



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Análisis y control de un brazo mecánico

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Adriana Ruiz Silva

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, 4 de Febrero del 2011

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Horacio Leyva Castellanos
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

SINODALES Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Eduardo Frías Armenta
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecerle a Dios, por acompañarme todos los días, por darme la fortaleza y la capacidad para elegir, seguir, y terminar este trabajo y sobre todo mi licenciatura.

Familia, detrás de este trabajo estan ustedes, gracias por su apoyo, confianza y amor. Gracias por todos los momentos que estuvieron conmigo para brindarme una sonrisa o un regaño cuando lo merecia.

Mamá, gracias por ser mi mejor amiga, mi ejemplo, mi motor y por toda la confianza, amor y apoyo que me has brindado siempre.

Humberto, gracias por se un gran hermano, soportar mi genio y sobre todo por escucharme aunque no tuvieras ni la mas mínima idea de lo que hablaba.

Wilson, gracias por enseñarme que no son necesarios los lazos de sangre para que surga el amor de padre e hija.

A mi director de tesis, el Dr. Fernando Verduzco González lo único que le puedo decir es gracias por confiar en mi para la realización de este trabajo. Gracias por su paciencia, comprensión y por regalarme parte de su tiempo y conocimientos.

A mis sinodales, el M.C. Horacio Leyva Castellanos, el Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro y el Dr. Eduardo Frías Armenta, muchas gracias por tomarse su tiempo para leer y revisar

este trabajo.

A todos los profesores que me han hecho una mejor persona, que me prepararon para enfrentarme al campo laboral, gracias por su paciencia, tiempo y esfuerzo para transmitir conocimientos.

Y por último pero no menos importantes a mis amigos y compañeros de generación y de la licenciatura, a los cuales conocí hace poco más de cuatro años cuando iniciábamos una etapa de nuestras vidas; una etapa un poco y cansada, pero con grandes momentos.

Carol, Manuela, Angelita, Sergio, Beto y César, gracias por su infinita paciencia, por su compañía, por su apoyo, por los momentos que pasamos juntos, por cada palabra de aliento, por cada explicación brindada, los quiero mucho.

A todos los que por descuido no han sido incluidos y han sido fundamentales en mi formación como profesional y persona, mis más sinceros agradecimientos.

Adriana Ruiz Silva

Introducción

Cada día la población se incrementa de gran manera, las necesidades de los seres humanos se hacen cada vez mayores, encontrar productos de más calidad, más precisión y baratos nos lleva a avanzar en ciencia y tecnología.

Un avance muy importante a sido la introducción de robot en la industria, ya que son sistemas manipulables, de los cuales podemos controlar la fuerza, precisión, energía a utilizar, los movimientos que tendrá, el tiempo que trabajarán, entre otras. Unas de sus ventajas sobre los seres humanos, es que son muy útiles en zonas de riesgo, soportan altas temperaturas, atmósferas con gases tóxicos y además pueden trabajar por bastante tiempo sin descanso. Si bien es cierto, los robots no pueden trabajar por iniciativa propia no dejan de ser un gran avance en la industria.

Ya con la idea de avanzar en la tecnología, en este trabajo nos enfocaremos en el análisis de un determinado tipo de robot, el brazo mecánico de n grados de libertad con movimientos solamente en el plano. Es de suma importancia mencionar, que sólo analizamos la dinámica del brazo mecánico, no se considera como parte del estudio los sistemas eléctricos, electrónicos, ni el tipo de material con el que es mas viable la construcción del robot.

El trabajo se divide en cuatro capítulos, el primero incluye conceptos matemáticos y físicos que serán necesarios para los análisis posteriores. Después, en el segundo capítulo se mencionan los conceptos de las fuerzas que actúan en un n -péndulo que es la estructura base de nuestro brazo mecánico a estudiar y además se realizan algunos de los principales cálculos.

Ya que se tienen calculadas estas energías pasamos al capítulo tres, en el cual se busca una forma más generalizada de escribir lo calculado anteriormente y se realiza un análisis de la función hamiltoniano del sistema. Se estudia la dinámica del n -péndulo de manera general y obtenemos sus puntos de equilibrio. También se analiza el caso particular del 2-péndulo.

Por último se establece el término de brazo mecánico de n grados de libertad, es decir, al n -péndulo estudiado le ajustamos motores. Iniciando así con nuestro capítulo del control, donde la idea en general es cambiar la dinámica de tal forma que el brazo mecánico realice lo que nosotros deseamos.

En este caso se incluye un control de posición, que el cual desde cualquier posición inicial el brazo llegue a una posición establecida; y un control de seguimiento, que de igual forma desde cualquier posición inicial el brazo siga determinada trayectoria.

Estos dos tipos de control para el brazo mecánico podrían ser muy útiles en la industria, el primero podría ser utilizado para desplazar objetos a determinada posición, mientras que el segundo se podría encargar de tareas como apuntar un objeto, realizar algún corte, trabajos de pintura, soldadura, entre otras cosas.

Índice general

1. Preliminares	9
1.1. Álgebra lineal	9
1.2. Criterios para clasificar una forma cuadrática	15
1.3. Estabilidad según Lyapunov	16
1.4. Principio de invariancia	17
1.5. Polinomio de Hurwitz	19
1.6. Linealización	22
1.7. Sistemas Hamiltonianos	30
1.8. Cinemática Inversa	31
2. Energía mecánica	35
2.1. Energía cinética	35
2.2. Energía potencial	41
2.3. Energía total	45
3. Mecánica Hamiltoniana	47
3.1. Ecuaciones de Hamilton. Dinámica del sistema.	55
3.2. Puntos de equilibrio	55

3.3. Caso 2-Eslabones	58
4. Control	67
4.1. Control de posición	67
4.2. Control de seguimiento	77
A. Programas para control de posición	95
B. Programas para el control de seguimiento	103
C. Comandos utilizados en los programas y funcionamiento	109

Índice de figuras

1.1. Linealización. Teorema de Hartman-Grobman	23
1.2. 1.-Nodo inestable, 2.- Nodo estable, 3.- Silla	24
1.3. Nodo estrella. 1.- Inestable 2.- Estable	25
1.4. Nodo impropio. 1.- Inestable, 2.- Estable	26
1.5. 1.- foco inestable; 2.- centro; 3.- foco estable	26
1.6. Subespacios invariantes: teorema de la variedad estable.	27
1.7. Esquemización gráfica del teorema 1.6.4.	29
1.8. Dos posibles soluciones del problema	32
1.9. Algunas soluciones	33
2.1. Péndulo de n -eslabones, o n -péndulo	38
2.2. Péndulo simple	41
2.3. Péndulo con dos eslabones o 2-péndulo	42
2.4. 3-péndulo	43
3.1. Cuatro puntos de equilibrios del 2-péndulo	58
4.1. Visualización gráfica del problema	71
4.2. Gráfica de “Posición contra tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 2	73

4.3. Gráficas “control contra tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 2 .	73
4.4. Gráfica de “Posición contra Tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 3	74
4.5. Gráfica “control contra tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 3 .	74
4.6. Gráfica de “Posición contra Tiempo” de cada eslabón.	75
4.7. Gráficas “control contra tiempo” de cada eslabón. Eslabones de masa 1kg	76
4.8. Gráfica de “Control contra Posición” de cada eslabón. Eslabones de masa 2 kg . .	76
4.9. Trayectoria seguida por el segundo eslabón del brazo mecánico	84
4.10. Gráficas de control contra tiempo para el primer eslabón	85
4.11. Gráficas de control contra tiempo para el segundo eslabón	86
4.12. Trayectoria seguida por el segundo eslabón del brazo mecánico	88
4.13. Gráfica de control contra tiempo para el primer eslabón	89
4.14. Gráficas de control contra tiempo para el segundo eslabón	90
4.15. Trayectoria seguida por el segundo eslabón del brazo mecánico	92
4.16. Gráfica de control contra tiempo del primer eslabón	93
4.17. Gráficas de control contra tiempo para el segundo eslabón	94
A.1. Pantalla de simulación	97
A.2. Gráficas de control contra tiempo programa 2	100
A.3. Gráficas generadas por el bloque “Posición contra tiempo”	101
A.4. Gráficas generadas por el bloque “Control contra tiempo”	102
B.1. Ejemplos de los resultados	106
B.2. Resultado del programa: Pantalla de simulación.	107

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Álgebra lineal

Sea M_n el espacio de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales. En el contexto se indica si los componentes de las matrices son constantes o variables.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ de la forma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.1.1. Una matriz A es *invertible* si y sólo si $\det A \neq 0$. La denotaremos como A^{-1} .

Definición 1.1.2. Una matriz A es *simétrica* si cumple con $A = A^T$, es decir, los elementos a_{ij} y a_{ji} deberán ser iguales para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 1.1.1. Si A es una matriz simétrica e invertible entonces su inversa también es simétrica.

Prueba: Probaremos que $I = (A^{-1})^T A$

$$\begin{aligned} I &= AA^{-1} \\ &= (AA^{-1})^T \\ &= (A^{-1})^T A^T \\ &= (A^{-1})^T A \end{aligned}$$

Por tanto, $(A^{-1})^T = A^{-1}$, es decir, A^{-1} es simétrica. □

1.1.1. Diferenciación

Proposición 1.1.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) \in M_n(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Si $f(x) = c^T A c$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = c^T \frac{\partial}{\partial x_k} A(x) c = c^T \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij}(x)) \right) c$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} (x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} (x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} (x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T \frac{\partial}{\partial x_1} A(x) c \\ \vdots \\ c^T \frac{\partial}{\partial x_n} A(x) c \end{pmatrix} = c^T \left(\frac{\partial}{\partial x} (A(x)) \right) c = c^T D A(x) x.$$

Prueba: Si $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ y

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & \cdots & a_{3n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

entonces podemos expresar la función $f(x)$ de la forma

$$\begin{aligned}
f(x) &= (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n) \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & \cdots & a_{3n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}(x)c_i \quad \sum_{i=1}^n a_{i2}(x)c_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n a_{in}(x)c_i \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}(x)c_i \right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^n a_{i2}(x)c_i \right) c_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n a_{in}(x)c_i \right) c_n \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)c_i \right) c_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)c_i c_j
\end{aligned}$$

Calculando la parcial de f con respecto a x_k obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)c_i c_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij}(x)) c_i c_j = c^T \left(\frac{\partial}{\partial x_k} A(x) \right) c$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. □

Proposición 1.1.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \in M_n$ simétrica. $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x$ implica

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Ax$$

.

Prueba: Siguiendo la demostración de la proposición (1.1.2) podemos expresar a $f(x)$ como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (a_{1j} x_j) x_1 + \sum_{j=1}^n (a_{2j} x_j) x_2 + \cdots + \sum_{j=1}^n (a_{nj} x_j) x_n \right)
\end{aligned}$$

Calculando la parcial de f respecto a x_k

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \frac{1}{2} \left(a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \cdots + a_{k-1k}x_{k-1} + \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + a_{kk}x_k + \cdots + a_{nk}x_n \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik}x_i + \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i + \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \\
 &= \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} x
 \end{aligned}$$

Si calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} x \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} x \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} x \\
 &= Ax
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que la derivada de $f(x)$ es Ax . □

Proposición 1.1.4. Sea $A(x) \in M_n$ una matriz simétrica e invertible, entonces

$$DA(x) = -A(x)DA^{-1}(x)A(x)$$

Prueba: Sabemos que

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= I \\ \frac{\partial}{\partial x} (A^{-1}(x)A(x)) &= I \\ DA^{-1}(x)A + A^{-1}(x)DA(x) &= 0 \\ A(x)DA^{-1}(x)A + A(x)A^{-1}(x)DA(x) &= 0 \\ A(x)DA^{-1}(x)A(x) + DA(x) &= 0 \\ DA(x) &= -A(x)DA^{-1}(x)A(x) \end{aligned}$$

□

1.1.2. Valores y vectores propios

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Diremos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *valor propio*, *eigenvalor* o *valor característico* de A , si existe un vector $v \in \mathbb{C}^n$ con $v \neq 0$, tal que

$$Av = \lambda v.$$

El vector v es conocido como el *vector propio*, *eigenvector* o *vector característico* de A asociado a λ .

Para calcular los valores propios de una matriz, observemos que

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

La última ecuación representa un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Como $v \neq 0$, estamos interesados en encontrar las soluciones no-nulas, entonces λ deberá ser tal que

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donde esta ecuación es conocida como la *ecuación característica* de A , desarrollando este determinante obtendremos un polinomio de grado n en λ que es llamado *polinomio característico* de A . Las raíces o soluciones del polinomio representan los valores propios de A .

Ejemplo 1. Calcular los valores y vectores propios de la matriz de 2×2 dada

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Para las matrices 2×2 es fácil calcular el polinomio característico, ya que es de la forma

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 - (\operatorname{tr}A)\lambda + \det A
 \end{aligned}$$

En nuestro caso el polinomio característico es $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 7$, ya que la $\operatorname{tr}A = -8$ y $\det A = 7$. Calculando las raíces del polinomio obtenemos los valores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -7$ que son los valores propios de la matriz A .

Sea $v_i = (v_{i1}, v_{i2})^T$, el vector propio asociado al valor propio, λ_i , de la matriz A . Para calcular las componentes de este vector, consideremos el sistema de ecuaciones generado por la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 Av_i &= \lambda_i v_i \\
 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix} &= \lambda_i \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo cual, para nuestro valor propio $\lambda_1 = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} -3v_{11} + 2v_{12} &= -v_{11} \\ 4v_{11} - 5v_{12} &= -v_{12} \end{aligned}$$

El vector propio asociado al λ_1 será:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora para $\lambda_2 = -7$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} -3v_{21} + 2v_{22} &= -7v_{21} \\ 4v_{21} - 5v_{22} &= -7v_{22} \end{aligned}$$

El vector propio asociada a λ_2 será:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.2. Criterios para clasificar una forma cuadrática

Una forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, donde $A \in M_n(\mathbb{R})$, puede ser clasificada como:

1. *Positiva definida*. Si todos sus valores propios, λ_i , son estrictamente mayores que cero.
2. *Negativa definida*. Si todos sus valores propios, λ_i , son estrictamente menores que cero.
3. *Semipositiva definida*. Si todos sus valores propios, λ_i , son mayores o iguales a cero.
4. *Seminegativa definida*. Si todos sus valores propios, λ_i , son menores o iguales a cero.
5. *Indefinida*. Si existe algún valor propio positivo y alguno negativo.

1.2.1. Criterio de Sylvester

El Criterio de Sylvester se basa en la determinación del signo de los menores principales de la matriz cuadrática asociada. Se le conoce como *submatriz principal de orden i* , a toda submatriz de A formada por las i primeras filas y las i primeras columnas, y se denota por A_i .

$$A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = A$$

Llamaremos *menores principales* a los determinantes de las submatrices principales.

Teorema 1.2.1. *Sea A una matriz simétrica. Entonces,*

1. *A es positiva definida si y sólo si todos sus menores principales son positivos, es decir, $|A_i| > 0, \forall i$.*
2. *A es semidefinida positiva si y sólo si todos sus menores principales no negativos, es decir, $|A_i| \geq 0, \forall i$.*
3. *A es negativa definida si y sólo si $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \dots$*
4. *A es semidefinida negativa si y sólo si $|A_1| \leq 0, |A_2| \geq 0, |A_3| \leq 0, \dots$*

1.2.2. Matrices positivas definidas

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz positiva definida.

Propiedad 1. Toda matriz positiva definida es invertible, ya que su determinante es mayor que cero, y su inversa es positiva definida.

Propiedad 2. Si A es una matriz positiva definida y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces rA es positiva definida.

Propiedad 3. Si A y B son definidas positivas, entonces su suma $A + B$ también lo es. Además si $AB = BA$, entonces AB también es positiva definida.

1.3. Estabilidad según Lyapunov

Las funciones de Lyapunov son muy utilizadas en problemas de ingeniería y para resolver algunos de los problemas de estabilidad que se estudian en los sistemas dinámicos, son funciones que básicamente nos demuestran la estabilidad de cierto punto fijo en un sistema dinámico o en las ecuaciones diferenciales autónomas. Las funciones que podrían probar la estabilidad de un punto de equilibrio cualquiera son llamadas *candidatas a funciones de Lyapunov*.

Definición 1.3.1. Un punto x_0 es llamado punto de equilibrio del sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

si cumple $f(x_0) = 0$.

Definición 1.3.2. Consideremos la ecuación diferencial (1.1), con $x = x_0$ un punto de equilibrio y $\varphi(t, x)$ la solución que pasa por x en $t = 0$. Una función escalar continuamente diferenciable $V : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función de Lyapunov* de la ecuación diferencial en $x = x_0$ si

1. $V(x_0) = 0$.
2. $V(x) > 0$ para $x \in \mathcal{U} - \{x_0\}$.
3. $\dot{V}(\varphi(t, x)) \leq 0$ para $x \in \mathcal{U} - \{x_0\}$.

Definición 1.3.3. Si se cumple la definición anterior y además se cumple

$$\dot{V}(\varphi(t, x)) < 0$$

para $x \in \mathcal{U} - \{x_0\}$ la función V es llamada *función de Lyapunov estricta*.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio utilicemos el siguiente teorema

Teorema 1.3.1. Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$.

Y sea

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla V \dot{x} = \nabla V f(x)$$

i) El equilibrio es estable si $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \mathcal{U}$.

ii) El equilibrio es asintóticamente estable si $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in \mathcal{U} - \{x_0\}$.

1.4. Principio de invariancia

Cuando no es posible verificar si un punto de equilibrio, x_0 , es asintóticamente estable por medio de una función de Lyapunov, pero de ésta se obtiene que el punto es estable, es decir, cuando se tiene que $\dot{V}(x) \leq 0$ podemos utilizar el teorema de invariancia de LaSalle para verificar si el punto es asintóticamente estable. Casi la totalidad de lo mencionado en esta sección fue extraído de [1].

Definición 1.4.1. El conjunto de todos los puntos límites positivos de $x(t)$ se llama *conjunto límite positivo de $x(t)$* , y es denotado por L^+ .

Definición 1.4.2. Un conjunto M se dice que es un *conjunto invariante* respecto a $\dot{x} = f(x)$ si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es decir, si una solución, $x(t)$, pertenece a M en un instante t siempre permanecerá en el conjunto M .

Definición 1.4.3. Un conjunto M se dice que es un *conjunto positivamente invariante* si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 1.4.4. Una función se dice que esta *radialmente no acotada* si cumple con la condición

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Lema 1.4.1. Si una solución $x(t)$ en $\dot{x} = f(x)$ es acotada y permanece en el dominio D para todo $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto invariante, no vacío y compacto. Y además

$$x(t) \rightarrow L^+ \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Teorema 1.4.2 (LaSalle). Sea $\Omega \subset D$ un conjunto compacto positivamente invariante con respecto a $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos de Ω donde $\dot{V} = 0$. Sea M el mayor conjunto invariante contenido en E . Entonces, toda solución que inicia en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Se buscará demostrar que toda solución $x(t)$ que inicia en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea $x(t)$ una solución de $\dot{x} = f(x)$ que inicia en Ω .

Como $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω , entonces la función $V(x(t))$ es decreciente en t .

Ya que $V(x)$ es continua en un compacto, esta acotada inferiormente en Ω . Por tanto, $V(x(t))$ tiene un límite a cuando $t \rightarrow \infty$, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a$$

Por otra parte, como Ω es un conjunto cerrado e invariante contiene a todos sus puntos límites en particular al conjunto límite positivo L^+ de la solución $x(t)$. Por lo cual, para cada $p \in L^+$, existe una sucesión $\{t_n\}$ talque $t_n \rightarrow \infty$ y $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por continuidad de $V(x)$ tenemos

$$V(p) = V\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$$

Por tanto, $V(x)$ es una función constante en L^+ lo que implica que $\dot{V}(x) = 0$ en L^+ .

Ahora bien, como se cumple que $\dot{V}(x) = 0$ en L^+ esto implica que $L^+ \subset E$, y por el lema (1.4.1) tenemos que L^+ es un conjunto invariante, no vacío y compacto, y como M es el mayor subconjunto invariante de E entonces $L^+ \subset M$.

Por tanto se tiene

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega \subset D.$$

De igual forma, por el lema (1.4.1), $x(t) \rightarrow L^+$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, como las soluciones en un tiempo infinito se aproximan a un subconjunto de M , también podemos afirmar que $x(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow \infty$.

□

Corolario 1.4.3. *Sea $x = x_0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y positiva en el dominio D que contiene al punto x_0 , tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en D . Sea $S = \{x \in D | \dot{V}(x) = 0\}$ y supongamos que ninguna solución distinta de x_0 puede permanecer en S . Entonces, el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable.*

Corolario 1.4.4. *Sea $x = x_0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, radialmente no acotada, y positiva definida tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$ y supongamos que ninguna solución distinta de x_0 puede permanecer en S . Entonces, el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable de manera global.*

1.5. Polinomio de Hurwitz

Los polinomios de Hurwitz son muy utilizados para determinar la estabilidad de algunos sistemas, o para diseñar sistemas estables, ya que son polinomios cuyas raíces poseen parte real negativa, con lo cual garantizaremos que el sistema sea estable. Los teoremas mencionados en esta sección han sido extraídos de [4].

Definición 1.5.1. Un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces poseen parte real negativa, es decir, si están en $\mathbb{C}^- = \{a + ib \mid a < 0\}$.

A continuación, se muestran algunos teoremas con sus demostraciones, para verificar que condiciones necesarias y suficientes para que polinomios de grado uno, dos, tres y cuatro sean Hurwitz.

Teorema 1.5.1. El polinomio $p(t) = t + a_1$ es Hurwitz si y sólo si $a_1 > 0$.

Demostración. La raíz de $p(t)$ es $t = -a_1$. Luego $t = -a_1 \in \mathbb{C}^-$ si y sólo si $a_1 > 0$. □

Teorema 1.5.2. El polinomio $p(t) = t^2 + a_1t + a_2$ es Hurwitz si y sólo si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$.

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribir a $p(t)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p(t) &= (t - z_1)(t - z_2) \text{ donde } z_{1,2} \in \mathbb{C} \\ p(t) &= t^2 - (z_1 + z_2)t + z_1z_2 \end{aligned}$$

Lo que indica que $a_1 = -(z_1 + z_2)$ y $a_2 = z_1z_2$.

Caso 1. $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

(\Rightarrow) Supongamos que $p(t)$ es Hurwitz, es decir, las raíces del polinomio son negativas, $z_1, z_2 < 0$.

Lo que implica

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 < 0 &\Rightarrow a_1 = -(z_1 + z_2) > 0 \\ z_1z_2 > 0 &\Rightarrow a_2 = z_1z_2 > 0 \end{aligned}$$

Por tanto $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$.

(\Leftarrow) Supongamos que $a_1, a_2 > 0$.

Como $a_1 = -(z_1 + z_2)$ entonces $z_1 + z_2 < 0$, y como $a_2 = z_1z_2 > 0$ esto quiere decir que z_1 y z_2 son del mismo signo, por tanto $z_1, z_2 < 0$, es decir, $p(t)$ es Hurwitz.

Caso 2. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Es decir, son de la forma $z_1 = \alpha + i\beta$ y $z_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 = 2\alpha &\Rightarrow a_1 = -2\alpha \\ z_1 z_2 = \alpha^2 + \beta^2 &\Rightarrow a_2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Si $p(t)$ es Hurwitz entonces $\alpha < 0$, lo que implica que $a_1 = -2\alpha > 0$ y $a_2 > 0$ para cualquier valor de α y β .

(\Leftarrow) Si $a_1, a_2 > 0$, entonces como $a_1 = -2\alpha > 0$ se tiene que $\alpha < 0$. Por lo tanto $p(t)$ es Hurwitz. \square

Teorema 1.5.3. *El polinomio $p(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ es Hurwitz si y sólo si $a, b, c > 0$ y $ab - c > 0$*

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribir $p(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} p(t) &= (t + z_1)(t^2 + w_1 t + w_2) \text{ donde } z_1, w_1, w_2 \in \mathbb{C} \\ &= t^3 + (z_1 + w_1)t^2 + (z_1 w_1 + w_2)t + z_1 w_2 \end{aligned}$$

Lo que indica que $a_1 = z_1 + w_1$, $a_2 = z_1 w_1 + w_2$ y $a_3 = z_1 w_2$. Llamemos $g(t) = t + z_1$ y $h(t) = t^2 + w_1 t + w_2$.

(\Rightarrow) Supongamos que $p(t) = g(t)h(t)$ es Hurwitz.

Para $g(t)$ usando el teorema (1.5.1) $z_1 > 0$. Y para $h(t)$ usando el teorema (1.5.2) $w_1, w_2 > 0$.

Entonces

$$a_1 = z_1 + w_1 > 0, \quad a_2 = z_1 w_1 + w_2 > 0, \quad a_3 = z_1 w_2 > 0.$$

Falta probar que $a_1 a_2 - a_3 > 0$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= (z_1 + w_1)(z_1 w_1 + w_2) - z_1 w_2 \\ &= z_1^2 w_1 + z_1 w_2 + z_1 w_1^2 + w_1 w_2 - z_1 w_2 \\ &= z_1^2 w_1 + z_1 w_1^2 + w_1 w_2 \end{aligned}$$

Como todos los factores son positivos, $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

(\Leftarrow) Ahora, supongamos que $a_1, a_2, a_3 > 0$ y que $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Por lo cual tenemos que

$$a_1 = z_1 + w_1 > 0 \tag{1.2}$$

$$a_2 = z_1 w_1 + w_2 > 0 \tag{1.3}$$

$$a_3 = z_1 w_2 > 0 \tag{1.4}$$

$$a_1 a_2 - a_3 = z_1^2 w_1 + z_1 w_1^2 + w_1 w_2 > 0 \tag{1.5}$$

De (1.5) podemos factorizar w_1 y obtenemos $w_1(z_1^2 + z_1w_1 + w_2)$. Como $z_1w_1 + w_2 > 0$ y $z_1^2 > 0$ entonces $w_1 > 0$. Luego de (1.4) podemos deducir que z_1, w_2 son del mismo signo.

Ahora, de (1.3) y con la condición que $z_1 > 0$, entonces podemos decir que $z_1, w_2 > 0$.

Por tanto, como $z_1 > 0$ por el teorema (1.5.1) $t + z_1$ es Hurwitz. Y como $w_1, w_2 > 0$ por el teorema (1.5.2) $t^2 + w_1t - w_2$ es Hurwitz, entonces $p(t)$ es Hurwitz. \square

Teorema 1.5.4. *El polinomio $p(t) = t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$ es Hurwitz si y sólo si $a_1, a_4 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$ y $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$.*

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribir a $p(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} p(t) &= (t^2 + z_1t + z_2)(t^2 + w_1t + w_2) \text{ donde } z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C} \\ &= t^4 + (w_1 + z_1)t^3 + (w_2 + w_1z_1 + z_2)t^2 + (w_2z_1 + w_1w_2)t + w_2z_2 \end{aligned}$$

Lo que indica que $a_1 = w_1 + z_1$, $a_2 = w_2 + w_1z_1 + z_2$, $a_3 = w_2z_1 + w_1z_2$ y $a_4 = w_2z_2$.

(\Rightarrow) Supongamos que $p(t)$ es Hurwitz, esto implica que $t^2 + z_1t + z_2$ y $t^2 + w_1t + w_2$ son Hurwitz, entonces por el teorema (1.5.2) $z_1, z_2, w_1, w_2 > 0$. Entonces $a_1 > 0$, ya que es la suma de dos números positivos, y $a_4 > 0$ ya que es el producto de dos números positivos.

Luego, debemos probar que $a_1a_2 - a_3 > 0$

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= w_1w_2 + w_1^2z_1 + w_2z_1 + w_1z_1^2 + w_1z_2 + z_1z_2 - (w_2z_1 + z_1z_2) \\ &= w_1w_2 + w_1^2z_1 + w_1z_1^2 + z_1z_2 \end{aligned}$$

El cual es positivo, ya que todos los factores son positivos.

Ahora, probemos que $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$

$$a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 = w_1z_1((w_2 - z_2)^2 + (w_1 + z_1)(w_2z_1 + w_1z_2))$$

Como $w_1, w_2, z_1, z_2 > 0$, se cumple que $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$.

