

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas



**Estabilización Global de Sistemas Lineales en el Plano con
Control Positivo**

Tesis que para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas
presenta:

Martín Aarón Carrillo Carranza

Director de Tesis:
MC. Horacio Leyva Castellanos

Septiembre del 2010

Índice general

1. Introducción	3
2. Sistemas Lineales	6
2.1. Existencia y Unicidad	6
2.2. Subespacios Invariantes	9
3. Sistemas Lineales en el Plano	14
3.1. Retratos fase para sistemas canónicos simples	14
3.1.1. Valores propios reales y distintos	14
3.1.2. Valores propios iguales	16
3.1.3. Valores propios complejos	18
3.2. Clasificación de los retratos fase simples	19
4. Controlabilidad	21
4.1. Condiciones de Brammer	22
4.2. Otra Caracterización de Controlabilidad	22
5. Diseño de Estabilizadores Globales Positivos para Sistemas Lineales en el Plano	24
5.1. Sistemas Lineales con $\text{rango}(B) = 1$	24
5.1.1. Caso 1. <i>Un valor propio real repetido</i>	24
5.1.2. Caso 2. <i>Valores propios reales diferentes</i>	28
5.1.3. Caso 3. <i>Caso complejo</i>	32
5.2. Sistemas Lineales con $\text{rango}(B) = 2$	35
5.2.1. Caso 1. <i>Un valor propio real repetido en forma diagonal</i>	37
5.2.2. Caso 1. <i>Caso especial</i>	51
5.2.3. Caso 2. <i>Un valor propio real repetido</i>	54
5.2.4. Caso 3. <i>Valores propios reales diferentes</i>	59
6. Conclusiones	66

Agradecimientos

Me faltan palabras para expresar mis gratitudes hacia Dios. Sin duda, este trabajo de tesis, te lo dedico a ti Dios. Gracias por estar conmigo en los momentos más difíciles de mi vida y darme el valor para salir adelante, pero sobre todo, gracias te doy, por darme una familia maravillosa. Te amo mi señor.

A mi padre, José Martín Carrillo por ser un gran padre para mí, gracias por todos tus sabios consejos que me han hecho crecer como hombre, gracias por cuidar de mí y mis hermanos y buscar siempre lo mejor para nosotros, por hacerme sentir bien por más grande que sea un problema. A mi madre, María Bernardina Carranza, gracia madre por preocuparte tanto por mí y demostrarte que me quieres mucho, los amo a los dos.

A mi tía, María Luisa, gracias por cuidar de mí y ser para mí como una madre, por estar conmigo en todo momento, preocuparse por mí y quererme como a un hijo. Por todas las cosas bellas que he pasado a su lado, por todas las veces que me ha hecho reír, pero sobre todo, gracias por brindarme su apoyo ya que sin el hubiera sido difícil llegar hasta este lugar. Gracias por muchas otras cosas, la amo y siempre lo hare.

A mis abuelos, Josefina Higuera y Jorge Carranza, gracias abuelos por brindarme su apoyo en los momentos que lo necesite, los quiero mucho.

A mi director de tesis, Horacio Leyva Castellanos, por ser mi maestro, confiar en mí y sobre todo, por dedicarme el tiempo suficiente en la elaboración de este trabajo. Mis agradecimientos también mis sinodales, el Dr. Fernando Verduzco, el Dr. Martín Eduardo Frías y el Dr. Francisco Armando Carrillo, por sus correcciones y críticas que me fueron de gran ayuda, gracias a todos.

Capítulo 1

Introducción

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

En las aplicaciones, un sistema de control representa un sistema dinámico, donde $\dot{x} = Ax$ es una dinámica libre (sin fuerzas externas) y $\dot{x} = Ax + Bu(x)$ es una dinámica realimentada, donde interviene el término realimentado $Bu(x)$.

Bajo la hipótesis de controlabilidad, el presente trabajo muestra un método para resolver el **problema de estabilización global con control positivo** [5] para sistemas lineales en el plano de la forma (1.1) por medio de una función Lipschitz $u(x)$.

Una función $f(x)$ es Lipschitz si satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

para toda x y y en \mathbb{R}^n , donde L es una constante positiva y $\|\bullet\|$ denota una norma Euclidiana.

Sin perder generalidad, suponemos que la matriz A está en la *forma canónica de Jordan*.

El problema de estabilización global con control positivo consiste en diseñar una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ para el sistema (1.1), de modo que la función $u(x)$ satisface las siguientes propiedades:

1. *El punto de equilibrio $x = 0$ de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = Ax + Bu(x)$$

es globalmente asintóticamente estable.

2. $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ es una función Lipschitz.
3. $u = 0$ pertenece a la frontera de U ($0 \in \partial U$).

El sistema (1.1) es llamado *globalmente estabilizante* si el problema tiene solución. Dicho problema de estabilización está compuesto por las condiciones (1) y (2). La condición (3) está poco estudiada y representa una dificultad mayor para resolver el problema de estabilización.

El problema de estabilización global con control positivo ha sido considerado en los siguientes casos particulares: Bastin y Praly (1999), presentan un diseño de función de realimentación positiva para la estabilización de una clase de sistemas de balance de masa, donde el estado solución del sistema realimentado converge a la iso-masa (la cual es una porción de un hiperplano en el espacio de estado). Leenher y Aeyels (2001), establecen condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema de estabilización en el caso de un sistema lineal positivo con control sin restricción.

H.J. Sussmann y Y. Yang (1991), requieren de una matriz A con valores propios simples para mostrar que el sistema (1) es estabilizable por medio de una saturación del control lineal $u(x) = b^T x$. Pero ellos no abordan el problema de estabilización con ($0 \in \partial U$). Finalmente, Lin y Sontag (1995), consideraron el problema de diseño con control restringido a los intervalos abiertos $U = (0, 1)$ ó $U = (0, \infty)$ la realimentación que presentan no es necesariamente continua $x = 0$. En todos los trabajo anteriores, no se aborda el caso del control nulo en la frontera del conjunto admisible U . Por otro lado, es claro que el conjunto de sistemas estabilizables mediante una función de control continua que toma valores en el conjunto $U = [0, \infty)$ es más pequeño que el conjunto de sistemas estabilizables, con controles restringidos al conjunto $U = (-\infty, \infty)$.

Para resolver el problema de estabilización, supondremos que el sistema es controlable con controles positivos. Es decir, si (1.1) es nulo-controlable con $u \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ entonces damos el estabilizador.

De acuerdo a los resultados de Brammer, así como de las equivalencias logradas en [4], se clasifican los casos a estabilizar de acuerdo a las matrices A y B que definen el sistema de control.

En este trabajo se considera el caso $n = 2$, es decir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Mostraremos la estabilización global de los sistemas lineales inestables de la forma

(1.1), de manera que el diseño del control $u(x_1, x_2)$ es

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (|K^T x| + K^T x) = \max \{0, K^T x\}$$

donde K^T es la matriz que determinaremos en este trabajo y $u(x) \in (R)_+^m$.

Para diseñar el control estabilizante, supondremos que el sistema es controlable con controles positivos, de modo que, para tener estabilidad (por un resultado visto en el capítulo 2), consideramos los parámetros $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$, tal que

$$\text{tr}(A + BK^T) = -p_1 \quad \text{y} \quad \det(A + BK^T) = p_2$$

partiendo de estas ecuaciones se encuentra la matriz K y se da el estabilizante $u(x) = Kx$.

Dado que los parámetros $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$ son libres, los podemos elegir a conveniencia para lograr tener raíces complejas con parte real negativa, de modo que, por estrategia de dinámica, tengamos una estabilidad suave.

En el capítulo 5 se presenta los resultados obtenidos en este trabajo, conviene mencionar que, además de la matriz A se considera la matriz B . Para la matriz B , tenemos dos casos

1. $\text{rango}(B) = 1$
2. $\text{rango}(B) = 2$

dicho capítulo inicia con los sistemas con $\text{rango}(B) = 1$ y finaliza con los sistemas con $\text{rango}(B) = 2$

Para cada caso abordado, se presenta al final un ejemplo donde se muestra una simulación hecha con el paquete Simnon 3.0, se toma una condición inicial de la forma $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ y se observa que x_0 converge al origen.

Capítulo 2

Sistemas Lineales

2.1. Existencia y Unicidad

En este capítulo responderemos la pregunta de cuándo tiene solución única el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

donde $x = x(t)$ es una función escalar, esto es, $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo vectorial continuo, donde

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

Diremos que una función $\varphi(t)$ es solución del problema con condiciones iniciales (2.1) si

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)), \text{ con } \varphi(t_0) = x_0$$

En general, la solución φ depende de las condiciones iniciales, es decir, $\varphi = \varphi(t, (t_0, x_0))$.

Existencia y Unicidad

Nuestro objetivo en esta parte será probar la existencia de una solución del problema de condiciones iniciales (2.1) definida en un cierto intervalo I , con $t_0 \in I$.

¿Cómo encontrar una solución al problema (2.1)? Hagamos lo mismo que hacemos cuando resolvemos ecuaciones algebraicas: despejar la incógnita. En este caso, tratemos de despejar la función incógnita $x(t)$ de la ecuación diferencial mediante integración, que es el proceso inverso de la diferenciación. Integremos en el intervalo $[t_0, t] \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \frac{dx}{ds} ds &= \int_{t_0}^t (s, x) ds \iff \\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t (s, x(s)) ds \iff \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t (s, x(s)) ds\end{aligned}$$

Observamos que no es posible, mediante este procedimiento, despejar $x(t)$, sin embargo, la ecuación integral que hemos obtenido será de muy importante para probar la existencia de una solución.

Diremos que la función continua $\varphi(t)$, definida sobre el intervalo I , es una solución sobre I de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (s, x(s)) ds \quad (2.2)$$

si para cada $t \in I$, $f(t, \varphi(t))$ está definida y

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (s, \varphi(s)) ds \quad (2.3)$$

El siguiente lema establece la equivalencia entre las soluciones del problema (2.1) y las soluciones de la ecuación integral (2.2).

Lema 2.1. *Considere el problema de condiciones iniciales*

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.4)$$

Suponga que $f(t, x)$ es una función continua en el rectángulo R . Una función $\varphi(t)$ definida sobre un intervalo I , es solución de (2.4) sobre I si y sólo si $\varphi(t)$ es una solución continua de la ecuación integral (2.2)

La demostración de este lema se encuentra en [1].

A continuación, enunciamos el teorema que nos garantiza la existencia de una única solución al problema (2.1). Es importante mencionar que este resultado se puede generalizar a sistemas de ecuaciones diferenciales definidos en dominios más generales.

Teorema 2.2. (Teorema de Existencia y Unicidad) Considere el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.5)$$

Supongamos que $f(t, x)$ es continua y K - Lipschitz sobre el rectángulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$. Sea M tal que $|f(t, x)| < M$ para toda $(t, x) \in R$ y hagamos $0 < \alpha < \min\{\frac{1}{K}, \frac{1}{M}, a\}$. Entonces existe una única solución al problema (2.5) válida sobre $|t - t_0| < \alpha$.

El teorema anterior puede aplicarse al caso vectorial, es decir, si suponemos que x es el vector con componentes x_1, x_2 , luego $f(t, x)$ es un vector de funciones con componentes $f_1(t, x_1, x_2), f_2(t, x_1, x_2)$ (donde suponemos que cada f_i es continua) y x_0 tiene componentes α_1, α_2 , este problema de valor inicial puede escribirse en notación vectorial como

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

Puede probarse que el vector de funciones $f(t, x)$ satisface la condición Lipschitz, siempre y cuando, cada $f_i(t, x)$ satisface tal condición con respecto a cada componente de x_i , con la constante Lipschitz L_i , para $i = 1, 2$. Entonces

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |f_1(t, x) - f_1(t, y)| + |f_2(t, x) - f_2(t, y)|$$

de modo que para cada $i = 1, 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f_i(t, x) - f_i(t, y)| &= |f_i(t, x_1, x_2) - f_i(t, y_1, y_2)| \\ &= |f_i(t, x_1, x_2) - f_i(t, y_1, x_2) + f_i(t, y_1, x_2) - f_i(t, y_1, y_2)| \\ &\leq L_1^i |x_1 - y_1| + L_2^i |x_2 - y_2| \end{aligned}$$

Sea $L^i = \max[L_1^i, L_2^i]$, tenemos entonces

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L^i |x - y|$$

si $K = \sum_1^2 L^i$ entonces $|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y|$, es decir, el vector de funciones satisface la condición Lipschitz.

En [3] se demuestra el teorema (2.2) y es de carácter local, es decir, nos garantiza la existencia de una única solución definida en un cierto intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Luego, si aplicamos este teorema de nuevo en los extremos del intervalo, podremos extender la solución a un intervalo más grande, y así sucesivamente. Sin embargo, puede ocurrir que los nuevos intervalos de definición de la solución, sean cada vez más pequeños y no sea entonces posible extender el dominio de definición de la solución más allá de una cota.

2.2. Subespacios Invariantes

Uno de los estudios fundamentales en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales es encontrar los puntos de equilibrio y determinar su tipo de estabilidad. En esta sección veremos que existen soluciones, distintas de los puntos de equilibrio, que son cruciales para determinar los retratos fase de los sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes.

Determinemos primeramente el conjunto de puntos de equilibrio del sistema

$$\dot{x} = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Por definición, $x = \bar{x}$ es un punto de equilibrio si

$$A\bar{x} = 0$$

el cual es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Sabemos que $\bar{x} = 0$ siempre es solución de este tipo de sistemas; la solución es única si $\det(A) \neq 0$, mientras que si $\det(A) = 0$, infinidad de soluciones.

Consideremos de nuevo el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\dot{x} = Ax \tag{2.6}$$

y fijemos un valor de t , luego la exponencial e^{tA} puede verse como un *mapeo* (función) de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n : dado el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $e^{tA}x_0$ es el punto al cual llega la solución que inicia en x_0 en un tiempo t .

El conjunto de todos estos mapeos $e^{tA} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ puede considerarse como la descripción del movimiento de los puntos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a través de las soluciones del sistema lineal (2.6). Este conjunto de mapeos es llamado el **flujo del sistema lineal**. Si, por ejemplo, el sistema describe el movimiento de un fluido, entonces una curva solución describe el movimiento de una partícula individual del fluido, mientras que el flujo describe el movimiento del fluido completo. En pocas palabras, el flujo puede pensarse como el conjunto de todas las soluciones del sistema.

El concepto de flujo nos permite asegurar que dos soluciones en el retrato fase no pueden intersectarse. Supongamos que así sea. Sean φ_1 la solución que inicia en x_1 y φ_2 la solución que inicia en x_2 , las cuales se intersectan en x . Sea t_1 el tiempo que necesita la solución φ_1 para alcanzar el punto x desde x_1 : $e^{t_1 A}x_1 = x$. Igualmente para φ_2 sea t_2 el tiempo que necesita la solución φ_2 para alcanzar el punto x desde x_2 : $e^{t_2 A}x_2 = x$. Igualando obtenemos

$$e^{t_1 A}x_1 = x = e^{t_2 A}x_2$$

Supongamos que $t_1 > t_2$, entonces

$$x_2 = e^{(t_1-t_2)A}x_1$$

luego entonces, x_2 es un punto sobre la solución φ_1 , por lo tanto $\varphi_1 = \varphi_2$. En efecto, los sistemas lineales satisfacen el teorema de existencia y unicidad .

