

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"



UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciado en Matemáticas

Métodos de Energía y Factores Integrantes para Sistemas Dinámicos 3-Dimensionales

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

José Crispín Ruíz Pantaleón

Director de Tesis: Dr. Yury Vorobev

Hermosillo, Sonora, México, 18 de junio de 2012

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza Universidad de Sonora

Dr. Yury Vorobev Universidad de Sonora

Dr. Fernando Verduzco González Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón Universidad de Sonora ... A Dios. A mis padres y hermanos. A mi novia. A mis profesores y a las personas que me han brindado su apoyo incondicional.

"El hombre encuentra a Dios detrás de cada puerta que la ciencia logra abrir" Albert Einstein

Índice general

In	troducción	1
1.	Preliminares	3
	1.1. El problema de Cauchy	3
	1.2. Integrales primeras	9
	1.3. Lema de Morse	11
2.	Método del Factor Integrante	15
	2.1. Caso \mathbb{R}^2	16
	2.1.1. Aplicación al sistema Lotka-Volterra en \mathbb{R}^2	20
	2.2. Caso \mathbb{R}^3	29
	2.2.1. Aplicación al sistema Lotka-Volterra en \mathbb{R}^3	31
3.	Estabilidad	43
	3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	43
	3.2. Teoremas de Lyapunov	46
4.	Métodos de energía	51
	4.1. Método de Arnold	52
	4.2. Métodos de energía de Casimir y Ortega-Ratiu	58
	4.3. Aplicación al sistema del trompo de Euler	62
	4.3.1. Caso $SO(3)$	62
	4.3.2. Caso $\operatorname{Sl}(2;\mathbb{R})$	68
Aŗ	Apéndices	
A.	. Formas Bilineales y Formas Cuadráticas	77
в.	. Método del factor integrante	85

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar un estudio sobre algunos problemas concernientes a la teoría de integrabilidad y estabilidad de sistemas dinámicos 2 y 3-dimensionales. Parte importante de este trabajo está dedicado en aplicar la teoría desarrollada a un modelo generalizado de familias de sistemas Lotka-Volterra que incluye términos constantes los cuales pueden interpretarse como un tipo de "recolección de" o "aportación de" al sistema por parte de un agente externo.

El sistema Lotka-Volterra representa la base de los estudios teóricos acerca de la dinámica de poblaciones y otros modelos matemáticos en campos tan diversos como la economía, sostenibilidad, tratamiento de plagas, hidrodinámica, química, etcétera. [23, 24, 25, 26]. Este sistema en su forma clásica trata de dos tipos de especies diferentes, una especie *presa* y otra especie *depredadora* [27, 28], compartiendo un mismo ecosistema. Actualmente se ha encontrado una conexión entre el sistema Lotka-Volterra generalizado y las ecuaciones de réplica desarrollados en teoría de juegos [29, 30] y aún se sigue investigando otras posibles conexiones que pudiesen existir con diversos sistemas.

La primera línea de análisis que se aborda es el denominado método del factor integrante, el cual es una herramienta muy útil para encontrar integrales primeras en sistemas dinámicos 2 y 3-dimensionales (ver, por ejemplo, [18, 19]). El principal atributo de este método es no sólo garantizar la existencia de éstas bajo ciertas condiciones, sino el proveer un algoritmo para encontrarlas explícitamente. La existencia de integrales primeras para un sistema autónomo $\dot{x} = v(x), x \in \mathbb{R}^n$ dado, está íntimamente relacionado con la solubilidad de la ecuación funcional $L_v f = 0$, para cierta función f definida en algún dominio del espacio de fases. En general, el problema de encontrar las soluciones (globales) de esta ecuación es tarea difícil, incluso para los casos de baja dimensión, n = 2, 3. Aun así, esta cuestión es de gran importancia ya que, por ejemplo, la existencia de una integral primera para un sistema dinámico en el plano significa que este sistema es Hamiltoniano y el espacio de fases queda completamente determinado por los conjuntos de nivel de la integral primera. En el caso 3dimensional si un sistema dinámico admite una integral primera global no trivial, entonces no puede ocurrir movimiento caótico [23, 31] debido a que las soluciones permanecen en las superficies de nivel de la integral primera.

Este trabajo se apoya en el método del factor integrante matricial, enfoque debido a [18, 19], para aplicar la teoría mencionada en el párrafo anterior a familias de sistemas Lotka-Volterra 2 y 3-dimensionales. Este método nos permite reducir la búsqueda de integrales primeras a la solubilidad de un conjunto de ecuaciones algebraicas con dos tipos de parámetros involucrados en el problema: los parámetros del sistema y los parámetros del factor integrante propuesto. La segunda línea de análisis que se aborda son los llamados *métodos de energía*: El método de Arnold, el método de energía de Casimir y el método de Ortega Ratiu [21, 22]. Estos métodos son una importante herramienta para el estudio en cuanto a estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico que admita cierto número de integrales primeras. En este trabajo se da una exposición independiente de los tres métodos para el caso de sistemas dinámicos Hamiltonianos 3-dimensionales que admitan 2 integrales primeras independientes. Además se muestra que existe una equivalencia entre ellos [20]. Por último, se ilustran estos resultados aplicándolos al sistema del trompo de Euler (Euler top), asociados a las álgebras SO(3) y Sl(2 : \mathbb{R}) [14].

Este texto está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se recuerdan nociones básicas de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En particular, se presentan conceptos elementales que permiten definir lo que es la integral primera de un sistema dinámico.

En el Capítulo 2 se desarrolla la teoría que posibilita exhibir el denominado método del factor integrante y sus aplicaciones en una familia de sistemas Lotka-Volterra generalizado. Primeramente se realiza este desarrollo para el caso 2-dimensional y posteriormente para el caso 3-dimensional. En cada caso se da una clasificación de las integrales primeras encontradas en la familia de sistemas Lotka-Volterra.