(\Leftarrow) Supongamos que $a_1, a_4 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$ y $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$.

Factorizando a_3 de la última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 &> 0 \\ a_3(a_1a_2 - a_3) &> a_1^2a_4 \end{aligned}$$

Como $a_1^2a_4 > 0$, por transitividad tenemos que $a_3(a_1a_2 - a_3) > 0$, por tanto a_3 debe ser mayor que cero.

Por lo cual, tenemos que las siguientes condiciones deben ser estrictamente mayores que cero

$$a_1 = w_1 + z_1 \quad (1.6)$$

$$a_3 = w_2 z_1 + w_1 z_2 \quad (1.7)$$

$$a_4 = w_2 z_2 \quad (1.8)$$

$$a_1 a_2 - a_3 = w_1 w_2 + w_1^2 z_1 + w_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (1.9)$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 = w_1 z_1 ((w_2 - z_2)^2 + (w_1 + z_1)(w_2 z_1 + w_1 z_2)) \quad (1.10)$$

Como $(w_2 - z_2)^2 > 0$ y $(w_1 + z_1)(w_2 z_1 + w_1 z_2) > 0$ entonces $w_1 z_1$ debe ser mayor que cero. Es decir, $w_1, z_1 > 0$ ó $w_1, z_1 < 0$.

Ahora, por (1.6) podemos deducir que w_1 y z_1 no pueden ser negativas al mismo tiempo, entonces $z_1 > 0$ y $w_1 > 0$.

Como $w_2 z_2 > 0$ entonces $w_2, z_2 < 0$ ó $w_2, z_2 > 0$. Pero para que se cumpla (1.7) w_2 y z_2 deben ser positivas. Por lo tanto, $z_1, z_2, w_1, w_2 > 0$.

Ahora, ya que $p(t) = (t^2 + z_1 t + z_2)(t^2 + w_1 t + w_2)$ y por el teorema (1.5.2) tenemos que $p(t)$ es Hurwitz.

□

1.6. Linealización

Cuando se estudian sistemas no lineales autónomos uno de los puntos importantes a estudiar son los puntos de equilibrio y el comportamiento de las soluciones que inician cercanas a cada uno de estos.

Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Expandiendo la serie de Taylor alrededor de x_0 el campo vectorial f , obtenemos

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}D^2f(x_0)(x - x_0) + \dots$$

Luego, se sigue que el sistema lineal $\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0)$ es una buena aproximación al sistema no lineal alrededor de x_0 . Realizando un cambio de variable $\xi = x - x_0$ se transforma en

$$\dot{\xi} = Df(x_0)\xi,$$

la cual es la linealización de $\dot{x} = f(x)$.

1.6.1. Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman es de los más utilizados cuando se desea observar estabilidad de manera local, es un resultado que establece que, bajo ciertas condiciones, en una vecindad del punto de equilibrio x_0 el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ tiene la misma estructura cualitativa que su linealización.

Definición 1.6.1. Consideremos los sistemas no lineales $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = g(x)$. Diremos que son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo que manda órbitas de un sistema en el otro, y que es tal que preserva el sentido de las mismas. Si además es tal que preserva la parametrización del tiempo, entonces diremos que son *topológicamente conjugados*.

Definición 1.6.2. Un punto de equilibrio x_0 del campo vectorial f es *hiperbólico* si $Df(x_0)$ no tiene valores propios con parte real cero.

Teorema 1.6.1 (Hartman-Grobman). *Sea x_0 un punto hiperbólico del campo vectorial f . Entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(x)$$

y su linealización

$$\dot{y} = Df(x_0)y$$

son topológicamente conjugados.

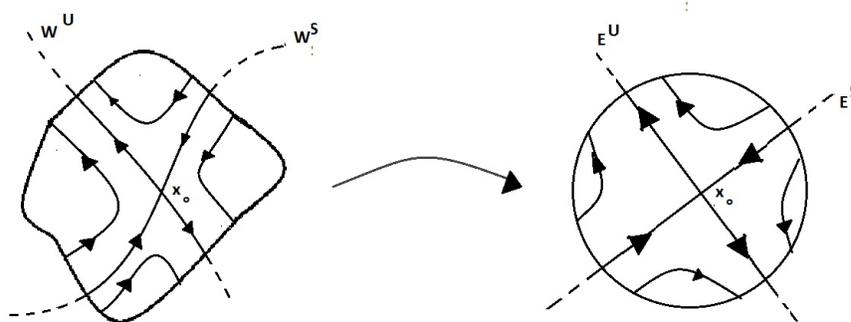


Figura 1.1: Linealización. Teorema de Hartman-Grobman

Clasificación de los puntos de equilibrio

Como al utilizar el teorema de Hartman-Grobman establecemos que el sistema no lineal y su linealización preservan la parametrización del tiempo y además manda órbitas de un sistema en otro y preserva el sentido de las mismas. Entonces, cuando estudiamos la dinámica de un sistema no lineal, $\dot{x} = f(x)$, podemos observar la dinámica de su linealización, $\dot{y} = Df(x_0)y$ y así establecer la estabilidad de los puntos de equilibrio.

En este apartado nos centraremos en la dinámica de los puntos de equilibrio en el plano. Al estudiar la dinámica de un sistema de la forma $\dot{y} = Df(x_0)y$, debemos tener en cuenta todas las posibles configuraciones de los valores propios de $Df(x_0)$, los cuales pueden ser : valores propios reales distintos, valores propios iguales, o valores complejo

Valores propios reales y distintos

En este caso, consideremos el sistema linealizado

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y$$

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *nodo inestable*.
2. Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *nodo estable*.
3. Si λ_1 y λ_2 son de signos opuestos, se dice que el punto de equilibrio es inestable tipo *silla*.

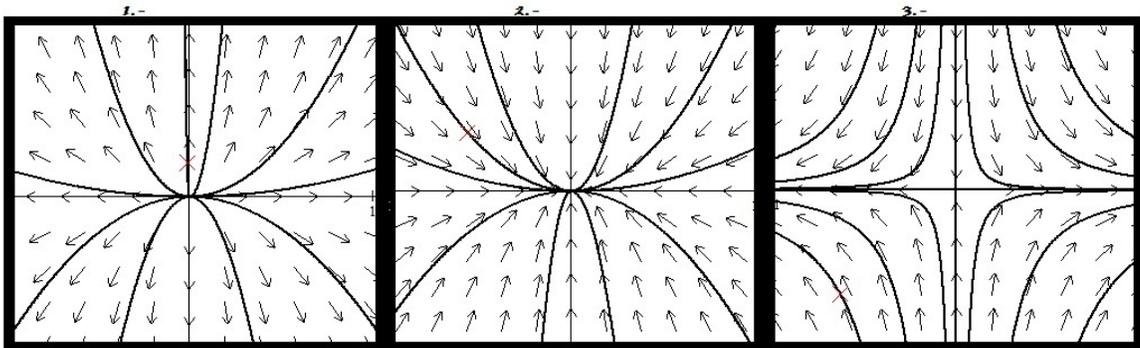


Figura 1.2: 1.-Nodo inestable, 2.- Nodo estable, 3.- Silla

Valores propios iguales

De igual manera, consideraremos el sistema linealizado sólo que para este caso de valores propios tenemos que considerar que la matriz $Df(x_0)$ sea o no diagonal.

Caso 1. $Df(x_0)$ es diagonal, es decir, tenemos un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} y$$

Este tipo de valores propios da lugar a *nodos estrella*.

1. Si $\lambda_0 > 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *nodo estrella inestable*.
2. Si $\lambda_0 < 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *nodo estrella estable*.

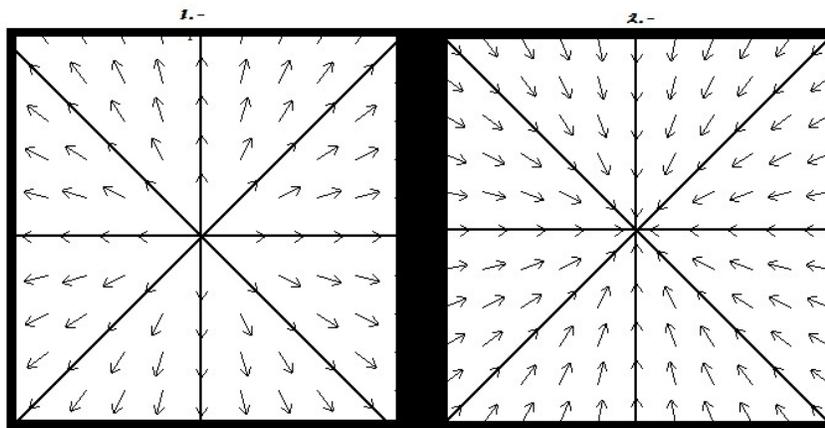


Figura 1.3: Nodo estrella. 1.- Inestable 2.- Estable

Caso 2. $Df(x_0)$ no es diagonal, es decir, tenemos un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} y$$

Este tipo de valores propios da lugar a *nodos impropios*.

1. Si $\lambda_0 > 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *nodo impropio inestable*.
2. Si $\lambda_0 < 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *nodo impropio estable*.

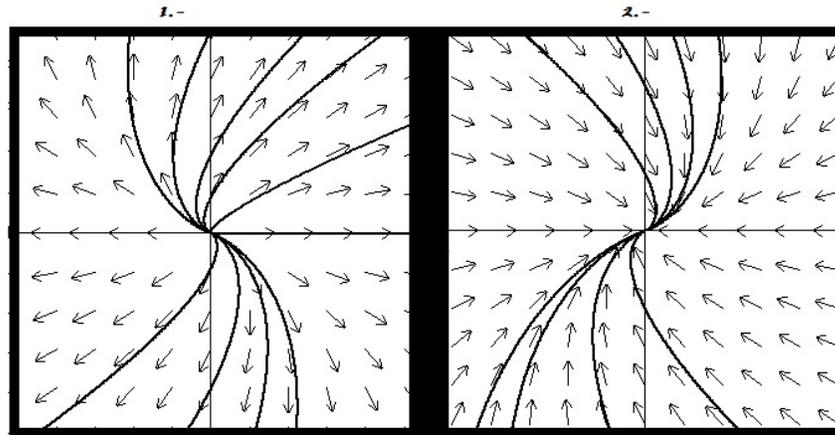


Figura 1.4: Nodo impropio. 1.- Inestable, 2.- Estable

Valores propios complejos

En el caso de tener valores propios complejos, tendremos un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} y$$

donde para determinar la dinámica del punto de equilibrio sólo se considera la parte real del valor propio, α , entonces

1. Si $\alpha > 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *foco inestable*.
2. Si $\alpha = 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *centro*.
3. Si $\alpha < 0$ se dice que el punto de equilibrio es un *foco estable*.

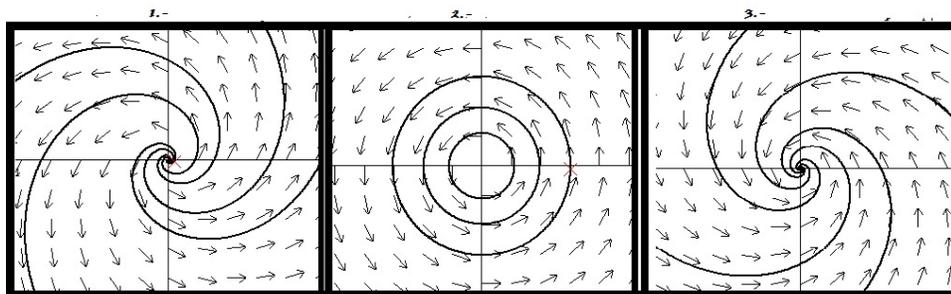


Figura 1.5: 1.- foco inestable; 2.- centro; 3.- foco estable

1.6.2. Teorema de la variedad estable

Otro teorema muy importante en el estudio cualitativo local de las ecuaciones diferenciales ordinarias, es el teorema de la variedad estable, que establece que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, x_0 , el sistema $\dot{x} = f(x)$ posee dos variedades (superficiales) tangentes en x_0 a los eigenspacios E^s y E^u . Pero antes de establecer estos teoremas, definamos estas dos variedades.

Para las dos variedades consideremos el sistema no lineal, $\dot{x} = f(x)$ y sea φ_t su flujo.

Definición 1.6.3. La *variedad estable local* de x_0 , $W_{loc}^s(x_0)$, se define como

$$W_{loc}^s(x_0) = \{x \in V \mid \varphi_t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ y } \varphi_t(x) \in V \text{ para toda } t \geq 0\}$$

donde V es una vecindad del punto de equilibrio x_0 .

Definición 1.6.4. La *variedad inestable local* de x_0 , $W_{loc}^u(x_0)$, se define como

$$W_{loc}^u(x_0) = \{x \in V \mid \varphi_t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, \text{ y } \varphi_t(x) \in V \text{ para toda } t \leq 0\}$$

donde V es una vecindad del punto de equilibrio x_0 .

Las variedades locales estable e inestable representan un análogo no lineal de los eigenspacios E^s y E^u de un sistema local.

Teorema 1.6.2 (Variedad estable). *Supongamos que el sistema $\dot{x} = f(x)$ posee un punto de equilibrio hiperbólico x_0 . Entonces existen las variedades locales estable e inestable $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$, de la misma dimensión que los eigenspacios E^s y E^u de la linealización $\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0)$, y además son tangentes a E^s y E^u en x_0 .*

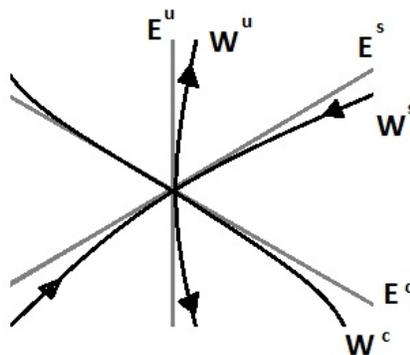


Figura 1.6: Subespacios invariantes: teorema de la variedad estable.

La variedad central, que es tangente al eigenspacio E^c no es mencionada en el teorema anterior, ya que se considera un equilibrio hiperbólico descartando la posibilidad de que exista esta variedad, ya que E^c es vacío.

1.6.3. Teoría de la variedad central

Como ya observamos en el apartado anterior, se analizaron las soluciones que nacen cercanas a un punto de equilibrio hiperbólico, pero cuando se tienen puntos de equilibrios no hiperbólicos es necesario realizar otro análisis para determinar la estabilidad de este punto. Una de las técnicas para estudiar estos puntos es la variedad central.

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{\omega} = X(\omega), \quad (1.11)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^n$ y W es un campo vectorial suave. Supongamos que $X(0) = 0$ y que $DX(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donde $A \in M_k$ con valores propios con parte real cero y $B \in M_{n-k}$ con valores propios con parte real negativa.

Hagamos $\omega = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $x \in \mathbb{R}^k$ y $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, obteniendo la siguiente representación para el sistema (1.11),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ y $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$, y $f, g \in C^r$, con $r \geq 2$.

Definición 1.6.5. Una variedad invariante será llamada *variedad central* si para el sistema (1.12) puede ser representada, de manera local, como sigue

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

El hecho de que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ nos garantiza que la variedad central $W_{loc}^c(0)$ es tangente al eigenspacio central E^c en el origen.

Los siguientes tres teoremas son de suma importancia en la teoría de la variedad central. El primer teorema determina la existencia, el segundo la dinámica mientras que el tercero nos permite la precisión deseada.

Teorema 1.6.3. *Existe una C^r variedad central para el sistema (1.12). La dinámica del sistema (1.12), restringida a la variedad central, está dada, para u suficientemente pequeña, por el siguiente k -dimensional sistema*

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad (1.13)$$

con $u \in \mathbb{R}^k$.

Teorema 1.6.4. 1. Suponga que $u = 0$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.13), entonces $(x, y) = (0, 0)$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.12).

2. Suponga que el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ del sistema (1.12) es estable. Entonces, si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.12) con $(x(0), y(0))$ lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución $u(t)$ de (1.13) tal que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),\end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

El teorema anterior determina la dinámica de (1.13) cercana a $u = 0$ y la dinámica de (1.12) cerca de $(x, y) = (0, 0)$. En otras palabras, lo que nos dice el teorema es que la solución $u(t)$ del sistema (1.13), representa de manera aproximada la proyección de la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.12), sobre el eigenespacio $E^C \approx \mathbb{R}^k$.

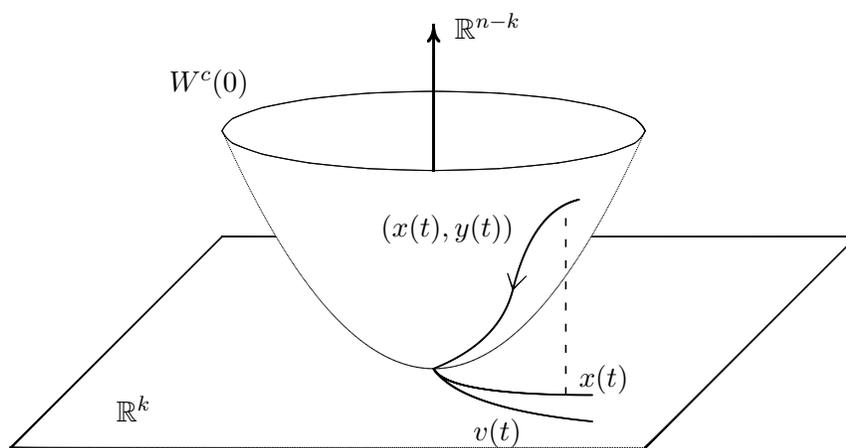


Figura 1.7: Esquemización gráfica del teorema 1.6.4.

El tercer teorema nos proporciona un método para aproximar la función $h(x)$, cuya gráfica es la variedad central. Consideremos lo siguiente:

Sea $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c(0)$, luego, se cumple que $y(t) = h(x(t))$, y derivando respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} \tag{1.14}$$

Pero todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (1.12), por tanto, la ecuación (1.14) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$\mathcal{N}(h(x)) \equiv Dh(x)(Ax + f(x, h(x)) - Bh(x) - g(x, h(x))) = 0. \quad (1.15)$$

Luego, el problema es encontrar una $h(x)$ que satisfaga (1.15).

Teorema 1.6.5. *Sea $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de clase \mathcal{C}^1 , con $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x^q|)$ cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces*

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x^q|) \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

1.7. Sistemas Hamiltonianos

William Rowan Hamilton utilizando algunos principios del cálculo variacional da una concepción de la mecánica teórica en la cual se consideran como variables independientes a las coordenadas y momentos generalizados del sistema. Estos nuevos concepción es conocida como mecánica hamiltoniana.

Se define la *función hamiltoniana* o el *hamiltoniano* para cualquier sistema como

$$H(q, p, t) = \frac{p^T p}{2m} + V(q, t) \quad (1.16)$$

donde q son las coordenadas generalizadas, p el momento generalizado, m la masa del sistema, y V la energía potencial del sistema.

El hamiltoniano es una función escalar a partir de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, y es muy útil en problemas de ingeniería donde se desea modelar sistemas eléctricos, mecánicos, electrónicos, entre otros.

Ahora, si queremos expresar las ecuaciones que describen el movimiento, lo podemos realizar de manera sencilla derivando (1.16) obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

y son conocidas como Ecuaciones de Hamilton, y además tenemos que el vector velocidad estará dado por

$$v = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right).$$

Ahora, basándonos en el hamiltoniano podemos dar una definición de un sistema conservativo.

Definición 1.7.1. Un *sistema conservativo* es un sistema hamiltoniano autónomo el cual posee una función hamiltoniana

$$H = H(q, p),$$

la cual no depende del tiempo.

Para mostrar esto, derivamos (1.16) respecto al tiempo y utilizando las ecuaciones de Hamilton (1.17)

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cuando tenemos un sistema conservativo podemos ver a la función hamiltoniana como la energía mecánica del sistema, es decir, la suma de las energías cinética y potencial.

1.8. Cinemática Inversa

El problema de cinemática inversa aplicado a robot manipuladores o brazos mecánicos es obtener los valores de las variables articulares, q_i , para que estos posea determinada posición y orientación. Pero cuando nosotros conocemos la geometría del robot, los cálculos son un poco más sencillos.

Cuando se estudia la cinemática inversa algunos de los problemas fundamentales que surgen son que existen múltiples soluciones, ninguna solución o posibles singularidades. Por lo cual, cuando estudiamos este problema, debemos de considerar los siguientes puntos

1. Espacio alcanzable.
2. Tipos de soluciones.
3. Existencia de múltiples soluciones.

Espacio alcanzable

El espacio alcanzable, básicamente es el máximo volumen (área) donde el robot se puede mover con lo menos una orientación.

Si el robot manipulador se mueve en el espacio tridimensional consideraremos el volumen, mientras si el robot a considerar es un robot planar consideraremos el área de máximo alcance.

Tipos de soluciones

Una solución del problema en este caso, es el conjunto de variables articulares que permiten posicionar el elemento final en determinada posición y orientación. Y estas son de dos tipos:

1. Soluciones no numéricas.

Soluciones algebraicas: Ecuaciones trigonométricas no lineales.

Soluciones geométricas: Conjunto de subproblemas geométricos en el plano.

2. Soluciones numéricas.

Existencia de múltiples soluciones

Cuando consideramos la existencia de múltiples soluciones primeramente podemos considerar lo siguiente: Si el número de grados de libertad del robot es igual al que se requiera para hacer la tarea sólo existen dos soluciones,

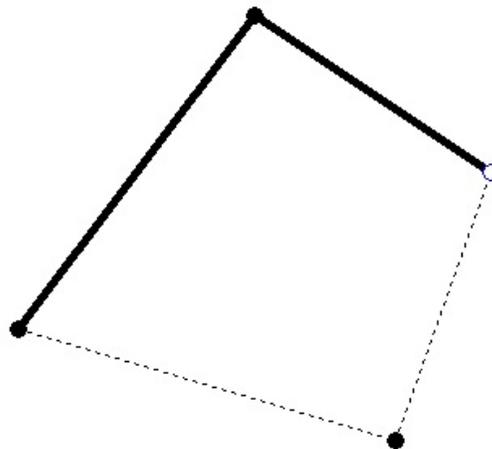


Figura 1.8: Dos posibles soluciones del problema

o si el número de grados de libertad del robot es mayor al que se requiere para hacer la tarea existen infinitas soluciones.

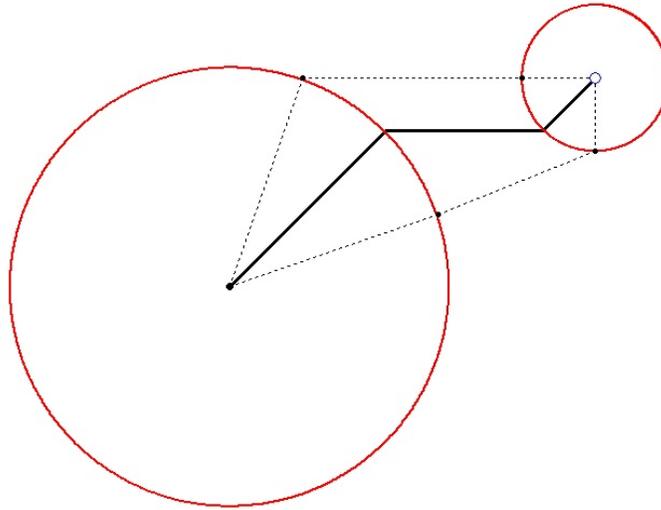


Figura 1.9: Algunas soluciones

Además debemos de considerar que la solución que usemos sea la que minimice los movimientos desde la posición actual, la solución más cercana, si los eslabones son diferentes debemos de mover los eslabones de menor peso para garantizar un ahorro de energía y por último considerar obstáculos y evitar colisiones.

Capítulo 2

Energía mecánica

La energía mecánica es una energía producida por la posición y movimiento de un cuerpo, en otras palabras es la combinación de dos tipos de energía estudiadas por separado: la energía cinética y la energía potencial. En este capítulo se usarán estos dos tipos de energía para establecer el modelo matemático de un n -péndulo, centrándonos primeramente en las energías cinética y potencial de cada eslabón para después dar una versión más generalizada de estas. Es importante mencionar que al estudiar a la energía mecánica de esta forma logramos que está permanezca constante, ya que en el sistema a estudiar sólo actúan fuerzas conservativas.

2.1. Energía cinética

La *energía cinética* de un cuerpo, es la que surge de un fenómeno en movimiento. El término “*cinética o cinético*” proviene de la palabra griega “*kineticos o kinesis*” que quiere decir movimiento, y es estudiada en dos partes: energía cinética de traslación y energía cinética de rotación.

2.1.1. Energía cinética de traslación

Para obtener una definición cuantitativa de la energía cinética de traslación, veamos una partícula de masa, m , que se mueve en línea recta con velocidad inicial, v_1 . Para acelerar uniformemente a una velocidad, v_2 se ejerce una fuerza neta constante F_{neta} sobre ella, paralela a su movimiento, a lo largo de una distancia d .

Entonces podemos decir, que el trabajo efectuado sobre la partícula es:

$$T_{neto} = F_{neto}d$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_{neto} = ma$$

Así como, la ecuación de la cinemática para aceleración constante:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2ad$$

Obtenemos:

$$T_{neto} = F_{neto}d = mad = m \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} \right) d = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

donde $EC_t = \frac{1}{2}mv^2$ es conocida como *energía cinética de traslación*.

2.1.2. Energía cinética de rotación

Se dice que un cuerpo que gira alrededor de un eje tiene *energía cinética de rotación*. Por analogía a la energía cinética de traslación habría que esperar una expresión del tipo $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia del cuerpo y ω su velocidad angular.

Para comprobar esto, tomemos un cuerpo que gira como si estuviera formado por muchas partículas diminutas, cada una con masa, m . Si r es la distancia de cualquier partícula al eje de rotación entonces su velocidad lineal $v = r\omega$.

La energía cinética total del cuerpo será la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$EC_r = \sum \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \sum \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum mr^2 \right) \omega^2 \quad (2.1)$$

Como el momento de inercia está definido por

$$I = \sum mr^2 \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1), obtenemos:

$$EC_r = \frac{1}{2} \left(\sum mr^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2.3)$$

Para un objeto que gira al momento en que su centro de masa tiene movimiento de traslación tendrá tanto energía cinética de traslación como de rotación, entonces la ecuación de la energía cinética es:

$$EC = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

donde v_{CM} , es la velocidad lineal del centro de masa, I_{CM} el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa, ω es la velocidad angular alrededor del eje y M la masa total del cuerpo.

2.1.3. Modelo matemático de la energía cinética

La energía cinética para un n -péndulo moviéndose en un plano vertical, está dada por:

$$EC = EC_t + EC_r \quad (2.4)$$

donde EC_t es la energía cinética de traslación y EC_r es la energía cinética de rotación.

$$\begin{aligned} EC &= EC_t + EC_r \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_{c_i}^T v_{c_i} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \omega_i^T I_i \omega_i \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde v_{c_i} y ω_i son las velocidades lineal y angular, respectivamente, e I_i el momento de inercia del i -ésimo eslabón.

Para el n -péndulo, la velocidad lineal del i -ésimo eslabón resulta ser la derivada del vector posición de su centro de masa: $r_{c_i} = (x_i, h_i)^T$, es decir, $v_{c_i} = \dot{r}_{c_i} = (\dot{x}_i, \dot{h}_i)^T$ mientras que la velocidad angular es simplemente $\omega_i = \dot{\theta}_i$.