Ejemplo 2.2.1. *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} x$$

cuya solución esta dada por

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t(x_{01} + x_{02}) - e^{3t}(x_{01} + 2x_{02}) \\ -e^t(x_{01} + x_{02}) + e^{3t}(x_{01} + 2x_{02}) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Determinemos las soluciones para algunas condiciones iniciales en particular.

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t x_0$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{3t} x_0$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{3t} \\ -e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo podemos observar un hecho muy interesante. Sabemos que cada condición inicial x_0 representa un vector en el espacio vectorial \mathbb{R}^2 . El subespacio vectorial generado por x_0 el cual denotaremos por $\langle x_0 \rangle$, se define como $\langle x_0 \rangle = \{s x_0 / s \in \mathbb{R}\}$ y geoméricamente representa una recta pasando por el origen en la dirección x_0 . Regresando al ejemplo, observamos que las dos primeras soluciones evolucionan en los subespacios vectoriales generados por las respectivas condiciones iniciales, mientras que la tercera no. De hecho las dos primeras soluciones se alejan del origen, ya que $e^t > 1$ y $e^{3t} > 1$ para toda $t > 0$.

¿Existirán otras soluciones con la característica de las dos primeras? La respuesta es no. Veamos el por qué, analizando la solución general (2.7).

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t(x_{01} + x_{02}) - e^{3t}(x_{01} + 2x_{02}) \\ -e^t(x_{01} + x_{02}) + e^{3t}(x_{01} + 2x_{02}) \end{pmatrix} \\ &= \left(x_{01} e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - x_{01} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_{02} e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2x_{02} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (x_{01} + x_{02}) e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - (x_{01} + 2x_{02}) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta última expresión concluimos que la solución $x(t)$ evolucionará sobre el espacio generado por la condición inicial x_0 si x_0 es tal que $x_{01} + x_{02} = 0$ ó $x_{01} + 2x_{02} = 0$, es decir, si y sólo si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ó $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, justamente los vectores propios del ejemplo. ¿Pero qué tienen de particular estos vectores?. Resultan ser los vectores propios de la matriz A . Esto nos lleva a los conceptos de **eigenespacio** y de **subespacio invariante**.

Definición 2.1. *Llamaremos eigenespacio al espacio vectorial generado por el vector propio v_i de una matriz A , el cual denotaremos por E_{v_i} . La dimensión del eigenespacio es uno si v_i es real, $E_{v_i} = \langle v_i \rangle$, y es bidimensional si es complejo, $E_{v_i} = \langle v_i \rangle$.*

Definición 2.2. *Diremos que un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^n$, es **invariante** con respecto al flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $e^{At}v \in V$ para toda $v \in V$ y para toda $t \in \mathbb{R}$*

En la siguiente proposición demostramos, para el caso particular en que la matriz A posee valores propios reales diferentes, que los eigenespacios son subespacios invariantes con respecto al flujo e^{tA} .

Proposición 2.3. *Considere el sistema lineal con coeficientes constantes*

$$\dot{x} = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Supóngase que la matriz A posee n valores propios reales diferentes $\lambda_1 \dots \lambda_n$ con sus respectivos vectores propios $v_1 \dots v_n$. Entonces los eigenespacios E_{v_i} son invariantes con respecto al flujo e^{tA} . Además, si el respectivo valor propio λ_i es positivo, entonces las soluciones sobre E_{v_i} se alejan del origen, mientras que si es negativo, las soluciones convergen al origen.

Demostración: Debemos probar que

1. Para cada $w \in E_{v_i}$ y para todo t en \mathbb{R} , $e^{tA}w \in E_{v_i}$
2. Si $\lambda_i < 0 (> 0)$ entonces $e^{tA}w \rightarrow 0$ (diverge) cuando $t \rightarrow +\infty$.

Probaremos la primera parte.

Sabemos que $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$, donde $P = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ es no singular. Ahora bien,

$$\begin{aligned} P^{-1}Pe^{tA} &= I \Leftrightarrow P^{-1}(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)e^{tA} = I \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}v_1e^{tA} \ P^{-1}v_2e^{tA} \ \dots \ P^{-1}v_ne^{tA}) = I \\ &\Leftrightarrow P^{-1}v_i e^{t\lambda_i} = e_i \\ &\Leftrightarrow v_i = P_i e_i \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde e_i es el vector unitario con un uno en la posición i -ésima. Obsérvese además que, si $C = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, entonces

$$Ce_i = c_i e_i \quad (2.9)$$

Hagamos $w = s_0 v_i$ para algún $s_0 \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned} e^{tA}w &= Pe^{tJ}P^{-1}s_0v_i \\ &= s_0Pe^{tJ}P^{-1}v_i \\ &= s_0Pe^{tJ}e_i \quad \text{por (2.8)} \\ &= s_0Pe^{\lambda_i t}e_i \quad \text{por (2.9)} \\ &= s_0e^{\lambda_i t}Pe_i \\ &= s_0e^{\lambda_i t}v_i \quad \text{por (2.8)} \\ &= e^{\lambda_i t}s_0v_i \\ &= e^{\lambda_i t}w \end{aligned}$$

es decir, $e^{tA}w = e^{\lambda_i t}w$ para cada $w \in E_{v_i}$ y para toda $t \in \mathbb{R}$. Esto prueba la primera parte. Es claro que la segunda parte se sigue de esto último.

En general, si la matriz A no posee valores propios repetidos, los eigenspacios serán espacios de dimensión uno, para los valores propios reales, y de dimensión dos, para los valores propios complejos, siendo todos ellos invariantes con respecto al flujo e^{tA} . Si existen valores propios repetidos, entonces los eigenspacios seguirán siendo invariantes, pero de dimensión posiblemente mayor que dos.

Dentro del conjunto de todos los eigenspacios, haremos la siguiente clasificación:

$$\begin{aligned} &\text{el subespacio estable } E^s = \langle v_1, \dots, v_{n_s} \rangle \\ &\text{el subespacio inestable } E^u = \langle v_1, \dots, v_{n_u} \rangle \\ &\text{el subespacio central } E^c = \langle w_1, \dots, w_{n_c} \rangle \end{aligned}$$

donde v_1, \dots, v_{n_s} son los vectores propios ((incluyendo posiblemente generalizados) cuyos valores propios tienen parte real negativa; v_1, \dots, v_{n_u} son los vectores propios (incluyendo posiblemente generalizados) cuyos valores propios tienen parte real positiva y w_1, \dots, w_{n_c} son los vectores propios (incluyendo posiblemente generalizados) cuyos valores propios tienen parte real cero. Es claro que $n_s + n_u + n_c = n$. El nombre de estos subespacios claramente refleja el comportamiento de las soluciones en cada uno de ellos. Las soluciones en E^s son soluciones que convergen al origen, mientras que las soluciones en E^u son divergentes. Las soluciones en E^c no presentan un comportamiento en particular.

Ejemplo 2.2.2. Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$$

Determinaremos los subespacios E^s , E^u y E^c . Para ello necesitamos determinar los vectores propios. Observamos que el polinomio característico es

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

luego, los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$. Para los vectores propios debemos resolver el sistema homogéneo de ecuaciones

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

Tenemos que:

si $\lambda_1 = 3$ entonces $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, si $\lambda_2 = -2$ entonces $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Concluimos que $E^s = \langle v_2 \rangle$, $E^u = \langle v_1 \rangle$ y $E^c = \emptyset$. Ver figura (2.1)

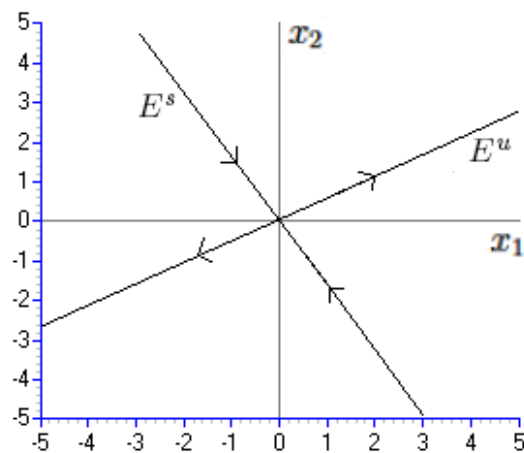


Figura 2.1: E^s es estable mientras que E^u inestable.

Capítulo 3

Sistemas Lineales en el Plano

En esta sección daremos una caracterización completa de los sistemas en el plano, es decir, dado el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, daremos su solución en forma explícita y estudiaremos su retrato fase. En las siguientes dos secciones estableceremos los retratos fase del sistema canónico

$$\dot{y} = Jy \tag{3.1}$$

para los distintos casos de los valores propios. Finalmente en la tercer sección damos una clasificación de los distintos retratos fase obtenidos.

Diremos que un sistema lineal es *simple* si ninguno de sus valores propios es cero.

3.1. Retratos fase para sistemas canónicos simples

En esta sección consideraremos el sistema canónico (3.1) y estudiaremos tres casos: *valores propios reales y distintos, valores propios iguales y valores propios complejos.*

3.1.1. Valores propios reales y distintos

En este caso tenemos el sistema canónico

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y$$

con $y(0) = (y_{01}, y_{02})^T$. Su solución es

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_{01} \quad y \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_{02}$$

3.1. RETRATOS FASE PARA SISTEMAS CANÓNICOS SIMPLES 15

Si $\lambda_{1,2} < 0$ entonces las soluciones en el retrato fase convergen al origen. Se dice que el origen es un **nodo estable**. Para visualizar la forma de las soluciones en el plano y_1 vs y_2 debemos expresar $y_2 = y_2(y_1)$ y eliminar la dependencia del tiempo t . Supongamos que $y_{01} \neq 0$ (si $y_{01} = 0$ la solución correspondiente evoluciona sobre el eje vertical), entonces es claro que $e^t = \left(\frac{y_1}{y_{01}}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}$ luego $y_2 = (e^t)^{\lambda_2} y_{02}$, tenemos entonces que

$$y_2 = C y_1^\lambda \quad (3.2)$$

con $C = \frac{y_{02}}{(y_{01})^\lambda}$ y $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

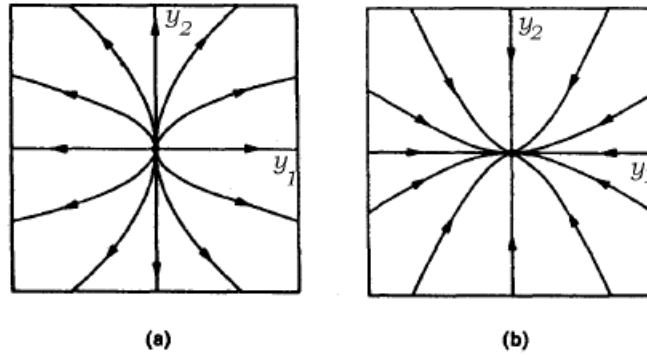


Figura 3.1: Valores propios reales y distintos del mismo signo dan lugar a nodos: (a) inestable ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$), (b) estable si ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$).

Supongamos que $\lambda > 0$. Derivando (3.2)

$$\frac{dy_2}{dy_1} = C \lambda y_1^{\lambda-1}$$

luego, si $y_1 \rightarrow 0$ entonces

$$\frac{dy_2}{dy_1} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_1 > 0 \\ \infty & \text{si } \lambda_1 < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

de (3.3) concluimos lo siguiente: si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, es decir, si $\lambda < 1$, entonces las soluciones convergen al origen de forma tangencial al eje vertical; si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, es decir, $\lambda > 1$, entonces las soluciones convergen al origen de forma tangencial al eje horizontal. En este caso tenemos los subespacios invariantes $E^s = \mathbb{R}^2$, $E^u = E^c = \emptyset$. Un razonamiento similar se sigue para el caso $\lambda_{1,2} > 0$. En este caso se dice que el origen es un **nodo inestable**. Los subespacios invariantes son $E^s = \mathbb{R}^2$, $E^u = E^c = \emptyset$. Ver figura 2.1

3.1. RETRATOS FASE PARA SISTEMAS CANÓNICOS SIMPLES 16

Supongamos ahora que $\lambda < 0$, es decir, los valores propios son de signos opuestos. De la ecuación (2.2) concluimos que las curvas solución en el retrato fase son curvas hiperbólicas. En este caso se dice que el origen es un **punto silla** y los subespacios invariantes son $E^s = E^u = \mathbb{R}$, $E^c = \emptyset$. Ver figura (3.2)

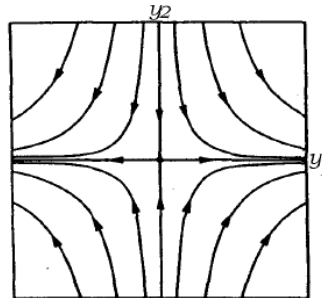


Figura 3.2: Valores propios reales de signos opuestos dan lugar a sillas.

3.1.2. Valores propios iguales

Si J es diagonal, es decir, si tenemos el sistema canónico

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y$$

entonces de (3.2) concluimos que las soluciones en el retrato fase son rectas pasando por el origen. Las soluciones convergen o divergen del origen dependiendo del signo de λ . El origen recibe el nombre de **nodo estrella**. Ver figura (3.3)

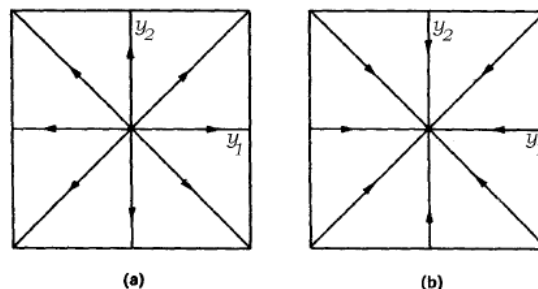


Figura 3.3: Valores propios reales iguales dan lugar a nodos estrella: **(a)** inestable ($\lambda > 0$), **(b)** estable ($\lambda < 0$).

3.1. RETRATOS FASE PARA SISTEMAS CANÓNICOS SIMPLES 17

Si J es no-diagonal, tenemos entonces el sistema canónico

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y$$

con $y(0) = (y_{01}, y_{02})^T$. Su solución es

$$y_1(t) = e^{\lambda t} (y_{01} + y_{02}t) \quad y \quad y_2(t) = e^{\lambda t} y_{02}$$

es posible expresar $y_1 = y_1(y_2)$:

$$y_1 = y_2 \left(\frac{y_{01}}{y_{02}} + \frac{1}{\lambda} \text{Ln} \left(\frac{y_2}{y_{02}} \right) \right)$$

además si observamos la derivada

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \left(\frac{y_{01}}{y_{02}} + \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} \text{Ln} \left(\frac{y_2}{y_{02}} \right) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{cuando } y_2 \longrightarrow 0$$

concluimos que las soluciones, en el retrato fase, entran o salen del origen, dependiendo del signo de λ , siendo tangentes al eje horizontal. Ver figura (3.4). El origen es llamado **nodo impropio** (estable si $\lambda < 0$ e inestable si $\lambda > 0$).

