.5. Formas diferenciales.

En esta sección introducimos la noción de formas diferenciales siguiendo el enfoque y la notación de [19]. Para hablar de formas diferenciales, primero debemos hablar de la diferencial de una función, por ello consideremos el conjunto $\mathcal{O}_p = \{f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid p \in U \text{ y } f \text{ es diferenciable en } p\}$, el cual es un álgebra y contiene a las funciones coordenadas. También, para un punto $p \in \mathbb{R}^n$ definimos el **espacio cotangente** en p como $T_p^* \mathbb{R}^n := (T_p \mathbb{R}^n)^* = \{\alpha_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha_p \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal}\}$

Definición 1.5.1. Sea $f \in \mathcal{O}_p$. La **diferencial** de f en p se define como la funcional lineal $d_p f : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d_p f(X_p) := X_p(f)$

Aquí resulta necesario hacer una observación sobre la definición, pues al momento de considerar $X_p(f)$, estamos interpretando a los elementos de $T_p \mathbb{R}^n$ como derivaciones y no como solo vectores.

Las diferenciales en p de las funciones coordenadas $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son una base de $T_p^* \mathbb{R}^n$, donde la diferencial dx_i denota a la función $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow T^*(\mathbb{R}^n)$ dada por $dx_i(p) := d_p x_i$. De hecho, esta base es la base dual asociada a $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\}$ y que denotaremos por $\{d_p x_i\}$. Además, dado $\alpha \in T_p^* \mathbb{R}^n$, podemos representar a α en términos de la base $\{d_p x_i\}$ como $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p) d_p x_i$.

Definición 1.5.2. Sean $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{O}_p$. Se dice que el conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es un **sistema de coordenadas locales** en $p \in \mathbb{R}^n$ si las diferenciales $d_p f_1, d_p f_2, \dots, d_p f_n$ forman una base de $T_p^* \mathbb{R}^n$.

En particular, las funciones coordenadas $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forman un sistema de coordenadas locales. Más aún, daremos un criterio para determinar cuando un conjunto de funciones es un sistema de coordenadas locales. En general, las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{O}_p$ forman un sistema de coordenadas locales en $p \in \mathbb{R}^n$ si $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) \neq 0$.

Con esto en mente, continuamos con la definición de forma diferencial.

Definición 1.5.3. Un **campo de formas lineales** (formas exteriores de grado 1) en \mathbb{R}^n es una función ω que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(p) \in T_p^* \mathbb{R}^n$, donde $\omega(p) = a_1(p)d_p x_1 + a_2(p)d_p x_2 + \dots + a_n(p)d_p x_n$ con $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde dx_i denota a la función $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow T^* \mathbb{R}^n$ dada por $dx_i(p) := d_p x_i$, por lo que ω se expresa como $\omega = \sum_{i=1}^n a_i d_p x_i$.

Si las funciones a_i son diferenciables, entonces ω es una **forma diferencial de grado 1** (1-forma diferencial). El conjunto de campos de formas lineales se denota por $\Lambda^1(\mathbb{R}^{n*})$ y el conjunto de formas diferenciales de grado 1 se denota por $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$.

La generalización a n -formas diferenciales es natural. Sin embargo, es necesario utilizar el producto exterior de formas, el cual para $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{n*})$ se define el producto exterior de ω_1 con ω_2 como $\omega_1 \wedge \omega_2$, donde

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \det(\omega_i(v_j)).$$

Definición 1.5.4. Una **k -forma exterior** en un abierto $U \in \mathbb{R}^n$ es una función ω que a cada punto $p \in U$ le asigna un elemento en $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$. ω se puede expresar de la siguiente forma:

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_p$$

Donde $(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_p = d_p x^{i_1} \wedge d_p x^{i_2} \wedge \dots \wedge d_p x^{i_k}$ y a_{i_1, i_2, \dots, i_k} son funciones de U en \mathbb{R} . Mas aún, ω es una **k -forma diferencial** (forma diferencial de grado k) si $a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \in C^\infty(U)$. El conjunto de campos de k -formas exteriores se denota por $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$. El conjunto de k -formas diferenciales se denota por $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.5.5. Consideremos a todo \mathbb{R}^4 , entonces los conjuntos de formas diferenciales son los siguientes:

- $\Omega^0(\mathbb{R}^4) = \{a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \mid a \text{ diferenciable}\}$
- $\Omega^1(\mathbb{R}^4) = \{a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4 \mid a_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables}\}$
- $\Omega^2(\mathbb{R}^4) = \{a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{14} dx_1 \wedge dx_4 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3 + a_{24} dx_2 \wedge dx_4 + a_{34} dx_3 \wedge dx_4 \mid a_{ij} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables}\}$

- $\Omega^3(\mathbb{R}^4) = \{a_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + a_{124}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + a_{134}dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_{234}dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \mid a_{ijk} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables}\}$
- $\Omega^4(\mathbb{R}^4) = \{a_{1234}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \mid a_{1234} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable}\}$

Las formas diferenciales en \mathbb{R}^n junto con el producto cuña cumplen con ciertas propiedades que nos resultarán útiles al momento de hacer cálculos. Algunas de esas propiedades son las siguientes:

Proposición 1.5.6. *Sea ω una k -forma, ϕ una l -forma y θ una r -forma en \mathbb{R}^n , entonces:*

- $\omega \wedge (\phi \wedge \theta) = (\omega \wedge \phi) \wedge \theta$ (asociatividad),
- $\omega \wedge \phi = (-1)^{kl} \phi \wedge \omega$ (simetría graduada),
- $\omega \wedge (\phi + \theta) = \omega \wedge \phi + \omega \wedge \theta$ (distributividad).

Ejemplo 1.5.7. *Sea $\omega = x_1dx_1 \wedge dx_2 + x_3dx_3 \wedge dx_4$ una 2-forma en \mathbb{R}^4 , calculemos $\omega \wedge \omega$:*

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (x_1dx_1 \wedge dx_2 + x_3dx_3 \wedge dx_4) \wedge (x_1dx_1 \wedge dx_2 + x_3dx_3 \wedge dx_4) \\ &= x_1x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1x_3dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 2x_1x_3dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Para formas diferenciales podemos definir la diferencial exterior, que generaliza el concepto de diferencial de una función en un punto.

Definición 1.5.8. *Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable (0-forma en \mathbb{R}^n). Definimos la **diferencial** de g como*

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

dg es una 1-forma diferencial de \mathbb{R}^n .

La diferencial, en este sentido, generaliza a la Definición 1.5.1 pues se tiene que $dg(p) = d_g$. La idea para generalizar el concepto de diferencial de una función es buscar la manera de asociarle a una k -forma en \mathbb{R}^n una $(k+1)$ -forma en \mathbb{R}^n y eso se logra como sigue:

Definición 1.5.9. *Sea $\omega = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha dx_\alpha$ una k -forma diferencial en \mathbb{R}^n . La **diferencial exterior** $d\omega$, de ω , se define por*

$$d\omega = \sum_{\alpha \in I} da_\alpha \wedge dx_\alpha$$

Donde I es un conjunto de multi-índices de dimensión k y $dx_\alpha = dx_{\alpha_1} \wedge dx_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_k}$.

Algunas de las propiedades más importantes de la diferencial exterior son las siguientes:

Proposición 1.5.10. Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$, entonces:

- $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$,
- $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$,
- $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

Definición 1.5.11. Una k -forma α se dice ser **exacta** si existe una $(k-1)$ -forma β tal que $\alpha = d\beta$. α se dice ser **cerrada** si $d\alpha = 0$.

Por la Proposición 1.5.10, toda k -forma exacta es cerrada.

Ejemplo 1.5.12. Sea $\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. α es cerrada ya que sus coeficientes son constantes, y también es exacta puesto que $\alpha = d(x_1 dx_2 + x_3 dx_4)$.

1.6. Integración en variedades.

Para comenzar, estudiaremos integración en \mathbb{R}^n , más precisamente la integral de Riemann, para luego extender la noción de integrabilidad al caso en el que nuestro dominio de integración es una variedad M .

Primero determinaremos las condiciones que requiere un subconjunto de \mathbb{R}^n para ser dominio de integración. Para ello consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ y diremos que A tiene **contenido de Jordan 0**, $c(A) = 0$, si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección finita de cubos c_i en \mathbb{R}^n que cubren a A y $\sum_{i=1}^r \text{Vol}(c_i) < \epsilon$, donde un cubo es el producto cartesiano de n intervalos cerrados y $\text{Vol}(c_i)$ es el volumen del cubo c_i . Los conjuntos finitos son ejemplos de conjuntos con contenido de Jordan cero. También diremos que A es un conjunto de **medida cero**, $m(A) = 0$, si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección numerable de cubos que cubren a A y $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(c_i) < \epsilon$. Los conjuntos numerables son ejemplos de conjuntos de medida cero.

Observemos que los conjuntos de contenido cero son conjuntos de medida cero, pero el recíproco no siempre es cierto. En el caso en que A sea compacto tendremos que $c(A) = 0 \Leftrightarrow m(A) = 0$.

Definición 1.6.1. Un conjunto acotado $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice ser un **dominio de integración** si la frontera de D , ∂D , tiene contenido cero, es decir, $c(\partial D) = 0$.

Algunos ejemplos de dominios de integración son los cubos y las bolas en \mathbb{R}^n y regiones cuya frontera sean hipersuperficies.

Para que una función sea integrable, en el sentido de Riemann, no es necesario pedirle continuidad en todo punto, pero si en casi todos los puntos. Por eso, diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **casi continua** si el conjunto de discontinuidades tiene contenido cero y veremos que éstas son las funciones que nos interesan.

Teorema 1.6.2. *Sea D una región de integración en \mathbb{R}^n y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y casi continua en D . Entonces f es **Riemann integrable** en D , es decir, $\int_D f dv$ existe.*

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrables y D, D_1, D_2 dominios de integración, entonces algunas de las propiedades de la integral de Riemann son las siguientes:

- Si $c(D) = 0$ entonces $\int_D f dv = 0$,
- $\int_{D_1 \cup D_2} f dv = \int_{D_1} f dv + \int_{D_2} f dv - \int_{D_1 \cap D_2} f dv$,
- $\int_D (af + bg) dv = a \int_D f dv + b \int_D g dv$ para $a, b \in \mathbb{R}$,
- si $f \geq 0$ y $c(D) \neq 0$ entonces $\int_D f dv \geq 0$,
- si f tiene soporte compacto, es decir $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}}$ es compacto, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} f dv = \int_{\text{supp } f} f dv$.

Si D es un dominio de integración, definimos el **volumen** de D por $\text{Vol } D = \int_D \chi_D dv$, donde

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & x \in D, \\ 0 & x \notin D. \end{cases}$$

Consideremos $G : U \rightarrow \tilde{U}$ un difeomorfismo de $U \subset \mathbb{R}^n$ a $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ abiertos. Denotaremos por DG a la matriz Jacobiana de G y $|DG|$ a su determinante. Procederemos a enunciar el **Teorema de cambio de variable**:

Teorema 1.6.3. *Sea $G : U \rightarrow \tilde{U}$ un difeomorfismo. Supongamos que $D \subset U$ y $\tilde{D} = G(D) \subset \tilde{U}$ son dominios de integración y que f es integrable en \tilde{D} . Sea $g = f \circ G$. Entonces g es integrable en D y*

$$\int_{\tilde{D}} f d\tilde{v} = \int_D f \circ G |DG| dv = \int_D g |DG| dv$$

El material visto sobre integración en \mathbb{R}^n es suficiente para abordar la integración en variedades. Para esto, consideraremos a M como una variedad diferenciable y adaptaremos algunas de las definiciones en el caso real a la variedad M .

Definición 1.6.4. *Un conjunto $A \subset M$ se dice tener **contenido cero**, $c(A) = 0$, si está contenido en la unión de un número finito de compactos A_i , $A \subset \cup_{i=1}^r A_i$ con A_i contenido en el dominio de una carta coordenada (Ψ_i, U_i) tal que $c(\Psi_i(A_i)) = 0$ en \mathbb{R}^n .*

Aquí hay algo que debemos observar con respecto a la imagen de un conjunto de contenido cero bajo una función suave. Para ello, sea $A \subset M$ un conjunto de contenido cero y sea $F : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades. Si $\dim M \leq \dim N$ entonces $F(A)$ tiene contenido cero.

La Definición 1.6.4 anterior y la observación son válidas también si consideramos medida cero en lugar de contenido cero.

Ejemplo 1.6.5. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1\}$. A es un conjunto de contenido (medida) cero en \mathbb{R}^n pero $F(A)$ no tiene contenido (medida) cero en \mathbb{R}^{n-1} , pues es un cubo de volumen 1.

Definición 1.6.6. Sea $D \subset M$ un conjunto compacto en M . D es un dominio de integración en M si la frontera de D tiene contenido cero.

Para poder definir la integración sobre una variedad M es necesario que esta sea **orientable**, es decir, que exista una n -forma Ω en M tal que $\Omega(x) \neq 0$ para toda $x \in M$. A Ω la llamaremos **forma de volumen** (u orientación). Si consideramos a $\tilde{\Omega}$ otra forma de volumen en M entonces existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \neq 0$ para toda $x \in M$, tal que $\tilde{\Omega} = f\Omega$.

Definición 1.6.7. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **integrable** si f es acotada, tiene soporte compacto y es casi continua. Una n -forma ω en M se dice ser **integrable** si $\omega = f\Omega$, con Ω una forma de volumen y f una función integrable.

Dada una n -forma ω , diremos cómo definir la asignación $\omega \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$. Luego, para definir la integral de una función integrable en M , utilizaremos el hecho de que $\omega = f\Omega$ es una n -forma integrable, por lo que haremos la asignación $f \mapsto \int_M f dv := \int_M f\Omega$. Por lo tanto, nuestro interés está en el cálculo de la integral de n -formas.

Diremos que un conjunto Q en M es un **cubo** si existe una carta coordenada (Φ, U) tal que $Q \subset U$ y $\Phi(U) = C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$.

Haremos algunas consideraciones previas a la definición de la integral en una variedad. Para esto, sea M una variedad diferenciable de dimensión n , con orientación Ω y sea ω una n -forma integrable. Supongamos que $\text{supp} \omega \subset Q$, con Q un cubo en M . Sea (Φ, U) la carta coordenada asociada a Q y supongamos que la n -forma $\omega \circ \Phi^{-1}$ en \mathbb{R}^n toma la forma $\omega \circ \Phi^{-1} = g(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ con $g(x) \in C^\infty(\Phi(U))$. En este caso, definiremos la integral de ω en M como $\int_M \omega := \int_C g dv$. Como observación, esta definición no depende de la carta asociada a Q .

Ahora, sea ω una n -forma integrable arbitraria y sea $K = \text{supp} \omega$. Dado que K es compacto, podemos cubrirlo con los interiores $\mathring{Q}_1, \mathring{Q}_2, \dots, \mathring{Q}_r$ de cubos Q_1, Q_2, \dots, Q_r . Con esto, $\{M - K, \mathring{Q}_1, \mathring{Q}_2, \dots, \mathring{Q}_r\}$ es una cubierta abierta finita de M y utilizaremos los siguientes hechos:

Definición 1.6.8. Una **partición de la unidad** en M es una colección de funciones $\{f_\alpha\}$ definidas en M tales que:

- $f_\alpha \geq 0$
- $\{supp(f_\alpha)\}_\alpha$ forman una cubierta localmente finita en M
- $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$

Una partición de la unidad se dice ser **subordinada** a una cubierta abierta $\{A_\gamma\}$ de M si para cada α existe un γ tal que $supp(f_\alpha) \subset A_\gamma$.

Un hecho importante es que toda cubierta abierta $\{A_\gamma\}$ de M tiene una partición de la unidad subordinada a ésta. Así, tomamos una partición de la unidad $\{f_i\}_{i=1}^s$ subordinada a la cubierta $\{M - K, \overset{\circ}{Q}_1, \overset{\circ}{Q}_2, \dots, \overset{\circ}{Q}_r\}$ y definimos la integral de ω como:

$$\int_M \omega = \int_M f_1 \omega + \int_M f_2 \omega + \dots + \int_M f_s \omega$$

Como observación, esta definición no depende de la partición de la unidad.

1.7. Acciones de grupos de Lie en una variedad.

Una de las herramientas más importantes para este trabajo es la de acción de grupos, y nos interesa la acción de los grupos de Lie y los grupos discretos. Estudiaremos las acciones de estos grupos en el resto del capítulo.

Primero, introduzcamos la noción de grupo topológico. Un **grupo topológico** es un grupo G que posee una estructura de espacio topológico tal que las funciones $\mu : G \times G \rightarrow G$, con $\mu(g, h) = g * h$, e $i : G \rightarrow G$, con $i(g) = g^{-1}$, son continuas. Ahora, definamos un grupo de Lie.

Definición 1.7.1. Un **grupo de Lie** es un grupo G que posee una estructura diferenciable tal que las funciones $\mu : G \times G \rightarrow G$, con $\mu(g, h) = g * h$, e $i : G \rightarrow G$, con $i(g) = g^{-1}$, son diferenciables.