Calculando los valores de las componentes del vector posición, x_i y h_i :

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c_1} \sin \theta_1, & h_1 &= l_{c_1} \cos \theta_1, \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_{c_2} \sin \theta_2, & h_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_{c_2} \cos \theta_2, \\ x_3 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_{c_3} \sin \theta_3, & h_3 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_{c_3} \cos \theta_3, \\ \vdots & & \vdots & \\ x_i &= \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin \theta_j + l_{c_i} \sin \theta_i, & h_i &= \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos \theta_j + l_{c_i} \cos \theta_i. \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Calculemos las derivadas de las componentes del vector posición, para poder obtener la velocidad utilizada en la energía cinética

$$v_{c_i}^T v_{c_i} = (\dot{x}_i, \dot{h}_i)^T (\dot{x}_i, \dot{h}_i) = \dot{x}_i^2 + \dot{h}_i^2$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j + l_{c_i} \cos \theta_i \dot{\theta}_i, \quad \text{y} \quad \dot{h}_i = - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j - l_{c_i} \sin \theta_i \dot{\theta}_i.$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

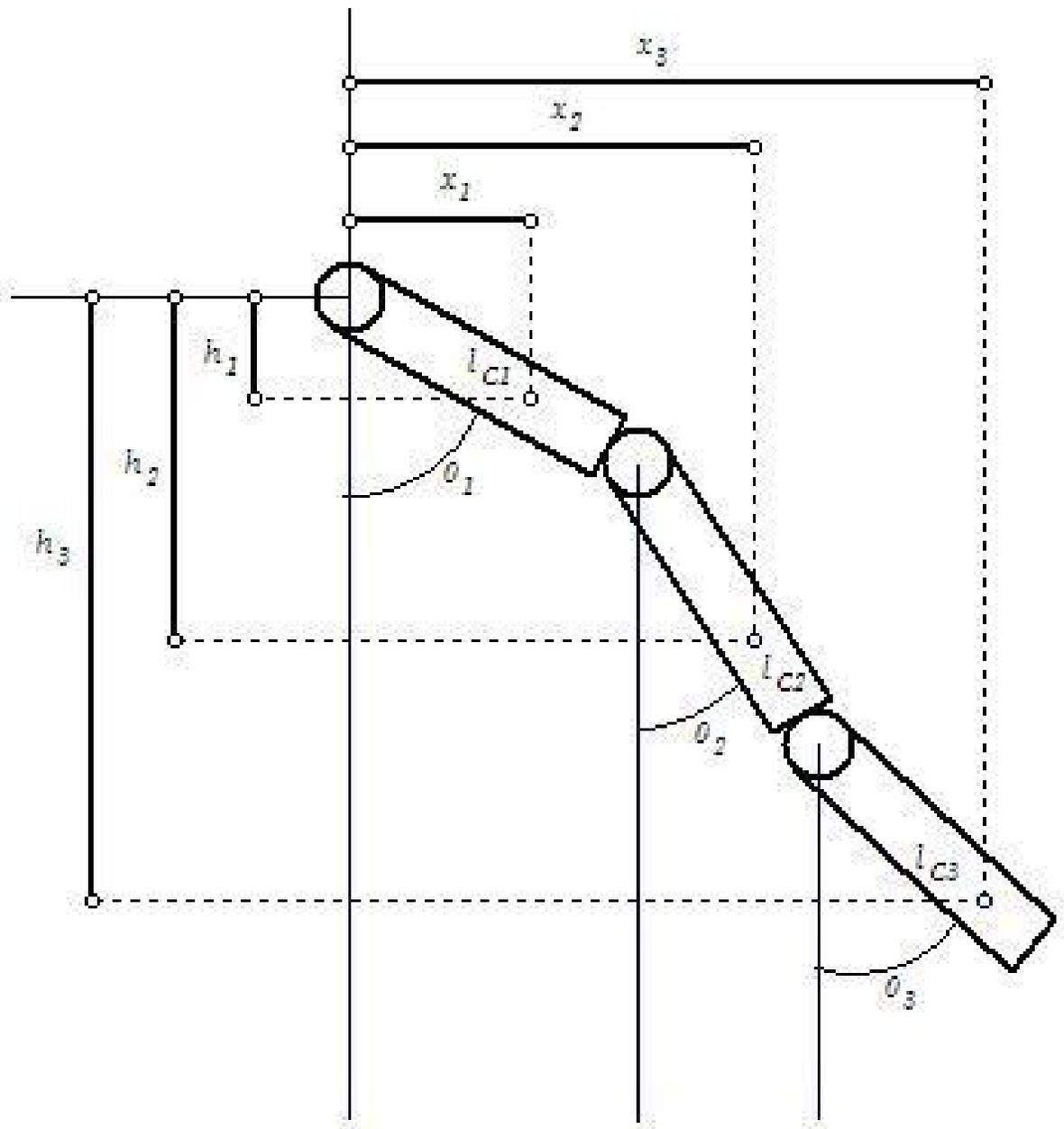


Figura 2.1: Péndulo de n -eslabones, o n -péndulo

Calculemos el cuadrado de estas dos componentes, \dot{x}_i y \dot{h}_i

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^2 &= \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j + l_{c_i} \cos \theta_i \dot{\theta}_i \right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j \right)^2 + \left(l_{c_i} \cos \theta_i \dot{\theta}_i \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) (l_{c_i} \cos \theta_i \dot{\theta}_i) \\
&= l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 \cos^2 \theta_i + \sum_{j=1}^{i-1} l_j^2 \dot{\theta}_j^2 \cos^2 \theta_j + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} l_j \dot{\theta}_j l_k \dot{\theta}_k \cos \theta_j \cos \theta_k \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) (l_{c_i} \cos \theta_i \dot{\theta}_i)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_i^2 &= \left(- \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j - l_{c_i} \sin \theta_i \dot{\theta}_i \right)^2 \\
&= \left(- \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j \right)^2 + \left(-l_{c_i} \sin \theta_i \dot{\theta}_i \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) (l_{c_i} \sin \theta_i \dot{\theta}_i) \\
&= l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 \sin^2 \theta_i + \sum_{j=1}^{i-1} l_j^2 \dot{\theta}_j^2 \sin^2 \theta_j + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} l_j \dot{\theta}_j l_k \dot{\theta}_k \sin \theta_j \sin \theta_k \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) (l_{c_i} \sin \theta_i \dot{\theta}_i)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Realizando la suma de (2.6) y (2.7), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^2 + \dot{h}_i^2 &= \sum_{j=1}^{i-1} l_j^2 \dot{\theta}_j^2 \cos^2 \theta_j + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} l_j \dot{\theta}_j l_k \dot{\theta}_k \cos \theta_j \cos \theta_k + l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 \cos^2 \theta_i \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) (l_{c_i} \cos \theta_i \dot{\theta}_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j^2 \dot{\theta}_j^2 \sin^2 \theta_j + l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 \sin^2 \theta_i \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) (l_{c_i} \sin \theta_i \dot{\theta}_i) + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} l_j \dot{\theta}_j l_k \dot{\theta}_k \sin \theta_j \sin \theta_k
\end{aligned}$$

Simplificando los cálculos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^2 + \dot{h}_i^2 &= l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i (\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} l_j l_{c_i} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_i (\cos \theta_j \cos \theta_i + \sin \theta_j \sin \theta_i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} l_j^2 \dot{\theta}_j^2 (\cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j) + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} l_j \dot{\theta}_j l_k \dot{\theta}_k (\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k) \\
&= l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \left(l_{c_i} l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_j - \theta_i) \right) + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} \left(l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right) \\
&= l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \left(l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 l_{c_i} l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_j - \theta_i) \right) + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} \left(l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right)
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

Ahora bien, sustituyendo en la ecuación (2.1.2) para calcular la energía cinética de n -eslabones, tomando en cuenta $\omega_i = \dot{\theta}_i$.

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
EC &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \omega_i^T I_i \omega_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \left(l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 l_{c_i} l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_j - \theta_i) \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} \left(l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{\theta}_i^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left(m_i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 m_i l_{c_i} l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_j - \theta_i) \right) \\
&\quad + \sum_{i=3}^n \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} \left(m_i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{\theta}_i^2 \tag{2.8}
\end{aligned}$$

2.2. Energía potencial

La *energía potencial* es la capacidad que tiene los cuerpos para realizar un trabajo, dependiendo de la posición o configuración de un cuerpo y su entorno.

2.2.1. Energía potencial gravitatoria

Si permitimos que un objeto caiga libremente bajo la acción de la gravedad, el trabajo hecho por la gravedad es:

$$T_{grav} = Fd = mgh \quad (2.9)$$

Entonces se define la *energía potencial gravitacional* de un cuerpo como el producto de su peso mg y su altura, respecto a un nivel de referencia como el suelo. Mientras más alto este el objeto mayor será la cantidad de energía potencial gravitacional, ya que está depende de la altura vertical del objeto sobre algún nivel de referencia.

2.2.2. Modelo matemático de la energía potencial

La energía potencial para un n -péndulo se calcula:

$$EP = m_1gH_1 + m_2gH_2 + \dots + m_ngH_n$$

donde m_i son la masa y H_i es el desplazamiento del centro de masa sobre la vertical, g es la aceleración debida a la gravedad. La energía potencial es igual a cero cuando el robot está completamente extendido hacia abajo.

Calculemos la energía potencial para un eslabón:

$$EP = m_1gH_1 = m_1g(l_{c_1} - h_1 = m_1g(l_{c_1} - l_{c_1} \cos \theta_1) = m_1gl_{c_1}(1 - \cos \theta_1)$$

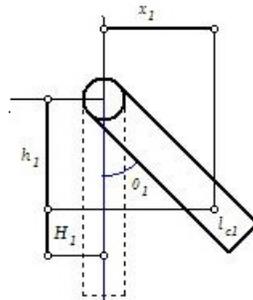


Figura 2.2: Péndulo simple

Para dos eslabones:

$$\begin{aligned}
 EP &= m_1 g H_1 + m_2 g H_2 \\
 &= m_1 g (l_{c_1} - h_1) + m_2 g (l_1 + l_{c_2} - h_2) \\
 &= m_1 g (l_{c_1} - l_{c_1} \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 + l_{c_2} - (l_1 \cos \theta_1 + l_{c_2} \cos \theta_2)] \\
 &= \sum_{i=1}^2 m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1)
 \end{aligned}$$

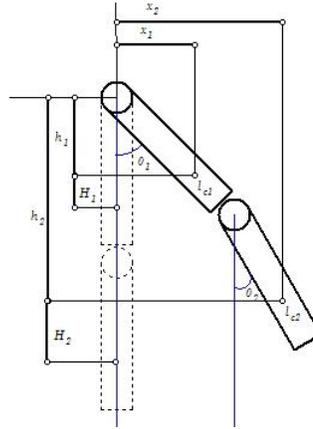


Figura 2.3: Péndulo con dos eslabones o 2-péndulo

Para tres eslabones:

$$\begin{aligned}
 EP &= m_1 g H_1 + m_2 g H_2 + m_3 g H_3 \\
 &= m_1 g (l_{c_1} - h_1) + m_2 g (l_1 + l_{c_2} - h_2) + m_3 g (l_1 + l_2 + l_{c_3} - h_3) \\
 &= m_1 g [l_{c_1} - l_{c_1} \cos \theta_1] + m_2 g [l_1 + l_{c_2} - (l_1 \cos \theta_1 + l_{c_2} \cos \theta_2)] \\
 &\quad + m_3 g [l_1 + l_2 + l_{c_3} - (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_{c_3} \cos \theta_3)] \\
 &= \sum_{i=1}^3 m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_3 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (\cos \theta_2)] \\
 &= \sum_{i=1}^3 m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^3 m_j g l_i (1 - \cos \theta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left(m_i g l_{c_i} + l_i \sum_{j=i+1}^3 m_j g \right) (1 - \cos \theta_i)
 \end{aligned}$$

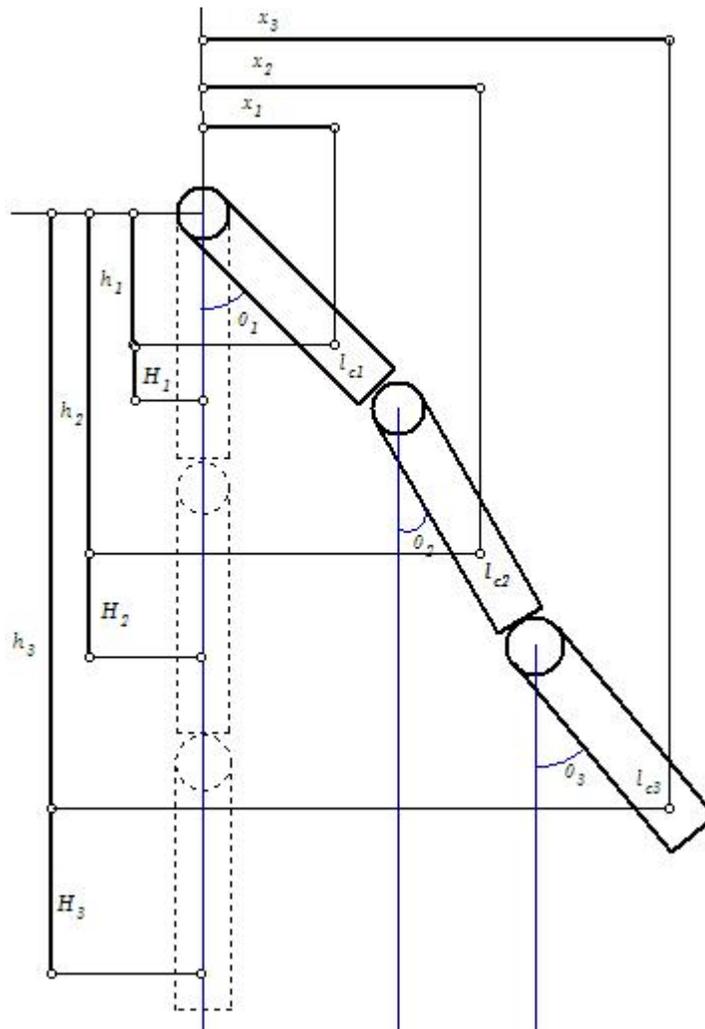


Figura 2.4: 3-péndulo

Ahora, calculando la energía potencial para un n -péndulo:

$$EP = m_1gH_1 + m_2gH_2 + \cdots + m_n gH_n \quad (2.10)$$

Pero antes calculemos la energía potencial del i -ésimo eslabón, $m_i gH_i$, donde $H_i = (l_1 + l_2 + \cdots + l_{i-1} + l_{c_i}) - h_i$, es el cambio de altura del centro de masa; m_i , la masa; l_i y l_{c_i} son las longitudes del i -ésimo eslabón y del centro de masa del i -ésimo eslabón respectivamente; g es la aceleración debida a la gravedad, y $EP = 0$ cuando el robot está completamente extendido hacia abajo.

$$\begin{aligned} m_i gH_i &= m_i g (l_1 + l_2 + \cdots + l_{i-1} + l_{c_i} - h_i) \\ &= m_i g \left(l_1 + l_2 + \cdots + l_{i-1} + l_{c_i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_k \cos \theta_k - l_{c_i} \cos \theta_i \right) \\ &= m_i g \left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k + l_{c_i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_k \cos \theta_k - l_{c_i} \cos \theta_i \right) \\ &= m_i g \left(l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{k=1}^{i-1} l_k (1 - \cos \theta_k) \right) \\ &= m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + m_i g \sum_{k=1}^{i-1} l_k (1 - \cos \theta_k) \end{aligned}$$

Entonces la energía potencial para el n -péndulo es:

$$\begin{aligned} EP &= m_1gH_1 + m_2gH_2 + \cdots + m_n gH_n \\ &= \sum_{i=1}^n m_i gH_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + m_i g \sum_{k=1}^{i-1} l_k (1 - \cos \theta_k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{i=1}^n m_i g \sum_{k=1}^{i-1} l_k (1 - \cos \theta_k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n m_i g \sum_{k=1}^{i-1} l_k (1 - \cos \theta_k) &= m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \\
&\quad + m_3 g (l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)) + \cdots \\
&\quad + m_n g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + \cdots + l_{n-1} (1 - \cos \theta_{n-1})] \\
&= l_1 (1 - \cos \theta_1) g (m_2 + m_3 + \cdots + m_n) \\
&\quad + l_2 (1 - \cos \theta_2) g (m_3 + \cdots + m_n) \\
&\quad + \cdots + l_{n-1} (1 - \cos \theta_{n-1}) g m_n \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n l_i (1 - \cos \theta_i) g m_j \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Entonces sustituyendo (2.12) en (2.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
EP &= \sum_{i=1}^n m_i g l_{c_i} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n l_i (1 - \cos \theta_i) g m_j \\
&= \sum_{i=1}^n \left(m_i g l_{c_i} + l_i \sum_{j=i+1}^n m_j g \right) (1 - \cos \theta_i) \tag{2.13}
\end{aligned}$$

2.3. Energía total

La energía total del n -péndulo es la suma de la energía cinética y la energía potencial, ambas calculadas con anterioridad (Ecuaciones (2.8) y (2.13)).

Entonces, la energía total está dada por:

$$\begin{aligned}
E(\theta, \dot{\theta}) &= EC(\theta, \dot{\theta}) + EP(\theta) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i l_{c_i}^2 \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left(m_i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 m_i l_{c_i} l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_j - \theta_i) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{\theta}_i^2 + \sum_{i=3}^n \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} \left(m_i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (m_i g l_{c_i} + l_i \sum_{j=i+1}^n m_j g) (1 - \cos \theta_i)
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Mecánica Hamiltoniana

En el capítulo anterior encontramos el modelo matemático del n -péndulo como la suma de la energía cinética y potencial, como el sistema considerado es conservativo también podemos considerar a la función hamiltoniano la cual toma en cuenta que las ecuaciones del movimiento dependen de las coordenadas y velocidades generalizadas. En este capítulo transformaremos el modelo matemático anterior, a términos de hamiltoniano. Con lo cual será necesario realizar un cambio de variables, $\theta = q$ y $\dot{\theta} = \dot{q}$.

La expresión de energía estará dada por:

$$E(q, \dot{q}) = EC(q, \dot{q}) + EP(q). \quad (3.1)$$

Expresemos la energía cinética en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas, pero primeramente en forma matricial.

La velocidad lineal esta dada por:

$$v_{c_i} = (\dot{x}_i, \dot{h}_i)^T = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos q_j \dot{q}_j + l_{c_i} \cos q_i \dot{q}_i \\ -\sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin q_j \dot{q}_j - l_{c_i} \sin q_i \dot{q}_i \end{pmatrix} = N_0 \mathcal{N}_i(q) \dot{q}$$

donde

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{2 \times n}$$

$$\mathcal{N}_i(q) = \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 & l_2 \cos q_2 & \cdots & l_i \cos q_{i-1} & l_{c_i} \cos q_i & 0 & \cdots & 0 \\ -l_1 \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 & \cdots & -l_i \sin q_{i-1} & -l_{c_i} \sin q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

pero en la energía cinética traslacional utilizamos

$$v_{c_i}^T v_{c_i} = (N_0 \mathcal{N}_i(q) \dot{q})^T N_0 \mathcal{N}_i(q) \dot{q} = \dot{q}^T \mathcal{N}_i^T(q) N_0^T N_0 \mathcal{N}_i(q) \dot{q},$$

hagamos $\mathcal{M}_i = \mathcal{N}_i^T(q) N_0^T N_0 \mathcal{N}_i(q)$.

Realizando algunos cálculos:

$$N_0^T N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{2 \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$\mathcal{N}_i^T N_0^T N_0 = \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 & -l_1 \sin q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 \cos q_2 & -l_2 \sin q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{i-1} \cos q_{i-1} & -l_{i-1} \sin q_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{c_i} \cos q_i & -l_{c_i} \sin q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Para calcular $\mathcal{M}_i = \mathcal{N}_i^T N_0^T N_0 \mathcal{N}_i$, la cual es una matriz $n \times n$, con entradas reales, calculemos algunas de sus entradas:

Las componentes de la diagonal principal:

Para $1 \leq j < i$

$$\begin{aligned} \mu_{jj} &= (l_j \cos q_j)(l_j \cos q_j) + (-l_j \sin q_j)(-l_j \sin q_j) \\ &= l_j^2 \cos^2 q_j + l_j^2 \sin^2 q_j \\ &= l_j^2 \end{aligned}$$

Para $j = i$

$$\begin{aligned}\mu_{ii} &= (l_{c_i} \cos q_i)(l_{c_i} \cos q_i) + (-l_{c_i} \sin q_i)(-l_{c_i} \sin q_i) \\ &= l_{c_i}^2 \cos^2 q_i + l_{c_i}^2 \sin^2 q_i \\ &= l_{c_i}^2\end{aligned}$$

Para $j > i$

$$\mu_{jj} = 0$$

Las componentes del renglón j y columna k .

Para $1 \leq j < i, k < i, y j \neq k$

$$\begin{aligned}\mu_{jk} &= (l_j \cos q_j)(l_k \cos q_k) + (-l_j \sin q_j)(-l_k \sin q_k) \\ &= l_j l_k \cos q_j \cos q_k + l_j l_k \sin q_j \sin q_k \\ &= l_j l_k \cos(q_j - q_k)\end{aligned}$$

Para $1 \leq j < i, k = i, y j \neq k$

$$\begin{aligned}\mu_{ji} &= (l_j \cos q_j)(l_{c_i} \cos q_i) + (-l_j \sin q_j)(-l_{c_i} \sin q_i) \\ &= l_j l_{c_i} \cos q_j \cos q_i + l_j l_{c_i} \sin q_j \sin q_i \\ &= l_j l_{c_i} \cos(q_j - q_i)\end{aligned}$$

Las componentes del renglón k y columna j .

Para $1 \leq k < i, j < i, y k \neq j$

$$\begin{aligned}\mu_{kj} &= (l_k \cos q_k)(l_j \cos q_j) + (-l_k \sin q_k)(-l_j \sin q_j) \\ &= l_k l_j \cos q_k \cos q_j + l_k l_j \sin q_k \sin q_j \\ &= l_k l_j \cos(q_k - q_j)\end{aligned}$$

Para $1 \leq k < i, j = i, y k \neq j$

$$\begin{aligned}\mu_{ik} &= (l_{c_i} \cos q_i)(l_k \cos q_k) + (-l_{c_i} \sin q_i)(-l_k \sin q_k) \\ &= l_{c_i} l_k \cos q_i \cos q_k + l_{c_i} l_k \sin q_i \sin q_k \\ &= l_{c_i} l_k \cos(q_i - q_k)\end{aligned}$$

Como la función coseno es una función par, $\cos(q_j - q_k) = \cos(q_k - q_j)$, y como l_k, l_j son longitud entonces $l_k, l_j \in \mathbb{R}$, por lo cual se tiene que $l_k l_j = l_j l_k$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 2, 3, \dots, n$. Por lo tanto $\mu_{jk} = \mu_{kj}$.

Para $j > i (k > i)$ se cumple $\mu_{jk} = \mu_{kj} = 0$, ya que cualquier índice mayor que i indica un renglón (columna) de ceros.

Entonces

$$\mathcal{M}_i(q) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1i-1} & \mu_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2i-1} & \mu_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mu_{i-11} & \mu_{i-12} & \cdots & \mu_{i-1i-1} & \mu_{i-1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_{i1} & \mu_{i2} & \cdots & \mu_{ii_1} & \mu_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) & \cdots & l_1 l_{c_i} \cos(q_i - q_1) & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 l_1 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 & \cdots & l_2 l_{c_i} \cos(q_i - q_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{i-1} l_1 \cos(q_1 - q_{i-1}) & l_{i-1} l_2 \cos(q_2 - q_{i-1}) & \cdots & l_{i-1} l_{c_i} \cos(q_i - q_{i-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ l_{c_i} l_1 \cos(q_1 - q_i) & l_{c_i} l_2 \cos(q_2 - q_i) & \cdots & l_{c_i}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, la energía cinética traslacional quedará:

$$\begin{aligned} EC_t &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}^T \mathcal{M}_i \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathcal{M}_i \right) \dot{q} \end{aligned}$$

Mientras que la energía cinética rotacional, usando las velocidades generalizadas:

$$\begin{aligned} EC_r &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I \dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{I} \dot{q} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{I} = \text{diag}(I_i)$.

Entonces, sustituyendo en (2.1.2) la energía cinética está dada por:

$$\begin{aligned}
 EC &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}^T \mathcal{M}_i \dot{q} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathcal{M}_i \right) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{I} \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathcal{M}_i + \mathcal{I} \right) \dot{q}
 \end{aligned}$$

Nombremos $M(q) = \sum_{i=1}^n m_i \mathcal{M}_i + \mathcal{I}$, donde $M(q)$ es llamada *matriz de inercia*. Entonces la energía cinética quedará:

$$EC = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (3.2)$$

Consideremos las matrices \mathcal{M}_i para obtener las componentes de la matriz de inercia. Para $i = 1$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} l_{c_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Para $i = 2$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_{c_2} \cos(q_1 - q_2) & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 l_{c_2} \cos(q_1 - q_2) & l_{c_2}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Para $i = 3$

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_1 l_{c_3} \cos(q_1 - q_3) & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 l_1 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 & l_2 l_{c_3} \cos(q_2 - q_3) & 0 & \cdots & 0 \\ l_{c_3} l_1 \cos(q_1 - q_3) & l_2 l_{c_3} \cos(q_2 - q_3) & l_{c_3}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Para $i = n$

$$\begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & \cdots & l_1 l_{n-1} \cos(q_1 - q_{n-1}) & l_1 l_{c_n} \cos(q_1 - q_n) \\ l_2 l_1 \cos(q_2 - q_1) & l_2^2 & \cdots & l_2 l_{n-1} \cos(q_2 - q_{n-1}) & l_2 l_{c_n} \cos(q_2 - q_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{n-1} l_1 \cos(q_{n-1} - q_1) & l_{n-1} l_2 \cos(q_{n-1} - q_2) & \cdots & l_{n-1}^2 & l_{n-1} l_{c_n} \cos(q_{n-1} - q_n) \\ l_{c_n} l_1 \cos(q_n - q_1) & l_{c_n} l_2 \cos(q_n - q_2) & \cdots & l_{c_n} l_{n-1} \cos(q_n - q_{n-1}) & l_{c_n}^2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $\sum m_i \mathcal{M}_i$ componente a componente.

Primero calculemos las componentes de la diagonal principal:

$i = 1$

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + \cdots + m_n l_1^2 \\ &= m_1 l_{c_1}^2 + l_1^2 \sum_{j=2}^n m_j \end{aligned}$$

$i = 2$

$$\begin{aligned} \xi_{22} &= m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + \cdots + m_n l_2^2 \\ &= m_2 l_{c_2}^2 + l_2^2 \sum_{j=3}^n m_j \end{aligned}$$

Para la i -ésima componente de la diagonal principal

$$\begin{aligned} \xi_{ii} &= m_i l_{c_i}^2 + m_{i+1} l_i^2 + m_{i+2} l_i^2 + \cdots + m_n l_i^2 \\ &= m_i l_{c_i}^2 + l_i^2 \sum_{j=i+1}^n m_j \end{aligned}$$

Como la matriz de inercia, $\sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i + \mathcal{I}$, y la matriz \mathcal{I} es diagonal, entonces a las componentes calculadas anteriormente será necesario sumarle I_i para $i = 1, 2, \dots, n$. Obteniendo así las componentes de la diagonal principal de la matriz de inercia, denotadas por β_{ii} .

$$\begin{aligned} \beta_{ii} &= \xi_{ii} + I_i \\ &= m_i l_{c_i}^2 + l_i^2 \sum_{j=i+1}^n m_j + I_i \end{aligned}$$

Como cada una de las matrices \mathcal{M}_i son matrices simétricas, entonces sumar las componentes de los i -ésimo renglón y las j -ésima columna es equivalente a sumar las componentes del j -ésimo renglón y la i -ésima columna de cada una de las matrices, es decir, $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ para $i \neq j$ y

$i = 1, 2, \dots, n, j = 2, 3, \dots, n.$

Con $i = 1, j = 2$

$$\begin{aligned}
 \xi_{12} = \xi_{21} &= m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_1 - q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) + m_4 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\
 &\quad + \dots + m_n l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\
 &= [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2 + m_4 l_1 l_2 + \dots + m_n l_1 l_2] \cos(q_1 - q_2) \\
 &= [m_2 l_1 l_{c_2} + l_1 l_2 (m_3 + m_4 + \dots + m_n)] \cos(q_1 - q_2) \\
 &= [m_2 l_1 l_{c_2} + l_1 l_2 \sum_{k=3}^n m_k] \cos(q_1 - q_2)
 \end{aligned}$$

Con $i = 1, j = 3$

$$\begin{aligned}
 \xi_{13} = \xi_{31} &= m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_1 - q_3) + m_4 l_1 l_3 \cos(q_1 - q_3) + m_5 l_1 l_3 \cos(q_1 - q_3) \\
 &\quad + \dots + m_n l_1 l_3 \cos(q_1 - q_3) \\
 &= [m_3 l_1 l_{c_3} + m_4 l_1 l_3 + m_5 l_1 l_3 + \dots + m_n l_1 l_3] \cos(q_1 - q_3) \\
 &= [m_3 l_1 l_{c_3} + l_1 l_3 (m_4 + m_5 + \dots + m_n)] \cos(q_1 - q_3) \\
 &= [m_3 l_1 l_{c_3} + l_1 l_3 \sum_{k=4}^n m_k] \cos(q_1 - q_3)
 \end{aligned}$$

En general, para el renglón i y la columna j , donde $i < j$

$$\begin{aligned}
 \xi_{ij} = \xi_{ji} &= m_j l_i l_{c_j} + m_{j+1} l_i l_j \cos(q_i - q_j) + m_{j+2} l_i l_j \cos(q_i - q_j) \\
 &\quad + \dots + m_n l_i l_j \cos(q_i - q_j) \\
 &= [m_j l_i l_{c_j} + m_{j+1} l_i l_j + m_{j+2} l_i l_j + \dots + m_n l_i l_j] \cos(q_i - q_j) \\
 &= [m_j l_i l_{c_j} + l_i l_j (m_{j+1} + m_{j+2} + \dots + m_n)] \cos(q_i - q_j) \\
 &= [m_j l_i l_{c_j} + l_i l_j \sum_{k=j+1}^n m_k] \cos(q_i - q_j)
 \end{aligned}$$

Nombremos $\beta_{ij} = m_j l_i l_{c_j} + l_i l_j \sum_{k=j+1}^n m_k$, con $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
Entonces

$$\begin{aligned}
 \xi_{ij} &= [m_j l_i l_{c_j} + l_i l_j \sum_{k=j+1}^n m_k] \cos(q_i - q_j) \\
 &= \beta_{ij} \cos(q_i - q_j)
 \end{aligned}$$

donde $\beta_{ij} \cos(q_i - q_j)$ con $i \neq j$ son las componentes de la matriz de inercia, para el i -ésimo renglón y la j -ésima columna.