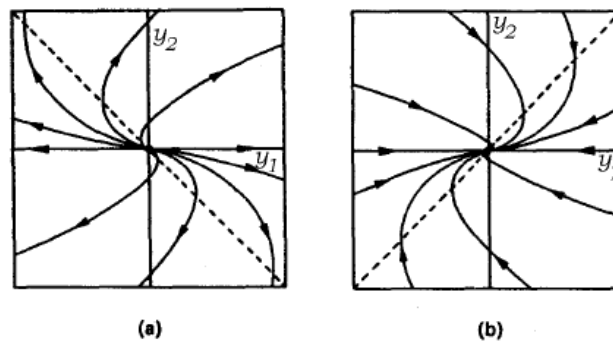


Figura 3.4: Cuando A es no-diagonal, valores propios iguales dan lugar a nodos impropios: **(a)** inestable ($\lambda > 0$), **(b)** estable ($\lambda < 0$).

3.1.3. Valores propios complejos

Tenemos el sistema canónico

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} y$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha y_1 - \beta y_2 \\ \dot{y}_2 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Haciendo, $y_1 = r \cos \theta$ y $y_2 = r \sin \theta$, se transforma el sistema (3.4) a coordenadas polares de la siguiente forma. Sabemos que

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \tan \theta = \frac{y_2}{y_1} \tag{3.5}$$

Derivando la primera ecuación en (3.5) con respecto al tiempo obtenemos que

$$\begin{aligned} 2r\dot{r} &= 2y_1\dot{y}_1 + 2y_2\dot{y}_2 \\ \Leftrightarrow r\dot{r} &= y_1(\alpha y_1 - \beta y_2) + y_2(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= \alpha r \end{aligned}$$

Derivemos ahora la segunda ecuación en (3.5),

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta \dot{\theta} &= \frac{y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2}{y_1^2} \\ \Leftrightarrow (1 + \tan^2 \theta) \dot{\theta} &= \frac{y_1(\alpha y_1 - \beta y_2) + y_2(\alpha y_1 + \beta y_2)}{y_1^2} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right) \dot{\theta} &= \frac{\beta(y_1^2 + y_2^2)}{y_1^2} \\ \Leftrightarrow \dot{\theta} &= \beta \end{aligned}$$

Tenemos entonces que el sistema (3.4) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta \end{aligned}$$

cuya solución es

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + \beta_0$$

Si $\alpha < 0$, entonces cuando $t \rightarrow \infty$ las soluciones convergen al origen en forma de espiral. Si $\alpha > 0$ entonces las soluciones se alejan del origen también en forma espiral. En ambos casos se dice que el origen es un **foco** (estable si $\alpha < 0$ e inestable si $\alpha > 0$). Si $\alpha = 0$ entonces las soluciones giran alrededor del origen formando círculos. Se dice que el origen es un **centro**. Ver figura (3.5)

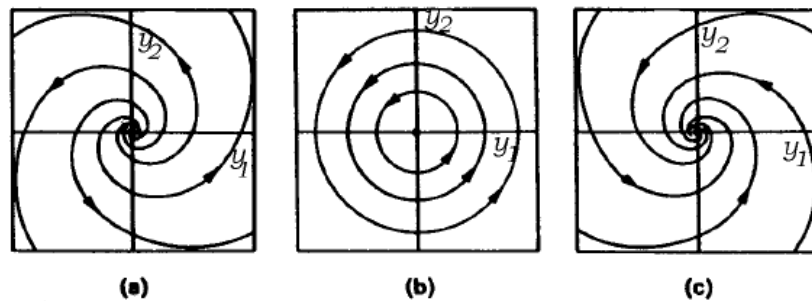


Figura 3.5: Valores propios complejos dan lugar a (a) focos inestables ($\alpha > 0$), (b) centros ($\alpha = 0$) y (c) focos estables ($\alpha < 0$).

3.2. Clasificación de los retratos fase simples

Hemos encontrado cuatro tipos diferentes de retratos fase para sistemas canónicos simples: *nodos*, *focos*, *centros* y *sillas*.

El siguiente teorema nos clasifica los retratos fases del sistema $\dot{x} = Ax$.

Teorema 3.1. *Considere el sistema lineal simple en \mathbb{R}^2*

$$\dot{x} = Ax \tag{3.6}$$

y sean $\mu_1 = \text{tr}(A)$ y $\mu_2 = \det(A)$ luego

1. Si $\mu_2 > 0$ entonces (3.6) tiene un punto silla en el origen.
2. Si $\mu_2 > 0$ y $\mu_1^2 - 4\mu_2 \geq 0$ entonces (3.6) tiene un nodo en el origen. Es estable si $\mu_1 < 0$ e inestable si $\mu_1 > 0$.
3. Si $\mu_2 > 0$, $\mu_1^2 - 4\mu_2 < 0$ y $\mu_1 \neq 0$, entonces (3.6) tiene un foco en el origen. Estable si $\mu_1 < 0$ e inestable si $\mu_1 > 0$.
4. Si $\mu_2 > 0$ y $\mu_1 = 0$ entonces (3.6) tiene un centro en el origen.

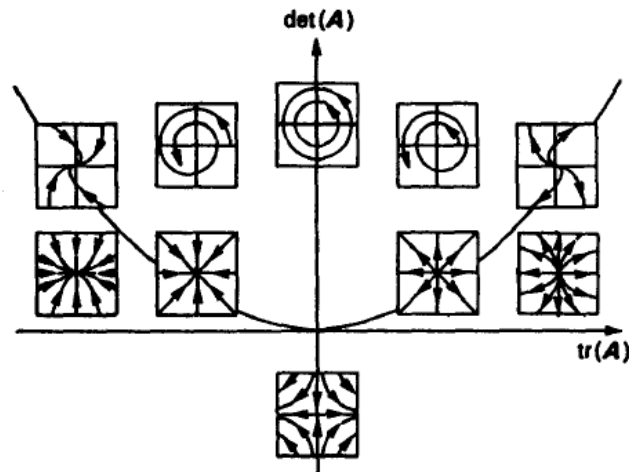


Figura 3.6: Retrato fase del sistema $\dot{x} = Ax$ en función de la traza y el determinante de A .

La figura (3.6) resume el teorema anterior.

En este trabajo estabilizaremos globalmente el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

de manera que la estabilización se dé con focos (que no es la única manera), recordando que, esta estabilidad se presenta cuando los valores propios del sistema son complejos conjugados con parte real negativa, donde las trayectorias son curvas en forma de espiral que convergen al origen conforme $t \rightarrow \infty$.

Capítulo 4

Controlabilidad

Primero daremos la propiedad importante de un sistema de control y que jugará un papel crucial en los sistemas de control que estudiaremos, así como la estabilización de estos sistemas.

A grandes rasgos, el concepto de controlabilidad, es la capacidad de mover un sistema en toda su configuración de espacios, usando solamente ciertas manipulaciones admisibles. Un ejemplo de variación de la notación de controlabilidad que ha sido introducida en la literatura de sistemas de control es la controlabilidad de estado.

El estado de un sistema, el cual es el conjunto de valores de las variables del sistema, describe completamente el sistema en cualquier momento dado. Es decir, ninguna información del pasado de un sistema ayudará a predecir el futuro, si los estados en el presente son conocidos. A continuación daremos una definición de controlabilidad de un sistema.

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.1}$$

donde A es una matriz real de dimensión 2×2 , $x \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times m}$ y el parámetro u está restringido a tomar valores en el cono $U = \mathbb{R}_+^m$, es decir, en el primer cuadrante de \mathbb{R}^2

Definición 4.1. Diremos que el estado x_1 del sistema anterior es **controlable** (con control positivo) en $t = t_0$, si toda condición inicial x_0 puede ser transferida a x_1 en un intervalo de tiempo finito, para algún control $u(t, x_0)$ (positivo). Si todos los estados de un sistema son controlables, diremos que el sistema es **completamente controlable** (con control positivo), o simplemente controlable (con control positivo).

4.1. Condiciones de Brammer

En el seguimiento de la teoría, el desarrollo de este trabajo se basa sobre el sistema de control (4.1) para el cual el desarrollo se sigue de las siguientes condiciones. El presente resultado, demostrado en [2], da una caracterización de los sistemas CCP (Controlables con Control Positivo).

Teorema 4.1. *El sistema (1.1) es CCP si y sólo si*

- a) *La matriz de controlabilidad $\varsigma = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ tiene rango n .*
 b) *No existe vector propio real v de A^T que satisfaga que el producto escalar*

$$v^t B u \leq 0$$

para todo $u \in \mathbb{R}_+^m$

(a) y (b) serán llamadas la primera y segunda condición de Brammer, respectivamente.

4.2. Otra Caracterización de Controlabilidad

El inciso (a) del teorema (2.1) nos da una caracterización completa de los sistemas controlables. En los siguientes resultados se trabaja con el teorema de Brammer ya que es una fuerte herramienta para caracterizar algunos sistemas en forma particular para estudiar sistemas lineales con control restringido.

De todo el conjunto de sistemas CCP, se estudiaron aquellos en que la matriz A tiene una forma muy particular, y se establecieron condiciones necesarias y suficientes sobre la matriz B para asegurar la controlabilidad con control positivo. Los 4 caso que se estudiaron fueron:

1. Un valor propio real repetido en forma diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

2. Un valor propio real repetido

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

3. Valores propios reales diferentes

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

4. Caso complejo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Los resultados (para \mathbb{R}^2) que se obtuvieron en [4] son los siguientes:

Proposición 4.2. *El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (4.2), es positivamente controlable con 3 controles si y sólo si B tiene rango 2 y existe una columna b_k de B tal que*

$$b_k = \sum_{j \neq k}^3 c_j b_j \quad c_j < 0$$

Proposición 4.3. *El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (4.3) es controlable con control positivo si y sólo si en el último renglón de B hay dos entradas de signo opuesto.*

Proposición 4.4. *El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (4.4) es controlable con control positivo si y sólo si en cada renglón de B hay dos entradas de signo opuesto.*

Proposición 4.5. *El sistema de control $\dot{x} = Ax + bu$, con A de la forma (4.5) es controlable con control positivo si y sólo si el vector $b \neq 0$.*

Capítulo 5

Diseño de Estabilizadores Globales Positivos para Sistemas Lineales en el Plano

Iniciaremos con los sistemas lineales de la forma (4.1) donde $\text{rang}(B) = 1$, en esta sección solo se estudiarán los sistemas con A de la forma (4.3), (4.4) y (4.5), los sistemas con A de la forma (4.2) no entran aquí ya que es necesario que $\text{rang}(B) = 2$, por la proposición (4.2).

A demás, en cada sistema de control se da una matriz B y para esta se propone una matriz K .

5.1. Sistemas Lineales con $\text{rango}(B) = 1$

5.1.1. Caso 1. *Un valor propio real repetido*

Consideremos el problema de estabilizar el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Bu(x_1, x_2)$$

mediante una realimentación $u(x_1, x_2) \geq 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & cb_1 \\ b_2 & cb_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u(x_1, x_2) = K^T x = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c}k_1 & \frac{1}{c}k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$b_1 \cdot b_2 \neq 0 \quad \text{y} \quad c < 0.$$

Nuestro objetivo principal en este trabajo será, determinar la matriz K de modo que se establezca globalmente el sistema.

Para continuar, nótese que se cumple la hipótesis de controlabilidad para este caso, pues en el último renglón de B hay cambio de signo $(b_2)(cb_2) < 0$.

Por notación, diremos que A_{ij} es la matriz que resulta de realimentar el sistema con la aplicación del i -ésimo control y j -ésimo control respectivamente.

Tomemos ahora el sistema realimentado pero con un solo control, es decir, las matrices, A_1 y A_2 .

Ahora bien

$$A_1 = A + BK_1^T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & cb_1 \\ b_2 & cb_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + b_1k_1 & 1 + b_1k_2 \\ b_2k_1 & \lambda + b_2k_2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A + BK_2^T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & cb_1 \\ b_2 & cb_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{c}k_1 & \frac{1}{c}k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + b_1k_1 & 1 + b_1k_2 \\ b_2k_1 & \lambda + b_2k_2 \end{pmatrix}$$

es claro que $A + BK_1^T = A + BK_2^T$, así que A_1 y A_2 tienen el mismo polinomio característico

$$P_{A_1}(X) = P_{A_2}(X) = X^2 - \text{tr}(A_1)X + \det(A_1)$$

Ahora, del teorema (3.1), para tener estabilidad, se requiere que

$$\text{tr}(A_1) < 0 \quad \text{y} \quad \det(A_1) > 0$$

de modo que, consideremos $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$ tal que

$$\text{tr}(A_1) = -p_1 \quad \text{y} \quad \det(A_1) = p_2, \quad (5.1)$$

más aún

$$\text{tr}(A_1) = \text{tr}(A_2) \quad \text{y} \quad \det(A_1) = \det(A_2)$$

así que, basta con considerar únicamente (5.1). Entonces

$$\begin{aligned} 2\lambda + b_1k_1 + b_2k_2 &= -p_1 \\ \lambda^2 + \lambda b_1k_1 - b_2k_1 + \lambda b_2k_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Más brevemente, tenemos que (5.2) se puede representar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \lambda b_1 - b_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 - 2\lambda \\ p_2 - \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

luego

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \lambda b_1 - b_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix} = b_2^2 \neq 0 \quad \text{por hipótesis de controlabilidad}$$

de manera que podemos aplicar inversa en ambos lados de (5.3), para tener que

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{b_2} & -\frac{1}{b_2} \\ -\frac{b_1\lambda - b_2}{b_2^2} & \frac{b_1}{b_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_1 - 2\lambda \\ p_2 - \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2}{b_2} \\ \frac{\lambda^2 b_1 + \lambda b_1 p_1 + b_1 p_2 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2}{b_2^2} \end{pmatrix}$$

finalmente;

$$K^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c}k_1 & \frac{1}{c}k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2}{b_2} & \frac{\lambda^2 b_1 + \lambda b_1 p_1 + b_1 p_2 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2}{b_2^2} \\ -\frac{1}{c} \frac{\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2}{b_2} & \frac{1}{c} \frac{\lambda^2 b_1 + \lambda b_1 p_1 + b_1 p_2 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2}{b_2^2} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

ya que tenemos la matriz K^T , recordemos que $A + BK_1^T = A + BK_2^T$ de tal forma que