Un grupo de Lie G en particular es un grupo topológico. Un ejemplo básico de grupo de Lie, el cual es importante para el desarrollo de este trabajo, es \mathbb{S}^1 . Hemos mencionado ya que \mathbb{S}^1 tiene estructura de variedad diferencial. Para probar que además es un grupo de Lie, identifiquemos a \mathbb{S}^1 con el conjunto de números complejos de norma 1. $\mathcal{C}/\{0\}$ es un grupo abeliano bajo el producto usual de complejos y \mathbb{S}^1 es un subgrupo de $\mathcal{C}/\{0\}$. Como $\mathcal{C}/\{0\}$ es un espacio vectorial de dimensión 2, es posible definir en él una estructura de variedad diferencial 2-dimensional con respecto a la cual el producto de complejos y la inversión de complejos resultan ser funciones suaves. Por tanto $\mathcal{C}/\{0\}$ es un grupo de Lie y, en consecuencia, \mathbb{S}^1 también lo es. Además, se puede probar que el producto cartesiano de grupos de Lie también posee estructura de Grupo de Lie, por tanto el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ es un grupo de Lie abeliano n -dimensional. Para un estudio más a detalle, se puede consultar [4].

Definición 1.7.2. Sean G un grupo un grupo de Lie y M una variedad diferencial. Una acción suave de G en M es una función suave $\Theta : G \times M \rightarrow M$ tal que se cumple:

- (i) $\Theta(e, x) = x$ para toda $x \in M$, donde e es el elemento neutro en G
- (ii) $\Theta(g * h, x) = \Theta(g, \Theta(h, x))$ para toda $g, h \in G, x \in M$.

Observemos que en una acción suave $G \times M \rightarrow M$, al fijar un elemento $g \in G$, la acción determina un mapeo diferenciable $\Theta_g : M \rightarrow M$, con $\Theta_g(x) := \Theta(g, x)$. Las propiedades de una acción nos permiten considerar $\Theta_{g^{-1}}$ y concluir que Θ_g y $\Theta_{g^{-1}}$ son funciones inversas, lo cual implica que Θ_g es un difeomorfismo. A rasgos más generales, una acción suave en M de un grupo de Lie, nos permite asociar un difeomorfismo a cada elemento del grupo de Lie.

Para cada $x \in M$ se define la *órbita* de G por x como el conjunto $\text{Orb}(x) := \{\Theta(g, x) | g \in G\}$. Las órbitas de una acción definen una relación de equivalencia en M : se dice que x y y si existe $g \in G$ tal que $\Theta(g, x) = y$. El conjunto de clases de equivalencia de la acción se denota por M/G . Si $\pi : M \rightarrow M/G$ denota la proyección natural y dotamos a M/G de la topología cociente, entonces π es continua. Con ésta misma topología, M/G tiene una base numerable si para cada $A \subset M$ abierto $\bigcup_{g \in G} \Theta_g(A)$ es abierto. M/G es Hausdorff si y sólo si el conjunto $\{(x, \theta(g, x)) | g \in G \text{ and } x \in M\} \subset M \times M$ es cerrado con respecto a la topología producto.

Para cada $x \in M$, el grupo estabilizador de x es el subgrupo

$$G_x := \{g \in G | \Theta(g, x) = x\}$$

Destacaremos algunos tipos de acciones de grupos. Diremos que una acción Θ es **libre** si el estabilizador G_x es trivial para todo $x \in S$, es decir, $G_x = \{e\}$. La acción será **fiel** si el mapeo $g \rightarrow \Theta_g$ es inyectivo, donde $\Theta_g : S \rightarrow S$ es $\Theta_g(x) := \Theta(g, x)$. La acción se dice **transitiva** si para cada $x, y \in S$ existe $g \in G$ tal que $\Theta(g, x) = y$.

Consideremos M un espacio topológico. Diremos que una acción $\Theta : G \times M \rightarrow M$ es **propia** si la función $\hat{\Theta} : G \times M \rightarrow G \times M$ es propia. Es decir, para cada compacto $K \subset G \times M$ $\hat{\Theta}^{-1}(K)$ es compacto en $G \times M$. Si G es un grupo de Lie compacto, la acción siempre es propia.

Como ejemplos de acciones de grupos de Lie tenemos la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{C} , $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida como $(\theta, z) := \theta z$, donde cada difeomorfismo asociado a cada elemento de \mathbb{S}^1 representa una rotación de \mathbb{C} . También, podemos considerar la acción de $GL(n, \mathbb{R})$ en \mathbb{R}^n definida como $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $(A, x) \mapsto Ax$.

Si G es un grupo de Lie, G actúa sobre G por traslaciones a la izquierda. La traslación por la izquierda es la función $\Theta : G \times G \rightarrow G$ definida por

$$\Theta(g, h) := gh.$$

La traslación por la izquierda es una acción de G en G libre, fiel y transitiva.

1.8. Acciones de grupos discretos en una variedad.

En ésta sección estaremos trabajando con acciones de grupos discretos sobre una variedad diferencial M . Se dice que Γ es un grupo discreto si tiene una cantidad numerable de elementos y dotado de la topología discreta es un grupo topológico. Como ejemplos sencillos de grupos discretos podemos mencionar \mathbb{Z}^k con la suma usual de vectores; ó el grupo multiplicativo \mathbb{Z}_2 .

Definición 1.8.1. *Sea Γ un grupo discreto y M una variedad diferencial. Una acción suave de Γ en M es una función $\Theta : \Gamma \times M \rightarrow M$ tal que se cumple:*

- (i) $\Theta(e, x) = x$ para toda $x \in M$, donde e es el elemento neutro en Γ ,
- (ii) $\Theta(gh, x) = \Theta(g, \Theta(h, x))$ para toda $g, h \in \Gamma$, $x \in M$,
- (iii) $\Theta_h(x) := \Theta(h, x)$ es suave en M para todo $h \in \Gamma$.

Si Γ es un grupo discreto actuando en M y $A \subset M$, denotaremos por $\Gamma A = \{\Gamma(g, x) | g \in \Gamma, x \in A\}$ a la **órbita** de Γ sobre A . En particular, la órbita de Γ por x se denota por Γx .

Para cada $h \in \Gamma$ y $V \subset M$, se define $hV := \{\Theta_h(x) | x \in V\}$. En particular, si V es abierto (ó cerrado) entonces hV es abierto (cerrado).

Definición 1.8.2. *Un grupo discreto Γ actúa **propiamente** en una variedad diferenciable M si la acción es suave y para cada $x \in M$ existe una vecindad U tal que el conjunto $\{h \in \Gamma | h \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito.*

Proposición 1.8.3. *Un conjunto discreto Γ actúa propiamente en M si y sólo si el grupo de isotropía Γ_x de cada $x \in M$ es finito y cada x tiene una vecindad tal que $h \cdot U \cap U = \emptyset$ si $h \notin \Gamma_x$ y $h \cdot U = U$ si $h \in \Gamma_x$.*

Para mayor información sobre estas propiedades se puede consultar [4].

Lema 1.8.4. *Sean S un conjunto y \mathbb{R}^n con su topología usual. Consideremos una acción transitiva de \mathbb{R}^n en S y sea Γ el grupo estabilizador de un punto $x_0 \in S$. Si Γ es un grupo discreto, entonces existen $e_1, e_2, \dots, e_k \in \Gamma$ linealmente independientes tales que $\Gamma = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 + \dots + m_k e_k | m_i \in \mathbb{Z}\}$.*

Demostración. Denotemos por $\Theta : \mathbb{R}^n \times S \rightarrow S$ la acción de \mathbb{R}^n en S . Notemos que Γ es un subgrupo de \mathbb{R}^n que no depende de x_0 . Sea $x \in S$. Como la acción es transitiva, existe $r \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Theta(r, x_0) = x$. Para $t \in \Gamma$ se tiene

$$\Theta(t, x) = \Theta(t, \Theta(r, x_0)) = \Theta(r, \Theta(t, x_0)) = \Theta(r, x_0) = x$$

Por lo tanto, Γ no depende del punto x_0 . Para mostrar que existen $e_1, e_2, \dots, e_k \in \Gamma$ linealmente independientes tales que $\Gamma = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 + \dots + m_k e_k \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$, notemos que $0 \in \Gamma$. Si $\Gamma = \{0\}$, no hay más que probar.

Si no es el caso, existe $e_0 \in \Gamma$ con $e_0 \neq 0$. Consideremos el subespacio $\langle e_0 \rangle$ generado por e_0 y el disco centrado en el origen de radio $|e_0|$. En el interior de dicho disco existe una cantidad finita de puntos de Γ debido a que el disco es compacto y Γ es discreto. Sea $e_1 \in \langle e_0 \rangle$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que e_1 es el elemento de $\langle e_0 \rangle$ más cercano al origen. Mostraremos que $\langle e_0 \rangle \cap \Gamma = \{m e_1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Supongamos que existe $e \in \Gamma$ tal que $e = \alpha e_1$ con $m < \alpha < m + 1$ para $m \in \mathbb{Z}$ fijo. Entonces $e - m e_1 \in \Gamma$ y $|e - m e_1| < |e_1|$, lo cual es una contradicción. Si no existen elementos de Γ fuera de $\langle e_0 \rangle$ entonces $\langle e_0 \rangle \cap \Gamma = \Gamma = \{m e_1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ y no hay más que mostrar.

Supongamos que existe $e_2 \in \Gamma$ y $e_2 \notin \langle e_1 \rangle$ con distancia mínima a $\langle e_1 \rangle$. Sea $e \in \langle e_1, e_2 \rangle \cap \Gamma$, entonces $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ y supongamos que λ_1 o λ_2 no es entero. Luego, para $m_1 = [\lambda_1]$ y $m_2 = [\lambda_2]$ las partes enteras de λ_1 y λ_2 , respectivamente, $e - m_1 e_1 - m_2 e_2 \in \Gamma \cap \langle e_1, e_2 \rangle$ es una contradicción, debido a que si λ_2 no es entero, $e - m_1 e_1 - m_2 e_2$ tendrá menor distancia a $\langle e_1 \rangle$ que e_2 , y si λ_2 es entero y λ_1 no lo es, entonces $\lambda_1 e_1$ pertenecerá a $\langle e_1 \rangle$, lo cual es absurdo. Si no existen elementos de Γ fuera de $\langle e_1, e_2 \rangle$ entonces $\langle e_1, e_2 \rangle \cap \Gamma = \Gamma = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ y no hay más que mostrar.

De manera análoga repetimos el proceso hasta obtener que $\Gamma = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 + \dots + m_k e_k \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$ con e_1, e_2, \dots, e_k linealmente independientes, este proceso concluye pues a lo más tendremos n vectores linealmente independientes. ■

El Lema 1.8.4 nos será de gran utilidad para demostrar el Teorema de Liouville-Arnold.

Definición 1.8.5. Γ actúa *discontinuamente* en M si para $x, y \in M$ que no están en la misma órbita existen abiertos $U_x \ni x, V_y \ni y$ tal que $U_x \cap \Gamma V_y = \emptyset$.

Más adelante, dados una variedad M y la acción de un grupo discreto Γ en M , nos interesará que el cociente M/Γ (espacio de órbitas) sea de Hausdorff. Por ello, uno de los resultados que nos dice cuando pasa esto, es el siguiente:

Proposición 1.8.6. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y Γ un grupo discreto que actúa en X . Si la acción es discontinua, entonces X/Γ es de Hausdorff.

Demostración. Sean $x, y \in X$ elementos con órbitas distintas, es decir, $\Gamma x \neq \Gamma y$. Como la acción es discontinua, existen abiertos U_x, V_y de X con $x \in U_x$ y $y \in V_y$ tales que $U_x \cap \Gamma V_y = \emptyset$. Primero, notemos que ΓU_x y ΓV_y son vecindades abiertas de Γx y Γy , respectivamente. Supongamos que no son ajenas y sea $w \in \Gamma U_x \cap \Gamma V_y$. Entonces $w = g_1 u$ y $w = g_2 v$ para ciertos $g_1, g_2 \in \Gamma, u \in U_x, v \in V_y$. Esto quiere decir

que $w = g_1 u \in g_2 V_y$, de donde se sigue que $u \in g_1^{-1} g_2 V_y$, lo cual es una contradicción pues $U_x \cap \Gamma V_y = \emptyset$. ■

Además, relacionando los conceptos anteriores con las variedades diferenciales tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.8.7. *Sea Γ un grupo discreto que actúa libre, propia y discontinuamente en una variedad diferencial M . Entonces existe una única estructura diferencial en $\widetilde{M} = M/\Gamma$ con la topología cociente tal que*

- *la proyección natural $P : M \rightarrow \widetilde{M}$ es un difeomorfismo local;*
- *para cada $p \in \widetilde{M}$ existe una vecindad conexa \widetilde{U} con la propiedad de que $P^{-1}(\widetilde{U}) = \bigcup U_\alpha$, donde U_α son abiertos conexos de M donde cada U_α es un abierto conexo difeomorfo a \widetilde{U} .*

Demostración. Probemos primero que \widetilde{M} es una variedad topológica. Como la acción es libre y propia, para cada $x \in M$ existe un abierto U tal que $h \cdot U \cap U = \emptyset$ excepto cuando $h = e$. Esto implica que $P_U := P|_U$ es inyectiva.

Por lo tanto, $P_U : U \rightarrow \widetilde{U}$, con $\widetilde{U} = P(U)$, es un homeomorfismo, ya que P es continua y abierta. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U es el dominio de una carta (U, Φ) tal que U es conexo.

Sea $(\widetilde{U}, \widetilde{\Phi})$ la pareja donde $\widetilde{\Phi} : \widetilde{U} \rightarrow \Phi(U)$ con $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ P_U^{-1}$, $\widetilde{\Phi}$ es un homeomorfismo. Debido a que P es sobre, para cada $p \in \widetilde{M}$ existe un $x \in M$ tal que $P(x) = p$. Esto implica que \widetilde{M} es localmente euclideo y por tanto una variedad topológica.

Ahora probemos que el conjunto de cartas $(\widetilde{U}, \widetilde{\Phi})$ que hemos definido son compatibles, por lo que definen una estructura diferencial en \widetilde{M} . Sean $(\widetilde{U}, \widetilde{\Phi})$ y $(\widetilde{V}, \widetilde{\Psi})$ cartas en \widetilde{M} con $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$. Sabemos que $\widetilde{U} = P(U)$ y $\widetilde{V} = P(V)$, pero esto no implica que $U \cap V \neq \emptyset$. Sin embargo, sí podemos probar que existe $h \in \Gamma$ tal que $U \cap h \cdot V \neq \emptyset$.

Notemos además que $P = P \circ \Gamma_h$. Por lo que es posible escribir Ψ^{-1} como $\Psi^{-1} = P \circ \Psi^{-1} = P \circ \Gamma_h \circ \Psi^{-1}$. Por lo tanto $\widetilde{\Phi} \circ \widetilde{\Psi}^{-1} = \Phi \circ P_U^{-1} \circ P \circ \Gamma_h \circ \Psi^{-1} = \Phi \circ \Gamma_h \circ \Psi^{-1}$ es un difeomorfismo.

Luego, sea $x \in M$ y tomemos una carta (U, Φ) de x , $(\widetilde{V}, \widetilde{\Psi})$ de $P(x)$, con $P(U) \subset \widetilde{V}$. Para la representación local de P se cumple que

$$\widetilde{P} = \Phi \circ P \circ \widetilde{\Psi}^{-1} = \Phi \circ P \circ P_V^{-1} \circ \Psi^{-1} = \Phi \circ \Psi^{-1},$$

por lo que P es diferenciable. ■

Proposición 1.8.8. *Consideremos la acción de \mathbb{Z} en \mathbb{R} tal que $\Theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $\Theta(z, x) := z + x$. Entonces \mathbb{R}/\mathbb{Z} es difeomorfo a \mathbb{S}^1 .*

Demostración. La acción es libre, pues el estabilizador $\mathbb{Z}_x = \{z \in \mathbb{Z} \mid \Theta(z, x) = z + x = x\} = \{0\}$. También, la acción es propia, puesto que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que para $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ el conjunto $\{k \in \mathbb{Z} \mid \Theta_k(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Además, denotando la órbita del elemento x como \mathcal{O}_x , la acción es discontinua. Esto último se debe a que dados $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ con $\mathcal{O}_x \neq \mathcal{O}_y$, podemos considerar $d = \min\{|x - (z + y)| \mid z \in \mathbb{Z}\}$, donde d mide la distancia de x a la órbita de y y $d > 0$. Luego, para los conjuntos $U = (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$ y $V = (y - \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2})$ se tiene que $U \cap \Theta_k(V) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por esto último la acción es discontinua.