Ahora bien, nuestra matriz de inercia se expresa como:

$$M(q) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cos(q_1 - q_2) & \cdots & \beta_{1n} \cos(q_1 - q_n) \\ \beta_{21} \cos(q_2 - q_1) & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \cos(q_2 - q_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} \cos(q_n - q_1) & \beta_{n2} \cos(q_n - q_2) & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Se puede observar que $M(q)$ es una matriz simétrica, y además es una matriz invertible. Sea $p = M(q)\dot{q}$ el *momento generalizado*, escribimos la ecuación (3.2) como:

$$\begin{aligned} EC &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p \end{aligned} \quad (3.3)$$

ya que $\dot{q}^T = M^{-1}(q)p$. Obteniendo así, la energía cinética en términos de las coordenadas y el momento generalizado.

Ahora según la ecuación (3.1) es necesario expresar la energía potencial en términos de las posiciones generalizadas

$$EP = \sum_{i=1}^n \left(m_i g l_{c_i} + l_i \sum_{j=i+1}^n m_j g \right) (1 - \cos q_i)$$

nombramos $\alpha_i = m_i g l_{c_i} + l_i \sum_{j=i+1}^n m_j g$, entonces

$$EP = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \cos q_i) \quad (3.4)$$

Por lo tanto, la energía total queda expresada como:

$$\begin{aligned} E(q, p) &= EC(q, p) + EP(q) \\ &= \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \cos q_i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A esta última expresión se le conoce como el hamiltoniano o la función hamiltoniana. Nombramos $V(q) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \cos q_i)$ y reescribiendo la energía total tenemos que

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q)$$

3.1. Ecuaciones de Hamilton. Dinámica del sistema.

Como ya hemos obtenido el hamiltoniano del n -péndulo, es posible calcular las parciales de la función hamiltoniana y así obtener las ecuaciones que describen el movimiento, es decir, la dinámica del sistema.

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}$$

Observéese que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p \right) \\ &= M^{-1}(q) p \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p \right) + \frac{\partial}{\partial q} V(q)\end{aligned}$$

De manera explícita, las ecuaciones que describen la dinámica del n -péndulo son:

$$\dot{q} = M^{-1}(q) p \tag{3.6}$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{2} p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^{-1}(q)) \right) p - \frac{\partial}{\partial q} (V(q)) \tag{3.7}$$

3.2. Puntos de equilibrio

Algunas de las soluciones más importantes de una ecuación diferencial son los llamados *puntos de equilibrios*. Para encontrar los puntos de equilibrio de las ecuaciones de movimiento del n -péndulo, es necesario resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= 0 \\ \dot{p} &= 0\end{aligned}$$

Analicemos cuando se cumple $\dot{q} = 0$:

$$M^{-1}(q) p = 0 \Leftrightarrow p = 0 \tag{3.8}$$

ya que, $M^{-1}(q) \neq 0 \quad \forall q$.

Analicemos ahora cuando $\dot{p} = 0$:

$$-\frac{1}{2}p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) p - \frac{\partial}{\partial q} V(q) = 0$$

Como $p = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial q} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} V \\ \frac{\partial}{\partial q_2} V \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \sin q_1 \\ \alpha_2 \sin q_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \sin q_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Es decir, cada $\alpha_i \sin q_i = 0$, como $\alpha_i > 0$ entonces $q_i = k\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$. Para simplificar un poco, tomaremos $k = 0, 1$.

Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos 2^n soluciones, donde n indica el número de eslabones que posee el péndulo a estudiar, es decir, 2^n puntos de equilibrio que son de la forma: $x_0 = (q_0, 0)^T$, donde $q_0 = (q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})^T$ con $q_{0i} = k\pi$ y $k = 0, 1$.

3.2.1. Análisis de Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Aunque se tiene todos los puntos de equilibrio que posee el sistema dependiendo del número de eslabones del n -péndulo será importante el estudio de estabilidad de cada punto de equilibrio, para esto podríamos realizar un análisis de una manera muy general por medio de funciones de Lyapunov, o de forma local, por el teorema de Hartman-Grobman, el Teorema de la Variedad Estable, o el Teorema de la Variedad Central.

Si realizamos el análisis de manera local, por el teorema (1.6.1) será necesario que consideremos $x = (q, p)^T$ y $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)^T$. Así como su linealización y observar si los puntos de equilibrio son hipérbolicos.

Si calculamos la Jacobiana del sistema en cualquier punto de equilibrio obtenemos

$$DX_H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(x) & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(x) & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(x) \end{pmatrix}$$

Veamos como son los elementos de esta matriz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(x) &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q} (M^{-1}(q)p) \\ &= p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x) \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} (M^{-1}(q)p) \\ &= M^{-1}(q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) p + \frac{\partial}{\partial q} V(q) \right) \\ &= \frac{1}{2} p^T \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} M^{-1}(q) \right) p + \frac{\partial^2}{\partial q^2} V(q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(x) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) p + \frac{\partial}{\partial q} V(q) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) p\end{aligned}$$

Entonces la jacobiana en un punto de equilibrio x_0 está dada por

$$DX_H(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1}(q_0) \\ -W(q_0) & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

donde $W(q_0) = \text{diag}\{\alpha_i \cos(q_{0i})\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$.

Si calculamos los valores propios para cada punto de equilibrio y estos resultan hipérbolicos podremos aplicar el teorema y realizar el análisis de estabilidad. En caso de no poder aplicar el teorema, veremos si existe alguna variedad inestable para determinar que el punto de equilibrio es inestable o realizaremos otro tipo de análisis como las funciones de Lyapunov para garantizar la estabilidad.

3.3. Caso 2-Eslabones

En este capítulo estudiaremos al péndulo de 2-eslabones o mejor conocido como 2-péndulo, así que analizaremos el hamiltoniano asociado al sistema, la dinámica de éste y los puntos de equilibrio con sus estabilidades.

El hamiltoniano asociado al 2-péndulo es

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q)$$

donde $p = (p_1, p_2)^T$, $q = (q_1, q_2)^T$, $V(q) = \alpha_1(1 - \cos q_1) + \alpha_2(1 - \cos q_2)$ y

$$M^{-1}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} & \frac{-\beta_{12} \cos(q_1 - q_2)}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} \\ \frac{-\beta_{12} \cos(q_1 - q_2)}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} \end{pmatrix}$$

La dinámica del 2-péndulo esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}(q) p \\ \dot{p} &= -\frac{1}{2} p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) - \frac{\partial}{\partial q} V(q) \end{aligned}$$

De acuerdo al sección anterior, sabemos que el sistema posee 2^2 puntos de equilibrio

$$x_{01} = (\pi, \pi, 0, 0)^T, x_{02} = (\pi, 0, 0, 0)^T, x_{03} = (0, \pi, 0, 0)^T, x_{04} = (0, 0, 0, 0)^T.$$

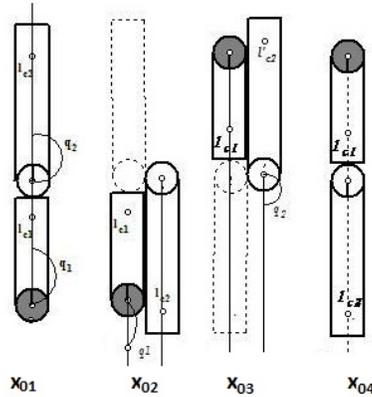


Figura 3.1: Cuatro puntos de equilibrios del 2-péndulo

Para el análisis de estabilidad de estos cuatro puntos, veamos si es posible realizar un análisis de manera local, por el teorema de Hartman-Grobman en caso de no ser posible. Busquemos la manera de realizar el análisis de manera global.

Si utilizamos el teorema de Hartman-Grobman de manera general tenemos que la Jacobiana evaluada en x_0 para este sistema de 2-eslabones está dada por:

$$DX_H(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1}(q_0) \\ -W(q_0) & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

donde $M^{-1}(q_0)$ es

$$M^{-1}(q_0) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_{01} - q_{02})} & \frac{-\beta_{12} \cos(q_{01} - q_{02})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_{01} - q_{02})} \\ \frac{-\beta_{12} \cos(q_{01} - q_{02})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_{01} - q_{02})} & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_{01} - q_{02})} \end{pmatrix}$$

Mientras que $W(q_0) = \text{diag}\{\alpha_i \cos(q_{0i})\}$ para $i = 1, 2$.

Análisis para el punto x_{01}

Para realizar el análisis de estabilidad del punto x_{01} consideremos la jacobiana evaluada en él

$$DX_H(x_{01}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P_{DX_H}(\lambda) = \lambda^4 - \left(\frac{\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \right) \lambda^2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2}$$

Al calcular las raíces de este polinomio, obtendremos los valores propios de la matriz que son

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22} - \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22} + \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
 \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 &= (m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1)(m_2 l_{c_2}^2 + I_2) - m_2^2 l_1^2 l_{c_2}^2 \\
 &= m_1 m_2 l_{c_1}^2 l_{c_2}^2 + m_2^2 l_1^2 l_{c_2}^2 + I_1 m_2 l_{c_2}^2 + m_1 l_{c_1}^2 I_2 + m_2 l_1^2 I_2 + I_1 I_2 - m_2^2 l_1^2 l_{c_2}^2 \\
 &= m_1 m_2 l_{c_1}^2 l_{c_2}^2 + I_1 m_2 l_{c_2}^2 + m_1 l_{c_1}^2 I_2 + m_2 l_1^2 I_2 + I_1 I_2 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Analizamos los valores propios, $\lambda_{1,2}$.

Nombremos $d = (\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11})^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2)$. Como sabemos $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ y además comprobamos que $\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2 > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 -4\alpha_1 \alpha_2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2) &< 0 \\
 (\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11})^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2) &< (\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11})^2 \\
 \sqrt{(\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11})^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2)} &< (\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11}) \\
 \sqrt{d} &< (\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11}) \\
 0 &< \alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11} - \sqrt{d} \\
 0 &< \frac{\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11} - \sqrt{d}}{2(\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2)}
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda_{1,2}$ pertenecen a los números reales, distintos de cero.

Analizamos los valores propios, $\lambda_{3,4}$.

Como $\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11} > 0$ debemos analizar el signo de d .

$$\begin{aligned}
 d &= (\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11})^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2) \\
 &= \alpha_1^2 \beta_{22}^2 + \alpha_2^2 \beta_{11}^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_{11} \beta_{22} - 4\alpha_1 \alpha_2 \beta_{11} \beta_{22} + 4\alpha_1 \alpha_2 \beta_{12}^2 \\
 &= (\alpha_1 \beta_{22} - \alpha_2 \beta_{11})^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 \beta_{12}^2
 \end{aligned}$$

Como $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tenemos que d es la suma de dos valores positivos, por lo cual se determina que $d > 0$. Por tanto, como $\alpha_1 \beta_{22} + \alpha_2 \beta_{11} > 0$ y $d > 0$ se tiene que $\lambda_{3,4}$ pertenece a los reales, distintos de cero.

Tenemos los cuatro valores propios con parte real distinta de cero. Entonces, por definición x_{01} es un equilibrio hiperbólico, es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman.

Aunque como se tiene una variedad estable de dos dimensiones, por los valores propios negativos, y una variedad inestable de dos dimensiones por los valores propios positivos, se puede afirmar que el punto x_{01} es un punto de equilibrio inestable, tipo silla.

Análisis para el punto x_{02}

Para analizar la estabilidad del punto $x_{02} = (\pi, 0, 0, 0)^T$, consideremos la jacobiana evaluada en este punto que es

$$DX_H(x_{02}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$P_{DX_H}(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \right) \lambda^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2}$$

Si calculamos las raíces de este polinomio, para obtener los valores propios de la matriz obtenemos

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22} - \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22} + \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

Analicemos los valores propios, $\lambda_{1,2}$.

Nombremos $d = (\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)$, recordemos que los valores $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ y $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 > 0$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) &> 0 \\ (\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) &> (\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 \\ \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)} &> \alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11} \\ \sqrt{d} &> \alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11} \\ 0 &> \alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11} - \sqrt{d} \\ 0 &> \frac{\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11} - \sqrt{d}}{2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

De la última ecuación podemos deducir que $\lambda_{1,2}$ pertenece a los números complejos con la parte real cero. Entonces x_{02} no es un punto de equilibrio hiperbólico, por lo cual no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman.

Si analizamos los valores propios, $\lambda_{3,4}$.

Como d es positiva, ya que es la suma de dos números positivos y con la desigualdad (3.9) podemos decir que

$$-\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22} + \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)} > 0$$

por que aunque el valor de $-\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22}$ sea menor que cero, se le suma una cantidad mayor. Por tanto, $\lambda_{3,4}$ pertenece a los números reales con parte distinta de cero.

Sin embargo, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman, ya que el punto de equilibrio x_{02} no es hiperbólico, pero como se tiene un valor propio con parte real positiva, podemos decir que existe una variedad inestable de dimensión uno, lo cual nos indica que tenemos un punto de equilibrio inestable.

Análisis para el punto x_{03}

Para analizar la estabilidad del punto $x_{03} = (0, \pi, 0, 0)^T$, consideremos la jacobiana evaluada en este punto es:

$$DX_H(x_{03}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P_{DX_H}(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \right) \lambda^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2}$$

Si calculamos las raíces del polinomio, para obtener los valores propios de la matriz obtenemos

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} - \sqrt{(\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} + \sqrt{(\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

Analicemos $\lambda_{1,2}$.

Nombremos $d = (\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) &> 0 \\
(\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) &> (\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22})^2 \\
\sqrt{(\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22})^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)} &> \alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} \\
\sqrt{d} &> \alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} \\
0 &> \alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} - \sqrt{d} \\
0 &> \frac{\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} - \sqrt{d}}{2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

De la última ecuación podemos deducir que $\lambda_{1,2}$ pertenece a los complejos con parte real cero, por lo tanto x_{03} no es un punto de equilibrio hiperbólico. No es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman.

Ahora para el análisis de $\lambda_{3,4}$.

Si $\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22}$ es menor que cero, la desigualdad (3.10) nos dice que \sqrt{d} es mayor que ese número y además es un número positivo, por lo tanto la suma de $\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{22} + \sqrt{d} > 0$ entonces $\lambda_{3,4}$ pertenece a los números reales distintos de cero.

Sin embargo, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman ya que el punto x_{03} no es un punto de equilibrio hiperbólico, pero como se tiene un valor propio con parte real positiva, podemos decir que existe una variedad inestable de dimensión uno, por tanto el punto x_{03} es un punto de equilibrio inestable.

Análisis para el punto x_{04}

Para realizar el análisis de estabilidad del punto $x_{04} = (0, 0, 0, 0)^T$, consideremos la jacobiana evaluada en este punto

$$DX_H(x_{04}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{-\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P_{DX_H}(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{\alpha_2\beta_{11} + \alpha_2\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \right) \lambda^2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2}$$

Si calculando las raíces del polinomio, para determinar los valores propios de la jacobiana obtenemos

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-(\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22}) + \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-(\alpha_2\beta_{11} + \alpha_1\beta_{22}) - \sqrt{(\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}}{2\beta_{11}\beta_{22} - 2\beta_{12}^2}}$$

Analicemos los valores propios, $\lambda_{1,2}$.

Nombremos $d = (\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)$. Si sabemos que α_1, α_2 y $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} -4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) &< 0 \\ (\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) &< (\alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11})^2 \\ \sqrt{d} &< \alpha_1\beta_{22} + \alpha_2\beta_{11} \\ -\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{11} + \sqrt{d} &< 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda_{1,2}$ son números complejos con parte real igual a cero, lo que implica que el punto $x_{0,4}$ es un punto de equilibrio no hiperbólico, no es posible utilizar el teorema de Hartman-Grobman.

Debido a que no fue posible utilizar el teorema de Hartman-Grobman, busquemos una función de Lyapunov para poder establecer la estabilidad de nuestro punto de equilibrio. Consideremos a la función hamiltoniano del péndulo como una candidata a función de Lyapunov, y esto es posible ya que la función hamiltoniano es una función escalar, que evaluada en el punto de equilibrio $x_{04} = (q_{04}, p_{04})^T$ es igual a cero.

Como $p_{04} = (0, 0)^T$ y $q_{04} = (0, 0)^T$

$$\begin{aligned} H(q_{04}, p_{04}) &= V(q_{04}) \\ &= \alpha_1(1 - \cos(0)) + \alpha_2(1 - \cos(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además, el hamiltoniano debe de ser una función definida positiva, es decir, para cualquier punto x que pertenezca a una vecindad de x_{04} , la función debe ser positiva.

Prueba. Se necesita verificar si $\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V(q) > 0$, o lo que es equivalente $\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p > 0$ y $V(q) > 0$.

Probemos primeramente que $V(q) > 0$, $q \neq 0$

$$V(q) = \alpha_1(1 - \cos q_1) + \alpha_2(1 - \cos q_2)$$

Como $|\cos q| < 1 \forall q \in (0, \pi) \Rightarrow (1 - \cos q) > 0$.
Además $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, por lo tanto $V(q) > 0$.

Ahora, $\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p > 0$, es decir, verifiquemos si la matriz $M^{-1}(q)$ es definida positiva.

$$M^{-1}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} & \frac{-\beta_{12} \cos(q_1 - q_2)}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} \\ \frac{-\beta_{12} \cos(q_1 - q_2)}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} & \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)} \end{pmatrix}$$

Si los menores principales de la matriz anterior son positivos, entonces la matriz es definida positiva.

El primer menor principal es

$$\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)}.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 &> 0 \\ \beta_{11}\beta_{22} &> \beta_{12}^2 \\ \beta_{11}\beta_{22} \cos^2(q_1 - q_2) &> \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

Como $\beta_{11}\beta_{22} > \beta_{11}\beta_{22} \cos^2(q_1 - q_2)$, por transitividad $\beta_{11}\beta_{22} > \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)$ lo que implica que $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2) > 0$, además ya que $\beta_{22} = m_2 l_{c_2}^2 + I_2 > 0$. Tenemos que el primer menor principal es positivo.

El segundo menor principal es:

$$\frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)}{(\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2))^2} = \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \cos^2(q_1 - q_2)}$$

que también es positivo. Entonces, la matriz $M^{-1}(q)$ es una matriz definida positiva. Estableciendo así que el hamiltoniano es una función definida positiva, ya que se cumple

$$\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p > 0, V(q) > 0.$$

□

Ya con nuestra función de Lyapunov, determinemos la estabilidad del equilibrio x_{04} .

Analicemos el signo de $\dot{H}(q, p)$,

$$\begin{aligned}\dot{H}(q, p) &= \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^T \frac{\partial H}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^T \frac{\partial H}{\partial q} \\ &= 0\end{aligned}$$

Lo que indica por el teorema de estabilidad de Lyapunov que el punto x_{04} es estable.

Para el particular del 2-péndulo, se tienen cuatro puntos de equilibrios, $(\pi, \pi, 0, 0)^T$, $(\pi, 0, 0, 0)^T$, $(0, \pi, 0, 0)^T$ y $(0, 0, 0, 0)^T$ donde los tres primeros son puntos de equilibrio inestables, mientras que el último es un punto de equilibrio estable. Al realizar análisis para péndulos con más de dos eslabones, se puede observar que para cada n-péndulo con $n = 1, 2, \dots$ sólo existe un punto de equilibrio estable.

Capítulo 4

Control

Si a un péndulo de n -eslabones o n -péndulo como el que hemos analizado anteriormente le introducimos motores, es decir, en cada una de sus articulaciones ponemos un motor de tal forma que con este podamos controlar los movimientos de los eslabones. A esta nueva configuración se le conoce como *brazo mecánico de n -gdl*.

Un primer problema a estudiar es el de posicionar en algún lugar nuestro brazo mecánico, es decir, desde cualquier configuración inicial que le demos al brazo mecánico por medio de una ley de control lo llevemos a una posición deseada.

Mientras que un segundo problema que surge de la idea de control de posicionamiento, es un problema de seguimiento. Este problema consiste en llevar nuestro brazo mecánico no sólo a una posición y que se mantenga en ésta sino seguir una trayectoria dada.

4.1. Control de posición

Consideremos el sistema hamiltoniano del péndulo donde se han introducido motores para obtener así la controlabilidad de un brazo mecánico de n -eslabones. La idea es diseñar una ley de control, $u(x)$, de manera que desde cualquier posición inicial $x_i = (q_i, p_i)^T$ que se encuentre el brazo mecánico lleguemos a una posición deseada $x_f = (q_f, p_f)^T$.

Además ya que p_f es el vector que nos indica las velocidades de los eslabones en el punto final consideraremos a $p_f = (0, \dots, 0)^T$, ya que la idea del control es llevarlo a una posición y que el

brazo permanezca ahí.

Para realizar este control cambiaremos la dinámica de nuestro brazo mecánico, de tal forma que x_f sea el único punto de equilibrio y sea asintóticamente estable.

Teorema 4.1.1. *Consideremos un brazo mecánico de n -grados de libertad*

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + u(q, p).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Entonces existe una ley de control de la forma

$$u(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q} + K(q)(q - q_f) + Lp,\tag{4.2}$$

donde K y L son matrices $n \times n$ tal que $x_f = (q_f, 0)^T$ es el único punto de equilibrio del sistema el cual es asintóticamente estable.

Demostración. Se desea demostrar que el punto x_f es un punto de equilibrio del sistema (4.1). Cerramos el lazo en (4.1) y obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{q} &= M(q)p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} + K(q)(q - q_f) + Lp = K(q)(q - q_f) + Lp\end{aligned}$$

Ahora, calculemos las soluciones del sistema anterior Para que $\dot{q} = 0$

$$M^{-1}(q)p = 0 \Leftrightarrow p = 0.$$

Para que $\dot{p} = 0$, y como $p = 0$

$$\begin{aligned}K(q)(q - q_f) + Lp &= 0 \\ K(q)(q - q_f) &= 0\end{aligned}$$

Como las matrices K , L son matrices de diseño. Determinemos que la matriz K es invertible, entonces $\dot{p} = 0 \Leftrightarrow q = q_f$.

Por lo tanto, el sistema posee un único un punto de equilibrio de la forma $(q_f, 0)^T$.

Ya que tenemos la forma de la ley de control $u(q, p)$ y que establecimos que el punto x_f es el único punto de equilibrio, debemos de determinar la estabilidad de esté.

Consideremos la función

$$\mathbb{V}(q, p) = \frac{1}{2}(q - q_f)^T V_1 (q - q_f) + \frac{1}{2} p^T V_2 p$$

donde V_1, V_2 son matrices $n \times n$ y además son positivas definidas.

Tenemos que \mathbb{V} cumple:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(q_f, 0) &= 0 \\ \mathbb{V}(q, p) &> 0 \quad \forall (q, p) \neq (q_f, 0) \end{aligned}$$

lo que implica que \mathbb{V} es candidata a función de Lyapunov.

Calculemos $\dot{\mathbb{V}}$ para determinar la estabilidad de x_f

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{V}} &= \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial p} \dot{p} \\ &= ((q - q_f)^T V_1^T) (M^{-1}(q)p) + p^T V_2 (K(q)(q - q_f) + Lp) \\ &= (q - q_f)^T V_1^T M^{-1}(q)p + (K(q)(q - q_f) + Lp)^T V_2^T p \\ &= (q - q_f)^T V_1^T M^{-1}(q)p + (q - q_f)^T K^T(q) V_2^T p + p L^T V_2^T p \\ &= (q - q_f)^T (V_1^T M^{-1}(q) + K^T(q) V_2^T) p + p L^T V_2^T p \end{aligned}$$

Haciendo $V_1 = V_2 = I$ obtenemos

$$\dot{\mathbb{V}} = (q - q_f)^T (M^{-1}(q) + K^T(q)) p + p L^T p$$

Si $M^{-1}(q) + K^T(q) = 0$, implica que $K^T(q) = -M^{-1}(q)$.

Por tanto, $K = -M^{-1}(q)$ cumpliendo con que K sea una matriz invertible, además si hacemos $L = -I$ entonces

$$\dot{\mathbb{V}} = -p^T p \leq 0.$$

Obteniendo así que el punto x_f es un punto de equilibrio estable, es decir, la función de Lyapunov que nos garantiza que el punto x_f es estable es

$$\mathbb{V} = \frac{1}{2}(q - q_f)^T (q - q_f) + \frac{1}{2} p^T p \quad (4.3)$$

aunque nosotros necesitamos probar que x_f es asintóticamente estable, por lo cual el teorema de Lyapunov nos es insuficiente.

Como tenemos que x_f es estable y por la función (4.3) que sabemos es continuamente diferenciable y positiva definida.

Si definimos al conjunto de todos los puntos que cumplen que $\dot{V} = 0$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V} = 0\},$$

que son todos los puntos de la forma $(q, 0)^T$.

Luego, sabemos que $x_f \in S$, que x_f es el único punto de equilibrio y además es fácil ver que x_f es el único punto invariante en S . Así que por el segundo colorario del teorema de LaSalle, tenemos que x_f es asintóticamente estable de manera global. □

4.1.1. Caso 2-eslabones

En la sección anterior diseñamos el control de posición de manera general, para un brazo mecánico de $n - gdl$, donde $n \in \mathbb{N}$. En esta sección analizaremos un caso particular, consideraremos solamente 2 grados de libertad. Definiremos al punto x_f de la forma $(q_{1f}, q_{2f}, 0, 0)^T$, donde las dos primeras componentes indican las coordenadas generalizadas de los eslabones en la posición deseada, mientras que las componentes 3 y 4 son iguales a cero ya que cuando el brazo mecánico llegue a la posición final deseamos que permanezca ahí.

La dinámica para un brazo mecánico de 2-gdl está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}(q)p \\ \dot{p} &= -\frac{1}{2}p^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) - \frac{\partial}{\partial q} V(q) + u(q, p). \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $M^{-1}(q)$ y V son matrices cuadradas 2×2 y $p^T = (p_1, p_2)$ y basándonos en la sección anterior $u(q, p)$ se define como

$$u(q, p) = \frac{1}{2} \left(p^T \frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q)p \right) + \frac{\partial}{\partial q} V(q) - M^{-1}(q)(q - q_f) - p. \tag{4.5}$$

Entonces, si recurrimos al teorema (4.1.1) podremos establecer que el punto x_f de la forma $(q_{1f}, q_{2f}, 0, 0)^T$ es el único punto de equilibrio para el sistema (4.4) y además que es asintóticamente estable en forma global.