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & cb_1 \\ b_2 & cb_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2}{b_2} & \frac{\lambda^2 b_1 + \lambda b_1 p_1 + b_1 p_2 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2}{b_2^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} \lambda - b_1 \frac{\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2}{b_2} & 1 + b_1 \frac{\lambda^2 b_1 + \lambda b_1 p_1 + b_1 p_2 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2}{b_2^2} \\ \lambda p_1 - \lambda^2 - p_2 & \lambda + \frac{\lambda^2 b_1 + \lambda b_1 p_1 + b_1 p_2 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2}{b_2^2} \end{pmatrix}$$

tiene valores propios

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \right) \quad (5.5)$$

Aplicación de los controles

Entonces ya tenemos definidos nuestros controles u_1 y u_2 , pues

$$u(x_1, x_2) = K^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c}k_1 & \frac{1}{c}k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$u_1(x_1, x_2) = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{1}{c} (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

así que u_1 y u_2 se anulan en la misma recta, es decir $u_1 = 0 \Rightarrow k_1x_1 + k_2x_2 = 0$, de modo que la recta de cambio será

$$x_2 = -\frac{k_1}{k_2}x_1$$

más aún

$$u = \begin{cases} u_1 \geq 0 & \text{si } k_1x_1 + k_2x_2 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 & \text{si } k_1x_1 + k_2x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 5.1.1. Consideremos el sistema de control

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

donde $p_1 = 1$ y $p_2 = 3$ (elegidos a conveniencia para asegurar que el discriminante de (5.5) sea negativo) además de acuerdo al planteamiento anterior $c = -2$, entonces por (5.4) se sigue que

$$K^T = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

los controles son

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{9}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \\ u_2 &= \frac{9}{4}x_1 + \frac{1}{8}x_2 \end{aligned}$$

nótese que

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &\geq 0 \text{ en el tercer cuadrante} \\ u_2(x_1, x_2) &\geq 0 \text{ en el primer cuadrante} \end{aligned}$$

luego, tenemos que los controles se anulan en la recta $x_2 = -18x_1$, de manera que la aplicación de los controles queda de la siguiente manera

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2) \geq 0 & \text{por debajo de la recta } x_2 = -18x_1 \\ u_2(x_1, x_2) \geq 0 & \text{por arriba de la recta } x_2 = -18x_1 \end{cases}$$

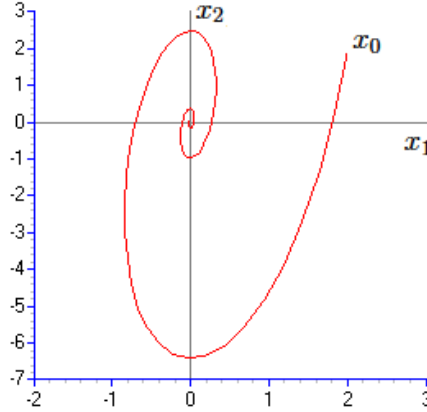


Figura 5.1: En esta simulación tomamos como condición inicial $x_0 = (2, 2)$, donde podemos observar que la convergencia de la solución se da suavemente, entonces, podemos suponer que la recta $x_2 = -18x_1$ no existe.

5.1.2. Caso 2. Valores propios reales diferentes

En este caso, estudiaremos los sistemas de control donde la matriz A es de la forma (4.4). Cabe mencionar que, el procedimiento que se sigue (de aquí en adelante) para encontrar la matriz K^T es similar en cada caso.

Consideremos el sistema de control

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Bu(x_1, x_2)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & cb_1 \\ b_2 & cb_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u(x_1, x_2) = Kx = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c}k_1 & \frac{1}{c}k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con

$$c < 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Por hipótesis de controlabilidad, consideremos que $b_i \neq 0$, tal que $b_i(cb_i) < 0$ con $i = 1, 2$.

Análogamente como en el caso anterior, se verifica que

$$A_1 = A + BK_1^T = A + BK_2^T = A_2.$$

Haciendo algunos cálculos

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} b_1 & cb_1 \\ b_2 & cb_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + b_1k_1 & b_1k_2 \\ b_2k_1 & \lambda_2 + b_2k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

similarmente, sean $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$, tal que

$$tr(A_1) = tr(A_2) = -p_1 \quad \text{y} \quad det(A_1) = det(A_2) = p_2$$

entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 + b_1k_1 + \lambda_2 + b_2k_2 &= -p_1 \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1b_2k_2 + b_1k_1\lambda_2 &= p_2 \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} b_1k_1 + b_2k_2 &= -p_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1b_2k_2 + b_1k_1\lambda_2 &= p_2 - \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

matricialmente;

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1\lambda_2 & b_2\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ p_2 - \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

considerando que

$$det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1\lambda_2 & b_2\lambda_1 \end{pmatrix} = b_1b_2(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \quad \text{por hipótesis de controlabilidad .}$$

Podemos aplicar inversa en ambos lados de (5.6), luego entonces

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{b_1(\lambda_1 - \lambda_2)} & -\frac{1}{b_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ -\frac{\lambda_2}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{1}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ p_2 - \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ahora bien

$$K^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c}k_1 & \frac{1}{c}k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_2}{b_1(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_2}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ -\frac{1}{c} \frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_2}{b_1(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{1}{c} \frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_2}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

de forma que la matriz A_1 y A_2 tienen el mismo polinomio característico

$$P_{A_1}(X) = X^2 + p_1 X + p_2$$

con raíces

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \right)$$

Tomemos la asignación $b_1 = b_2 = b$, $p_1 = 4p$, $p_2 = 5p^2$, ($p > 0$) y $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$, de forma que reescribiendo (5.7) se obtiene

$$K^T = \begin{pmatrix} \frac{4\lambda_1 p + \lambda_1^2 + 5p^2}{b} & -\frac{4\lambda_1 p + 4p + \lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1 + 5p^2}{b} \\ \frac{1}{c} \frac{4\lambda_1 p + \lambda_1^2 + 5p^2}{b} & -\frac{1}{c} \frac{4\lambda_1 p + 4p + \lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1 + 5p^2}{b} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Nótese que (5.8) está bien definida, pues $b_i \neq 0$.

Ahora, tenemos que con la matriz (5.8), $A_1 = A_2$ tienen raíces complejas

$$X_{1,2} = -p(2 \pm i).$$

Luego, los controles son de la forma

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{c}(k_1 x_1 - k_2 x_2) = \frac{1}{c} u_1 \end{aligned}$$

Por otro lado, de (5.8), tenemos que la recta donde se anula el control u_i es

$$x_2 = \frac{k_1}{k_2} x_1 = \frac{5p^2 + 4p\lambda_1 + \lambda_1^2}{5p^2 + 4p\lambda_1 + 4p + \lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1} x_1 = m x_1$$

donde

$$0 < m < 1$$

Se desprende de aquí, que los controles se aplicán de la siguiente manera

$$u = \begin{cases} u_1(x_1, x_2) \geq 0 & \text{por debajo de la recta } x_2 = mx_1 \\ u_2(x_1, x_2) \geq 0 & \text{por arriba de la recta } x_2 = mx_1 \end{cases}$$

Ejemplo 5.1.2. Consideremos el sistema de control

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

donde, por el planteamiento anterior $c=-1$.

De (5.8) se sigue

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

los controles son

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es decir;

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= 3x_1 - 7x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= -3x_1 + 7x_2 \end{aligned}$$

de modo que los controles positivos son,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(3x_1 - 7x_2 + |3x_1 - 7x_2|) \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(-3x_1 + 7x_2 + |-3x_1 + 7x_2|) \end{aligned}$$

Nótese que $u_1(x_1, x_2)$ se aplica por debajo de la recta $x_2 = \frac{3}{7}x_1$, mientras que $u_2(x_1, x_2)$ se aplica en la recta $x_2 + \frac{3}{7}x_1 > 0$. Ver figura (5.2)

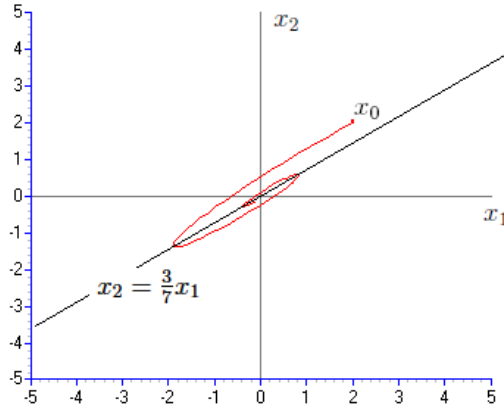


Figura 5.2: Simulación donde se tomó la condición inicial $x_0 = (2, 2)$.

5.1.3. Caso 3. *Caso complejo*

En este caso se hace referencia a las matrices del sistema de control (4.1), cuya matriz A tiene un par de valores propios complejos. Las condiciones que se establecen para controlar al sistema con estas características caen sobre la matriz B .

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + bu(x_1, x_2)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u(x_1, x_2) = K^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (k_1 \quad k_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b \neq 0$$

Este sistema es controlable con control positivo ya que cumple la hipótesis de controlabilidad.

Tomemos el sistema realimentado

$$\dot{x} = A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A + bK^T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

tal que

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha + b_1 k_1 & \beta + b_1 k_2 \\ -\beta + b_2 k_1 & \alpha + b_2 k_2 \end{pmatrix}$$

le corresponde el polinomio característico

$$P_{A_1}(X) = X^2 - (2\alpha + b_2k_2 + b_1k_1)X + \alpha^2 + \alpha b_2k_2 + \alpha b_1k_1 + \beta^2 - \beta b_2k_1 + \beta b_1k_2$$

de manera que para tener estabilidad

$$\operatorname{tr}(A + bK^T) < 0 \quad \text{y} \quad \det(A + bK^T) > 0.$$

Sea $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 2\alpha + b_2k_2 + b_1k_1 &= -p_1 \\ \alpha^2 + \alpha b_2k_2 + \alpha b_1k_1 + \beta^2 - \beta b_2k_1 + \beta b_1k_2 &= p_2 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} b_2k_2 + b_1k_1 &= -p_1 - 2\alpha \\ \alpha b_2k_2 + \alpha b_1k_1 - \beta b_2k_1 + \beta b_1k_2 &= p_2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{aligned}$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \alpha b_1 - \beta b_2 & \alpha b_2 + \beta b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 - 2\alpha \\ p_2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

luego

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \alpha b_1 - \beta b_2 & \alpha b_2 + \beta b_1 \end{pmatrix} = \beta (b_1^2 + b_2^2) \neq 0 \quad \text{por hipótesis de controlabilidad}$$

aplicando inversa en ambos lados de (5.9), tenemos que

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_2\alpha + b_1\beta}{\beta(b_1^2 + b_2^2)} & -\frac{b_2}{\beta(b_1^2 + b_2^2)} \\ \frac{-b_1\alpha + b_2\beta}{\beta(b_1^2 + b_2^2)} & \frac{b_1}{\beta(b_1^2 + b_2^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_1 - 2\alpha \\ p_2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}$$

de forma que K^T es

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta (b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} -b_2 (\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_1 (\beta p_1 + 2\beta\alpha) \\ b_1 (\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_2 (\beta p_1 + 2\beta\alpha) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

con esta K , tenemos que la a matriz A_1 le corresponde el polinomio característico

$$P_{A_1}(X) = X^2 + p_1X + p_2$$

así que tenemos raíces

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \right)$$

Ahora hay que ver donde $u(x_1, x_2) = k_1x_1 + k_2x_2 \geq 0$, para esto vemos donde $u(x_1, x_2) = 0$.

Entonces

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\beta(b_1^2 + b_2^2)} (b_2(\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_1(\beta p_1 + 2\beta\alpha)) x_1 \\ &\quad + \frac{1}{\beta(b_1^2 + b_2^2)} (b_1(\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_2(\beta p_1 + 2\beta\alpha)) x_2 = 0 \end{aligned}$$

lo cual nos lleva a concluir que $u(x_1, x_2)$ se anula en la recta

$$x_2 = \frac{b_2(\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_1(\beta p_1 + 2\beta\alpha)}{b_1(\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_2(\beta p_1 + 2\beta\alpha)} x_1 = mx_1 \quad (5.11)$$

Cuidando que

$$b_1(\alpha p_1 + \alpha^2 + p_2 - \beta^2) - b_2(\beta p_1 + 2\beta\alpha) \neq 0.$$

Ejemplo 5.1.3. Consideremos el siguiente sistema de control

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

nótese que $\sigma(A) = \{\frac{1}{2} \pm i\}$, luego, de (5.10) tenemos que

$$(k_1, k_2) = \left(\frac{3}{2}, -3 \right)$$

de manera que el control $u(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1 - 3x_2$ se anula en la recta

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1$$

y el control positivo es

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}x_1 - 3x_2 + \left| \frac{3}{2}x_1 - 3x_2 \right| \right)$$

observese que $u(x_1, x_2) \geq 0$ por debajo de la recta $x_2 = \frac{1}{2}x_1$.
luego, por debajo de la recta actúa el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que no esta en forma canónica.

pero existe P , tal que

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces, por debajo de la recta actúa un sistema que esta en forma canónica.

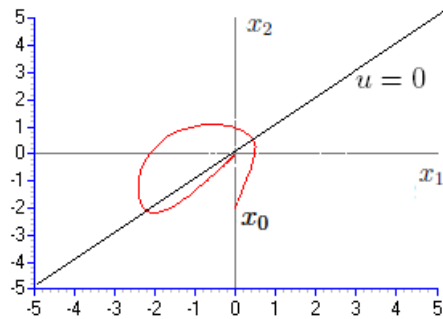


Figura 5.3: En esta simulación se observa que la solución que inicia en $x_0 = (0, -2)$ se va al origen.

5.2. Sistemas Lineales con $\text{rango}(B) = 2$

Para generalizar el método de estabilización aplicado en estos sistemas, consideremos la siguiente dinámica.

Sean $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ conos con vértices en el origen, tal que $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Consideremos los sistemas lineales de la forma

$$\dot{x} = A_i x \quad \text{para } x \in C_i \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

tal que $A_i = A_{i+1}$ si $x \in C_i \cap C_{i+1}$, y $t \in [0, T] = [0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup \dots \cup [T_{k-1}, T]$. Supongamos que cada cono C_i es no invariante, y que el tiempo de transición en cada cono C_i es $T_i - T_{i-1}$, donde $T_0 = 0$ y $T_k = T$.

A demás

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{A_1 T_1} x_0 \\ x_2 &= e^{A_2 T_2} x_1 \\ &\vdots \\ x_k &= e^{A_k T_k} x_{k-1} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Con base en esta descripción, consideremos el siguiente lema.

Lema 5.1. *Dada una condición inicial $x_0 \in C_k \cap C_0$, consideramos la sucesión de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, generada mediante las operaciones (5.12); donde*

$$e^{A_i t} = Q_i^{-1} e^{J_i t} Q_i \quad \text{para toda, } i = 1, 2, \dots, k$$

de manera que para alguna i , suponemos que

$$e^{J_i t} = e^{\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & -\text{sen}(\beta_i t) \\ \text{sen}(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha_i < 0.$$

tal que

$$\|e^{A_i t} x_{i-1}\| = \|Q_i^{-1} e^{J_i t} Q_i x_{i-1}\| \leq e^{\alpha_i T_i} \|Q_i^{-1}\| \|Q_i\| \sqrt{2} \|x_{i-1}\| = e^{\alpha_i T_i} M_i \|x_{i-1}\|$$

entonces, para M arbitraria y $|\alpha_i| > 0$ suficientemente grande, logramos que

$$e^{\alpha_i T_i} M < 1$$

tal que

$$\|x_k\| < e^{\alpha_i} M \|x_0\|$$

Demostración.