Dado que se tienen las condiciones necesarias del Teorema 1.8.7, podemos dotar de una estructura diferenciable a \mathbb{R}/\mathbb{Z} que cumple con las propiedades del Teorema 1.8.7. Denotando como $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}$, podemos definir la biyección $F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $[x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, la cual está bien definida, es decir, no depende del representante de la clase. Para mostrar que F es un difeomorfismo entre \mathbb{R}/\mathbb{Z} y \mathbb{S}^1 , resta mostrar que F es un difeomorfismo local. Denotemos por Π la proyección natural de los elementos en \mathbb{R} a su clase en \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Para $x \in (0, 1)$ podemos considerar el abierto $\Pi((0, 1))$ cuya imagen bajo F es $\mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$. Luego, la representación local de F , $\tilde{F} : (0, 1) \mapsto (0, 2\pi)$ es tal que $\tilde{F}(x) = 2\pi x$, la cual es un difeomorfismo. Análogamente podemos considerar $x = 0$ y al tomar $\Pi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ vecindad abierta de $[0]$, la representación local de F resulta nuevamente un difeomorfismo. Por ello, F es un difeomorfismo local, y al ser biyectiva, es un difeomorfismo. En conclusión, \mathbb{R}/\mathbb{Z} es difeomorfo a \mathbb{S}^1 . ■

Este último resultado, junto con la Proposición 1.1.2 implican que $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ es difeomorfo a $\mathbb{T}^k = (\mathbb{S}^1)^k$, lo cual usaremos más adelante.

Como consecuencia del Teorema 1.8.7, se sigue el siguiente resultado que tendrá mayores implicaciones en la prueba del Teorema de Liouville-Arnold:

Proposición 1.8.9. Sean e_1, e_2, \dots, e_k vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n , con $1 < k \leq n$. Consideremos la acción del grupo $\Gamma = \{r_1 e_1 + r_2 e_2 + \dots + r_k e_k \mid r_i \in \mathbb{Z}\}$ en \mathbb{R}^n mediante traslaciones. Entonces Γ actúa libre, propia y discontinuamente en \mathbb{R}^n , y más aún, \mathbb{R}^n/Γ es difeomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Demostración. Mostremos que la acción es libre, para ello sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $g \in \Gamma$. Si g pertenece al estabilizador Γ_x de x , entonces $g + x = x$, pero esto implica que $g = 0$, por lo que el estabilizador es trivial para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y por ello la acción es libre. Además, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $-g + K$ es compacto, por lo que la acción es propia.

Para mostrar que Γ actúa discontinuamente, consideremos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que no estén en la misma órbita, esto es, $x \notin \Gamma y$. Además, sea $g \in \Gamma$ tal que $g + y$ está a distancia mínima de x . Llamemos $d = |x - (g + y)|$. Luego, los conjuntos $U_x = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \frac{d}{2}\}$ y $V_y = \{y_0 \in \mathbb{R}^n \mid |(g + y) - y_0| < \frac{d}{2}\}$ son abiertos tales que $U_x \cap \Gamma V_y = \emptyset$. Por lo tanto, Γ actúa discontinuamente.

El Teorema 1.8.7 nos permite dotar a \mathbb{R}^n/Γ de una estructura diferenciable particular. Para describir eficientemente a \mathbb{R}^n/Γ , dado que tenemos el conjunto

$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ de k vectores linealmente independientes, completamos ese conjunto a una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . En términos de esta nueva base de \mathbb{R}^n , la acción de un elemento $g = m_1e_1 + m_2e_2 + \dots + m_ke_k$ de Γ en un punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ resulta ser $(g, x) \mapsto g + x = (m_1 + x_1, m_2 + x_2, \dots, m_k + x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ y, a partir de la Proposición 1.8.8, $\mathbb{R}^n/\Gamma \cong (\mathbb{R}/r_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/r_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{R}/r_k\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. ■

Definición 1.8.10. *Sea G un grupo de Lie y Γ un subgrupo de Lie abstracto. Γ es llamado un subgrupo discreto de G si existe una vecindad U de elemento identidad e de G tal que $\Gamma \cap U = \{e\}$.*

Es posible probar que todo subgrupo discreto Γ de un grupo de Lie G es un subconjunto cerrado de G y un grupo discreto tal y como lo definimos al inicio de ésta sección. Si dotamos a Γ de la topología relativa se tiene que ésta coincide con la topología discreta. Más aún, como Γ está en correspondencia biunívoca con la colección numerable de abiertos disjuntos $\{hU | h \in \Gamma\}$ se sigue que Γ tiene una cantidad numerable de elementos. La colección de abiertos descrita anteriormente es numerable ya que G tiene una base numerable. Recíprocamente si Γ es un subgrupo abstracto de G y un grupo discreto con la topología relativa, entonces Γ es un subgrupo de Lie discreto de G .

La relevancia de los subgrupos de Lie discretos de G se debe a que cuando actúan en G por traslaciones a la izquierda la acción siempre resulta ser libre, propia y discontinua.

Proposición 1.8.11. *Todo subgrupo discreto Γ de G actúa libre, propia y discontinuamente en G por traslaciones a la izquierda.*

Demostración. Definamos $\Theta : \Gamma \times G \rightarrow G$ por $\Theta(h, g) := hg$. Notemos que el grupo de isotropía $\Gamma_g = \{e\}$ para todo g . Por tanto, la acción es libre. Ahora, como Γ es un subgrupo discreto de G , tomemos la vecindad U de e tal que $U \cap \Gamma = \{e\}$. Sea V un entorno simétrico de e tal que $V \subset U$. Notemos que $hV \cap V \neq \emptyset$ solo si $h = e$. Ahora, tomemos $V_R := R_g(V)$, el cual es un entorno abierto que contiene a g . Notemos que $hV_g \cup V_g = (h \cup V)g$. Por lo tanto,

$$\{h \in \Gamma | hV_g \cup V_g \neq \emptyset\} = \{e\},$$

lo que implica que la acción es propia.

Sean g_1 y g_2 dos elementos de G que pertenecen a dos órbitas distintas. Como $\{g_2\}$ es cerrado en G , entonces la órbita Γg_2 también es cerrado. Por lo tanto, existe un vecindad abierta U de g_1 tal que $U \cap \Gamma g_2 = \emptyset$. Sea V el entorno simétrico de e tal que $g_1V^{-1} \subset U$. Si los conjuntos abiertos Γg_1V y Γg_2V tienen intersección distinta del vacío, entonces existen $h_1, h_2 \in \Gamma$ y $v_1, v_2 \in V$ tales que $h_1g_1v_1 = h_2g_2v_2$. Por lo tanto $g_1v_1v_2^{-1} = h_1^{-1}h_2g_2 \in \Gamma g_2$. Lo cual contradice el hecho que $U \cap \Gamma g_2 = \emptyset$. En consecuencia tenemos que $\Gamma g_1V \cap \Gamma g_2V \neq \emptyset$, lo cual implica que la acción es discontinua. ■

Por el Teorema 1.8.7 y la Proposición 1.8.11, el espacio cociente G/Γ tiene estructura de Grupo de Lie.

Proposición 1.8.12. *Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferencial. Supongamos que $\varphi : G \rightarrow M$ es un difeomorfismo local sobreyectivo. Si $\Gamma := \varphi^{-1}(\varphi(e))$ es un subgrupo discreto de Lie, entonces G/Γ es isomorfo a M .*

Demostración. Notemos que φ induce una aplicación biyectiva $\hat{\varphi} : G/\Gamma \rightarrow M$ la cual satisface la relación $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi$, donde $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$ es la proyección natural sobre el espacio cociente. En consecuencia, es suficiente probar que $\hat{\varphi}$ es un difeomorfismo local.

Fijemos $p \in G/\Gamma$ y sea $x = \hat{\varphi}(p)$. Por el Teorema 1.8.7, G/Γ tiene una estructura de variedad diferencial tal que $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$ es un difeomorfismo local. Más aún, para cada $p \in G/\Gamma$ existe un entorno abierto conexo \tilde{U} de p tal que $\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup U_\alpha$ donde $\pi : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}$ es un difeomorfismo sobre \tilde{U} para cada α . Tomemos un $g \in G$ tal que $\pi(g) = p$. Entonces, existe un α tal que $g \in U_\alpha$. Como φ es un difeomorfismo local, existe un abierto U de g y un abierto V de x tal que $\varphi : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. De esta forma, $\pi(U_\alpha \cap U)$ es una vecindad abierta de p y $\varphi(U_\alpha \cap U)$ es un entorno abierto de x . Como $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi$, entonces $\hat{\varphi} : \pi(U_\alpha \cap U) \rightarrow \varphi(U_\alpha \cap U)$ es un difeomorfismo. Ésto implica que $\hat{\varphi}$ es un difeomorfismo local como queríamos probar. ■

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^{2n}

Los sistemas Hamiltonianos son fundamentales en la mecánica clásica, pues cualquier sistema en donde se satisfagan las leyes de Newton es Hamiltoniano. En este capítulo se ven propiedades y ejemplos de sistemas Hamiltonianos, así como una introducción a las integrales primeras.

2.1. El corchete de Poisson en \mathbb{R}^{2n} . Definición, propiedades y ejemplos.

Consideremos el espacio fase $\mathbb{R}^{2n} = \{x = (p, q) \mid p, q \in \mathbb{R}^n\}$. Definiremos el siguiente **corchete de Poisson** en \mathbb{R}^{2n} de dos funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ como la función

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Este corchete de Poisson es una operación binaria $\{, \} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ que satisface las siguientes propiedades para $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y $c \in \mathbb{R}$:

- 1) Antisimetría:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

- 2) \mathbb{R} -bilinealidad:

$$\{f, cg + h\} = c\{f, g\} + \{f, h\}$$

- 3) Identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

- 4) Regla de Leibniz:

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$$

- 5) No degeneración:

si $\{f, g\} = 0$ para todo $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, entonces f es constante.

En general, los corchetes de Poisson no satisfacen la propiedad de no degeneración, pero es una propiedad importante para el corchete de Poisson de nuestro interés.

Notemos que $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{, \})$, con $\{, \}$ el corchete de Poisson es un álgebra de Lie, debido a que el corchete de Poisson satisface bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi.

Ejemplo 2.1.1. Sean $p_i, q_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ las funciones coordenadas. Entonces:

$$i) \quad \{p_i, q_j\} = \delta_i^j,$$

$$ii) \quad \{p_i, p_j\} = 0,$$

$$iii) \quad \{q_i, q_j\} = 0.$$

Además de estas propiedades, con el corchete de Poisson podemos definir la función $f \mapsto D_f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ donde $D_f(g) = \{f, g\}$. Un par de hechos importantes sobre D_f son la \mathbb{R} -linealidad y la regla de Leibniz, por lo que es una derivación. Así, a cada función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ le asociamos una derivación en \mathbb{R}^{2n} . Tal asociación es casi inyectiva pues $D_f = D_{f+c}$ con c constante, de donde podemos decir que las pre-ímagenes son únicas salvo adición de constantes.

Sin perder el énfasis en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tenemos la siguiente propiedad que aporta a la descripción su estructura de álgebra de Lie:

Proposición 2.1.2. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Para cualquier $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ se tiene la siguiente identidad,

$$\{F \circ f, g\} = F'(f)\{f, g\},$$

donde F' denota la derivada de F .

Demostración.

$$\begin{aligned} \{F \circ f, g\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(F \circ f)}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial(F \circ f)}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ &= \sum_{i=1}^n F'(f) \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - F'(f) \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ &= F'(f) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ &= F'(f)\{f, g\}. \end{aligned}$$

■

Proposición 2.1.3. Sea $\{, \cdot\}$ un corchete de Poisson en \mathbb{R}^m . La función $f \mapsto X_f$ es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ al álgebra de campos vectoriales $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$.

Como consecuencia a esta última proposición, podemos relacionar los corchetes de las álgebras de Lie $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{, \})$ y $(\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}), [,])$ como sigue:

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$$

2.2. Campos Hamiltonianos, criterios de Hamiltonización y flujos Hamiltonianos.

Un **sistema Hamiltoniano** autónomo en n -grados de libertad es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q), \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave llamada la función Hamiltoniana del sistema. En términos del corchete de Poisson, el sistema Hamiltoniano toma la forma $\dot{x}_i = \{H, x_i\}$. También podemos expresar el sistema Hamiltoniano en forma vectorial, si consideramos $x = (p, q)$, $\nabla H = \frac{\partial H}{\partial x} = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n})$ y la matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$, entonces el sistema Hamiltoniano toma la forma

$$\dot{x} = J(\nabla H)^T.$$

De esta forma, al sistema Hamiltoniano definido por H podemos asociarle un campo vectorial $\mathcal{V}_H = J(\nabla H)^T = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^T$.

Una propiedad de los sistemas Hamiltonianos casi inmediata de su definición es que su campo vectorial asociado \mathcal{V}_H tiene divergencia cero, $\text{div}(\mathcal{V}_H) = 0$. Cuando buscamos determinar si un sistema es Hamiltoniano o no, la siguiente proposición nos da un criterio para ello:

Proposición 2.2.1. *El campo vectorial $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ en \mathbb{R}^2 es Hamiltoniano si y solo si $\text{div}\mathcal{V} = 0$*

Demostración. Supongamos que $\text{div}\mathcal{V} = 0$ y construyamos $H(x_1, x_2)$ tal que $\mathcal{V} = (-\frac{\partial H}{\partial x_2}, \frac{\partial H}{\partial x_1})$. Para cada $x = (x_1, x_2)$ definamos $H(x_1, x_2) = \int_{\gamma} v_2(x)dx_1 - v_1(x)dx_2$, donde γ es una curva suave que conecta al punto $(0, 0)$ con (x_1, x_2) . Para ver que esta función está bien definida, tomemos γ_1, γ_2 curvas suaves que conecten $(0, 0)$ con (x_1, x_2) y utilizando el Teorema de Green se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} v_2(x)dx_1 - v_1(x)dx_2 - \int_{\gamma_2} v_2(x)dx_1 - v_1(x)dx_2 \\ &= \int_{\gamma_1 - \gamma_2} v_2(x)dx_1 - v_1(x)dx_2 = \int \text{div}\mathcal{V}dx_1dx_2 = 0 \end{aligned}$$

Además se cumple que $\frac{\partial H}{\partial x_2} = -v_1$ y $\frac{\partial H}{\partial x_1} = v_2$. ■

Ejemplo 2.2.2. *Consideremos el siguiente sistema autónomo en \mathbb{R}^2 :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Buscamos determinar si es Hamiltoniano. Para ello debe existir una función $H(x_1, x_2)$ tal que $\frac{\partial H}{\partial x_2} = -x_1$ y $\frac{\partial H}{\partial x_1} = x_2$, pero no la hay, puesto que $\text{div}\mathcal{V}_H = 2$.

Este criterio únicamente nos es útil para sistemas en \mathbb{R}^2 , sin embargo la idea de la demostración nos sirve para obtener un criterio más general. Solo enunciaremos el criterio para determinar si un sistema en \mathbb{R}^{2n} es Hamiltoniano:

Proposición 2.2.3. *Un campo vectorial $\mathcal{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{2n}(x))$ en \mathbb{R}^{2n} es Hamiltoniano si y sólo si*

$$J \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^T J = 0,$$

donde $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right)$.

Otros de los conceptos importantes que acompañan a los campos vectoriales en general, son las curvas integrales y el flujo del campo. Las **curvas integrales** son curvas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ suaves tal que $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t))$, y el **flujo** del campo \mathcal{V} , es la función $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\Phi(t, x^0) = x(t, x^0)$ donde la función Φ le asigna a un tiempo t y un punto x^0 la nueva posición del punto al tiempo t . En otros términos, la función Φ satisface que:

$$\frac{d}{dt} (\Phi(t, x^0)) = \mathcal{V}(\Phi(t, x^0)) \quad \text{y} \quad \Phi(0, x^0) = x^0$$

Por simplicidad, en ocasiones denotaremos el flujo del campo vectorial como $\Phi^t(x) = \Phi(t, x)$. El conjunto $\gamma_{x^0} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = \Phi^t(x^0), t \in \mathbb{R}\}$ es llamado la **órbita** del flujo Φ^t sobre x^0 . Cada órbita es una curva suave en \mathbb{R}^m , pero en general no es una curva regular. También, dos órbitas del flujo coinciden o no tienen puntos en común, por ello, las órbitas del flujo inducen una partición de \mathbb{R}^m en órbitas disjuntas, que llamaremos el **retrato fase** del sistema y a las trayectorias $x(t, x^0) = \Phi^t(x^0)$ las llamaremos **soluciones** del sistema.

Si Φ^t es invertible, entonces existe $(\Phi^t)^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\Phi^t \circ (\Phi^t)^{-1} = (\Phi^t)^{-1} \circ \Phi^t = id$ y lo denotamos por $\Phi^{-t} = (\Phi^t)^{-1}$. Si para cada $x \in \mathbb{R}^m$ la función $\Phi_x(t) := \Phi(t, x)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, diremos que el campo vectorial es **completo**.

Recordando el corchete de Lie de campos vectoriales, consideremos los campos $\mathcal{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_m(x))$ y $\mathcal{W}(x) = (w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x))$. El corchete $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ es un campo vectorial cuyas coordenadas son

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}]_i = \sum_{j=1}^n v_j(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) - w_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Si llamamos Φ^t y Ψ^τ a los flujos de \mathcal{V} y \mathcal{W} , respectivamente, entonces podemos expresar $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ como

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}](x) = \left. \frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{d\tau} \right|_{t=0, \tau=0} \Phi^{-t} \circ \Psi^\tau \circ \Phi^t(x),$$

de lo cual se sigue que $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = 0 \Leftrightarrow \Psi^\tau \circ \Phi^t = \Phi^t \circ \Psi^\tau$.

