UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Sobre la Ortogonalidad y algunas de sus consecuencias

T E S I S

que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

presenta

Francisco Miguel Velarde López

Director de tesis: Dr. Martín Gildardo García Alvarado

Hermosillo, Sonora, México — Marzo de 2009

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas de quienes recibí apoyo durante el proceso de elabroración de tesis. En particular al Dr. Efraín Urrutia Bañuelos, del Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, por su desinteresado apoyo, sin el que me hubiera sido muy difícil llegar a esta etapa de mi formación. También quiero agradecer a los integrantes del Comité Revistor de tesis, Dr. Agustín Grijalva M., Dr. Daniel Olmos L., M. C. Francisco Javier Parra B. y M. C. Jorge Ruperto V., por los útiles y enriquecedores comentarios y sugerencias sobre este trabajo. También agradezco al director de tesis, Dr. Martín Gildardo García Alvarado, especialmente por propiciar la libertad suficiente para desarrollar los temas desde mi particular punto de vista, pero ejerciendo siempre su autoridad como académico.

A mis padres, Miguel Velarde y Rosario López, agradezco su paciencia y su apoyo constante e incondicional.

Dedico este trabajo a Gumer.

The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.

David Hilbert

Finally, there is a most remarkable coincidence: The equations for many different physical situations have exactly the same appearance. Of course, the symbols may be different - one letter is substituted for another- but the mathematical form of the equations is the same. This means that having studied one subject, we immediately have a great deal of direct and precise knowledge of the equations of another.

Feynman, Leighton, Sands
Lectures on Physics vol. II, cap. 12.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo trataremos de asomarnos un poco a la importancia del concepto de ortogonalidad en el desarrollo de las matemáticas que, como veremos, ha seguido caminos insospechados y sorprendentes en muchos casos.

Veremos cómo algunos conceptos teóricos y herramientas (análisis funcional, distribuciones, etc.) bajo estudio se pueden aplicar a problemas de interés. Es un esfuerzo por presentar el conocimiento en un formato en el que queden de manifiesto las relaciones entre campos aparentemente inconexos, de tal modo que resulte un tratamiento mas unificado, aunque por estas mismas conexiones y debido a la longitud del trabajo no esperamos que el material sea autocontenido, pero si esperamos que arroje luz al lector que desée profundizar hacia una visión mas global de las matemáticas.

Trataremos a las series y transformadas de Fourier como uno de los casos en que la ortogonalidad ha producido resultados con mayor fuerza, asi como las transformadas de Laplace.

La geometría del espacio tridimensional en el que estamos inmersos nos resulta muy natural. Conceptos tales como distancia, longitud, ángulo, perpendicularidad, son de uso cotidiano. En matemáticas frecuentemente podemos agrupar ciertos objetos en espacios abstractos y definir entre ellos relaciones semejantes a las existentes entre los puntos del espacio ordinario. El paralelismo que se establece así entre los espacios abstractos y el espacio euclidiano nos permite visualizar y lograr un entendimiento mas profundo de estos objetos.

En algunas aplicaciones el planteamiento mas simple que puede usarse es el de espacio métrico. De manera informal se puede decir que un *espacio métrico* es un conjunto en el que esta definida la noción de distancia entre elementos del conjunto. Podemos usar la función distancia, o métrica, para definir los conceptos fundamentales del análisis, tales como convergencia, continuidad y compacidad. Un espacio métrico no necesita tener ninguna clase de estructura algebraica definida, es decir, puede no tener sentido la suma de elementos del espacio o la multiplicación de un elemento por un número real o complejo.

Sin embargo es muy frecuente el uso de espacios métricos que son, a su vez, *espacios vectoriales*, con una métrica derivada de una norma que mide la longitud de un vector. Tales espacios son llamados *espacios normados*. Una buena parte de la matemáticas esta destinada al estudio de espacios normados de diemensión infinita, incluyendo los espacios de funciones, en los que "un punto" representa una función (de allí el nombre de *análisis funcional* que recibe esta área de las matemáticas). La intuición geométrica derivada de los espacios euclidianos de dimensión finita es esencial, aunque en espacios de dimensión infinita surgen características completamente nuevas.

En lo posible, en este trabajo las manipulaciones se harán sobre los operadores por sí mismos, y no sobre las matrices que resultan después de la introducción de un (particular y arbitrario) sistema de coordenadas. Este método invariante (libre de coordenadas) con su lenguaje fuertemente geométrico posée ventajas formales notables. En palabras de Dirac: "las matemáticas son el instrumento especialmente indicado para tratar conceptos abstractos de cualquier clase, y en este campo su poder no tiene límites. Por esta razón todo libro sobre la nueva física que no sea puramente una descripción de trabajos experimentales ha de ser esencialmente matemático. Se necesita gran cantidad de conocimientos teóricos para poder resolver problemas de valor práctico, pero este hecho es una consecuencia inevitable del importante papel que tiene la teoría de transformaciones y que está destinado a acentuarse en la física teórica del futuro. El método simbólico considera directamente y de forma abstracta las cantidades de importancia fundamental (invariantes, etc.) El método simbólico parece atacar con más profundidad la naturaleza de las cosas. Nos permite expresar las leyes físicas de una forma clara y concisa, y probablemente se irá utilizando cada vez más en el futuro a medida que vaya siendo mejor conocido y se vayan desarrollando las matemáticas especiales que emplea". ([19])

Uno de los problemas del que se ocuparon los matemáticos del siglo XVIII es el que se conoce con el nombre del "problema de la cuerda vibrante". Este problema fue estudiado por D'Alembert y Euler (usando el método de propagación de las ondas) y un poco mas tarde, concretamente en 1753, por Daniel Bernoulli. La solución dada por este difería de la proporcionada por los anteriores y consistió básicamente en expresar la solución del problema como superposición (en general infinita) de ondas sencillas. Las ideas de Bernoulli fueron aplicadas y perfeccionadas por Fourier, en 1807, en el estudio de problemas relacionados con la conducción del calor. Quedaron plasmadas por escrito en el libro clásico *Theorie analytique de la Chaleur*, publicado en 1822. Los razonamientos realizados por Fourier en este libro plantearon de manera inmediata numerosas controversias y cuestiones que han tenido una influencia significativa en las matemáticas tales como la presentación actual de la teoría de series de Fourier, a través del espacio de funciones de cuadrado integrable, y de los problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville, que proporcionan bases mas generales que la de Fourier. Comentamos el papel jugado en este siglo por el análisis funcional para situar la teoría de series de Fourier en su marco abstracto: el de las bases de los espacios de Hilbert separables, obtenidas con los vectores propios de los operadores lineales, compactos y autoadjuntos. Este punto de vista abrió el rango de aplicabilidad de los métodos de Fourier a campos insospechados.

Los miembros de la Academia Francesa estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por Fourier tenían una gran concordancia con diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, convocaron un concurso sobre el tema. El premio fue otorgado a Fourier en 1812, pero a pesar de esto, los miembros de la Academia seguían criticando su falta de rigor, de tal manera que, a pesar de obtener el citado premio, Fourier no consiguió el propósito de publicar su trabajo en la celebre serie *Memoires* de la Academia Francesa. Fourier, haciendo gala de un gran tesón, siguió trabajando en el tema y en 1822 publicó su famoso libro *Theorie Analytique de la Chaleur,* donde incorporó parte de su artículo de 1812 prácticamente sin cambio. Este libro es actualmente una de las obras clásicas en matemáticas. Dos años mas tarde, Fourier consiguió el cargo de Secretario de la Academia Francesa y al fin pudo publicar el mencionado artículo en la serie *Memoires.* La historia ha dado la razón a Fourier, como es ahora bien sabido.

Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes. Algunos, entre muchos, fueron los siguientes: dada una función real f definida en $[0, L]$ (o en $[-L, L]$),

¿Será posible encontrar coeficientes adecuados tales que se tenga el desarrollo en serie de Fourier?

¿Cuales son las expresiones concretas de tales coeficientes?

¿En que sentido se tiene la anterior convergencia?

¿Que tipos de problemas pueden resolverse usando las anteriores ideas?

Las cuestiones anteriores han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la matemáticas que se han desarrollado a partir de ellas. Comentar, incluso solo las más significativas, sería demasiado largo. Sin embargo, no nos resistimos a mencionar algunas de las que más nos han llamado la atención.

Las nociones de continuidad y diferenciabilidad de una función real de variable real están hoy en día perfectamente establecidas. Durante bastante tiempo se estuvo convencido de que cualquier función continua debía ser derivable, excepto posiblemente en conjuntos "aislados" de puntos. Pero, ¿en cuántos puntos puede una función continua no ser derivable? La respuesta a esta pregunta estuvo relacionada desde el principio con la siguiente cuestión sobre series de Fourier: ¿En cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada? De hecho, después de la publicación, en 1822, del libro de Fourier, Dirichlet se ocupo durante varios años del problema de la convergencia de las series de Fourier, dando, por primera vez de forma rigurosa, un conjunto de hipótesis para garantizar la convergencia de las mismas (Jour. fÄur Math., 4, 1829, 157-69). Este conjunto de hipótesis incluía la continuidad. Durante, aproximadamente, los cincuenta años siguientes, se pensó que la continuidad de la función debería ser suficiente para la convergencia de su serie de Fourier. Sin embargo, algunos matemáticos sospechaban que ello no debía ser así y todo ello motivó el estudio de funciones "raras" en el sentido de que tales funciones fuesen continuas, pero no derivables "en el máximo número de puntos posibles".

Weierstrass (Jour. fÄur Math., 79, 1875, 21-37), estudiando el tipo de funciones que podían representarse o desarrollarse en serie de Fourier, presentó en 1872 un ejemplo sorprendente a la Real Academia de Ciencias de Berlin de una función real, de variable real, continua en cualquier punto y derivable en ninguno. Concretamente, el ejemplo de Weierstrass está dado por la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

donde $0 < b < 1$, y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$.

Puede pensarse que el tipo de funciones anteriores es excepcional. Nada más lejos de la realidad. El análisis funcional permite probar que las situaciones anteriores son las que usualmente cabe esperar, aunque no encontrar. La herramienta clave para entenderlo es lo que se conoce con el nombre de Teorema de la Categoría de Baire. En lo que respecta a las series de Fourier de funciones continuas, Du Bois- Reymond (Nachrichten KÄonig, Ges. der Wiss. zu GÄott., 1873, 571- 82), dio, en 1873, un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no convergía en un punto particular. Es más, construyó un ejemplo de una función continua tal que su serie de Fourier no convergía en un conjunto denso de puntos.

¿En cuantos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua? Hubo que esperar hasta 1966, año en que Charleston demostró que se da la convergencia salvo posiblemente en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Para redondear el tema, Kahane y Katznelson probaron, también en 1966, que dado cualquier conjunto A de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de A.

La teoría de conjuntos de Cantor, base y fundamento de lo que se conoce con el nombre de Matemática Moderna, estuvo en buena parte motivada por el estudio de los puntos de convergencia o divergencia de las series trigonométricas. Fue este problema lo que llevo a Cantor a definir algunas de las primeras nociones de topología conjuntista, como las de conjunto cerrado y punto de acumulación. En efecto, cuando Cantor comenzó a trabajar en la Universidad de Halle, otro colega, Heine, estaba interesado en aquella época en la cuestión de la unicidad de la representación de una función dada en serie trigonométrica. Mas concretamente, si suponemos que la serie de Fourier es convergente, en todos los puntos del intervalo $[-L, L]$ a una función $f(x)$, la cuestión era: ¿sera única la representación de f en serie trigonométrica? La respuesta afirmativa a ésto es equivalente al hecho de que si la serie trigonométrica es convergente a cero en todos los puntos de $[-L, L]$, entonces todos los coeficientes deben ser cero. Cantor probó (Jour. fÄur Math., 72, 1870, 139-42) que ello era así y que incluso, se puede renunciar a la convergencia de la serie en un conjunto finito de puntos. La pregunta que Cantor se hizo a continuación era obvia: ¿en cuantos puntos podemos renunciar a la convergencia de la serie dada y sin embargo seguir teniendo el mismo resultado de unicidad? Este problema sigue sin resolverse hoy en día en toda su generalidad, a pesar de que se han realizado numerosos estudios sobre ello, comenzando por varios de Cantor, el primero fechado en 1871 (Jour. fÄur Math., 73, 1871, 294-6). En este trabajo Cantor demostró que el conjunto de puntos excepcionales, es decir, aquellos donde no se tiene necesariamente convergencia de la serie trigonométrica, puede estar formado por una cantidad infinita de elementos, siempre que tal conjunto sea "de orden finito".

Riemann también se interesó en el tema de las series trigonométricas. Decía que era importante, al menos para los matemáticos, aunque no necesariamente para las aplicaciones físicas, establecer las condiciones mas amplias posibles bajos las cuales una función se puede expresar como una serie de Fourier. Introdujo así lo que llamamos hoy en día integral de Riemann, cuya idea básica es suponer sólo la acotación de la función f (no necesariamente continua) y establecer condiciones lo mas generales posibles para que las sumas (hoy conocidas como *de Riemann*) tengan un único limite, cuando las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tienden a cero. Esto le permitió integrar funciones con un numero infinito de discontinuidades. El punto de partida, respecto de la noción de integral de Riemann era medir, de alguna forma, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función dada. No obstante, hay subconjuntos de medida nula que no son numerables.

En la actualidad la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos del análisis funcional. Ello permite, por una parte, comprender mejor los métodos de Fourier; por otra, se consigue, sin apenas esfuerzo, una gran generalidad.

Es ciertamente satisfactoria la estructura algebraico-topológica de $L^2(-L,L)$. Sin embargo, este espacio encierra muchos misterios. Por ejemplo, ¿Qué significado tiene la convergencia en el espacio $L^2(-L,L)$? ¿Qué relación tiene con la convergencia puntual o uniforme? La respuesta se pone de manifiesto en lo siguiente, que indica, que, al menos, se ha de ser precavido: convergencia en L^2 no implica convergencia uniforme. Otros espacios de Hilbert que conocemos, como el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$, deben gran parte de sus propiedades al hecho de que tienen una base. Además, tal base puede elegirse siempre ortonormal. Esto facilita muchísimo su estudio, así como el de ciertas clases de funciones definidas entre estos espacios (por ejemplo, las funciones lineales u homomorfismos) .

La pregunta que lógicamente cabe hacerse es la siguiente: ¿Tendrá $L^2(-L,L)$ una base? Esto origina, a su vez, otras cuestiones tales como: ¿Cual sería una definición "adecuada" de base en $L^2(-L,L)$? ¿Cuántas bases hay (si es que las hay) en $L^2(-L,L)$? ¿Qué ventajas tiene la utilización del concepto de base?, etc. Para responder a las cuestiones anteriores, conviene que pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. En $\mathbb{R}$, una base esta formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma trivialmente un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}$.) En $\mathbb{R}^2$, una base esta formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos (ninguno de los cuales es nulo), y en general, en $\mathbb{R}^n$, una base esta formada por un subconjunto ortogonal de n elementos, ninguno de los cuales es nulo (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de esta clase es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ otro subconjunto ortonormal que que genera el mismo subespacio). En este caso, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal única de los elementos de la base.

¿Que utilidades tiene la utilización de la noción de base en $L^2(-L, L)$? La primera pregunta que cabe plantearse es la referente a la existencia de bases en $L^2(-L, L)$. En este sentido es común, con el objetivo de probar la existencia de algo que interesa (en este caso de base en $L^2(-L, L)$), dar diversas caracterizaciones previas. Esto será útil no solamente para probar la existencia (que lo será), sino para poder utilizarlas según nos exija la situación concreta que se nos plantee.

Usando las anteriores caracterizaciones del producto interior de funciones, Lebesgue probó que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \right\}$$

es una base de $L^2(-L, L)$.

No debemos terminar sin comparar algunas de las propiedades del espacio $L^2(-L, L)$ con las correspondientes del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$, pues entendemos que, en la ciencia, es fundamental ir reconociendo las analogías y diferencias entre los nuevos objetos y los que son familiares, para poder avanzar en el conocimiento de aquellos. Existe la posibilidad de desarrollos en serie que usan las funciones propias de problemas de contorno muy generales. Es evidente que sería estupendo disponer de un resultado general que garantizara que tales desarrollos son posibles. A este respecto, la teoría de problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville proporciona, de manera bastante general, bases del espacio $L^2(-L, L)$, que pueden usarse en muchos problemas. Cuando se aplica el método de separación de variables a numerosos problemas de tipo mixto para ecuaciones en derivadas parciales, se originan dos ecuaciones diferenciales ordinarias, y las condiciones de contorno de la ecuación primitiva, producen unas condiciones de contorno sobre una de las ecuaciones ordinarias que aparecen. Normalmente, estas ecuaciones dependen de un parámetro. Se trata entonces de estudiar para que valores de dicho parámetro (valores propios), las ecuaciones consideradas tienen soluciones no triviales (funciones propias). De esta manera se encuentran soluciones sencillas del problema primitivo. El objetivo es entonces encontrar la solución general del problema dado a partir de dichas soluciones sencillas. Las anteriores ideas fueron desarrolladas, en el siglo XIX, por Sturm, profesor de mecánica en la Sorbona y por Liouville, profesor de matemáticas en el College de Francia. Eligiendo condiciones de contorno distintas, obtendríamos diferentes bases del espacio $L^2(a, b)$. También, las funciones de Bessel, Legendre, etc. (de gran significación en Física), pueden estudiarse como soluciones de ciertos problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes singulares.

Una de las maneras mas bonitas y sencillas de resolver ecuaciones diferenciales es usando el concepto de función de Green. Ello permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación integral equivalente y trabajar, a partir de ahí, con operadores integrales. De esta forma van surgiendo de manera natural una serie de propiedades que, puestas de manera abstracta, dan lugar a la teoría de operadores compactos y autoadjuntos. Esta teoría, debida en gran parte a Fredholm y Hilbert, tuvo su origen a finales del siglo XIX y principios del actual y proporcionó muchas ideas claves para el nacimiento del Análisis Funcional. Permite generalizar de manera destacada la teoría de los desarrollos de Fourier, y legítima el uso de métodos análogos en problemas aparentemente muy diferentes de los aquí considerados. Generaliza, a dimensión infinita, el hecho de que cualquier matriz cuadrada real y simétrica es diagonalizable. Esta parte no la tocaremos en este trabajo debido a la extensión que ello implicaría.

La teoría de series de Fourier es una de las creaciones mas grandes de la ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos. Enumerarlos sería muy extenso. El estudio de esto proporciona una idea mas global y exacta de lo que ha sido el pensamiento científico y comprendemos de verdad lo que es el planteamiento y resolución de problemas concretos, lo que proporciona el camino de la generalidad. En palabras de R. Courant, uno de los grandes matemáticos del siglo XX: "es la partida de y la vuelta a lo concreto lo que da valor a la generalidad". En la actualidad, la teoría de series de Fourier sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como matemáticas, física, biología, ingeniería, economía, etc. Tales series están siempre presentes en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, física de plasmas, física de semiconductores, acustica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en medicina (escáner TAC), estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X (usando el análisis de Fourier, los astrónomos pueden estudiar las variaciones en intensidad de las señales de rayos X de un objeto celeste), etc. Especialmente en física son hoy mas validas que nunca las palabras de Lord Kelvin: "los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados mas hermosos del análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la física actual, por recónditas que sean".

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 revisamos algunos conceptos preliminares, que tienen que ver básicamente con estructuras algebraicas y topológicas, así como resultados concernientes a espacios de funciones; estos conceptos se usan en el resto del trabajo. En el capítulo 3 se estudia básicamente el problema de Sturm-Liouville como un instrumento para generar funciones (polinomiales) ortogonales. En los capítulos 4 y 5 nos enfocamos en el estudio de la serie de Fourier y de la transformada de Fourier, respectivamente en el marco del producto interior, y algunas de sus aplicaciones en cada caso. En el capítulo 6 repasamos unos importantes objetos llamados *distribuciones*; en particular, estudiamos la distribución *delta de Dirac* definida a traves de sucesiones delta. La transformada de Laplace, que tiene una estructura similar a la transformada de Fourier en cuanto a sus definición, propiedades y operatividad, se estudia brevemente en el capítulo 7. Finalmente, agregamos un anexo con información biográfica de personajes mencionados y elementos históricos del desarrollo de las matemáticas.

Para terminar esta introducción, quisiera resumir que la motivación del presente trabajo es conseguir un equilibrio entre un estilo monográfico o especializado, el desarrollo histórico, las aplicaciones, y una visión global y un enfoque moderno de un tema importante de las matemáticas, teniendo en cuenta las limitaciones, tanto en espacio como en tiempo y alcance que un trabajo de tesis implica.

Los objetivos específicos del presente trabajo son los siguientes: considerar la importancia del concepto de ortogonalidad en el desarrollo de las matemáticas; en particular estudiar las series y transformadas de Fourier como ejemplos notables de la ortogonalidad por sus aplicaciones y por el desarrollo en general de las matemáticas que estas trajeron consigo. También estudiar la transformada de Laplace por la similitud de sus métodos con la transformada de Fourier, tanto teóricos como aplicados.

El presente trabajo va dirigido a los estudiantes de semestres intermedios y avanzados de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Sonora.

Francisco Miguel Velarde López

Capítulo 2

Conceptos preliminares

En este capítulo veremos algunos conceptos y definiciones de varias ramas de las matemáticas que será usados en este trabajo.

Definición 2.1 (Grupo aditivo) Un *grupo aditivo* es una pareja $(G, +)$, donde G es un conjunto no vacío y $+ : G \times G \to G$ una operación que cumple con las propiedades siguientes :

G1: $x + (y + z) = (x + y) + z$, (propiedad asociativa)

G2: Existe un elemento $0 \in G$ tal que $0 + x = x$, (existencia del cero)

G3: Para todo $x \in G$ existe un elemento $y \in G$ tal que $x + y = 0$. El elemento y se denota con $-x$. (existencia del negativo)

Definición 2.2 (Espacio vectorial) Un *espacio vectorial* es una triada $(V, + , \cdot)$, donde $(V, +)$ es un grupo aditivo conmutativo (abeliano), F es un campo escalar ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y que cumple con las propiedades siguientes:

Si $a, b \in F$ y $u, v \in V$ entonces

EV1: $a\,(bv) = (ab)\,v$,

EV2: $\left.\begin{array}{l} (a+b)\,v = av + bv \\ a\,(u+v) = au + av \end{array}\right\}$,

EV3: $1v = v$.

Definición 2.3 (Operador lineal). Sean V, W espacios vectoriales. Un *operador lineal* es una función $T : V \to W$, tal que T cumple con las propiedades siguientes:

Si $\alpha \in F$ y $u, v \in V$, entonces

OL1: $T(u+v) = T(u) + T(v)$, (linealidad)

OL2: $T(\alpha v) = \alpha T v$. (homogeneidad)

Nota 2.1 *Un operador lineal preserva las operaciones de espacio vectorial.*

Ahora veamos las estructuras que permiten la construcción de topologías.

Definición 2.4 (Espacio métrico) Un *espacio métrico* es una pareja (X, d) donde X es un conjunto y d es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, llamada *función de distancia* tal que se cumplen las propiedades siguientes:

Si $x, y \in X$,

EM1: $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

EM2: $d(x, y) = d(y, x)$,

EM3: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 2.5 (Producto interior) Sea V un espacio vectorial. Un *producto interior* es una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que cumple con las propiedades siguientes:

si $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

PI1: $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$,

PI2: $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$,

PI3: $\langle v, v \rangle \geqslant 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$,

PI4: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$.

Nota 2.2 *Para $z \in \mathbb{C}$, z^* denota el complejo conjugado de z.*

Teorema 2.1 $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda^* \langle v, w \rangle$.

Demostración. $\langle \lambda v, w \rangle = \langle w, \lambda v \rangle^* = \lambda^* \langle w, v \rangle^* = \lambda^* \langle v, w \rangle$. □

El producto interior permite establecer las nociones de proyección de un vector en una dirección dada y de ángulo entre vectores.

Definición 2.6 (Vectores ortogonales) El vector v se dice *ortogonal* a w si $\langle v, w \rangle = 0$.

Definición 2.7 (Base) Una *base* de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan al espacio V.

Definición 2.8 (Base dual) Dado una base $\{b_i\}_{i=I}$, decimos que el conjunto $\{b^i\}_{i=I}$ es *el dual*[1] *de* $\{b_i\}_{i=I}$ si se cumple que $\langle b_i, b^j \rangle = \delta_i^j, \langle b^i, b_j \rangle = \delta_j^i$, $\forall i, j \in I$.

Nota 2.3 *En el caso discreto,* δ_i^j *denota la delta de Kronecker; en el caso continuo denota a la delta de Dirac.*

En un espacio vectorial con un producto interior todas las propiedades topológicas están determinadas por el tensor métrico, que definimos a continuación.

Definición 2.9 (Tensor métrico) *Las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico*[2] son

$$G_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle, \qquad G^{ij} = \langle b^i, b^j \rangle,$$

respectivamente.

Definición 2.10 (Coordenadas de un vector) Sea $\{b_i\}_{i\in I}$ una base del espacio vectorial V y sea $\{b^j\}_{j\in I}$ su base dual. Entonces cualquier vector $v \in V$ puede escribirse en la forma

$$v = v^i b_i \tag{2.1}$$

o

$$v = \ v_j b^{\,j}. \tag{2.2}$$

Los números v^i son *las coordenadas de* v *en la base* $\{b_i\}$,[3] y los números v_j son *las coordenadas de* v *en la base* $\{b^j\}$.

Teorema 2.2 *Sea* v *un vector y sean* $\{b^i\}$ *y* $\{b_j\}$ *una base y su dual, respectivamente. Las coordenadas de* v *estan dadas por*

$$v^i = \langle b^i, v \rangle, \quad v_j = \langle b_j, v \rangle \tag{2.3}$$

Demostración. $\langle b^j, v \rangle = v^i \delta_i^j = v^j$. Similarmente, $\langle b_i, v \rangle = v_j \delta_i^j = v_i$. □

Nota 2.4 *En el caso de que las base* $\{b_i\}$ *sea ortonormal su dual es la misma base.*

Nota 2.5 *Las coordenadas son las magnitudes de las proyecciones sobre los respectivos vectores de la base.*

El método de Gram-Schmidt permite ortonormalizar un conjunto dado de vectores linealmente independientes.

---

[1] Ver [71]
[2] Ver *Op. Cit.*
[3] Ver *Op. Cit.*

Teorema 2.3 *(Método de Gram-Schmidt) Dado un conjunto de vectores* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ *linealmente independientes, el conjunto* $\{v_1, v_2, \ldots\}$ *que se obtiene de manera recursiva mediante*

$$v_1 = x_1, \quad v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k, \quad \textit{para} \quad n = 2, 3, \ldots \tag{2.4}$$

es un sistema de vectores ortogonales.

Demostración. La prueba es por construcción. Definimos $v_1 = x_1$. Sea $v_2 = x_2 - av_1$. Al requerir que $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ se obtiene $a = \dfrac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$. Entonces $v_2 = x_2 - \dfrac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$. Continuando de esta manera se obtiene (2.4). □

Definición 2.11 (Norma de vectores) Sea V un espacio vectorial. La *norma* de un vector es una función $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ que cumple con las condiciones siguientes:

N1: $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

N2: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

N3: $\|ax\| = |a| \, \|x\|$. (Si $F = \mathbb{R}$, $|a|$ denota el valor absoluto de a; si $F = \mathbb{C}$, $|a| = \sqrt{aa^*}$).

Nota 2.6 *La norma nos da la noción intuitiva de longitud de un vector.*

Definición 2.12 (Normalización de un vector) Dado un vector $v \neq 0$, el vector $w = \dfrac{v}{\|v\|}$ se llama *vector normalizado de* v.

Nota 2.7 $\|w\| = 1$.

Nota 2.8 *Cada uno de los vectores que se obtienen con el método de Gram-Schmidt se puede normalizar.*

Teorema 2.4 *(Desigualdad de Schwarz)*

$$|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\| \, \|v\| . \tag{2.5}$$

Demostración. Si v es cero la desigualdad es trivial. Para cualquier número complejo λ tenemos

$$0 \leqslant |u - \lambda v|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle - \lambda \langle u, v \rangle - \lambda^* \langle v, u \rangle + |\lambda|^2.$$

Escogiendo

$$\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

se obtiene

$$0 \leqslant \langle u, u\rangle - \frac{|\langle u, u\rangle|^2}{\langle v, v\rangle},$$

la cual se satisface si y sólo si

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leqslant \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle,$$

o, equivalentemente,

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant |u||v|. \qquad \square$$

Teorema 2.5 *En un espacio con producto interior se induce una topología mediante una norma definida de la siguiente manera:*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}. \tag{2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sólo es necesario probar que (2.6) define una norma. $\|au\|^2 = \langle au, au\rangle = a^*a\,\langle u, u\rangle = |a|^2\,\|u\|^2$

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle \\ &\leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| = \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^2\end{aligned} \qquad \square$$

Definición 2.13 (Espacio de Hilbert) Un espacio vectorial completo con la métrica inducida por un producto interior se llama *espacio de Hilbert*.