En el Capítulo 3 se presentan los criterios para la estabilidad de un punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov junto con la demostración de los correspondientes teoremas de Lyapunov. Este capítulo prepara el contexto necesario para desarrollar la teoría correspondiente a los métodos de energía.

En el Capítulo 4 se abordan los métodos de energía, se exhibe cada uno de los métodos y se presenta una demostración completa del método de Arnold. Luego, se demuestra la equivalencia que existe entre cada uno de los métodos y finalmente se aplican estos métodos al sistma dinámico del trompo de Euler.

En el apéndice se puede encontrar teoría y demostraciones de algunos hechos algebraicos utilizados en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta un breve repaso de conceptos básicos y teoremas de carácter general para la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, cálculo vectorial y álgebra lineal que serán necesarios en el desarrollo de esta tésis.

1.1. El problema de Cauchy

El estudio y solución al problema de Cauchy es un tema clásico y fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta sección se abordará el problema de Cauchy para sistemas autónomos y se exhibirán resultados clásicos tales como existencia y unicidad de las soluciones, dependencia continua respecto a las condiciones iniciales y paramétrica de las soluciones. Un estudio más detallado de los resultados presentados en esta sección puede ser encontrado en las obras [2, 3, 4].

Previo al estudio del problema de Cauchy, es importante recordar que una *curva parametrizada* en \mathbb{R}^n , es una función $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto en \mathbb{R} , dada por

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)),$$

donde a la variable $t \in I$, se le denomina parámetro.

Las funciones $\gamma_i : I \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$; se llaman funciones coordenadas euclidianas de $\gamma(t)$. Si el contexto lo permite y evitando ambigedad podemos escribir a la curva parametrizada $\gamma(t)$, como $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$.

Se define la *derivada* de una curva parametrizada $\gamma(t)$, por

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{dt}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{dt}}, \ \dots, \ \frac{\mathrm{d}\gamma_n}{\mathrm{dt}} \right).$$

Por definición, que $\gamma(t)$ sea diferenciable significa que todas sus funciones coordenadas euclidianas lo son. Geométricamente se puede interpretar a la derivada de la curva como el *vector tangente* a ésta para cada $t \in I$. Si la curva parametrizada posee derivadas continuas de todos los órdenes se dirá que es *suave*.

Comúnmente las curvas son funciones que dependen de un sólo parámetro, por lo que se denota a su derivada, siempre y cuando no exista confusión respecto a qué variable se está derivando, como

$$\gamma'(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}.$$

Por ser esta sección solamente introducctoria no se profundizará en el estudio de curvas, si se está interesado en un estudio mas extenso se recomienda consultar [1].

Otro concepto importante a recordar es el de *campo vectorial*, el cual es una función $v: U \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x)),$$

donde $U \in \mathbb{R}^n$ es un abierto, $x \in U$ y $v_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.

Si cada $v_i \in C^{\infty}(U)$, es decir, tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U, el campo vectorial v se dirá que es *suave*. Se denotará por $\mathfrak{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales suaves en U, el cuál se puede demostrar es un espacio vectorial real. Se retomará el estudio en torno a campos vectoriales en la Sección 2.

Teorema de Existencia y Unicidad. Consideremos el siguiente sistema *autónomo* de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x), \tag{1.1}$$

con $x \in U, v \in \mathfrak{X}(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

El lado izquierdo de (1.1) a menudo se denota por \dot{x} y en la literatura a la variable t normalmente se le nombra *tiempo*.

Una función vectorial suave $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ en la variable de tiempo t definida en un intervalo abierto $I_x \ni t_0$, es una solución de (1.1) basada en el punto $x^0 \in U$, si x(t)es diferenciable en I_x y además

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(x(t)) , \quad t \in I_x \\ x(t) \mid_{t=t_0} &= x^0 \end{aligned}$$

$$(1.2)$$

Este es un sistema *autónomo* ya que no depende explícitamente del tiempo y es precisamente el encontrar una función vectorial suave x(t) que satisfaga ambas condiciones en (1.2) lo que se denomina en la literatura como *problema de Cauchy* para sistemas autónomos. Cabe mencionar que la curva parametrizada suave $\gamma: I_x \to U$ generada por la solución x(t) del sistema (1.1)

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in U \mid x = x(t), t \in I_x \}$$

se llama trayectoria (fase) del sistema (1.1) que pasa por el punto x^0 al tiempo $t = t_0$ y al conjunto de todas las trayectorias que son generadas por cada solución x(t) del sistema (1.1) se le llama espacio de fases.

Interrogantes que surgen naturalmente ante el problema de Cauchy son existe siempre solución al problema?, bajo qué condiciones existe?, es única dicha solución?, etcétera . Estos cuestionamientos tienen respuesta en el teorema que se enuncia a continuación

Teorema 1.1.1. (Teorema de existencia y unicidad). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $v(x) \in \mathfrak{X}(U)$. Entonces para cada $x^0 \in U$ existe $\delta > 0$ tal que el problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) , \quad t \in I_x$$

$$x(t) \Big|_{t=t_0} = x^0$$
(1.3)

posee una única solución x(t) para toda $t \in I_x = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Se omitirá la demostración del teorema ya que existe una amplia literatura en la cual puede ser consultada, entre las cuales se recomiendan [7, pp. 3,13], [3, p. 73] y [nnña, p94].

Es importante señalar que cuando se dice que la función vectorial suave x(t) es solución al problema de Cauchy en el intervalo I_x , se esta diciendo que en este intervalo la función x(t) está bien definida.

Es interesante notar que en términos geométricos, el Teorema de Existencia y Unicidad asegura que existe una única trayectoria del sistema (1.1) que pasa a través de un punto dado $x^0 \in U$ del espacio de fases en \mathbb{R}^n .