Se $M_i = \|e^{A_i T_i}\|$, consideremos la sucesión de puntos de la forma (5.12), se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq \|e^{A_1 T_1}\| \|x_0\| = M_1 \|x_0\| \\ \|x_2\| &\leq \|e^{A_2 T_2}\| \|x_1\| = M_2 \|x_1\| \\ &\vdots \\ \|x_k\| &\leq \|e^{A_k T_k}\| \|x_{k-1}\| = M_k \|x_{k-1}\| \end{aligned}$$

más aún, de (5.12) se tiene que,

$$x_k = e^{A_k T_k} x_{k-1} = e^{A_k T_k} e^{A_{k-1} T_{k-1}} x_{k-2} = e^{A_k T_k} e^{A_{k-1} T_{k-1}} \dots e^{A_1 T_1} x_0$$

lo cual implica que

$$\|x_k\| \leq \|e^{A_k T_k}\| \|e^{A_{k-1} T_{k-1}}\| \dots \|e^{A_1 T_1}\| \|x_0\| \quad (5.13)$$

por hipótesis, para algún i se cumple que

$$e^{A_i T_i} = Q_i^{-1} e^{J_i T_i} Q_i = Q_i^{-1} e^{\alpha_i T_i} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & -\text{sen}(\beta_i t) \\ \text{sen}(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix} Q_i \quad \alpha_i < 0;$$

dado que

$$\|e^{A_i T_i}\| \leq e^{J_i T_i} \sqrt{2} \|Q_i^{-1}\| \|Q_i\|$$

se sigue de (5.13) que

$$\|x_k\| \leq e^{\alpha_i T_i} \sqrt{2} M_1 M_2 \dots M_k \|x_0\|$$

Sea $M = \sqrt{2} M_1 M_2 \dots M_k$

de manera que eligiendo $|\alpha_i| > 0$ suficientemente grande, tal que $e^{\alpha_i T_i} M < 1$

se tendra que

$$\|x_k\| < e^{\alpha_i T_i} M \|x_0\| < \|x_0\|.$$

5.2.1. Caso 1. *Un valor propio real repetido en forma diagonal*

Consideremos el problema de estabilizar el sistema donde además de considerar A también se considera la matriz B .

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + B u(x_1, x_2) \quad (5.14)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \lambda > 0$$

nótese que B cumple con la hipótesis de controlabilidad.

Veamos que el sistema (5.14) es controlable con control positivo, para esto, verificamos que se cumplen las dos condiciones de Brammer con la condición de:

$$u = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T \in U = \mathbb{R}_+^3$$

En efecto, la primera condición de controlabilidad de Brammer es inmediata ya que el $rango(B) = 2$. La segunda condición dice:

No existe vector propio v de A^T que satisfaga que el producto escalar

$$v^T B u \leq 0$$

para toda $u \in U$.

En nuestro caso tenemos que $v = (v_1 \ v_2)^T$ es cualquier vector, entonces

$$\begin{aligned} \langle v, B u \rangle &= (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= u_1 (b_1 v_1 + b_2 v_2) - b_1 u_2 v_1 - b_2 u_3 v_2 \end{aligned}$$

es claro que este término puede cambiar de signo al elegir valores apropiados para $(u_1 \ u_2 \ u_3)^T \in \mathbb{R}_+^3$. Por lo tanto, el sistema es controlable con control positivo.

Por otra parte, si tomamos las matrices A_{12} , A_{13} y A_{23} , tal que para tener estabilidad en cada sistema

$$\begin{aligned} tr(A_{12}) &= -p_1 & det(A_{12}) &= p_2 \\ tr(A_{13}) &= -p_3 & det(A_{13}) &= p_4 \\ tr(A_{23}) &= -p_5 & det(A_{23}) &= p_6 \end{aligned}$$

con $p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} tr(A_{12}) &= -p_1 \\ tr(A_{13}) &= -p_3 \\ tr(A_{23}) &= -p_5 \end{aligned}$$

Para este sistema se encuentra que

$$K^T = \begin{pmatrix} -\frac{2\lambda+2b_2k_2+p_1}{2b_1} & k_2 \\ \frac{p_1+2\lambda}{2b_1} & k_4 \\ k_5 & \frac{p_1+2\lambda}{2b_2} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

En el proceso algebraico para encontrar K^T se considera que $p_1 = p_2 = p_3$ para simplificar términos.

Realimentamos el sistema (5.14) con la matriz (5.15) y consideramos las matrices A_{12} , A_{13} y A_{23} . Para estas matrices consideremos sus determinantes, de manera que

$$\det(A_{12}) = p_2, \det(A_{13}) = p_4 \text{ y } \det(A_{23}) = p_6 \quad p_2, p_4, p_6 > 0.$$

Haciendo algunos cálculos se llega a que

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda(b_1k_1 - b_1k_3 + b_2k_2) - b_1k_3b_2k_2 + b_1k_4b_2k_1 &= p_2 \\ \lambda^2 + \lambda(b_1k_1 + b_2k_2 - b_2k_6) - b_2k_1b_1k_6 + b_2k_1b_2k_5 &= p_4 \\ \lambda^2 + \lambda(-b_1k_3 - b_2k_6) + b_2k_1b_3k_6 + b_2k_1b_4k_5 &= p_5 \end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} -\lambda^2 + \lambda p_1 - \lambda b_2k_2 - \frac{1}{2}b_2k_2p_1 - \lambda b_2k_4 - k_4b_2^2k_2 - \frac{1}{2}b_2k_4p_1 &= p_2 \\ \lambda b_2k_2 + \frac{1}{2}b_2k_2p_1 + \frac{1}{4}p_1^2 + b_2b_1k_2k_5 &= p_4 \\ \lambda^2 + \lambda(-p_1 - 2\lambda) + \frac{1}{4}(p_1 + 2\lambda)^2 - b_2b_1k_4k_5 &= p_6 \end{aligned}$$

es decir, los determinantes quedan representados en términos de p_1 , más aún, despejando las variables conocidas, tenemos que

$$-\lambda k_2 - \frac{1}{2}k_2p_1 - \lambda k_4 - k_4b_2k_2 - \frac{1}{2}k_4p_1 = \frac{p_2 + \lambda^2 - \lambda p_1}{b_2} \quad (5.16)$$

$$\lambda k_2 + \frac{1}{2}k_2p_1 + b_1k_2k_5 = \frac{p_4 - \frac{1}{4}p_1^2}{b_2} \quad (5.17)$$

$$-k_4k_5 = \frac{p_6 - \frac{1}{4}p_1^2}{b_2b_1} \quad (5.18)$$

así que, podemos suponer que en (5.18)

$$k_4 = \frac{r}{b_2} \neq 0 \quad \text{y} \quad k_5 = -\frac{p_6 - \frac{1}{4}p_1^2}{rb_1}$$

sustituyendo k_5 en (5.15) llegamos a que

$$k_2 = \frac{r(p_1^2 - 4p_4)}{b_2(-4\lambda r - 2p_1 r + 4p_6 - p_1^2)}$$

con

$$-4\lambda r - 2p_1 r + 4p_6 - p_1^2 \neq 0$$

de manera que sustituyendo k_2 y k_4 en la ecuación (5.14) podemos fijar el valor del parámetro r , conviene mencionar que en el proceso algebraico que se sigue para encontrar el valor del parámetro r , consideramos que $p_1 = \lambda$ y $p_2 = p_4 = p_6 = \lambda^2$ (por simplicidad), concluyendo que

$$r = \frac{\lambda}{4}(\sqrt{21} - 3).$$

Entonces, reescribiendo (5.15) con la asignación de las variables k_2 , k_4 y k_5 , tenemos

$$K^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \frac{2\sqrt{21}-9}{b_1(\sqrt{21}-5)} & \frac{\lambda}{2} \frac{\sqrt{21}-3}{b_2(\sqrt{21}-5)} \\ \frac{3\lambda}{2b_1} & \frac{\lambda}{4} \frac{\sqrt{21}-3}{b_2} \\ \frac{3\lambda}{b_2(\sqrt{21}-3)} & \frac{3\lambda}{2b_2} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Ahora, observemos que, en el proceso que se siguió para encontrar (5.15) se considera $p_1 = p_3 = p_5$ y $p_2 = p_4 = p_6$, esto nos lleva a concluir que A_{12} , A_{13} y A_{23} tienen el mismo polinomio característico

$$P_{A_{12}}(X) = X^2 + p_1 X + p_2$$

de modo que estas matrices tienen raíces

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \right)$$

es decir, cada matriz tiene raíces con parte real negativa, pero más aún, es posible representar p_1 y p_2 en términos de otras variables para asegurar que las matrices tengan valores propios complejos (que sería lo conveniente en cada sistema). Para esto consideremos la siguiente asignación,

$$p_1 = \lambda k \quad y \quad p_2 = (\lambda k)^2 \quad \lambda, k > 0$$

de tal manera que ahora tenemos los siguientes valores propios

$$X_{1,2} = -\frac{\lambda k}{2} (1 \pm \sqrt{3}i),$$

con la asignación para los parametros p_1 y p_2 , las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.18) quedan de la siguiente manera

$$-\lambda k_2 - \frac{1}{2}k_2 p_1 - \lambda k_4 - k_4 b_2 k_2 - \frac{1}{2}k_4 p_1 = \frac{\lambda^2(k^2 + k + 1)}{b_2} \quad (5.20)$$

$$\lambda k_2 + \frac{1}{2}k_2 p_1 + b_1 k_2 k_5 = \frac{p_4 - \frac{1}{4}p_1^2}{b_2} \quad (5.21)$$

$$-k_4 k_5 = \frac{3\lambda^2 k^2}{4b_1 b_2} \quad (5.22)$$

análogamente, en (5.22) reasignamos valores a k_4 y k_5

$$k_4 = \frac{r}{b_2} \neq 0 \quad y \quad k_5 = -\frac{3\lambda^2 k^2}{4r b_1}$$

Dado que tenemos una nueva reasignación de variables, es de esperarse que el parámetro r tenga otra expresión. Después de unos pasos algebraicos se llega a que

$$r = -\frac{\lambda k^3 + 3k^2 + 3k + 2}{4(k^2 + k + 1)} + \frac{\lambda}{4}\sqrt{13k^2 + 4k + 4}$$

reescribiendo (5.19) tenemos

$$K^T = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{b_1} \frac{6k-2Q(k^2+k+1)+12k^2+5k^3+4}{W-(2+k)Q} & \frac{3\lambda k^2}{b_2} \frac{k+2-Q}{2W-2Q(k+2)} \\ \frac{\lambda(k+2)}{2b_1} & -\frac{\lambda(k+2-Q)}{4b_2} \\ \frac{3\lambda k^2}{b_1(2+k-Q)} & \frac{\lambda(k+2)}{2b_2} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

donde

$$Q = \sqrt{13k^2 + 4k + 4} \quad y \quad W = 7k^2 + 4k + 4$$

de forma que con esta K^T veremos como son los valores propios de las matrices A_{12} , A_{23} y A_{13} .

Calculando A_{12} tenemos

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{b_1} \frac{6k-2Q(k^2+k+1)+12k^2+5k^3+4}{W-(2+k)Q} & \frac{3\lambda k^2}{b_2} \frac{k+2-Q}{2W-2Q(k+2)} \\ \frac{\lambda(k+2)}{2b_1} & -\frac{\lambda(k+2-Q)}{4b_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2}\lambda(k+2) - \lambda \frac{M}{N_1} & \frac{1}{4}\lambda \frac{b_1}{b_2} (k+2-Q) + \frac{b_1}{b_2} \frac{3\lambda k^2(k+2-Q)}{N_2} \\ -\lambda \frac{b_2}{b_1} \frac{M}{N_1} & \lambda + \frac{3\lambda k^2(k+2-Q)}{N_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$N_1 = 4 + 4k - 2\sqrt{13k^2 + 4k + 4} + 7k^2 - k\sqrt{13k^2 + 4k + 4}$$

$$N_2 = 8 + 8k - 4\sqrt{13k^2 + 4k + 4} + 14k^2 - 2k\sqrt{13k^2 + 4k + 4}$$

$$M = 6k - 2k\sqrt{13k^2 + 4k + 4} - 2k^2\sqrt{13k^2 + 4k + 4} - 2\sqrt{13k^2 + 4k + 4} + 12k^2 + 5k^3 + 4$$

de manera que el polinomio característico de A_{12} tiene raíces

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2}\lambda k \left(1 \pm \sqrt{3}i\right) \quad (5.24)$$

Similarmente, se verifica que los polinomios característicos de las matrices A_{23} y A_{13} tienen las mismas raíces.

Al aplicar un solo control obtenemos las matrices A_1 , A_2 y A_3 . Veamos ahora como son las raíces correspondientes a los polinomios característicos de estas matrices.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{b_1} \frac{6k-2Q(k^2+k+1)+12k^2+5k^3+4}{W-(2+k)Q} & \frac{3\lambda k^2}{b_2} \frac{k+2-Q}{2W-2Q(k+2)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \frac{M}{N_1} & 3\lambda k^2 \frac{b_1}{b_2} \frac{k+2-Q}{N_2} \\ -\lambda \frac{b_2}{b_1} \frac{M}{N_1} & \lambda + 3\lambda k^2 \frac{k+2-Q}{N_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de manera que el polinomio característico de A_1 tiene raíces

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{2}\lambda k \\ X_2 &= \lambda. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Análogamente, se encuentra que el polinomio característico de A_2 y A_3 tiene raíces de la forma (5.25). Es decir, se obtienen dos raíces reales, una negativa y otra positiva.

Para verificar que el cono donde se aplica solo un control (Ver figura (5.4)) es no invariante, tendremos que ver que, el subespacio inestable E^u generado por el vector propio v_λ correspondiente al valor propio $X_2 = \lambda$ (que es el mismo para el polinomio característico de A_1 , A_2 y A_3) no cae en alguno de los conos donde actúa solo un control, pues si así fuera, las soluciones se pueden ir por ahí.

El vector propio correspondiente al valor propio (real positivo) del polinomio característico de A_1 , A_2 y A_3 es respectivamente

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k^2 \frac{b_1}{b_2} \frac{2+k-Q}{4+6k+12k^2+5k^3-2Q(1+k+k^2)} \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} \frac{b_1}{2b_2} \frac{2+k-Q}{k+2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{6k^2b_2} (4 + 4k - 2Q + k^2 - kQ) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Más adelante veremos como quedan representados $E_{v_1}^u$, $E_{v_2}^u$ y $E_{v_3}^u$.