Proposición 2.2.4. *Sea \mathcal{V} un campo vectorial completo en \mathbb{R}^m con flujo Φ^t . Supongamos que \mathcal{W} es un campo completo con flujo Ψ^τ que conmuta con \mathcal{V} . Si $x(t, x^0)$ es solución del sistema $\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$ entonces $\Psi^\tau(x(t, x^0))$ también es solución del sistema $\forall \tau \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Tomando en cuenta que $x(t, x^0) = \Phi^t(x^0)$ y que los campos conmutan, realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Psi^\tau(x(t, x^0))) &= \frac{d}{dt} (\Psi^\tau(\Phi^t(x^0))) = \frac{d}{dt} (\Phi^t(\Psi^\tau(x^0))) \\ &= \mathcal{V}(\Phi^t(\Psi^\tau(x^0))) = \mathcal{V}(\Psi^\tau(\Phi^t(x^0))) \\ &= \mathcal{V}(\Psi^\tau(x(t, x^0))) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por ello, $\Psi^\tau(x(t, x^0))$ también es solución del sistema. ■

Observemos que para $\tau \in \mathbb{R}$, $\Psi^\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ deja invariante al conjunto de soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$. Por lo cual, el campo \mathcal{W} se dice ser una **simetría** del sistema.

Además, el flujo de un campo vectorial completo $\mathcal{V}(x)$ en \mathbb{R}^m define un grupo uni-paramétrico de difeomorfismos en \mathbb{R}^m .

Definición 2.2.5. *Una familia uni-paramétrica de difeomorfismos en \mathbb{R}^m es una función suave $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$i) \Psi(0, x) = x,$$

$$ii) \Psi(t, \Psi(\tau, x)) = \Psi(t + \tau, x).$$

Recíprocamente, cada grupo uni-paramétrico de difeomorfismos en \mathbb{R}^m define un campo vectorial completo, dado por

$$\mathcal{W}(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi^t(x),$$

el cual tiene a $\Psi(t, x) := \Psi^t(x)$ por flujo.

2.3. Transformaciones canónicas.

Dado un sistema Hamiltoniano, nos puede interesar realizar un cambio de coordenadas o simplemente transformar el sistema, pero al transformar el sistema, es posible que el nuevo sistema no resulte Hamiltoniano. Para ello veremos un tipo de transformaciones que mandan campos Hamiltonianos en campos Hamiltonianos.

Definición 2.3.1. *Una transformación $g : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ se dice ser **canónica** (o **simpléctica**) si su matriz jacobiana $\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)$ satisface*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) \cdot J \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right)^T = J, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}$$

Si $g : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es un difeomorfismo canónico, entonces el cambio de variable $\tilde{x} = g(x)$ transforma el sistema Hamiltoniano $\frac{dx}{dt} = J(\nabla H(x))^T$ en un nuevo sistema Hamiltoniano $\frac{d\tilde{x}}{dt} = J(\nabla \tilde{H}(\tilde{x}))^T$, donde $\tilde{H} = H \circ g^{-1}$.

Para mostrar esta última afirmación, al realizar los cálculos se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x) \frac{dx}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x) J(\nabla H)^T = J \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right)^T \right]^{-1} (\nabla H)^T \\ &= J \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right)^T \right]^{-1} \left(\nabla \tilde{H} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right) \right)^T = J \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right)^T \right]^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right)^T (\nabla \tilde{H})^T \\ &= J(\nabla \tilde{H}), \end{aligned}$$

de donde concluimos que g transforma un sistema Hamiltoniano en otro.

Supongamos ahora que Φ^t es una familia uni-paramétrica de transformaciones simplécticas, es decir, $\Phi^t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es una familia de difeomorfismos que satisface:

- i) $\Phi^0 = id$,
- ii) $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$,
- iii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{\partial \Phi^t}{\partial x}(x) \right) \cdot J \cdot \left(\frac{\partial \Phi^t}{\partial x}(x) \right)^T = J$, es decir, Φ^t es simpléctica,
- iv) $\frac{\partial \Phi^t}{\partial x}$ es una familia de transformaciones lineales que dependen del parámetro t de manera suave.

Proposición 2.3.2. Sea $\Phi^t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un grupo uni-paramétrico de difeomorfismos canónicos. Entonces el campo vectorial generado por Φ^t ,

$$\mathcal{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi^t(x),$$

es un campo Hamiltoniano completo en \mathbb{R}^{2n} , con función de Hamilton

$$H(x) = \left\langle Jx, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_0^1 \Phi^t(\tau x) d\tau \right\rangle$$

2.4. El álgebra de integrales primeras de un sistema Hamiltoniano.

En esta sección revisaremos las llamadas integrales primeras de un sistema Hamiltoniano. Su estudio adquiere importancia debido a que cada integral primera

induce una simetría del sistema Hamiltoniano y, por ello, en vez de estudiar las simetrías del sistema, estudiaremos las integrales primeras. Además, veremos algunos resultados importantes al respecto.

Definición 2.4.1. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se define la **derivada de Lie** de f a lo largo de X por:

$$\mathcal{L}_X f := df(X).$$

Como observación, si expresamos la derivada de Lie de f a lo largo de X en coordenadas, ésta se puede interpretar como una derivada direccional.

Definición 2.4.2. Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice ser **integral primera** del campo vectorial X si

$$\mathcal{L}_X f = 0.$$

Podemos interpretar a la derivada de Lie de f como la evolución de f a lo largo de las trayectorias del campo vectorial. Así, las funciones integrales primeras son funciones constantes a lo largo de las trayectorias del sistema.

Consideremos a $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, la derivada de Lie tiene las siguientes propiedades:

- i) $\mathcal{L}_X(f + \alpha g) = \mathcal{L}_X f + \alpha \mathcal{L}_X g$,
- ii) $\mathcal{L}_{X_1 + \alpha X_2} f = \mathcal{L}_{X_1} f + \alpha \mathcal{L}_{X_2} f$,
- iii) $\mathcal{L}_f X g = f(\mathcal{L}_X g)$,
- iv) $\mathcal{L}_X(f \cdot g) = (\mathcal{L}_X f) \cdot g + f \cdot (\mathcal{L}_X g)$.

De tales propiedades se tiene que la derivada de Lie a lo largo de X es una derivación de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, si tenemos una función Hamiltoniana H y su campo vectorial asociado $\mathcal{V}_H = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$, entonces $\mathcal{L}_{\mathcal{V}_H} f = \{H, f\}$.

También, podemos ver que la evolución de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a lo largo de las trayectorias de \mathcal{V}_H está dada por la ecuación $\frac{df}{dt} = \{H, f\}$. Con esto podemos concluir que una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ es integral primera del campo Hamiltoniano \mathcal{V}_H si y solo si $\{H, f\} = 0$. Una consecuencia inmediata de este hecho es que la función Hamiltoniana H es integral primera del campo Hamiltoniano \mathcal{V}_H .

Sean f_1, f_2 integrales primeras de \mathcal{V}_H y $c \in \mathbb{R}$. Debido a las propiedades del corchete de Poisson, se tiene que $f_1 + cf_2$, $f_1 \cdot f_2$ y $\{f_1, f_2\}$ son integrales primeras de \mathcal{V}_H puesto que

$$\{H, f_1 + cf_2\} = \{H, f_1\} + c\{H, f_2\} = 0,$$

$$\{H, f_1 \cdot f_2\} = f_1 \cdot \{H, f_2\} + f_2 \cdot \{H, f_1\},$$

$$\{H, \{f_1, f_2\}\} = \{\{f_2, H\}, f_1\} + \{\{H, f_1\}, f_2\} = 0.$$

Con esto, denotando por $\mathcal{L} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \{H, f\} = 0\}$ al conjunto de integrales primeras, podemos decir que \mathcal{L} es una \mathbb{R} -subálgebra del álgebra de Poisson inducida por $\{, \}$.

Ahora haremos un par de observaciones sobre algunas propiedades de los sistemas Hamiltonianos. La primera observación es que los sistemas en donde se satisfacen las Leyes de Newton, son sistemas Hamiltonianos. De acuerdo con la mecánica clásica, el estado de un sistema en el tiempo t está definido por su posición q y su momento p , donde $p = m\dot{q}$ con m la masa. El espacio \mathbb{R}^{2n} es llamado el espacio fase y \mathbb{R}_q^n es llamado el espacio de configuración.

El movimiento de una partícula de masa m en un campo potencial $V(q)$ está descrito por la Segunda Ley de Newton: $F = ma$, donde $q = (q_1, q_2, q_3)$, $F(q) = -\nabla V(q)$, $a = \ddot{q}$, $\nabla V = (\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3})$ y $\ddot{q}_i = \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial q_i}$.

Con esto, la 2^{da} ley de Newton es equivalente al siguiente sistema en \mathbb{R}^6 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{1}{m} p_i. \end{aligned}$$

Tal sistema es Hamiltoniano, y tiene como función de Hamilton a $H(p, q) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$, donde $\frac{1}{2m}\|p\|^2$ es la energía cinética y $V(q)$ es la energía potencial. Por lo tanto, H representa la energía mecánica del sistema.

Consideremos $E \in \mathbb{R}$ y al conjunto de nivel de H , $S_E = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) = E\}$. Si $\nabla H(x) \neq 0$ para $x \in S_E$, entonces S_E es una hipersuperficie de \mathbb{R}^{2n} de dimensión $2n - 1$, la cual es llamada una superficie de energía regular.

Además, si $x(t)$ es una solución del sistema Hamiltoniano tal que $x(0) \in S_E$ entonces $x(t) \in S_E \forall t \in \mathbb{R}$. Por esto decimos que en los sistemas donde se cumplen las leyes de Newton, y en particular en los sistemas Hamiltonianos, la energía se conserva.

Otra propiedad importante de los sistemas Hamiltonianos es la preservación de volumen, pero esta no la abordaremos con detalle.

2.5. Sistemas Hamiltonianos lineales en el plano.

En general, uno de los aspectos de interés sobre los sistemas de ecuaciones es la estabilidad que el sistema pueda presentar. Los sistemas Hamiltonianos no son la excepción, por ello, consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q),\end{aligned}$$

donde $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$. Uno de los resultados importantes de la teoría de ecuaciones diferenciales es el Teorema de Hartman-Grobman, que nos habla sobre cuando la linealización de un sistema preserva su dinámica localmente. En esta sección, revisaremos los sistemas Hamiltonianos lineales en \mathbb{R}^2 y determinaremos su estabilidad. Recordando uno de los criterios de Hamiltonización, un campo vectorial \mathcal{V} en \mathbb{R}^m es Hamiltoniano si y solo si su matriz $A = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}$ cumple la igualdad:

$$JA + A^T J = 0$$

Este criterio en \mathbb{R}^2 es equivalente a que la divergencia del campo se anule, y al ocurrir esto, podemos dar información más precisa sobre los sistemas Hamiltonianos lineales en el plano. Para empezar, estos toman la forma

$$\begin{aligned}\dot{p} &= ap + bq, \\ \dot{q} &= cp - aq,\end{aligned}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Denotemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Dado que los sistemas lineales están totalmente catalogados en términos de la traza y el determinante de su matriz asociada, el caso Hamiltoniano satisface que $\text{tr}(A) = 0$, por lo que el tipo de sistema será un centro si $\det(A) > 0$ y será un tipo silla si $\det(A) < 0$.

Ejemplo 2.5.1. *Consideremos el siguiente sistema Hamiltoniano*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega^2 x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

*Este sistema es conocido como el **oscilador armónico** unidimensional. Su matriz asociada es tal que $\det(A) > 0$ por lo que es del tipo centro. Además, si consideramos las condiciones iniciales $x_1(0) = x^0, x_2(0) = 0$ entonces la solución resulta ser*

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x^0 \cos(\omega t), \\ x_2(t) &= \frac{x^0}{\omega} \sin(\omega t).\end{aligned}$$

En el caso en que $\det(A) > 0$, basta suponer que el sistema es de la forma del Ejemplo 2.5.1.

Capítulo 3

Integrabilidad y superintegrabilidad

Como se puede observar en el capítulo anterior, la dinámica en los sistemas Hamiltonianos no es arbitraria, y en este capítulo analizaremos dos tipos de sistemas Hamiltonianos, los integrables y los superintegrables. También veremos la relación entre las integrales primeras y la dinámica del sistema, dependiendo de las características que posean dichas integrales primeras.

3.1. Sistemas Hamiltonianos completamente integrables y el Teorema de Liouville-Arnold.

Partiendo de que las integrales primeras de un sistema Hamiltoniano inducen simetrías en el sistema, y daremos la definición de sistema completamente integrable de manera análoga al concepto de integración. Para ello, definamos los siguientes conceptos:

Definición 3.1.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ abierto. Un conjunto de funciones $F_1, F_2, \dots, F_k \in C^\infty(U)$ son **funcionalmente independientes** si $d_x F_1, d_x F_2, \dots, d_x F_k$ son linealmente independientes para toda $x \in U$.

Definición 3.1.2. Un conjunto de funciones $F_1, F_2, \dots, F_k \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ se dicen estar en **involución** si $\{F_i, F_j\} = 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Con respecto a las funciones en involución, podemos decir que el máximo número de funciones que forman un conjunto funcionalmente independiente en \mathbb{R}^{2n} es n .

Definición 3.1.3. Sea X_H un campo Hamiltoniano en \mathbb{R}^{2n} con función Hamiltoniana H . El sistema Hamiltoniano X_H se dice ser **Liouville integrable** (o completamente integrable) en un abierto denso U si existen funciones $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^\infty(U)$ tales que:

- i) f_1, f_2, \dots, f_n son integrales primeras de X_H ,
- ii) f_1, f_2, \dots, f_n son funcionalmente independientes,
- iii) las funciones están en involución,
- iv) los campos Hamiltonianos X_{f_i} son completos en U .

A continuación enunciaremos uno de los teoremas centrales de este trabajo, que si bien no damos la demostración completa en esta sección, la retomaremos más adelante:

Teorema 3.1.4. (de Liouville-Arnold) *Sea X_H un sistema Hamiltoniano completamente integrable y sean f_1, \dots, f_n unas funciones que satisfacen las condiciones de la Definición 3.1.3. Sea $F := (f_1, f_2, \dots, f_n)$ y sea $M_c = \{x \in U \mid F(x) = c\}$ para $c \in \mathbb{R}^n$. Entonces:*

- i) El conjunto de nivel M_c es una subvariedad regular de \mathbb{R}^{2n} , la cual es invariante bajo el flujo del sistema Hamiltoniano,*
- ii) Si M_c es compacta y conexa, entonces es difeomorfa al toro n -dimensional \mathbb{T}^n ,*
- iii) Existe un entorno U de M_c tal que U es difeomorfo a $\mathbb{T}^n \times D^n$, con D^n un abierto de \mathbb{R}^n ,*
- iv) El flujo del sistema Hamiltoniano con función Hamiltoniana H es lineal en el toro \mathbb{T}^n , es decir, en coordenadas angulares el sistema Hamiltoniano tiene la forma $\frac{d\Phi}{dt} = \omega$, $\omega = \omega(f_1, f_2, \dots, f_n)$.*

Demostración. *i)* Como el conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es funcionalmente independiente, el rango de F es constante e igual a n . Notemos además que $M_c = F^{-1}(c)$. Por el Teorema 1.3.4 se sigue que M_c es una subvariedad regular cerrada de \mathbb{R}^{2n} de dimensión n .

Sabemos que para cada $Y \in T_x \mathbb{R}^{2n}$, $x \in M_c$, se tiene que $Y \in T_x M_c$ si y solo si $d_x f_i(Y) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Debido a esto, los campos Hamiltonianos X_{f_j} son tangentes a M_c , pues $d_x f_i(X_{f_j}) = \{f_i, f_j\} = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Luego, para ver que M_c es un invariante del campo Hamiltoniano, consideremos $\gamma : I_c \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ una curva integral de X_H tal que $\gamma(0) \in M_c$. Mostraremos que $\gamma(t) \in M_c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para ello, calculemos la variación de cada f_i a lo largo de la curva integral γ , esto es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f_i(\gamma(t))) &= d_{\gamma(t)} f_i \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \right) = d_{\gamma(t)} f_i (X_H(\gamma(t))) \\ &= \{f_i, H\}(\gamma(t)) = 0. \end{aligned}$$

Con esto concluimos que $F(\gamma(t)) = F(\gamma(0)) = c$, por lo que $\gamma(t) \in M_c$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

ii) Denotemos por Φ_i^t al flujo del campo X_{f_i} . Dado que para cualesquiera índices i, j se tiene que $[X_{f_i}, X_{f_j}] = 0$, sus flujos correspondientes conmutan, es decir, $\Phi_i^{t_i} \circ \Phi_j^{t_j} = \Phi_j^{t_j} \circ \Phi_i^{t_i}$. Esto nos permite definir una acción de \mathbb{R}^n en M_c $\Theta : \mathbb{R}^n \times M_c \rightarrow M_c$, $\Theta(t, x) := \Phi_1^{t_1} \circ \Phi_2^{t_2} \circ \dots \circ \Phi_n^{t_n}(x)$ donde $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Fijemos $x_0 \in M_c$ y mostremos que $\Theta_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow M_c$ es sobre. Sea $x \in M_c$ arbitrario. Probaremos que existe $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = \Theta_{x_0}(t) = \Theta(t, x_0)$. Como M_c es conexa, existe una curva contenida en M_c que conecta a x_0 con x . A cada \hat{x} en la curva le asignamos una vecindad \hat{U} abierta de M_c tal que $\Theta_{\hat{x}} : V \rightarrow \hat{U}$ es un difeomorfismo local. Podemos

cubrir a la curva con una cantidad finita de abiertos U_0, U_1, \dots, U_r que contienen respectivamente a los puntos x_0, x_1, \dots, x_r , donde además $x = x_{r+1} \in U_r$.