Por otra parte, recordando que un punto $x^* \in U$ es un *punto singular* del campo v si $v(x^*) = 0$, la función constante $x(t) \equiv x^*$ siempre es solución del sistema (1.1) y en este caso al punto x^* se le denomina *punto de equilibrio*.

Dominio de Definición. El Teorema 1.1.1 establece que existe una única solución x(t) al problema de Cauchy en un intervalo abierto I_x , sin embargo, siempre podemos encontar "otra" solución $\tilde{x}(t)$ restringiendo la solución x(t) a un intervalo $I_{\tilde{x}} \subset I_x$. Se trata sin duda de un argumento posiblemente burdo, pero que suscita un punto importante que merece discusión: la unicidad global al problema de Cauchy (en el entendido de que "global" significa encontrar el intervalo más grande para la solución).

Afortunadamente, es bien sabido de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que, para cada $x^0 \in U$, el problema de Cauchy (1.3) admite una única solución x(t) en un intervalo máximo $I = (\alpha, \beta)$ (no necesariamente finito). A este intervalo se le denomina dominio de definición de la solución x(t) o dominio de definición del problema de Cauchy (1.3). La siguiente proposición muestra la propiedad fundamental de este intervalo.

Proposición 1.1.1. Sea I el dominio de definición del problema de Cauchy (1.3) y $\widetilde{x}(t)$ una solución en un intervalo \widetilde{I} , entonces $\widetilde{I} \subset I$ y $\widetilde{x}(t) = x(t)$ para toda $t \in \widetilde{I}$.

La demostración de la proposición anterior puede ser consultada en [3, p. 88].

Se dice que una trayectoria del sistema (1.1) es *completa* si su dominio de definición es $I = (-\infty, \infty)$. De igual manera, si sucede que campo vectorial v del sistema (1.1) es bien definido en U y para cada $x^0 \in \mathbb{R}^n$ la trayectoria del sistema (1.1) que pasa por el punto x^0 es completa se dirá que el campo vectorial es *completo*.

Observemos que si $I = (\alpha, \beta)$ es el dominio de definición del problema de Cauchy (1.3) entonces $t_0 \in I$, lo cual permite denominar a los intervalos $I^+ = [t_0, \beta)$ e $I^- = (\alpha, t_0]$ como dominio de definición derecho y dominio de definición izquierdo respectivamente.

El teorema que enunciamos a continuación es muy útil en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y también será de ayuda en el capítulo 3 de nuestro texto.

Teorema 1.1.2. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $y \ v \in \mathfrak{X}(U)$. Sea $x^0 \in U \ y$ sea $I^+ = [t_0, \beta)$ el dominio de definición derecho de la solución x(t) del problema de Cauchy (1.3). Si $\beta < \infty$ entonces para cada compacto $K \subset U$ existe $t^* \in I^+$ tal que $x(t^*) \notin K$.

Enunciaremos un lema que será de ayuda en la demostración del teorema.

Lema 1.1.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $y \ v \in \mathfrak{X}(U)$. Para $x^0 \in U$, sean $x_1(t) \ y \ x_2(t)$ soluciones al problema de Cauchy (1.3) definidas en los intervalos $I_{x_1} \ e \ I_{x_2}$ respectivamente. Si $t_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$ $e \ I \subset I_{x_1} \cap I_{x_2}$ es un intervalo abierto que contiene a t_0 , entonces $x_1(t) = x_2(t)$ para toda $t \in I$.

Demostración. Por ser $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones al problema de Cauchy (1.3) definidas en los intervalos I_{x_1} e I_{x_2} respectivamente, se sigue que $t_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$. Ahora, si $I \subset I_{x_1} \cap I_{x_2}$ es un intervalo abierto que contiene a t_0 , entonces por el Teorema de Existencia y Unicidad se sigue que $x_1(t) = x_2(t)$ en algún intervalo abierto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$. Sea I^* la unión de todos éstos intervalos abiertos contenidos en I. Luego, I^* es el intervalo abierto más grande en el cual $x_1(t) = x_2(t)$. Claramente, $I^* \subset I$ y si esta contención es propia, entonces los extremos del intervalo I^* pertencen a I, sea \tilde{t} uno de estos extremos. Por la continuidad de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en I se sigue que,

$$x_0 = \lim_{t \to \tilde{t}} x_1(t) = \lim_{t \to \tilde{t}} x_2(t).$$

Por la unicidad de las soluciones se tiene que $x_1(t) = x_2(t)$ en algún intervalo $I_0 = (\tilde{t} - \delta, \tilde{t} + \delta) \subset I$. Luego, $x_1(t) = x_2(t)$ en el intervalo $I^* \cup I_0 \subset I$, con I^* subconjunto propio de I. Pero, lo anterior es una contradicción al hecho que I^* es el intervalo abierto más grande contenido en I en el cual $x_1(t) = x_2(t)$. Por lo tanto, $I^* = I$ y $x_1(t) = x_2(t)$, para todo $t \in I$.

Demostración del Teorema 1.1.2. Ya que el campo v es continuo en K, existe M > 0 tal que tal que $|v(x)| \leq M$, para toda $x \in K$. Sea x(t) la solución al problema de Cauchy (1.3) e $I^+ = [t_0, \beta)$ su dominio de definición derecho, asumamos que $\beta < \infty$ y supongamos que $x(t) \in K$ para toda $t \in I^+$. Se mostrará primeramente que $\lim_{t \to \beta^-} x(t)$ existe.

Si $t_0 < t_1 < t_2 < \beta$, entonces

$$|x(t_2) - x(t_1)| \le \int_{t_1}^{t_2} |v(x(s))| \, \mathrm{ds} \le M \, |t_2 - t_1|.$$

Por lo que, en tanto t_1 y t_2 se aproximan a β por la izquierda, $|x(t_2) - x(t_1)| \to 0$, lo cual implica que $\lim_{t\to\beta^-} x(t)$ existe. Además, si $x^1 = \lim_{t\to\beta^-} x(t)$, se tiene que $x^1 \in K$ por ser K, en particular, cerrado.