Aplicación de los controles

Recordemos que

$$u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

de manera que los controles son los siguiente

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -\frac{\lambda}{b_1} \frac{6k - 2Q(k^2 + k + 1) + 12k^2 + 5k^3 + 4}{W - (2+k)Q} x_1 + \frac{3\lambda k^2}{b_2} \frac{k+2-Q}{2W - 2Q(k+2)} x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{\lambda(k+2)}{2b_1} x_1 - \frac{\lambda(k+2-Q)}{4b_2} x_2 \\ u_3(x_1, x_2) &= \frac{3\lambda k^2}{b_1(2+k-Q)} x_1 + \frac{\lambda(k+2)}{2b_2} x_2, \end{aligned}$$

ya con los controles definidos, tenemos que las rectas donde se anulan los controles u_1 , u_2 y u_3 son respectivamente:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{b_2}{b_1} \frac{36k^2}{W + (k+2)Q} x_1 = m_1 x_1 \\ x_2 &= -\frac{b_2}{b_1} \frac{(k+2)(k+2+Q)}{6k^2} x_1 = m_2 x_1 \\ x_2 &= \frac{b_2}{b_1} \frac{k+2+Q}{2(2+k)} x_1 = m_3 x_1 \end{aligned}$$

nótese que, si consideramos $\frac{b_2}{b_1} > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < m_1 < 1 \\ m_2 < 0 \\ m_3 > 0 \end{aligned}$$

esto puede verse rápidamente ya que

$$k + 2 < \sqrt{13k^2 + 4k + 4} = Q. \quad (5.26)$$

En caso de que $\frac{b_2}{b_1} < 0$

$$\begin{aligned} m_1 < 0 \\ m_2 > 0 \\ m_3 < 0 \end{aligned}$$

de manera que, esto implica que la aplicación de los controles se invierte.

En este trabajo consideramos solo el caso $\frac{b_2}{b_1} > 0$, ya que el otro caso es similar.

Volviendo con los vectores propios, podemos reescribir cada uno de estos quedandonos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ m_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de esta forma, es fácil verificar que los espacios inestables $E_{v_1}^u$, $E_{v_2}^u$ y $E_{v_3}^u$, correspondientes a cada vector propio, se encuentran sobre las rectas donde se anulan los controles respectivamente. Ver figura (5.4).

En este diagrama, observamos que los vectores propios, correspondientes al valor propio real positivo λ caen en las rectas donde se anulan los controles, ahora probaremos que dichos vectores no caen en los conos donde actúa un solo control y en consecuencia, estaremos probando que los conos donde actúa un solo control son no invariantes.

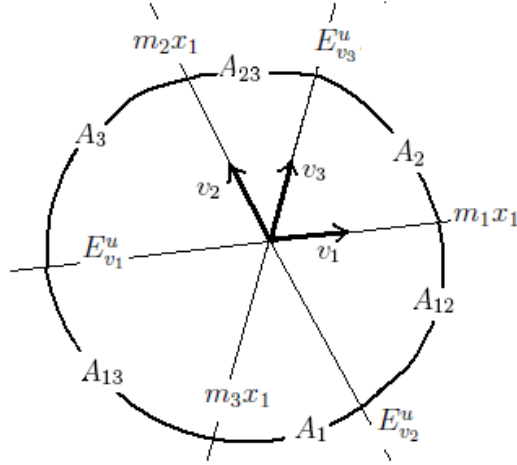


Figura 5.4: Aquí observamos donde actúa el sistema $\dot{x} = \bar{B}x$, donde \bar{B} es diferente en cada cono, así como los espacios inestables $E_{v_1}^u$, $E_{v_2}^u$ y $E_{v_3}^u$.

Para ver la prueba, consideremos lo siguiente.

Los espacios inestables $E_{v_i}^u$ de A_i coinciden con la superficie de cambio $u_i(x_1, x_2) = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Sea C_i el cono donde actúa el control i (para $i = 1, 2, 3$), probaremos que $E_{v_i}^u \cap C_i = \{0\}$.

Consideremos la prueba para $i = 2$, ya que en los otros casos la prueba es análoga.

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ los vectores que definen la frontera de C_2 , tal que la recta de pendiente m_1 es generada por el vector v_1 ; considerando que

$$E_{v_2}^u = \{(x_1, x_2) / u_2(x_1, x_2) = 0\},$$

multiplicando el gradiente de $u_2(x_1, x_2)$ por el vector v_1 y v_3 se tiene que;

$$\begin{aligned} \nabla u_2(x_1, x_2) \cdot v_1 &= \left(\frac{\lambda(k+2)}{2b_1} \quad -\frac{\lambda(k+2-q)}{4b_1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\lambda}{k^2 b_1} (k - Q + 2) (k^2 + K + 1) > 0 \end{aligned}$$

ya que $k - Q + 2 < 0$.

Similarmente

$$\begin{aligned}\nabla u_2(x_1, x_2) \cdot v_3 &= \left(\frac{\lambda(k+2)}{2b_1} \quad -\frac{\lambda(k+2-q)}{4b_1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ m_3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \frac{\lambda}{b_1(k+2)} (k^2 + K + 1) > 0\end{aligned}$$

en otras palabras, dado que $\nabla u_2(x_1, x_2) \cdot v_1 > 0$ y $\nabla u_2(x_1, x_2) \cdot v_3 > 0$ esto indica que el ángulo entre $\nabla u_2(x_1, x_2)$ y v_1 es menor de 90° , lo mismo para el vector v_3 . Concluimos que $E_{v_2}^u \cap C_2 = \{0\}$.

Para probar que $E_{v_1}^u \cap C_1 = \{0\}$ y $E_{v_3}^u \cap C_3 = \{0\}$ se sigue la misma idea. Deducimos entonces que el cono donde actúa un solo control es no invariante.

Dado que ya tenemos los controles y las rectas donde se anula cada uno, ahora veamos que un diagrama para representar la aplicación de los controles es como la figura (5.4).

Primero con u_1 .

Sea

$$\begin{aligned}f(k) &= 6k - 2Q(k^2 + k + 1) + 12k^2 + 5k^3 + 4 \\ g(k) &= W - (2 + k)Q \\ p(k) &= 2W - 2Q(k + 2)\end{aligned}\tag{5.27}$$

de modo que

$$u_1 = -\frac{\lambda f(k)}{b_1 g(k)}x + \frac{3\lambda k^2 k + 2 - Q}{b_2 p(k)}y$$

puede probarse que $f(k) < 0$ para toda k , es decir, probemos que $f(k)$ tiene un máximo en $k = 0$. Para ver esto, primeramente calculamos la primera derivada $f^1(k)$.

$$f^1(k) = -3 \frac{-\sqrt{(13k^2 + 4k + 4)} (5k^2 + 8k + 2) + 26k^3 + 24k^2 + 18k + 4}{\sqrt{(13k^2 + 4k + 4)}}$$

luego

$$f^1(k) = 0 \iff -\sqrt{(13k^2 + 4k + 4)} (5k^2 + 8k + 2) + 26k^3 + 24k^2 + 18k + 4 = 0$$

usando cualquier paquete de matemáticas se llega a que $k = 0$ es el único punto crítico.

Sea $h(k) = 338k^4 + 286k^3 + 228k^2 + 88k + 32$.

Entonces tenemos que la segunda derivada es

$$f^2(k) = -6 \frac{h(k) - \sqrt{(13k^2 + 4k + 4)}(16 + 65k^3 + 72k^2 + 36k)}{\left(\sqrt{(13k^2 + 4k + 4)}\right)^3}$$

en efecto vemos que $f^2(k)$ se anula en $k = 0$, es decir, $f^2(0) = 0$, pero esto no nos da información acerca del punto crítico, por tal razón seguimos calculando las derivadas de $f(k)$ hasta encontrar una derivada donde no se anule en $k = 0$.

Se encuentra que en $f^6(k)$ ocurre que $f^6(0) < 0$, pues

$$f^6(k) = -311040 \frac{2535k^4 + 468k^3 - 776k^2 - 80k + 16}{\left(\sqrt{(13k^2 + 4k + 4)}\right)^{11}}$$

donde

$$f^6(0) = -311040 \frac{16}{\left(\sqrt{(4)}\right)^{11}} < 0.$$

Dado que $f^6(k)$ es una derivada par y $f^6(0) < 0$ se concluye que en $k = 0$ se presenta un máximo, lo que implica que $f(k) < 0$ para toda k . Ver figura (5.5)

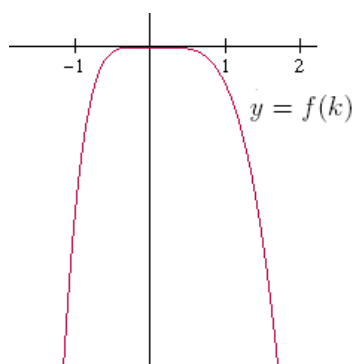


Figura 5.5: Gráfica de $f(k)$.

Ahora con $g(k) = W - (2 + k)Q$.

Usando el mismo razonamiento anterior, se encuentra que $g(K)$ tiene un mínimo en cero, pues, $g^4(0) > 0$ (como es una derivada par y mayor que cero, entonces hay un mínimo).

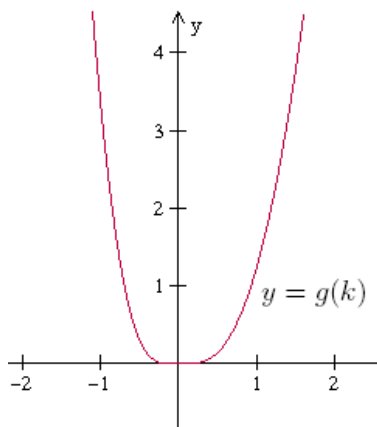


Figura 5.6: Gráfica de $g(k)$.

Análogamente, para $p(k)$ tenemos que

$$p^1(k) = -4 \frac{-(7k+2)\sqrt{(13k^2+4k+4)} + 13k^2 + 16k + 4}{\sqrt{(13k^2+4k+4)}}$$

de modo que el único punto crítico es $k = 0$.

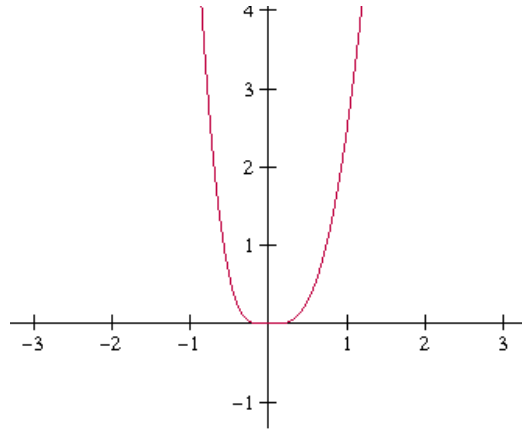
Más aun, $p^2(0) = 0$, y $p^3(0) = 0$, mientras que $p^4(0) \neq 0$. Pues

$$p^4(k) = -13824 \frac{26k^2 + 3k - 2}{\left(\sqrt{(13k^2+4k+4)}\right)^7}$$

así

$$p^4(0) = -13824 \frac{-2}{\left(\sqrt{(4)}\right)^7} > 0$$

$p^4(k) > 0$ por lo tanto presenta un mínimo en $k = 0$, por lo tanto $p(k) > 0$ para toda k . Ver figura (5.7)

Figura 5.7: Gráfica de $p(k)$.

Resumiendo, $f(k) < 0$, $g(k) > 0$ y $p(k) > 0$ para toda k .

Con estos resultados es más fácil verificar donde actúa $u_1(x_1, x_2)$.

Si consideramos el punto $(0, -1)$ (que es un punto por debajo de la recta $x_2 = m_1 x_1$) entonces $u_1(0, -1) > 0$, dado que u_1 se anula en $x_2 = m_1 x_1$ entonces u_1 actúa por debajo de esta recta.

Para $u_2(x_1, x_2)$ consideremos un punto por arriba de esta recta $x_2 = m_2 x_1$ (que es la recta donde se anula u_2), por ejemplo $(1, 0)$, entonces $u_2(1, 0) > 0$, de lo cual se concluye que u_2 actúa por arriba $x_2 = m_2 x_1$.

Para $u_3(x_2, x_1)$ consideremos el punto $(0, 1)$ (que es un punto por arriba de la recta $x_2 = m_3 x_1$), para tener que $u_3(0, 1) > 0$, así que u_3 actúa por arriba de la recta $x_2 = m_3 x_1$.

Ejemplo 5.2.1. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

por (5.23)

$$K = \begin{pmatrix} -2 \frac{27-6\sqrt{21}}{15-3\sqrt{21}} & \frac{-3+\sqrt{21}}{-5+\sqrt{21}} \\ 3 & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \\ \frac{6}{3-\sqrt{21}} & 3 \end{pmatrix}$$

de modo que los controles son

$$u_1(x_1, x_2) = -2 \frac{27 - 6\sqrt{21}}{15 - 3\sqrt{21}} x_1 + \frac{-3 + \sqrt{21}}{-5 + \sqrt{21}} x_2$$

$$u_2(x_1, x_2) = 3x_1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}x_2$$

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{6}{3 - \sqrt{21}} x_1 + 3x_2$$

que se anulan en las rectas

$$x_2 \approx 0,20871x_1$$

$$x_2 \approx -3,7913x_1$$

$$x_2 \approx 1,2638x_1$$

respectivamente.

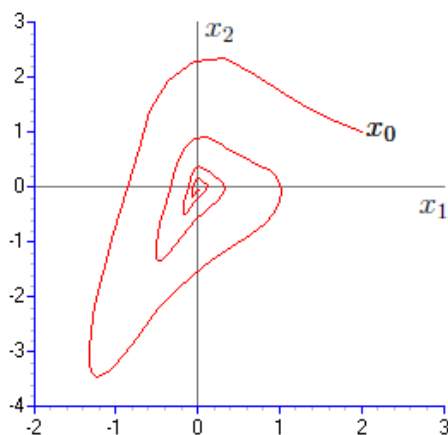


Figura 5.8: En esta simulación se observa que la solución que inicia en $x_0 = (2, 1)$ se va al origen.

5.2.2. Caso 1. *Caso especial*

Como un caso especial al resultado anterior, vamos a considerar un sistema de control donde no es suficiente 3 controles para estabilizar el sistema, veremos en esta parte que hay casos donde se necesitan 4.

Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Bu(x_1, x_2)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 b_1 & b_3 & c_2 b_3 \\ b_2 & c_1 b_2 & b_4 & c_2 b_4 \end{pmatrix} \text{ y } u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c_1} k_1 & \frac{1}{c_1} k_2 \\ k_3 & k_4 \\ \frac{1}{c_2} k_3 & \frac{1}{c_2} k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con $c_1 < 0$, $c_2 < 0$.

Nótese que ninguna columna de la matriz B se puede poner como combinación lineal negativa de las otras, por tal razón es importante considerar este caso.

Por hipótesis de controlabilidad $\det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \neq 0$.