Claramente, si existen $t_1, t_2, \dots, t_{r+1} \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1 = \Theta(t_1, x_0), x_2 = \Theta(t_2, x_1), \dots, x_{r+1} = \Theta(t_{r+1}, x_r)$, entonces $x = \Theta(t_1 + t_2 + \dots + t_{r+1}, x_0)$. Veamos que t_i existe. Sea $y_i \in U_{i-1} \cap U_i$. Entonces existen $s_{i-1}, s_i \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Theta_{x_{i-1}}(s_{i-1}) = y_i$ y $\Theta_{x_i}(s_i) = y_i$, pues $\Theta_{x_{i-1}}$ y Θ_{x_i} son difeomorfismos locales. Notemos que $x_i = \Theta_{y_i}(-s_i) = \Theta(-s_i, y_i) = \Theta(-s_i, \Theta(s_{i-1}, x_{i-1})) = \Theta(s_{i-1} - s_i, x_{i-1})$. Con esto concluimos que la acción Θ es transitiva. Luego, $\Theta_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow M_c$ es sobreyectiva, pero no es inyectiva, pues existen $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Theta_{x_0}(t) = x_0$. Denotemos por $\Gamma = \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Theta(t, x_0) = x_0\}$ al grupo estabilizador de x_0 .

Notemos que Γ es un subgrupo de \mathbb{R}^n que no depende de x_0 . Para ello, sea $x \in M_c$ arbitrario. Como la acción es transitiva, existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Theta(y, x_0) = x$. Para $t \in \Gamma$ se tiene

$$\Theta(t, x) = \Theta(t, \Theta(y, x_0)) = \Theta(y, \Theta(t, x_0)) = \Theta(y, x_0) = x,$$

por lo tanto, Γ no depende del punto.

Notemos, además, que existe una vecindad abierta V del origen tal que para cada $t_0 \in \Gamma$ se tiene que $(t_0 + V) \cap \Gamma = \{t_0\}$. Consideremos una vecindad V del origen donde Θ_{x_0} sea un difeomorfismo local. Sea $t \in \Gamma \cap V$. Luego, $\Theta_{x_0}(t) = x_0$ y $\Theta_{x_0}(0) = x_0$. Esto implica que $t = 0$.

Ahora consideremos $t_0 \in \Gamma$ fijo, con $t_0 \neq 0$. Si $\hat{t} \in \Gamma \cap (t_0 + V)$, entonces $\hat{t} - t_0 \in V$ y $\Theta(\hat{t} - t_0, x_0) = x_0$, por lo cual $\hat{t} = t_0$.

Debido a que $\Theta(t, x) := \Phi_1^{t_1} \circ \Phi_2^{t_2} \circ \dots \circ \Phi_n^{t_n}(x)$, cada componente Φ_i aportará un generador para Γ , por ello, Γ es finitamente generado mediante adición, por lo cual, es un grupo discreto y, por el Lema 1.8.4, existen $e_1, \dots, e_k \in \Gamma$ linealmente independientes tal que $\Gamma = \{m_1 e_1 + \dots + m_k e_k \mid m_i \in \mathbb{Z} \text{ para } i = 1, \dots, k\}$. Por la Proposición 1.8.9, la acción $\Theta_2 : \Gamma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\Theta_2(t, s) = t + s$ es discontinua, libre y propia, y además, \mathbb{R}^n / Γ es una subvariedad difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Por hipótesis, M_c es compacto y, por el Lema ...

, M_c es difeomorfo a \mathbb{R}^n / Γ , por lo que, en conclusión, M_c es difeomorfo a \mathbb{T}^n .

Lema: Si $\Theta : G \times M \rightarrow M$ es una acción suave y $x \in M$, entonces $\hat{\Theta}_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ es una inmersión inyectiva. Si Θ es propia entonces $G \cdot x$ es una subvariedad cerrada de M y $\hat{\Theta}_x$ es un difeomorfismo. ■

3.2. Ejemplos de sistemas completamente integrables.

-Sistemas Hamiltonianos con 1 grado de libertad.

Los sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^2 son también conocidos como sistemas Hamiltonianos con 1 grado de libertad, y éstos, al tener como integral primera a la función Hamiltoniana H , son sistemas completamente integrables.

-Oscilador armónico con n grados de libertad.

En el Ejemplo 2.5.1 hicimos referencia a un sistema que llamamos el oscilador armónico unidimensional. De manera general, el oscilador armónico con n grados de libertad es un sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^{2n} con función de Hamilton $H = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (p_i^2 + q_i^2)$, donde ω_i son llamadas las **frecuencias** del sistema. Con esto, el sistema es

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\omega_i q_i, \\ \dot{q}_i &= \omega_i p_i.\end{aligned}$$

Notemos que aun cuando el sistema esté en términos de las $2n$ variables, es posible resolverlo debido a que tiene la forma de n osciladores armónicos 1-dimensionales desacoplados. Además, cada uno de esos osciladores armónicos tiene como función de Hamilton $f_i = \frac{\omega_i}{2} (p_i^2 + q_i^2)$. Luego,

$$\begin{aligned}\{H, f_j\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f_j}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f_j}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f_j}{\partial p_j} \\ &= (\omega_j p_j)(\omega_j q_j) - (\omega_j q_j)(\omega_j p_j) = 0\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que f_1, f_2, \dots, f_n son integrales primeras del sistema cuyas diferenciales están dadas por

$$df_i = \omega_i p_i dp_i + \omega_i q_i dq_i.$$

Tales diferenciales serán linealmente independientes en $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p_i = 0 \text{ y } q_i = 0 \text{ para alguna } i = 1, 2, \dots, n\}$, el cual es un abierto denso en \mathbb{R}^{2n} .

Para f_j, f_k integrales primeras, vemos que están en involución calculando su corchete de Poisson:

$$\begin{aligned}\{f_j, f_k\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial p_i} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial f_j}{\partial p_j} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \frac{\partial f_k}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial q_k} - \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \frac{\partial f_k}{\partial p_k} = 0\end{aligned}$$

Por último, la completez de los campos Hamiltonianos X_{f_i} se sigue de la completez del caso unidimensional. Con esto, se tiene que el oscilador armónico con n grados de libertad es completamente integrable.

-El problema de Kepler.

Uno de los problemas clásicos de la física es el llamado problema de Kepler y este trata sobre el movimiento planetario. En nuestro caso, buscaremos describir el comportamiento de un cuerpo de masa m en \mathbb{R}^3 que orbita alrededor de otro cuerpo de masa M .

La ley de Gravitación Universal establece que la fuerza de atracción que actuará sobre el cuerpo de masa m es igual a $F = -\frac{GMmq}{|q|^3} = -\frac{GMm}{|q|^2} \cdot \frac{q}{|q|}$ donde G es la constante de gravitación universal y q es la posición del objeto de masa m , y consideramos al objeto de masa M situado en el origen. A partir de la segunda ley de Newton, que establece que $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{q}$, obtenemos que $\ddot{q} = -\frac{GMq}{|q|^3}$ y de la definición de momento obtenemos que $\dot{q} = \frac{1}{m}p$. Lo anterior se resume en

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{GM}{|q|^3}q, \\ \dot{q} &= \frac{1}{m}p. \end{aligned}$$

Mediante un cambio de coordenadas adecuado, este sistema toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{q}{|q|^3}, \\ \dot{q} &= p, \end{aligned}$$

el cual, es un sistema Hamiltoniano con función de Hamilton $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{|q|}$. Para este sistema en particular tenemos que existen tres tipos de integrales primeras de interés.

Primero, tenemos $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{|q|}$ la función Hamiltoniana que determina la energía del sistema.

Y segundo, consideremos $L = (L_1, L_2, L_3)$ el vector de momento angular, donde $L = q \times p$. Las funciones:

$$\begin{aligned} L_1 &= q_2p_3 - q_3p_2, \\ L_2 &= q_3p_1 - q_1p_3, \\ L_3 &= q_1p_2 - q_2p_1. \end{aligned}$$

son integrales primeras del campo X_H . Los corchetes de estas funciones cumplen con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \{L_2, L_1\} &= L_3, \\ \{L_3, L_2\} &= L_1, \\ \{L_1, L_3\} &= L_2. \end{aligned}$$

Las funciones H, L_1 y $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ son integrales primeras en involución del campo Hamiltoniano X_H , pues

$$\begin{aligned} \{L_1, L^2\} &= \{L_1, L_1^2\} + \{L_1, L_2^2\} + \{L_1, L_3^2\} \\ &= 2L_1\{L_1, L_1\} + 2L_2\{L_1, L_2\} + 2L_3\{L_1, L_3\} \\ &= -2L_2L_3 + 2L_3L_2 = 0. \end{aligned}$$

El conjunto $\{H, L_1, L^2\}$ consta de 3 integrales primeras en involución para las cuales existe un conjunto abierto en \mathbb{R}^6 donde son funcionalmente independientes y, además los flujos de los campos X_H, X_{L_1} y X_{L^2} son completos. Por lo tanto, el sistema Hamiltoniano asociado al problema de Kepler es completamente integrable.

3.3. Sistemas Hamiltonianos superintegrables.

En las secciones previas hemos visto los sistemas con integrabilidad conmutativa (o integrabilidad de Liouville), es decir, aquellos que admiten un conjunto de integrales primeras $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ tales que $\{f_i, f_j\} = \{f_j, f_i\}$. Además, se comentó que en \mathbb{R}^{2n} el mayor número de integrales primeras funcionalmente independientes, en involución, es n . Existen sistemas en los cuales es posible dar más de n integrales primeras, donde el conjunto de integrales primeras es funcionalmente independiente pero no están en involución.

Para ser más claros, diremos que un campo Hamiltoniano es **superintegrable** si el álgebra de integrales primeras tiene $n + d$ generadores funcionalmente independientes, donde $d > 0$. Con esto, enunciaremos el teorema equivalente al teorema de Liouville-Arnold para sistemas superintegrables:

Teorema 3.3.1. *Sea $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$, definida como $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n+d})$ donde $\{f_i\}_{i=1}^{n+d}$ son funciones funcionalmente independientes generadoras del álgebra de integrales primeras de X_H . Sea c un valor regular de f y supongamos que $f^{-1}(c)$ es compacto y conexo en \mathbb{R}^{2n} . Entonces:*

i) El conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es invariante bajo el flujo del campo X_{f_i} para $i = 1, 2, \dots, n + d$,

ii) $f^{-1}(c)$ es difeomorfo a \mathbb{T}^{n-d} ,

iii) existe un abierto U de $f^{-1}(c)$, un abierto D de \mathbb{R}^{n+d} y un cambio de coordenadas tal que el sistema Hamiltoniano X_H se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0, \\ \dot{\Phi} &= \omega(I), \end{aligned}$$

con $I \in D$, $\Phi \in \mathbb{T}^{n-d}$ y $\omega : D \rightarrow \mathbb{T}^{n-d}$.

3.4. Ejemplos de sistemas superintegrables.

En esta sección presentaremos dos ejemplos de sistemas superintegrables, el primero de ellos es un caso particular del oscilador armónico.

-Oscilador armónico 2-dimensional con resonancia 1:1.

Recordando la estructura que posee el oscilador armónico n dimensional, se tiene que para dimensión 2 su función de Hamilton es

$$H = \frac{\omega_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2} (p_2^2 + q_2^2).$$

En este ejemplo tomaremos el caso particular en que $\omega_1 = \omega_2 = 1$, con lo cual el sistema Hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -q_1, \\ \dot{p}_2 &= -q_2, \\ \dot{q}_1 &= p_1, \\ \dot{q}_2 &= p_2.\end{aligned}$$

Además, algunas de sus integrales primeras son

$$\begin{aligned}f_1 &= q_1 q_2 + p_1 p_2, \\ f_2 &= p_1 q_2 - p_2 q_1, \\ f_3 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2).\end{aligned}$$

Tales integrales primeras no están en involución puesto que

$$\begin{aligned}\{f_1, f_2\} &= 2f_3 \\ \{f_2, f_3\} &= 2f_1 \\ \{f_3, f_1\} &= 2f_2\end{aligned}$$

pero sí son funcionalmente independientes en el abierto $\{(p_1, p_2, q_1, q_2) | p_1 = p_2 = 0 \text{ o } q_1 = q_2 = 0\}^c$ de \mathbb{R}^4 . Por ello, este caso particular del oscilador armónico es superintegrable.

-El problema de Kepler.

Retomando las observaciones realizadas para el problema de Kepler como sistema integrable, consideremos nuevamente su función Hamiltoniana H y al vector de momento angular L . Si consideramos $A = (A_1, A_2, A_3)$ el vector excentricidad, que

se define por $A = p \times L - \frac{q}{|q|}$, entonces las funciones:

$$\begin{aligned} A_1 &= p_2 L_3 - p_3 L_2 - \frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}}, \\ A_2 &= p_3 L_1 - p_1 L_3 - \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}}, \\ A_3 &= p_3 L_1 - p_1 L_3 - \frac{q_3}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

también son integrales primeras del campo X_H . Luego, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} L \cdot A &= L_1 A_1 + L_2 A_2 + L_3 A_3 = 0 \\ A^2 - 1 &= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - 1 = 2H(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) = 2HL^2 \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica que H es dependiente de A y de L , y la primera ecuación nos relaciona a las funciones L_1, L_2, L_3, A_1, A_2 y A_3 , por lo que podemos expresar a cualquiera de ellas en términos de las restantes. Así, podemos considerar a cinco de éstas como un conjunto de funciones funcionalmente independientes, por lo que el sistema que modela el problema de Kepler es superintegrable.

Por último, si consideramos $A = (A_1, A_2, A_3)$ el vector excentricidad, que se define por $A = p \times L - \frac{q}{|q|}$, entonces las funciones:

$$\begin{aligned} A_1 &= p_2 L_3 - p_3 L_2 - \frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}}, \\ A_2 &= p_3 L_1 - p_1 L_3 - \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}}, \\ A_3 &= p_3 L_1 - p_1 L_3 - \frac{q_3}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

también son integrales primeras de X_H . Para este sistema hemos dado un total de siete integrales primeras, de las cuales podemos decir que $\{H, L_1, A_1\}$ están en involución, son funcionalmente independientes en un abierto denso de \mathbb{R}^6 y los flujos X_H, X_{L_1} y X_{A_1} son completos en ese mismo abierto pues H, L_1 y A_1 son de clase C^∞ . Por lo tanto, el sistema Hamiltoniano asociado al problema de Kepler es completamente integrable.

Capítulo 4

Acciones lineales de grupos de Lie compactos en \mathbb{R}^n y el Teorema de Schwarz

Nuestro propósito en este capítulo es presentar un resultado, probado por G. Schwarz en 1974 [17] el cual establece que el álgebra de funciones en \mathbb{R}^n G -invariantes es finitamente generada. Es decir, existe un conjunto finito $\{f_1, \dots, f_k\}$ con $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ funciones G -invariantes tal que para cualquier función f suave G invariante existe una función $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$ tal que $F(f_1, \dots, f_k) = f$.

Este resultado es muy importante en la demostración de que el álgebra de integrales primeras del oscilador armónico es finitamente generada como se puede ver en el capítulo 5. Por esta razón presentamos aquí una formulación detallada de dicho resultado y además presentamos un esbozo de su demostración.

4.1. La topología \mathcal{C}^∞ para el espacio de funciones suaves.

Como se verá más adelante es necesario dotar al espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la topología \mathcal{C}^∞ . En esta sección se describe cómo se define ésta topología. Para comenzar, entenderemos por **espacio vectorial topológico** a un conjunto V dotado de una estructura de espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} y de una topología compatible con la estructura lineal, es decir, las funciones $+$: $V \times V \rightarrow V$ donde $(v, w) \mapsto v + w$ y \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ donde $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ son funciones continuas con respecto a la topología en V .

Por mencionar algunos ejemplos de espacios vectoriales topológicos tenemos a los espacios vectoriales normados \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n . En general, no es necesario contar con una norma para tener un espacio vectorial topológico. Veremos a continuación el concepto de seminorma y de cómo éstas inducen una topología.

Diremos también que una función $p : V \rightarrow \mathbb{R}$, donde V es un espacio vectorial topológico, se dice ser una **seminorma** si satisface:

- i) $p(v) \geq 0$ para todo $v \in V$,
- ii) $p(\alpha v) = |\alpha|p(v)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$,
- iii) Si $v = 0$ entonces $p(v) = 0$,
- iv) $p(v + w) \geq p(v) + p(w)$ para todo $v, w \in V$.