Aplicaciones

Cuando se estudia el control de posición el problema a solucionar, es que desde la posición inicial $q_i = (0, 0)^T$ el brazo mecánico pase a la posición $q_f = (\pi, \pi)^T$ y permanezca ahí.

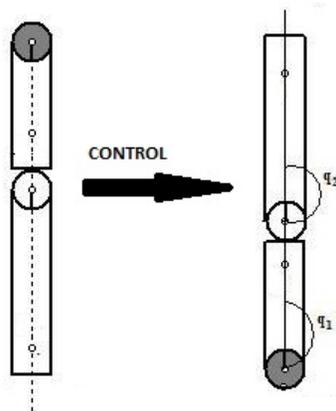


Figura 4.1: Visualización gráfica del problema

Como hemos mencionado anteriormente con la ley de control (ecuación 4.5) establecida, desde cualquier configuración inicial $x_i = (q_{1i}, q_{2i}, p_{1i}, p_{2i})^T$ podemos posicionar al brazo mecánico con la configuración $x_f = (q_{1f}, q_{2f}, 0, 0)^T$, en particular $x_f = (\pi, \pi, 0, 0)^T$, es decir, es posible resolver el problema mencionado con anterioridad.

Algunos puntos interesantes a observar sería en que tiempo se logra llegar a la posición deseada y el esfuerzo realizado por el control para realizar la acción. Esto puede ser determinano en las gráficas “control contra tiempo” ó “posición contra tiempo” de cada eslabón.

Para realizar estas gráficas será necesario calcular la derivada del control y así obtener un sistema no lineal de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden el cual resolveremos numéricamente con ayuda del software MATHEMATICA, podremos generar las gráficas.

Sabemos que el control se expresa de la siguiente manera

$$u(q, p) = \frac{1}{2} \left(p^T \frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) p \right) + \frac{\partial}{\partial q} V(q) - M^{-1}(q)(q - q_f) - Ip,$$

denotaremos como $H_q = \frac{1}{2} \left(p^T \frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) p \right) + \frac{\partial}{\partial q} V(q)$, ya que es la parcial de la función hamiltoniana, H, con respecto a q .

Por lo tanto podemos escribir a $u(q, p)$ como

$$u(q, p) = H_q - M^{-1}(q)(q - q_f) - Ip$$

derivando la función obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{u}(q, p) &= H_{qq}\dot{q} + H_{qp}\dot{p} - \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) (q - q_f) - M^{-1}(q)\dot{q} - I\dot{p} \\ &= (H_{qq} - M^{-1}(q)) \dot{q} + (H_{qp} - I) \dot{p} - \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q) \right) (q - q_f)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}H_{qq} &= \frac{1}{2} p^T \frac{\partial^2}{\partial q^2} M^{-1}(q) p + \frac{\partial^2}{\partial q^2} V(q) \\ H_{qp} &= p^T \frac{\partial}{\partial q} M^{-1}(q).\end{aligned}$$

Si utilizamos el programa 2 [ver apéndice] resolveremos el sistema de 6 ecuaciones lineales y podremos observar las gráficas “control contra tiempo” ó “posición contra tiempo” de cada eslabón.

Además se incluye en el apéndice un programa de simulación (programa 1), con el cual podemos observar los movimientos físicos que tendrá el brazo mecánico al aplicarle el control estudiado.

Ejemplo 2. Consideremos a la configuración inicial como $x_i = (0, 0, 0, 0)^T$.

Para simplificar los cálculos, utilizando el programa 2 [ver apéndice] consideraremos que los dos eslabones son iguales, en magnitud, masa y longitud del centro de masa. Tomaremos como masa de cada eslabón 1 *kg*, como longitud del eslabón y de su centro de masa de 1 *m*, como momento de inercia 1 *kgm*² y la gravedad con un valor de 9.8 $\frac{m}{s^2}$.

Ya con todas estas consideraciones y las condiciones iniciales, obtenemos la gráfica(??) de “Posición contra tiempo” para cada eslabón donde se puede observar que aparentemente en el tiempo cincuenta la función permanece constante, es decir, el brazo mecánico permanece en esa posición. Mientras que en la gráfica (4.3) se observa el esfuerzo del control contra el tiempo, y en este caso podemos decir que aparentemente el control deja de aplicarse al tiempo cincuenta, y el mayor esfuerzo es realizado en los primeros diez segundos de aplicar el control.

Otra forma de generar estas gráficas es por medio del programa 3 [ver apéndice], donde no es necesario calcular la derivada del control para obtener las gráficas (4.4) “posición contra tiempo” de cada eslabón y (4.5) “control contra tiempo”. Con esto, podemos concluir que el programa 2 y el programa 3 generan unas gráficas muy parecidas.

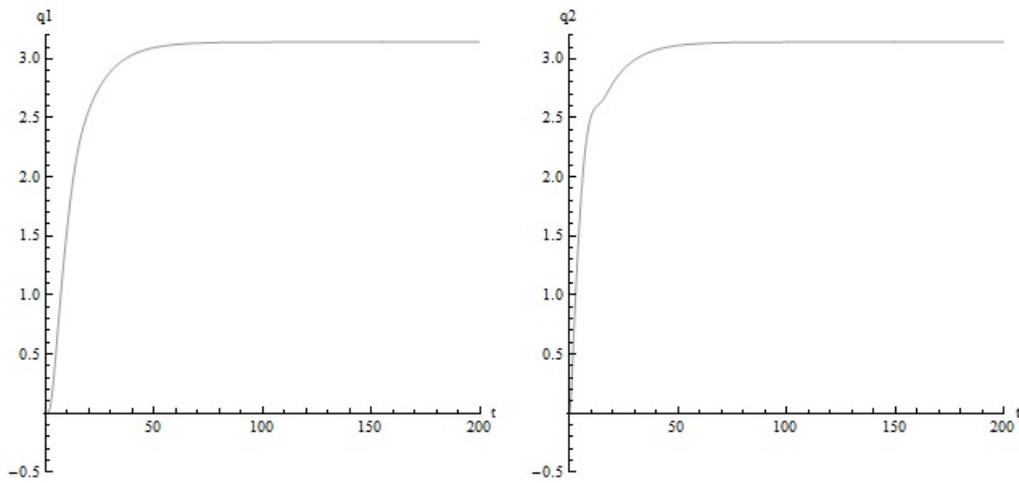


Figura 4.2: Gráfica de “Posición contra tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 2

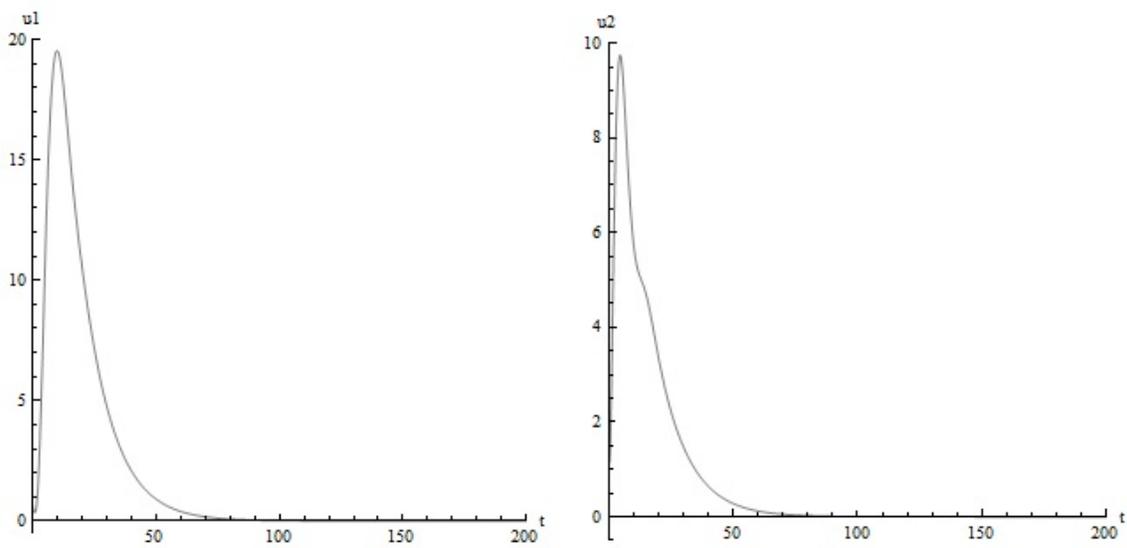


Figura 4.3: Gráficas “control contra tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 2

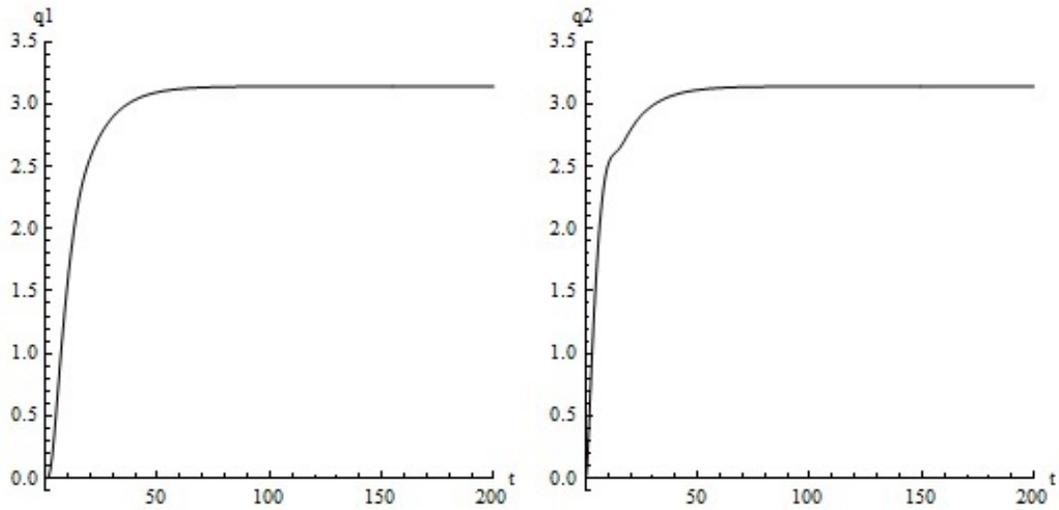


Figura 4.4: Gráfica de “Posición contra Tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 3

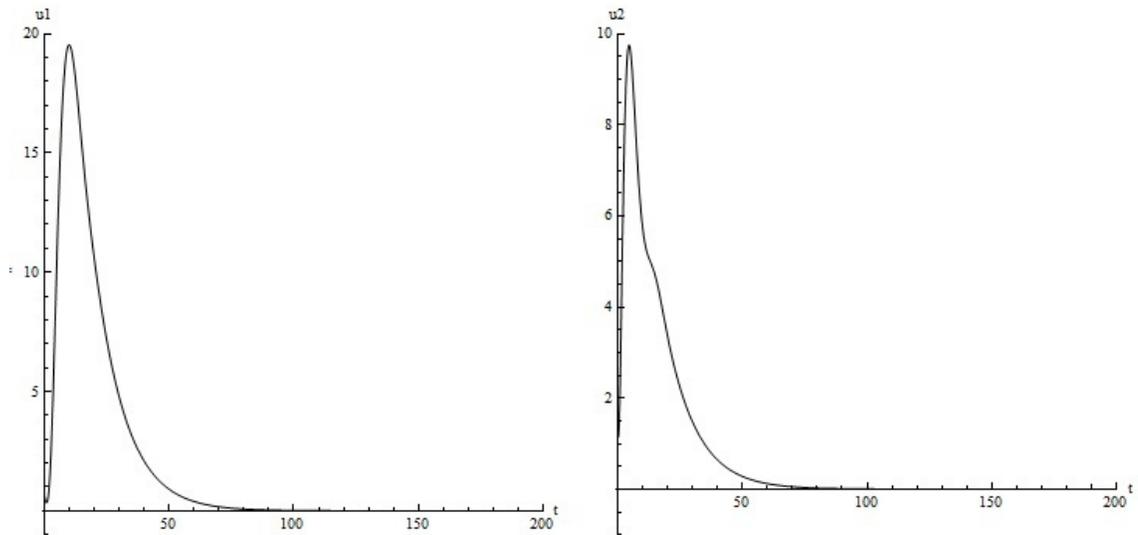


Figura 4.5: Gráfica “control contra tiempo” de cada eslabón. Generadas con el programa 3

Ejemplo 3. Consideremos a la configuración inicial como $x_i = (0, 0, 2, 6)^T$. Y además, consideraremos que los dos eslabones son iguales, en magnitud, masa y longitud del centro de masa. Tomaremos como masa de cada eslabón 1 kg , como longitud del eslabón y de su centro de masa de 1 m , como momento de inercia 1 kgm^2 y la gravedad con un valor de $9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Utilizando el programa 3 [ver apéndice] obtenemos la gráfica (4.6) de “Posición contra tiempo” para cada eslabón donde la función gráfícada permanece constante aproximadamente al tiempo cincuenta. Mientras que la gráfica (4.7) de “Control contra tiempo” de cada eslabón se observa que la función gráfícada se estabiliza aproximadamente al tiempo 50. En este caso se puede observar que el mayor esfuerzo realizado por el control es antes del tiempo 5.

Si modificamos sólo la masa de los eslabones a 2 kg y dejamos las consideraciones iniciales, utilizando el programa 3 obtenemos la gráfica (4.8) de “control contra tiempo” para cada eslabón, donde podemos observar que al modificar las masas el esfuerzo realizado por el control es mayor así como el tiempo de aplicación.

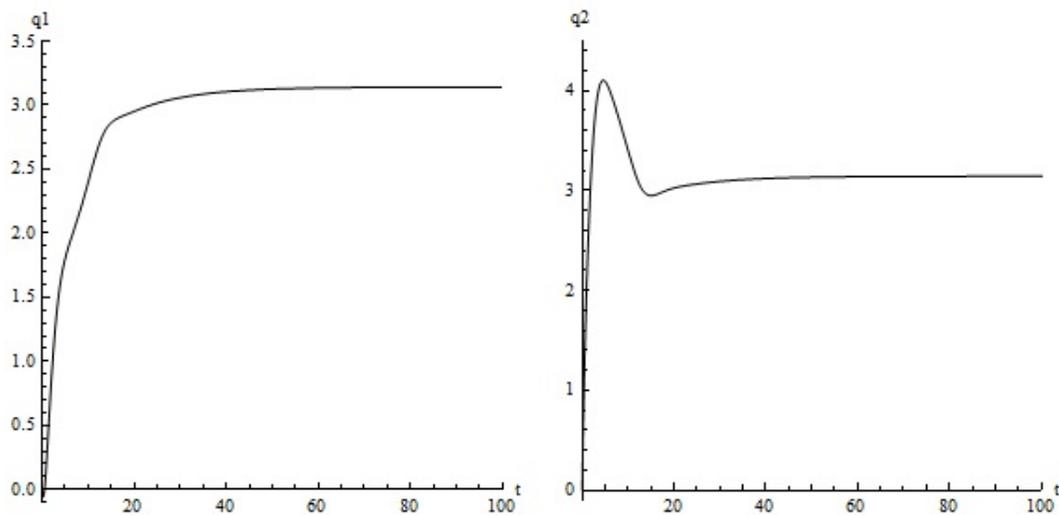


Figura 4.6: Gráfica de “Posición contra Tiempo” de cada eslabón.

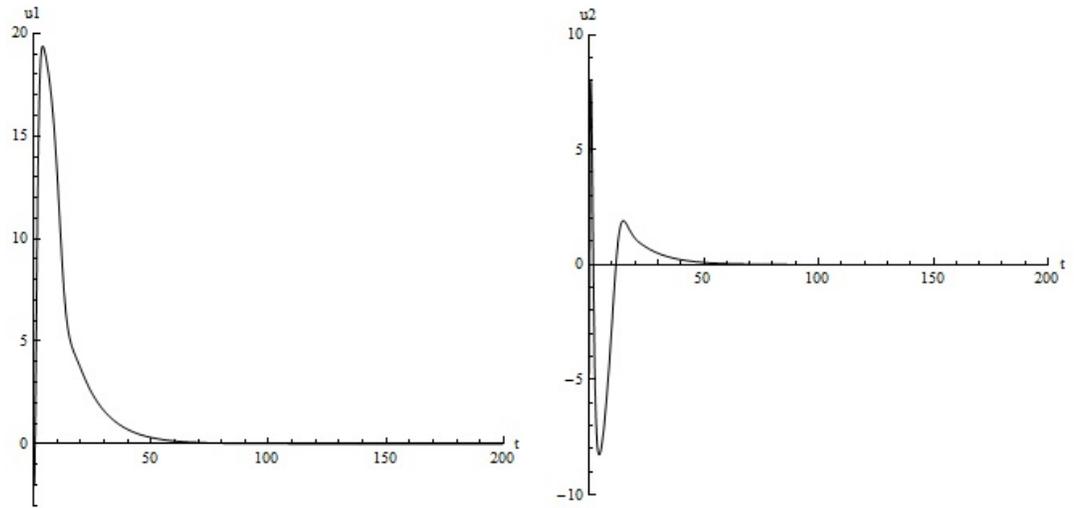


Figura 4.7: Gráficas “control contra tiempo” de cada eslabón. Eslabones de masa 1kg

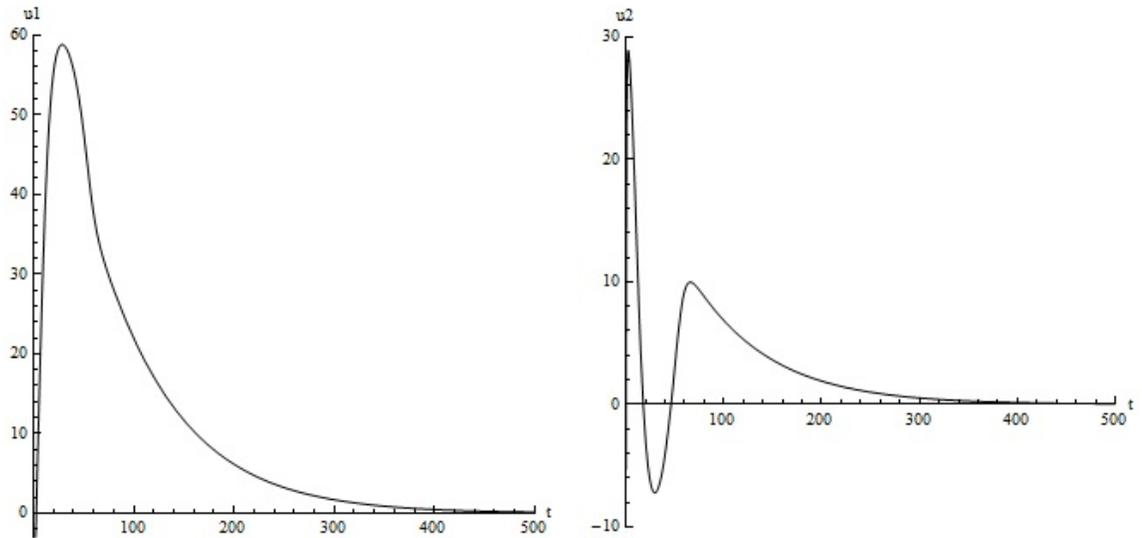


Figura 4.8: Gráfica de “Control contra Posición” de cada eslabón. Eslabones de masa 2 kg

4.2. Control de seguimiento

En la sección anterior diseñamos un control tal que desde cualquier configuración inicial del brazo mecánico de $n - gdl$ nos lleve a la posición final, y después aplicamos este mismo control para un brazo mecánico de $2 - gdl$.

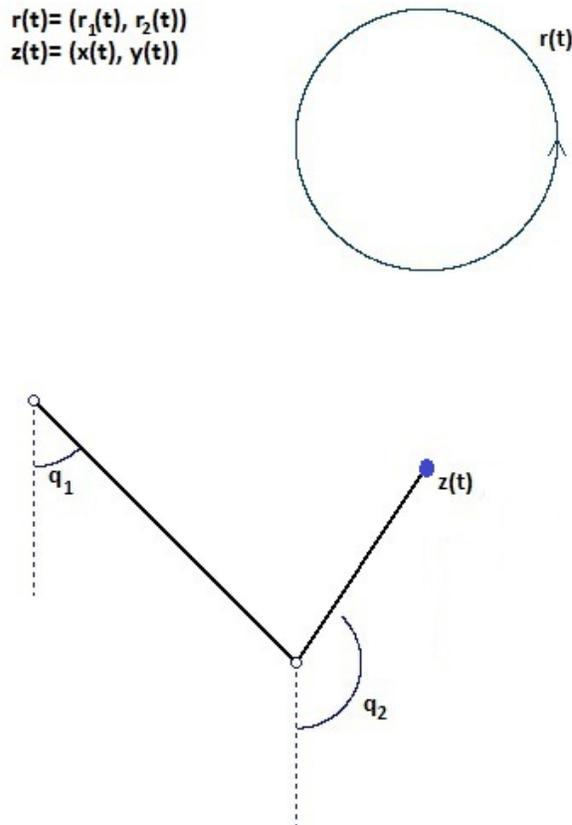
Ahora la idea es diseñar un control para que un brazo mecánico de $2 - gdl$ siga una trayectoria determinada.

Consideremos la trayectoria $r(t)$, como una curva parametrizada en \mathbb{R}^2 la cual será nuestra curva a seguir. Consideremos también una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que dada la configuración inicial del brazo mecánico, nos sea posible obtener las coordenadas del extremo final del último eslabón, z .

Es decir,

$$h(q(t)) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = z(t).$$

Gráficamente



El problema en general, es diseñar un control $u(q, p)$ tal que

$$z(t) \rightarrow r(t),$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Ahora definimos el *error* como la distancia del punto z a la trayectoria

$$e(t) = z(t) - r(t).$$

Con esta definición transformamos el problema general a diseñar un control $u(q, p)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Por la cinemática inversa, sabemos que $z(t) = h(q(t))$ y además por definición el error es $e(t) = z(t) - r(t)$.

Calculamos sus derivadas

$$\dot{z} = Dh(q)\dot{q} \quad (4.6)$$

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{r} \quad (4.7)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.7)

$$\dot{e} = Dh(q)\dot{q} - \dot{r} \quad (4.8)$$

Calculando la segunda derivada del error obtenemos

$$\ddot{e} = \dot{q}^T D^2h(q)\dot{q} + Dh(q)\ddot{q} - \ddot{r} \quad (4.9)$$

Luego, de las ecuaciones de la dinámica con el control calculemos \ddot{q}

$$\dot{q} = M^{-1}(q)p \Rightarrow p = M(q)\dot{q}$$

Derivando p

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \dot{q}^T DM(q)\dot{q} + M(q)\ddot{q} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} + u &= \dot{q}^T DM(q)\dot{q} + M(q)\ddot{q} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \left(u - \frac{\partial H}{\partial q} - \dot{q}^T DM(q)\dot{q} \right) \quad (4.10)$$

sustituyendo (4.10) en (4.9) obtenemos

$$\ddot{e} = \dot{q}^T D^2h(q)\dot{q} + Dh(q)M^{-1}(q) \left(u - \frac{\partial H}{\partial q} - \dot{q}^T DM(q)\dot{q} \right) - \ddot{r}. \quad (4.11)$$

Despejando u para obtener el control

$$u = M(q) (Dh(q))^{-1} (\ddot{e} - \dot{q}^T D^2 h(q) \dot{q} + \ddot{r}) + \frac{\partial H}{\partial q} + \dot{q}^T DM(q) \dot{q} \quad (4.12)$$

obteniendo una ecuación en términos de q , \dot{q} y p .

Para reescribir la ecuación anterior sólo en términos de q y p

$$\begin{aligned} u &= M(q) (Dh(q))^{-1} (\ddot{e} - \dot{q}^T D^2 h(q) \dot{q} + \ddot{r}) + \frac{\partial H}{\partial q} + \dot{q}^T DM(q) \dot{q} \\ &= M(q) (Dh(q))^{-1} (\ddot{e} - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r}) + \frac{\partial H}{\partial q} \\ &\quad + p^T M^{-1}(q) DM M^{-1}(q) p \\ &= M(q) (Dh(q))^{-1} (\ddot{e} - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r}) + \frac{\partial H}{\partial q} - p^T DM^{-1} p \end{aligned}$$

Ahora bien, definimos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= e \\ \omega_2 &= \dot{e} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \ddot{e} \end{cases}$$

Cambiando nuevamente nuestro problema, por que ahora la idea será diseñar un control u tal que el origen sea asintóticamente estable con la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= A\omega_1 + B\omega_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ y además son matrices diagonales y negativas definidas.

Por lo cuál, nuestra ley de control estará dada por

$$\begin{aligned} u(q, p) &= M(q) (Dh(q))^{-1} (A\omega_1 + B\omega_2 - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r}) \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial q} - p^T DM^{-1} p \end{aligned} \quad (4.14)$$

con $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ negativas definidas y

$$\begin{aligned} \omega_1 &= h(q) - r(t) \\ \omega_2 &= Dh(q) M^{-1}(q) p - \dot{r}(t). \end{aligned}$$

Si recordamos la dinámica para un brazo mecánico de 2 - *gdl* está dada por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}(q) p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial}{\partial q} H + u(q, p) \end{aligned}$$

cerramos el lazo y la dinámica que obtenemos es

$$\begin{aligned}\dot{q} &= M^{-1}(q)p \\ \dot{p} &= M(q)(Dh(q))^{-1}(A\omega_1 + B\omega_2 - p^T M^{-1}(q)D^2h(q)M^{-1}(q)p + \ddot{r}) - p^T DM^{-1}p\end{aligned}$$

4.2.1. Aplicaciones

Cuando tenemos un problema de seguimiento es necesario determinar la función de cinemática inversa, $h(q)$, en el caso de nuestro brazo mecánico como conocemos la geometría de éste el problema de cinemática se convierte en un problema geométrico.

Sabemos que el brazo mecánico sólo se mueve en el plano. Además si posicionamos el primer motor del brazo mecánico en el origen del plano, el área de máximo alcance es la que cubre la circunferencia con centro en el origen y de radio $l_1 + l_2$. Y la función que describe a todos los puntos (x, y) en esta región es

$$h(q) = \begin{pmatrix} l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \\ -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos q_2 \end{pmatrix}$$

Un punto importante a considerar, es que la inversa de la derivada de la función de cinemática inversa debe existir, ya que en caso de que esto no ocurra no será posible calcular la ley de control y por lo tanto la dinámica del brazo mecánico en lazo cerrado.

Si calculamos Dh^{-1}

$$(Dh(q))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sin q_2}{\sin(q_1 - q_2)} & -\frac{\cos q_2}{\sin(q_1 - q_2)} \\ -\frac{\cos q_2}{\sin(q_1 - q_2)} & -\frac{\cos q_1}{\sin(q_1 - q_2)} \end{pmatrix}$$

por lo tanto, para ciertas configuraciones del brazo mecánico ($q_1 - q_2 = \pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) la matriz $(Dh(q))^{-1}$ es una matriz singular, y estas configuraciones se llaman configuraciones singulares para la matriz $(Dh)^{-1}$, las cuales físicamente son cuando los eslabones de el brazo mecánico de 2 - gdl están completamente extendidos o uno sobre el otro.

Ya que tenemos nuestra ley de control (4.14) establecida, la curva a seguir y la función de cinemática inversa un punto interesante de este análisis es observar el esfuerzo realizado por el control para efectuar el seguimiento, es decir, sería interesante observar las gráficas de "Control contra tiempo" de cada eslabón. Para realizar estas gráficas se diseñó un programa incluido en el apéndice (programa 6) en el software MATHEMATICA.