Definición 2.14 (Discontinuidad simple) Una función tiene una *discontinuidad simple en* x (también llamada *discontinuidad de salto*) si existen los limites laterales por la derecha $f\,(x+0)$ y por la izquierda $f\,(x-0)$, pero

$$f\,(x+0) \neq f\,(x-0)\,.$$

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona sólo con discontinuidades simples, se cumple que el número de discontinuidades es, a lo más, numerable.

Definición 2.15 ($\mathrm{PC}[a, b]$) El *espacio de funciones continuas por pedazos* $\mathrm{PC}[a, b]$ está definido por

$$\mathrm{PC}[a, b] = \left\{ \begin{array}{c} f : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{donde } f \text{ es acotada,} \\ \text{continua por pedazos,} \\ \text{con discontinuidades simples.} \end{array} \right\}$$

Nota 2.9 *Si la suma de funciones y la multiplicación por escalar se definen de la manera usual, PC$[a, b]$ es espacio vectorial.*

Nota 2.10 *Toda función de saltos simples puede expresarse como*

$$f(x) = f_s(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k H(x - x_k),$$

donde $f_k := (f(x_k + 0) - f(x_k - 0))$, H *es la función de Heaviside y*

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } f \textit{ es continua en } x, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.1 La funcion

$$p(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad (-\infty, 1), \\ 5 \operatorname{sen} x & \text{si} \quad (1, 10), \\ -\mathrm{e}^{-(x-10)^2} & \text{si} \quad (10, \infty), \end{cases}$$

puede escribirse en la forma

$$p(x) = h(x)H(x - 10) + g(x)(H(x - 1) - H(x - 10)) + f(x)(1 - f(x))H(x - 1),$$

donde $f(x) = x^2$, $g(x) = 5\operatorname{sen}(x)$ y $h(x) = -\mathrm{e}^{(x-10)^2}$. La gráfica de $p(x)$ se muestra en la figura 2.1.

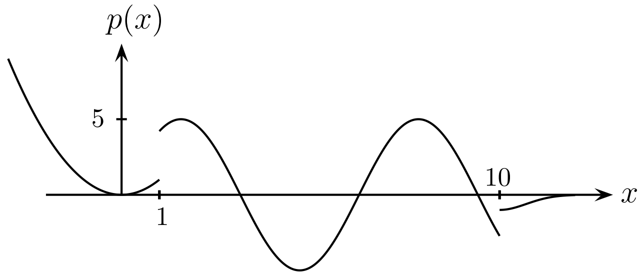


Figura 2.1: Gráfica de la función $p(x)$

Definición 2.16 (Convolución) La *convolución* de dos funciones f y g está definida por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - s)\, g(s)\, \mathrm{d}s.$$

Definición 2.17 (Orden exponencial) Se dice que una función es *de orden exponencial* si existen constantes $s_0 > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\left|\mathrm{e}^{-s_0 t} f(t)\right| \leqslant M$$

para $t > t_0$.

Definición 2.18 (Producto interior de funciones en $\mathbb{R}$) El *producto interior* de las funciones f y g está definido por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int \omega(x)\, f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x,$$

donde $\omega(x)$ es una función positiva, llamada *función de peso* del producto interior.

Nota 2.11 *La integral es en el sentido de Riemann.*

Definición 2.19 (Base de Schauder) El conjunto de vectores $\{b_i\}$ se llama *base de Schauder para un espacio vectorial* V si para todo $x \in V$ existen escalares x^i llamados coordenadas de x en esta base, tales que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x^i b_i \right\| \to 0 \qquad \text{si} \qquad n \to \infty.$$

En tal caso escribiremos

$$x = \sum_{j \geqslant 1} b_j x^j.$$

Definición 2.20 (Espacio Separable) Se dice que el conjunto X es *separable* si es denso dondequiera en un conjunto numerable.

Definición 2.21 (Espacio de Banach) Un espacio vectorial, dotado de una norma, tal que cualquier sucesión de Cauchy es convergente se llama *Espacio de Banach*.

Definición 2.22 (Primera categoría, Segunda categoría) Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subseteq X$, diremos que M es de *primera categoría en* X si y solamente si, M es unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $\operatorname{int}\left(\overline{M_n}\right) = \emptyset$. Un subconjunto M de X se dice ser *de segunda categoría en* X si M no es de primera categoría en X.

Por ejemplo, cualquier subconjunto numerable de X es de primera categoría. Intuitivamente, los conjuntos de segunda categoría “deben contener muchos mas elementos” que los de primera categoría.

Definición 2.23 (Casi dondequiera) Diremos que una propiedad se cumple *casi dondequiera* (abreviado “c.d.”) si el conjunto de puntos de donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida nula.

Definición 2.24 (Operador compacto) Sea H un espacio de Hilbert real, separable, y $T : H \to H$ un operador lineal. T se dice *compacto* si $T(B)$ es relativamente compacto, donde B es la bola cerrada unidad de H.

Nota 2.12 *Puede probarse que* T *es compacto si y solamente si para cada sucesión acotada* $\{f_n\}$ *de* H*, la sucesión* $\{T(f_n)\}$ *contiene alguna sucesión parcial convergente.*

Nota 2.13 *Cualquier operador compacto es continuo, pero el recíproco no es necesariamente cierto (por ejemplo, considérese la aplicación identidad en* H*). El recíproco es obviamente cierto si la dimensión de* H *es finita.*

Capítulo 3

Operadores Hermitianos

En la actualidad la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos del análisis funcional, los espacios de Hilbert (extensión a dimensión infinita de la noción de espacio Euclídeo) y los operadores compactos y autoadjuntos (extensión, a dimensión infinita, de los endomorfismos de $\mathbb{R}$ definidos por matrices simétricas). Ello permite, por una parte, comprender mejor los métodos de Fourier, por otra, se consigue, sin apenas esfuerzo, una gran generalidad. Los operadores Hermitianos son útiles porque dan lugar a funciones ortogonales que pueden usarse como base.

Definición 3.1 (Operador Hermitiano) Un operador $O : M \mapsto M$ se dice *Hermitiano* si para toda $f \in M$ cumple

$$\langle f, Og \rangle = \langle Of, g \rangle \,. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1 *Los valores propios de un operador Hermitiano O son reales.*

Demostración. Las funciones propias $f(\vec{x}) \neq 0$ satisfacen

$$Of(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}).$$

Entonces tenemos

$$\langle f, Of \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \lambda ||f||.$$

Por otro lado, como es Hermitiano,

$$\langle f, Of \rangle = \langle Of, f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle = \lambda^* ||f||,$$

de donde $\lambda = \lambda^*$. □

Teorema 3.2 *Sea O Hermitiano y $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$ dos funciones propias correspondientes a los valores propios ϕ y γ respectivamente. Si $\phi \neq \gamma$ entonces $\langle f, g \rangle = 0$, es decir son ortogonales.*

Demostración. Por ser el operador Hermitiano,

$$\langle f, Og \rangle = \langle Of, g \rangle \,,$$

$$\gamma \langle f, g \rangle = \phi \langle f, g \rangle,$$
$$(\gamma - \phi) \langle f, g \rangle = 0.$$

Entonces, si $\gamma \neq \phi$ tenemos

$$\langle f, g \rangle = 0. \qquad \square$$

3.1 Problema de Sturm-Liouville

Definición 3.2 (Operador de Sturm-Liouville) Llamamos *operador de Sturm-Liouville* (y lo denotamos T) al operador que actúa sobre la función real $f(x)$, con $\Omega = (a, b)$, según

$$Tf(x) = \frac{1}{\omega(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(R(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right),$$

donde $\omega : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$ y $R : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$.

Teorema 3.3 *El operador de Sturm-Liouville T es Hermitiano si $\omega(x)$ es el peso $w(x)$ del producto escalar y $R(a) = R(b)$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotando $' \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ tenemos

$$\langle f, Tg \rangle = \int_\Omega \mathrm{d}x \frac{w(x)}{\omega(x)} f(x) \left(R(x) g'(x)\right)',$$

y

$$\langle Tf, g \rangle = \int_\Omega \mathrm{d}x \frac{w(x)}{\omega(x)} \left(R(x) f'(x)\right)' g(x).$$

Entonces, restando ambas e integrando por partes tenemos

$$\langle f, Tg \rangle - \langle Tf, g \rangle = \int_\Omega \mathrm{d}x \frac{w(x)}{\omega(x)} \left[R(x) \left(f(x) g'(x) - g(x) f'(x)\right)\right]'.$$

Ahora, si $\omega(x) = w(x)$ entonces la integral es trivial:

$$\langle f, Tg \rangle - \langle Tf, g \rangle = R(x) \left(f(x) g'(x) - g(x) f'(x)\right)_{\partial\Omega} = 0,$$

si se cumplen las condiciones del teorema. $\square$

Existen distintas formas de escribir el problema de Sturm-Liouville, por ejemplo,

$$f_n''(x) + \frac{L(x)}{Q(x)} f_n'(x) + \frac{\lambda_n}{Q(x)} f_n(x) = 0,$$
$$Q(x) f_n''(x) + L(x) f_n'(x) + \lambda_n f_n(x) = 0,$$
$$\left(R(x) f_n'(x)\right)' + \lambda_n w(x) f_n(x) = 0,$$

que se relacionan entre si mediante las igualdades $R(x) = \exp\left(\int \frac{L(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x \right)$ y $w(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Por tanto tenemos

$$Tf_n(x) = -\lambda_n f_n(x), \tag{3.2}$$

donde las distintas funciones propias $f_n(x)$ asociadas a los distintos valores propias reales λ_n son ortogonales entre sí con peso $w(x) = \omega(x)$, es decir

$$\langle f_m, f_n \rangle = \delta_{mn} \, (||f_m||)^2 \equiv \delta_{mn} \, h_m. \tag{3.3}$$

3.2 Problema de Sturm-Liouville y los polinomios ortogonales

Vamos a estudiar algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales, que son un conjunto de polinomios de orden n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ linealmente independientes entre sí en una cierta región del espacio. Para encontrar estos polinomios se pueden usar muy diversas técnicas. La más habitual es partir de unas ecuaciones diferenciales concretas.

Aquí emplearemos un camino diferente (y complementario a ese) más general que el anterior, ya que nos permite determinar los casos que usualmente se estudian a partir de ecuaciones diferenciales concretas a partir de características en cierto modo más universales.

Algunas de las funciones especiales dadas aquí no están normalizadas de la forma más usual. Conviene comprobar la normalización a la hora de comparar con otras fuentes.

Antes de estudiar la forma de las soluciones al problema de valores propias y funciones propias expondremos algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales.

Denotaremos a partir de ahora a los polinomios ortogonales como $\phi_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} x^i$ y consideramos que no están normalizados, es decir

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \delta_{mn} \, h_m. \tag{3.4}$$

Partiendo de la forma

$$Q(x)\phi_n''(x) + L(x)\phi_n'(x) + \lambda_n \phi_n(x) = 0 \tag{3.5}$$

para el problema de Sturm-Liouville se puede demostrar que existe un conjunto de soluciones $\phi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ tal que cada función $\phi_n(x)$ es un polinomio de orden n. Esto se cumple (a grandes rasgos) si $Q(x)$ es como mucho un polinomio cuadrático y $L(x)$ una función lineal (obsérvese que en ese caso cada término de la ecuación es un polinomio y el grado de éstos es consistente). De este modo tenemos

$$(q_0 + q_1 x + q_2 x^2)\phi_n''(x) + (l_0 + l_1 x)\phi_n'(x) + \lambda_n \phi_n(x) = 0.$$

De la expresión polinomial de $\phi_n(x)$ obtenemos

$$\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(n)} x^j,$$

$$\phi_n'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\alpha_{j+1}^{(n)} x^j,$$

$$\phi_n''(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(j+2)\alpha_{j+2}^{(n)} x^j,$$

y por lo tanto

$$(q_0 + q_1 x + q_2 x^2) \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(j+2)\alpha_{j+2}^{(n)} x^j + (l_0 + l_1 x) \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\alpha_{j+1}^{(n)} x^j + \lambda_n \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(n)} x^j = 0. \tag{3.6}$$

3.3 Polinomios representativos

Para evitar la degeneración de los valores propias es necesario que la función $L(x)$ sea lineal. Dependiendo de si esta función es efectivamente cuadrática, lineal o simplemente una constante tendremos tres tipos de polinomios distintos, con sus características peculiares.

Aquí desarrollaremos los polinomios de tipo Hermite, Laguerre y Gegenbauer a partir de la exposición general dada hasta ahora. En la tabla 3.1 mencionamos algunos de los polinomios ortogonales correspondientes a distintas funciones de peso usuales.

Peso	Soporte	Denominación	Notación
$(1-x^2)^{-1/2}$	$[-1,1]$	Chebyshev (de 1a. clase)	$T_n(x)$
$(1-x^2)^{1/2}$	$[-1,1]$	Chebyshev (de 2a. clase)	$U_n(x)$
1	$[-1,1]$	Legendre	$P_n(x)$
$(1-x^2)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -1/2$	$[-1,1]$	Gegenbauer (o ultraesféricos)	$P_n^{(\lambda)}(x)$
$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha,\beta > -1$	$[-1,1]$	Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
$e^{-x}\, x^\alpha$, $\alpha > -1$	$[0,\infty)$	Laguerre	$L_n^{(\alpha)}(x)$
e^{-x^2}	$\mathbb{R}$	Hermite	$H_n(x)$

Tabla 3.1: Polinomios ortogonales correspondientes a distintas funciones de peso

3.3.1 Polinomios de tipo Hermite

En la presente sección estudiaremos el caso más sencillo en que

$$Q(x) = q_0 \tag{3.7}$$

que son los llamados *polinomios de tipo Hermite*. Como $Q(x) = q_0$ y $L(x) = l_0 + l_1 x$ tenemos que

$$R(x) = A\,\mathrm{e}^{\frac{1}{q_0}(l_0+\frac{l_1}{2}x)x}, \qquad w(x) = \frac{A}{q_0}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{q_0}(l_0+\frac{l_1}{2}x)x}, \tag{3.8}$$

donde $A > 0$ es una constante de integración que fijamos en 1 por comodidad. Vemos que la función peso está definida positiva para todo el intervalo $-\infty < x < \infty$, que será el intervalo en el que los polinomios tipo Hermite estarán bien definidos.

Con este intervalo de validez (y dado que $l_1 \neq 0$) podemos hacer una traslación y una dilatación $x \to q_0^{\frac{1}{2}}(x - \frac{l_0}{l_1})$ de modo que tenemos que la ecuación tipo Hermite toma la forma

$$H_n''(x) + l_1\,x\,H_n'(x) + \lambda_n\,H_n(x) = 0, \tag{3.9}$$

que es la forma general para la ecuación de este tipo de polinomios. De este modo $w(x) = \mathrm{e}^{\frac{l_1}{2}x^2}$ y tenemos que exigir que $l_1 < 0$ para que el producto interior dé un valor finito.

Además se tiene que $R(-\infty) = R(\infty)$ con lo que se cumplen las condiciones para que los polinomios $H_n(x)$ sean ortogonales con valor propio real, siendo este valor propio

$$\lambda_n = -l_1 n \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Una vez vistas estas características pasamos a calcular el término general $\alpha_j^{(n)}$ del polinomio $H_n(x)$, para lo cual nos ayudamos de la relación

$$\alpha_{j<n}^{(n)} = -\frac{(j+1)(j+2)}{(j-n)l_1}\alpha_{j+2}^{(n)} \tag{3.11}$$

Por conveniencia definimos el término principal del polinomio como $\alpha_n^{(n)} \equiv c^n$. Mediante inducción se puede probar que, en general, el $(n-2k)$-ésimo término es

$$\alpha_{n-2k}^{(n)} = \left(\frac{1}{2l_1}\right)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!}c^n, \tag{3.12}$$

de donde

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p^{(n)} x^p = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\frac{c^2}{2l_1}\right)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!}(cx)^{n-2k}. \tag{3.13}$$

Con esta última ecuación se puede obtener la *función generatriz* de los polinomios. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[n/2]}\left(\frac{c^2}{2l_1}\right)^k\frac{n!}{(n-2k)!k!}(cx)^{n-2k}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(ct)^2}{2l_1}\right)^k\frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(cxt)^n}{n!}\right)\\ &= \exp\left(cxt+\frac{c^2t^2}{2l_1}\right). \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Con este resultado podemos obtener la *fórmula de Rodrigues*, que es una fórmula que nos permite obtener el polinomio tipo Hermite de grado n sin más que derivar n veces. Como

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ \text{ y } \ \mathrm{e}^{cxt+\frac{c^2t^2}{2l_1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n, \qquad (3.15)$$

entonces

$$\begin{aligned}H_n(x) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\,\mathrm{e}^{cxt+\frac{c^2t^2}{2l_1}}\bigg|_{t=0} = \mathrm{e}^{-\frac{l_1x^2}{2}}\,\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,\mathrm{e}^{\frac{c^2}{2l_1}\left(\frac{l_1x}{c}+t\right)^2}\bigg|_{t=0}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{l_1x^2}{2}}\,\frac{\partial^n}{\partial z^n}\,\mathrm{e}^{\frac{c^2}{2l_1}z^2}\bigg|_{z=\frac{l_1x}{c}} = \left(\frac{c}{l_1}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{l_1x^2}{2}}\,\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,\mathrm{e}^{\frac{l_1x^2}{2}}. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Como se cumplen las condiciones del teorema para que el operador de Sturm-Liouville sea Hermitiano , sabemos que los polinomios de distinto grado son ortogonales entre si. La *norma cuadrada* (h_n) se puede calcular fácilmente a partir de la fórmula de Rodrigues:

$$h_n=\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)^2w(x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{c}{l_1}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,\mathrm{e}^{\frac{l_1x^2}{2}}\,\mathrm{d}x, \qquad (3.17)$$

que al integrar por partes n veces (diferenciando el polinomio tipo Hermite e integrando la exponencial, que se anula en los límites) obtenemos

$$h_n=\left(-\frac{c}{l_1}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_n^{(n)}(x)\,\mathrm{e}^{\frac{l_1x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \qquad (3.18)$$

Como la única potencia n-ésima del polinomio es $\alpha_n^{(n)}=c^n$ tenemos que $H_n^{(n)}(x)=c^nn!$ y nos queda una integral sencilla de una gaussiana, quedando la norma como

$$h_n=\left(-\frac{c^2}{l_1}\right)^n n!\sqrt{-\frac{2\pi}{l_1}}. \qquad (3.19)$$

Con todo lo expuesto hasta ahora se tiene que la relación de recurrencia es

$$H_{n+1}(x)-cxH_n(x)-\frac{c^2}{l_1}nH_{n-1}(x)=0. \qquad (3.20)$$

Polinomios de Hermite probabilísticos

Eligiendo el valor del término principal del polinomio tipo Hermite c y la constante de la ecuación diferencial l_1 determinamos totalmente las propiedades de los polinomios solución. En la teoría de la probabilidad se le suelen asignar los valores

$$c = 1 \qquad\qquad l_1 = -1$$

de modo que tenemos:

Ecuación diferencial:	$H_n''(x) - x\,H_n'(x) + \lambda_n\,H_n(x) = 0$
Función de peso:	$w(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$
Valores propios:	$\lambda_n = n$
Función generatriz:	$\mathrm{e}^{xt-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$
Fórmula de Rodrigues:	$H_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
Relación de ortogonalidad:	$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = n!\sqrt{2\pi}\delta_{mn}$
Relación de recurrencia:	$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$

Polinomios de Hermite físicos

En física se toman unos valores distintos para los dos parámetros que tenemos libres

$$c = 2, \qquad\qquad l_1 = -2,$$

lo cual hace que ahora tengamos:

Ecuación diferencial:	$H_n''(x) - 2x\,H_n'(x) + \lambda_n\,H_n(x) = 0$
Función de peso:	$w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
Valores propios:	$\lambda_n = 2n$
Función generatriz:	$\mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$
Fórmula de Rodrigues:	$H_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{e}^{-x^2}$
Relación de ortogonalidad:	$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$
Relación de recurrencia:	$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$

3.3.2 Polinomios de tipo Laguerre

El siguiente caso a estudiar es aquel en el que

$$Q(x) = q_0 + q_1 x, \tag{3.21}$$

que son los llamados *polinomios de tipo Laguerre*.

Igual que para los polinomios de Hermite hicimos una traslación y una dilatación de la coordenada x para determinar los valores de q_0 y l_0, ahora las haremos para determinar q_0 y q_1.

La transformación por realizar es $x \to q_1 \left(x - \frac{q_0}{q_1^2} \right)$, con lo que finalmente obtenemos $Q(x) = x$ y por lo tanto vemos que el dominio de los polinomios tipo Laguerre va a ser $x \in [0, \infty)$, donde

$$R(x) = A x^{l_0} \, \mathrm{e}^{l_1 x}, \quad w(x) = A x^{l_0 - 1} \, \mathrm{e}^{l_1 x} \, . \tag{3.22}$$

Al igual que antes, ponemos $A = 1$ por conveniencia. De nuevo vemos que necesariamente $l_1 < 0$ y $l_0 > 1$ para que la norma de los polinomios esté bien definida.

La ecuación en su forma más general para los polinomios de tipo Laguerre queda como

$$x \, L_n''(x) + (l_0 + l_1 \, x) L_n'(x) + \lambda_n \, L_n(x) = 0. \tag{3.23}$$

Antes de seguir conviene clarificar algo sobre la notación: generalmente se escribe $l_0 = \alpha + 1$ y se etiqueta a los polinomios de Laguerre como $L_n^{(\alpha)}$, quedando la notación sin superíndice reservada para el caso $\alpha = 0$.

En este trabajo no se escribirá este superíndice, pero sí que se empleará la constante $\alpha = l_0 - 1 \geqslant 0$.

Se puede ver que $R(0) = R(\infty)$ con lo que se cumplen las condiciones para que los polinomios $L_n(x)$ sean ortogonales con valor propio real, siendo este valor propio

$$\lambda_n = -l_1 n \geqslant 0. \tag{3.24}$$

Ahora los $\alpha_j^{(n)}$ sólo dependen del término $j + 1$ y, mediante inducción, se llega fácilmente a que en general se tiene

$$\alpha_k^{(n)} = \binom{n + \alpha}{k + \alpha} \frac{\alpha_n^{(n)}}{k!} \frac{n!}{l_1^{n-k}}, \tag{3.25}$$

y por lo tanto, eligiendo $\alpha_n^{(n)} = c^n$,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^n = \left(\frac{c}{l_1} \right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n + \alpha}{k + \alpha} \frac{n!}{k!} (l_1 x)^k. \tag{3.26}$$

Para encontrar la *función generatriz* procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{(l_1x)^k}{k!}\right]\left(\frac{ct}{l_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{(l_1x)^k}{k!}\left(\frac{ct}{l_1}\right)^n \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(l_1x)^p}{p!}\sum_{q=-p}^{\infty}\binom{q+p+\alpha}{p+\alpha}\left(\frac{ct}{l_1}\right)^{p+q} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(l_1x)^p}{p!}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q+p+\alpha}{q}\left(\frac{ct}{l_1}\right)^{p+q} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(cxt)^p}{p!}\frac{1}{(1-\frac{ct}{l_1})^{p+\alpha+1}} = \frac{1}{(1-\frac{ct}{l_1})^{\alpha+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{cxt}{1-\frac{ct}{l_1}}\right)^p\frac{1}{p!} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{cxt}{1-\frac{ct}{l_1}}\right)}{(1-\frac{ct}{l_1})^{\alpha+1}}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

La *fórmula de Rodrigues* se puede obtener de la siguiente manera

$$L_n(x) = \left(\frac{c}{l_1}\right)^n\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{(n-p)!p!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}(l_1x)^p \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{c}{l_1}\right)^n x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-xl_1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}l_1^p\,\mathrm{e}^{xl_1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}x^{p+\alpha} \\
&= \left(\frac{c}{l_1}\right)^n x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-xl_1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\,\mathrm{e}^{xl_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-p}}{\mathrm{d}x^{n-p}}x^{n+\alpha}\right) \\
&= \left(\frac{c}{l_1}\right)^n x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-xl_1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{xl_1}\,x^{n+\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

lo que nos permite, del mismo modo que en el caso de los polinomios de tipo Hermite, calcular la *norma cuadrada* de estos polinomios (de nuevo, como el operador de Sturm-Lioville es Hermitiano, tenemos que los polinomios de distinto orden son ortogonales entre sí).

$$h_n = \int_0^{\infty}L_n(x)^2w(x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{c}{l_1}\right)^n\int_0^{\infty}L_n^{(n)}(x)\,\mathrm{e}^{l_1x}\,x^{n+\alpha}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{c}{l_1}\right)^{2n}n!\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(-l_1)^{\alpha+1}}, \tag{3.30}$$

y por lo tanto, la *relación de recurrencia* para este tipo de polinomios es

$$L_{n+1}(x)-(l_1x+2n+\alpha+1)L_n(x)+\left(\frac{c}{l_1}\right)^2n(n+\alpha)L_{n-1}(x)=0. \tag{3.31}$$

Polinomios de Laguerre generalizados

De nuevo llamamos la atención acerca de que la notación estándar para los polinomios de Laguerre generalizados es $L_n^{(\alpha)}(x)$ (con el caso $\alpha=0$ siendo los *polinomios de Laguerre* a secas), y éstos se definen tomando

$$l_0 = \alpha + 1, \quad c = l_1 = -1,$$

de modo que, en resúmen, ahora tenemos:

Ecuación diferencial:	$L_n^{(\alpha)} y_n^{(\alpha)}(x) + \lambda_n L_n^{(\alpha)}(x) = 0$
Función de peso:	$w(x) = x^\alpha \, \mathrm{e}^{-x}$
Valores propios:	$\lambda_n = n$
Función generatriz:	$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n$
Fórmula de Rodrigues:	$L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} \, \mathrm{e}^x \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \, (\mathrm{e}^{-x} \, x^{n+\alpha})$
Relación de ortogonalidad:	$\int_{-\infty}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = n!\Gamma(n+\alpha+1)\delta_{mn}$
Relación de recurrencia:	$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0$

3.3.3 Polinomios de tipo Gegenbauer

Por último, tenemos el caso en el que

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2, \tag{3.32}$$

que son los llamados *polinomios de tipo Jacobi.*

Realizaremos una traslación y una dilatación de la coordenada x para fijar unívocamente $Q(x)$ y poder así determinar el intervalo de validez de estos polinomios. Haciendo esta transformación se puede expresar

$$Q(x) = q(1 - x^2) \tag{3.33}$$

sin mayor dificultad, de modo que tenemos un intervalo de validez para los polinomios de tipo Jacobi $x \in (-1, 1)$, donde

$$R(x) = A \frac{(1+x)^{\frac{l_0 - l_1}{2q}}}{(1-x)^{\frac{l_0+l_1}{2q}}}, \qquad w(x) = A \frac{(1+x)^{\frac{l_0-l_1}{2q} - 1}}{(1-x)^{\frac{l_0+l_1}{2q} + 1}}. \tag{3.34}$$

Como siempre vamos a fijar $A = 1$ y además haremos una redefinición de las constantes, escribiendo $l_0/q = \beta - \alpha$ y $l_1/q = -(\beta + \alpha + 2)$ obtenemos

$$R(x) = (1+x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha+1}, \qquad w(x) = (1+x)^\beta (1-x)^\alpha. \tag{3.35}$$

La ecuación en su forma más general para los polinomios de tipo Jacobi queda como

$$q(1-x^2)\,J_n''(x)+[\beta-\alpha-(\beta+\alpha+2)x]J_n'(x)+\lambda_n\,J_n(x)=0. \tag{3.36}$$

Se puede ver que $R(-1)=R(1)$ con lo que se cumplen las condiciones para que los polinomios $J_n(x)$ sean ortogonales con valor propio real (siempre y cuando $\alpha,\beta>-1$), siendo los valores propios

$$\lambda_n=n\left(q(n-1)+\alpha+\beta+2\right). \tag{3.37}$$

Cuando $q=1$ los polinomios reciben el nombre de *polinomios de Jacobi* y se denotan como $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Nosotros no vamos a estudiar este tipo de polinomios ya que los desarrollos que aparecen son algo tediosos. Estudiaremos en cambio el caso concreto en que $\alpha=\beta\equiv\bar{\alpha}+\frac{1}{2}$, que son los denominados *polinomios de tipo Gegenbauer* ($C_n^{(\bar{\alpha})}(x)$), esto lo hacemos ya que todos los polinomios que vamos a nombrar son casos particulares de éste. Como en el caso de los polinomios tipo Laguerre, obviaremos el índice $\bar{\alpha}$ en la notación (y de hecho no volveremos a escribirlo barrado) durante toda la exposición. La ecuación diferencial para este tipo de polinomios es

$$(1-x^2)\,C_n''(x)-(2\alpha+1)x\,C_n'(x)+\lambda_n\,C_n(x)=0. \tag{3.38}$$

con valores propios

$$\lambda_n=n\left(n+2\alpha\right). \tag{3.39}$$

Usando la inducción se puede demostrar que el término que acompaña a la potencia $(n-2p)$-ésima vale

$$\begin{aligned}\alpha_{n-2p}^{(n)}&=\frac{n!}{(n-2p)!}\prod_{k=1}^{p}\frac{\alpha_n^{(n)}}{(n-2k)(n-2k+2\alpha)-n(n+2\alpha)}\\&=\frac{n!\,\alpha_n^{(n)}}{4^p p!(n-2p)!}\frac{\Gamma\left(1-n-\alpha\right)}{\Gamma\left(p+1-n-\alpha\right)},\end{aligned} \tag{3.40}$$

de donde

$$\begin{aligned}C_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}x^k=\sum_{p=0}^{[n/2]}\frac{n!\,\alpha_n^{(n)}}{4^p p!(n-2p)!}\frac{\Gamma\left(1-n-\alpha\right)}{\Gamma\left(p+1-n-\alpha\right)}x^{n-2p}\\&=\alpha_n^{(n)}x^n\,F\left(\frac{1-n}{2},-\frac{n}{2},1-n-\alpha,\frac{1}{x^2}\right),\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde hemos expresado el resultado por medio de la función hipergeométrica, aunque no usaremos este resultado de ahora en adelante ya que es más útil la expresión como serie. Escogeremos como la constante de normalización el valor $\alpha_n^{(n)}=c^n\dfrac{\Gamma\left(n+\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}$.