Notemos de la definición que toda norma en V es una seminorma, pero el recíproco no es siempre cierto. Una seminorma p es una norma si cumple que el único vector v tal que $p(v) = 0$ es $v = 0$.

Sea I un conjunto arbitrario. Supongamos que $\mathcal{P} = \{P_\alpha : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \in I\}$ es una familia de seminormas en V y sean $v \in V$, $\epsilon > 0$ y $\alpha \in I$ fijos. Definamos el conjunto $B(v, \epsilon, \alpha) := \{w \in V \mid P_\alpha(v - w) < \epsilon\}$ y consideremos la colección de conjuntos $\mathcal{S} = \{B(v, \epsilon, \alpha) \mid v \in V, \epsilon > 0, \alpha \in I\}$. La colección \mathcal{S} es sub-base de una topología en V , por lo que los abiertos en V son de la forma

$$\bigcap_{j \in J} \{w \in W \mid P_{\alpha_j}(v - w) < \epsilon_j\},$$

donde el conjunto de índices J es finito. Más aún, la topología definida por estos conjuntos abiertos es compatible con la estructura de espacio vectorial. Esto último nos da una manera dotarle a cada espacio vectorial de una estructura topológica compatible. Como resultado complementario en relación a la continuidad de las seminormas tenemos lo siguiente:

Lema 4.1.1. *Sea P una seminorma en un espacio vectorial topológico V . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) P es continua.
- ii) Existe un entorno U de $0 \in V$ tal que P es acotada. [23]

Consideremos \mathbb{R}^n con la norma euclidiana y definamos una sucesión $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de conjuntos compactos en \mathbb{R}^n , por $K_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq j\}$. Esta sucesión cumple con las siguientes dos propiedades:

- i) $K_i \subset K_j$ siempre que $i \leq j$.
- ii) $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbb{R}^n$.

Para cada pareja (m, j) , con m entero no negativo y $j \in \mathbb{N}$, definamos la siguiente familia de funciones:

$$P_{(m,j)} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P_{(m,j)}(f) := \sup_{|p| \leq m} \left\{ \sup_{x \in K_j} \left| \frac{\partial^p}{\partial x} f(x) \right| \right\},$$

donde $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, con p_i enteros no negativos, $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\frac{\partial^p}{\partial x} f(x) = \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^{p_2}}{\partial x_2} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{p_n}}{\partial x_n} f(x)$. La familia de funciones $P_{(m,j)}$ es una familia de seminormas [23].

La **topología** \mathcal{C}^∞ para el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es la topología inducida por la familia de seminormas $P_{(m,j)}$. Más aún, el espacio de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la topología \mathcal{C}^∞ es un **espacio de Fréchet**, es decir, es un espacio topológico que además es metrizable, completo y localmente convexo. Mas adelante veremos que ésta topología en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ hace continuo al operador de promedios.

4.2. Funciones G -invariantes y el operador de promedios

En esta sección denotaremos por G a un grupo de Lie de dimensión n .

Definición 4.2.1. Para $g \in G$ se define la **traslación por la izquierda** por:

$$L_g : G \rightarrow G$$

$$L_g(h) := gh.$$

Análogamente se define la **traslación por la derecha**

$$R_g : G \rightarrow G$$

$$R_g(h) := hg.$$

Ambas traslaciones tienen algunas propiedades que comparten con la traslación euclideana, pero dado que el grupo de Lie G no es necesariamente abeliano, es importante destacar la existencia de ambos tipos de traslaciones. Dentro de las propiedades que presentan ambas traslaciones se tiene que:

- i) L_g y R_g son funciones suaves para todo $g \in G$,
- ii) $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}$ para todo $g_1, g_2 \in G$,
- iii) $R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}$ para todo $g_1, g_2 \in G$,
- iv) $L_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ L_{g_1}$,
- v) L_g y R_g son difeomorfismos para todo $g \in G$.

Ahora, recordemos la noción de **push-forward** de campos vectoriales. Sean M, N variedades diferenciables y $\Psi : M \rightarrow N$ una función suave. Sean $x \in N$ y recordemos que la diferencial de Ψ , $d_x \Psi : T_x M \rightarrow T_{\Psi(x)} N$ es una función lineal. El push-forward de Ψ es la función $\Psi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ definida por

$$\Psi_* X(\Psi(x)) := d_x \Psi(X(x)), \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ es **invariante por la izquierda** si

$$(L_g)_* X = X \text{ para todo } g \in G.$$

Esto es, si

$$(d_h L_g)(X(h)) = X(gh) \text{ para todo } g, h \in G$$

Denotaremos al conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda como $\mathfrak{X}_L(G)$. Este conjunto es no vacío y expondremos una manera de construir campos vectoriales invariantes por la izquierda. Para ello, sea $e \in G$ el elemento identidad. Luego, tomemos $\xi \in T_e G$ y definamos $X_\xi \in \mathfrak{X}(G)$ como

$$X_\xi(h) := d_e L_h(\xi).$$

Con esto, $X_\xi(h) \in T_hG$ y, más aún, $X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$ puesto que

$$\begin{aligned} (d_h L_g)(X_\xi(h)) &= d_h L_g(d_e L_h(\xi)) \\ &= d_h L_g \circ d_e L_h(\xi) = d_e(L_g \circ L_h)(\xi) \\ &= d_e L_{gh}(\xi) = X_\xi(gh), \end{aligned}$$

lo cual demuestra nuestra afirmación. Esto último nos permite definir un mapeo $T_eG \rightarrow \mathfrak{X}_L(G)$ donde $T_eG \ni \xi \mapsto X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$. Tal mapeo es un isomorfismo entre T_eG y $\mathfrak{X}_L(G)$ como espacios vectoriales reales. Dado que comparten la misma estructura como espacio vectorial, podemos hacer un par de observaciones adicionales. Primero, si $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ entonces $[X, Y] \in \mathfrak{X}_L(G)$. Y como segunda observación, tenemos que es posible definir un corchete de Lie en T_eG de manera natural, donde, para $\xi, \nu \in T_eG$, $[\xi, \nu]_{T_eG} := [X_\xi, X_\nu](e)$. Esto último nos lleva a concluir que $(T_eG, [\cdot, \cdot]_{T_eG})$ es un álgebra de Lie y que $\mathfrak{X}_L(G)$ es un álgebra de Lie de dimensión finita.

En relación a las funciones $f \in C^\infty(G)$ invariantes por la izquierda, estas cumplirán que $f = f \circ L_g$ para todo $g \in G$. Para L_g definamos su **pull-back** $(L_g)^*$ como $(L_g)^*f := f \circ L_g$. Consideremos ahora una acción $\Theta : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de G en \mathbb{R}^n . Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. f se dice ser G -invariante si

$$f(\Theta_g(x)) = f(x) \text{ para todo } g \in G, x \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que tal condición es equivalente a pedir que

$$(\Theta_g)^*f = f \text{ para toda } g \in G,$$

donde $(\Theta_g)^*f$ denota el pull-back de f bajo Θ_g . Esto nos permite extender la noción de G -invarianza al espacio $T_0^k(\mathbb{R}^n)$ de campos tensoriales k -covariantes, donde $T \in T_0^k(\mathbb{R}^n)$ se dice ser G -invariante si

$$(\Theta_g)^*T = T \text{ para toda } g \in G.$$

La noción de invarianza por la izquierda se puede extender a campos tensoriales en G . Denotemos por $T_0^k(G)$ al espacio de campos tensoriales en G . Sea $T \in T_0^k(G)$,

$$\begin{aligned} T &: G \rightarrow T(TG) \\ h &\mapsto T_h \in T_0^k(T_hG) \end{aligned}$$

donde

$$T_h : \underbrace{T_hG \times T_hG \times \dots \times T_hG}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diremos que T es invariante por la izquierda si $(L_g^*)T = T$, es decir, para $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_hG$ se satisface $T_{gh}(d_h L_g(v_1), d_h L_g(v_2), \dots, d_h L_g(v_k)) = T_h(v_1, v_2, \dots, v_k) \forall h, g \in G$

G . Para la construcción de campos tensoriales invariantes por la izquierda, consideremos un tensor $\mathbb{T}_e \in T_0^k(T_e G)$. A partir de T_e definiremos un campo tensorial T que resultará invariante por la izquierda. Para tal campo tensorial, definiremos $T_h : \underbrace{T_h G \times T_h G \times \dots \times T_h G}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $T_h(v_1, v_2, \dots, v_k) := T_e(d_h L_{h^{-1}} v_1, d_h L_{h^{-1}} v_2, \dots, d_h L_{h^{-1}} v_k)$.

De este modo, T resulta invariante por la izquierda.

Previo a la definición del operador de promedios, es necesario hablar sobre la medida de Haar. Para ello consideremos un grupo de Lie conexo de dimensión n y sean $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ campos vectoriales invariantes por la izquierda tales que para todo $g \in G$, $\{X_1(g), X_2(g), \dots, X_n(g)\}$ son una base de $T_g G$. Los elementos en \mathcal{B} determinan una orientación en G . Sea $\{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n\}$ la base dual de los campos en \mathcal{B} . Cada Θ_i tiene la propiedad de ser una 1-forma invariante por la izquierda. Luego, definamos $dG := \Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \dots \wedge \Theta_n$. La n -forma dG es invariante por la izquierda, ya que el producto exterior de formas invariantes por la izquierda es invariante por la izquierda. También es no degenerada, pues satisface que $dG(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$. Como forma de volumen, dG satisface que para cualquier n -forma invariante Ω en G , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega = \lambda dG$.

Si suponemos que nuestro grupo de Lie G es compacto, entonces dG define una integral en G . Con esto podemos introducir la siguiente definición:

Definición 4.2.2. *La única n -forma de volumen dG invariante por la izquierda tal que*

$$\int_G dG = 1$$

*es llamada la **medida de Haar**.*

Entre las propiedades de la medida de Haar, se tiene que dG es invariante por la derecha, es decir, $R_h^* dG = dG$ para todo $h \in G$. También, si tenemos $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función en $C^\infty(G)$ y $g \in G$, entonces

$$\int_G f dG = \int_G (f \circ L_g) dG = \int_G (f \circ R_g) dG$$

Consideremos ahora una acción lineal $\Psi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de G en \mathbb{R}^n y definamos el **operador de promedios** por

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_G &: T_0^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tau_0^k(\mathbb{R}^n) \\ \langle R \rangle_G &:= \int_G \Psi^* R dG \end{aligned}$$

donde Ψ es la acción lineal de G y dG es la medida de Haar. El operador de promedios tiene las siguientes propiedades:

- i) $\langle \cdot \rangle_G$ es lineal.
- ii) Para cada $R \in T_0^k(\mathbb{R}^n)$, $\langle R \rangle_G$ es G -invariante.

iii) R es un campo tensorial G -invariante si y solo si $\langle R \rangle_G = R$.

iv) Si S es un tensor G -invariante, entonces para cualquier tensor R tenemos que

$$\langle S \otimes R \rangle_G = S \otimes \langle R \rangle_G,$$

donde \otimes denota el producto tensorial. Además, una consecuencia de los primeros dos puntos es que $\langle \langle R \rangle_G \rangle_G = \langle R \rangle_G$.

Una aplicación importante del operador de promedio es la construcción de un producto interior G -invariante. Recordando, un producto interior μ en \mathbb{R}^n es un 2-tensor simétrico, positivo definido. A partir de μ podemos calcular $\langle \mu \rangle_G$. Este nuevo objeto será nuevamente un 2-tensor simétrico, positivo definido y además, G -invariante.

4.3. El álgebra de polinomios G -invariantes y el teorema de las bases de ideales de Hilbert.

En la sección anterior definimos al operador de promedios actuando sobre $\tau_0^k(\mathbb{R}^n)$ y mencionamos algunas de sus propiedades. En esta sección trabajaremos con el operador de promedios cuando $k = 0$. El espacio sobre el que está definido es $\tau_0^0 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. En este espacio se tiene que la imagen del operador de promedios es el conjunto de las funciones suaves G -invariantes, que denotaremos como $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$. Si nos restringimos al espacio de polinomios en n variables $P(\mathbb{R}^n)$, la imagen resultará ser el conjunto de polinomios invariantes $P(\mathbb{R}^n)^G$. Es decir,

$$\langle \cdot \rangle_G : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$$

$$\langle \cdot \rangle_G : P(\mathbb{R}^n) \rightarrow P(\mathbb{R}^n)^G$$

donde ambos mapeos son sobreyectivos y, además, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $P(\mathbb{R}^n)$ son espacios vectoriales. Esto último se debe a que dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ (o bien, en $P(\mathbb{R}^n)^G$) entonces $(\Psi_h)^*(f + g) = (f + g) \circ \Psi_h = f \circ \Psi_h + g \circ \Psi_h = f + g$, donde Ψ denota la acción de G en \mathbb{R}^n . En los próximos resultados presentamos algunas propiedades de $P(\mathbb{R}^n)^G$.

Consideremos los espacios vectoriales topológicos $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ con la topología \mathcal{C}^∞ . Entonces:

- i) El operador de promedios $\langle \cdot \rangle_G : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ es un operador de proyección continuo.
- ii) $P(\mathbb{R}^n)$ y $P(\mathbb{R}^n)^G$ son densos en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$, respectivamente.

Además de la estructura de espacio vectorial, $P(\mathbb{R}^n)^G$ es un \mathbb{R} -álgebra. El siguiente resultado nos describe la estructura del álgebra.

4.3. EL ÁLGEBRA DE POLINOMIOS G -INVARIANTES Y EL TEOREMA DE LAS BASES DE IDEAL

Proposición 4.3.1. *El álgebra de polinomios G -invariantes es un \mathbb{R} -álgebra finitamente generada, es decir, existe $\{P_1, P_2, \dots, P_k\} \subset P(\mathbb{R}^n)^G$ tal que para cualquier polinomio $P \in P(\mathbb{R}^n)^G$ existe $P' \in P(\mathbb{R}^k)$ tal que*

$$P = P'(P_1, P_2, \dots, P_k).$$

El conjunto de polinomios generadores de $P(\mathbb{R}^n)^G$ es llamado una **base de Hilbert**. Si un polinomio es G -invariante, entonces cada término homogéneo es invariante, por lo que siempre es posible encontrar una base de Hilbert con sólo polinomios homogéneos, en este caso diremos que la base de Hilbert es **homogénea**. También diremos que una base de Hilbert es **minimal** si no contiene subconjuntos propios que también sean base de Hilbert.

La demostración de la Proposición 4.3.1 se basa en algunos resultados algebraicos, en particular el Teorema de las bases de ideales de Hilbert. Haremos uso del teorema, mas no abordaremos la demostración. Para ello necesitamos el siguiente concepto:

Definición 4.3.2. *Sean R un anillo conmutativo e $I \subset R$ un ideal. Se dice que I es **finitamente generado** si existen $s_1, s_2, \dots, s_n \in I$ tal que*

$$I = \{a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n \mid a_i \in R\}.$$

También, si R es un anillo, denotaremos por $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ al anillo de polinomios en n variables con coeficientes en R .

Teorema 4.3.3. (de las bases de ideales de Hilbert) *Sea R un anillo conmutativo con la propiedad de que todo ideal I de R es finitamente generado. Entonces, para cada n , todo ideal de $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es finitamente generado.*

El siguiente resultado nos permitirá dar una demostración inmediata a la Proposición 4.3.1.

Proposición 4.3.4. *Sea $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ una \mathbb{R} -álgebra graduada, donde $A_0 = \mathbb{R}$. Si $A_+ = \bigoplus_{i > 0} A_i$ es finitamente generado como A -módulo, entonces A es finitamente generado como \mathbb{R} -álgebra.*

Demostración. Si A_+ es finitamente generado como A -módulo, entonces existen $a_1, a_2, \dots, a_k \in A_+$ tal que

$$A_+ = \{c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ka_k \mid c_k \in A\}$$

Mostraremos que los mismos generadores de A_+ como módulo generan a A como álgebra. Debemos probar que $A = \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$, o equivalentemente que $A_i \subset \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots$

Para $i = 0$, $A_0 = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$.