Definamos una nueva función $\tilde{x}(t)$ en I^+ por

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & para & t \in I^+ \\ x^1 & para & t = \beta \end{cases}$$

Claramente $\tilde{x}(t)$ es diferenciable en $[t_0, \beta]$, de hecho

$$\widetilde{x}(t) = x^0 + \int_{t_0}^t v(\widetilde{x}(s)) \,\mathrm{d}s$$

lo cual implica que

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{dt}}(\beta) = v(\widetilde{x}(\beta)),$$

es decir, $\tilde{x}(t)$ es una solución al problema de Cauchy (1.3) en [t_0, β]. Como $x^1 \in U$, por el Teorema 1.1.1 se sigue que el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x) \\ x(t) \Big|_{t=t_0} &= x^1 \end{aligned}$$

posee una única solución $\hat{x}(t)$ en algún intervalo $(\beta - \delta, \beta + \delta)$. Por el Lema 1.1.1, $\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$ en $(\beta - \delta, \beta)$ y $\hat{x}(\beta) = \tilde{x}(\beta) = x_1$.

Por lo que, si se define

$$y(t) = \begin{cases} \widetilde{x}(t) & para & t \in [t_0, \beta] \\ \widehat{x}(t) & para & t \in [\beta, \beta + \delta] \end{cases}$$

entonces y(t) es una solución al problema de Cauchy (1.3) en $[t_0, \beta + \delta)$; pero esto es una contradicción al hecho de que I^+ es el dominio de definición derecho del problema de Cauchy (1.3). Por lo tanto, si $\beta < \infty$, existe $t^* \in I^+$ tal que $x(t^*) \notin K$.

De manera análoga se demuestra que el teorema anterior sigue siendo válido si se considera el dominio de definición izquierdo del problema de Cauchy (1.3). De esta última observación y utilizando el teorema que se acaba de demostrar se desprende el siguiente corolario.

Corolario 1.1.1. Si $x(t) \in K$ para toda $t \in I$, entonces x(t) es completo, es decir, $I = (-\infty, \infty)$.

Dependencia de las condiciones iniciales y parámetros. Se ha mostrado que para cada condición inicial existe una única solución al problema de Cauchy. Un aspecto interesante de analizar es la manera en que dicha solución se modifica al variar la condición inicial. El planteamiento anterior, para fines prácticos, es indispensable; ya que, por ejemplo, al momento de modelar algún fenómeno mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, la condición inicial es una observación que se hace del fenómeno en cierto instante de tiempo, la cual posee cierta incertidumbre heredada por los instrumentos de medición utilizados para determinar dicha condición inicial.

Reformulando el problema de Cauchy (1.3), con el fin de observar explícitamente la dependencia con respecto a la condición inicial, se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{x}(t, x^{0}) = v(x(t, x^{0}))$$

$$x(t, x^{0}) \mid_{t=t_{0}} = x^{0}$$
(1.4)

Si se considera ahora el caso en el que el campo vectorial v de (1.3) depende de uno o varios parámetros μ_i , i = 1, ..., m; el sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene es

$$\dot{x} = v(x,\mu) \tag{1.5}$$

donde $\mu \in V \subset \mathbb{R}^m$.

Es importante señalar que el estudio de la dependencia respecto a las condiciones iniciales del sistema (1.4) se puede reducir al estudio de la dependencia respecto a los parámetros tal como se formula en el sistema (1.5) mediante un cambio de variable apropiado [nnña].

La proposición que se enuncia a continuación es una versión ligeramente modificada del Teorema 1.1.1 , en la cual se establece una dependencia suave de la solución con respecto a los parámetros del campo.

Proposición 1.1.2. (Dependencia a los Paramétros). Sea $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un abierto y $v \in \mathfrak{X}(U)$. Entonces para cada $x^0 \in U$ y $\mu^0 \in V$ existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que para toda $p \in B_{\varepsilon}(x^0)$ y $\mu \in B_{\varepsilon}(\mu^0)$, el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x) \\ x(t) \Big|_{t=t_0} &= p \end{aligned}$$

posee una única solución $x(t, p, \mu)$ diferenciable en $W = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B_{\varepsilon}(x^0) \times B_{\varepsilon}(\mu^0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Existe una amplia literatura en donde se puede profundizar en estos tópicos, entre las cuales se recomiendan [3, 7, nnña]. En este texto se ha decidido estudiar únicamente sistemas autónomos debido a que, un sistema *no autónomo*

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{1.6}$$

con $t \in I \subset \mathbb{R}, x \in U \subset \mathbb{R}^n$ y $v(x) \in \mathfrak{X}(I \times U)$, puede ser tratado como un sistema autónomo (1.1) con $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, introduciendo la variable $x_{n+1} = t$ con lo cual $\dot{x}_{n+1} = 1$.

La teoría fundamental para (1.1) y (1.2) no difiere significativamente, ya que es posible obtener resultados análogos bajo hipótesis ligeramente mas débiles para el campo v(t, x), por ejemplo, el *teorema de Conddington-Levinson* [5]. El estudio de sistemas no autónomos puede ser consultado en [6].

1.2. Integrales primeras

El objetivo de este sección es establecer el concepto de integral primera, que es una herramienta importante en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, si se considra el sistema (1.1), en el caso 2-dimensional la existencia de una integral primera implica que el sistema es completamente integrable ya que el espacio de fases queda completamente determinado por los conjuntos de nivel de la integral. Para el caso 3-dimensional, la existencia de integrales primeras implica que no puede haber movimiento caótico [23, 31] debido a que las soluciones permanecen en los conjuntos de nivel de las integrales. Además, este concepto será fundamental para los propósitos de este texto. Se definirá primeramente lo que es la derivada de Lie y el corchete de Lie para campos vectoriales.