Otra forma de generar estas gráficas es resolviendo un sistema de seis ecuaciones diferenciales de primer orden, comprendido por las ecuaciones de la dinámica en lazo cerrado y la derivada de la ley de control.

$$u(q, p) = M(q) (Dh(q))^{-1} (A\omega_1 + B\omega_2 - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r}) - p^T D M^{-1}(q) p + H_q.$$

Para calcular la derivada de la ley de control, calcularemos la derivada respecto al tiempo de cada uno de los términos de la ley de control

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (H_q) &= H_{qq} \dot{q} + H_{qp} \dot{p} \\ &= \left(\frac{1}{2} p^T D^2 M^{-1}(q) p \right) \dot{q} + (p^T D M^{-1}(q)) \dot{p} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{dt} (p^T D M^{-1}(q) p) = p^T \frac{d}{dt} D M^{-1}(q) p + 2p^T D M^{-1}(q) \dot{p} \quad (4.16)$$

Para calcular la derivada respecto al tiempo de

$$\xi = \left(M(q) (Dh(q))^{-1} \right) (A\omega_1 + B\omega_2 - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi &= \left(M(q) ((q))^{-1} \right) \frac{d}{dt} (A\omega_1 + B\omega_2 - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r}) \\ &+ \frac{d}{dt} \left(M(q) (Dh(q))^{-1} \right) (A\omega_1 + B\omega_2 - p^T M^{-1}(q) D^2 h(q) M^{-1}(q) p + \ddot{r}) \\ &= \left(M(q) (Dh(q))^{-1} \right) \left(A\dot{\omega}_1 + B\dot{\omega}_2 - \dot{q}^T \frac{d}{dt} D^2 h(q) \dot{q} - 2\dot{q} D^2 h(q) \ddot{q} + \ddot{r} \right) \\ &+ \left(\frac{d}{dt} (M(q) Dh(q))^{-1} + M(q) \frac{d}{dt} Dh(q)^{-1} \right) (A\omega_1 + B\omega_2 - \dot{q}^T (q) D^2 h(q) \dot{q} + \ddot{r}) \\ &= \left(M(q) (Dh(q))^{-1} \right) \left(BA\omega_1 + (A + B^2)\omega_2 - \dot{q}^T \frac{d}{dt} D^2 h(q) \dot{q} - 2\dot{q} D^2 h(q) \ddot{q} + \ddot{r} \right) \\ &+ \left(\frac{d}{dt} (M(q) Dh(q))^{-1} + M(q) \frac{d}{dt} Dh(q)^{-1} \right) (A\omega_1 + B\omega_2 - \dot{q}^T (q) D^2 h(q) \dot{q} + \ddot{r}) \end{aligned}$$

Para escribir \dot{u} debemos sumar (4.15), (4.16) y la ecuación anterior obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \left(M(q) (Dh(q))^{-1} \right) \left(BA\omega_1 + (A + B^2)\omega_2 - \dot{q}^T \frac{d}{dt} D^2h(q)\dot{q} - 2\dot{q}D^2h(q)\ddot{q} + \ddot{r} \right) \\ & + \left(\frac{d}{dt} (M(q)) Dh(q)^{-1} + M(q) \frac{d}{dt} Dh(q)^{-1} \right) (A\omega_1 + B\omega_2 - \dot{q}^T(q) D^2h(q)\dot{q} + \ddot{r}) \\ & - p^T \frac{d}{dt} DM^{-1}(q)p - p^T DM^{-1}(q)\dot{p} + \left(\frac{1}{2} p^T D^2M^{-1}(q)p \right) \dot{q} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema generado con esta última ecuación y las ecuaciones de la dinámica del brazo mecánico en lazo cerrado, podemos realizar las gráficas de “control contra tiempo” de cada eslabón.

Para realizar los siguientes análisis consideraremos que los eslabones del brazo mecánico de 2 – gdl son iguales, de masa un kilogramo, longitud del eslabón y centro de masa de un metro, momento de inercia $1kgm^2$, y además están contruidos del mismo material, todo esto para simplificar un poco los cálculos en nuestro brazo mecánico.

4.2.2. Círculo con centro en el origen radio 1.5m

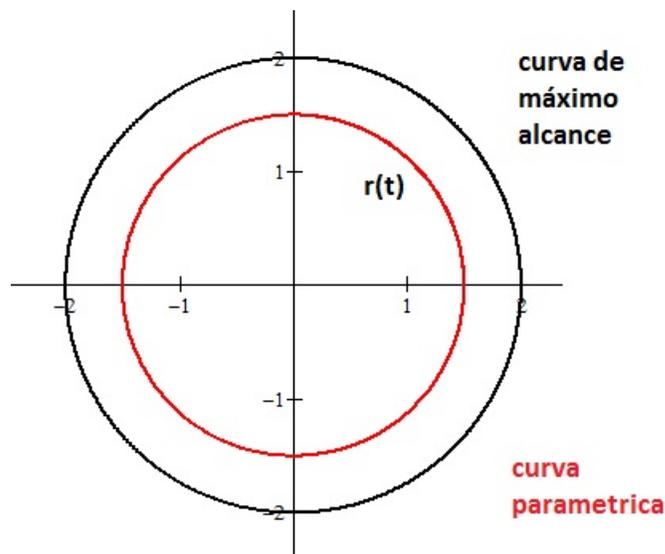
Se desea que un brazo mecánico de 2-gdl por medio de una ley de control siga la siguiente trayectoria parametrizada: $r(t) = \left(\frac{3}{2} \cos(t), \frac{3}{2} \sin(t) \right)$.

Primero es necesario verificar si la curva a seguir se encuentra dentro del área de máximo alcance y fuera de la frontera de la curva, ya que cuando los eslabones quedan completamente extendidos o uno sobre otro, la diferencia entre $q_1 - q_2$ es un múltiplo de π lo cuál nos indicaría una singularidad en la función de cinemática inversa y no sería posible aplicar el control.

Para la curva $r(t)$ dada no existe problema, y esto es posible verificarlo algebraicamente

$$\begin{aligned} 1,5 \cos(t) &< 2 \cos(t) \\ 1,5 \sin(t) &< 2 \sin(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

o geométricamente:



Ya que las matrices A y B son matrices de diseño en nuestra ley de control, en este caso las consideraremos como

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Además consideraremos que los eslabones son iguales y con las condiciones iniciales mencionadas a continuación, utilizando el programa 4 [ver apéndice] se puede observar que el segundo eslabón sigue las trayectorias mostradas en las gráficas (4.9)

- a) Configuración inicial $(\pi, \frac{1}{4}\pi, 0, 0)^T$
- b) Configuración inicial $(\frac{3}{2}\pi, \pi + \frac{9}{10}, 1, -5)^T$
- c) Configuración inicial $(0, -\frac{1}{8}\pi, 0, 5)^T$
- d) Configuración inicial $(\frac{1}{7}\pi, \frac{1}{3}\pi, 4, 0)^T$

El programa para la simulación dinámica del movimiento del brazo mecánico también puede ser visto en el apéndice (programa 5). En las figuras (4.10) y (4.11) podemos observar las gráficas de “control contra tiempo” de cada uno de los eslabones, para las configuraciones iniciales mencionadas anteriormente.

En estas gráficas podemos observar que el control realiza el mayor esfuerzo en los primeros segundos, tiempo en el cual pasa de la posición inicial a un punto sobre la trayectoria a seguir; una vez posicionado en la trayectoria nuestra curva de control genera oscilaciones periódicas de igual amplitud, durante el tiempo que sea necesario aplicar el control. Para estos casos particulares podemos observar que las ondas periódicas generadas poseen la misma forma pero diferentes amplitudes entre cada caso.

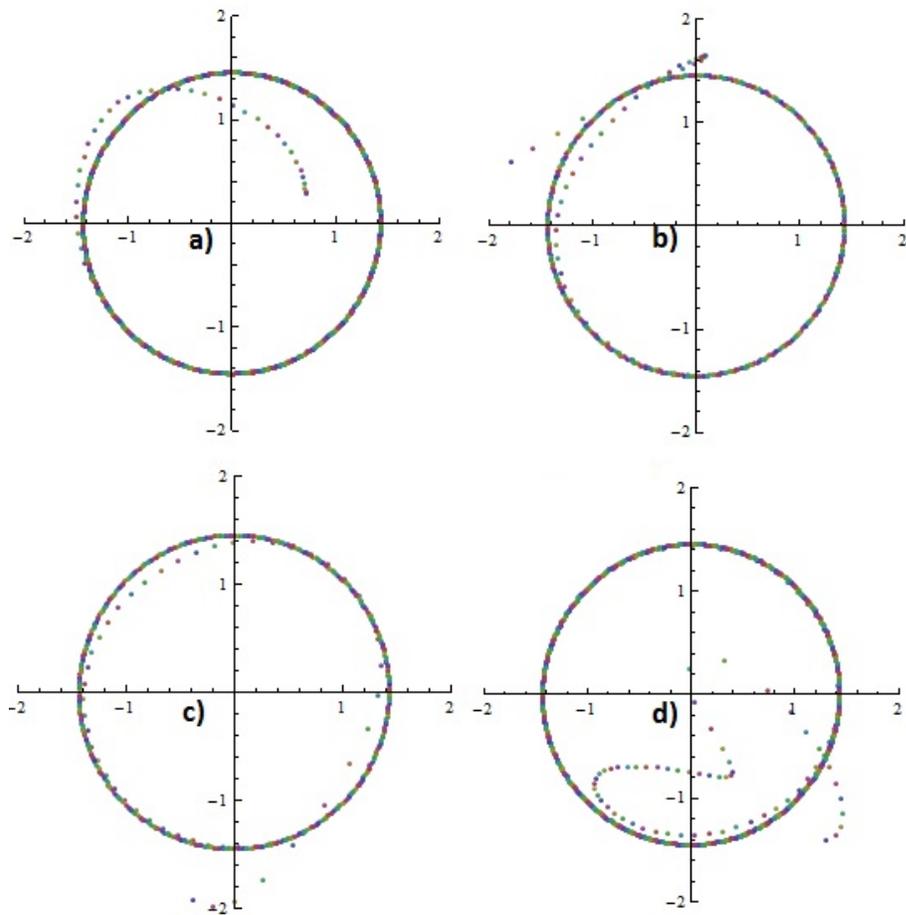


Figura 4.9: Trayectoria seguida por el segundo eslabón del brazo mecánico

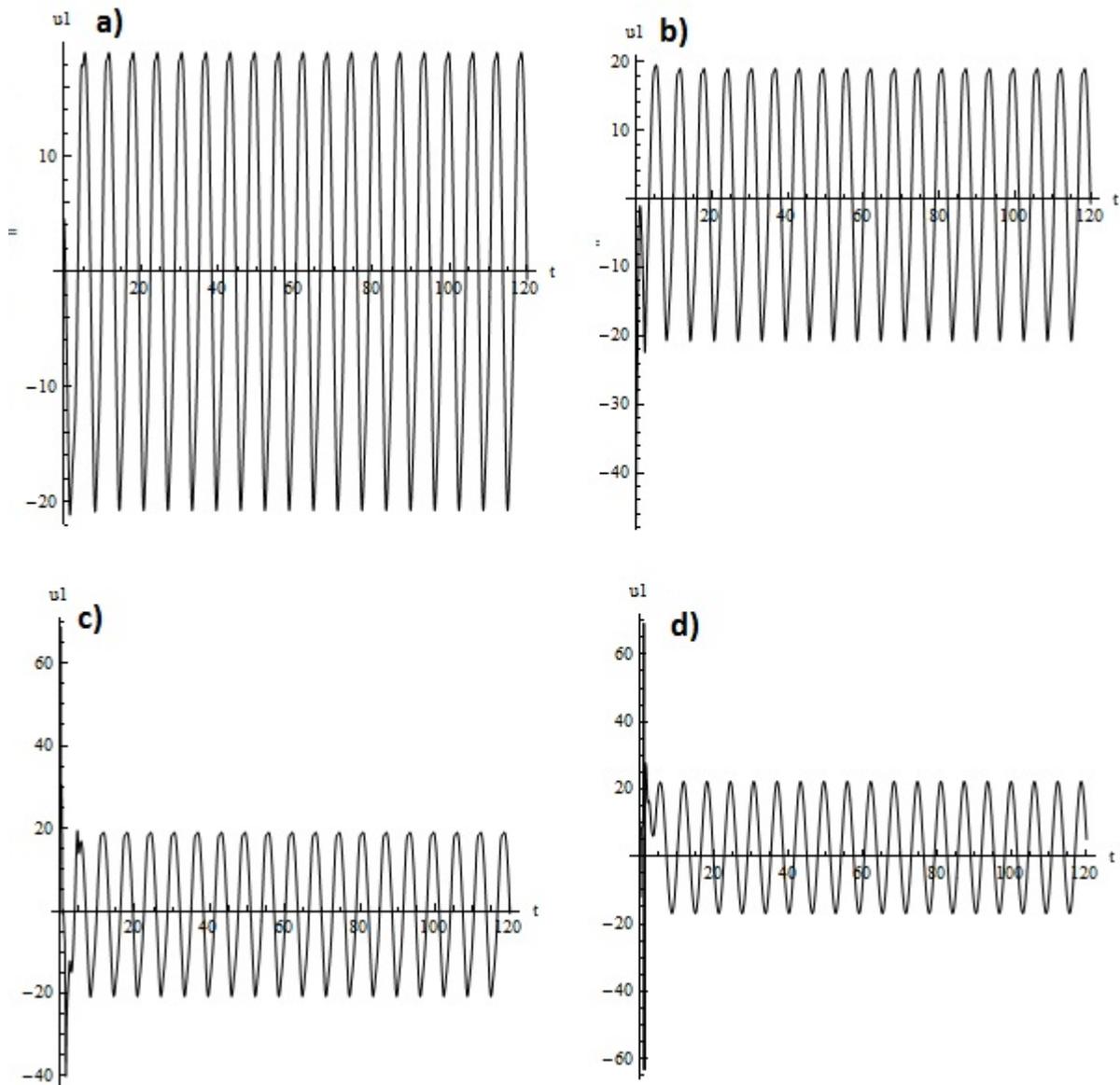


Figura 4.10: Gráficas de control contra tiempo para el primer eslabón

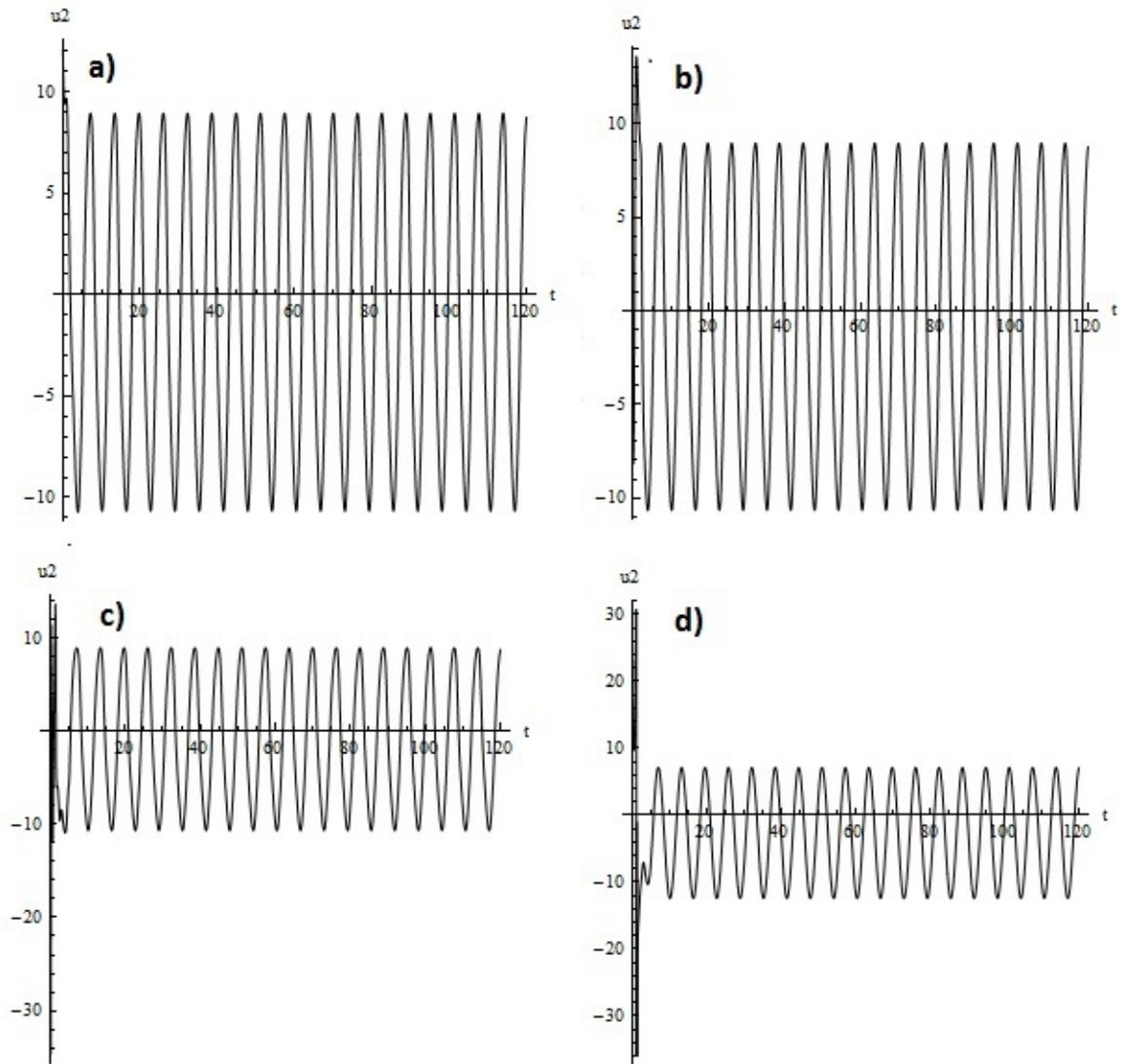
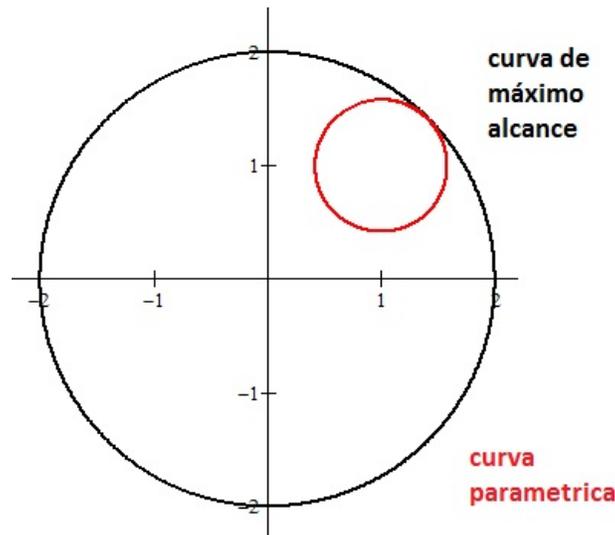


Figura 4.11: Gráficas de control contra tiempo para el segundo eslabón

4.2.3. Círculo con centro en $(1, 1)$ radio $\frac{29}{50}$

Se desea que un brazo mecánico de 2-gdl por medio de una ley de control siga la siguiente trayectoria parametrizada: $r(t) = \left(\frac{29 \cos(t)}{50} + 1, \frac{29 \sin(t)}{50} + 1 \right)$.



Lo primero a verificar es si la curva a seguir se encuentra dentro del área de máximo alcance y fuera de la frontera de la curva, ya que cuando los eslabones quedan completamente extendidos o uno sobre otro obtenemos singularidades para nuestra función de cinemática, en las cuales no es posible aplicar el control.

Como la curva a seguir es de la forma $(1 + r \cos(t), 1 + r \sin(t))$ y la curva de máximo alcance es $(2 \cos(t), 2 \sin(t))$ veamos donde son iguales

$$\begin{aligned} 1 + r \cos(t) &= 2 \cos(t) \\ 1 + r \sin(t) &= 2 \sin(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 1 = (2 - r) \cos(t) \\ 1 = (2 - r) \sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - r)^{-1} = \cos(t) \\ (2 - r)^{-1} = \sin(t) \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} \cos^2(t) + \sin^2(t) &= 1 \\ (2 - r)^{-2} + (2 - r)^{-2} &= 1 \\ \frac{2}{(2 - r)^2} &= 1 \\ 2 &= (2 - r)^2 \\ 2 &= r^2 - 4r + 4 \\ 0 &= r^2 - 4r + 2 \end{aligned}$$

lo que quiere decir que las curvas son iguales cuando $r = 2 \pm \sqrt{2}$, y como $\frac{29}{50} < 2 - \sqrt{2}$, la curva a seguir se encuentra dentro del área de máximo alcance.

Con las consideraciones para que los eslabones sean iguales, las condiciones iniciales

- a) Configuración inicial $(\pi, \frac{3}{4}\pi, 0, 0)^T$
- b) Configuración inicial $(-\frac{1}{2}\pi, \pi, 0, 0)^T$
- c) Configuración inicial $(\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -1, 2)^T$
- d) Configuración inicial $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi, 2, -1)^T$

las matrices de la ley de control de la forma

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

con ayuda del programa 4 [ver apéndice] se pueden observar que el segundo eslabón sigue las trayectorias mostradas en la gráfica (4.12).

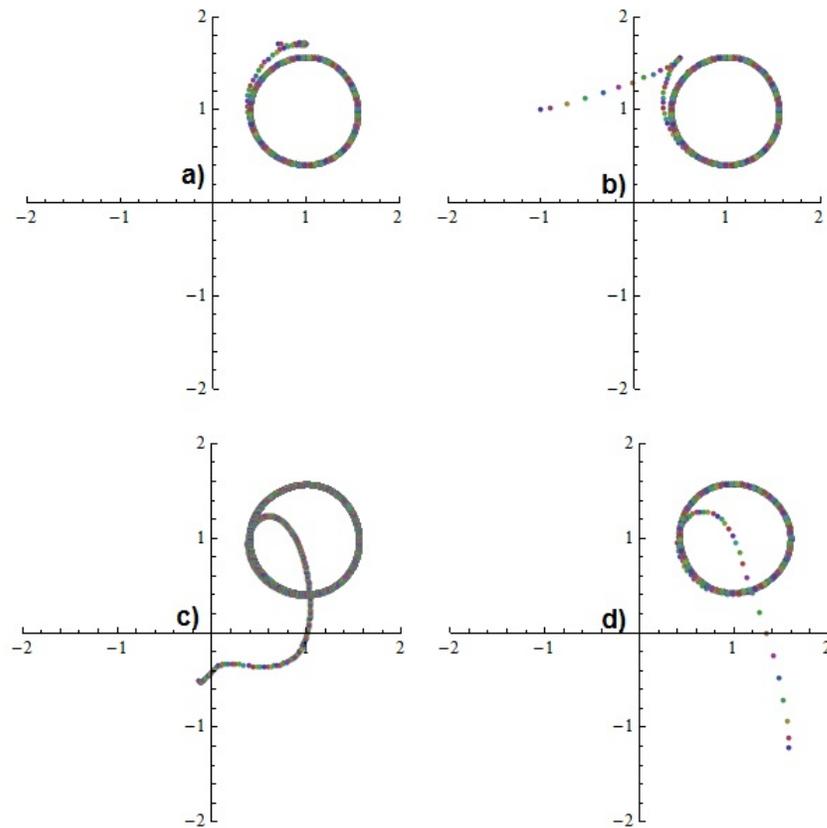


Figura 4.12: Trayectoria seguida por el segundo eslabón del brazo mecánico

Además por medio del programa 5, el cual puede ser visto en el apéndice podemos generar la simulación de la dinámica de movimiento del brazo mecánico. Mientras que con el programa 6 podemos generar las gráficas de “control contra tiempo” de cada uno de los eslabones con las configuraciones mencionadas anteriormente.