Tomemos el sistema realimentado con la aplicación del primer y tercer control (que equivale aplicar el segundo y cuarto control) para obtener la matriz A_{13} . Se sigue que

$$A_{13} = A_{24} = \begin{pmatrix} \lambda + b_1 k_1 + b_3 k_3 & b_1 k_2 + b_3 k_4 \\ b_2 k_1 + b_4 k_3 & \lambda + b_2 k_2 + b_4 k_4 \end{pmatrix}$$

Para tener estabilidad, sean $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$ tal que

$$\text{tr}(A_{13}) = -p_1 \text{ y } \det(A_{13}) = p_2$$

es decir

$$\begin{aligned} 2\lambda + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 &= -p_1 \\ \lambda^2 + \lambda(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) + b_1 k_1 b_4 k_4 + b_3 k_3 b_2 k_2 - b_1 k_2 b_4 k_3 - b_3 k_4 b_2 k_1 &= p_2 \end{aligned}$$

o de igual manera

$$\begin{aligned} b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 &= -p_1 - 2\lambda \\ \lambda^2 + \lambda(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) + b_1 k_1 b_4 k_4 + b_3 k_3 b_2 k_2 - b_1 k_2 b_4 k_3 - b_3 k_4 b_2 k_1 &= p_2 \end{aligned}$$

sustituyendo la primera en la segunda

$$\lambda^2 + \lambda(-p_1 - 2\lambda) + b_1k_1b_4k_4 + b_3k_3b_2k_2 - b_1k_2b_4k_3 - b_3k_4b_2k_1 = p_2$$

tal que

$$b_1k_1b_4k_4 + b_3k_3b_2k_2 - b_1k_2b_4k_3 - b_3k_4b_2k_1 = p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} b_1b_4(k_1k_4 - k_2k_3) + b_3b_2(k_2k_3 - k_1k_4) &= p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2 \\ (k_1k_4 - k_2k_3)(b_1b_4 - b_3b_2) &= p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Ya que $rango(B) = 2$, supongamos que $det(B) = det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \neq 0$.

Entonces deben de cumplirse el par de ecuaciones

$$k_1k_4 - k_2k_3 = \frac{p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2}{det(B)} \quad (5.28)$$

$$b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 = -p_1 - 2\lambda \quad (5.29)$$

para simplificar (5.28), consideremos la asignación $k_1 = k_3 = \frac{1}{det(B)}$.

Entonces, las ecuaciones (5.28) y (5.29) equivalen a

$$\begin{aligned} k_4 - k_2 &= p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2 \\ b_2k_2 + b_4k_4 &= -p_1 - 2\lambda - \frac{b_1 + b_3}{det(B)} \end{aligned}$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2 \\ -p_1 - 2\lambda - \frac{b_1 + b_3}{det(B)} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

tal que

$$det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} = -b_4 - b_2 \neq 0 \quad (5.31)$$

condición impuesta por la hipótesis $k_1 = k_3 = \frac{1}{\det(B)}$.

Como observación, si $b_4 + b_2 = 0$, entonces consideramos la asignación

$$k_1 = -k_3 = -\frac{1}{\det(B)},$$

tal que las ecuaciones (5.28) y (5.29) equivalen a

$$\begin{aligned} -k_4 - k_2 &= p_2 + \lambda p_1 + \lambda^2 \\ b_2 k_2 + b_4 k_4 &= -p_1 - 2\lambda + \frac{b_1 - b_3}{\det(B)} \end{aligned}$$

de forma que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} = -b_4 + b_2 \neq 0.$$

Consideremos el caso (5.31), entonces

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{b_4}{b_4+b_2} & \frac{1}{b_4+b_2} \\ \frac{b_2}{b_4+b_2} & \frac{1}{b_4+b_2} \end{pmatrix}$$

tal que podemos aplicar inversa en ambos lados de la ecuación (5.30), de modo que

$$\begin{pmatrix} k_2 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\det(B)(b_4 p_2 + \lambda b_4 p_1 + \lambda^2 b_4 + p_1 + 2\lambda) + b_1 + b_3}{(b_4 + b_2)\det(B)} \\ \frac{\det(B)(b_2 p_2 + \lambda b_2 p_1 + \lambda^2 b_2 - p_1 - 2\lambda) - b_1 - b_3}{(b_4 + b_2)\det(B)} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{1}{c_1} k_1 & \frac{1}{c_1} k_2 \\ k_3 & k_4 \\ \frac{1}{c_2} k_3 & \frac{1}{c_2} k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\det(B)(b_4 p_2 + \lambda b_4 p_1 + \lambda^2 b_4 + p_1 + 2\lambda) + b_1 + b_3}{(b_4 + b_2)\det(B)} \\ \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \frac{\det(B)(b_4 p_2 + \lambda b_4 p_1 + \lambda^2 b_4 + p_1 + 2\lambda) + b_1 + b_3}{(b_4 + b_2)\det(B)} \\ 1 & \frac{\det(B)(b_2 p_2 + \lambda b_2 p_1 + \lambda^2 b_2 - p_1 - 2\lambda) - b_1 - b_3}{(b_4 + b_2)\det(B)} \\ \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} \frac{\det(B)(b_2 p_2 + \lambda b_2 p_1 + \lambda^2 b_2 - p_1 - 2\lambda) - b_1 - b_3}{(b_4 + b_2)\det(B)} \end{pmatrix}$$

finalmente, tenemos que si realimentamos el sistema con esta matriz, llegamos a que las matrices A_{13} y A_{24} le corresponden los valores propios

$$X_{1,2} = \frac{1}{2} p_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{p_1^2 - 4p_2}. \quad (5.32)$$

Ahora, si consideramos la aplicación del primer y cuarto control (equivale a aplicar el segundo y tercer control) tenemos que

$$A_{14} = A_{23} = \begin{pmatrix} \lambda + b_1k_1 + b_3k_3 & b_1k_2 + b_3k_4 \\ b_2k_1 + b_4k_3 & \lambda + b_2k_2 + b_4k_4 \end{pmatrix}$$

de manera que es igual a la matriz que resulta al aplicar el primer y tercer control (así como aplicar el segundo y cuarto).

Concluimos entonces que el sistema realimentado es global asintóticamente estable.

Ejemplo 5.2.2. *Consideremos el siguiente sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

donde $c_1 = c_2 = -1$, $p_1 = 1$ y $p_2 = 3$ donde estos últimos parámetros se eligen a conveniencia para tener el discriminante negativo (ver (5.32)).

Una simulación para este sistema es la siguiente

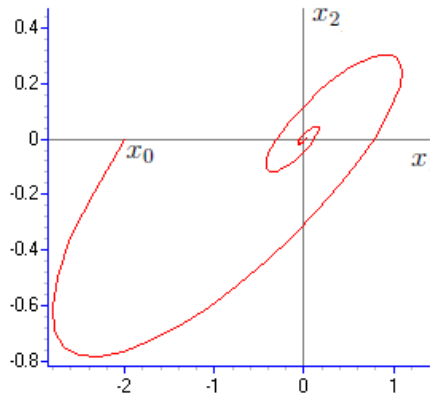


Figura 5.9: Se observa como la condición inicial en $x_0 = (-2, 0)$ se va al origen.

5.2.3. Caso 2. Un valor propio real repetido

Consideremos el problema de estabilizar el sistema

$$\dot{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Bu(x_1, x_2)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \text{ y } u(x_1, x_2) = K^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

de acuerdo con la proposición para este sistema con A de la forma anterior, la hipótesis de controlabilidad es que $b_2b_4 < 0$.

Como en el caso anterior, consideremos las matrices

$$\begin{aligned} A_{12} &= A + BK^T \\ A_1 &= A + BK_1^T \\ A_2 &= A + BK_2^T \end{aligned}$$

análogamente tomamos las trazas y determinantes de cada una de estas matrices. Recordemos que para tener estabilidad del sistema, $tr(A) < 0$ y $det(A) > 0$. Así que sean $p_i > 0$ ($i=1,2,\dots,4$) tal que

$$\begin{aligned} tr(A_{12}) &= 2\lambda + b_1k_1 + b_3k_2 + b_2k_3 + b_4k_4 \\ tr(A_1) &= 2\lambda + b_1k_1 + b_2k_3 = -p_1 \\ tr(A_2) &= 2\lambda + b_3k_2 + b_4k_4 = -p_2 \end{aligned}$$

Algo que debemos cuidar es que $tr(A_{12}) < 0$, más adelante se muestra que en efecto $tr(A_{12}) < 0$.

Ahora con los determinantes.

Sea $z = b_1k_1 + b_3k_2 + b_2k_3 + b_4k_4$, tal que

$$\begin{aligned} det(A_{12}) &= \lambda^2 + \lambda z - b_2k_1 - b_4k_2 + det(B)det(K) \\ det(A_1) &= \lambda^2 + \lambda(b_2k_3 + b_1k_1) - b_2k_1 = p_3 \\ det(A_2) &= \lambda^2 + \lambda(b_4k_4 + b_3k_2) - b_4k_2 = p_4 \end{aligned}$$

si juntamos las últimas dos trazas y los últimos dos determinantes tenemos las siguientes 4 ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\lambda + b_1k_1 + b_2k_3 &= -p_1 \\ 2\lambda + b_3k_2 + b_4k_4 &= -p_2 \\ \lambda^2 + \lambda(b_2k_3 + b_1k_1) - b_2k_1 &= p_3 \\ \lambda^2 + \lambda(b_4k_4 + b_3k_2) - b_4k_2 &= p_4 \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned}
b_1k_1 + b_2k_3 &= -p_1 - 2\lambda \\
b_3k_2 + b_4k_4 &= -p_2 - 2\lambda \\
(\lambda b_1 - b_2)k_1 - \lambda b_2k_3 &= p_3 - \lambda^2 \\
(\lambda b_3 - b_4)k_2 - \lambda b_4k_4 &= p_4 - \lambda^2
\end{aligned}$$

para continuar, notemos que estas 4 ecuaciones admiten un representación matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ \lambda b_1 - b_2 & 0 & \lambda b_2 & 0 \\ 0 & \lambda b_3 - b_4 & 0 & \lambda b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 - 2\lambda \\ -p_2 - 2\lambda \\ p_3 - \lambda^2 \\ p_4 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

reescribimos este sistema de la forma $TL = P$, luego se observa que $\det(T) = (b_2b_4)^2 \neq 0$ (por hipótesis de controlabilidad), de manera que podemos aplicar T^{-1} en ambos lados quedandonos

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ \lambda b_1 - b_2 & 0 & \lambda b_2 & 0 \\ 0 & \lambda b_3 - b_4 & 0 & \lambda b_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -p_1 - 2\lambda \\ -p_2 - 2\lambda \\ p_3 - \lambda^2 \\ p_4 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

lo cual significa que

$$K^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda p_1 + \lambda^2 + p_3}{b_2} & \frac{\lambda p_1 b_1 + \lambda^2 b_1 - b_2 p_1 - 2\lambda b_2 + b_1 p_3}{b_2^2} \\ -\frac{\lambda p_2 + \lambda^2 + p_4}{b_4} & \frac{\lambda p_2 b_3 + \lambda^2 b_3 - b_4 p_2 - 2\lambda b_4 + b_3 p_4}{b_4^2} \end{pmatrix}$$

Tomemos la asignación $p_3 = p_4 = a^2 p_1^2$, $p_1 = p_2$ y $k = \lambda^2 + \lambda p_1 + p_3$, entonces K pasa a ser

$$K^T = \begin{pmatrix} -\frac{k}{b_2} & \frac{kb_1 - b_2(p_1 + 2\lambda)}{b_2^2} \\ -\frac{k}{b_4} & \frac{kb_3 - b_4(p_1 + 2\lambda)}{b_4^2} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Recordemos que se tiene que verificar que $tr(A_{12}) < 0$ y $\det(A_{12}) > 0$, pero si realizamos el sistema inicial, con K de la forma (5.33) llegamos a que

$$tr(A_{12}) = -2(\lambda + p_1) < 0$$

por otro lado

$$\det(A_{12}) = \frac{k^2(\det(B))^2 - (b_2b_4)^2(3\lambda^2 + 2\lambda p_1 - 2k)}{(b_2b_4)^2}, \text{ con } \det(B) \neq 0$$

es decir

$$\det(A_{12}) > 0 \iff k^2(\det(B))^2 > (b_2b_4)^2(3\lambda^2 + 2\lambda p_1 - 2k)$$

o equivalentemente

$$k^2(\det(B))^2 + 2k(b_2b_4)^2 > (b_2b_4)^2(3\lambda^2 + 2\lambda p_1) \quad (5.34)$$

donde $k = \lambda^2 + \lambda p_1 + (ap_1)^2$. Si elegimos parámetros a y p_1 tal que $ap_1 \geq \lambda$, entonces se cumple (5.34) y entonces tenemos que $\det(A_{12}) > 0$.

Análogamente, podemos realimentar el sistema para obtener las matrices A_1 y A_2 con K de la forma (5.33), luego se verifica que estas matrices tiene el mismo polinomio caraterístico

$$P_{A_1}(X) = X^2 + Xp_1 + a^2p_1^2$$

con raíces

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2}p_1(1 \pm \sqrt{1 - 4a^2})$$

complejos si $a^2 > \frac{1}{4}$.

Aplicación de los Controles

Los controles lineales son

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -\frac{k}{b_2}x_1 + \frac{kb_1 - b_2(p_1 - 2\lambda)}{b_2^2}x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= -\frac{k}{b_4}x_2 + \frac{kb_3 - b_4(p_1 - 2\lambda)}{b_4^2}x_2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

recordando que la hipótesis de controlabilidad en este caso es que $b_2b_4 < 0$, entonces podemos ver los siguientes dos casos:

Caso i). $b_2 < 0$ y $b_4 > 0$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) &> 0 && \text{para } x_1 > 0 \\ u_1(x_1, 0) &> 0 && \text{para } x_1 < 0 \end{aligned}$$

Caso ii). $b_2 > 0$ y $b_4 < 0$

entonces

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) &> 0 && \text{para } x_1 < 0 \\ u_1(x_1, 0) &> 0 && \text{para } x_1 > 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.3. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

de (5.33) tenemos que

$$K^T = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{2}{3} \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -4x_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= 12x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$

así que u_1 y u_2 se anulan en las rectas

$$x_2 = -6x_1$$

$$x_2 = -2x_1$$

de modo que u_1 actúa por debajo de la recta $x_2 = -6x_1$, mientras que u_2 actúa por arriba de la recta $x_2 = -2x_1$. Ver figura (5.10)

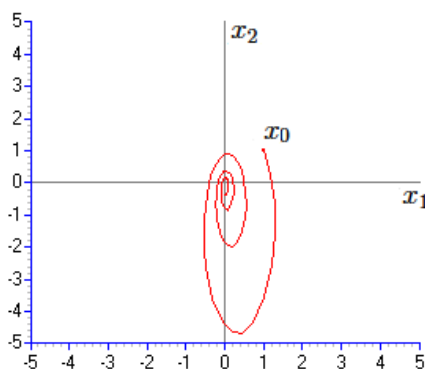


Figura 5.10: La condición inicial tamoda en esta simulación es $x_0 = (1, 1)$.

5.2.4. Caso 3. Valores propios reales diferentes

Similarmente, estabilizaremos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Bu(x_1, x_2)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_4 & b_4 \end{pmatrix} \text{ y } u(x_1, x_2) = K^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

La hipótesis de controlabilidad para este sistema es $b_1b_3 < 0$ y $b_2b_4 < 0$.