Derivada de Lie y corchete de Lie. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Para cada $v \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^{\infty}(U)$, se define la *derivada de Lie* de f a lo largo de v por

$$\mathcal{L}_v f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

Es inmediato de la definición anterior que la derivada de Lie satisface las siguientes condiciones:

- 1. Linealidad: $L_v(f_1 + f_2) = L_v f_1 + L_v f_2$
- 2. Regla de Leibniz: $L_v(f_1f_2) = f_1 \cdot L_v f_2 + f_2 \cdot L_v f_1$

para todo $v \in \mathfrak{X}(U)$ y $f_1, f_2 \in C^{\infty}(U)$.

Por otra parte, para cualesquiera $v, w \in \mathfrak{X}(U)$, *el corchete de Lie* de v y w es el campo vectorial [v, w] en U, cuyas componentes se definen, en términos de la derivada de Lie; por

$$[v,w]_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_v w_i - \mathcal{L}_w v_i , \qquad i = 1, \dots, n.$$

El corchete de Lie posee las siguientes propiedades

- 1. Bilinealidad: $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha [u, w] + \beta [v, w]$ $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha [u, v] + \beta [u, w]$
- 2. Antisimetía: [v, w] = -[w, v]
- 3. Regla de Leibniz: $[v, fw] = L_v f \cdot w + f[v, w]$
- 4. *Identidad de Jacobi*: [[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0

para todo $u, v, w \in \mathfrak{X}(u)$ y $f \in C^{\infty}(U)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si los campos vectoriales v, w conmutan, es decir, [v, w] = [w, v], por la antisimetría del corchete de Lie se sigue que [v, w] = 0.

Integrales primeras. Como se mencionó en la sección anterior, existe una única trayectoria $\gamma = \{ x = x(t) \mid t \in I \}$ del sistema (1.1) que pasa a través de un punto dado x_0 perteneciente al abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, donde I es el máximo intervalo de existencia de x(t). La evolución de una función $F \in C^{\infty}(U)$ a lo largo de la trayectoria γ es definida por la derivada de Lie de F a lo largo del campo vectorial v del sistema (1.1), de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x(t)) = (\mathrm{L}_v F)(x(t))$$

Definición 1.2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una función $F \in C^{\infty}(U)$ es una **integral** primera del sistema (1.1), si es constante a lo largo de cada trayectoria $\gamma = \{x = x(t)\},$ es decir,

$$F(x(t)) = constante$$

para todo $t \in I$.

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es el siguiente criterio.

Criterio 1.2.1. Una función $F \in C^{\infty}(U)$ es integral primera del sistema (1.1) si, y sólo si,

$$\mathbf{L}_{v}F=0.$$

Las integrales primeras F_1, \ldots, F_k del sistema (1.1), con k < n, se dicen ser *independientes* si sus respectivos gradientes, que denotaremos por $\frac{\partial F_i}{\partial x}$, $i = 1, \ldots, k$; son linealmente independientes en cada punto de U. En este caso, la trayectoria γ que pasa por el punto $x_0 \in S_{c_1,\ldots,c_k}$, pertenece al conjunto de nivel S_{c_1,\ldots,c_k} , donde

$$S_{c_1,\ldots,c_k} \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in U \mid F_i(x) = c_i, i = 1,\ldots,k; \text{ donde } c_1,\ldots,c_k; \text{ son constantes} \}.$$

1.3. Lema de Morse

Esta breve sección estará dedicada en enunciar y demostrar el *Lema de Morse*, lo cual es importante para los propósitos de este texto, pues será de utilidad cuando estudiemos los métodos de energía en el Capítulo 4.

Antes de enunciar el Lema de Morse, recordemos que el gradiente de cualquier función $H \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, es definido por

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

El Hessiano o matriz Hessiana de H, que se denotará por D_{xx}^2 , es la matriz $n \times n$ definida por

$$\mathbf{D}_{xx}^2 H = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n}.$$

Notemos que en virtud del Teorema de Clairaut, también conocido como Teorema de Schwartz, D_{xx}^2 resulta ser una matriz simétrica.

Teorema 1.3.1. *(Lema de Morse).* Sea $H \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, tal que

- 1. H(0) = 0.2. $\frac{\partial H}{\partial x}(0) = 0.$
- 3. det($D_{xx}^2 H(0)$) $\neq 0$.

Entonces, existen abiertos $U, W \subset \mathbb{R}^n$, que contienen al cero y un cambio de coordenadas

 $W \ni y = (y_1, \dots, y_n) \quad \longmapsto \quad x = x(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y)) \in U,$

tal que

- 1. x(0) = 0
- 2. $H(x(y)) = y_1^2 + \dots + y_s^2 y_{s+1}^2 \dots y_n^2$

donde s denota el índice de inercia de la matriz $D^2_{xx}H(0)$.

Demostración. En primer lugar, notemos que

$$H(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}H(tx)}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial H(tx)}{\partial x}, x \right\rangle \,\mathrm{d}t \tag{1.7}$$

por lo que, haciendo $f = \left\langle \frac{\partial H(tx)}{\partial x}, x \right\rangle$ y g = t - 1, y sustituyendo en (1.7) tenemos que

$$H(x) = \int_0^1 f \, \mathrm{d}g$$

Luego, usando integración por partes:

$$H(x) = \left\langle \frac{\partial H(tx)}{\partial x}, x \right\rangle (t-1) \Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} (t-1) df$$
$$= -\int_{0}^{1} (t-1) df.$$
(1.8)

Ahora, como

$$df = \frac{df}{dt} dt = \left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H(t)x}{\partial x} \right], x \right\rangle dt = \left\langle \left[D_{xx}^2 H(tx) \right] x, x \right\rangle,$$

de (1.8) se sigue que

$$H(x) = \langle B(x) x, x \rangle \tag{1.9}$$

donde $B(x) = \int_0^1 (1-t) D_{xx}^2 H(tx) dt$. Notemos que B(x) cumple las siguientes propiedades

i) $B(0) = \frac{1}{2} D_{xx}^2 H(0)$ *ii*) $\det(B(0)) \neq 0$ *iii*) $B(x)^{\top} = B(x)$

En segundo lugar, mostraremos que existe un abierto $\ U \subset \mathbb{R}^3\,$ que contiene al cero y una función suave

$$\begin{array}{rccc} R: \ U & \longrightarrow & \operatorname{GL}(n) \\ x & \longmapsto & R(x) \ , \end{array}$$

tal que

- *i*) $B(x) = R(x)^{\top}B(0) R(x)$
- *ii*) R(0) = I.