Para la *función generatriz* tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{n!\, c^n\, \Gamma(n+\alpha)}{2^{2p} p! (n-2p)!\, \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1-n-\alpha)}{\Gamma(p+1-n-\alpha)} x^{n-2p} \\
&= \sum_{n,p=0}^{\infty} (ct)^n \frac{\Gamma(n+\alpha)}{2^{2p} p! (n-2p)!\, \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1-n-\alpha)}{\Gamma(p+1-n-\alpha)} x^{n-2p} \\
&= \sum_{L,p=0}^{\infty} (ct)^{L+p} \frac{\Gamma(L+p+\alpha)}{2^{2p} p! (L-p)!\, \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1-L-p-\alpha)}{\Gamma(+1-L-\alpha)} x^{L-p} \\
&= \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{ct}{2}\right)^L \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+L+\alpha)\, L!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L!}{p!(L-p)!} \left(\frac{ct}{2}\right)^p (-2x)^{L-p} \\
&\times \left[\frac{\Gamma(\alpha+L+p)\, \Gamma(1-\alpha-L-p)}{\Gamma(1-\alpha)\, \Gamma(\alpha)} (-1)^{L-p} \right] \\
&= \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{ct}{2}\right)^L \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+L+\alpha)\, L!} \left(\frac{ct}{2} - 2x\right)^L (1)^{-\alpha-L} \\
&= \frac{1}{(1 - cxt + \frac{c^2}{4} t^2)^\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

En esta serie de igualdades hemos realizado los siguientes pasos: en la primera línea simplemente escribimos el polinomio de tipo Gegenbauer como una serie, en la segunda extendimos la suma en p hasta infinito, lo cual está permitido gracias a al factor $(n-2p)! = \Gamma(1+n-2p)$ en el denominador, en la tercera línea se realizó el cambio $n = L - p$ y en la cuarta se reordenaron las series, siendo el término entre corchetes igual a 1 debido a propiedades de las funciones gamma, en la penúltima línea resumamos la serie en p (que no es más que un binomio de Newton) y escribimos de forma explícita un factor 1 que nos hace ver claramente que nuestra serie final es otro binomio.

Ahora daremos la *fórmula de Rodrigues.* No la vamos a deducir porque es un cálculo con expresiones largas. En muchos textos se asigna como un ejercicio para el deducirla para algún caso particular sencillo, como puede ser el caso $\alpha = 1/2$. La fórmula es

$$
C_n(x) = \left(\frac{c}{2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\alpha + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) \Gamma\left(\alpha + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)} (x^2-1)^{1/2-\alpha} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2-1)^{n+\alpha-1/2}, \tag{3.43}
$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función suelo (el mayor entero menor o igual a x, es decir, equivalente a la parte entera $[x]$) y $\lceil x \rceil$ la función techo (el menor entero mayor o igual a x).

La norma cuadrada se calcula como hemos hecho para los polinomios de tipo Hermite y Laguerre:

$$
\begin{aligned}
h_n &= \int_{-1}^{1} C_n(x)^2\, w(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{c^2}{2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\alpha + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)\Gamma\left(\alpha + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+\alpha\right)}{\gamma(\alpha)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n+\alpha-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{c^2}{2}\right)^n \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\alpha + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)\Gamma\left(\alpha + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \frac{1}{2}\right)}{(n+\alpha)\Gamma(\alpha)^2}, \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

y la relación de recurrencia tiene los coeficientes

$$
a_n = c(n+\alpha), \qquad b_n = 0, \qquad c_{n-1} = -\frac{h_n}{h_{n-1}}\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}, \tag{3.45}
$$

con h_n dada en (3.44).

Polinomios de Legendre

Tomando valores particulares de α tendremos distintos tipos de polinomios que aparecen de forma bastante común a la hora de resolver problemas físicos (el valor de c es sólo una cuestión de convenio). De este modo, tomando los valores

$$
\alpha = \tfrac{1}{2}, \qquad\qquad c = 2,
$$

definimos los polinomios de Legendre:

Ecuación diferencial:	$(1-x^2)\,P_n''(x) - 2x\,P_n'(x) + \lambda_n\,P_n(x) = 0$
Función de peso:	$w(x) = 1$
Valores propios:	$\lambda_n = n(n+1)$
Función generatriz:	$\dfrac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{P_n(x)}{n!} t^n$
Fórmula de Rodrigues:	$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$
Relación de ortogonalidad:	$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha)}(x) P_n^{(\alpha)}(x)\ \mathrm{d}x = \dfrac{2\,n!}{2n+1}\delta_{mn}$
Relación de recurrencia:	$P_{n+1}(x) - (2n+1)x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x) = 0$

Polinomios de Chebyshev de segunda clase

Si ahora cambiamos los valores de α y c :

$$
\alpha = 1, \quad c = 2
$$

nos encontramos con los polinomios de Chebyshev de segunda clase:

Ecuación diferencial:	$(1-x^2)\,U_n''(x) - 3x\,U_n'(x) + \lambda_n\,U_n(x) = 0$
Función de peso:	$w(x) = (1-x^2)^{1/2}$
Valores propios:	$\lambda_n = n(n+2)$
Función generatriz:	$\dfrac{1}{(1-2xt+t^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x)}{n!} t^n$
Fórmula de Rodrigues:	$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+1/2}$
Relación de ortogonalidad:	$\displaystyle\int_{-1}^{1} U_m^{(\alpha)}(x) U_n^{(\alpha)}(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} n! \delta_{mn}$
Relación de recurrencia:	$U_{n+1}(x) - 2(n+1)x\,U_n(x) - (n+1)U_{n-1}(x) = 0$

Capítulo 4

Serie de Fourier

4.1 Comentarios históricos

> *El teorema de Fourier no sólo es uno de los más bellos resultados del análisis moderno, sino que puede decirse que proporciona un instrumento indispensable para el tratamiento de casi todas las cuestiones oscuras de la física moderna.*
>
> William Thomson, P. G. Tait

Así lo expresa Zygmund en el prólogo de su famoso libro sobre series trigonométricas (1958):

> *Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por los matemáticos trabajando sobre series trigonométricas. Es concebible pensar que estos descubrimientos podían haber sido realizados en contextos diferentes, pero de hecho nacieron en conexión con la teoría de las series trigonométricas. No fue accidental que la noción de función aceptada ahora generalmente fuera formulada en la celebrada memoria de Dirichlet (1837) que trata de la convergencia de la serie de Fourier, o que la definición de integral de Riemann en su forma general apareciese en el "Habilitationsschrift" de Riemann sobre series trigonométricas, o que la teoría de conjuntos, uno de los desarrollos mas importantes de las matemáticas del siglo XIX, fuera creada por Cantor en su intento de resolver el problema de los conjuntos de unicidad para series trigonométricas. En épocas mas recientes, la integral de Lebesgue se desarrolló en estrecha conexión con la teoría de series de Fourier y la teoría de funciones generalizadas (distribuciones) con la de las integrales de Fourier.*

El desarrollo del análisis de Fourier tiene una larga historia que involucra a un gran número de personas así como la investigación de muchos fenómenos físicos. La idea de emplear sumas trigonométricas, relacionadas armónicamente, para describir fenómenos periódicos data, cuando menos, del tiempo de los babilónicos, quienes utilizaron ideas de este tipo para eventos astronómicos.

La cuestión de si una función arbitraria puede expresarse como una expansión trigonométrica aparece a mediados del siglo XVIII asociada a los estudios de L. Euler (1701-1783) y de D. Bernoulli (1700-1782) sobre el problema de la cuerda vibrante.

Bernoulli llega al punto de plantearse la solución del problema de la cuerda vibrante en forma de serie trigonométrica a partir de consideraciones de tipo físico, que le llevan a pensar que la cuerda oscila involucrando varias frecuencias al mismo tiempo, cuyas amplitudes respectivas dependen de la forma inicial de la vibración, es decir, del modo en que se haya empezado a mover la cuerda. Esta posibilidad, descubierta por Bernoulli, es lo que hoy llamamos *principio de superposición* y ha resultado ser un principio de gran importancia en muchas ramas de la física matemática.

Sin embargo, Euler entiende que esta idea de Bernoulli lleva a un resultado aparentemente paradójico, de acuerdo con algunos conceptos matemáticos de su tiempo, a saber, el hecho de que una función arbitraria pueda ser expresada en forma de serie trigonométrica. Hay que tener en cuenta que para los matemáticos contemporáneos de Euler, las curvas se dividían en dos clases: curvas continuas y curvas geométricas. En contraste con la terminología adoptada hoy en día, una curva se decía continua si sus ordenadas y sus abscisas podían conectarse mediante alguna formula $y = f(x)$.

Por otra parte una curva se denominaba geométrica si podía dibujarse de alguna forma con trazos continuos o discontinuos. Pensaban por tanto, que la segunda categoría de curvas era mas amplia que la primera, ya que lo que nosotros denominamos como una función continua a trozos, puede dibujarse, pero no puede expresarse si no es con varias formulas. Así, si una función arbitraria podía expresarse, por ejemplo, como una serie de senos, esto significaría que cualquier curva geométrica seria también una curva continua, lo cual, para Euler y sus contemporáneos, era simplemente increíble.

Por otra parte, para contribuir aún más a este debate, la solución al problema de la cuerda vibrante de Bernoulli compite con otra, aportada por J. R. D'Alembert (1717-1783), en forma de una onda que avanza y otra que retrocede, que se determinan a partir de la posición y velocidad iniciales de la cuerda. En particular, D'Alembert consideraba que la manera mas natural de hacer que una cuerda empezase a vibrar era desplazarla de su posición de equilibrio tirando de algún punto de ella. Esto hace que su posición inicial se pueda representar mediante dos rectas que forman un determinado ángulo. Para D'Alembert la naturaleza de esta curva hacia imposible pensar en que pudiese expresarse como una serie trigonométrica, ya que se trata, como se ha comentado mas arriba, de una curva geométrica, mientras que la serie trigonométrica será una curva continua.

El problema de si una función cualquiera puede representarse mediante una serie trigonométrica es retomado más tarde por el matemático francés J. Fourier (1768-1830). En una memorable sesión de la Academia Francesa de las Ciencias, el día 21 de diciembre de 1807, Fourier presentaba un trabajo que iba a abrir un nuevo capítulo en la historia de la matemática: la creación del análisis armónico o, como también se le conoce a partir de sus trabajos, el análisis de Fourier.

Fourier había deducido una ecuación que describía la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos, la ecuación del calor, $\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$. Pero no sólo la había deducido, sino que había desarrollado un método para resolverla, el método de separación de variables, procedimiento que, en cierto modo, había sido utilizado ya por Bernoulli para su solución, aunque es Fourier quien lo empieza a usar de una manera sistemática en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. La aplicación de la técnica de separación de variables a la ecuación del calor, le condujo a escribir la solución en forma de serie trigonométrica. Y, para ello, incluso encontró las formulas (de Fourier) que permiten calcular los coeficientes de la serie asociada a la función.

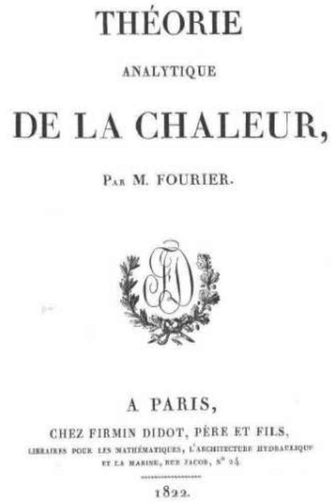
Sin embargo, el trabajo de Fourier no fue aceptado inicialmente, máxime teniendo como parte del auditorio a matemáticos como J. L. Lagrange (1736-1813), P. S. Laplace (1749-1827) y A. M. Legendre (1752-1833), que criticaron abiertamente la falta de rigor del tratamiento de Fourier. De hecho, Fourier tuvo que rehacer su trabajo ya que su memoria no fue aceptada en un primer momento.

No obstante, finalmente sus ideas fueron aceptadas y fueron expuestas, años después, en su obra de 1822, *Theorie analytique de la chaleur*. El la figura 4.1 se muestra la portada del libro de Fourier.

En un trabajo escrito en 1799 y publicado en 1805 -antes del primer trabajo de Fourier!- Parseval obtenía de un modo puramente formal la igualdad mencionada, incluso en la forma (equivalente) de producto interior.

Podría ser mas apropiado llamar *igualdad de Parseval* a la correspondiente a series de Fourier y guardar el nombre de *igualdad de Plancherel* para las integrales.

Hay autores que lo hacen así, hay quienes usan el nombre *igualdad de Parseval- Plancherel* para ambas, e incluso quienes usan nombres distintos según sea la versión con normas o con productos escalares.


THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Figura 4.1: Portada del libro de J. Fourier

4.2 Series de Fourier

En lo que sigue, usaremos el producto interior dado en la Definición 2.18 con $\omega(x) \equiv 1$.

Teorema 4.1 *Consideremos el operador de Sturm-Liouville* $Tf(x) = -f''(x)$, *correspondiente a* $R(x) = 1$ *y* $\omega(x) = 1$, *actuando sobre el espacio de funciones* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *que satisfacen las condiciones*

$$f(0) = f(2\pi), \qquad f'(0) = f'(2\pi).$$

Entonces, las funciones propias son $\{a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\}$ *correspondientes a los valores propios* $\lambda_n = n = 0, 1, 2, \ldots$.

Teorema 4.2 *El conjunto de funciones* $\{g_n(\theta)\}$

$$g_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{in\theta}$$

con $n \in \mathbb{Z}$ *es una base de Schauder ortonormal para* $\mathrm{PC}(0, 2\pi)$.

Definición 4.1 (Serie de Fourier compleja) Se dice que la función f tiene una *serie de Fourier compleja* si se cumple que

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(\theta) f_n,$$

donde $g_n(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{in\theta}$ y $f_n \in \mathbb{R}$; es decir:

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{in\theta} f_n.$$

La expresión en el lado derecho se llama *serie de Fourier compleja de* f *de periodo* 2π y los escalares f_n se llaman *coordenadas de* f relativas a la base $g_n(\theta)$.

Teorema 4.3 *(Coordenadas en la base de Fourier). Las coordenadas de* f *(como elemento de un espacio vectorial) están dadas por*

$$f_n = \int_{-\pi}^{+\pi} g_n(\theta)^* f(\theta) \, \mathrm{d}\theta,$$

donde g_n^* *denota el complejo conjugado de* g_n; *es decir:*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-in\theta} f(\theta) \, \mathrm{d}\theta.$$

Demostración. La demostración de este teorema es una consecuencia directa de la aplicación de la definición de coordenadas. □

Mediante un cambio de variable, a partir de la definición se obtiene la siguiente generalización.

Teorema 4.4 *Si* F *es periódica con período* T, *entonces la serie de Fourier es*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega_n x} F_n, \tag{4.1}$$

con

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_a^b \mathrm{e}^{-i\omega n x} \, F(x) \, \mathrm{d}x,$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ *y* $\omega_n = n\omega$.

Demostración. La demostración de este teorema se puede ver en [46].

La demostración del siguiente teorema es un simple ejercicio de cálculo.

Teorema 4.5 *(Ortogonalidad de senos y cosenos). Se cumplen las siguientes relaciones*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0;$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \pi \delta_{mn},$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, \mathrm{d}x = \pi \delta_{mn}.$$

Nota 4.1 *El Teorema 4.5 implica que la serie de Fourier de una función par (resp., impar) no tiene términos en senos (resp., cosenos).*

Si $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, una manera equivalente de la serie de Fourier es la siguiente:

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega n x) + B_n \operatorname{sen}(\omega n x) \right],$$

con $\omega_n = n\omega$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_a^b F(x) \cos(\omega_n x) \, \mathrm{d}x, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_a^b F(x) \operatorname{sen}(\omega_n x) \, \mathrm{d}x \tag{4.2}$$

Teorema 4.6 *Si* F_n *son los coeficientes de la serie de Fourier compleja, entonces*

$$F_n = \frac{1}{2} \begin{cases} (A_n - iB_n) & si \;\; n > 0, \\ (A_n + iB_n) & si \;\; n < 0, \\ A_0 & si \;\; n = 0. \end{cases}$$

Además de las ya vistas, otra manera de escribir la serie de Fourier real con periodo arbitrario es ls siguiente:

$$f(x) = \sum_n A_n \cos(\omega_n x - \beta_n), \tag{4.3}$$

con $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\omega_n = n\omega$.

Teorema 4.7 *(Formas de escribir la serie de Fourier) Las siguientes son tres formas equivalentes de escribir la serie de Fourier:*

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\right), \tag{4.4}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,\mathrm{d}t, \tag{4.5}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)\,\frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\theta\right]}\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.6}$$

La función $D_n(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\theta\right]}$ *se llama núcleo de Dirichlet. En (4.4), los coeficientes* a_j *y* b_j *se obtienen de (4.2) tomando* $T = 2\pi$.

Demostración. La prueba de que (4.4) es equivalente a (4.5) es como sigue:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \sum_{k=1}^{n}\left[\cos(kx)\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\cos(k\xi)\,\mathrm{d}\xi\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. + \operatorname{sen}(kx)\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\operatorname{sen}(k\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k\xi)\cos(kx) + \operatorname{sen}(k\xi)\operatorname{sen}(kx)\right)\right)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Usando la identidad $\cos(k(t-x)) = \cos(kt)\cos(kx) + \operatorname{sen}(kt)\operatorname{sen}(kx)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(\xi - x))\right)\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La prueba de que (4.5) y (4.6) son equivalentes es como sigue. Nótese que (4.5) se puede escribir en la forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(\xi - x))\right) \mathrm{d}\xi.$$

Usando la identidad

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(\xi - x)) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi - x)\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(\xi - x)\right]}$$

resulta que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi - x)\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(\xi - x)\right]}\, \mathrm{d}\xi.$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = x + \theta$ y usando el hecho de que f es 2π-periódica se concluye que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \theta)\, \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\theta\right]}\, \mathrm{d}\theta. \qquad \square$$

Corolario 4.1 *Se cumple*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\phi\right)}\, \mathrm{d}\phi = 1.$$

Demostración. Tómese $f(x) \equiv 1$. $\square$

Teorema 4.8 *Sea f una función cuyas discontinuidades son de salto unicamente. Si x es un punto de discontinuidad, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x + 0) + f(x - 0)\right),$$

donde $s_n(x)$ denota la serie de Fourier en x.

Demostración.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \theta)\, \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\theta\right]}\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) \mathrm{d}\theta. \tag{4.7}$$

Denotemos

$$D_n(\theta) := \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\theta\right]}.$$

De la identidad

$$1+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

tenemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+0)\,D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\,D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Restando:

$$\begin{aligned} & s_n(x) - \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) \\ &\quad = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(f(x+\theta)-f(x+0)\right)+\int_{-\pi}^{0}\left(f(x+\theta)-f(x-0)\right)\right)D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} K(x) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{f(x+\theta)-f(x+0)}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{f(x+\theta)-f(x+0)}{\theta}\,\frac{\frac{1}{2}\theta}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{f(x+\theta)-f(x+0)}{\theta}. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $f' \in \mathrm{PC}[-\pi,\pi]$. Entonces $K(x) \in \mathrm{PC}[-\pi,\pi]$. Del teorema de Riemann,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(\theta)\operatorname{sen}(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0,$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right). \qquad \square$$

4.3 Convergencia de las series de Fourier

4.3.1 Comentarios históricos

La naturaleza de la convergencia de las series de Fourier recibió mayor atención después de la introducción del concepto de convergencia uniforme por Stokes y Seidel. Heine hizo notar que la demostración usual de que una función acotada esta representada unívocamente en $[-\pi,\pi]$ por una serie de Fourier es incompleta porque la serie puede no ser uniformemente convergente y así no puede integrarse término a término. Esto sugirió que, sin embargo, pueden existir series trigonométricas no uniformemente convergentes que sí representasen una función. Estos problemas dieron origen a una nueva serie de investigaciones que buscaban establecer la unicidad de la representación de una función mediante una serie trigonométrica, y si los coeficientes son necesariamente los coeficientes de Fourier.

Heine demostró que una serie de Fourier que representa una función acotada que satisface las condiciones de Dirichlet es uniformemente convergente en las partes del intervalo $[-\pi, \pi]$ que quedan cuando se eliminan del intervalo entornos arbitrariamente pequeños de los puntos de discontinuidad de la función. En estos entornos la convergencia es necesariamente uniforme.

Heine demostró después que si la convergencia uniforme se cumple para una serie trigonométrica que representa a una función entonces la serie es única.

Los problemas asociados con la unicidad de las series trigonométricas y las de Fourier atrajeron a Georg Cantor, quien estudió el trabajo de Heine. Demostró que cuando $f(x)$ se representa por una serie trigonométrica convergente para toda x, no existe otra serie trigonométrica de la misma forma que converja y represente la misma función $f(x)$. Durante aproximadamente cincuenta años después del trabajo de Dirichlet se creyó que la serie de Fourier de cualquier función continua en $[-\pi, \pi]$ converge a la función. Pero DuBois Reymond dió un ejemplo (1873) de una función continua en $[-\pi, \pi]$ cuya serie de Fourier no converge en un punto particular. Las funciones con series de Fourier divergentes que construyo DuBois Reymond son complicadas. Ejemplos posteriores mas sencillos son debidos a Schwarz y Fejer.

Teorema 4.9 *(Espacio de funciones que tienen expansión en serie de Fourier). Si f y $f\,'$ son funciones continuas por pedazos (es decir, si $f, f' \in PC[a,b]$), entonces f tiene una expansión en serie de Fourier. Además, la convergencia es uniforme en los intervalos cerrados donde f es continua.*

Nota 4.2 *En los extremos $x = a$ y $x = b$, la continuidad se entiende referida a la extensión periódica de la función.*

Demostración. Denotemos con $a_k(f), b_k(f), a_k(f\,')$ y $b_k(f\,')$ los coeficientes de Fourier de f y $f\,'$, respectivamente. Entonces $a_k\,(f) = -\dfrac{b_k\,(f')}{k}$ $b_k\,(f) = \dfrac{a_k\,(f')}{k}$ $k \in \mathbb{N}$.

Usando $2AB \leqslant A^2 + B^2$ se tiene

$$|a_k\,(f)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + k^2\,|a_k\,(f)|\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |b_k\,(f')|^2\right),$$

$$|b_k\,(f)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + k^2\,|b_k\,(f)|\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |a_k\,(f')|^2\right).$$

Entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ existe siempre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k\,(f')| + |b_k\,(f')|)$ exista, lo cual, en virtud de la desigualdad de Bessel, siempre es cierto ya que las hipótesis aseguran que $f \in L^2$. $\square$

Si $f(t)$ es una función periódica acotada que en todo período tiene un número finito de máximos y mínimos y un número finito de puntos de discontinuidad, entonces la serie de Fourier converge puntualmente a $f(t)$ en todos los puntos en los que $f(t)$ es continua y converge al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de $f(t)$ en cada punto donde ésta es discontinua.

H. Wilbraham observó en 1848 que, en puntos cercanos a una discontinuidad de una función f, las sumas parciales de la serie de Fourier de f presentaban un comportamiento oscilatorio anómalo que hacía que las contribuciones de las sumas parciales excedieran en aproximadamente el 9% del valor del salto de la discontinuidad. Este trabajo de Wilbraham cayó en el olvido, hasta que hacía 1898 volvió a reaparecer en un contexto distinto. Fue de mano del premio Nobel en Física (1907) A. Michelson, científico norteamericano, inventor y constructor de numerosos instrumentos físicos de gran precisión. Michelson construyó un aparato llamado analizador armónico que permitía, mecánicamente, determinar hasta los 80 primeros componentes de la serie de Fourier, a partir de la gráfica de una función $y = f(x)$. Michelson observó que para una función de tipo salto, en las cercanías del punto de discontinuidad, aparecía una extraña protuberancia que no aparecía en la función original.

En un principio creyó que podía deberse a un defecto mecánico del aparato.

Una vez verificado que podía no ser así, escribe al físico-matemático J. W. Gibbs, quien investigó y explicó el fenómeno basándose en la no convergencia uniforme de la serie de Fourier en las cercanías de un punto de discontinuidad.

En 1898 Michelson y Stratton diseñaron un analizador armónico que permitía hacer gráficas de las sumas parciales de series de Fourier. Observaron que en esas gráficas aparecía un exceso sobre el valor máximo de la función cuando estaba cerca del salto y Michelson envió una carta a la revista *Nature* pidiendo una explicación para el fenómeno. Durante los años 1898 y 1899 hubo varios artículos sobre el tema en la revista y finalmente fue Gibbs quien en 1899 aclaró la situación. El nombre de *fenómeno de Gibbs* es debido a Bocher (1906).

Posteriormente se descubrió que ya en 1848 Wilbraham había publicado un artículo titulado *On a certain periodic function* (Cambridge, Dublin Math. J. 3, 1848) en el que había descubierto el fenómeno. Wilbraham estudia la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos{(2k+1)\,x}}{2k+1},$$

que corresponde a una función que vale $\frac{\pi}{4}$ entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{4}$ en el resto del período y que aparece en el libro de Fourier. Indica que erróneamente algunos autores dicen que las sumas parciales están comprendidas entre $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$; demuestra que no es así y obtiene el valor exacto del exceso. El artículo de Wilbraham se reproduce en el libro *A Source Book* *in Classical Analysis,* editado por G. Birkhoff ([6])

El valor máximo de las sumas parciales de la función signo en $(0, \delta)$ no tiende a 1 sino a

$$\lim_{\delta \to \pi^-} \frac{2}{\delta} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x = 1.178\,979\,744.$$

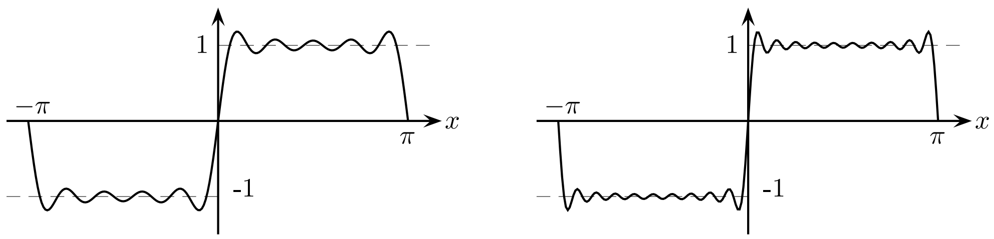
4.4 Aplicaciones de las series de Fourier

Problema 4.1 *Hallar la serie de Fourier de la función signo.*

Solución.