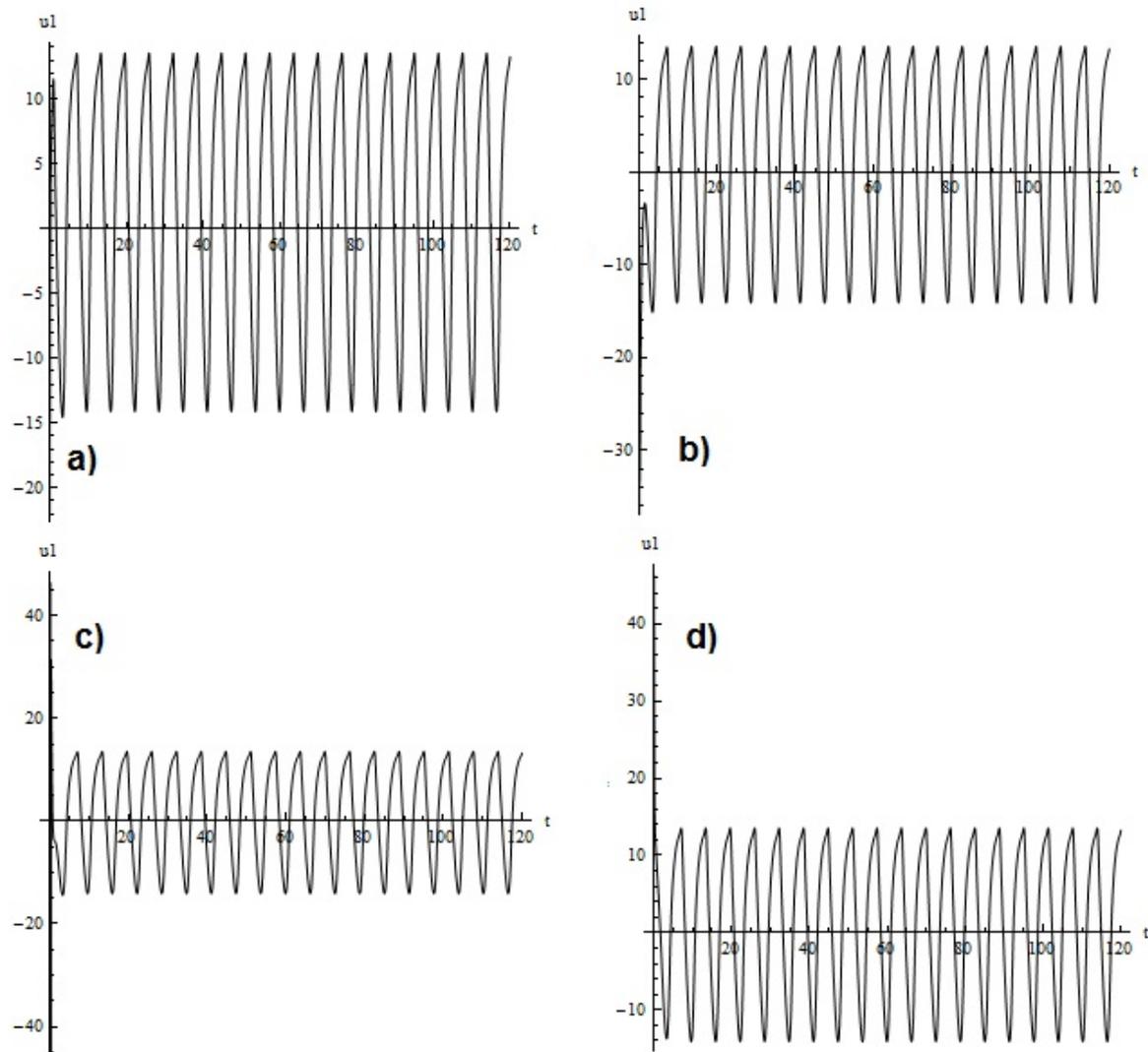


Figura 4.13: Gráfica de control contra tiempo para el primer eslabón

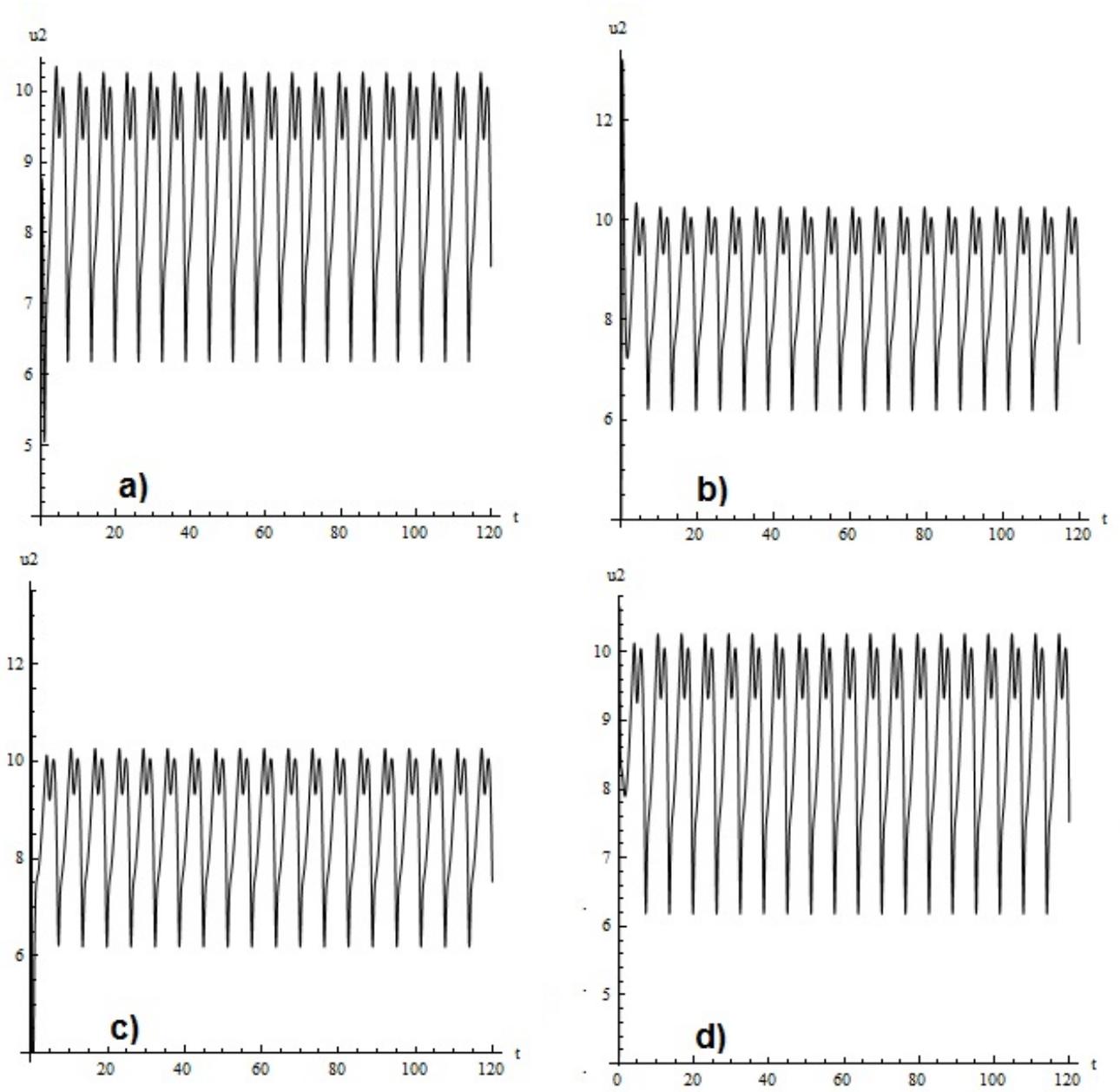


Figura 4.14: Gráficas de control contra tiempo para el segundo eslabón

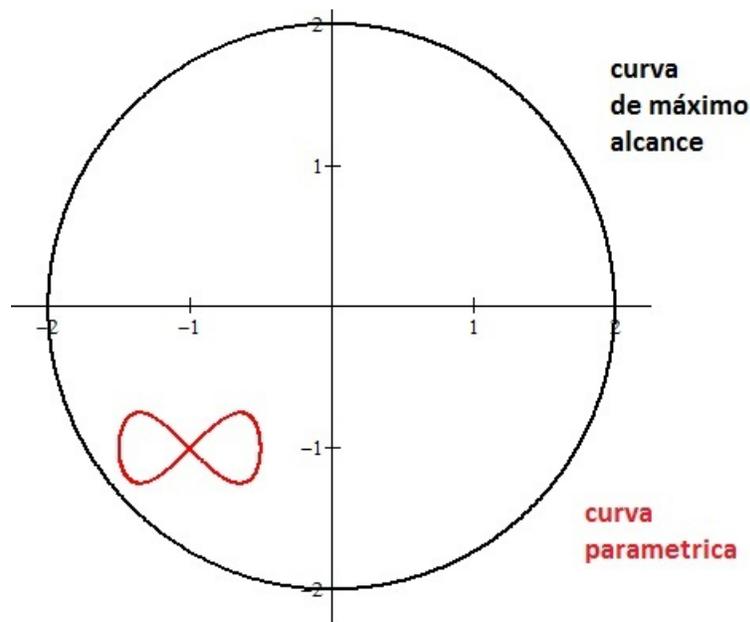
De igual forma que el ejemplo anterior, las gráficas de “control contra tiempo” de cada eslabón forman ondas periódicas lo cuál es algo esperado, ya que el brazo mecánico sigue la trayectoria durante un tiempo determinado.

Lemniscata

Se desea que un brazo mecánico de 2-gdl por medio de una ley de control siga la siguiente trayectoria parametrizada: $r(t) = \left(\frac{\cos(t)}{2} - 1, \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} - 1 \right)$.

Primero es necesario verificar si la curva a seguir se encuentra dentro del área de máximo alcance y fuera de la frontera de la curva, ya que cuando los eslabones quedan completamente extendidos o uno sobre otro obtenemos singularidades para nuestra función de cinemática, en las cuales no es posible aplicar el control.

Esto puede ser observado geoméricamente



Con las consideraciones para que los eslabones sean iguales y algunas condiciones iniciales

- a) Configuración inicial $(\pi, \frac{3}{4}\pi, 0, 0)^T$
- b) Configuración inicial $(-\frac{1}{2}\pi, \pi, 0, 0)^T$
- c) Configuración inicial $(-\frac{1}{2}\pi, \pi, 1, 6)^T$
- d) Configuración inicial $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{8}\pi, -4, -2)^T$

las matrices de la ley de control de la forma

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con ayuda del programa 4 [ver apéndice] se pueden observar que el segundo eslabón sigue las trayectorias mostradas en la gráfica (4.15). También es posible verificar las gráficas de “Control contra tiempo” de cada uno de los eslabones con las configuraciones iniciales mencionadas anteriormente.

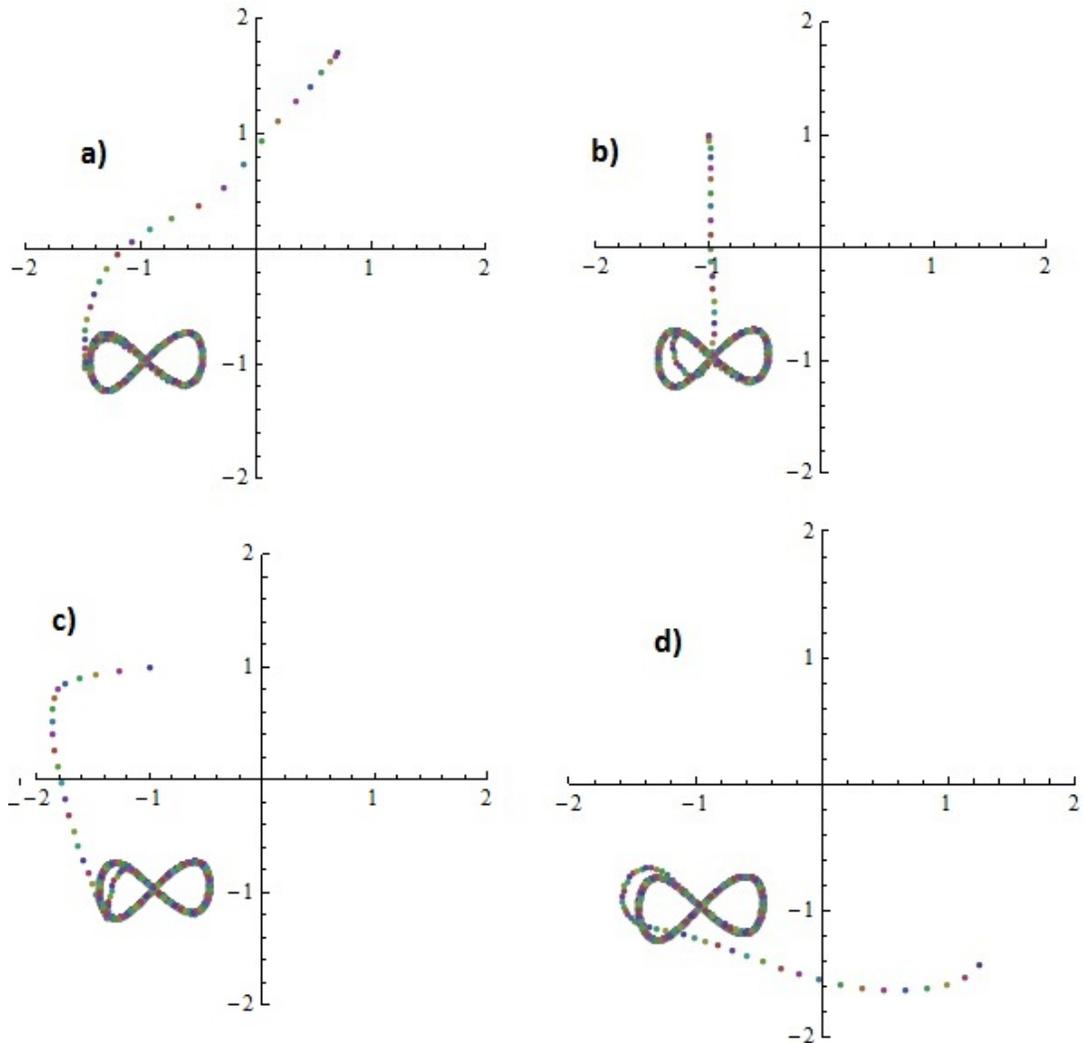


Figura 4.15: Trayectoria seguida por el segundo eslabón del brazo mecánico

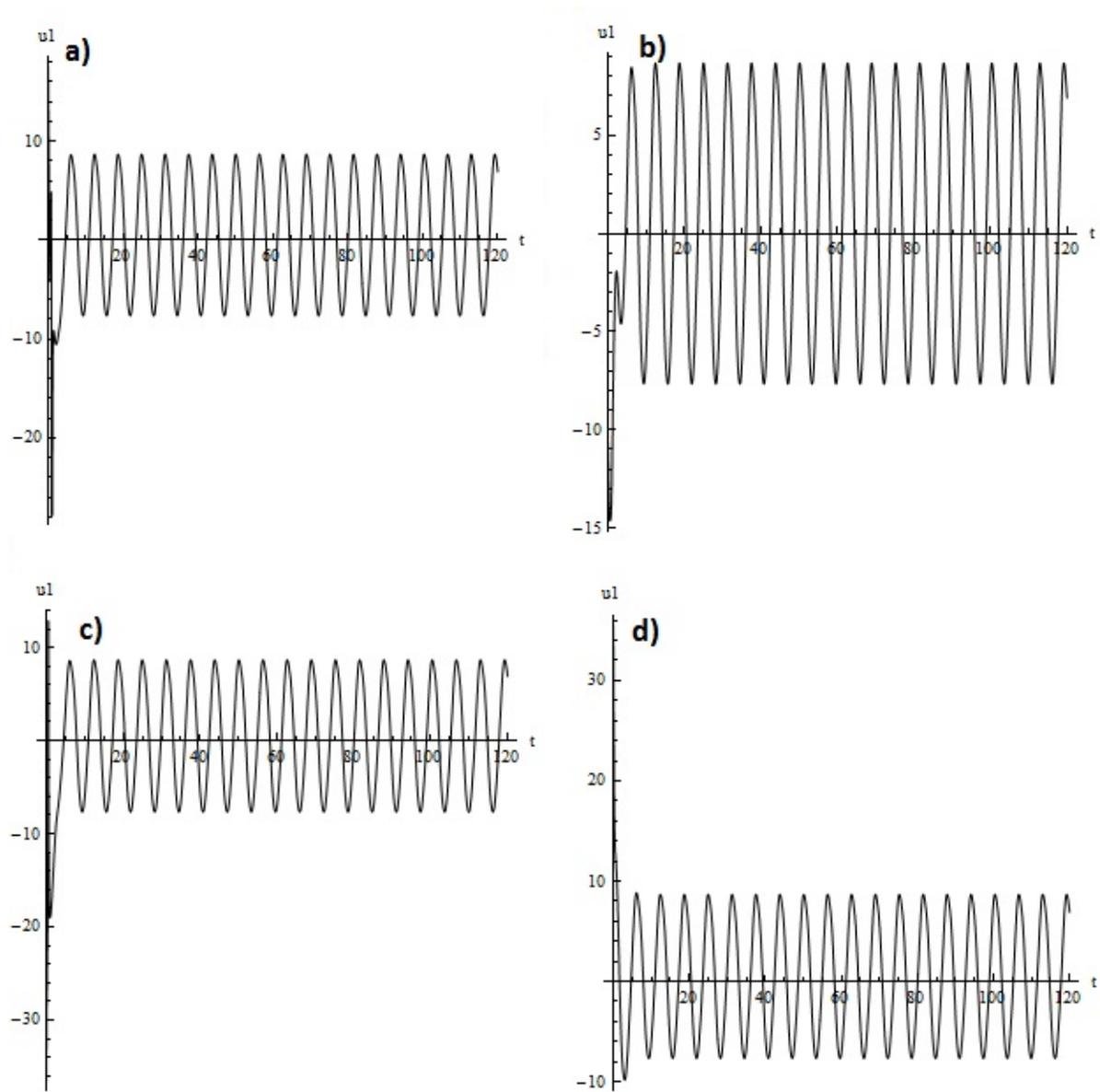


Figura 4.16: Gráfica de control contra tiempo del primer eslabón

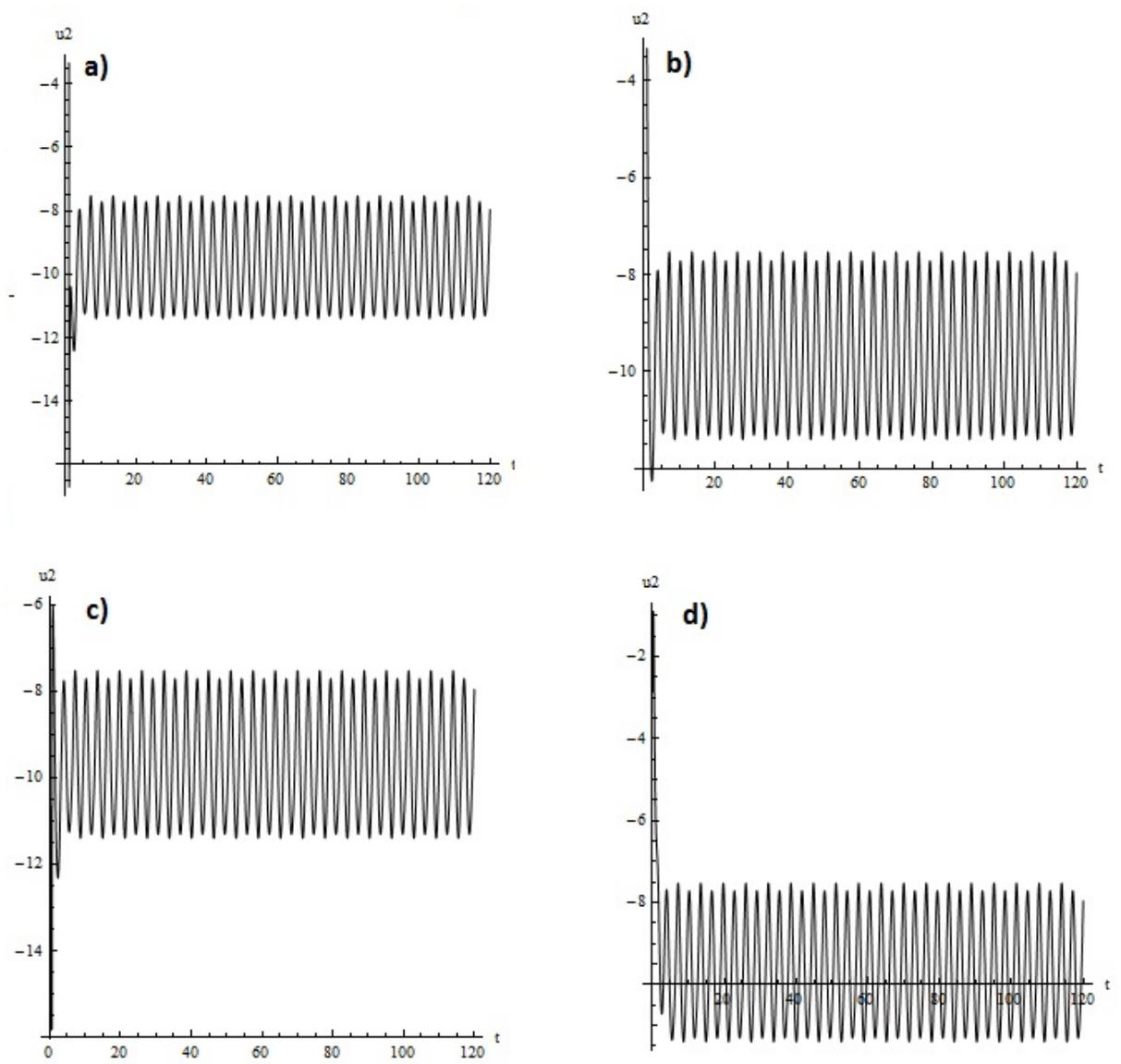


Figura 4.17: Gráficas de control contra tiempo para el segundo eslabón

Capítulo A

Programas para control de posición

Los siguientes programas han sido diseñados en el software MATHEMATICA para realizar las simulaciones del brazo mecánico de $2 - gdl$, las gráficas de “control contra tiempo” y las gráficas de “posición contra tiempo” de cada uno de los eslabones.

En estos casos hemos tomado como condiciones iniciales el vector $(0, 0, 0, 0)^T$, es decir, que el brazo mecánico este completamente extendido hacia abajo y sin movimiento inicial y como condiciones finales $(\pi, \pi, 0, 0)^T$, es decir, el brazo mecánico completamente extendido hacia arriba y sin movimiento. Pero todas las condiciones pueden ser modificadas para realizar algunas otras simulaciones.

Ya que los programas tienen algunos bloques en común como los datos de los eslabones, la dinámica del sistema a lazo cerrado y el hamiltoniano, nombraremos a estos bloques *estructura base*. Si se desea utilizar alguno de estos programas será necesario teclear la estructura base seguido de los bloques mencionados en cada programa.

Estructura base

En los primeros dos bloques se determinan los datos de masa, longitudes, momentos de inercia y gravedad pueden ser modificados según el brazo mecánico a analizar. Además se definen las matrices de inercia, su inversa y las matrices de la ley de control mencionadas en la teoría. Mientras que en el tercer bloque se define la dinámica del sistema a lazo cerrado y por último

la función hamiltoniano del sistema.

(*ESTRUCTURA BASE DE LOS PROGRAMAS DE CONTROL DE POSICIÓN*)

(*DATOS DE LOS ESLABONES*)

```
Clear[q1, q2, q1f, q2f,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ];
 $\beta_{11} = m_1 lc_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1$ ;  $\beta_{22} = m_2 lc_2^2 + I_2$ ;  $\beta_{12} = m_2 l_1 lc_2$ ;
 $\alpha_1 = m_1 g lc_1 + m_2 l_1 g$ ;  $\alpha_2 = m_2 g lc_2$ ;
(*;MASA?*)  $m_1 = m_2 = 1$ ;
(*;MOMENTO DE INERCIA*)  $I_1 = I_2 = 1$ ;
(*;GRAVEDAD?*)  $g = 98/10$ ;
(*;LONGITUDES*?)  $l_1 = l_2 = 1$ ;  $lc_1 = lc_2 = 1$ ;
```

(*MATRIZ DE INERCIA, INVERSA, Y MATRICES PARA LA LEY DE CONTROL*)

```
M = {{ $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12} \text{Cos}[q_1[t] - q_2[t]]$ }, { $\beta_{12} \text{Cos}[q_1[t] - q_2[t]]$ ,  $\beta_{22}$ }};
InvM = Inverse[M]; K = -InvM; L = -IdentityMatrix[2]; p = {p1[t], p2[t]};
pt = Transpose[p]; Q = {q1[t] - q1f, q2[t] - q2f};
 $\zeta$ 
```

(*DINÁMICA DEL SISTEMA A LAZO CERRADO*)

```
Qpto = Simplify[InvM.p]; Ppto = Simplify[-InvM.Q + L.p];
q1pto = Part[Qpto, 1, 1]; q2pto = Part[Qpto, 2, 1];
p1pto = Part[Ppto, 1, 1]; p2pto = Part[Ppto, 2, 1];
```

(*HAMILTONIANO*)

```
V =  $\alpha_1 (1 - \text{Cos}[q_1[t]]) + \alpha_2 (1 - \text{Cos}[q_2[t]])$ ;
H = Part[(pt.InvM.p)/2 + V, 1, 1];
```

Programa 1. Simulación.

El primer programa se ha diseñado para realizar la simulación del brazo mecánico de 2 – *gdl*.

(*PROGRAMA 1. SIMULACIÓN*)

(*TECLAER ESTRUCTURA BASE*)

En el siguiente bloque antes de resolver el sistema debemos definir las condiciones iniciales y finales, en otras palabras las posición y velocidad inicial y la posición final o deseada. En este punto es posible modificar el programa.

```
(*SOLUCIÓN*)
(*¿Posición y velocidad inicial?*) q1i = 0 ; q2i = 0; p1i =0; p2i=0;
(*¿Posición deseada?*) p1f = Pi; p2f = Pi;
Clear[q1, q2];
sol = NDSolve[{q1'[t] == q1pto, q2'[t] == q2pto, p1'[t] == p1pto, p2'[t]==p2pto,
q1[0]==q1i, q2[0]==q2i, p1[0]==p1i, p2[0]==p2i}, {q1[t], q2[t], p1[t], p2[t]},
{t, 0, 100}][[1]]; q1[t_] = q1[t] /.sol; q2[t_] = q2[t] /.sol;
```

Ya que tenemos las soluciones de forma numérica para cada valor de q_1, q_2, p_1 y p_2 con respecto al tiempo, por medio de las funciones **MANIPULATE** y **SHOW** de MATHEMATICA así como la geometría del brazo mecánico podremos simular los movimientos.

```
(*SIMULACIÓN*)
tsim=60; Manipulate[pto1 = {Sin[q1[t]], -Cos[q1[t]]};
pto2 = {Sin[q1[t]] + Sin[q2[t]], -Cos[q1[t]] - Cos [q2[t]]};
Show[Graphics[Line[{{0, 0}, pto1, pto2}], Disk[pto1, 0.1], Disk[pto2,0.1]],
Axes ->True, PlotRange ->{{-2.2, 2.2}, {-2.2, 2.2}}, AspectRatio ->Automatic],{t,
0, tsim, 0.1}]
```

Una vez ejecutado el programa se puede observar una pantalla de simulación como la que se muestra en la figura (A.1) y en la cual podemos ver los movimientos del brazo mecánico.

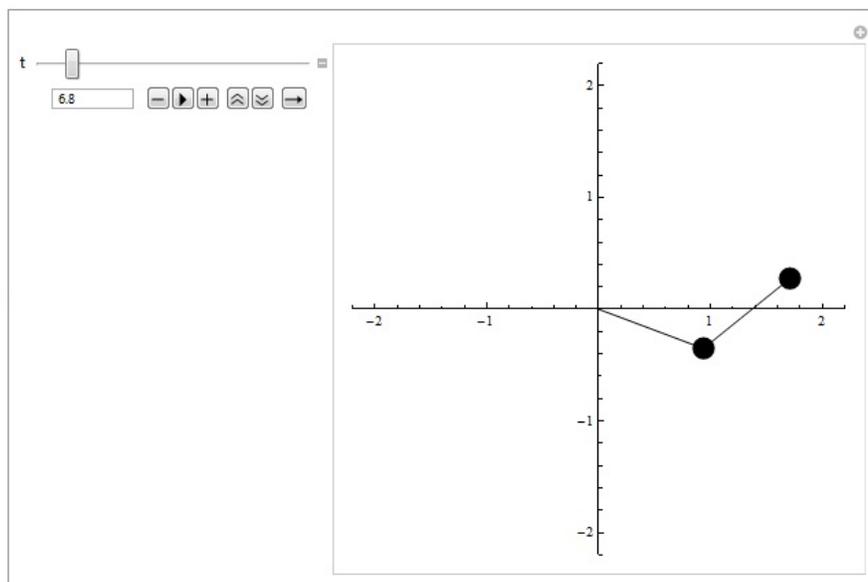


Figura A.1: Pantalla de simulación

Programa 2. Gráficas de control por medio de la derivada.