Supongamos que existe $N > 0$ tal que para $i < N$ $A_i \subset \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$ y probemos que $A_N \subset \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$. Denotemos por d_i al grado de a_i , es decir, $a_i \in A_{d_i}$. Sea $a \in A_N$. Podemos expresar a en términos de los generadores de A_+ ,

$$a = \sum_{i=1}^k c_i^{j_i} a_i$$

donde $c_i^{j_i} \in A_{j_i}$. Como a es homogéneo de grado N , si $j_i + d_i \neq N$ para algún $i = 1, 2, \dots, k$, entonces $c_i^{j_i} = 0$. En caso contrario, $c_i^{j_i} a_i \in A_{j+d_i} = A_N$, de donde se sigue la siguiente desigualdad:

$$N \geq d_i > 0$$

Si $d_i = N$, entonces $c_i^{j_i} \in A_0 = \mathbb{R}$. Si $d_i < N$, entonces $c_i^{j_i} \in A_j$ con $0 < j < N$. Por hipótesis, $A_j \subset \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$, de donde se sigue que $c_i^{j_i} a_i \in \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$. Por lo tanto, $a \in \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$, lo cual implica que $A_N \subset \mathbb{R}[a_1, a_2, \dots, a_k]$. ■

Una aplicación que nos será muy útil del Teorema de las bases de ideales de Hilbert, es cuando consideramos a \mathbb{R} como nuestro anillo. Notemos que sólo existen dos ideales en \mathbb{R} : $\{0\}$ y \mathbb{R} . Ambos ideales son finitamente generados, por lo tanto, todo ideal de los polinomios en n variables con coeficientes en \mathbb{R} es finitamente generado. Veamos a continuación que esto es suficiente para demostrar la Proposición 4.3.1:

Demostración. (Proposición 4.3.1) Sea $P(\mathbb{R}^n)_+^G$ el conjunto de los polinomios G -invariantes de grado estrictamente positivo y definamos

$$\langle P(\mathbb{R}^n)_+^G \rangle = \{p_1 q_1 + \dots + p_m q_m \mid p_i \in P(\mathbb{R}^n)_+^G, q_i \in P(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{N}\}$$

Notemos que el conjunto $\langle P(\mathbb{R}^n)_+^G \rangle$ es un ideal de $P(\mathbb{R}^n)$, y por ello es finitamente generado, es decir, existen $P_1, P_2, \dots, P_k \in \langle P(\mathbb{R}^n)_+^G \rangle$ tales que

$$\langle P(\mathbb{R}^n)_+^G \rangle = \{q_1 P_1 + q_2 P_2 + \dots + q_k P_k \mid q_1, q_2, \dots, q_k \in P(\mathbb{R}^n)\}.$$

Además, podemos suponer que $P_i \in P(\mathbb{R}^n)_+^G$. Luego, denotemos la restricción a $P(\mathbb{R}^n)^G$ como $\langle P_1, P_2, \dots, P_k \rangle_{P(\mathbb{R}^n)^G} = \{p_1 P_1 + p_2 P_2 + \dots + p_k P_k \mid p_i \in P(\mathbb{R}^n)^G\}$. Observemos que

$$\langle P_1, P_2, \dots, P_k \rangle_{P(\mathbb{R}^n)^G} \subset P(\mathbb{R}^n)_+^G$$

y demosremos la igualdad. Para ello, sea $P \in P(\mathbb{R}^n)_+^G$. Entonces $P = p_1 P_1 + p_2 P_2 + \dots + p_k P_k$ para ciertos $p_1, p_2, \dots, p_k \in P(\mathbb{R}^n)$. Luego, promediando con respecto a la acción de G se sigue que:

$$\begin{aligned} P &= \langle P \rangle = \langle p_1 P_1 + p_2 P_2 + \dots + p_k P_k \rangle \\ &= \langle p_1 P_1 \rangle + \dots + \langle p_k P_k \rangle \\ &= \langle p_1 \rangle P_1 + \dots + \langle p_k \rangle P_k \in \langle P_1, \dots, P_k \rangle_{P(\mathbb{R}^n)^G} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle P_1, P_2, \dots, P_k \rangle_{P(\mathbb{R}^n)^G} = P(\mathbb{R}^n)_+^G.$$

Seguido de la Proposición 4.3.4, como $P(\mathbb{R}^n)_+^G$ es un $P(\mathbb{R}^n)^G$ -módulo finitamente generado, entonces $P(\mathbb{R}^n)^G$ es una \mathbb{R} -álgebra finitamente generada. ■

4.4. Teorema de Schwartz.

La Proposición 4.3.1 nos dice que existe un conjunto finito de polinomios G -invariantes P_1, \dots, P_k tales que cualquier polinomio G -invariante puede ser expresado en términos de dicho conjunto mediante una función polinomial. Una ventaja de este hecho es que el manejo de los polinomios es sencillo, sin embargo, los polinomios no son las únicas funciones G -invariantes en \mathbb{R}^n . Una generalización de este resultado es el Teorema de Schwartz, que nos dice que cualquier función G -invariante puede ser expresada en términos de la misma base de Hilbert de la Proposición 4.3.1, pero ahora mediante una función suave. El Teorema de Schwartz es el siguiente:

Teorema 4.4.1. (Schwartz) *Sea G un grupo de Lie compacto actuando linealmente en \mathbb{R}^n y $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ una base de Hilbert para el álgebra de polinomios G -invariantes. Definamos $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ por $\rho := (P_1, P_2, \dots, P_k)$. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \rho^* & : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G \\ \rho^* f & := f \circ \rho \end{aligned}$$

es sobre.

En este trabajo no profundizaremos en la demostración del Teorema de Schwartz, aún cuando es un resultado importante y una buena herramienta. En cambio, sí daremos un bosquejo de la demostración, donde plantearemos de manera general los pasos de ésta, sin entrar en muchos detalles.

Para el bosquejo de demostración, recordemos que \mathbb{R}^n/G es el espacio de órbitas de la acción de G en \mathbb{R}^n , $Gx = \{\Psi(g, x) | g \in G\}$ es la órbita del elemento $x \in \mathbb{R}^n$ y que

$$\begin{aligned} \Pi & : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/G \\ \Pi & := Gx \end{aligned}$$

es la proyección natural. Si dotamos a \mathbb{R}^n/G con la topología cociente, Π es una función continua. Sea $P_1, P_2, \dots, P_k \in P(\mathbb{R}^n)^G$ una base de Hilbert como en el Teorema 4.4.1. Se define la función

$$\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\rho(x) := (P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x))$$

Lema 4.4.2. *La función (4.4) tiene las siguientes propiedades:*

i) *Es propia.*

ii) *Separa órbitas.*

iii) Existe una función $\rho' : \mathbb{R}^n/G \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\rho} & \rho(\mathbb{R}^n) \\ \Pi \downarrow & \nearrow \rho' & \\ \mathbb{R}^n/G & & \end{array}$$

y ρ' es un homeomorfismo sobre su imagen.

Demostración. Sea $r(x) = |x|^2$, donde $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ es un producto interior invariante. Notemos que existe un polinomio $P \in P(\mathbb{R}^k)$ tal que $r(x) = P(\rho(x))$.

Sea $K \subset \mathbb{R}^k$ compacto. Queremos probar que $\rho^{-1}(K)$ es compacto en \mathbb{R}^n . Como K es cerrado, $\rho^{-1}(K)$ es cerrado. Solo resta probar que $\rho^{-1}(K)$ es acotado. Para ello, es suficiente mostrar que si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión no acotada, entonces $\{\rho(x_n)\}$ no es acotada. Supongamos que existe un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^k$ tal que $\rho^{-1}(A)$ es no acotado. Como $\rho^{-1}(A)$ es no acotado, existe una sucesión $\{x_n\} \subset \rho^{-1}(A)$ que no es acotada. Pero, como $\rho(x_n) \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que la sucesión no acotada $\{\rho(x_n)\}$ está contenida en K , lo cual es absurdo. Así, $\{\rho(x_n)\}$ es una sucesión no acotada en \mathbb{R}^k , y como P es un polinomio, entonces $\{P(\rho(x_n))\}$ no es acotada en \mathbb{R}^k .

Para mostrar que ρ separa órbitas de G , tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $Gx \neq Gy$ y consideremos la función

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in Gx \\ 1 & \text{si } z \in Gy \end{cases}.$$

Notemos que f es continua y que $X = Gx \cup Gy \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. Como consecuencia del Teorema de Stone-Weierstrass, dado $\epsilon > 0$ existe P polinomio tal que $|f(z) - P(z)| < \epsilon$ si $z \in X$. Al tomar $q := \langle P \rangle_G \in P(\mathbb{R}^n)^G$ vemos que

$$\begin{aligned} |f(z) - q(z)| &= |\langle f \rangle(z) - \langle P \rangle_G(z)| = \left| \int_G (f - P)(\Psi_g(z)) dG \right| \\ &\leq \int_G |f - P| \Psi_g(z) dG \leq \epsilon \int_G dG = \epsilon, \end{aligned}$$

por lo que q distingue Gx de Gy . Luego, como q es invariante, existe $q' \in P(\mathbb{R}^k)$ tal que $q = q'(\rho) = q'(P_1, \dots, P_k)$. El hecho de que $q(x) \neq q(y)$ es equivalente a que $q'(P_1(x), \dots, P_k(x)) \neq q'(P_1(y), \dots, P_k(y))$, por lo que $P_i(x) \neq P_i(y)$ para algún i . Por lo tanto, $\rho(x) \neq \rho(y)$.

Definamos $\rho' : \mathbb{R}^n/G \rightarrow \mathbb{R}^k$ por $\rho'(Gx) := \rho(x)$. Esta función satisface que $\rho = \rho' \circ \Pi$ y además es inyectiva, debido a que ρ separa órbitas. Al dotar a \mathbb{R}^n/G de la topología cociente, ρ' es continua, con lo cual es un homeomorfismo sobre su imagen. ■

La siguiente proposición puede ser consultada en [16] y resulta de gran importancia para la demostración del Teorema de Schwarz.

Proposición 4.4.3. *Si $\rho : \mathbb{R}^n/G \rightarrow \mathbb{R}^k$ es suave, propia y $\rho'^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k))$ es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n/G)$, entonces ρ'^* es sobreyectiva.*

Dotando a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ de la topología \mathcal{C}^∞ y a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n/G)$ de la topología tal que Π^* es un homeomorfismo, se sigue que $\rho^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)) = \Pi^*(\rho'^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)))$ es denso en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$. Luego,

$$(\Pi^*)^{-1}(\rho^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k))) = (\Pi^*)^{-1} \circ \Pi^*(\rho'^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k))) = \rho'^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)).$$

Por tanto, $\rho'^*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k))$ es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n/G)$. Con esto, verificamos que se cumplen las hipótesis de la Proposición 4.4.3, por lo que ρ'^* es sobreyectiva. Además $\rho_* = \rho' * \circ \Pi^*$ y agregando que Π^* es sobre, ρ_* es sobre.

Capítulo 5

El álgebra de simetrías del oscilador armónico con dos grados de libertad

Anteriormente, hemos utilizado al oscilador armónico como ejemplo de sistema integrable y superintegrable. En este capítulo estudiaremos más a fondo al oscilador armónico con dos grados de libertad. Tal sistema tiene como función de Hamilton a $H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2)$, donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias de los osciladores armónicos unidimensionales desacoplados. En este caso, el sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\omega_1 q_1, \\ \dot{p}_2 &= -\omega_2 q_2, \\ \dot{q}_1 &= \omega_1 p_1, \\ \dot{q}_2 &= \omega_2 p_2.\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos que el flujo del campo Hamiltoniano es el siguiente:

$$Fl_{X_H}^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cos(\omega_1 t) - q_1 \sen(\omega_1 t) \\ p_2 \cos(\omega_2 t) - q_2 \sen(\omega_2 t) \\ p_1 \sen(\omega_1 t) + q_1 \cos(\omega_1 t) \\ p_2 \sen(\omega_2 t) + q_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}.$$

Para el oscilador armónico unidimensional, el flujo es siempre periódico. En este caso notemos que de existir un periodo común T entre los dos osciladores unidimensionales, se tendría que $\omega_1 T = 2\pi n$ y $\omega_2 T = 2\pi m$ para ciertos $n, m \in \mathbb{Z}$. Tomando el cociente entre ambas igualdades obtenemos $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. Con esto concluimos que cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, entonces el flujo es periódico y con periodo $T = \frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{2\pi m}{\omega_2}$. Cuando esto ocurre, este caso se llama **resonante**. Por otra parte, cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, diremos que el sistema es **no-resonante**. En este último caso, no se presentan órbitas periódicas. Sin embargo, el Teorema de Liouville-Arnold nos garantiza la existencia de un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^4$ compacto, conexo, difeomorfo a \mathbb{T}^2 e invariante bajo el flujo del campo Hamiltoniano, donde las órbitas son densas.

Con base en los resultados expuestos en capítulos anteriores, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 5.0.4. *El álgebra de integrales primeras del sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^4 con función de Hamilton $H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2)$ es finitamente generado.*

Este resultado engloba el enfoque de este último capítulo, pero antes de profundizar en él, revisaremos un cambio de coordenadas del que nos habla el teorema de Liouville-Arnold.

5.1. Coordenadas acción-ángulo para el oscilador armónico.

En esta sección, nos enfocaremos únicamente en el oscilador armónico unidimensional, dado que la extensión al caso n -dimensional será natural debido al desacoplamiento en osciladores unidimensionales que presenta este sistema. El Teorema de Liouville-Arnold hace referencia a coordenadas angulares en donde, para el caso de \mathbb{R}^2 , el sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0, \\ \dot{\phi} &= \omega(I),\end{aligned}$$

donde $I(0) = \xi \in \mathbb{R}$ y $\phi(0) = \phi^0 \in \mathbb{R}$. En este sistema, $I(t) = \xi$ y $\dot{\phi} = \omega(\xi) = \omega$, por lo que $\phi(t) = \omega t + \phi^0$. Con esto, el sistema se traduce a

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0, \\ \dot{\phi} &= \omega,\end{aligned}$$

donde $I(0) = \xi \in \mathbb{R}$ y $\phi(0) = \phi^0 \in \mathbb{R}$. Además, la función Hamiltoniana del sistema es $H = \omega I$ y el flujo del sistema es

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \omega t + \phi^0 \end{pmatrix}$$

Un punto importante sobre este sistema de coordenadas es la construcción de la transformación canónica que nos lleva de las coordenadas cartesianas a estas coordenadas llamadas **acción-ángulo**. Para ello, consideremos el siguiente oscilador armónico

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -q, \\ \dot{q} &= p,\end{aligned}$$

cuyo flujo es

$$\Phi^t(p, q) = \begin{pmatrix} p \cos(t) - q \sin(t) \\ p \sin(t) + q \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Sea $E_0 \in \mathbb{R}$ un valor regular de H y sea I un intervalo abierto, con $E_0 \in I$, tal que para cada $E \in I$ la curva de nivel $H(p, q) = E$ es cerrada. Sea $D = \{(p, q) \mid H(p, q) = E, E \in I\}$. Construiremos una transformación canónica $\Psi : \tilde{D} \rightarrow D$, $(I, \phi) \mapsto (p, q)$, tal que

i) $I = I(E)$

ii) $\oint_{H=E} d\phi = 2\pi$

iii) El sistema en coordenadas (I, ϕ) sea de la forma

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0 \\ \dot{\phi} &= \omega(I)\end{aligned}$$

para alguna $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para esto, construiremos primero una transformación canónica $(E, t) \mapsto (p, q)$. Fijemos $(p_0, q_0) \in H^{-1}(E_0)$ y sea $\Phi : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^2$ el flujo del sistema. Como $H = E$ es una curva cerrada, existe $T(E) > 0$ tal que $\Phi^t(p_0, q_0) = \Phi^{t+T}(p_0, q_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces cada $t \in [0, T]$ determina unívocamente un punto en $H(p, q) = E_0$. Luego, para $E \in I$ existe una función $E \mapsto (p^0(E), q^0(E))$ y utilizando el Teorema de la Función Implícita para $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(p, q, E) = H(p, q) - E$, obtenemos $g : D_1 \rightarrow D$, $(E, t) \mapsto (p(E, t), q(E, t))$, donde se satisface

$$\begin{aligned}\dot{t} &= 1, \\ \dot{E} &= 0.\end{aligned}$$

Por último, para obtener una transformación canónica $(I, \phi) \mapsto (E, t)$, sea $S(E)$ el área de la región acotada por la curva de nivel $H = E$ y definamos

$$\begin{aligned}I(E) &:= \frac{1}{2\pi} S(E), \\ \phi &:= \frac{2\pi t}{T(E)}.\end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0, \\ \dot{\phi} &= \omega(I).\end{aligned}$$

5.2. El álgebra de simetrías del oscilador armónico.

Finalmente, para mostrar que el Teorema 5.0.4 es consecuencia de los resultados expuestos, estableceremos el vínculo de las integrales primeras del sistema con la acción de un grupo de Lie compacto.

Proposición 5.2.1. (Caso resonante) *Sea $H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2)$ la función de Hamilton del oscilador armónico con dos grados de libertad tal que $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$. Existe una acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^4 tal que para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ se tiene que f es integral primera si y solo si f es \mathbb{S}^1 -invariante.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que f es integral primera de el campo X_H , y consideremos la acción $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\Psi(\theta, p, q) := \text{Fl}_{X_H}^{\frac{\theta}{\omega_2}}(p, q)$ donde Fl_{X_H} es el flujo del campo X_H , $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y T es el periodo de las órbitas. Entonces,

$$f \circ \Psi_\theta(p, q) = f \circ \text{Fl}_{X_H}^{\frac{\theta}{\omega_2}}(p, q) = f(p, q).$$

Dado que lo anterior se satisface para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$, entonces f es \mathbb{S}^1 -invariante.