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\,x}{2k+1}.$$

En la figura 4.2 se muestran las gráficas de $S_4(x)$ y $S_9(x)$.



$$S_4(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{4} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{2k+1} \qquad S_9(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{9} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{2k+1}$$

Figura 4.2: La serie de Fourier para la función signo

4.4.1 La ecuación de la cuerda vibrante

Uno de los problemas mas interesantes del que se ocuparon los científicos del Siglo XVIII, y que se presenta con relativa frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios, fue el que se conoce con el nombre de “el problema de la cuerda vibrante”. Este, puede describirse en la situación mas elemental posible, de la siguiente forma: Supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0, 0)$ y $(L, 0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que esta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de esta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá descrito por una función $u(x, t)$, donde $u(x, t)$ representara el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x y el tiempo t. El problema que se plantea es obtener $u(x, t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond D'Alembert, quien confirmó que la posición futura de la cuerda está completamente determinada por su posición inicial.

La fórmula para la solución encontrada por D'Alembert fue también obtenida por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían considerarse. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de "función", un concepto que hoy en día presumimos de tener muy claro. Mientras que para D'Alembert, f debería tener una fórmula concreta o expresión analítica, Euler defendía que no había ninguna razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas que, en diferentes parte de $[0, \pi]$, viniesen definidas por expresiones distintas, siempre que al considerarlas unidas, la posición inicial resultante tuviese una apropiada regularidad.

Parece ser que tal discusión entre D'Alembert y Euler provenía del hecho de que en su tiempo se admitía que cada función daba lugar a una gráfica, pero no recíprocamente (cuando la gráfica considerada tenía diferentes expresiones en distintos intervalos). En resumen, Euler defendía que cualquier gráfica podia considerarse como curva inicial, tesis que no era compartida por D'Alembert.

Otra manera de obtener la solución del problema, completamente distinta de la vista anteriormente, fue propuesta por Daniel Bernoulli en 1753 (*Hist. de l'Acad. de Berlin,* 9, 1753, 147-172, 173-195).

¿Cómo concibió Bernoulli su idea? Parece ser que una posibilidad es que usase sus conocimientos musicales. Para ello se basó en que el sonido que emite una cuerda vibrante es, en general, superposición de armónicos. Tales funciones representan, para $n = 1$ el tono fundamental y para $n > 1$ sus armónicos, y desde el punto de vista musical se corresponden con los tonos puros. Asi, Bernoulli afirmó que cualquier sonido que produjese la vibración de la cuerda debe ser superposición de tonos puros.

No se conoce con exactitud la manera en que D'Alembert llego a la fórmula. La interpretación física de la solución dada por D'Alembert es muy interesante:

La función $g(x + vt)$ representa una onda (una solución de la ecuación de onda) que se desplaza hacia la izquierda con velocidad v. Análogamente, la función $f(x - vt)$ representa otra onda que se desplaza hacia la derecha con velocidad v. De este modo, la solución es la superposición de dos ondas, una de las cuales se desplaza hacia la izquierda y otra hacia la derecha, ambas con velocidad v.

Problema 4.2 *Muestre que la ecuación de onda en coordenadas rectangulares*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tiene como solución
$$\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{4.8}$$

Solución. Usando la transformación de coordenadas $(x,t) \to (\xi,\eta)$ dada por $\xi = x + vt$, $\eta = x - vt$ resulta que $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \eta}$ y $\dfrac{\partial}{\partial t} = v\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} - \dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)$.

Entonces la ecuación de onda, en coordenadas (ξ,η) es $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0.$

Las soluciones de esta ultima ecuación son de la forma : $\psi(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ donde f y g son funciones arbitrarias.

Entonces, la solución en términos de las variables (x,t) es
$$\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt). \qquad \square$$

Nótese que el resultado anterior se puede generalizar a espacios de dimensión mayor que uno en la forma siguiente: si $x, n \in \mathbb{R}^N$ entonces la solución de la ecuación $\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta$ es $\eta(x,t) = f(x \cdot n - vt)$.

De hecho, tomando $\eta(x,t) := f(x \cdot n - vt)$ se obtiene
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = f' \frac{\partial(x \cdot n - vt)}{\partial t} = -vf', \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = v^2 f'',$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial \vec{x}} = f' \frac{\partial(x \cdot n - vt)}{\partial x} = n_x f', \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = (n \cdot n) f''.$$
Entonces $\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta.$

Una función de la forma $\eta(x,t) = f(x \cdot n - vt)$ se conoce como *onda plana.*

Problema 4.3 *Muestre que la solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas*
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta$$
es de la forma $\eta(r,t) = \dfrac{1}{r} G(r - vt)$

Solución. Sea $\eta(r,t) = \dfrac{1}{r} G(r - vt)$, $\quad r := |x|$. Usando la fórmula para el laplaciano en coordenadas esféricas
$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r f(r)), \quad r \neq 0,$$
se obtiene
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{r} G'(-v), \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{r} G''(-v)^2 = v^2 \frac{1}{r} G''.$$
Entonces,
$$\nabla^2 \eta = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rG(r)) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(G(r - vt)) = \frac{1}{r} G'',$$

de donde se concluye que

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta.$$

A continuación se describe la solución de la ecuación de onda con condiciones iniciales.

Problema 4.4 *Muestre que la solución de la ecuación*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$\psi\left(x,0\right) = f\left(x\right), \qquad \frac{\partial \psi\left(x,0\right)}{\partial t} = g\left(x\right)$$

está dada por

$$\psi\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x-vt\right) + f\left(x+vt\right)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-vt}^{x+vt} g\left(q\right)\mathrm{d}q.$$

Solución. La solución general es de la forma

$$\psi\left(x,t\right) = F\left(x-vt\right) + G\left(x+vt\right).$$

Usando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= F\left(x\right) + G\left(x\right), \\ g\left(x\right) &= -vF'\left(x\right) + vG'\left(x\right) \end{aligned}$$

Integrando la segunda ecuación y resolviendo simultáneamente con la primera resulta

$$\begin{aligned} F\left(x\right) &= \frac{f\left(x\right)}{2} + \frac{1}{2v}\int_0^x g\left(q\right)\mathrm{d}q + K, \\ G\left(x\right) &= \frac{f\left(x\right)}{2} - \frac{1}{2v}\int_0^x g\left(q\right)\mathrm{d}q - K. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= F\left(x-vt\right) + G\left(x+vt\right) \\ &= \frac{f\left(x-vt\right)}{2} + \frac{1}{2v}\int_0^{x-vt} g\left(q\right)\mathrm{d}q + K + \frac{f\left(x+vt\right)}{2} - \frac{1}{2v}\int_0^{x+vt} g\left(q\right)\mathrm{d}q - K \\ &= \frac{1}{2}\left(f\left(x-vt\right) + f\left(x+vt\right)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-vt}^{x+vt} g\left(q\right)\mathrm{d}q. \end{aligned}$$

Esta solución se conoce como *solución de D'Alembert.*

Existe otra manera de llegar a la expresión anterior (no obstante que es posible que fuese también usada por Bernoulli).

Al ser la solución una función $u(x,t)$ de dos variables, tales soluciones sencillas han de ser producto de una función de x por una función de t, es decir, $u(x,t) = X(x)T(t)$, o lo que es lo mismo, funciones con variables separadas. Derivando y sustituyendo, de manera formal, llegamos a dos problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Disponemos por tanto de un procedimiento que nos permite calcular infinitas "soluciones elementales" de la ecuación de ondas.

No es, pues, de extrañar la reacción de D'Alembert y Euler ante las afirmaciones de Bernoulli, y de los miembros de la Academia Francesa ante las afirmaciones de Fourier. Sin embargo, aunque de manera lejana en sus planteamientos y en su origen, el problema tiene algo de similitud con el desarrollo infinito de Taylor de una función suficientemente regular en un punto dado, pues en ambos casos se trata de desarrollar una función dada en una serie, utilizando para ello funciones "mas sencillas": los polinomios en el caso de la formula de Taylor y las funciones trigonométricas. Es claro que hay también diferencias fundamentales entre ambos propósitos, que se observan no solo en el origen del problema sino también en su posterior desarrollo. Pero es evidente que en los siglos XVIII y XIX, ya nadie dudaba de la utilidad del desarrollo de Taylor.

Problema 4.5 *Muestre que las soluciones de la ecuación de onda*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \nabla^2\psi$$

tienen la forma

$$\psi\left(x,y,t\right) = X_\mu\left(x\right)Y_{\mu\lambda}\left(y\right)T_\lambda\left(t\right),$$

donde

$$X_\mu\left(x\right) \in \left\{\mathrm{e}^{i\mu x}, \mathrm{e}^{-i\mu x}\right\} \quad o \quad X_\mu\left(x\right) \in \left\{\cos\mu x, \operatorname{sen}\mu x\right\},$$

$$Y_{\mu\lambda}\left(y\right) \in \left\{\mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y}, \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y}\right\} \quad o \quad Y_{\mu\lambda}\left(y\right) \in \left\{\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y, \operatorname{sen}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y\right\}$$

y

$$T_\lambda\left(t\right) \in \left\{\mathrm{e}^{i\lambda vt}, \mathrm{e}^{-i\lambda vt}\right\} \quad o \quad T_\lambda\left(t\right) \in \left\{\cos\lambda vt, \operatorname{sen}\lambda vt\right\}.$$

Solución. Sustituyendo $\psi\left(x,y,t\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right)T\left(t\right)$ en la ecuación de onda, resulta la ecuación en variables separadas

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\lambda^2,$$

donde λ^2 es una constante (llamada *de separación*).

Las soluciones generales de estas ecuaciones consisten de términos como los que se describen a continuación:

$$\begin{array}{ccc} X_\mu\left(x\right) & Y_{\mu\lambda}\left(y\right) & T_\lambda\left(t\right) \\ \left\{\mathrm{e}^{i\mu x}, \mathrm{e}^{-i\mu x}\right\} & \left\{\mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y}, \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y}\right\} & \left\{\mathrm{e}^{i\lambda vt}, \mathrm{e}^{-i\lambda vt}\right\} \\ \left\{\cos\mu x, \operatorname{sen}\mu x\right\} & \left\{\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y, \operatorname{sen}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y\right\} & \left\{\cos\lambda vt, \operatorname{sen}\lambda vt\right\}. \end{array}$$

Por la linealidad de la ecuación parcial, su solución general, consistirá de combinaciones lineales de tales términos, es decir,

$$\psi = \sum_{\mu k_\lambda} a_{\mu k\lambda}\psi_{\mu k\lambda} \quad \text{con} \quad \psi_{lmn} = X_\mu\left(x\right)Y_k\left(y\right)Z_\lambda\left(z\right),$$

donde hemos denotado $k = \lambda^2 - \mu^2$.

Nota 4.3 *Si la ecuación de onda contiene sólo una variable espacial* (x) *entonces* $\mu = \lambda$.

Problema 4.6 *Muestre que la ecuación de onda 1-dimensional*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

con las condiciones

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0$$
$$y(x,0) = f(x) \quad \partial_t y(x,t)\big|_{t=0} = 0$$

tiene como solución

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi v t}{L}.$$

La condición $y(x,0) = f(x)$ representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la $\partial_t y(x,t)|_{t=0} = 0$ significa que la velocidad inicial de la misma es cero (recordemos que, una vez llevada a la posición $f(x)$, la cuerda se suelta). Las relaciones $y(0,t) = 0$, $y(L,t) = 0$ expresan el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

Solución. Aplicando el método de separación de variables buscamos una solución en la forma $y(x,t) = X_\lambda(x)\, T_\lambda(t)$ y usando la condiciones, obtenemos:

$y(0,t) = X_\lambda(0)\, T_\lambda(t) = 0 \forall t \implies A_\lambda + B_\lambda = 0;$

$y(L,t) = X_\lambda(L)\, T_\lambda(t) = 0 \forall t \implies A_\lambda\, \mathrm{e}^{i\lambda x} + B_\lambda\, \mathrm{e}^{-i\lambda x} = 0.$

Entonces, $B_\lambda = -A_\lambda$, $A_\lambda \operatorname{sen}\lambda L = 0 \Longrightarrow \lambda L = n\pi$, de donde obtenemos que $\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$.

La solución es, entonces, $y(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\left(C_n\cos\dfrac{n\pi v t}{L} + D_n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi v t}{L}\right)$.

Usando la condición $y(x,0) = f(x)$ encontramos que

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}$, con $k_n := B_n C_n$

$k_n = \langle k, f\rangle \Longrightarrow k_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$ (relación de ortogonalidad)

Finalmente, usando la condición $\partial_t y(x,t)|_{t=0} = 0$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n D_n \frac{L}{n\pi v}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = 0 \quad \Longrightarrow \quad D_n = 0.$$

Entonces $y(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi v t}{L}$.

Nota 4.4 *Las soluciones se conocen en física como modos normales de vibración.*

Otros tipos de problemas, distintos de los aquí considerados, conducen a la posibilidad de desarrollos diferentes. Por ejemplo, el problema de las vibraciones de una cuerda libre en sus extremos, nos plantea la cuestión de si será posible desarrollar una función dada f definida en $[0,\ L]$.

Finalmente mencionamos cuál es la forma de la ecuación de onda, que modela el movimiento de una membrana cuadrada fija en la frontera.

Problema 4.7 *La ecuación de onda*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u, \quad u = u(x,y,t), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant L, \quad t \geqslant 0,$$

tiene como solución

$$u(x,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} k_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L} \cos\frac{\sqrt{m^2+n^2}\pi v t}{L},$$

con $k_{mn} = \dfrac{4}{L}\displaystyle\int_0^L \int_0^L f\,(x,y) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Capítulo 5

Transformada de Fourier

En este capítulo se hace una presentación de la transformada de Fourier y se intenta hacer ver que ésta es el paso al límite de las series Fourier, en el sentido de que "lo discreto" pasa a ser "continuo" y los intervalos finitos de los dominios en los que se formulan los problemas relacionados con series de Fourier pasan a ser dominios infinitos para el tratamiento de la transformada de Fourier. Se estudian también algunas de sus propiedades más importantes, para ser utilizadas después.

5.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 5.1 (Transformación integral) Sean V y W espacios vectoriales de funciones. Una *transformación integral* es una función $T : V \to W$ y esta dado por:

$$Tv(t) = u(t) = \int_a^b k\,(s,t)\,v\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

$k\,(s,t)$ se llama *núcleo de la transformación.*

Algunas de las transformadas más conocidas y usadas incluyen a aquellas cuyos nombres y núcleos se dan en la tabla 5.1.

Nombre	Núcleo
Fourier	e^{ist}
Laplace	e^{-st}
Euler	$(x-y)^{\nu}$
Mellin	$G\,(x^y)$
Hankel	$yJ_n\,(xy)$

Tabla 5.1: Núcleos de algunas transformadas integrales

En este trabajo estudiaremos las transformadas de Fourier y de Laplace.

Nota 5.1 *Los límites infinitos de la integral se entienden en el siguiente sentido:*

$$\int_a^{\infty} k(s,t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} k(s,t)\, v(t)\, \mathrm{d}t.$$

Si existe el limite se dice que la integral *converge.*

Definición 5.2 (Función selectora) Sea E un conjunto. La *función selectora* es la función $\chi_E : X \to \{0,1\}$ dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E. \end{cases}$$

Definición 5.3 (Función de Heaviside) La función *de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida de la siguiente manera:

$$H(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a, \\ 1 & \text{si} \quad x > a. \end{cases}$$

Nota 5.2 $H(x-a) = \chi_{(a,\infty)}(x)$

La gráfica de la función de Heaviside se muestra en la figura 5.1

Definición 5.4 (Función signo) La *función signo* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida de la siguiente manera:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

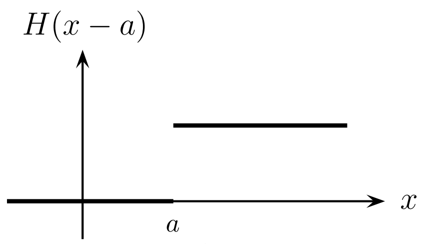


Figura 5.1: La función de Heaviside

Una función monótona y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable y tiene límites laterales finitos en cada punto. Si estos límites no coinciden la función tendrá una discontinuidad con un salto finito. La suma de los saltos no puede ser mayor que la diferencia de los valores de la función en los extremos del intervalo, de modo que el conjunto de discontinuidades con salto mayor que $\frac{1}{n}$ es finito y, por tanto, el conjunto de discontinuidades es a lo mas numerable. Las mismas propiedades serán ciertas para una función monótona a trozos, es decir, aquella que es monótona en una cantidad finita de intervalos que unidos dan el intervalo original.

Hay que entender que la función se ha extendido por periodicidad cuando el punto x es uno de los extremos del intervalo. Así, $f(\pi+) = f((-\pi)+)$ y $f((-\pi)-) = f(\pi-)$.

Teorema 5.1 *(Condiciones de Dirichlet para la existencia de la transformada de Fourier) Supongamos que una función f satisface las condiciones siguientes:*

CD1: *promedio finito;*

CD2: *tiene un número finito de discontinuidades finitas en cada intervalo finito;*

CD3: *tiene un número finito de puntos de inversión (es decir, de máximos positivos y negativos) en cada intervalo finito.*

Entonces existe la trasformada de Fourier de la función f.

Nota 5.3 *Las condiciones* CD1, CD2 *y* CD3 *son suficientes pero no necesarias para la existencia de la transformada de Fourier.*

Teorema 5.2 *El conjunto de funciones*

$$g^{\omega}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ix\omega} \quad \text{con} \quad \omega \in \mathbb{R},$$

es una base ortonormal para $PC[-\infty, \infty]$. Es decir

$$f(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{\omega}(\theta) \widetilde{f}(\omega)\, \mathrm{d}\omega,$$

$$\widetilde{f}^{\,\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{\omega}(x)^{*} f(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

$f(\theta)$ así expresada se le conoce como *integral de Fourier de la función $f(\theta)$.*

A $\widetilde{f}^{\,\omega}$ se le conoce como la *transformada de Fourier.* Usualmente se donota con $\mathcal{F}(f)$; es decir,

$$\mathcal{F}(f) = \widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\langle\omega,\theta\rangle} f(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

En los puntos donde f tiene una discontinuidad simple se cumple que

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}\, \mathrm{d}k,$$

$$\frac{1}{2}\left(\widetilde{f}(k+0) + \widetilde{f}(k-0)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\langle k,x\rangle}\, \mathrm{d}x.$$

Corolario 5.1 *(Identidad de Parseval)*

$$\|f\| = \|F\|;$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, \mathrm{d}\omega.$$

Nótese que, de manera explícita, la integral de Fourier está dada por

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\omega,$$

o, de manera equivalente,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega(\theta - t)} f(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\omega.$$

Definición 5.5 (Transformada de Fourier de la función $f(t)$) La *transformada de Fourier de la función* $f(t)$ está definida por

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \mathrm{e}^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t.$$

En el caso N-dimensional,

$$\psi_x(p) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\langle p,x\rangle} \psi_p(x) \, \mathrm{d}x.$$

Definición 5.6 (Transformada inversa de Fourier) Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t);$$

de manera explícita,

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \, \mathrm{e}^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega.$$

En el caso N-dimensional,

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\langle p,x\rangle} \phi_x(p) \, \mathrm{d}p.$$

Nota 5.4 *Obsérvese que la integral de Fourier se puede obtener como el límite de la serie de Fourier, en el sentido siguiente.*

La serie de Fourier es

$$S_n(x, L) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(t) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{n} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}(t - x) \right) \mathrm{d}t.$$

Nótese que $f(x) = \lim_{L,n\to\infty} S_n(x, L)$.

Sea $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$. *Entonces, como* $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$, *se ve que si* $L \to \infty$ *y* $n \to \infty$ *ocurrirá que* $\Delta\omega \to d\omega$ *y además la suma* $\sum_{k=1}^{n}$ *deberá corresponderá* $\int_0^\infty \mathrm{d}\omega$. *Entonces podemos escribir la serie de Fourier*

$$
\begin{aligned}
S_n(x,L) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\cos(\omega_n x)\Delta\omega \int_{-L}^{L} f(t)\cos(\omega_n t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \operatorname{sen}(\omega_n x)\Delta\omega \int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}(\omega_n t)\,\mathrm{d}t\Bigg].
\end{aligned}
$$

De aquí se sigue que

$$
f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(t-x)\ )\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega.
$$

Teorema 5.3 *Para funciones impares y pares respectivamente se cumple que*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{sen}\omega x\,\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\operatorname{sen}\omega u\,\mathrm{d}u, \\
f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\omega u\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.4 *(Transformada inversa de Fourier)*

$$
\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{F}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.
$$

En el siguiente teorema se apuntan las fórmulas para la transformada de Fourier de derivadas parciales.

Teorema 5.5 *Denotemos con $\mathcal{F}[y(x,t)]$ la transformada de Fourier respecto a x de la función $y = y(x,t)$. Entonces*

FR1: $\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] = i\omega\mathcal{F}[y(x,t)]$

FR2: $\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right] = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(y)$.

Demostración. Nótese que

$$
\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}\,\widetilde{y}(k)\,\mathrm{d}k = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int i\vec{k}\ \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}\,\widetilde{y}(k)\,\mathrm{d}k.
$$

De aquí se sigue que

$$
\mathcal{F}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = i\omega\mathcal{F}(y).
$$

La prueba de FR2 es aún más directa. $\square$

Corolario 5.2 *(Transformada de Fourier de derivadas parciales)*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = (i\omega)^n \mathcal{F}(y) .$$

Teorema 5.6 *(Transformada de Fourier de la convolución de funciones)*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g) ,$$
$$\langle g, f\rangle = \langle G, F\rangle ;$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)^* \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, G(\omega)^* \,\mathrm{d}\omega.$$

5.2 Algunas Aplicaciones

5.2.1 La ecuación del calor

En cualquier curso introductorio de ecuaciones en derivadas parciales siempre podemos encontrar dos importantes ejemplos: la ecuación de ondas que, en su versión mas elemental, describe las vibraciones de una cuerda fija en dos extremos, y la ecuación del calor que describe como actúa el calor a lo largo del tiempo a través de un solido. Sin embargo, no siempre se pone de manifiesto la importancia e influencia reales que estos dos problemas han tenido en el desarrollo posterior de técnicas y teorías, que han enriquecido, y lo siguen haciendo hoy a las matemáticas y sus aplicaciones.

Una ecuación en derivadas parciales es una relación entre una función de dos o mas variables y algunas de sus derivadas parciales (si la función es de una sola variable una relación de este tipo es una ecuación diferencial ordinaria). Resolver una ecuación de este tipo significa idealmente encontrar las funciones que la cumplen, tal vez bajo ciertas condiciones adicionales, o en caso de que no se pueda, dar la mayor informaciónon posible sobre como son estas funciones.

Las ecuaciones parciales son un campo tan amplio que no parece que pueda comprenderse desde un punto de vista general, así que una buena forma de estudiarlas es empezar por ejemplos concretos que contengan sugerencias sobre formas de atacar problemas mas generales.

¿Cómo cambia la temperatura de un objeto? La temperatura es una forma de energía, y en ciertas condiciones comunes el cambio mas importante de un objeto es su transmisión en forma de calor (cuando no ocurren otras cosas, como por ejemplo reacciones químicas, en el objeto del que se trate). Supongamos por ejemplo que hablamos del aire dentro de una habitación. Llamemos $T(x,t)$ a la temperatura en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ en el momento t, medida en grados Kelvin, y $q(x,t)$ al vector que da el flujo de calor en el punto x, es decir, el vector que apunta en el sentido en que se transmite el calor y que tiene una longitud proporcional a la rapidez con la que fluye dicho calor. Entonces el aumento de temperatura de un dominio acotado de la habitación sera la cantidad de calor que entra en ese trozo (puede también salir calor en lugar de entrar, y en ese caso el “aumento” tiene signo negativo y se interpreta como una disminución):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} T\,\mathrm{d}x = C\int_{\partial\Omega} \langle q, N\rangle\,\mathrm{d}S,$$

donde N representa el vector normal interior a la frontera de Ω y C es una constante que necesitamos incluir porque la temperatura no es exactamente la energía, sino algo proporcional – la constante de proporcionalidad se llama constante de Boltzmann por esto usamos la escala Kelvin –. A partir de ahora escribiremos C para denotar una constante de la que no nos preocuparemos, posiblemente distinta de una ecuación a otra, pero que no influye en la estructura matemática del argumento.

Por argumentos físicos es razonable pensar que q es proporcional a la variación de temperatura y va en el sentido en que esta disminuye:

$$q \propto -\nabla T,$$

donde ∇T es el gradiente de T en la variable x.

De hecho, esto se parece a nuestra idea intuitiva de lo que debería pasar: el calor va de la parte más caliente a la parte más fría, que es la dirección contraria a la que indica ∇T, y va más rápido cuanto más pronunciado es el cambio de temperatura entre un punto y los de alrededor.

Obtención de la ecuación del calor

Si Q denota la cantidad de calor, entonces

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_S = \int_S \left(-K\vec{\nabla}T\right)\cdot \mathrm{d}a = \int_V \vec{\nabla}\cdot\left(K\vec{\nabla}T\right)\mathrm{d}V.$$

Del teorema de divergencia de Gauss

$$\int_S \left(-K\vec{\nabla}T\right)\cdot \mathrm{d}a = \int_V \vec{\nabla}\cdot\left(K\vec{\nabla}T\right)\mathrm{d}V.$$

Por tanto,

$$Q = \int_V c\rho T\,\mathrm{d}V,$$

donde c representa el calor específico. La rapidez de cambio de la cantidad de calor es

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V c\rho T\,\mathrm{d}V = \int_V c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V,$$

donde $\rho = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ es la densidad de masa.

Entonces

$$\int_V \left(c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(K\nabla T)\right)\mathrm{d}V = 0,$$

donde $\Delta V \subseteq V$. Entonces se concluye que

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(K\nabla T) = 0.$$

Si K es constante, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{c\rho}{K}\frac{\partial T}{\partial t}=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)T,$$

que es la ecuación del calor. A la constante $\frac{c\rho}{K}$ se le conoce como *constante de difusibidad térmica* (para un medio isotropo).

Problema 5.1 *Muestre que la solución de la ecuación de difusión*

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}=\nabla^{2}u\left(x,t\right)\qquad \textit{con}\quad k>0$$

con condiciones iniciales

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

está dada por:

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(\omega,0\right)\exp\left(-\frac{\left(x-\omega\right)^{2}}{4kt}\right)\mathrm{d}\omega. \tag{5.1}$$

Solución. Tomando la transformada de Fourier con respecto a x en ambos lados de la ecuación diferencial y multiplicando por k obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left(u\left(x,t\right)\right)=-k\omega^{2}\mathcal{F}\left(u\left(x,t\right)\right).$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria es

$$\mathcal{F}\left(u\left(x,t\right)\right)=C\,\mathrm{e}^{-k\omega^{2}t}.$$

La constante de integración C se calcula usando la transformada de Fourier de la condición inicial, para obtener

$$\mathcal{F}\left(u\left(x,0\right)\right)=C=\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right).$$

Entonces

$$\mathcal{F}\left(u\left(x,t\right)\right)=\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\,\mathrm{e}^{-k\omega^{2}t}.$$

Sea $g=g(x,t)$ tal que $\mathcal{F}\left(g\right)=\mathrm{e}^{-k\omega^{2}t}$. Entonces $g\left(x,t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\exp\left(-\frac{x^{2}}{4kt}\right)$.

La solución $u(x,t)$ está dada, entonces, por

$$u\left(x,t\right)=f*g,$$

es decir,

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\omega\right)g\left(x-\omega\right)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(\omega,0\right)\exp\left(-\frac{\left(x-\omega\right)^{2}}{4kt}\right)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

□

Problema 5.2 *Muestre que la ecuación de onda 1-dimensional,*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t \geqslant 0,$$
$$y(x,0) = f(x),$$

tiene como solución

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt) + f(x-vt)\right).$$

Solución. Aplicando el método de separación de variables, supongamos que

$$y(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Encontramos que

$$y(x,t) = (A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x)\cos\lambda v t.$$

Entonces, esperamos que la solución sea de la forma

$$y(x,t) = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x)\cos\lambda v t\,\mathrm{d}\lambda. \tag{5.2}$$

De $y(x,0) = f(x)$ se sigue que

$$f(x) = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Tomando la transformada de Fourier en (5.2) encontramos que

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(w)\cos\lambda w\,\mathrm{d}w, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(w)\,\mathrm{sen}\,\lambda w\,\mathrm{d}w,$$

y, entonces

$$y(x,t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(w)\cos\lambda(x-w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\lambda.$$

De las identidades de producto de senos y cosenos queda

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(w)\left(\cos\lambda(x+vt-w) + \cos(\lambda x + vt - w)\right)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\lambda;$$

es decir

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt) + f(x-vt)\right). \qquad \square$$

Capítulo 6

Distribuciones

6.1 Introducción

En la dedicatoria del libro de Lighthill ([53]) aparece lo siguiente, en relación con el desarrollo del concepto de la delta de Dirac:

“to Paul Dirac who saw that it must be true,

Laurent Schwartz who proved it,

and George Temple who showed how simple it could be made”.