El programa mostrado a continuación fue creado en MATHEMATICA para generar las gráficas de “posición contra tiempo” y “control contra tiempo” del brazo mecánico basándonos en la idea de derivar la ley de control, y resolver el sistema de seis ecuaciones de primer orden.

```
(*PROGRAMA 2. GRÁFICAS USANDO LA DERIVADA DEL CONTROL*)
(*TECLEAR ESTRUCTURA BASE*)
```

Continuamos con algunos datos que nos servirán para definir a la derivada de la ley de control.

```
(*DERIVADA DEL CONTROL*)
(*Derivada de H con respecto a q*) Hq = Simplify[D[H, q]];

(*Derivadas de H de segundo orden*)
Hqq={{D[Part[Hq, 1, 1], q1[t]], D[Part[Hq, 1, 1], q2[t]]},
{D[Part[Hq, 2, 1], q1[t]], D[Part[Hq, 2, 1], q2[t]] }}

Hqp={{D[Part[Hq, 1, 1], p1[t]], D[Part[Hq, 1, 1], p2[t]]},
{D[Part[Hq, 2, 1], p1[t]], D[Part[Hq, 2, 1], p2[t]] }}

PRItermino = Simplify[(Hqq-InvM).Qpto];
SEGtermino = Simplify[(Hqp - IdentityMatrix[2]).Ppto];

DInvM = D[InvM, q];
Aux = {{Part[Qptot.Part[DInvM,1,1],1,1] , Part[Qptot.Part[DInvM,1,2],1,1]},
{Part[Qptot.Part[DInvM, 2, 1], 1, 1], Part[Qptot.Part[DInvM, 2, 2], 1, 1]}};
TERtermino = Aux.Q;

(*DERIVADA 0  $\dot{U}$ *)
upto = Pritermino + SEGtermino + TERtermino;
U1pto = Part[upto, 1, 1]; U2pto = Part[upto, 2, 1];
```

Ya que tenemos las derivadas de la función de control, será necesario calcular las condiciones iniciales del control, para así resolver el sistema de ecuaciones. Aunque primero estableceremos las condiciones de posición y velocidad iniciales del brazo mecánico. En esta parte del programa, se pueden modificar las condiciones iniciales y finales del sistema.

```
(*CONDICIONES INICIALES DEL CONTROL*)
(*¿Condiciones iniciales robot? *)q1i = 0; q2i = 0; p1i = 0; p2i = 0;
```

```
(*;Posición final robot?*)q1f = Pi; q2f = Pi;

(*Como debemos de ver la ley de control en la posición inicial*)
InvMci={{β22 / (β11 β22 - β12^2 Cos[q1i-q2i]^2), -β12 Cos[q1[t] - q2[t]] / (β11
β22 - β12^2 Cos[q1i-q2i]^2) }, { -β12 Cos[q1[t] - q2[t]] / (β11 β22 - β12^2
Cos[q1i-q2i]^2), β11 / (β11 β22 - β12^2 Cos[q1i-q2i]^2)}};

Uinicial = InvMci.{{q1f},{q2f}};
ulinicial = Part[Uinicial, 1, 1]; u2inicial = Part[Uinicial, 2, 1];
```

Una vez obtenidas las condiciones iniciales del sistema, por medio del comando `NDSolve` encontramos la solución numéricamente. Por último generamos las gráficas del control contra tiempo de cada eslabón, utilizando los comandos `Plot` y `Evaluate` de MATHEMATICA. Por último usando el `GraphicsArray` obtenemos la figura (A.2).

```
(*SOLUCIÓN*)
sol = NDSolve[q1'[t] - q1pto ==0, q2'[t] - q2pto ==0, p1'[t] - p1pto ==0, p2'[t]
- p2pto ==0, u1'[t] - U1pto ==0, u2'[t] - U2pto ==0, q1[0] ==q1i, q2[0] ==q2i,
p1[0] ==p1i, p2[0] ==p2i, u1[0] ==ulinicial, u2[0] ==u2inicial, q1[t], q2[t],
p1[t], p2[t], u1[t], u2[t], t, 0, 200]

(*GRÁFICA DE CONTROL CONTRA TIEMPO PARA EL PRIMER ESLABÓN*)
GraU1 = Plot[Evaluate[{u1[t]} /. sol, {t, 0, 200}], PlotStyle ->GrayLevel[0],
PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1, AxesLabel ->{'t', 'u1'}];

(*GRÁFICA DE CONTROL CONTRA TIEMPO PARA EL SEGUNDO ESLABÓN*)
GraU2 = Plot[Evaluate[{u2[t]} /. sol, {t, 0, 200}], PlotStyle ->GrayLevel[0],
PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1, AxesLabel ->{'t', 'u2'}];

GraphicsArray[{GraU1, GraU2}]
```

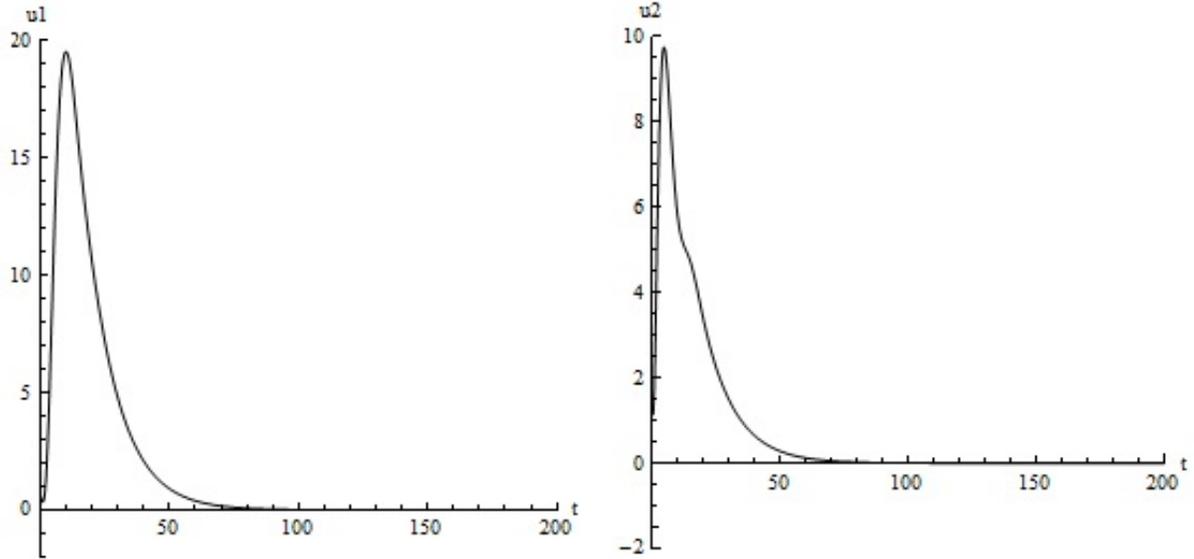


Figura A.2: Gráficas de control contra tiempo programa 2

Programa 3. Gráficas sin utilizar la derivada del control.

Este programa fue diseñado para generar las gráficas de: “Control contra tiempo” “Posición contra tiempo” de cada eslabón del brazo mecánico, pero sin utilizar los conocimientos de las derivadas del control.

```
(*PROGRAMA 3. GRÁFICAS SIN USAR LA DERIVADA DEL CONTROL*)
(*TECLEAR ESTRUCTURA BASE*)
```

```
(*CALCULO DEL CONTROL*)
u = Part[D[H, q], 1, 1] - InvM.Q - p;
u1 = Part[u, 1, 1]; u2 = Part[u, 2, 1];
```

Antes de solucionar de manera numérica el sistema, se determinan las condiciones iniciales y la posición final del brazo mecánico. Aquí es posible modificar el programa para generar otras simulaciones.

```
(*SOLUCIÓN*)
(*¿Condiciones iniciales*)q1i = 0; q2i = 0; p1i = 0; p2i = 0;
(*¿Posición final?*)q1f = Pi; q2f = Pi;
```

```
Clear[q1, q2, p1, p2, u1, u2]; tmax = 200;
sol = NDSolve[{q1'[t]-q1pto == 0, q2'[t]-q2pto == 0, p1'[t]-p1pto == 0, p2'[t]-
p2pto == 0, q1[0]==q1i, q2[0]==q2i, p1[0]==p1i, p2[0]==p2i}, {q1[t], q2[t], p1[t]
, p2[t]}, {t, 0, tmax}][[1]]; q1[t_] = q1[t] /. sol; q2[t_] = q2[t] /. sol; p1[t_] =
p1[t] /. sol; p2[t_] = p2[t] /. sol;
```

El siguiente bloque como su nombre lo indica, es para generar las gráficas de posición contra tiempo, en la figura (A.3) se muestra un ejemplo de las gráficas que aparecen. Mientras que en el último bloque se generan las gráficas de control contra tiempo, como las que se muestran en la figura (A.4).

```
(*GRÁFICAS POSICIÓN CONTRA TIEMPO*)
Posicion1 = Plot[Evaluate[{q1[t]} /. sol, {t, 0, tmax}], PlotStyle ->GrayLevel[0],
PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1, AxesLabel ->{"t", "p1"}];
Posicion2 = Plot[Evaluate[{q2[t]} /. sol, {t, 0, tmax}], PlotStyle ->GrayLevel[0],
PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1, AxesLabel ->{"t", "p2"}];
GraphicsArray[{Posicion1, Posicion2,}]
```

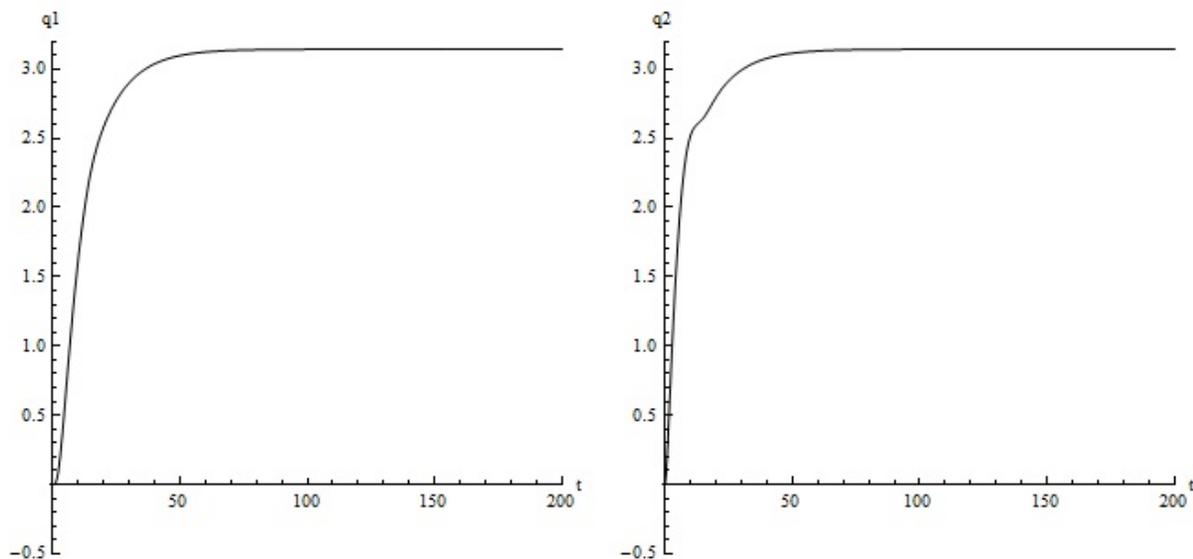


Figura A.3: Gráficas generadas por el bloque “Posición contra tiempo”

```
(*GRÁFICAS CONTROL CONTRA TIEMPO*)
Control1 = Plot[Evaluate[{u1[t]} /. sol, {t, 0, tmax}],
PlotStyle ->GrayLevel[0], PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1,
AxesLabel ->{'t', 'u1'}];
Control2 = Plot[Evaluate[{u2[t]} /. sol, {t, 0, tmax}],
PlotStyle ->GrayLevel[0], PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1,
AxesLabel ->{'t', 'u2'}];
GraphicsArray[{Control1,Control2}]
```

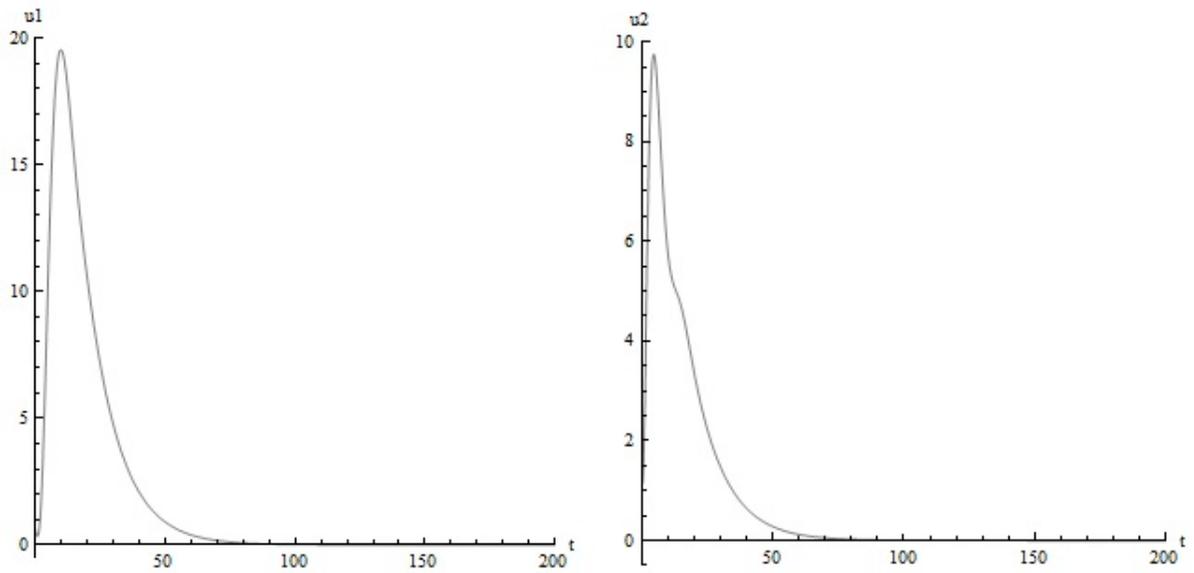


Figura A.4: Gráficas generadas por el bloque “Control contra tiempo”

Capítulo *B*

Programas para el control de seguimiento

Los siguientes programas han sido diseñados en el software MATHEMATICA para realizar las trayectorias de seguimiento del segundo eslabón, la simulación del brazo mecánico aplicando el control de seguimiento y para generar las gráficas de “control contra tiempo” de cada uno de los eslabones. En cada uno de los programas se introducen los datos para las trayectorias estudiadas en la tesis.

De nuevo, ya que los programas diseñados poseen bastantes bloques en común, se ha diseñado una estructura base para estos programas. Si el lector desea ejecutar alguno de los programas será necesario teclear la estructura base donde se indica, seguido de los bloques que menciona el programa.

Estructura base

La estructura base de estos programas es un poco mas extensa que la anterior, ya que para calcular la dinámica del sistema a lazo cerrado es necesario realizar una serie de cálculos mostrados en el programa.

En los siguientes bloques introducimos los datos de cada uno de los eslabones, en este caso consideremos a los eslabones iguales, donde su masa, momento de inercia, longitud y longitud del centro de masa es igual a uno pero estos datos son modificables.

Además se definen las matrices de inercia, su inversa y las matrices para la ley de control de

manera muy general.

```
(*ESTRUCTURA BASE DE LOS PROGRAMAS DE CONTROL DE SEGUIMIENTO*)
(*INICIA ESTRUCTURA BASE*)
```

```
(*DATOS DE LOS ESLABONES*)
Clear[q1, q2, q1f, q2f,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ];
 $\beta_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1$ ;  $\beta_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$ ;  $\beta_{12} = m_2 l_1 l_{c2}$ ;
 $\alpha_1 = m_1 g l_{c1} + m_2 l_1 g$ ;  $\alpha_2 = m_2 g l_{c2}$ ;
(*;MASA?*)  $m_1 = m_2 = 1$ ;
(*;MOMENTO DE INERCIA*)  $I_1 = I_2 = 1$ ;
(*;GRAVEDAD?*)  $g = 98/10$ ;
(*;LONGITUDES*?)  $l_1 = l_2 = 1$ ;  $l_{c1} = l_{c2} = 1$ ;
```

```
(*MATRIZ DE INERCIA, INVERSA, Y MATRICES PARA LA LEY DE CONTROL*)
M = {{ $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12} \text{Cos}[q_1[t] - q_2[t]]$ }, { $\beta_{12} \text{Cos}[q_1[t] - q_2[t]$ ,  $\beta_{22}$ }};
InvM = Inverse[M]; K = -InvM; L = {{-1,0},{0,-1}}; p = {p1[t], p2[t]};
pt = Transpose[p]; Q = {q1[t] - q1f, q2[t] - q2f};
A = {{-a1, 0},{ 0,-a2}}, B = {{-b1, 0},{ 0,-b2}}
```

Los siguientes bloques son para definir la dinámica del brazo mecánico, para \dot{q} no se tiene ningún problema ya que es un producto matricial, mientras que para \dot{p} son necesarios otros cálculos.

```
(*INICIA DINÁMICA*)
(*Calculando qpto*)
qpto = Simplify[InvM.p];
q1pto = Part[qpto, 1, 1]; q2pto = Part[qpto, 2, 1];
```

```
(*Calculos para ppto*)
h={{l1 Sin[q1[t]] + l2 Sin[q2[t]], {-l1 Cos[q1[t]] - l2 Cos[q2[t]]}}; r={ $\dot{q}_1[t]$ ,
{r2[t]}}; rppto={{r1'[t]}, {r2'[t]}};
r2pto={ $\dot{q}_1''[t]$ , {r2''[t]}};
```

```
(*Definimos  $\omega_1 \dots \omega_1$ *) W1=h-r;
```

```
(*Definimos  $\omega_2 \dots \omega_2$ *)
Dh={{l1 Cos[q1[t]], l2 Cos[q2[t]]}, {l1 Sin[q1[t]], l2 Sin[q2[t]}}
InvDh = Inverse[Dh];
W2 = Dh.qpto - rppto;
```

```

(*Otros términos de la ley de control*)
Dhq1 = D[Dh, q1[t]]; Dhq2 = D[Dh, q2[t]];
qptot = Transpose[qpto];
X={{qptot.Dhq1.qpto},{qptot.Dhq2.qpto}};

DInvMq1 = D[InvM, q1[t]]; DInvMq2 = D[InvM, q2[t]];

v1=M.InvDh; v2 = A.W1 + B.W2 - X + r2pto;
v3={{qptot.DInvMq1.qpto},{qptot.DInvMq2.qpto}};

ppto=v3 + v1.v2;
p1pto = Part[ppto, 1, 1, 1, 1]; p2pto = Part[ppto, 2, 1, 1, 1];
(*TERMINA DINÁMICA*)

```

En esta parte del programa es donde cambia la estructura, dependiendo de la curva a seguir. Se han puesto los tres ejemplos mostrados en la tesis, en caso de utilizar el programa sólo se tecléa uno de los ejemplos, y si se desea analizar el seguimiento de otra trayectoria será trabajo del lector verificar si se encuentra dentro del área de máximo alcance del brazo mecánico.

```

(*DEFINIMOS LAS CURVA PARAMETRIZADA*)

```

```

(*EJEMPLO 1: CIRCULO CON CENTRO EN EL ORIGEN*)

```

```

r1[t_] = 1.5 Cos[t]; r2[t_] = 1.5 Sin[t]; a1 = a2 = b1 = b2 = 2;

```

```

(*EJEMPLO 2: CIRCULO CON CENTRO (1,1) Y RADIO 29/50*)

```

```

r1[t_] = (29 Cos[t])/50 + 1; r2[t_] = (29 Sin[t])/50 + 1;

```

```

a1 = a2 = b1 = b2 = 4;

```

```

(*EJEMPLO 3: LEMNISCATA*)

```

```

r1[t_] = Cos[t]/2 + 1; r2[t_] = Sin[t]/2 + 1; a1 = a2 = b1 = b2 = 2;

```

```

(*TERMINA ESTRUCTURA BASE*)

```

Programa 4. Trayectoria de seguimiento del segundo eslabón

En este programa sólo se realizan análisis de las posiciones finales del segundo eslabón del brazo mecánico, para obtener una idea de la trayectoria que seguirá el robot.

```
(*PROGRAMA 4. PROGRAMA DE TRAYECTORIAS*)
(*TECLEAR ESTRUCTURA BASE*)
```

Resolvemos el sistema numéricamente para poder generar las gráficas de las trayectorias del segundo eslabón, pero primero definimos las condiciones iniciales del brazo mecánico y el tiempo de simulación. Estos datos pueden ser modificados por el lector.

```
(*SOLUCIÓN*)
(*¿Condiciones iniciales?*) q1i = Pi; q2i= 3Pi/4; p1i=0; p2i=0;
(*¿Tiempo de simulación?*)tmax = 120;
Clear[q1, q2, p1, p2];solo = NDSolve[{q1'[t] == q1pto, q2'[t] == q2pto, p1'[t]
== p1pto, p2'[t] == p2pto, q1[0] == q1i, q2[0] == q2i, p1[0] == p1i, p2[0] ==
p2i}, {q1[t], q2[t], p1[t], p2[t]}, {t, 0, tmax}];
```

El último bloque es donde se generan las gráficas de las trayectorias, primero en Eslabon2 generamos una tabla dinámica con todos los valores de $q1$ y $q2$ para el tiempo entre cero y el valor de $tmax$, después por el comando `ListPlot` se genera la gráfica. En la figura (B.1) se pueden observar tres ejemplos de distintas trayectorias a seguir.

```
(*GRAFICAS*)
Eslabon2 = Table[{Sin[q1[t]] + Sin[q2[t]], -Cos[q1[t]] - Cos[q2[t]]} /. solo,
{t,0, tmax, .1}]; ListPlot[Eslabon2, PlotRange ->{{-2, 2}, {-2, 2}}, AspectRatio
->Automatic]
```

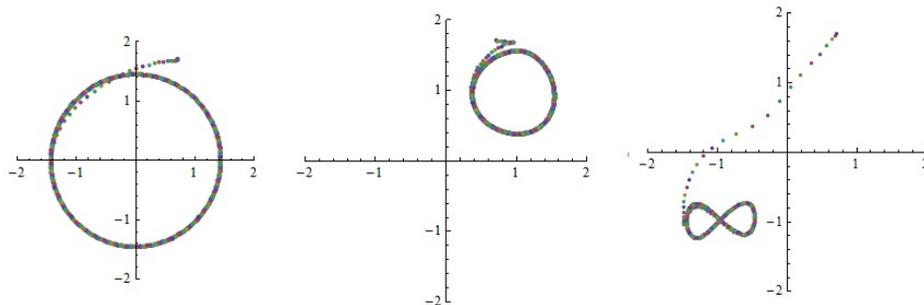


Figura B.1: Ejemplos de los resultados

Programa 5. Simulación del control de seguimiento

El siguiente programa ha sido diseñado en el software MATHEMATICA para realizar la simulación de un brazo mecánico de 2 – *gdl* aplicando el control de seguimiento.

```
(*PROGRAMA 5. SIMULACIÓN*)
(*TECLEAR ESTRUCTURA BASE*)
```

Por medio del comando `NDSolve` resolvemos el sistema numéricamente para después generar la pantalla de simulación utilizando los comandos `Manipulate` y `Show`.

```
(*SOLUCIÓN Y SIMULACIÓN*)
(*¿Condiciones iniciales?*) q1i = Pi; q2i= 3Pi/4; p1i=0; p2i=0;
(*¿Tiempo de simulación?*)tmax = 120;
Clear[q1, q2, p1, p2];soln = NDSolve[{q1'[t] == q1pto, q2'[t] == q2pto, p1'[t]
== p1pto, p2'[t] == p2pto, q1[0] == q1i, q2[0] == q2i, p1[0] == p1i, p2[0] ==
p2i}, {q1[t], q2[t], p1[t], p2[t]}, {t, 0, tmax}][[1]];
q1[t_] = q1[t] /. soln; q2[t_] = q2[t] /. soln;
Manipulate[pto1 = {Sin[q1[t]], -Cos[q1[t]]}; pto2 = {Sin[q1[t]] + Sin[q2[t]],
-Cos[q1[t]] - Cos [q2[t]]};Show[Graphics[{Line[{{0, 0}, pto1, pto2}], Disk[pto1,
0.1], Disk[pto2, 0.1]}], Axes ->True, PlotRange ->2 {{-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}},
AspectRatio ->Automatic], {t, 0, tmax, 0.01}]
```

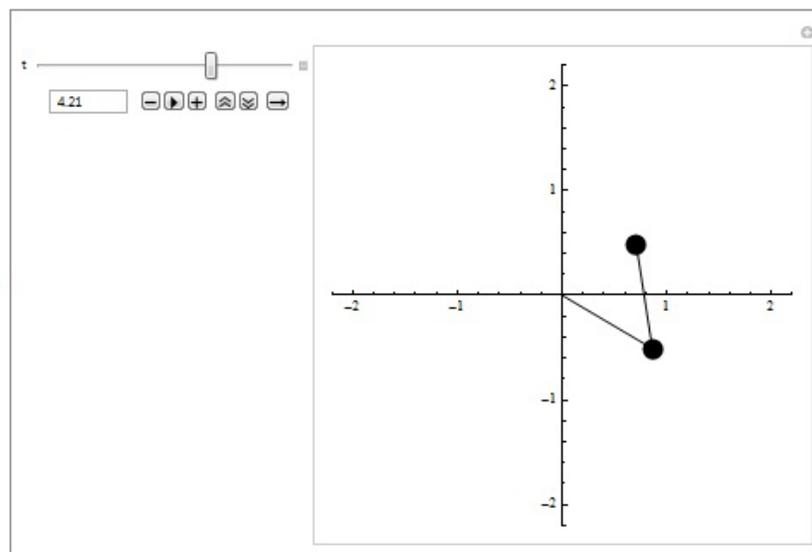


Figura B.2: Resultado del programa: Pantalla de simulación.

Programa 6. Gráficas de control contra tiempo

El siguiente programa ha sido diseñado en el software MATHEMATICA para realizar las gráficas de “control contra tiempo” de cada uno de los eslabones de un brazo mecánico de 2 – *gdl* aplicando el control de seguimiento.

```
(*PROGRAMA 6. GRÁFICAS DE CONTROL CONTRA TIEMPO*)
(*TECLEAR ESTRUCTURA BASE*)
```

Ya que no usaremos la derivada de la ley de control para realizar las gráficas, definiremos a la función hamiltoniano, H, para después calcular la ley de control. Una vez calculada la ley de control, por medio del comando NDSolve resolvemos el sistema numéricamente para después generar las gráficas.

```
(*HAMILTONIANO*)
EC = Simplify[(pt.InvM.p)/2]; EP =  $\alpha_1 (1 - \text{Cos}[q_1[t]]) + \alpha_2 (1 - \text{Cos}[q_2[t]])$ ;
H = EC + EP;
(*DEFINICIÓN DE LA LEY DE CONTROL*)
u = Ppto + Part[D[H, q], 1, 1];

(*SOLUCIÓN*)
(*¿Condiciones iniciales?*) q1i = Pi; q2i = 3Pi/4; p1i=0; p2i=0;
(*¿Tiempo de simulación?*)tmax = 120;
Clear[q1, q2, p1, p2]; soln = NDSolve[{q1'[t] == q1pto, q2'[t] == q2pto, p1'[t]
== p1pto, p2'[t] == p2pto, q1[0] == q1i, q2[0] == q2i, p1[0] == p1i, p2[0] ==
p2i}, {q1[t], q2[t], p1[t], p2[t]}, {t, 0, tmax}][[1]];
q1[t_] = q1[t] /. soln; q2[t_] = q2[t] /. soln;

(*GRAFICAS*)
GraU1 = Plot[ Evaluate[ { Part[u, 1, 1] } /. soln, {t, 0, tmax } ] PlotStyle - >
{GrayLevel[0]}, PlotRange - >Automatic, AspectRatio - >1, AxesLabel - >{‘‘t’’,
‘‘u1’’}]; GraU2 = Plot[Evaluate[{Part[u, 2, 1]} /. sol, {t, 0, tmax}], PlotStyle
->{GrayLevel[0]}, PlotRange ->Automatic, AspectRatio ->1, AxesLabel ->{‘‘t’’,
‘‘u2’’ }];

GraphicsArray[{GraU1, GraU2}]
```

Capítulo C

Comandos utilizados en los programas y funcionamiento

A continuación se presentan algunos de los comandos que son utilizados en los programas mencionados anteriormente.

- `Clear[]`: Es utilizado para borrar variables.
- `Sin[]`, `Cos[]`: Son funciones predefinidas del software.
- `Simplify[expr]`: Comando utilizado para simplificar la expresión dada.
- `D[f[x], x]`: Encuentra la primer derivada de la función con respecto a x .
- `D[f[x], {x, i}]`: Encuentra la i -ésima derivada de la función con respecto a x .
- `Part[lista, n]`: Es utilizado para agrupa los elementos de la lista de n en n , creando una lista cuyos elementos son listas.
- `Inverse[m]`: Como el nombre lo indica, es utilizado para calcular la matriz inversa de m .
- `IdentityMatrix[n]`: Genera una matriz identidad de tamaño $n \times n$.
- `Transpose[list]`: Comando utilizado para transponer un vector o una matriz.
- `Plot[f, {x, xmin, xmax}`: Se obtiene la gráfica de la función f para $x \in [x_{min}, x_{max}]$.
- `ListPlot[y1, y2, ...]`: Se obtiene la gráfica desde los datos brindados por una lista o tabla.

- `Manipulate[]`: Es utilizado para variar parámetros de una gráfica en el tiempo, y así poder observar su comportamiento en la pantalla.
- `Evaluate[expr]`: Es utilizado para calcular la expresión para un valor en particular.
- `NDSolve[eqns, y, {x, xmin, xmax}, {t, tmin, tmax, }]`: Es utilizado para resolver aproximadamente una ecuación diferencial.

Bibliografía

- [1] HASSAN K. KHALIL. *Nonlinear Systems*. Second Edition. PRENTICE HALL. 1996.
- [2] IAN PERCIVAL, DEREK RUCHARDS. *Introduction to Dynamics*. First published. CAMBRIDGE. 1982.
- [3] MARTHA L. ABELL, JAMES P. BRASELTON. *Mathematica by Examples*. Second Edition. ACADEMIC PRESS. 1997.
- [4] CARLOS A. LOREDO V.. *Criterio para determinar si un polinomio es polinomio de Hurwitz*. Reporte de los seminarios I y II para obtener el título de matemático. Universidad Autónoma de Metropolitana. Enero,2005
- [5] STEPHAN KAUFMANN. *A Crash Course in Mathematica*. Birkhäuser. 1999.
- [6] EUGENE DON. *Mathematica*. Schaum's outlines series. MC-GRAW-HILL. 2001.
- [7] DAVID HALLIDAY, ROBERT RESNICK. *Física parte 2*. CONTINENTAL. 1978.
- [8] PATRICK T. TAM. *A Physicist's Guide to Mathematica*. ACADEMIC PRESS. 1997.
- [9] HERBET GOLDSTEIN, CHARLES P. POOLE, JOHN L.SAFKO. *Classical Mechanics*. 3rd Edition. HARDCOVER.
- [10] ANÍBAL OLLERO B. *Robótica: manipuladores y robot móviles*. MARCOMBO. 2001.
- [11] JOHN J. CRAIG. *Robótica*. 3era Edición. PRETICE-HALL