Propongamos $R(x) = B^{-1}(0) S(x)$, con $S^{\top}(x) = S(x)$. Notemos que

$$B(x) = S(x) B^{-1}(0) S(x)$$

Para determinar S(x), definamos $F: \mathbb{R}^n \times \operatorname{Sym}_n \longrightarrow \operatorname{Sym}_n$, por

$$F(x,S) \stackrel{\text{def}}{=} B(x) - S \ B^{-1}(0) \ S$$

y sean $x^0 = 0$ y $S^0 = B(0)$. Notemos que $F(x^0, S^0) = 0$ y mostraremos que

$$d_{x^0,S^0}F: \mathbb{R}^n \times \operatorname{Sym}_n \longrightarrow \operatorname{Sym}_n$$

es sobreyectiva. Para esto, se
a $\ (0,v)\in \mathbb{R}^n\times \operatorname{Sym}_n,\ \text{luego}$

y por tanto, usando el *Teorema de la Función Implícita* se sigue que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto x^0 , tal que F(x, S(x)) = 0 para toda $x \in U$.

En tercer lugar, para $x \in U$ definamos $z = z(x) \stackrel{\text{def}}{=} R(x) x$. Notemos que z(0) = 0 y que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0) = \frac{\partial \left[R(x) x \right]}{\partial x} (0) = R(0) = |\mathbf{I},$$

y por el Teorema de la Función Inversa, se sigue que existe $z \mapsto x = x(z)$.

Finalmente, demostraremos que si z = R(x)x (lo cual es necesario y suficiente, para que z = R(x(z)) x(z)), entonces

$$H(x) = \langle B(0) z, z \rangle$$
.

Por ser $B(x) = R^{\top}(x) B(0) R(x)$, de (1.9) se tiene que

$$H(x) = \left\langle R^{\top}(x) B(0) R(x) x, x \right\rangle$$
$$= \left\langle B(0) R(x) x, R(x) x \right\rangle,$$

luego

$$\begin{aligned} H(x(z)) &= \langle B(0) \ R(x(z)) \ x(z), \ R(x(z)) \ x(z) \rangle \\ &= \langle B(0) \ z, \ z \rangle \end{aligned}$$

Sea y = L z un cambio de coordenadas lineal, con L no singular, entonces

$$H(x(y)) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1} - \dots - y_n^2$$

donde $x(y) = x(z) |_{z = L^{-1} y}$.

La relevancia del Lema de Morse como se puede apreciar en el teorema anterior es que permite dar una representación muy sencilla de cualquier función H alrededor de sus puntos críticos.

Capítulo 2

Método del Factor Integrante

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = v(x) \tag{2.1}$$

con $v \in \mathfrak{X}(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

El problema de encontrar condiciones para que el sistema anterior posea una integral primera es muy importante, ya que como se mencionó anteriormente, el que un sistema tenga una integral primera proporciona información valiosa acerca del comportamiento del mismo. Se han desarrollado diversos métodos que dan respuesta al problema, entre los cuales se encuentra el *método del factor integrante* que será el procedimiento que desarrollaremos y utilizaremos en este capítulo con el fin encontrar integrales primeras para el sistema Lotka-Volterra con coeficientes constantes.

El sistema Lotka-Volterra ha sido objeto de estudio desde el siglo pasado ya que, por ejemplo, la interacción de dos especies en un ecosistema, ecuaciones hidrodinámicas, reacciones químicas autocatalíticas, el flujo económico [23, 24, 25, 26], etcétera, son modelados por sistemas del tipo Lotka-Volterra. La motivación para encontrar integrales primeras del sistema Lotka-Volterra (o de cualquier sistema) es estudiar la estabilidad en sus puntos de equilibrio aplicando los llamados *métodos de energía*, cuyo análisis y desarrollo, que abordaremos en el Capítulo 4.

Ahora bien, en el caso 2-dimensional, el método del factor integrante consiste en encontrar una función suave $R: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{L}_v R + R \operatorname{div}(v) = 0.$$

Para el caso 3-dimensional, radica en encontrar una función vectorial $a: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$[v, a] + a \operatorname{div}(v) - v \operatorname{div}(a) = 0.$$

No está de más recodar que la divergencia, div (), es un operador diferencial de primer orden definido por

$$\operatorname{div}\left(v\right) \stackrel{\operatorname{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{i}}$$

para toda $v \in \mathfrak{X}(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

Si bien es cierto que las ecuaciones que hay que resolver en los casos dos y tres dimensional se traducen en solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, el cual puede ser un problema aún más complicado, este método nos permite reducir la búsqueda de integrales primeras a la solubilidad de un conjunto de ecuaciones algebraicas con dos tipos de parámetros involucrados en el problema: los parámetros del sistema y los parámetros del factor integrante propuesto..

Una vez demostrado el método del factor integrante, procederemos en cada caso a aplicarlo en un modelo generalizado del sistema Lotka-Volterra (que incluye términos constantes los cuales pueden interpretarse como un tipo de "recolección de" o "aportación de" al sistema por parte de un agente externo) con el fin de imponer condiciones a los parámetros involucrados de manera que exista una integral primera para el sistema.