P. Dirac y R. Feynmann

Después de los trabajos de Heaviside (1895), Dirac (1925) y Van del Pol (1932), Laurent Schwartz publicó de 1945 a 1948 una serie de artículos, exponiendo una teoría coherente y completa de une nueva herramienta matemática: las distribuciones. Poco más tarde, Gelfand en Rusia se considera también co-responsable de la oficialización de la nueva teoría, elaborando una teoría de funciones generalizadas, que son una extensión de las distribuciones. La trayectoria seguida por los avances en los conceptos de función sigue el itinerario función-medida-distribución. En palabras de Lauren Schwartz, reivindicando el papel de las matemáticas en los hábitos entonces muy corrientes entre los físicos de utilizar un conjunto de reglas de cálculo simbólico para menejar la delta de Dirac y sus “derivadas”, “δ será una medida y no una función, δ será una distribución y no una medida”. La clave del nuevo concepto consiste en hacer uso de una caracterización indirecta para las nuevas “funciones” que incluya a los conceptos de “función” precedentes. Dicha caracterización se basa en determinar el efecto de los nuevos (y antiguos) objetos sobre familias de funciones que tienen buenas propiedades de continuidad y diferenciabilidad: las funciones de prueba.

Laurent Schwartz en su *Theorie des Distributions* ha desarrollado una teoría rigurosa, George Temple ha dado una versión de la teoría (funciones generalizadas) que parece ser mas inteligible a los estudiantes, esta es la forma en que aquí la abordaremos.

Definición 6.1 (Espacio S de las funciones rápidamente decrecientes) S es el conjunto de funciones $f \in C^\infty$ tales que

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right| |x|^l \to 0 \qquad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Nota 6.1 *El valor nulo del lımite anterior, significa que la función y todas sus derivadas tienen la propiedad de tender a cero mas rápido que cualquier crecimiento de las potencia de x, cuando $|x|$ es muy grande. Geometricamente la propiedad significa que la gráfica de y las gráficas de todas las derivadas, para $|x|$ muy grande se confunden con el eje x.*

Nota 6.2 *S es un espacio vectorial.*

Definición 6.2 (Funciones de prueba) Una *función de prueba* es una función $\phi(x) \in \mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto. La cerradura del conjunto de valores de x en los que $\phi(x) \neq 0$ se llama *soporte* de la función $\phi(x)$.

Definición 6.3 (Sucesión regular f_n) Una sucesión de funciones (f_n) se dice ser *regular* si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \varphi \, \mathrm{d}x$$

existe para toda $\varphi \in S$.

Definición 6.4 (Distribución) Una *distribución* F es una funcional lineal definida a través de la sucesión de funciones siguiente:

$$\mathrm{F}\,[\varphi] = \lim_{n\to\infty} \int f_n \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Nota 6.3 *Una distribución es una clase de equivalencia de sucesiones regulares.*

En 1926, el físico inglés P.A.M. Dirac (1902-1984), introdujo la “función” delta de Dirac, en conexión con sus estudios sobre Mecánica Cuántica. Realmente no se trata de una función en el sentido ordinario del termino, sino de una distribución.

El concepto de la “función” delta de Dirac, también llamada función impulso unitario, resulta un modelo útil en situaciones en las que, por ejemplo, tenemos un sistema mecánico sobre el que actúa una fuerza externa de gran magnitud durante un breve instante de tiempo. En el caso extremo en el que esta fuerza estuviese concentrada en un punto, vendría representada por la delta de Dirac.

Debido a que en muchas situaciones se busca la respuesta de un sistema cuando se le aplica una fuerza externa muy intensa pero durante un intervalo muy corto de tiempo, lo que se conoce como una fuerza impulsiva, se introducen para modelar estas situaciones el siguiente objeto matemático.

6.2 Sucesiones delta

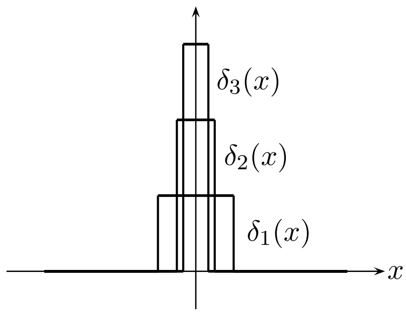
En esta sección la definición y propiedades de la delta de Dirac se establecen a partir del concepto de sucesión delta (ver [38], capítulo 4). La idea de una sucesión delta es que, aunque una función delta no puede existir, podemos encontrar una sucesión de funciones $\{\delta_n(x)\}$ que en el límite cuando $n \to \infty$ satisface la ecuación

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0)$$

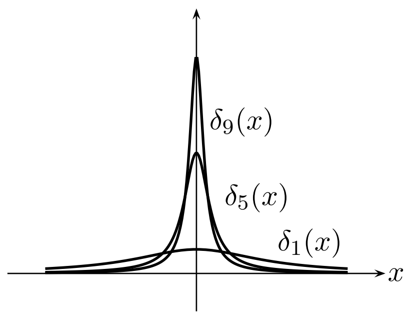
para toda función continua $\phi(x)$. Nótese que en definición de $\delta_n(x)$ de ninguna manera implica que el límite $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$ exista, pues, en general, no es permitido intercambiar los procesos de límite y de integración.

Hay muchos ejemplos de sucesiones delta; algunos de los mas sugestivos son los siguientes.

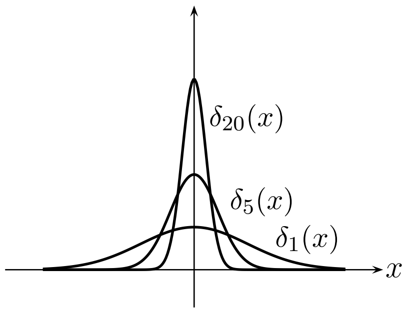
1. $\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad |x| \leqslant \dfrac{1}{2n} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \dfrac{1}{2n} \end{cases}$



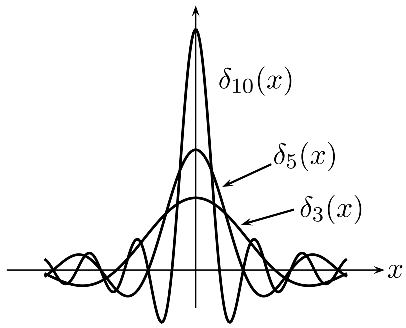
2. $\delta_n(x) = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{1}{1 + x^2 n^2}$



3. $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp\left(-nx^2\right)$



4. $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{x}$



La distribución delta a veces es considerada como una "función" impulso, y en ese caso su representación gráfica sería como se muestra en la figura 6.1.

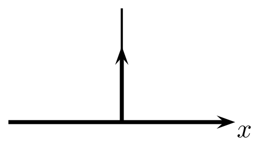


Figura 6.1: La "función" impulso

La función delta de Dirac no es una función en el sentido habitual, pero es un ejemplo de lo que se conoce como funciones generalizadas o distribuciones para las que existen las correspondientes nociones de derivada e integral. Manejadas con cuidado, las propiedades que mostraremos proporcionan resultados de contenido practico que no se pueden obtener por los métodos usuales, lo que hace de esta función una herramienta muy útil. Como tal, la función delta de Dirac es físicamente irrealizable, pero podemos aproximarla suficientemente bien de una manera que, además, nos permite entender de donde vienen sus propiedades.

Teorema 6.1 *Dada una función continua f*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0). \tag{6.1}$$

Nota 6.4 *Simbólicamente se escribe: $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$.*

Demostración. Sea F tal $F'(x) = f(x)$ y sea $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{si } x \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$

Entonces, por definición,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\,\delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}F(x)\Big|_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-F\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = F'(0) = f(0).
\end{aligned}$$

Entonces, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$. □

Corolario 6.1 *En particular*

$$\delta(x) * f(x) = f(x).$$

Nota 6.5 *La distribución δ es unidad respecto a la convolución.*

Teorema 6.2 *La delta de Dirac cumple*

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Demostración. Esta afirmación se puede probar de manera inmediata usando distintas sucesiones delta. Una manera es la siguiente:

$$\delta_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Otra sería:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n} \mathrm{e}^{ixt-\frac{|t|}{n}}\,\mathrm{d}t,$$

y una tercera sería:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\omega;$$

Esta última es una integral de Fourier; por tanto

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$ □

Teorema 6.3 *Un sistema de vectores ortonormales $\{\psi_i(x)\}$ es una base si y sólo si se cumple la siguiente relación:*

$$\delta(x-y) = \sum_i \psi_i^*(y)\psi_i(x).$$

Demostración. El conjunto $\{\psi_i(x)\}$ es una base si y sólo si todo vector $\psi(x)$ se puede escribir en la forma

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x),$$

donde las constantes c_i están dadas por $c_i = \int \psi_i^*(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y$. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_i c_i \psi_i(x) = \sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y \right) \psi_i(x) \\
&= \sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi(y) \right) \psi_i(x)\,\mathrm{d}y = \sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi_i(x) \right) \psi(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi_i(x) \right) = \delta(x-y). \qquad \square$$

Teorema 6.4 *Para la delta de Dirac se cumple que*

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Demostración. En el teorema 6.1 hacer el cambio de variable $y = ax$ primero para $a > 0$ y luego para $a < 0$. $\square$

Teorema 6.5 *Si H es la función de Heaviside, entonces*

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x);$$

de modo equivalente

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Demostración. Sea H_n la sucesión de Heaviside $H_n(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arctan(nx)$.

Entonces $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$; pero $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$ es una sucesión delta.

Por tanto $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x) = \delta(x)$. $\square$

Teorema 6.6 *Para la función signo se cumple que*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x) = \delta(x).$$

De manera equivalente

$$\operatorname{sgn}(x) = -1 + 2\int_{-\infty}^{x} \delta(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Demostración. Nótese que $\text{sgn}(x) = 2H(x) - 1$. □

Teorema 6.7 *(Paridad de la función Heaviside) La función de Heaviside satisface las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned} H(x) + H(-x) &= 1, \\ H(x) - H(-x) &= \text{sgn}(x). \end{aligned}$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de las definiciones. □

Teorema 6.8

$$\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = 2x\delta\left(x\right) + \text{sgn}(x).$$

Demostración. Nótese que

$$|x| = x\,\text{sgn}(x)$$

y, por tanto,

$$\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = x\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{sgn}(x) + \text{sgn}(x).$$ □

Teorema 6.9 *(de Dirichlet)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(ax\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,\text{sgn}(a).$$

Teorema 6.10 *(Derivada de la delta de Dirac)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'\left(x-a\right) f\left(x\right) \mathrm{d}x\ = -f'\left(a\right).$$

Demostración. Integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) \delta'\left(x\right) \mathrm{d}x = f\left(x\right) \delta\left(x\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(x\right) \delta\left(x\right) \mathrm{d}x;$$

por tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'\left(x-a\right)\ f\left(x\right) \mathrm{d}x = -f'\left(a\right).$$ □

Corolario 6.2 *Por inducción se cumple que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}\left(x\right) f\left(x\right) \mathrm{d}x = \left(-1\right)^n f^{(n)}\left(0\right).$$

Definición 6.5 (Derivada de una distribución) Si F es una distribución y ϕ es una función de prueba, entonces la *derivada de* F, denotada con F', se define de manera tal que se cumple lo siguiente:

$$\langle\ \text{F}', \phi\rangle = -\ \langle\ \text{F}, \phi'\rangle.$$

Teorema 6.11 *Si una función f se puede escribir en la forma*

$$f(x) = f_s(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k H(x - x_k),$$

entonces f' existe excepto posiblemente en los puntos (de discontinuidad simple) x_k; además,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}x} + \sum_{k=1}^{n} f_k \delta(x - x_k).$$

A resultado siguiente muestra una manera en la que la transformada de Fourier se relaciona con distribuciones.

Teorema 6.12 *(Deltas con periodo 2π)*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(inx).$$

Teorema 6.13 *(Deltas con periodo L)*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mL) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi n}{L} ix}.$$

Teorema 6.14

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k. \tag{6.2}$$

Demostración. Considere la sucesión delta siguiente:

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|} \cos kx\,\mathrm{d}k.$$

Como $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \delta_\varepsilon(x)$,
se sigue que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k \cos(kx)\,\mathrm{d}k. \qquad \square$$

Nota 6.6 *En tres dimensiones, el teorema anterior establece que $\delta(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \iiint \mathrm{e}^{i\langle k, x\rangle}\,\mathrm{d}k$.*

Teorema 6.15 *Supongamos que $0 < x < L$. Sean $\phi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ y $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$. Entonces,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n(x') = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta\left(x - x'\right),$$

$$\frac{1}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(x') = \frac{2}{L}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} = \delta\left(x - x'\right).$$

Teorema 6.16 *(Propiedad de completitud de las exponenciales)*

$$\delta\left(x - x'\right) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi n}{L} i(x-x')}.$$

De manera equivalente

$$\delta\left(x - x'\right) = \frac{1}{L}\left(1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\left(x - x'\right)\right)\right).$$

Demostración. Tomemos $\delta_n\left(x\right) = \begin{cases} n & |x| \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & |x| > \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$

Entonces su serie de Fourier (de periodo $2L$) es

$$\delta_n\left(x\right) = \frac{1}{2L} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{m\pi} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{nL}\cos\frac{m\pi}{L}x.$$

Haciendo $n \to \infty$

$$\delta\left(x\right) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{L}x.$$ □

Corolario 6.3 *Se cumple*

$$\delta'\left(x\right) = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k.$$

6.3 Transformada de Fourier

Presentamos a continuación la transformada de Fourier de algunas distribuciones, así como algunas consecuencias importantes.

Teorema 6.17 *(Transformada de Fourier de la función de Heaviside)*

$$\mathcal{F}[H(x)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.$$

Teorema 6.18 *(Transformada de Fourier para la delta de Dirac)*

$$\mathcal{F}\left[\delta\left(t - a\right)\right] = \mathrm{e}^{-ia\omega}.$$

Demostración. $\mathcal{F}\left[\delta\left(t-a\right)\right]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it\omega}\,\delta\left(t-a\right)\mathrm{d}t$. Entonces

$$\mathcal{F}\left[\delta\left(t-a\right)\right]=\mathrm{e}^{-ia\omega}\,. \qquad \square$$

Corolario 6.4 $\mathcal{F}\left[\delta\left(t\right)\right]=1$.

Teorema 6.19 *(Completez de las exponenciales)*

$$\delta\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Demostración. De

$$\delta\left(t\right)=\mathcal{F}^{-1}\left[\delta\left(\omega\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-it\omega}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\omega.$$

se sigue que

$$\delta\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it\omega}\,\mathrm{d}\omega. \qquad \square$$

Teorema 6.20 *(Transformada de Fourier de la derivada de la delta de Dirac)*

$$\mathcal{F}\left[\delta'\left(t-a\right)\right]=\frac{1}{2\pi}i\omega\,\mathrm{e}^{ia\omega}\,.$$

Teorema 6.21 *1. Transformada de la función exponencial*

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{bx}\right]=2\pi\delta\left(s-ib\right). \tag{6.3}$$

2. Transformada de las funciones circulares

$$\mathcal{F}\left[\operatorname{sen}bx\right]=i\pi\left[\delta\left(s-b\right)-\delta\left(s+b\right)\right]. \tag{6.4}$$

$$\mathcal{F}\left[\cos bx\right]=\pi\left[\delta\left(s-b\right)+\delta\left(s+b\right)\right]. \tag{6.5}$$

3. Transformada de las funciones hiperbólicas

$$\mathcal{F}\left[\operatorname{senh}bx\right]=\pi\left[\delta\left(s-ib\right)-\delta\left(s+ib\right)\right]. \tag{6.6}$$

$$\mathcal{F}\left[\cosh bx\right]=\pi\left[\delta\left(s-ib\right)+\delta\left(s+ib\right)\right]. \tag{6.7}$$

A continuación, y para terminar este capítulo, presentamos algunas funciones que tienen relación con la delta de Dirac y con la función de Heaviside y que surgen en aplicaciones tanto en física como en ingeniería.

Definición 6.6 (Función pulso) La función *pulso* se denota con $\Pi(x)$ y se define de la manera siguiente:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| > \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Nota 6.7 *La función pulso se puede escribir en términos de la función selectora (ver definición* 5.2*):* $\Pi(x) = \chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$, χ *es la función selectora.*

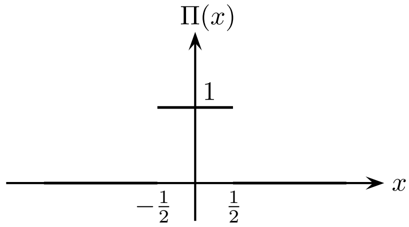


Figura 6.2: La función pulso $\Pi(x)$.

Nota 6.8 *La función pulso también se puede escribir en términos de la función de Heaviside:*

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Nota 6.9 *La función* $f(x) = h\Pi\left(\dfrac{x-c}{b}\right)$ *representa un pulso en* c *de altura* h *y ancho* b.

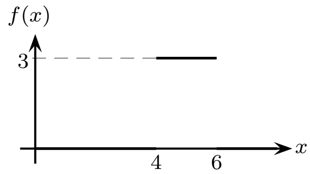


Figura 6.3: La función $f(x) = 3\Pi\left(\dfrac{x-5}{2}\right)$

Definición 6.7 (Función Si) La función *Si(x)* (por las siglas de su nombre en Inglés "Sine Integral") se define de la manera siguiente:

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du.$$

La gráfica de la función $\operatorname{Si}(x)$ se muestra en la figura 6.4.

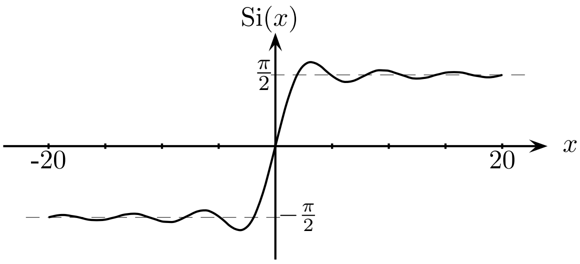


Figura 6.4: La función Si(x)

Definición 6.8 (Función sinc) La función sinc(x) (así llamada por una contracción de su nombre original en latín "sinus cardinalis") se define mediante

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}.$$

Su gráfica se muestra en la figura 6.5.

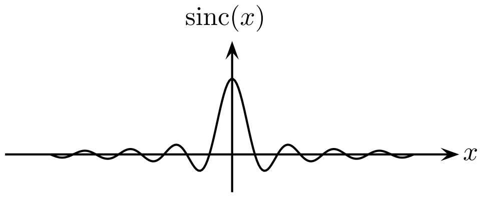


Figura 6.5: La función sinc(x)

Teorema 6.22 *Para la función sinc se cumple que*

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\operatorname{Si}(\pi x)}{\pi}\right); \tag{6.8}$$

$$H(x) * \operatorname{sinc}(x) = \int_{-\infty}^{x} \operatorname{sinc}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Si}(\pi x)}{\pi}; \tag{6.9}$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sinc}(x)] = \Pi(\omega). \tag{6.10}$$

Teorema 6.23 *Para la función signo (ver definición* 5.4*) se cumple que*

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -i\pi \operatorname{sgn}(\omega), \tag{6.11}$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] = \frac{2}{i\omega}. \tag{6.12}$$

Definición 6.9 (Función triangular)

$$/\!\backslash\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \\ 1-|x| & \text{si} \quad |x| < 1. \end{cases} \tag{6.13}$$

Teorema 6.24 *(Convolución de pulsos)*

$$/\!\backslash\,(x) = \Pi\,(x) * \Pi\,(x)\,. \tag{6.14}$$

Teorema 6.25 *(Derivada de la función triangular)*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} /\!\backslash\,(x) = -\Pi\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sgn}(x). \tag{6.15}$$

Definición 6.10 (Pozo infinito)

$$\sqcup\,(x) = \frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Definición 6.11 (Escalón infinito)

$$\mathrm{I}_1\,(x) = \frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Definición 6.12 (Símbolo de muestreo)

$$\mathrm{III}\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\,(x-n)\,.$$

Teorema 6.26 *Para la función muestreo se cumple que*

$$III(x) * f\,(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f\,(x-n)\,,$$

$$III(ax) = \frac{1}{|a|}\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(x-\frac{n}{a}\right),$$

$$\mathcal{F}\,(III(x)) = III(\omega)\,,$$

$$\lceil x \rceil' = III(x)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lceil x \rceil\, H\,(x)\right) = III(x)\, H\,(x) - \frac{1}{2}\delta\,(x)\,.$$

Definición 6.13 (Función *floor*) Se llama *función floor* a la función del mayor entero menor o igual a x. Se denota $\lfloor x \rfloor$. Su gráfica aparece en la figura 6.6.

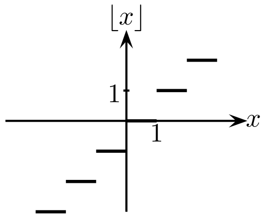


Figura 6.6: La función $\lfloor x \rfloor$

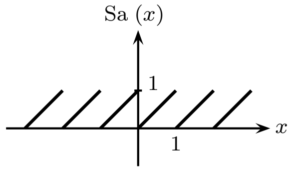


Figura 6.7: La función Sa(x)

Definición 6.14 (Función sierra)

$$\mathrm{Sa}\,(x) = \lceil x \rceil - x + \frac{1}{2},$$

donde $\lceil x \rceil$ es la función *ceiling.* La gráfica de la función Sa (x) se muestra en la figura 6.7.

Teorema 6.27 *Para la funcion sierra se cumple que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Sa}\,(x) = III\,(x) - 1;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Sa}\,(x)\,H\,(x)\right) = \left(III\,(x) - 1\right)H\,(x)\,.$$

Capítulo 7

Transformada de Laplace

En esta sección introduciremos y estudiaremos la transformada de Laplace, desarrollaremos algunas de sus propiedades mas básicas y útiles. Después veremos algunas aplicaciones.

P. S. de Laplace

7.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 7.1 (Transformada de Laplace)

Sea f una funcion definida para $t \geqslant 0$. Se dice que la integral

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f\left(t\right) \mathrm{d}t$$

se llama *la transformada de Laplace* de f siempre que la integral converja.

Teorema 7.1 *Si f es una función continua por pedazos de orden exponencial, entonces existe $\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = F\left(s\right)$, $s > \alpha$*

Nota 7.1 $f\left(t\right) = t^{-1/2} \notin PC[0, +\infty]$ *sin embargo su transformada de Laplace si existe.*

Teorema 7.2 *La transformada de Laplace es un operador lineal.*

Demostración. Se sigue directamente de las propiedades de la integral. $\square$

La transformada de Laplace de algunas funciones usuales se muestra en la siguiente tabla.

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
$t^{1/2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
t^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha>-1$

Teorema 7.3 *Teoremas de traslación.*

TTL1: *Si* $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ *entonces*

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at}\,f(t)\right)=F(s-a)\,;$$

TTL2: *Si* $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ *y* $a>0$ *entonces*

$$\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))=\mathrm{e}^{-as}\,F(s).$$

Teorema 7.4 *(Teorema de Lerch)*

$$\mathcal{L}[f_1(t)]=\mathcal{L}[f_2(t)] \iff f_1(t)-f_2(t)=N(t)$$

con $\int_0^{t_0} N(t)\,\mathrm{d}t=0$; *es decir es una* función nula.

La utilización práctica de la transformada de Laplace requiere no sólo el cálculo de la misma a partir de una función dada, sino también el problema inverso, es decir, encontrar una función f conocida su transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$.

Definición 7.2 (Transformada inversa de Laplace) Si $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ entonces llamaremos *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$ a $f(t)$ y la denotaremos

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\,.$$

Teorema 7.5 *Dada* $F(s)$, *su transformada inversa de Laplace esta dada por*

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\mathrm{e}^{st}\,F(s)\,\mathrm{d}s$$

con $\mathrm{Re}(s)\geqslant\gamma$; *todas las singularidades de* F *están a la izquierda de* γ

Teorema 7.6 *Sea H la función de Heaviside, entonces*

$$\mathcal{L}\left[H\left(t-a\right)\right]=\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[H\left(t-a\right)\right] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,H(t-a)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a \mathrm{e}^{-st}\,0\,\mathrm{d}t+\int_a^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_a^\infty=\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}, \qquad s>0.\end{aligned}$$

□

Teorema 7.7

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\right]=\frac{1}{s-a} \tag{7.1}$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(t-a\right)H\left(t-a\right)\right]=\mathrm{e}^{-as}\,F\left(s\right). \tag{7.2}$$

Teorema 7.8 *(Transformada de Laplace de la convolución de funciones)*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f\left(\tau\right)g\left(t-\tau\right)\mathrm{d}\tau\right]= F\left(s\right)G\left(s\right). \tag{7.3}$$

El teorema anterior se puede enunciar da la siguiente manera equivalente:

Teorema 7.9 *(Teorema de Faltung)*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\left(s\right)G\left(s\right)\right]=f\left(t\right)*g\left(t\right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(f\left(t\right)*g\left(t\right)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-st}\,f\left(t-u\right)g\left(u\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\ &= \iint_{R_1}\mathrm{e}^{-st}\,f\left(t-u\right)g\left(u\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

con R_1 limitado por $u=0,u=t$. Haciendo el cambio de variables $\tau=t-u$, $\sigma=u$ y denotando con R_2 el cuadrante positivo del plano τ-σ tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] &= \iint_{R_2}\mathrm{e}^{-s(\tau+\sigma)}\,f\left(\tau\right)g\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau}\,f\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\int_0^t \mathrm{e}^{-s\sigma}\,g\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\\ &= F\left(s\right)G\left(s\right).\end{aligned}$$

Las integrales que hemos considerado son absolutamente convergentes para $s>\alpha$. □

Teorema 7.10 *(Transformada de Laplace de la n-ésima derivada de una función)*

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(t)\right] - f^{(n-1)}(0).$$

Corolario 7.1

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{7.4}$$

Demostración. Por inducción. □

Nota 7.2 *Este teorema permite decir que al aplicar la transformada de Laplace podemos reemplazar la derivación respecto a t por la multiplicación por s, lo que permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica.*

Teorema 7.11 *Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, entonces*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right] = \frac{F(s)}{s}. \tag{7.5}$$

Demostración. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right] &= -\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st}\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{F(s)}{s}. \end{aligned}$$ □

Nota 7.3 *Este teorema se puede demostrar también tomado $g(t) = 1$ en el teorema de la transformada de una convolución.*

Teorema 7.12

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s). \tag{7.6}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{e}^{-st} f(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathcal{L}\left[t f(t)\right]. \end{aligned}$$

Por inducción se obtiene la conclusión del teorema. □

Teorema 7.13 *Sea f una función tal que existe $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Si existe $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(t)}{t}$ entonces*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u. \tag{7.7}$$

Demostración. Sea g tal que $f(t) = tg(t)$. Entonces

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[tg(t)] = -\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}.$$

Integrando:

$$G(u)\Big|_{\infty}^{s} = -\int_{\infty}^{s} F(u)\,\mathrm{d}u = \int_s^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pero $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 0$. Entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u. \qquad \square$$

Teorema 7.14 *Si f es una función continua por pedazos y de orden exponencial α, entonces*

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f(t)] = 0.$$

Demostración. Por hipótesis se tiene que $|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad t > t_0$. Entonces $\mathrm{e}^{-st}|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}$. Por la monotonía de la integral se sigue que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} M\,\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-\alpha}, \quad s > \alpha.$$

Por otro lado

$$|\mathcal{L}[f(t)]| = \left|\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Entonces $|\mathcal{L}[f(t)]| \leqslant \dfrac{M}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$, de donde se sigue que $\lim\limits_{s\to\infty} |\mathcal{L}[f(t)]| = 0$. $\square$

Teorema 7.15 *Si f es una función periódica de período T, entonces*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}} \int_0^{T} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. $\mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{T} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Haciendo $t = u + T$ en la última integral:

$$\int_T^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-sT} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-su} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Entonces

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \int_0^T \mathrm{e}^{-st}\, f\left(t\right) \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-sT}\, \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right],$$

y de aquí se sigue el teorema. □

Teorema 7.16 *(Transformada de Laplace de la delta de Dirac)*

$$\mathcal{L}\left[\delta\left(t-a\right)\right] = \mathrm{e}^{-as}, \qquad \textit{con} \qquad a \geqslant 0.$$

Demostración. $\mathcal{L}\left[\delta\left(t-a\right)\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, \delta\left(t-a\right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\, \delta\left(t-a\right) \mathrm{d}t;$
de aquí se sigue que $\mathcal{L}\left[\delta\left(t-a\right)\right] = \mathrm{e}^{-as}$. □

Corolario 7.2

$$\mathcal{L}\left[\delta\left(t\right)\right] = 1.$$

7.2 Algunas Aplicaciones

Problema 7.1 *Determinar* $\mathcal{L}\left[t \operatorname{sen} bt\right]$.