Análogamente como en los casos anteriores consideremos las matrices A_1 , A_2 y A_{12} que resultan de aplicar 1 y 2 controles, así como la matriz que resulta al aplicar los 2 controles. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + b_1k_1 + b_3k_2 & b_1k_3 + b_3k_4 \\ b_2k_1 + b_4k_2 & \lambda_2 + b_2k_3 + b_4k_4 \end{pmatrix} \\ A_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + b_1k_1 & b_1k_3 \\ b_2k_1 & \lambda_2 + b_2k_3 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + b_3k_2 & b_3k_4 \\ b_4k_2 & \lambda_2 + b_4k_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otra parte, para tener estabilidad en se debe tener que $\det(A_{12}) > 0$, $\det(A_1) > 0$ y $\det(A_2) > 0$, también $tr(A_{12}) < 0$, $tr(A_1)$ y $tr(A_2) < 0$. Entonces

$$\det(A_{12}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1b_2k_3 + \lambda_1b_4k_4 + \lambda_2b_1k_1 + \lambda_2b_3k_2 + \det(B)\det(K) > 0$$

$$\det(A_1) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1b_4k_4 + \lambda_2b_3k_2 > 0$$

$$\det(A_2) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1b_2k_3 + \lambda_2b_1k_1 > 0$$

y

$$tr(A_{12}) = \lambda_1 + \lambda_2 + b_1k_1 + b_3k_2 + b_2k_3 + b_4k_4 < 0$$

$$tr(A_1) = \lambda_1 + \lambda_2 + b_3k_2 + b_4k_4 < 0$$

$$tr(A_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + b_1k_1 + b_2k_3 < 0$$

Sean $p_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), tales que $tr(A_1) = -p_1$, $tr(A_2) = -p_2$, $det(A_1) = p_3$ y $det(A_2) = p_4$, de modo que tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} tr(A_1) &= \lambda_1 + \lambda_2 + b_3k_2 + b_4k_4 = -p_1 \\ tr(A_2) &= \lambda_1 + \lambda_2 + b_1k_1 + b_2k_3 = -p_2 \\ det(A_1) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1b_4k_4 + \lambda_2b_3k_2 = p_3 \\ det(A_2) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1b_2k_3 + \lambda_2b_1k_1 = p_4 \end{aligned}$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3\lambda_2 & 0 & b_4\lambda_1 \\ b_1\lambda_2 & 0 & b_2\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ -p_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ p_3 - \lambda_1\lambda_2 \\ p_4 - \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

que es una transformación de la forma $B^*K^* = P$, luego

$$det(B^*) = b_1b_2b_3b_4(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \neq 0$$

Aplicando $(B^*)^{-1}$ en ambos lados de la ecuación tenemos que $K^* = (B^*)^{-1}P$, así encontramos la matriz K^T . Para simplificar, tomemos $p_1 = p_2$ y $p_3 = p_4$ tal que

$$K^T = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_1} & -\frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_2} \\ \frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_3} & -\frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_4} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Ahora, mostraremos que $tr(A_{12}) < 0$ y $det(A_{12}) > 0$.

Para ver que $tr(A_{12}) < 0$, notemos que dado que $tr(A_1) < 0$ y $tr(A_2) < 0$, se sigue que $tr(A_{12}) < 0$. Por otro lado tenemos que $det(A_{12}) > 0$; se verifica que

$$det(A_{12}) = p_3 + p_4 - \lambda_1\lambda_2 + det(B)det(K^T)$$

puesto que ya tenemos K^T y B .

$$det(K^T)det(B) = (\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3)(\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3) \frac{(b_1 b_4 - b_2 b_3)^2}{b_1 b_2 b_3 b_4 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

de manera que para lograr que $det(A_{12}) < 0$ basta con escoger $p_1 = p_2$ y $p_3 = p_4$ suficientemente grande, por ejemplo

$$p_3 > \max \{ |\lambda_1 p_1|, |\lambda_2 p_1|, |\lambda_1 \lambda_2| \}$$

Aplicación de los controles

Finalmente tenemos definidos nuestros 2 controles

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \left(\frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_1} \right) x_1 - \left(\frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_2} \right) x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= \left(\frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_3} \right) x_1 - \left(\frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_4} \right) x_2 \end{aligned}$$

es decir, u_1 y u_2 se anulan en las rectas

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3) b_2}{(\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3) b_1} x_1 = m_1 x_1 \\ x_2 &= \frac{(\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3) b_4}{(\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3) b_3} x_1 = m_2 x_1 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Observación

$$m_1 m_2 = \frac{(\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3)^2 b_2 b_4}{(\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3)^2 b_1 b_3} > 0 \tag{5.38}$$

es decir, para tener (5.38) se tienen dos casos

$$m_1 < 0, m_2 < 0 \quad \text{o} \quad m_1 > 0, m_2 > 0.$$

Caso 1. $m_1 > 0$ y $m_2 > 0$

Si $m_1 > 0$ y $m_2 > 0 \Rightarrow b_1 b_2 > 0$ y $b_3 b_4 > 0$

Subcaso 1.1 $b_2 > 0$ y $b_1 > 0$

Por hipótesis de controlabilidad $b_1 b_3 < 0$ y $b_2 b_4 < 0$. De manera que el subcaso 1.1 implica que $b_3 < 0$ y $b_4 < 0$, entonces

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\left(\frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 + p_3}{b_1} \right) x_1 - \left(\frac{\lambda_2 p_1 + \lambda_2^2 + p_3}{b_2} \right) x_2 \right)$$

En caso de tener $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &> 0 && \text{por debajo de la recta} && x_2 = m_1 x_1 \\ u_2(x_1, x_2) &> 0 && \text{por arriba de la recta} && x_2 = m_2 x_1 \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $m_1 > m_2$, la figura (5.11) ilustra lo anterior.

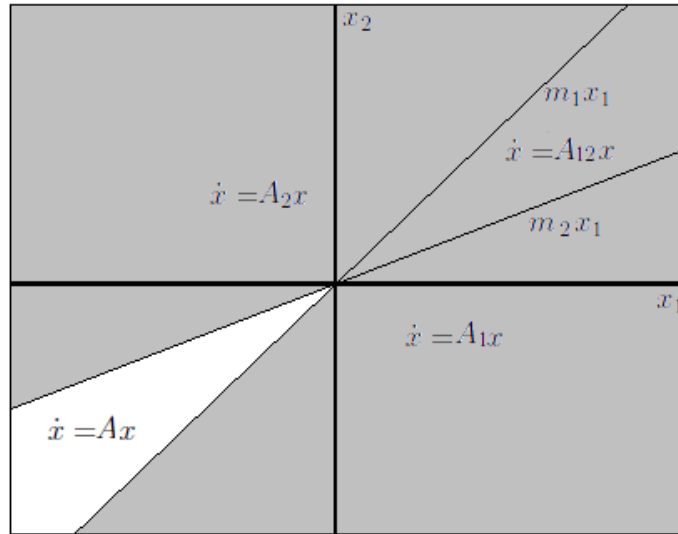


Figura 5.11: En esta imagen se observa donde actúa cada control, donde la franja gris representa la región donde actúan estos. Este diagrama ilustra el caso $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, en caso de que $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, la aplicación de los controles se invierte.

Subcaso 1.2 $b_2 < 0$ y $b_1 < 0$.

Análogamente, por hipótesis de controlabilidad $b_1b_3 < 0$ y $b_2b_4 < 0$, es decir $b_3 > 0$ y $b_4 > 0$, de forma que la aplicación de los controles es como la expuesta antes.

Caso 2. $m_1 < 0$ y $m_2 < 0$.

Si $m_1 < 0$ y $m_2 < 0 \Rightarrow b_1b_2 < 0$ y $b_3b_4 < 0$.

Subcaso 2.1 $b_2 > 0$ y $b_1 < 0$.

En este caso, la hipótesis de controlabilidad implica que $b_3 > 0$ y $b_4 < 0$, de forma que si $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, entonces los controles se aplican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &> 0 && \text{por debajo de la recta} && x_2 = m_1x_1 \\ u_2(x_1, x_2) &> 0 && \text{por arriba de la recta} && y_2 = m_2x_2 \end{aligned}$$

en caso contrario $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, entonces se invierte la aplicación de los controles.

El *Subcaso 2.1* es similar al *subcaso 1.2*

Para probar que el cono donde no se aplican controles es un cono no invariante usamos la siguiente proposición.

Proposición 5.2. *Sea C un cono con vértice en el origen que no tiene puntos en*

común con los ejes coordenados, entonces C no contiene conjuntos invariantes bajo el sistema $\dot{x} = Ax$.

Lo siguiente será probar esta proposición con A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Consideremos la siguiente observación:

Dada la recta $x_2 = mx_1$, con $m > 0$, las soluciones de $\dot{x} = Ax$, con A de la forma (5.39) y $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, cruzan la recta de izquierda a derecha.

Ya que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

sea $x_2 = mx_1$, entonces las soluciones de $\dot{x} = Ax$ satisfacen que $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 m}{\lambda_1} < m$, es decir, para $mx_1 > 0$ ($m > 0$ y $x_1 > 0$) si $\lambda_2 < \lambda_1$ las soluciones cruzan las rectas de arriba hacia abajo; por el contrario, si $\lambda_2 > \lambda_1$ el cruce se invierte.

Prueba de la proposición

Sea x_0 un punto de ingreso al cono C , entonces $x(t) = e^{At}x_0$, escrito de otra forma

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} x_{01} \\ e^{\lambda_2 t} x_{02} \end{pmatrix}$$

tal que existe $\bar{t} > 0$ que implica que $x(\bar{t}) \notin C$.

Supongamos que $\frac{b_2}{b_1} > \frac{b_4}{b_3}$, entonces $m_1 > m_2$ por (5.37). Supongamos también que $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, tal que $x(0) = x_0 \in l_1 = \{(x_1, x_2)/x_2 = m_1 x_1\}$.

Si $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$ es tal que $x_{02} = m_1 x_{01}$, dado que $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ entonces la solución

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} x_{01} \\ e^{\lambda_2 t} x_{02} \end{pmatrix}$$

ingresa al cono C .

De acuerdo a la observación que se hizo al principio, si $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$ es tal que

$$x_{02} = m_1 x_{01}$$

entonces existe $\bar{t} > 0$ tal que $e^{At}x_0 \in l_2 = \{(x_1, x_2)/x_2 = m_2 x_1\}$, es decir

$$e^{\lambda_2 \bar{t}} m_1 x_{01} = e^{\lambda_1 \bar{t}} m_2 x_{01}$$

o bien

$$e^{\lambda_2 \bar{t}} m_1 = e^{\lambda_2 \bar{t}} \left(\frac{b_2}{b_1} \right) = e^{\lambda_1 \bar{t}} \left(\frac{b_4}{b_3} \right) = e^{\lambda_1 \bar{t}} m_2$$

equivalentemente

$$e^{\lambda_2 \bar{t}} \left(\frac{b_2}{b_1} \right) = e^{\lambda_1 \bar{t}} \left(\frac{b_4}{b_3} \right)$$

por lo tanto

$$1 < \left(\frac{b_2 b_3}{b_1 b_4} \right) = e^{(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{t}}$$

tal que

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{b_2 b_3}{b_1 b_4} \right) > 0$$

luego se verifica que $x(\bar{t}) \notin C$.

Tenemos entonces que, el cono donde no se aplica ningún control (Ver figura (5.11)) es no invariante.

Ejemplo 5.2.4. *Consideremos el siguiente sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} u(x_1, x_2)$$

de acuerdo con (5.36) se tiene que

$$K^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{7}{5} \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

de modo que los controles son

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{5}{2}x_1 - \frac{7}{5}x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= -4x_1 + 6x_2 \end{aligned} \tag{5.40}$$

tal que

$u_1(x_1, x_2)$ se anula en la recta $x_2 = \frac{25}{14}x_1$, mientras que $u_2(x_1, x_2)$ se anula en $x_2 = \frac{2}{3}x_1$.
Para la asignación $p_1 = 1$ y $p_3 = 2$ se tiene la siguiente dinámica.

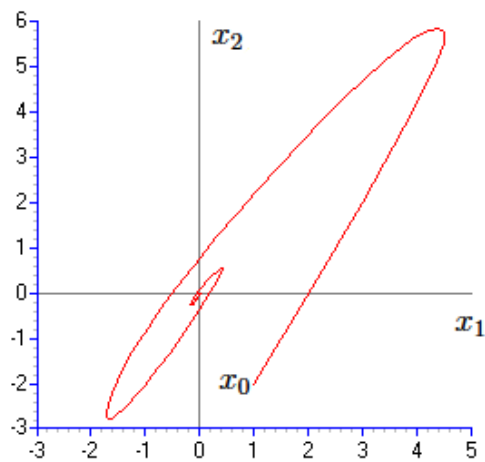


Figura 5.12: La condición inicial tomada en esta simulación es $x_0 = (1, -2)$ y se observa la convergencia al origen.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis, presentamos un método para diseñar controles Lipschitz y positivos que logran estabilizar globalmente a los sistemas en el plano que son controlables con control positivo.

En el capítulo 2 y 3 se mencionan algunos resultados preliminares, el capítulo 4 hace referencia al teorema de Brammer así como algunas caracterizaciones de sistemas lineales controlables con control positivo.

En el capítulo 5, se estudian los sistemas de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$ donde el $\text{rango}(B) = 1$, posteriormente se hace un estudio para los mismo sistemas pero considerando ahora $\text{rango}(B) = 2$.

En la sección 5.2, en el caso 1 se considera una matriz B muy particular, es decir, consideramos una subfamilia de sistemas lineales para este caso.

Concluimos con la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Un sistema de control de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$ es controlable si y sólo si $\dot{x} = P^{-1}APx + P^{-1}Bu$ es controlable.*

En otras palabras, esta proposición nos dice que si el sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$ es controlable, entonces el sistema en su forma de Jordan también es controlable.

Bibliografía

- [1] Fernando Verduzco y Horacio Leyva, *Notas de Ecuaciones Diferenciales 2*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas.
- [2] R.F. Brammer. *Controllability in linear autonomous systems with positive controllers*. SIAM J. Control, 10.1972.
- [3] Paul Waltman. *A Second Course in Elementary Differential Equations*. Emory University, Atlanta.
- [4] Martín E. Frías A., Fernando Verduzco G., Horacio Leyva C. F. Armando Carrillo N. *On Controllability of Linear Systems with Positive Control* IFAC 2005 Republica Checa.
- [5] H. Leyva, F.A. Carrillo. *Estabilización global de sistemas lineales con control positivo*. XI Congreso Latinoamericano de Control Automático. La Habana Cuba. 2004.
- [6] Jorge A. López R. (2009). *Controlabilidad y el Teorema de Brammer*. (Tesis de Maestria - Universidad de Sonora)
- [7] Murray Wonham W. (1985). *Linear Multivariate Control; A Geometric Approach*, Third Edition, Springer-Verlag.
- [8] Bastin, G. and L. Praly (1999). *Feedback stabilization with positive controls of a class of dissipative mass-balance system*. 14th World Congress of IFAC, Beijing, China.
- [9] Leenher P. D. and Aeyels (2001). *Stabilization of positive linear system*. Systems Control Lett., 44, 259-271.
- [10] Sussmann, H. J. and Yudi Yang (1991). *On the Stabilizability of Multiple Integrators by Means of Bounded Feedback Controls*. Proceedings of the 30th conference on Decision and control, Brighton, England.

- [11] Lin Y. and E. D. Sontag (1995). Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs. *Control: Theory and Advanced Technology*, 10, 1981-2004.