2.1. Caso \mathbb{R}^2

En esta sección nos dedicaremos a demostrar el método del factor integrante para el caso 2-dimensional. Para ello nos auxiliaremos de herramientas de la teoría de formas diferenciales y de cálculo vectorial. El Teorema de Stokes en su forma diferencial (ver, por ejemplo, [12, p. 94], será fundamental en la demostración. Si se desea, se recomienda [11, 12] para una revisión previa de estos tópicos.

Se denomina factor integrante del sistema (2.1) a una función suave $R: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que

$$d(R\alpha) = 0 \tag{2.2}$$

donde $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} v_2 dx_1 - v_1 dx_2$, es la 1-forma asociada al campo v del sistema (2.1). Se puede demostrar fácilmente que la propiedad (2.2) es equivalente a pedir que R sea solución de la ecuación $L_v R + R \operatorname{div}(v) = 0$.

Por otra parte, si resultase que $R\alpha$ fuese exacta en U, es decir, $R\alpha = dK$ para alguna $K \in C^{\infty}(U)$, entonces K sería una integral primera del sistema (2.1). Luego, la cuestión es saber qué condiciones le debemos pedir al abierto U para que la 1-forma $R\alpha$ resulte ser exacta, ya que de la teoría de formas diferenciales es bien sabido que toda forma diferencial es exacta de manera local.

Utilizando todo lo anterior desprendemos el siguiente criterio que proporciona una herramienta para poder encontrar integrales primeras del sistema (2.1).

Criterio 2.1.1. (Método del Factor Integrante). Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo y simplemente conexo y $v \in \mathfrak{X}(U)$. Si existe $R \in C^{\infty}(U)$, tal que

$$\mathcal{L}_v R + R \operatorname{div}(v) = 0, \qquad (2.3)$$

entonces el sistema (2.1) admite una integral primera $K \in C^{\infty}(U)$, de la forma

$$K(x) = \int_{\Gamma_x} \alpha \tag{2.4}$$

donde α es la 1-forma definida como $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} R \cdot (v_2 dx_1 - v_1 dx_2) y$ donde

$$\Gamma_x = \{ \gamma(\tau) : [0,1] \to U \mid \gamma(0) = x^0, \gamma(1) = x \}$$

es la curva que conecta a los puntos $x^0, x \in U$.

Demostración. Primero demostraremos que la integral primera está bien definida, esto es, que no depende de la elección de la curva. Sea

$$\widetilde{\Gamma}_x = \left\{ \ \widetilde{\gamma}(\tau) : \ [\ 0,1 \] \to U \ | \ \widetilde{\gamma}(0) = x^0, \ \widetilde{\gamma}(1) = x \ \right\}$$

otra curva que conecte a los puntos $x^0, x \in U$, tal como se muestra en la Figura 2.1.



Figura 2.1: Curvas Γ_x y $\widetilde{\Gamma}_x$

Ahora, por ser U simplemente conexo, por el Teorema de Stokes, para la 1-forma $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} R \cdot (v_2 dx_1 - v_1 dx_2)$, se tiene que

$$\int_{\Gamma_x} \alpha - \int_{\widetilde{\Gamma}_x} \alpha = \int_{\sigma_x} \alpha = \int_{\mathcal{D}} d\alpha$$
(2.5)

donde $\sigma_x = \widetilde{\Gamma}_x^{-1} \circ \Gamma_x$. Aqui $\widetilde{\Gamma}_x^{-1}$ denota que la curva es recorrida en sentido contrario, es decir, va del punto x al punto x^0 .

Calculando la diferencial de α , obtenemos la siguiente igualdad

$$d\alpha = -(L_v R + R \operatorname{div}(v)) dx_1 \wedge dx_2$$



Figura 2.2: Recta Γ_x

Luego, por la hipótesis (2.3) del teorema se sigue que $d\alpha = 0$, es decir, α es cerrada y de (2.5) se concluye que

$$\int_{\Gamma_x} \alpha = \int_{\widetilde{\Gamma}_x} \alpha.$$

Con lo anterior demostramos que la integral primera no depende de la elección de curva que elijamos.

A continuación, demostraremos que $dK = \alpha$, esto es, que la 1-forma α es exacta; lo cual nos ayudará a probar que K es una integral primera del sistema (2.1). Por la independencia en la elección de la curva, para simplificar los cálculos, tomemos $\Gamma_x =$ $\{ \gamma(\tau) : [0,1] \rightarrow U \mid \gamma = \tau x \}$, es decir, Γ_x es la recta que conecta a $x^0 = 0$ con xcomo se muestra en la Figura 2.2.

Por ser α cerrada, realizando un breve cálculo se obtienen las siguientes igualdades que nos ayudarán en esta demostración:

$$\frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_1}$$
(2.6)

$$\frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_2} .$$
(2.7)

Ahora, calcularemos la diferencial de K(x):

$$dK = d \int_{\Gamma_x} \alpha = d \int_0^1 \left[\alpha_1(\tau x) x_1 + \alpha_2(\tau x) x_2 \right] d\tau$$

$$\stackrel{1}{=} \left[\int_0^1 \left[\tau \left(x_1 \frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_1} \right) + \alpha_1(\tau x) \right] d\tau \right] dx_1 + \left[\int_0^1 \left[\tau \left(x_1 \frac{\partial \alpha_1(\tau x)}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \alpha_2(\tau x)}{\partial x_1} \right) + \alpha_2(\tau x) \right] d\tau \right] dx_2$$

$$= \left[\int_0^1 \left[\tau \frac{d \alpha_1(\tau x)}{d \tau} + \alpha_1(\tau x) \right] d\tau \right] dx_1 + \left[\int_0^1 \left[\tau \frac{d \alpha_2(\tau x)}{d \tau} + \alpha_2(\tau x) \right] d\tau \right] dx_2$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{d \alpha_1(\tau x)}{d \tau} + \alpha_1(\tau x) \right] d\tau d\tau d\tau$$

Por lo tanto, con el cáculo anterior demostramos que $dK = \alpha$. Por último, demostraremos que K es efectivamente integral primera del sistema (2.1). Observemos que, como $dK = \alpha$, entonces

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = Rv_2 \qquad y \qquad \frac{\partial K}{\partial x_2} = -Rv_1. \tag{2.8}$$

Puesto que la derivade de Lie de K a lo largo de v es

$$\mathcal{L}_{v}K = v_{1}\frac{\partial K}{\partial x_{1}} + v_{2}\frac{\partial K}{\partial x_{2}}$$

de (2.8) se sigue que $L_v K = 0$. Por lo tanto K es integral primera del sistema (2.1).