Solución. Partiendo de $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} bt\right] = F\left(s\right) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$, encontramos que

$$\frac{dF}{ds} = -\frac{2bs}{\left(s^2+b^2\right)^2}.$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\left[t \operatorname{sen} bt\right] = -\frac{2bs}{\left(s^2+b^2\right)^2}.$$

Problema 7.2 *Demostrar que* $F\left(s\right) = s^2$ *no es la transformada de Laplace de función alguna.*

Solución. Si existiera una función f tal que $\mathcal{L}\left[f\right] = s^2$ debería ocurrir que $\lim_{s\to\infty} s^2 = 0$. Esto no sucede por lo tanto no existe tal función.

Problema 7.3 *Calcular* $\mathcal{L}\left[\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right]$.

Solución. $\mathcal{L}\left[\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right] = \displaystyle\int_s^\infty \frac{1}{1+u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$

Resolvamos una ecuación diferencial con coeficientes variables y condicionas iniciales.

Problema 7.4 *Resolver la ecuación diferencial* $y''+2ty-4y=1$ *con condiciones iniciales* $y(0)=y'(0)=0$.

Solución. Sabemos que

$$\mathcal{L}[ty'] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y'] = -\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[y]-y(0)) = -\frac{d}{ds}(sY(s)) = -sY'(s)-Y(s)$$

y que

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s).$$

Entonces, sustituyendo

$$Y'(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)Y(s) = -\frac{1}{2s^2}.$$

La solución de esta ecuación lineal en $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}+\frac{c}{s^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}s^2}.$$

La constante de integración c se determina al requerir que $Y(s)\to 0$ si $s\to\infty$. Se obtiene que $c=0$, y entonces

$$Y(s) = \frac{1}{s^3},$$

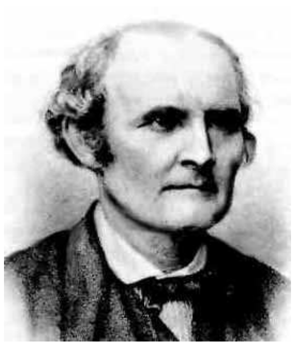
de donde se concluye que

$$y(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Apéndice A

Desarrollo histórico, matemático y biográfico

1 Cayley



Cayley

El matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) introduce en 1841 la actual notación de determinante con las líneas verticales, y algunos años más tarde define y da las principales propiedades del concepto de matriz. El concepto de determinante era ya suficientemente conocido y aparece en las obras de Lagrange, Gauss, Cauchy, Galois o Jacobi, entre otros. Por otra parte, Sylvester, gran amigo de Cayley, usa por primera vez la palabra *matriz* para designar un cuadro de números con características distintas al determinante, pero es Cayley quien desarrolla la idea como una entidad diferente, define la matriz unidad, la inversa y las operaciones de suma y producto. En un artículo publicado en 1855 dice: "no obtuve la noción de matriz a partir de los cuaterniones de Hamilton, fue directamente de la de determinante, o como una forma conveniente de expresar las ecuaciones: $x' = ax + by, y' = cx + dy$." Analiza también las razones de que, si bien la idea de matriz precede a la determinante, cronológicamente el orden en el que aparecieron ambos conceptos fue el contrario.

Arthur Cayley es uno de los matemáticos más prolíficos junto con Euler y Cauchy. Sus obras se reúnen en 13 tomos de 600 páginas cada uno y en los que se contienen 966 artículos. Había nacido en Richmond, Surrey, y procedía de una familia de comerciantes adinerados; sus maestros detectaron pronto sus aptitudes y convencieron a su padre, que se oponía a que siguiera una carrera científica, para que le permitiera ingresar en el Trinity College de Cambridge, donde continuó después como profesor hasta su renuncia, causada al imponérsele la condición de hacerse clérigo para poder continuar en la docencia. Se dedica entonces a la abogacía aunque sin abandonar sus intereses matemáticos, los asuntos legales le aburren y tras catorce años en los tribunales vuelve a Cambridge como profesor. Cayley no solo fue un gran matemático, sino que también era una persona de amplia cultura a la que le gustaba viajar y escalar montañas.

El historiador y matemático Eric Temple Bell escribe: "Con su amor por la buena literatura, el viajar, la pintura y la arquitectura, así como una profunda comprensión de las bellezas naturales, tuvo más que suficiente para evitar que degenerara en el "matemático simple" de la literatura convencional, escrita, en su mayor parte, por gente que puede haber conocido por supuesto algún pedante profesor de matemáticas, pero que nunca contempló en su vida un matemático real de carne y hueso".

A sus trabajos sobre las matrices hay que añadir, entre los logros que más influyeron en matemáticos posteriores, la teoría de los invariantes algebraicos y la idea de geometría n-dimensional. Además, en 1849 introduce la noción de *grupo abstracto,* aunque en aquel momento pasa desapercibida y hay que esperar unos años hasta que el alemán Dedekind da una definición de grupo finito.

En bastantes artículos de Cayley aparece también la inspiración de otro eminente matemático inglés, J. J. Sylvester (1814-1897), con el que mantuvo una excelente relación durante toda su vida.

Era este último un personaje singular, que podría servir de ejemplo al tópico de sabio distraído, bromeaba con el apodo de *Adán* que algunos le dedicaban: "Quizá pueda, sin inmodestia, reclamar para mí mismo la denominación de Adán matemático, porque creo que he dado más nombres (que han pasado a ser de uso general) a criaturas de la razón matemática que todos los restantes matemáticos de la época juntos". Cayley y Sylvester ejercieron también su influencia en otros aspectos no menos relevantes, como por ejemplo ayudando a cambiar la mentalidad medieval de la Universidad de Cambridge en lo que se refiere a admitir como alumnos a mujeres, una de las primeras y más eminentes discípulas de Sylvester fue Florence Nightingale, quien años después destacaría por su aportación a las reformas hospitalarias y en la mejora de la atención médica en general.

2 Hilbert


D. Hilbert

David Hilbert nació el 23 Enero de 1862 en Königsberg (Prusia) y murió el 14 Febrero de 1943 en Göttingen (Alemania).

El nombre de Hilbert ocupa un lugar muy especial en el imaginario colectivo de los matemáticos. Sin duda se trata del matemático más famoso del siglo XX, a lo que contribuyeron de manera muy especial su aportación a la configuración de los métodos axiomáticos actuales, sus profundos resultados en álgebra, teoría de números, geometría y teoría de funciones, los celebérrimos "problemas matemáticos" que dejó planteados en 1900, y las venturas y desventuras de sus intentos de resolver la cuestión de los fundamentos de la matemática. En el año de su muerte, se le celebraba como aquel "a quien el mundo consideró durante las últimas décadas como el más grande matemático vivo".

David Hilbert había nacido en Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia), ciudad de la Prusia oriental situada junto al Báltico. Su ciudad natal era célebre por varias razones, entre ellas haber sido el hogar del famosísimo filósofo Kant, haber dado lugar al problema de los siete puentes que estudió Euler, y haber albergado una importante escuela de físicos y matemáticos que crearon hacia 1830 Jacobi y Neumann. Hijo y nieto de jueces, Hilbert pasó en su ciudad natal los primeros 33 años de vida, y dentro de los estrechos límites de esa ciudad tuvo lugar su desarrollo intelectual. Pero el alto nivel que habían alcanzado las matemáticas en Alemania, unido a una afortunada coincidencia con otros grandes matemáticos, permitieron que "los largos años de seguridad en Königsberg" se convirtieran en "un tiempo de maduración continua".

En la universidad, Hilbert tuvo la fortuna de asistir a las lecciones de Heinrich Weber (1842–1913) sobre funciones elípticas, teoría de números y teoría de invariantes. Weber era un matemático polifacético, que también realizó contribuciones a la física matemática, y que había editado las obras de Riemann. Era además amigo íntimo de Dedekind, con quien publicó en 1882 un célebre trabajo sobre curvas algebraicas, ofreciendo una fundamentación al modo de la teoría de ideales en cuerpos de números, que abría el camino hacia la geometría algebraica del siglo XX. La influencia de Weber, y a través de él la tradición de Gauss, Riemann y Dedekind, sería decisiva para Hilbert. Menos importante debió ser la influencia de Lindemann, quien pese a ser el director de tesis de Hilbert, y haber demostrado la trascendencia de π, no era un matemático de gran talla.

Pero lo que sí resultó decisivo fue la amistad con Adolf Hurwitz (1859–1919) y Hermann Minkowski (1864–1909), el primero llegado en 1884 como profesor asistente (*Privatdozent*), el segundo aún estudiante como Hilbert pero en Bonn, si bien, al haber nacido en Königsberg, pasaba allí las vacaciones. Así nos lo cuenta: "pronto, aunque todavía era estudiante, me vi invitado por Hurwitz a tratar con él de temas científicos, y tuve la fortuna de llegar así a conocer en su presencia, de la manera menos fatigosa y más interesante, los modos de pensar de aquellas dos escuelas que se enfrentaban entonces y que sin embargo se complementaban una a otra tan magníficamente: la escuela geométrica de Klein y la escuela algebraico-analítica de Berlín. Estas interacciones se hicieron más estimulantes aún, dado que también el genial H. Minkowski, de quien yo ya era amigo . . . , se unió a nuestro círculo. En innumerables paseos, que por momentos continuaban día tras día, tuvimos ocasión a lo largo de ocho años de repasar todos los rincones del saber matemático, y Hurwitz, con sus conocimientos tan extensos y polifacéticos como firmes y bien ordenados, nos servía siempre como guía."

Hurwitz había estudiado en Berlín, logrando dominar no sólo los métodos de Weierstrass, sino también las algo oscuras ideas de Kronecker, pero sobre todo había sido discípulo de Felix Klein, quien pretendía tomar el relevo de Riemann, duramente criticado por los berlineses. Hay que notar que las ideas de Riemann "no eran todavía, como hoy, bien común, y su conocimiento implicaba en cierto modo situarse en una clase superior de matemáticos". El contraste entre ambos estilos matemáticos enseñó a Hilbert lecciones fundamentales para su futura carrera, si bien él se comprometió siempre con el enfoque más moderno y abstracto: el de Riemann, Dedekind y Cantor.

En 1886 Hilbert se convirtió en *Privatdozent,* dedicándose a publicar en el campo de la teoría de invariantes. En 1892 fue nombrado profesor extraordinario como sucesor de Hurwitz (ahora en Zurich), y el año siguiente obtuvo por fin el puesto de Professor, equivalente a nuestro catedrático. Pero sólo permanecería en su ciudad natal hasta 1895, momento clave en que Felix Klein logró que fuera nombrado catedrático en la Universidad de Göttingen, donde permanecería el resto de su vida. Por esta época trabajaba sobre teoría de números algebraicos, campo en el que probablemente realizó sus aportaciones más profundas.

Como vemos, una ojeada superficial a la actividad matemática de Hilbert en estos años clave, de 1886 hasta 1899, podría dar la impresión de un investigador muy bueno, pero muy especializado. Sería quizá difícil prever lo que iba a venir, el ascenso de Hilbert a la cumbre del mundo matemático y la convicción general de que fue uno de los últimos matemáticos universales, que dominó todos los campos de su disciplina. Pero los historiadores han mostrado cómo ya en los años de Königsberg había ido dando cursos sobre todos los campos de la matemática, incluyendo la geometría y la teoría de funciones. Su sólida formación generalista estaba bien avanzada, y también su gran interés por los fundamentos. En 1890, Klein recibía uno de sus artículos sobre teoría de invariantes con el comentario: "no tengo dudas de que es el artículo más importante sobre álgebra general que han publicado los *Mathematische Annalen* hasta la fecha". Y el mismo año, le describía en carta al poderosísimo ministro prusiano de educación como la estrella ascendente entre los jóvenes matemáticos alemanes. El hecho de que, en 1893, la DMV (*Deutsche Mathematiker Vereinigung*) le encargase a Hilbert –junto con el mundialmente reconocido Minkowski– escribir un informe sobre la teoría de números, es buena muestra del alto concepto que se tenía de sus capacidades.

Teniendo en cuenta, pues, que la actividad de Hilbert iba más allá de lo que muestran estrictamente sus publicaciones, se puede sin embargo (al modo de Weyl) examinar sus contribuciones escritas dividiéndolas en períodos. Hasta 1893, trabajos sobre formas algebraicas y ante todo invariantes algebraicos, de 1893 a 1899, teoría de números algebraicos, publicando en 1897 el célebre *Zahlbericht,* entre 1899 y 1903, trabajos sobre fundamentos de la geometría que marcaron el estilo axiomático moderno, entre 1904 y 1912, diversos problemas de análisis: el principio de Dirichlet, cálculo de variaciones, ecuaciones integrales, de 1909 a 1916, problemas de física teórica, incluyendo su concurrencia con Einstein, y por fin, desde 1918, contribuciones a los fundamentos de la matemática.

Las primeras contribuciones importantes de Hilbert fueron sobre invariantes algebraicos. Hasta el momento Paul Gordan había establecido, sobre una base algorítmica de complicados cálculos, que existe una base finita para los invariantes y covariantes de las formas binarias. En 1888 Hilbert abordó la cuestión con un enfoque abstracto, conjuntista, estableciendo teoremas de existencia generales a la manera de Dedekind. Pronto logró resolver el caso general para formas de n variables, estableciendo el teorema de la base finita. A la vista de su demostración, Gordan le escribió a Klein que ésta no satisfacía "los más ínfimos requisitos que hacemos a una demostración matemática". Síntoma de la división profunda que separaba entonces a los constructivistas, como decimos hoy, de los matemáticos de tendencia moderna. Klein debió quedar muy impresionado cuando Hilbert se negó a cambiar una coma en su artículo, diciendo que a falta de una refutación concluyente, aquello era "mi última palabra".

Al resolver problemas centrales de la teoría de invariantes, la obra de Hilbert contribuyó a que ésta perdiera parte del atractivo y la importancia central que había tenido. Él mismo nunca volvió al tema. Algo distinto fue su efecto sobre la teoría de números algebraicos: el encargo que le hizo la DMV dio lugar a un trabajo muy sistemático y profundo, su Informe sobre la teoría de los números algebraicos. Más bien se trataba de una impresionante sistematización de los resultados previos de Dedekind y Kronecker, aumentada por nuevos resultados, especialmente sobre cuerpos de Galois. En artículos publicados los años siguientes (1899, 1902), estas nuevas ideas condujeron a los resultados más originales de Hilbert en este campo, dando inicio a la teoría de cuerpos de clases.

El *Zahlbericht* se convirtió en la obra de referencia para los especialistas por muchos años, tal como esperaba Minkowski, relegó los trabajos de Dedekind y Kronecker a un segundo plano. De todos modos, su exposición no era tan moderna como la del primero, y en los años 1920, precisamente en el Göttingen que lideraba Hilbert, Emmy Noether capitaneó un movimiento de vuelta a Dedekind. Eso sí, la exposición de Hilbert resultaba muy tersa y elegante para los matemáticos de 1900, y sus métodos estaban cuidadosamente elegidos tanto para resolver problemas particulares como para admitir generalizaciones. Era la marca de la casa, de su muy especial estilo de trabajo.

A propósito de Noether, hay que mencionar que Hilbert fue un hombre progresista, "singularmente libre de prejuicios nacionales y raciales" como demostró durante las guerras, y avanzado en cuanto a la integración de la mujer. Cuando su propuesta de habilitar a Emmy Noether como *Privatdozent* tropezó con una fuerte oposición, y algunos preguntaban cómo una mujer iba a estar en las reuniones de Facultad, se dice que hizo el célebre comentario: "Caballeros, la Facultad no es ningún establecimiento de baños".

En el *Zahlbericht,* Hilbert enfatizaba que la aritmética había abierto caminos fundamentales en el campo del álgebra y la teoría de funciones, para señalar –con referencias a Dedekind, Weierstrass y Cantor– que "en general, el desarrollo moderno de la matemática pura ha sucedido ante todo bajo el signo del número". Y acto seguido hablaba también de una "aritmetización de la geometría", orientada a un desarrollo puramente lógico del tema, a estudiar esa rama de la matemática siguiendo el modelo de la teoría de números en cuanto a rigor y compleción en los fundamentos, y a la introducción directa del número en la geometría. Puede verse aquí la promesa de escribir los célebres Fundamentos de la Geometría (1899), que aparecieron con ocasión de una ceremonia en Göttingen de homenaje a Gauss

La obra de Hilbert sobre geometría se convirtió en un modelo para el trabajo con sistemas axiomáticos informales que iba a ser característico de la matemática del siglo XX. Tampoco en este caso se trataba de una novedad absoluta: Hilbert construía sobre las aportaciones previas acerca de geometría proyectiva (von Staudt, Reye, Pasch, H. Wiener, Schur), existían los trabajos de la escuela italiana (Pieri, Veronese) que sin embargo no influyeron en él demasiado, y además es importante tener en cuenta los modelos propiamente aritméticos (especialmente Dedekind) que influyen en su obra. Hilbert presentó un sistema de axiomas que inmediatamente dejaba obsoleto a Euclides, y aritmetizó la geometría por medio de los "cálculos de segmentos" basados en los teoremas fundamentales de Pascal y Desargues. Esto le abría el camino a toda una panoplia de geometrías, incluyendo también geometrías no arquimedianas.

Hilbert no sólo propuso la idea de que los axiomas admitían interpretaciones múltiples, sino que desplegó su habilidad matemática manejando un gran número de modelos (muchos puramente aritméticos) que servían para investigar propiedades del sistema de axiomas. En esta época, le interesaban especialmente cuestiones acerca de la independencia entre los axiomas, y los cuerpos teóricos que es posible erigir sobre ciertos grupos de axiomas. Por estas razones su obra serviría como un modelo esencial para la investigación de fundamentos y la práctica axiomática en las décadas siguientes.

Otro hito fundamental, y una de las razones del aura legendaria que ha tenido Hilbert, fue su conferencia sobre "Problemas matemáticos" en el Congreso Internacional de París, en 1900. Por cierto, no era una conferencia plenaria, aunque con posterioridad haya aparecido como el discurso más influyente de aquel congreso, tampoco parece haber despertado entusiasmo de un modo inmediato. Pero sin duda Hilbert fue muy ambicioso al afrontar el reto de "levantar el velo tras el que se oculta el futuro" de las matemáticas, y estuvo a la altura de la ocasión, con lo que de paso logró influir en ese futuro. En París sólo hubo tiempo para discutir 10 de sus veintitrés problemas: la hipótesis del continuo de Cantor, la cuestión de la consistencia para la aritmética de los reales, la axiomatización de teorías físicas, varios problemas de teoría de números, incluyendo la conjetura de Riemann, una cuestión sobre curvas y superficies definidas por ecuaciones polinómicas, las soluciones analíticas de los problemas regulares en cálculo de variaciones, la existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias que correspondan a grupos monodrómicos dados, y una cuestión de Poincaré sobre la parametrización de curvas algebraicas por medio de funciones automorfas.

Ahora bien, ya que hemos mencionado el mito Hilbert, conviene analizarlo un poco, y nada mejor que citar a uno de sus discípulos más aventajados, Hermann Weyl: "Hilbert imprimió el sello de su espíritu sobre toda una era de las matemáticas. Y sin embargo no creo que baste su investigación para explicar el brillo que irradiaba de él, ni su tremenda influencia. Gauss y Riemann, por mencionar otros dos hombres de Göttingen, fueron matemáticos de más talla que Hilbert, y sin embargo su impacto inmediato sobre sus contemporáneos fue indudablemente menor. No hay duda de que esto se debe en parte a las cambiantes condiciones de los tiempos, pero probablemente fue más determinante el carácter de estos hombres. Hilbert estaba lleno de entusiasmo por la vida, por relacionarse con otra gente, y por disfrutar intercambiando ideas científicas. Tenía su propia y libre manera de aprender y enseñar ... a través de conversaciones ... en largas caminatas a través de los bosques que rodean Göttingen, o, en los días lluviosos, como peripatéticos, en el paseo cubierto de su jardín. Su optimismo, su pasión espiritual y su fe inquebrantable en el valor de la ciencia eran irresistiblemente contagiosos".

Esta pasión y ese optimismo se reflejan también en la florida retórica de sus discursos, por ejemplo en el célebre "wir müssen wissen, wir werden wissen" (debemos saber, llegaremos a saber), o en sus referencias al "paraíso de Cantor", que de paso demonizaban a figuras como Kronecker o Brouwer.

Pero también fue importante el tiempo y el lugar: la pequeña pero poderosa universidad de Göttingen, sobre todo en los "días de gloria" anteriores a 1914, con un impresionante grupo de profesores entre los que descollaban Hilbert y Minkowski, con numerosos discípulos de alto nivel y visitantes extranjeros, todo ello orquestado por ese gran político científico que fue Felix Klein. Fue Klein quien a lo largo de años, ganándose la confianza del poderoso ministro de Educación Althoff, convirtió a Göttingen en el centro matemático más importante del mundo, atrayendo a numerosísimos visitantes. Gracias a él se crearon allí Institutos dedicados a cuestiones de física, matemática aplicada y mecánica, aerodinámica, etc. Weyl lo recuerda así: "Klein reinaba sobre nosotros como un dios distante, 'divus Felix', desde arriba de las nubes".

Cuando en 1895 Klein impulsó el nombramiento de Hilbert como catedrático, hubo quien le reprochó que traía a aquel joven para estar cómodo y dominar la situación. Su respuesta fue: "voy a nombrar al más incómodo de todos", y desde luego hay que reconocer que no tuvo miedo a alguien que le haría sombra. Las excepcionales condiciones que había en Göttingen explican cómo, en 1902, Hilbert hizo algo inaudito en Alemania: rechazar la propuesta de una cátedra en Berlín. En cambio, aprovechó para negociar con el Ministro una plaza para Minkowski en Göttingen, y tras lograrlo exclamó: "ahora somos invencibles".

Volviendo a las etapas investigadoras de Hilbert, la siguiente tiene que ver con diversas cuestiones de análisis, especialmente los trabajos que conducirían al concepto de espacio de Hilbert (introducido por J. von Neumann hacia 1930). El contexto de libre discusión de ideas que existía en Göttingen fue el origen de estos trabajos: en 1901 un visitante sueco expuso en el Seminario Matemático las ideas de Fredholm sobre ecuaciones integrales, que planteaban una analogía con la teoría de ecuaciones lineales. Estas ideas dispararon la productividad de Hilbert en una nueva dirección, absorbiendo su atención hasta 1912. Desarrolló aquella analogía considerando ecuaciones lineales en infinitas incógnitas y varios tipos de formas cuadráticas, dando así un gran impulso al análisis funcional y la teoría espectral. Estas cuestiones se prestaban a múltiples aplicaciones en física matemática, y cabe destacar el tratamiento que dio Hilbert a la teoría cinética de los gases, a la teoría de la radiación, pero también su solución al problema de monodromía para ecuaciones diferenciales lineales que había planteado Riemann.

Por estas razones, pero también debido al enorme prestigio de Hilbert y a la productividad de Göttingen, ese círculo de cuestiones del análisis funcional se convirtió en una moda a nivel internacional. Con todo, según la opinión de un experto en el asunto como Weyl, la mayor parte de aquellas contribuciones fueron de valor efímero, y "no fue cuestión de mérito sino un favor de la fortuna" cuando hacia 1923 se descubrió que la teoría espectral en el espacio de Hilbert era la herramienta adecuada para el tratamiento matemático de la física cuántica.

Es característico de la completa personalidad de Hilbert que a continuación dedicara su atención a problemas de física teórica. Pero aquí también influye el contexto: las condiciones privilegiadas de Göttingen en estos temas, los largos esfuerzos de Klein por fomentar el trabajo en matemática aplicada, y los intereses de Minkowski. Hilbert impulsó el proyecto de axiomatizar las teorías físicas y desarrolló resultados en física matemática, pero también dedicó su atención a problemas candentes de aquellos años como los del átomo y la relatividad. En este sentido es bien conocido que en 1915 trabajó en competencia amistosa con Einstein sobre los problemas de la teoría de la gravitación relativista. Pero lo cierto es que, contra lo que se ha dicho, no hubo aquí un descubrimiento simultáneo de las ecuaciones de campo einsteinianas: la discusión con Hilbert sirvió de ayuda, pero el logro fue enteramente mérito de Einstein.

La última etapa investigadora de Hilbert, ya a una edad avanzada, fue su famosa intervención en la disputa sobre los fundamentos: la formulación del programa de Hilbert, que daba un giro realmente novedoso al tema. Las actitudes de Hilbert sobre los fundamentos evolucionaron desde una preferencia inicial por el logicismo de Dedekind en los años 1890. Tras la primera Guerra Mundial, las críticas a la matemática "clásica" planteadas por Brouwer y Weyl le motivaron a intentar "eliminar de una vez por todas las dudas escépticas sobre las matemáticas". Sin olvidar nunca el contenido conceptual de las teorías matemáticas ni la importancia de la intuición, Hilbert apostó por resolver el problema de los fundamentos combinando la axiomática con la nueva lógica formal. Esto permitía una formalización completa de las teorías matemáticas conocidas, y el desarrollo de una teoría de la demostración que consideraba las demostraciones como resultado de meras combinaciones de símbolos según reglas formales prescritas. Ahora, bastaba demostrar que ninguna derivación formal, ninguna combinación de símbolos podía conducir a la fórmula y con ello quedaría establecida la consistencia de la teoría formal estudiada.

El trabajo sobre este tema en los años 1920 fue esencial para la maduración definitiva de la lógica matemática y para el surgimiento de las teorías de la computación. Fue una obra colectiva, con el gran lógico Paul Bernays como colaborador imprescindible de Hilbert, y con figuras de la talla de von Neumann realizando aportaciones originales. Es bien sabido cómo la genial contribución de Kurt Gödel en 1931 puso fin al proyecto de demostrar la consistencia de la aritmética de Peano por medios finitarios. De todos modos, la aportación del maestro y su entusiasmo lograron mantener el rumbo del gran barco de las matemáticas: pese a que las dudas escépticas nunca fueron exorcizadas del todo, la matemática "clásica" siguió gozando de la mejor salud. Además, no hay que olvidar el poderoso desarrollo de la lógica matemática posterior, ni sus decisivas aplicaciones tecnológicas en el mundo de los ordenadores.

3 Plancherel

Michel Plancherel nació el 16 de enero de 1885 y murió el 4 de marzo de 1967.

M. Plancherel

Los principales campos de investigación de Michel Plancherel fueron el análisis, la física matemática y álgebra.

En una serie de artículos generalizó los resultados teoría de Fourier en espacios más generales (espacios de Hilbert) mediante la investigación de diversos sistemas de funciones ortonormales, su sumabilidad y la representación de tales funciones mediante series de Fourier, integrales de Fourier y transformaciones integrales de carácter más general.

En su obra obtuvo resultados fundamentales; uno de ellos es el famoso *teorema Plancherel* en análisis armónico y del que ahora se conocen muchas generalizaciones. Aplicó sus resultados a la teoría de la ecuaciones diferenciales parciales parabólicas e hiperbólicas. También contribuyó a la solución de problemas variacionales a través método de Ritz y a la teoría ergódica. En 1913 dio una prueba de que los sistemas mecánicos no pueden ser ergódicos. Los trabajos de Rosenthal y Plancherel marcaron un hito en el desarrollo de los fundamentos de la mecánica estadística, porque marcaron el fin de la época clásica de Maxwell, Boltzmann y Ehrenfest y estimularon el desarrollo de la teoría ergódica como una nueva rama de las matemáticas. En álgebra Plancherel obtuvo resultados en formas cuadráticas y sus aplicaciones, en la solución de sistemas de ecuaciones con infinidad de variables y en la teoría de álgebras conmutativas de Hilbert (Teorema de Plancherel-Godement).

4 Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac, fue uno de los físicos más influyentes del siglo XX. Muchas de sus contribuciones fueron cruciales para el desarrollo de la mecánica cuántica, la teoría que describe la naturaleza a escalas muy pequeñas. Compartió el premio Nobel de física de 1933 por sus aportes a la teoría atómica.

P. A. M. Dirac

Dirac nació el 8 de agosto de 1902, en Monk Road en Bishopston, Bristol, Inglaterra. Su padre era suizo y enseñaba francés en la universidad técnica mercantil Venturers en Bristol. Su madre era de Cornwall. Cursó sus estudios primarios en la escuela Bishop Road y los secundarios, primero, en la Merchant Venturers y, más tarde, en Cotham Grammar School. En 1918, entró a la universidad de Bristol, donde se graduó, en 1921, de ingeniero eléctrico con honores de primera clase. Atraído por las teorías de la relatividad de Einstein, pero impedido de tomar una beca en la universidad de Cambridge por razones financieras, permaneció en Bristol y se graduó en matemáticas, otra vez con honores de primera clase, en 1923.