(\Leftarrow) Supongamos que f es \mathbb{S}^1 -invariante. Luego, expresemos el flujo del campo X_H como $\text{Fl}_{X_H}^t(p, q) = \Psi(\omega t, p, q)$, con Ψ la acción de \mathbb{S}^1 como se definió anteriormente. Entonces

$$f \circ \text{Fl}_{X_H}^t(p, q) = f \circ \Psi_{\omega t}(p, q) = f(p, q)$$

Esto nos dice que f es invariante a lo largo del flujo del campo X_H , por lo cual, f es integral primera de X_H . ■

Proposición 5.2.2. (Caso no-resonante) Sea $H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2)$ la función de Hamilton del oscilador armónico con dos grados de libertad tal que $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$. Existe una acción de \mathbb{T}^2 en \mathbb{R}^4 tal que para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ se tiene que f es integral primera si y solo si f es \mathbb{T}^2 -invariante.

Demostración. Definamos $H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2)$ y $H_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2)$ y consideremos lo siguiente:

- i) $\{H, H_i\} = 0$ para $i = 1, 2$.
- ii) ∇H_1 y ∇H_2 son linealmente independientes en un abierto denso de \mathbb{R}^4 .
- iii) $\{H_1, H_2\} = 0$.

Definamos la acción $\Psi : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ como sigue:

$$\Psi(\theta_1, \theta_2, p, q) = \begin{pmatrix} p_1 \cos(\theta_1) - q_1 \sin(\theta_1) \\ p_2 \cos(\theta_2) - q_2 \sin(\theta_2) \\ p_1 \sin(\theta_1) + q_1 \cos(\theta_1) \\ p_2 \sin(\theta_2) + q_2 \cos(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Observemos que podemos expresar el flujo del campo X_H como $\text{Fl}_{X_H}^t(p, q) = \Psi(\omega_1 t, \omega_2 t, p, q)$.

(\Rightarrow) De manera análoga al caso resonante se demuestra que si f es \mathbb{T}^2 -invariante, entonces es una integral primera del campo X_H .

(\Leftarrow) Supongamos que f es integral primera de X_H . Dado que se satisfacen todas las hipótesis, por el Teorema de Liouville-Arnold, existe un conjunto compacto, conexo y difeomorfo a \mathbb{T}^2 invariante bajo el flujo de X_H . Más aun, por ser $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, cada trayectoria de X_H que nace en \mathbb{T}^2 permanece en \mathbb{T}^2 . Agregando la continuidad de f , ésta es constante en ese conjunto, por lo que f es \mathbb{T}^2 -invariante. ■

Con las Proposiciones 5.2.1 y 5.2.2, hemos demostrado que, en cualquier caso, existe una acción de un grupo de Lie compacto G tal que el álgebra de integrales primeras es el mismo que el conjunto de funciones G -invariantes. Además, en cada caso la acción es lineal, por lo que podremos utilizar el Teorema de Schwartz para caracterizar el algebra de simetrías del oscilador armónico.

5.3. Generadores del álgebra de simetrías y sus relaciones de conmutación.

Lo único que resta es encontrar una base de Hilbert para $P(\mathbb{R}^4)^G$, que como vimos en la sección anterior, es nuestra álgebra de integrales primeras. Sea f una integral primera del oscilador armónico, es decir, $\{H, f\} = 0$. Esto último nos dice que se satisface la siguiente ecuación:

$$\omega_1 \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} \right) + \omega_2 \left(p_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} \right) = 0.$$

Tal ecuación no nos es útil para encontrar una base de Hilbert. Sin embargo, existe un cambio de coordenadas donde la ecuación se simplifica. Mediante el cambio de coordenadas complejo $(p_1, q_1, p_2, q_2) \mapsto (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ con $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k + ip_k)$ para $k = 1, 2$, la función Hamiltoniana toma la forma $H(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \omega_1 z_1 \bar{z}_1 + \omega_2 z_2 \bar{z}_2$ y el corchete de Poisson $\{f, g\} = i \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_k} \right)$. Si f es una integral primera de X_H , entonces se sigue la siguiente ecuación:

$$\{H, f\} = i \left(\omega_1 \left(\bar{z}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) + \omega_2 \left(\bar{z}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2} - z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) \right) = 0.$$

Para encontrar una base de Hilbert, consideremos la integral primera polinomial de la forma

$$P = z_1^{k_1^+} z_2^{k_2^+} \bar{z}_1^{k_1^-} \bar{z}_2^{k_2^-},$$

donde los exponentes son enteros no-negativos. Al calcular $\{H, P\}$ y simplificar, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\omega_1 (k_1^- - k_1^+) + \omega_2 (k_2^- - k_2^+) = 0.$$

Al ser $k_1^-, k_1^+, k_2^-, k_2^+$ enteros, podemos sustituir $r = k_1^- - k_1^+$ y $s = k_2^- - k_2^+$ en la ecuación, resultando la siguiente:

$$\omega_1 r + \omega_2 s = 0.$$

Nos interesan todas las soluciones para r y s , pues cada una de ellas nos genera una familia de polinomios integrales primeras. Una solución de esta última ecuación es $r = s = 0$. Esta solución equivale a $k_1^+ = k_1^-$ y $k_2^+ = k_2^-$. La familia de polinomios que satisfacen estas dos igualdades son generados por $P_1 = z_1 \bar{z}_1$ y $P_2 = z_2 \bar{z}_2$.

Supongamos que $r, s \neq 0$, entonces $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{s}{r}$. Esto implica que **el caso no-resonante no tiene mas soluciones**, por lo que su álgebra de simetrías es generada por $P_1 = \frac{p_1^2 + q_1^2}{2}$ y $P_2 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}$.

Para el caso resonante, sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{m}{n} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ es irreducible. Entonces

$$\frac{m}{n} = -\frac{s}{r}$$

Formalmente, las soluciones de esta ecuación son $-s = \lambda m$ y $r = \lambda n$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$, pero podemos suponer que $|\lambda| = 1$, puesto que cualquier otro valor será múltiplo de éstos.

Consideremos ahora los siguientes casos:

Caso $mn > 0$:

Una de las posibilidades para este caso es que $m, n > 0$, lo cual nos genera dos sub-posibilidades. La primera es que $s = -m$ y $r = n$. Esto se traduce a $k_2^- - k_2^+ = -m$ y $k_1^- - k_1^+ = n$. Aquí podemos suponer que $k_1^- = n$, $k_1^+ = 0$, $k_2^- = 0$ y $k_2^+ = m$, de donde obtenemos $P_3 = \bar{z}_1^n z_2^m$, pues cualquier otra solución la obtenemos a partir de P_1, P_2 y P_3 . La otra sub-posibilidad es cuando $s = m$ y $r = -n$, la cual se traduce a $k_2^- - k_2^+ = m$ y $k_1^- - k_1^+ = -n$, de donde se obtiene $P_4 = \bar{P}_3 = z_1^n \bar{z}_2^m$.

Si consideramos la posibilidad $m, n < 0$, la única diferencia será que los polinomios P_3 y P_4 serán $P_3 = \bar{z}_1^{-n} z_2^{-m}$ y $P_4 = z_1^{-n} \bar{z}_2^{-m}$. Por ello, basta considerar el caso $m, n > 0$. Así, una base de Hilbert será:

$$\begin{aligned} P_1 &= z_1 \bar{z}_1, \\ P_2 &= z_2 \bar{z}_2, \\ P_3 &= \bar{z}_1^n z_2^m, \\ P_4 &= z_1^n \bar{z}_2^m. \end{aligned}$$

Esta base de Hilbert tiene el inconveniente de que está en coordenadas complejas y si la regresamos a las coordenadas cartesianas, las funciones no son reales. Por ello, consideremos la siguiente base de Hilbert:

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 \\ \rho_1 &= \omega_1 P_1 - \omega_2 P_2 \\ \rho_2 &= \frac{P_3 + P_4}{2} = \text{Re}P_3 \\ \rho_3 &= \frac{P_3 - P_4}{2i} = \text{Im}P_3 \end{aligned}$$

donde $\text{Re}P_3$ y $\text{Im}P_3$ denotan la parte real y la parte imaginaria de P_3 , respectivamente. En coordenadas cartesianas, estas integrales primeras toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2), \\ \rho_1 &= \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2), \\ \rho_2 &= \frac{(q_1 + ip_1)^n (q_2 - ip_2)^m + (q_1 - ip_1)^n (q_2 + ip_2)^m}{2^{1+\frac{n+m}{2}}}, \\ \rho_3 &= \frac{(q_1 + ip_1)^n (q_2 - ip_2)^m - (q_1 - ip_1)^n (q_2 + ip_2)^m}{2^{1+\frac{n+m}{2}} i}. \end{aligned}$$

5.3. GENERADORES DEL ÁLGEBRA DE SIMETRÍAS Y SUS RELACIONES DE CONMUTACIÓN.63

Estas integrales primeras no son funcionalmente independientes, de hecho, satisfacen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\rho_2^2 + \rho_3^2 &= (\operatorname{Re}P_3)^2 + (\operatorname{Im}P_3)^2 = |P_3|^2 = P_3\bar{P}_3 = P_3P_4 \\ &= z_1^n \bar{z}_1^n z_2^m \bar{z}_2^m = (z_1 \bar{z}_1)^n (z_2 \bar{z}_2)^m \\ &= P_1^n P_2^m = \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1}\right)^n \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2}\right)^m.\end{aligned}$$

El hecho de que

$$\rho_2^2 + \rho_3^2 = \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1}\right)^n \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2}\right)^m$$

establece una relación funcional entre los cuatro generadores del álgebra de simetrías, haciendo que estos no sean funcionalmente independientes. Sin embargo, podemos eliminar uno de estos generadores sin problema y así obtener una nueva base de Hilbert. Por ello, una nueva base de Hilbert es

$$\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$$

y sus relaciones de conmutación son las siguientes:

$$\begin{aligned}\{\rho_1, \rho_2\} &= -(\omega_1 n + \omega_2 m)\rho_3, \\ \{\rho_1, \rho_3\} &= (\omega_1 n + \omega_2 m)\rho_2, \\ \{\rho_2, \rho_3\} &= \frac{n^2}{2} \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1}\right)^{n-1} \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2}\right)^m - \frac{m^2}{2} \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1}\right)^n \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2}\right)^{m-1}.\end{aligned}$$

Caso $mn < 0$:

En este caso, la primer diferencia a notar con el caso anterior es que la base de Hilbert está formada por los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}P_1 &= z_1 \bar{z}_1, \\ P_2 &= z_2 \bar{z}_2, \\ P_3 &= z_1^n z_2^m, \\ P_4 &= \bar{z}_1^n \bar{z}_2^m,\end{aligned}$$

los cuales presentan el mismo inconveniente de antes. Sin embargo, podemos definir a los polinomios ρ_i de la misma manera, es decir,

$$\begin{aligned}H &= \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2, \\ \rho_1 &= \omega_1 P_1 - \omega_2 P_2, \\ \rho_2 &= \frac{P_3 + P_4}{2} = \operatorname{Re}P_3, \\ \rho_3 &= \frac{P_3 - P_4}{2i} = \operatorname{Im}P_3,\end{aligned}$$

donde se sigue satisfaciendo la igualdad

$$\rho_2^2 + \rho_3^2 = \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1} \right)^n \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2} \right)^m.$$

Por tanto, la nueva base de Hilbert para este caso es

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2), \\ \rho_2 &= \frac{(q_1 + ip_1)^n(q_2 + ip_2)^m + (q_1 - ip_1)^n(q_2 - ip_2)^m}{2^{1+\frac{n+m}{2}}}, \\ \rho_3 &= \frac{(q_1 + ip_1)^n(q_2 + ip_2)^m - (q_1 - ip_1)^n(q_2 - ip_2)^m}{2^{1+\frac{n+m}{2}}i}, \end{aligned}$$

y sus relaciones de conmutación son:

$$\begin{aligned} \{\rho_1, \rho_2\} &= (\omega_1 n - \omega_2 m)\rho_3, \\ \{\rho_1, \rho_3\} &= -(\omega_1 n - \omega_2 m)\rho_2, \\ \{\rho_2, \rho_3\} &= -\frac{n^2}{2} \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1} \right)^{n-1} \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2} \right)^m - \frac{m^2}{2} \left(\frac{H + \rho_1}{2\omega_1} \right)^n \left(\frac{H - \rho_1}{2\omega_2} \right)^{m-1}. \end{aligned}$$

5.4. Resonancia 1 : 1 para el oscilador armónico 2-dimensional

En esta sección mostraremos como llevar la base de Hilbert para el álgebra de integrales primeras del oscilador armónico 2-dimensional del caso general a uno particular. Para ello, consideremos el oscilador armónico con resonancia 1 : 1. Éste caso particular se presenta cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$, al cual le corresponden $n = m = 1$. Directamente de la sección anterior, por ser del caso $mn > 0$, se sigue que su álgebra de integrales primeras está generada por las funciones

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2), \\ \rho_2 &= \frac{(q_1 + ip_1)^n(q_2 - ip_2)^m + (q_1 - ip_1)^n(q_2 + ip_2)^m}{2^{1+\frac{n+m}{2}}} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{2}, \\ \rho_3 &= \frac{(q_1 + ip_1)^n(q_2 - ip_2)^m - (q_1 - ip_1)^n(q_2 + ip_2)^m}{2^{1+\frac{n+m}{2}}i} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{2}. \end{aligned}$$

Éste fue uno de los ejemplos utilizados en la Sección de Ejemplos de sistemas superintegrables, la cual se puede consultar para mayor información sobre este sistema Hamiltoniano superintegrable.

5.5. Resonancia 0

Otro caso particular interesante es el caso degenerado en que una de las frecuencias es nula. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega_2 = 0$ y $\omega_1 \neq 0$. Al repetir el proceso para encontrar la base de Hilbert, se llega a la ecuación

$$\omega_1 r + \omega_2 s = \omega_1 r = 0,$$

lo cual, en los mismos términos del primer cálculo de la base de Hilbert, implica que $r = k_1^- - k_1^+ = 0$, es decir, $k_1^- = k_1^+$, por lo que $P_1 = z_1 \bar{z}_1$ es un generador del álgebra de integrales primeras. Por otra parte, no se tiene restricción para los valores de s . Esto último permite que k_2^+ y k_2^- puedan tomar los valores 1 y 0, respectivamente, resultando z_2 una integral primera, más aún, p_2 y q_2 son integrales primeras debido a que las partes real e imaginaria de z_2 lo son.

En conclusión, la base de Hilbert para este oscilador armónico es

$$\{p_1^2 + q_1^2, p_2, q_2\}.$$

Notemos que éste sistema se interpreta como dos osciladores 1-dimensional, de los cuales uno se encuentra estático. Así, cualquier función suave en sus variables p_2 y q_2 es integral primera ya que toda función es constante a lo largo de las órbitas, pues las órbitas son, para el oscilador armónico estático, puntuales.

665. *EL ÁLGEBRA DE SIMETRÍAS DEL OSCILADOR ARMÓNICO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD*

Bibliografía

- [1] J. E. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu, *Foundations of Mechanics*, 2nd. Edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.
- [3] R. Abraham and J. E. Marsden *Manifolds, Tensor, Analysis, and applications*, 2nd. Edition, Academic Press, Inc.
- [4] W. M. Boothby *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd. Edition, Academic Press, Inc.
- [5] V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Niestadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Encyclopedia of Math. Sci., vol.3 (Dynamical Systems III), Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.
- [6] R. Flores Espinoza and Yu. Vorobiev, *Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Goemetry*, UNISON, Hermosillo, Sonora, 1998.
- [7] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Vol. 60, Springer Science & Business Media, 1989.
- [8] F. Fassò, *Superintegrable Hamiltonian systems: geometry and perturbations*, Acta Applicandae Mathematica, 87(1-3), 93-121.
- [9] B. Jovanovic, *Symmetries and integrability*, Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS), 84(98), 1-36, 2008.
- [10] B. Jovanovic, *What are completely integrable hamilton systems*, The Teaching of Mathematics, 13(1), 1-14, 2011.
- [11] F. Kordon, *Sistemas Hamiltonianos: Integrabilidad y Simetrías*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2014.
- [12] K. R. Meyer, *The Geometry of Harmonic Oscillators*, American Mathematical Monthly, 97(6), 457-465, 1990.
- [13] G. Schrader, *Classical Integrable Systems and Linear Flow on Tori*, The University of Melbourne, 2009.
- [14] E. M. Patterson, *Generators of linear algebras*, Proc. London Math. Soc., 7(3), 467-480, 1957.
- [15] S. Biec Amigo, *Acciones de grupos sobre espacios topológicos*, 2013.

- [16] J. N. Mather, *Differentiable invariants*. *Topology*, 16(2), 145-155, 1977.
- [17] G. W. Schwarz, *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*, *Topology*, 14(1), 63-68, 1975.
- [18] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Elsevier, 1972.
- [19] M. P. Do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] K. Efstathiou, *Metamorphoses of Hamiltonian systems with symmetries*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [21] H. S. Morgado, *Introducción a la Geometría Simpléctica y la Dinámica Hamiltoniana*, Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático, 20(3), 1, 2007.
- [22] M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, 1988.
- [23] H. H. Schaefer *Topological Vector Spaces*, Springer Science & Business Media, 1971.
- [24] F. Trèves *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, 1ra. Edición, Academic Press, Inc, 1967.