Obtenido ese último grado académico, Dirac se fue al St John's College, Cambridge, para realizar investigaciones sobre física teórica bajo supervisión de Ralph Fowler del laboratorio Cavendish. Después de algunos años de intensa labor investigativa en ese establecimiento, Dirac finalizó el trabajo que le permitió obtener el premio Nobel. En 1932, lo designaron profesor de la cátedra de matemáticas *Lucasian* en Cambridge, puesto que fue ocupado en su época por Isaac Newton y hoy por Stephen Hawking.

Dirac tenía solamente 31 años cuando compartió el premio Nobel con el físico austriaco Erwin Schrödinger, en 1933. Hablaba con fluidez francés e inglés, pero era taciturno en ambos idiomas. Por otra parte, su timidez llegó a ser legendaria. Por ejemplo, cuando fue informado que acababa de ganar el premio, Dirac le dijo a Rutherford, entonces jefe de Cavendish, que él no lo deseaba aceptar porque le tenía aversión a la publicidad. Rutherford le contestó que el rechazo del premio le traería aún más publicidad.

En 1937, Dirac se casó Margit Balasz, quien era hermana del famoso físico húngaro Eugene Wigner. El matrimonio tuvo dos hijas Mary Elizabeth y Florence Monica. Dirac se retiró de Cambridge en 1969 y se cambió a la universidad del estado de la Florida en los EE.UU.. Murió en Tallahassee, Florida, el 20 de octubre de 1984.

Cuando Dirac se fue a Cambridge, a mediados de la década de 1920, varios experimentos habían demostrado que la física clásica no podría explicar el comportamiento de los átomos y de los electrones. En efecto, el impredecible comportamiento de las partículas en el mundo cuántico parecía tener poca relación con el comportamiento de los cuerpos a mucha mayor escala de la teoría de la relatividad. Ambas teorías estaban todavía evolucionando, y los esfuerzos por combinarlas sólo tuvieron éxito en parte. Por ejemplo, ninguno de los intentos de síntesis podía explicar adecuadamente una propiedad recientemente descubierta de los electrones llamada *espín,* propuesta para resolver las anomalías observadas en las posiciones y número de líneas en el espectro atómico. Por aquel entonces, los físicos pensaban que un electrón que girara rápidamente creaba un campo magnético, lo cual podía explicar esos cambios por otro lado misteriosos. Pero para producir estos efectos magnéticos, un electrón con las dimensiones asignadas en una teoría clásica tendría que girar tan rápido que los puntos de su ecuador excederían la velocidad de la luz, algo que la teoría de la relatividad decía que era imposible. En consecuencia, los físicos llegaron a la conclusión sobre la necesidad de una nueva teoría para explicar esos fenómenos.

Paul Dirac se enfrentó al desafío. Como su auténtica lengua eran las matemáticas, él consiguió en 1928 incorporar la relatividad a la descripción matemática de la mecánica de un átomo de hidrógeno. Su solución, llamada la *ecuación Dirac del electrón,* no sólo proporcionaba una explicación perfecta de las líneas espectrales sino que, en un inesperado desarrollo, describía también a los electrones de una forma que resolvía el dilema del espín. La sencilla elegancia de las matemáticas de Dirac hizo que su proposición consiguiera una aceptación rápida.

Dirac aseguró al espín un importante lugar en las nuevas mecánicas que iban a remplazar la “antigua teoría cuántica” de Bohr y Sommerfeld. Agreguemos que no solamente el electrón, sino otras partículas también están dotadas de espín, cuyo papel es cardinal en la estructura del núcleo atómico.

El objetivo de Dirac fue el de formular una ecuación de la onda asociada al electrón que satisficiera el principio einsteiniano de la relatividad. Este exige una simetría de las tres coordenadas del espacio y de la coordenada del tiempo. Mas, la ecuación de la onda, en la mecánica de Scrödinger, no era simétrica en las cuatro coordenadas, siendo de segundo orden en los coeficientes diferenciales con respecto al espacio, y sin embargo, de primer orden en la derivada del tiempo. Dirac logró señorear las dificultades y establecer una función de ondas conforme al postulado de simetría relativista: los cuatro componentes de la función obedecen a cuatro ecuaciones de primer orden, cuyo conjunto reemplaza la única ecuación de propagación de la mecánica ondulatoria no relativista.

Antes que Dirac formulara su ecuación, el problema de unir adecuadamente la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad parecía estancado. Dirac, en su ecuación describe adecuadamente los fenómenos cuánticos y es compatible con el principio de la relatividad. Si existe algo así como una estética matemática, la ecuación de Dirac es una verdadera obra de arte, por la manera tan ingeniosa con la que el físico inglés resolvió un problema aparentemente irresoluble. Medularmente, la ecuación permite calcular la función de onda de un electrón, y de otras partículas elementales, tomando en cuenta todos los efectos relativistas. En ella, un electrón podía tener una energía infinitamente negativa. Pero lo que parecía una dificultad técnica resultó ser, gracias al ingenio de Dirac, la clave para descubrir un aspecto insospechado de la naturaleza.

En la descripción de los planteamientos teóricos de Dirac soslayar su desarrollo matemático, sería una empresa ilusoria, “puesto que cuando se hace abstracción del andamiaje matemático, se comprueba –escribió el propio Dirac– que la teoría está construida a partir de conceptos que no pueden ser descritos por medios de nociones que nos son familiares y de las cuales no se puede ni siquiera definir el sentido por medio de palabras comunes”. El electrón, se decía con razón, es el contenido de las ecuaciones de Dirac. Esta radical disolución de entidades del mundo material en símbolos matemáticos, es el precio pagado por el mayor rigor y la mayor fecundidad de la nueva mecánica.

Si comparamos la teorías de Heisenberg y de Schrödinger con la formulada por Dirac, ésta aparece más abstracta y más general pero las sobrepasa por su poder de interpretación y de previsión. Un impresionante ejemplo de la prodigiosa fuerza de la teoría es la introducción automática del espín en la ecuación, con el cual, algunos años antes, Uhlenbeck y Goudsmit habían dotado hipotéticamente al electrón. En efecto, es un éxito extraordinario que las ecuaciones de Dirac, obtenidas con ayuda de razonamientos muy generales, en los que para nada interviene la hipótesis del espín, contengan en sí todas las propiedades del electrón magnético y giratorio. “La hazaña, dice De Broglie, de hacer surgir el espín de ecuaciones establecidas con independencia de él, es uno de los resultados más notables de la física teórica contemporánea, que sin embargo, contiene tantos".

Por otra parte, la mecánica ondulatoria primitiva permanecía incapaz de dar cuenta de la estructura fina de los espectros ópticos y rontgenográficos, la teoría de Dirac lo logra con toda exactitud; asimismo, suministra una interpretación de los efectos Zeemann anormales, que ninguno de los teóricos anteriores había podido conseguir. Esto sin duda es mucho, pero no es todo.

El carácter relativista de su mecánica llevó a Dirac a admitir la posibilidad, para el electrón, de poseer un estado de energía negativa. Un corpúsculo en uno de estos estados manifestaría un comportamiento paradójico: para acelerarlo se requeriría frenarlo quitándole energía y, por el contrario, habría que proporcionarle energía para conducirlo a un estado de reposo. Nunca, en la experiencia, ningún electrón hizo evidente tan extrañas propiedades. Para salir de esta dificultad, Dirac, guiado por el principio de Pauli, formuló una ingeniosa hipótesis.

Para evitar que todos los electrones del universo cayeran a estados con energías infinitamente negativas, Dirac propuso que todos los estados con energía negativa estaban ocupados ya por electrones, aunque éstos no se puedan detectar directamente (¡el vacío de la mecánica cuántica resulta ser un mar infinito de partículas!, y esta aparente contradicción es todavía uno de los problemas más complejos de la física moderna). Pero si llegara a faltar uno de estos electrones de energía negativa, su ausencia, se detectaría como la presencia de una partícula con energía positiva y con la carga eléctrica contraria a la del electrón. Esa nueva partícula, predijo Dirac, sería un electrón; tendría la misma masa que un electrón y todas las demás propiedades, excepto el signo de la carga eléctrica, que sería positivo.

Los físicos, en 1930, acogieron con escepticismo la extraña hipótesis de Dirac. Muchos entre ellos consideraron al "antielectrón" del teórico inglés como el sueño de un matemático. Schröndinger propuso modificar la ecuación de Dirac para eliminar esos absurdos estados de energía negativa. A pesar de ello, Dirac permaneció fiel a su idea, y mientras se preguntaba si los estados energéticos desocupados no serían idénticos con los protones, la experiencia vino a traer, en agosto de 1932, la más brillante confirmación de la realidad del antielectrón. Al estudiar, con la cámara de Wilson, choques entre átomos y rayos cósmicos, Charles David Anderson, en California, notó sobre las fotografías las huellas de una nueva partícula, las del electrón con carga positiva. El nuevo corpúsculo, el positrón (o positón) reveló, en el curso de un examen detenido, exactamente las mismas propiedades que la clarividente teoría de Dirac exigiera para su antielectrón.

En esa época, no era fácil imaginar una justificación experimental más sorprendente de la osada construcción matemática de Dirac que el descubrimiento del positrón, que convierte un obstáculo aparentemente insalvable de su teoría en uno de sus más firmes soportes. En efecto, Dirac había previsto la formación simultánea de dos electrones, uno positivo y otro negativo, a expensas de la energía empleada para producir un "hueco" en la distribución de la electricidad negativa. Como veremos, esta atrevida profecía de la "materialización" de corpúsculos a partir de la energía y su inverso, la "desmaterialización" , se convirtieron un año después del descubrimiento de Anderson en hechos empíricos.

Por otro lado, la perfecta simetría entre el electrón negativo y su contraparte positiva sugirió a Dirac la admisión de la posible reversión de la carga de cualquier clase de corpúsculos, y la previsión de la probable existencia del protón negativo. Incluso se descubrió posteriormente que algunos elementos radiactivos emiten positrones al decaer sus núcleos. Otro de los aciertos de su hipótesis previsora fue comprobado en 1953, cuando ya funcionaban los grandes aceleradores de partículas para estudiar el mundo subatómico. En efecto, con uno de esos instrumentos el italiano Emilio Segri y sus colaboradores lograron poner en evidencia el antiprotón, dotado de la misma masa, del mismo espín que el protón, portador, sin embargo, de carga negativa. Luego, se empezaron a producir antineutrones y todo tipo de antipartículas y, últimamente, antiátomos de hidrógeno.

Paul Dirac fue uno de los más eminentes representantes del grupo de jóvenes teóricos del período que siguiera a la primera guerra mundial. Perteneció a la a la primera generación de físicos libres de toda tradición clásica, y educado, desde sus años estudiantiles, en el espíritu de las nuevas teorías. Poseía una natural facilidad para el manejo de los nuevos métodos y conceptos. Espacio, tiempo, energía, partículas, son términos que nunca tuvieron para él la significación que poseían en la época clásica. La relatividad y los quantum son las herramientas naturales de sus investigaciones.

5 Fourier

J. B. J. Fourier

Jean-Baptiste-Joseph Fourier, nacido el 21 de marzo de 1768, en Auxerre, Francia, era hijo de un sastre. Huérfano a los 8 años, fue recomendado al obispo de Auxerre por una caritativa dama que habia quedado cautivada por las buenas maneras y el grave comportamiento del muchacho, sin que pudiera soñar lo que su recomendado llegaría a ser. El obispo envió a Fourier al Colegio militar local regido por los benedictinos, donde el muchacho pronto demostró su talento. A la edad de 12 años escribía los magníficos sermones que pronunciaban, como si fueran propios, los altos signatarios eclesiásticos de París. A los 13 años era un niño-problema, voluntarioso, petulante y endemoniado. Por entonces, al tropezar con las matemáticas, cambió como por arte de magia. Para procurarse luz que le permitiera dedicarse a sus estudios matemáticos mientras los demás dormían, recogía los cabos de velas existentes en la cocina y en otros lugares del colegio. De este modo sus estudios se desenvolvieron secretamente. Los buenos benedictinos pretendieron que el joven eligiera como profesión la carrera del sacerdocio, y entonces ingresó en la Abadía de San Benito para hacer el noviciado. Pero antes de que Fourier tomase sus votos llegó el año 1789. Siempre había deseado ser soldado, y si había elegido el sacerdocio ello era debido a que no desconocía el hecho de que los buenos cargos no eran concedidos a los hijos de los sastres. La Revolución le liberó. Sus viejos amigos de Auxerre eran suficientemente liberales para comprender que Fourier jamás sería sacerdote y le hicieron desistir de la carrera eclesiástica para nombrarle profesor de Matemática. Este fue el primer paso y no pequeño hacia su ambición. Fourier demostraba la vastedad de sus conocimientos reemplazando a sus colegas cuando estaban enfermos, y explicando, quizá mejor que ellos, toda clase de materias, desde la física hasta el griego y el latín.

En diciembre de 1789 Fourier (teniendo 21 años) marchó a París para presentar sus investigaciones sobre la solución de las ecuaciones numéricas, ante la Academia. Este trabajo, que va más allá de los estudios de Lagrange, tiene aún valor, pero como fue eclipsado por los métodos de Fourier en la física matemática, no nos detendremos en esa obra que, por otra parte, puede encontrarse en los textos elementales sobre la teoría de ecuaciones. Al volver a Auxerre, Fourier se unió al partido del pueblo y usó su elocuencia natural, que le había permitido, cuando era muchachuelo, componer magníficos sermones, para incitar al pueblo a poner fin a los simples sermoneadores. Desde el principio Fourier fue un entusiasta de la Revolución, hasta que la Revolución le desbordó. Durante el Terror, ignorando el peligro que corría, protestó contra la brutalidad innecesaria. De haber vivido actualmente, es muy posible que Fourier perteneciera a esas clases cultas que no se dan cuenta de que serán las primeras en ser barridas cuando la verdadera revolución comience. En lugar del generoso aliento a las ciencias que él había previsto, Fourier vio a los hombres de ciencia subir a las carretas o huir del país, y a la ciencia misma combatiendo por su vida ante la rápida marea ascendente de la barbarie.

Es mérito de Napoleón haber visto, desde el principio, con notable claridad, que la ignorancia no puede hacer otra cosa que destruir. Su propio remedio quizá no haya sido en definitiva, mucho mejor, pero no hay duda que reconoció que es posible algo semejante a una civilización. Para frenar el derramamiento de sangre, Napoleón ordenó o alentó la creación de escuelas, pero no había maestros. Todas las cabezas preparadas para una acción inmediata, hacía ya tiempo que habían sido segadas por la guillotina. Era imperativo preparar un nuevo cuerpo docente, y con este fin fue creada, en 1794, la Escuela Normal. Como premio a sus trabajos en Auxerre, Fourier fue nombrado profesor de matemática. Con este nombramiento comienza una nueva era en la enseñanza de la Matemática en Francia. Recordando las aburridas conferencias de los antiguos profesores, que se entregaban a recitar palabra por palabra la misma lección todos los años, la Convención llamó a los creadores de la Matemática para que realizaran la enseñanza, y prohibió que las conferencias se encerraran dentro de una norma rígida. Las lecciones eran pronunciadas estando, el, profesor en pie (no sentado, semi dormido, detrás de una mesa), y se establecía un libre intercambio entre el profesor y, sus discípulos en una serie de pregunta y explicaciones. Era deber del profesor evitar que la lección degenerara en un debate sin provecho. Los resultados de este plan superaron todas las esperanzas y dieron lugar a uno de los períodos más brillantes en la historia de la Matemática y de la ciencia francesa. Tanto en la Normal, de breve vida, como en la Politécnica, más duradera, Fourier demostró su genio para la enseñanza. En la Politécnica amenizaba, sus conferencias matemáticas, haciendo alusiones históricas (muchas de las cuales podía referir a sus fuentes), y hábilmente matizaba las abstracciones con aplicaciones interesantes. Fourier preparaba ingenieros y matemáticos en la Politécnica cuando Napoleón, en 1798, decidió que formara parte de la *Legión de la Cultura* para civilizar Egipto ."Para ofrecer una mano amiga a los pueblos infelices, para libertarlos del yugo brutal, bajo el cual han gemido durante siglos, y finalmente dotarlos sin demora de todos los beneficios de la civilización europea". Por increíble que parezca estas palabras no son del Signor Mussolini, en 1935, para justificar la, invasión de Etiopía, sino de Arago, en 1833, para facilitar el asalto de Napoleón a Egipto. Será interesante recordar la forma como los incultos habitantes de Egipto recibieron "todos los beneficios de la civilización europea" que los señores Monge, Berthollet y Fourier se esforzaban en hacerles tragar, y cual fue el resultado que, obtuvieron estos tres mosqueteros de la cultura europea en su abnegada obra de misioneros. La flota francesa compuesta de 500 barcos llegó, a Malta el 9 de junio de 1798 y tres días más tarde, capturó la plaza.

Como un primer paso para civilizar el Oriente, Monge fundó 15 escuelas elementales y una escuela superior trazada siguiendo las líneas de la Politécnica. Una semana más tarde la flota seguía su camino, con Monge a bordo de la nave capitana de Napoleón, la *Orient*. Todas las mañanas Napoleón trazaba un programa de discusión, que se desenvolvía después de la cena. No hay necesidad de decir que Monge era el astro de estas discusiones. Entre los temas solemnemente debatidos figuraban la edad de la Tierra, la posibilidad del fin del mundo, por la acción del fuego o del agua y la cuestión no menos interesante de si están habitados los planetas. Este último tema hace pensar que hasta en un momento relativamente precoz de su carrera, las ambiciones de Napoleón superaban a las de Alejandro.

Después de la victoria del 20 de julio de 1798, en la batalla de las Pirámides, el ejército triunfante penetró en el Cairo. Todo se desarrolló del modo preciso, como lo había soñado el gran idealista Napoleón, pero entonces ocurrió algo que parecía increíble. Los obtusos egipcios poco se cuidaban de los científicos manjares que en el banquete cultural les ofrecían los señores Monge, Fourier y Berthollet, en el Instituto Egipcio (fundado el 27 de agosto de 1798, como parodia del *Institut de France*), sino que se sentaban como momias, indiferentes a las prestidigitaciones científicas del gran químico, a las palabras entusiastas de Monge y a las disquisiciones históricas de Fourier sobre las glorias de su propia civilización momificada. Los sudorosos sabios tenían que hacer gala de sangre fría ante estas gentes, que parecían incapaces de saborear los ricos manjares que la erudición francesa les servía en vano para su alimentación espiritual. Una vez más los astutos nativos tan sólo aspiraban a recobrar su paz, esperando que la plaga de langosta fuera expulsada por los tormentosos vientos. Para mantener su orgullo hasta que se desencadenara el vendaval, los salvajes egipcios criticaban la civilización superior de sus conquistadores en el único lenguaje que podrían comprender.

Trescientos de los más bravos soldados de Napoleón encontraron la muerte en las reyertas callejeras. Monge mismo salvó su propia vida y las de sus compañeros sitiados gracias a una exhibición de heroísmo que hubiera valido una medalla a cualquier Boy Scout actual, en un país de habla inglesa. Esta ingratitud por parte de los descarriados egipcios sorprendió a Napoleón. Empezó a sospechar que su deber moral era abandonar a sus compañeros de armas y su sospecha se vio fortalecida por las noticias alarmantes llegadas desde París. Durante su ausencia, los sucesos en el continente se habían agravado y ahora era preciso volver apresuradamente para conservar el honor de Francia y la propia piel. Monge gozaba de la confianza del general, pero Fourier, menos apreciado, nada sabía. A Fourier, sin embargo, le cupo la satisfacción de suponer que debía valer mucho ante los ojos de su comandante, pues se le dejó en El Cairo para educar a los egipcios cuando Napoleón, acompañado por el complaciente Monge, se embarcó secretamente para Francia sin despedirse de las tropas, de esas tropas que por él habían sufrido en el desierto los tormentos del infierno. Como no era Comandante en jefe, Fourier no tenía el derecho a poner los pies en polvorosa frente al peligro. Permaneció en Egipto forzadamente, y cuando los franceses reconocieron que debían ser los británicos y no ellos los que regeneraran a los egipcios, el devoto pero desilusionado Fourier volvió a Francia. El regreso de Monge y Napoleón fue menos agradable para ambos que el viaje de ida. En lugar de especular acerca del fin del mundo, Napoleón dirigía sus pensamientos más ansiosos sobre su probable fin si encontraba algún navío británico. La pena por desertar del campo de batalla según podía recordar, era encontrarse ante el pelotón de fusilamiento. ¿Le tratarían los británicos como desertor por haber abandonado su ejército? Si debía morir, moriría de modo teatral. “Monge, dijo un día, si somos atacados por los británicos, nuestro barco debe ser volado en el instante en que nos aborden. Le encargo realizar esa labor”. Al día siguiente un barco apareció en el horizonte y todos los hombres se dirigieron a sus puestos para repeler el esperado ataque. Por fortuna resultó ser un barco francés. “ ¿Dónde está Monge?” preguntó alguno cuando la excitación había pasado. Le encontraron en la Santa Bárbara con una lámpara encendida en la mano. Berthollet y Monge llegaron a Francia tan andrajosos que parecían dos vagabundos. No habían podido cambiar su vestimenta desde que habían iniciado el viaje, y sólo con dificultad Monge fue reconocido por su mujer. La amistad con Napoleón continuó invariable. Probablemente Monge fue el único hombre en Francia que osó decir a Napoleón las verdades en los días de su máxima arrogancia. Cuando Napoleón se coronó Emperador, los jóvenes de la Politécnica protestaron. Constituían el orgullo de Monge. “Bien, Monge, Napoleón hizo notar un día, sus discípulos se han levantado contra mí, declarándose decididamente enemigos míos”. “Señor, replicó Monge, nos: hemos esforzado mucho para hacerles republicanos. Dadles algún tiempo para que se hagan imperialistas. De todos modos permitidme decir que habéis hecho un cambio demasiado rápido”. Poco importó esto para la amistad de los dos hombres.

En 1804, Napoleón demostró su aprecio por los méritos de Monge nombrándole, conde de Péluse. Por su parte, Monge aceptó satisfecho el honor y vistió su título a la usanza de la nobleza, olvidando que una vez votó por la abolición de todos los títulos. Y en pleno esplendor llegamos al año 1812, en el que se esperaba alcanzar el día de la gloria, en su lugar ese año trajo la retirada de Moscú. Demasiado viejo (tenía 66 años) para acompañar a Napoleón a Rusia,. Monge permaneció en Francia, siguiendo ansioso los progresos del Gran Ejército a través de los boletines oficiales. Cuando leyó el fatal "Boletín 29" anunciando el desastre de los ejércitos franceses, Monge sufrió un ataque de apoplejía. Al recobrar el conocimiento dijo: "Hace un momento no sabía algo que ahora sé, sé como moriré". Monge gozó de los favores hasta el momento final, Fourier fue mantenido en un plano inferior. A su vuelta de Egipto, Fourier fue nombrado, (2 de enero de 1802) prefecto del Departamento de Isère, con el cuartel general en Grenoble. El distrito se hallaba políticamente alterado, la primera tarea de Fourier debía, ser restablecer el orden. Encontró una furiosa oposición que venció de una manera muy notable. Mientras estuvo en Egipto, Fourier había tomado parte activa en la dirección de las investigaciones arqueológicas del Instituto. Los buenos ciudadanos de Grenoble quedaron conmovidos por la importancia que para la religión tenían algunos de los descubrimientos del Instituto, en efecto, la gran antigüedad atribuida a los más antiguos monumentos estaba en conflicto con la cronología de la Biblia. Sin embargo, quedaron muy satisfechos y se encariñaron con Fourier cuando, como consecuencia de nuevas investigaciones arqueológicas en las regiones vecinas, desenterró un santo de su propia familia, el bendito Pierre Fourier, su tío abuelo, que fue santificado por haber fundado una orden religiosa. Al haber restablecido su autoridad, Fourier pudo cumplir una obra amplia y útil: drenó las marismas, extirpó el paludismo y puede decirse que sacó a su distrito de las tinieblas medievales en que se encontraba.

Estando en Grenoble, Fourier compuso la inmortal *Theoria analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor) que constituye un jalón en la física matemática. Su primera memoria sobre la conducción del calor fue redactada en 1807. Ofrecía tantas perspectivas que la Academia alentó a Fourier para que la continuase, acordando que la teoría matemática del calor fuese el problema para el Gran Premio en 1812. Fourier ganó el premio, no sin que fuera objeto de críticas que le molestaron profundamente, pero que fueron bien toleradas. Laplace, Lagrange y Legendre fueron los árbitros.

Aunque admitían la novedad e importancia de la obra de Fourier, señalaron que el tratamiento matemático era falso y que dejaba mucho que desear en cuanto a su rigor. Lagrange mismo descubrió casos especiales del teorema principal de Fourier, pero desistió de continuar ante las dificultades que preveía. Estas dificultades eran de tal naturaleza que probablemente hubiera sido imposible su eliminación en aquella época. Ha tenido que transcurrir más de un siglo antes de que pudieran ser resueltas satisfactoriamente. Es interesante observar, de pasada, que esta disputa es un ejemplo típico de la diferencia radical entre los matemáticos puros y los físicos matemáticos. La única arma de que disponen los matemáticos puros es la demostración neta y rígida, y a no ser que el teorema aceptado pueda responder a las más grandes críticas de que su época es capaz, los matemáticos puros poco uso harán de él.

El matemático "aplicado" y el físico matemático, por otra parte, rara vez son tan optimistas que se imaginen que la complejidad infinita del Universo físico puede explicarse completamente por una teoría matemática suficientemente sencilla para ser comprendida por los seres humanos. Tampoco lamentan mucho que la concepción bella (o absurda) de Airy del Universo, cómo una especie de sistema de ecuaciones diferenciales interminable que se resuelve por si mismo, haya resultado una ilusión originada por el fanatismo matemático y el determinismo newtoniano, tienen alguna cosa más real a que recurrir, el Universo físico por sí mismo. Pueden experimentar y comprobar las deducciones de su matemática imperfecta frente al veredicto de la experiencia, lo cual, por la naturaleza de la Matemática, es imposible para un matemático puro. Si sus predicciones matemáticas no son confirmadas por la experimentación, no vuelve la espalda, como un matemático hace, a las pruebas físicas, sino que arroja su herramienta matemática y busca otra mejor.

Esta indiferencia de los hombres de ciencia por la Matemática por sí misma es tan irritante para un tipo de matemático puro como la omisión de una dudosa tilde es para otro tipo de pedantes. La consecuencia es que pocos son los matemáticos puros que han hecho alguna contribución significativa para la ciencia, aparte, como es natural, de inventar muchas de las herramientas que los hombres de ciencia encuentran útiles, (quizá indispensables). Y lo curioso es que los verdaderos puristas que objetan las proezas imaginativas audaces de los hombres de ciencia son los que más insisten en que su matemática, contrariamente a la difundida creencia, no es en modo alguno una cuestión de exactitud meticulosa, sino tan imaginativa y creadora, y algunas veces tan libre de cadenas, como puede serlo la poesía o la música. En ocasiones, los físicos combaten a los matemáticos con sus propias armas. Así, ignorando la evidente falta de rigor de la teoría analítica del calor de Fourier, Lord Kelvin la calificó como "un gran poema matemático".

Los principales progresos de Fourier tuvieron lugar en la dirección de los problemas de valor-límite , el ajuste de las soluciones de ecuaciones diferenciales para prescribir las condiciones iniciales, probablemente el problema central de la física matemática. Desde que Fourier aplicó este método a la teoría matemática de la conducción del calor, numerosos hombres de talento han ido, durante un siglo, más allá de lo que el propio autor podría haber soñado, pero el paso dado por él fue decisivo. Una o dos de las cosas que resolvió son suficientemente sencillas para poderlas explicar en este lugar. Puede demostrarse que es imposible representar algunas graficas por expresiones matemáticas finitas, cerradas, una infinidad de términos se presentan en sus ecuaciones. El teorema de Fourier proporciona un medio para representar e investigar tales gráficas matemáticamente: expresa (dentro de ciertas limitaciones) una función continua dada dentro de un cierto intervalo, o con sólo un número finito de discontinuidades en el intervalo, y teniendo en el intervalo sólo un número finito de puntos de discontinuidad como una infinita suma de senos o cosenos o de ambos. Cuando la obra comenzada en 1807 fue completada y reunida en el tratado sobre la conducción de calor en 1822, pudo verse que el obstinado Fourier no había cambiado una sola palabra de su exposición original, obedeciendo a la segunda parte del consejo que da Francis Galton a todos los autores: "No ofenderse jamás por la crítica, y nunca contestarla".

El resentimiento de Fourier fue racionalizado en ataques a la Matemática pura, atendiendo a lo que le interesaba y sin incurrir en confusiones en la física matemática. Todo marchaba bien en Francia y la obra de Fourier iba desenvolviéndose cuando Napoleón, habiendo escapado de la isla de Elba, desembarcó en la costa francesa el 10 de marzo de 1815. Nuevos dolores de cabeza esperaban a los veteranos. Fourier estaba en Grenoble en aquella época, y temiendo que el populacho volviera a caer en la borrachera al dar la bienvenida a Napoleón, se apresuró a marchar a Lyon para informar a los Borbones de lo que sucedía. Estos, con su normal estupidez, se negaron a creerle. Al regresar Fourier supo que Grenoble había capitulado. El matemático fue tomado prisionero y llevado ante Napoleón en Bourgoin. Se enfrentó con su antiguo comandante, que había conocido muy bien en Egipto y del cual había aprendido a desconfiar con su cabeza aunque no con su corazón.

Napoleón se inclinaba. sobre el mapa, con un compás en la mano. Le miró. "Bien, Señor Prefecto ¿me habéis declarado la guerra?" "Señor - balbuceó Fourier, mis juramentos constituyen un deber". " ¿Un deber decís? ¿No veis que nadie en el país participa de vuestra opinión? No os imaginaréis que vuestro plan de campaña me atemoriza. Tan sólo sufro al ver entre mis adversarios a un egipcio, que ha comido a mi lado el pan del vivac, un viejo amigo. ¿Cómo, señor Fourier, habéis podido olvidar que me debéis lo que sois?" Lo que Fourier recordaba era que Napoleón le había abandonado en Egipto, aunque no se atreviera a expresarle en bien de la seguridad de su cabeza. Algunos días más tarde Napoleón preguntó a Fourier, que nuevamente le era leal: " ¿Qué pensáis de mi plan?" "Señor, creo que fracasaréis. Encontraréis un fanático en vuestro camino, y todo marchará mal". "¡Bah! Nadie está en favor de los Borbones, ni siquiera los fanáticos. Habréis leído que me han colocado fuera de la ley. Yo seré más indulgente, me contentaré con expulsarles de las Tullerías". La segunda restauración encontró a Fourier en París haciendo toda clase de esfuerzo para poder vivir. Pero antes de que muriera de hambre, los antiguos amigos se apiadaron de él y lo nombraron director de la Oficina de Estadística en el Sena. La Academia intentó elegirle miembro en 1816, pero los Borbones ordenaron que ningún amigo de su antiguo perseguido pudiera recibir honores. Sin embargo, la Academia eligió a Fourier al año siguiente. Esta acción de los Borbones contra Fourier podrá parecer mezquina, pero al lado de lo que hicieron con el pobre anciano Monge fue principesca. ¡Noblesse obliga! Los últimos años de Fourier se evaporaron en nubes de charla. Como secretario permanente de la Academia siempre le era posible encontrar oyentes y se transformó en un sujeto insufrible. En lugar de continuar su obra científica entretenía a su auditorio con promesas jactanciosas acerca de lo que iba a hacer. Sin embargo, ya había hecho mucho por el progreso de la ciencia, y si algún ser humano merece la inmortalidad, Fourier es uno de ellos. No tenía necesidad de sus jactancias finales. La permanencia de Fourier en Egipto fue causa de una curiosa costumbre que aceleró su muerte. Creía que el calor del desierto era la condición ideal para la salud. Además de fajarse como si fuera una momia, vivía en habitaciones que, según decían sus amigos eran más cálidas que el infierno y el desierto del Sahara combinados. Murió de una enfermedad al corazón (algunos dicen que un aneurisma) el 16 de mayo de 1830, a los 63 años. Fourier pertenecen esa selecta serie de matemáticos cuya obra es tan fundamental que sus nombres van siempre acompañados de adjetivos en todas las lenguas civilizadas.

6 Laplace

Los primeros documentos matemáticos de Laplace datan de su etapa como estudiante de Teología en la Universidad de Caen. Resalta una memoria sobre el cálculo de diferencias finitas en el boletín editado por Lagrange.

P. S. de Laplace

En 1769 y con una carta de presentación para el científico Jean Le Rond d'Alembert se marcha a París. Éste se interesa por el joven y, tras leer algunos de los trabajos que le presenta, especialmente un documento sobre los principios de la mecánica, lo recomienda para una plaza de profesor en la Escuela Militar de París. Laplace tiene apenas 19 años y a partir de este instante comenzará un período de actividad científica prodigiosa.

Desde hace bastante años los astrónomos están desconcertados ante las observaciones, las primeras las realizó Tycho Brahé (s. XVI), que indican que la órbita de Jupiter se contrae continuamente mientras que la de Saturno se expande. No se encuentra argumentos matemáticos para explicar el fenómeno. Newton llegó a concluir que era necesaria la intervención divina de forma periódica para mantener el equilibrio del Sistema Solar.

En 1773 presenta una memoria ante la Academia Francesa en la que prueba que los movimientos planetarios son estables. Inspirándose en un famoso trabajo de Lagrange sobre la variación de los elementos orbitales (1766) demuestra que el fenómeno observado en las óbitas de los planetas Jupiter y Saturno tiene una periodicidad 929 años.

Se considera entonces este trabajo como el más importante avance en Física astronómica desde Newton. Meses más tarde es nombrado miembro asociado de la Academia de Ciencias.

En esta época, ya ha publicado algunos resultados con sus aportaciones al calculo integral y a las ecuaciones diferenciales y puede leerse en el informe de una sesión de 1774: "Esta Sociedad que se ha apresurado a recompensar sus trabajos y sus talentos no había visto todavía a nadie tan joven que le presentara en tan poco tiempo memorias importantes, y sobre materias tan diversas y difíciles".

En 1775 demuestra, también a partir de métodos desarrollados por Lagrange, que la excentricidad de la órbita de un planeta está acotada superior e inferiormente.

Dos importantes teoremas de 1784 acaban de establecer la estabilidad del sistema solar dentro del marco de la mecánica laplaciana, demostrando la existencia de una relación matemática constante, salvo pequeñas oscilaciones, entre la masa de un planeta, su distancia media y su excentricidad.

En las memorias presentadas por Laplace en 1784, 1785, y 1786 se prueba por consideraciones generales que la acción mutua de los planetas Júpiter y Saturno nunca podría afectar a las excentricidades e inclinaciones de sus órbitas, y que las peculiaridades del sistema Joviano se deben a la conmensurabilidad de sus movimientos medios.

Los desarrollos adicionales de estos teoremas sobre el movimiento planetario se presentaron en sus dos de memorias de 1788 y 1789.

Con estos datos Delambre calculará más tarde sus tablas astronómicas.

En 1787 presenta los resultados de su investigación sobre las anomalías de la órbita lunar, inspirándose para ello en su anterior estudio sobre los movimientos de los satélites de Jupiter. Descubre la influencia del aplastamiento de la Tierra sobre el movimiento de traslación de la Luna e, invirtiendo la cuestión, deduce el valor del achatamiento terrestre a partir de la correspondiente anomalía del movimiento lunar. Explica, también, que la causa física de la aceleración del movimiento medio de la Luna está vinculada a una lenta disminución de la excentricidad de la órbita terrestre, de acuerdo con la ley gravitatoria de Newton. Se rinde un gran homenaje a Laplace por los resultados de este último estudio.

Con esta investigación se completa la demostración de la estabilidad del sistema solar considerado como un conjunto de cuerpos rígidos que se mueven en el vacío.

Laplace se plantea a partir de este momento la tarea de escribir un trabajo que ofrezca una solución completa del gran problema mecánico que representa el sistema solar, de manera que los resultados de la observación coincidan con los obtenidos por los cálculos matemáticos.

Las conclusiones se plasman en las dos siguientes obras: Exposition du systeme du monde (1796) y Traite de mecanique celeste (1799-1825).

Con el Tratado de Mecánica Celeste, monumental obra en 5 volúmenes publicados entre 1799 y 1825, se culmina el trabajo de más de un siglo de duración durante el cual los científicos intentarón dar una explicación matemática de la teoría de la gravitación universal basada en los principios de Newton.

Laplace reúne en un sólo cuerpo, de doctrina homogénea, todos los trabajos dispersos de Newton, Halley, Clairaut, D'Alembert, Euler, etc. De esta manera, y junto con sus propias aportaciones, recoge el conocimiento de su época sobre el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar.

Los primeros dos volúmenes, publicados en 1799, contienen los métodos para calcular los movimientos de los planetas, determinando sus figuras, y resolviendo problemas de marea.

Los volumenes tercero y cuarto, publicados en 1802 y 1805, contienen aplicaciones de estos métodos y varias tablas astronómicas.

El quinto volumen, publicado en 1825, es principalmente histórico, pero presenta, como apéndice, los resultados de las últimas investigaciones de Laplace.

El contenido de Mecánica Celeste es excelente, pero su lectura de ninguna manera es fácil. Biot, que le ayuda en la revisión de los textos para su impresión, narra que, con frecuencia, Laplace es incapaz de recuperar los detalles en su cadena de razonamientos por lo que rápidamete recurrirá a la fórmula: "Il est facile de voir".

Mecánica Celeste no es solamente la traducción de los Principia al idioma del cálculo diferencial, sino que completa todos aquellos apartados que Newton fue incapaz de justificar en sus detalles. El tratado de Laplace será considerado siempre como un texto clásico.

Théorie Analytique des Probabilités

En 1812, con la Teoría Analítica de las Probabilidades, expone los principios y las aplicaciones de lo que él llama "geometría del azar". Esta obra representa la introducción de los recursos del análisis matemático en el estudio de los fenómenos aleatorios y recopila toda una serie de memorias publicadas desde 1771.

Aportaciones en Matemáticas

Entre los descubrimientos menores de Laplace en Matemáticas se pueden citar:

La discusión, simultáneamente con Vandermonde, de la teoría general de los determinantes en 1772.

La demostración de que cada ecuación de grado par debe tener al menos un factor cuadrático real.

La demostración de que la solución de una ecuación en diferencias finitas de grado primero y segundo orden podría siempre obtenerse en forma de una fracción continuada.

En el análisis matemático introduce el uso de la función potencial (1874). Demuestra que la función potencial presentada por Clairaut y utilizada por Lagrange en el campo de la dinámica satisface una ecuación diferencial en derivadas parciales para cuya integración introduce las funciones llamadas armónicos esféricos, estudiadas poco antes por Legendre.

Transformada de Laplace

Transformación que a una función de variable real f(t), definida en todo el campo de los números reales, le hace corresponder una nueva función L(f), llamada transformada de Laplace.

La demostración el teorema de D'Alembert sobre las formas de las raíces de las ecuaciones algebráicas.

Perfecciόna los métodos de integración de ecuaciones en diferenciales parciales.

Ley de Laplace-Gauss

Ley de probabilidad de una variable aleatoria continua X

La curva representativa de las variaciones de la función f se llama curva de campana o curva de Laplace-Gauss.

La ley de Laplace-Gauss también se conoce con el nombre de ley de Gauss. Pero de hecho Laplace descubre esta ley en 1780 cuando Gauss (1777-1855) tiene tres años. También es muy usada la denominación de Ley normal.

Ecuación de Laplace

Esta célebre ecuación o Laplaciano de una función, verificada por el potencial, se encuentra en su Mecánica celeste. Laplace desarrolla el concepto de potencial, una función cuya derivada direccional en cada punto es igual a la componente del campo de intensidad en la dirección dada.

Aportaciones en Física y Química

Realiza, junto con Lavoisier en 1780, las primeras medidas calorimétricas de las reacciones químicas y de los calores específicos. Sentando con estas experiencias las bases de la termoquímica. En esta época ambos científicos concluyen que la respiración no es más que un tipo de combustión.

Establece la fórmula de las transformaciones adiabáticas de un gas, que utilizó en la expresión de la velocidad de propagación del sonido.

En el campo de la física teórica es notable su teorema de la atracción capilar, quien aceptó la idea propuesta por Hauksbee en las Transacciones Filosóficas (1709), que explica como el fenómeno se debe a una fuerza de atracción que es "insensible a distancias sensatas".

Resaltar que el apartado que estudia la acción de un sólido sobre un líquido y la acción mutua de los de líquidos no es desarrollado completamente. Esta labor la realizaría Gauss y, posteriormente, Neumann completaría los detalles.

La relación que expresa la presión capilar ejercida sobre una superficie líquida curvada es conocida como Ley de Laplace

Destacar sus estudios sobre la configuración de un fluido en equilibrio sometido a un movimiento rotatorio.

Asimismo, contribuye al estudio de la electricidad y el magnetismo con técnicas matemáticas. Resaltar las fuerzas de Laplace, las leyes de Laplace o la Ecuación de Laplace: "En toda región del campo donde no hay carga eléctrica , el potencial está distribuido según una ley completamente independiente de las cargas que lo crean"

Enuncia dos leyes fundamentales del electromagnetismo:

Primera Ley de Laplace:

En toda región donde no hay carga eléctrica, el potencial varia de manera que su valor medio en los puntos de una superficie esférica es igual al potencial en su centro.

Segunda Ley de Laplace:

En un elemento de corriente dentro de un campo magnético, la fuerza que actúa es siempre normal al elemento de corriente y al campo.

(Conocida también como Ley de Ampere de la inducción magnética.)

Laplace en 1816 es el primero en demostrar por qué la teoría de movimiento vibratorio de Newton da un valor incorrecto a la velocidad del sonido. Ello es consecuencia del calor desarrollado por la compresión súbita del aire que aumenta su elasticidad y por tanto la velocidad de transmisión del sonido es mayor de la que calculó Newton.

En conclusión, para Laplace el análisis matemático es sólo una herramienta para resolver problemas físicos. Además de considerar suficiente que el resultado sea cierto, no se preocupa en explicar los pasos que le han llevado hasta su objetivo y, cuando lo hace, no le interesa la elegancia del proceso.

Aunque se debe reconocer que tuvo una enorme capacidad para inventar, desarrollar y aplicar metodos de análisis matemático se esforzó durante toda su vida en edificar teorías matemáticas para explicar los fenómenos de la mecánica celeste o aplicar la teoría de probabilidades a la vida civil.

7 Dirichlet

J. P. G. L. Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, actual Alemania, 13 de febrero de 1805 - Gotinga, actual Alemania, 5 de mayo de 1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de una función.

Su familia era natural del pueblo de Richelet en Bélgica, de donde su apellido "Lejeune Dirichlet" ("le jeune de Richelet" = "el joven de Richelet") derivó, y ese era el lugar donde vivió su abuelo.

Dirichlet nació en Düren, donde su padre era el jefe de la oficina de correos. Fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier. Tras graduarse, fue profesor en las universidades de Breslau (1826-1828), Berlín (1828-1855) y Gotinga, en donde ocupó la cátedra dejada por Gauss tras su muerte. Sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las series, y desarrolló la teoría de las series de Fourier. Su primera publicación comprendió una demostración particular del teorema de Fermat, para el caso $n = 5$, que también fue completada por Adrien-Marie Legendre, uno de sus revisores. Dirichlet completó su propia prueba casi al mismo tiempo, más adelante completó también la prueba para n=14. Aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función, y en mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

Se casó con Rebecka Mendelssohn, que venía de una distinguida familia de judíos conversos. Era la nieta del filósofo Moses Mendelssohn, hija de Abraham Mendelssohn

Bartholdy y hermana del compositor Felix Mendelssohn Bartholdy.

Fueron estudiantes suyos Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker y Rudolf Lipschitz. Tras la muerte de Dirichlet, su amigo y colega matemático Richard Dedekin recopiló, editó y publicó sus lecciones y otros resultados en teoría de números bajo el título Vorlesungen über Zahlentheorie (Lecciones sobre Teoría de Números).

8 Green

George Green (julio de 1793, 31 de mayo de 1841) fue un matemático británico cuyo trabajo influenció notablemente el desarrollo de importantes conceptos en física. Entre sus obras más famosas se cita: "Un análisis de las aplicaciones del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo" publicado en 1828. En este ensayo se introdujeron los conceptos de funciones de potencial utilizados comúnmente en la formulación matemática de la física. También aparecieron en este ensayo las funciones de Green y aplicaciones importantes del teorema de Green.

G. Green

Green fue un científico autodidacto. Vivió la mayor parte de su vida en Sneinton, Nottinghamshire, actualmente parte de la ciudad de Nottingham. Su padre, también llamado George, era un panadero que poseía un molino de viento para preparar la harina. El joven George Green solo asistió de forma regular a la escuela durante un año entre los 8 y 9 años ayudando a su padre posteriormente.

En algún momento comenzó sus estudios de matemáticas. Al ser Nottingham un pueblo pobre en recursos intelectuales, no se ha podido dilucidar por parte de los historiadores de donde obtenía Green la información necesaria para su desarrollo en matemáticas. Solo se conoce una persona que halla vivido en Nottingham durante esa época, con los suficientes conocimientos matemáticos: John Toplis. Cuando Green publicó su ensayo en 1828, fue vendido como una suscripción a 51 personas, la mayoría de las cuales eran probablemente amigos y sin ninguna idea sobre las matemáticas.

El acaudalado terrateniente y matemático Edward Bromhead compró una copia y animó a Green a ir más lejos en su trabajo matemático. Sin embargo, Green no confió en su mentor y no lo contactó durante dos años.

Luego de esos dos años, Bromhead realizó las gestiones para que Green ingresara a la Universidad de Cambridge. Green ingresó como estudiante a la edad de 40 años. Su carrera académica fue excelente, y luego de su graduación en 1837 permaneció en la facultad, en la Escuela Gonville y Caius. Escribió sobre óptica, acústica e hidrodinámica, y a pesar que sus escritos posteriores no tuvieron la relevancia de su Ensayo, de igual manera fueron muy reputados. Los trabajos de Green sobre el movimiento de las olas en un canal anticipa la aproximación WKB de mecánica cuántica, mientras que su investigación sobre ondas lumínicas y de las propiedades del Éter producían lo que hoy es conocido como las Medidas de deformación de rotación independiente. En 1839 fue electo miembro de la junta directiva de la escuela, de todas maneras, disfrutaría los privilegios del cargo por un corto tiempo: en 1840 cae enfermo y regresa a Nottingham, donde muere un año después.

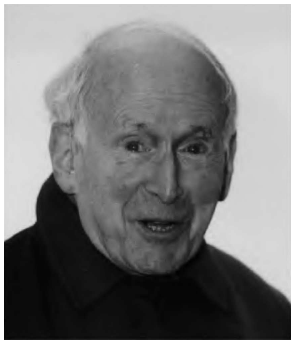
El trabajo de Green fue poco conocido en la comunidad matemática durante su vida. En 1846, su trabajo fue redescubierto por un joven William Thomson, quien lo hizo popular entre los futuros matemáticos de la época.

La Biblioteca George Green de la Universidad de Nottingham alberga la gran parte de la colección de ciencias e ingeniería de la universidad. En 1986, el molino de los Green fue restaurado. Ahora funciona como museo y centro científico.

En una visita a Nottingham en 1930, Albert Einstein comentó que Green estuvo 20 años adelantado a su época. El físico teórico Julian Schwinger, quién uso parte de la obra de Green en su trabajo sobre investigación de avanzada, publicó un tributo titulado “The Greening of Quantum Field Theory: George and I”.

9 Schwartz

Laurent Schwartz (1915 - 2002) fue un matemático francés conocido por sus trabajos sobre la teoría de distribuciones. Recibió la Medalla Fields en 1950.



L. Schwartz

Fue un estudiante brillante, sobre todo latín, griego y matemáticas. Uno de sus profesores dijo a sus padres: “Os dirán que vuestro hijo es dotado para los idiomas, pero le interesan de hecho sólo el aspecto científico y matemático: debe convertirse en matemático. En 1934 entró en la Escuela Normal Superior de París. Hace el servicio militar como oficial entre 1937 y 1939, servicio prolongado un año por la Segunda Guerra Mundial.

Trabajó en las universidades de Nancy, Sorbona y en la École Polytechnique. En 1975 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias Francesa.

Era un anti-colonialista y trotskista, convencido de que la política de no intervención realizada por el gobierno de Léon Blum frente al nazismo era totalmente ineficaz, e incluso peligrosa. Participó activamente por la independencia de Vietnam y contra la invasión soviética de Afganistán.

Bibliografía

[1] Anton, H., *Elementary Linear Algebra with Applications*, John Wiley & Sons Inc., 2004,

[2] Apostol, T. M., *Análisis Matemático,* Reverté, 1960.

[3] Axler, S., *Linear Algebra Done Right,* 2da. Ed, Springer,1997.

[4] Arfken, G. B., *Mathematical Methods for Physicists,* 3rd. Ed., Academic Press, 1985.

[5] Benedetto, J., *Harmonic Analysis and Applications,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton-New York-London-Tokyo, 1997.

[6] Birkhoff, G., *A Source Book in Classical Analysis*, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1973.

[7] Bloch, E. D., *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry,* Birkhauser, 1995.

[8] Bourbaki, N., *Elementos de Historia de las Matemáticas,* Alianza, Madrid, 1972.

[9] Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill, 3rd. Edition, 2000.

[10] Brezis, H., *Análisis Funcional,* Alianza Universidad Textos, 1984.

[11] Butkov, E., *Mathematical Physics,* Addison-Wesley , 1968.

[12] Cañada, A., *Series y Transformada de Fourier y Aplicaciones*, vol. I, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, 1994.

[13] Carleson, L., *On convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series*, Acta Math., Springer Netherlands, 1966.

[14] Carleson, L., *Convergence and Summability of Fourier series*, Proc. Int. Cong. Math., Moscow, 1966, Izdat. Mir, 1968.

[15] Coddington, E. A. y Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.

[16] Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential equations*, Prentice-Hall, 1961.

[17] Courant, R. D. y Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol I y II, Interscience, 1962.

[18] Dieudonné, J., *History of Functional Analysis,* North-Holland Mathematics Studies, 1981.

[19] Dirac, P. A. M., *Principles of Quantum Mechanics*, 4ta. Edición, Oxford, 1958.

[20] Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators*, Wiley-IEEE, 1988.

[21] Fatou, P., *Series Trigonometriques et Series de Taylor*, Acta Math., 30, 1906, 335-400.

[22] Feynman, R. P., Hibbs, A. R., *Quantum Mechanics* & *Path Integrals*, New York, McGraw-Hill, 1965.

[23] Gelfand, I. M., *Lectures on Linear Algebra,* New York, Dover Publications, 1989.

[24] Gonzalez-Velasco, E. A., *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic Press, 1995.

[25] Gonzalez-Velasco, E. A., *Connections in Mathematical Analysis: the case of Fourier Series*, Amer. Math. Monthly, 1992.

[26] Gradshteyn, I. S., Ryshik, I. M., *Tables of Integrals Series and Products,* Edited by Alan Jeffrey & Daniel Zwillinger, Associated Press, 7th. Ed., 1995.

[27] Grossman, S. I., *Elementary Linear Algebra with Applications,* Wiley, 2005.

[28] Haberman, R., *Elementary Applications of Partial Differential Equations*, Prentice Hall, 2003.

[29] Halmos, P. R., *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand, 1967.

[30] Hassani, S., *Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields,* Springer-Verlag, 2008.

[31] Herstein, I. N., *Topics in Algebra*, Wiley, 1975.

[32] Hochstadt, H., *Integral Equations*, John Wiley and Sons, 1973.

[33] Hutson, V., Pym, J. S., *Applications of Functional Analysis and Operator Theory,* Academic Press Inc., 1980.

[34] Hsu, H., *Fourier Analysis*, Simon and Schuster, Inc. New York, EUA, 1970.

[35] Jauregui, A. *Funciones Especiales*, Editorial Universidad de Sonora, 2006.

[36] Kahane, J. P., Katznelson, Y., *Sur les Ensembles de Divergence des Series Trigonometriques*, Studia Math., 26, 1966.

[37] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York, 1968.

[38] Keener, J. P., *Principles of Applied Mathematics, Transformation and Approximation,* John Wesley and Sons, 1987.

[39] Kuhn, T. S., *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1962.

[40] Kirkpatrick, K. S., Lipschutz, S., Lipson, M. L., *Linear Algebra*, McGraw-Hill Publishing Co., 2000.

[41] Kline, N., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[42] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series,* Dover, New York, 1956.

[43] Knopp, K., *Theory and Applications of Infinite Series,* Blackie and Sons Ltd., 1954.

[44] Korner, T. W., *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.

[45] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley and Sons, 1978.

[46] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics,* John Wiley and Sons, 1979.

[47] Kuttler, K., *Modern Analysis*, CRC press, 1997.

[48] Lanczos, C., *Applied Analysis,* Pitman, London, l957.

[49] Lanczos, C., *Discourse on Fourier Series,* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966.

[50] Lang, S., *Linear Algebra,* Springer-Verlag New York Inc., 2004.

[51] Levi, E., *Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas* , Ed. UNAM, 1965.

[52] Libboff, R., *Introductory Quantum Mechanics,* Editorial Addison Wesley, 2003.

[53] Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions,* Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, 1964.

[54] Löwdin, P., *Linear Algebra for Quantum Mechanics*, Wiley-Interscience, 1998.

[55] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., *Elementary Classical Analisis*, Gordonsville, Virginia, U.S.A., W H Freeman & Co, 1993.

[56] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., *Basic Complex Analysis,* Ed. W. H. Freeman, 1999.

[57] Meyer, C. D., *Matrix Analysis and Applications to Linear Algebra,* SIAM, 2000.

[58] Papoulis, A., *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

[59] Pedersen, M., *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering,* Chapman & Hall, Editorial CRC Press, 2000.

[60] Reed, S., *Functional Analisis*, Academic Press, 1980.

[61] Reitz, J. R., *Foundations of Electromagnetic Theory,* Addison-Wesley, 1993.

[62] Ross, K., *Elemetary Analysis: The Theory of Calculus*, Springer, 1980.

[63] Sarton, G., *A History of Science* Harvard Univ. Press, Cambridge, 1952.

[64] Schwinger, J., *Quantum Kinematics and Dynamics*, Frontiers in Physics, Benjamin, 1970.

[65] Schucker, T., *Distributions, Fourier Tranform and Applications to Physics*, World Scientific, Singapore and New Jersey, 1991.

[66] Shilov, G., *Generalized Functions*, Academic Press, New York and London, 1977.

[67] Sirovich, L., *Introduction to Applied Mathematics,* Springer-Verlag, 1988.

[68] Sneddon, I. N., *Fourier Transforms* MacGraw-Hill, New York, 1951.

[69] Sobolev, S. L., *Applications of Functional Analisis in Mathematical Physics,* AMS, Providence, R. I., 1963.

[70] Sobolev, S. L., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics,* Pergamon, 1964.

[71] Sokolnikoff, I. S., *Tensor Analysis, Theory and Applications* John Wiley, New York, 1951.

[72] Spiegel, M., *Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw Hill, 1974.

[73] Spiegel, M., *Transformadas de Laplace,* Mc Graw-hill, 1991.

[74] Spiegel, M., *Formulas y Tablas de Mat Aplicadas,* Mc Graw-Hill, 2005

[75] Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 1979.

[76] Stephenson, G., *Partial Diferential Equations for Science & Engineering*, Imperial College Press, 1985.

[77] Stephenson, G., Radmore, P. M., *Advanced Mathematical Methods for Engineering and Science Students,* Cambridge University Press, 1990.

[78] Struik, D. J., *A Source Book in Mathematics,* Harvard Univ. Press, Cambridge, 1969.

[79] Takeuchi, Y., *Sucesiones y Series* (Tomo I), Limusa, 1986.

[80] Trim, D. W., *Applied Partial Differential Equations*, PWS, Kent Publishing Company, Boston, 1990.

[81] Tung, W. K., *Group Theory in Physics*, World Scientific, Philadelphia, 1985.

[82] Weinberger, H., *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Reverté, 1970.

[83] Whitehead, A. N., *Science and the Modern World*, The Free Press, New York, 1967, 1st. Ed., 1925.

[84] Wiener, N., *The Fourier Integral and some of its Applications*, Dover, New York, 1958 1st. Ed., 1933.

[85] Zeidler, E., *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1995.

[86] Zeidler, E., *Applied Functional Analysis: main principles and their applications*, Springer-Verlag, 1995.

[87] Zygmund, A., *Trigonometrical Series*, Dover, New York, 1955, 1st. Ed., 1935.

[88] Zygmund, A., *Notes on the History of Fourier Series.* Studies in Harmonic Analysis, M. Ash (Ed.), The Math. Assoc. of America, Washington, 1976.