El criterio anterior nos dice que basta encontrar una función suave R (denomidado factor integrante) que satisfaga la ecuación (2.3) e integrar la 1-forma α , definida en términos de R y del campo v, a lo largo de cualquier curva contenida en U para encontrar una integral primera del sistema (2.1), la cual queda determinada por el campo v del sistema y por la función R.

¹Para obtener esta igualdad utilizamos (2.6) y (2.7).

2.1.1. Aplicación al sistema Lotka-Volterra en \mathbb{R}^2

A continuación, aplicaremos el método del factor integrante al sistema Lotka-Volterra 2-dimensional con términos constantes con el fin de encontrar una integral primera de este sistema. Ya que el sistema contará con parámetros, nuestro propósito será determinar condiciones para éstos que garanticen la existencia de una integral primera. Para ello, estableceremos las condiciones que nos permitirán utilizar el Criterio (2.1.1) y fijaremos la propuesta para la función R. Posteriormente presentaremos las integrales primeras obtenidas.

Consideremos el sistema Lotka-Volterra 2-dimensional con términos constantes

$$\dot{x}_1 = v_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + e_1,$$

$$\dot{x}_2 = v_2 = x_2(b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + e_2,$$
(2.9)

donde $b_i, a_{ij}, i, j = 1, 2$; son parámteros arbitrarios y e_1, e_2 son términos constantes.

Supondremos al abierto U del Criterio 2.1.1 como todo \mathbb{R}^2 . Definimos la 1-forma $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} R \cdot (v_2 dx_1 - v_1 dx_2)$, donde v_1, v_2 son las componentes del campo que determina al sistema (2.9) y $R \in C^{\infty}(U)$ es el factor integrante por determinar. La curva Γ_x a lo largo de la cual integraremos la 1-forma α , será $\Gamma_x = \Gamma_{x_2} \circ \Gamma_{x_1}$, donde

$$\Gamma_{x_1} = \{ \gamma(\tau) : [0,1] \to U \mid \gamma(\tau) = (\tau x_1, 0) \}$$

у

$$\Gamma_{x_2} = \{ \widetilde{\gamma}(\tau) : [0,1] \to U \mid \widetilde{\gamma}(\tau) = (x_1, \tau x_2) \}$$

esto es, para cualquier $x = (x_1, x_2) \in U$, la curva Γ_x conecta al punto $x^0 = 0$ con x, por medio de la recta Γ_{x_1} que une a x^0 con el punto $(x_1, 0)$ y la recta Γ_{x_2} que une al punto $(x_1, 0)$ con x, tal como se muesta en la Figura 2.3.

Utilizando la igualdad (2.4) y realizando los cálculos correspondientes, obtenemos que la integral primera es

$$K(x) = \int R(x) v_1(x) dx_2 + h(x_1)$$
(2.10)

donde $h = h(x_1)$ se determina por medio de la condición $\frac{\partial K}{\partial x_1} = -R v_2.$

La fórmula anterior es la que utilizaremos en esta sección para determinar la forma explícita de cada integral primera. También, es importante mencionar que para simplificar los cáculos en torno a la ecuación (2.3), utilizaremos la siguiente forma equivalente

$$\mathcal{L}_{v}R + \operatorname{div}\left(v\right) = 0,\tag{2.11}$$

donde $\widetilde{R} = \ln |R|$.



Figura 2.3: Rectas Γ_{x_1} y Γ_{x_2}

La propuesta que estableceremos para la función R es que sea separable, i.e., $R(x) = R_1(x_1)R_2(x_2)$, donde R_1, R_2 son funciones suaves. Lo que nos interesa saber primeramente es si esta propuesta es factible, es decir, si las ecuaciones que resultan de sustiuir R en (2.3) admiten solución, de ser así lo siguiente es saber la forma de las funciones R_1 y R_2 . Con el siguiente lema damos respuesta a esta cuestión y también exhibimos el sistema de ecuaciones algebraicas que nos proporcionará las condiciones para la existencia de una integral primera.

Proposición 2.1.1. Sean v_1, v_2 las componentes del campo vectorial (2.9). La condición (2.3) determina que la forma de las funciones R_1 y R_2 es

$$R_1(x_1) = x_1^{\frac{\beta}{a_{12}}} e^{\frac{\mu x_1}{a_{12}}} , \qquad R_2(x_2) = x_2^{\frac{\gamma}{a_{21}}} e^{\frac{-\mu x_2}{a_{21}}}$$
(2.12)

donde, μ, β y γ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones,

$$0 = \frac{\mu a_{11}}{a_{12}} = \frac{\mu a_{22}}{a_{21}}$$

$$0 = \frac{\beta e_1}{a_{12}} = \frac{\gamma e_2}{a_{21}}$$

$$0 = \gamma + \frac{\mu b_1}{a_{12}} + \frac{\beta a_{11}}{a_{12}} + 2a_{11} + a_{21}$$

$$0 = \beta - \frac{\mu b_2}{a_{21}} + \frac{\gamma a_{22}}{a_{21}} + 2a_{22} + a_{12}$$

$$0 = \frac{\mu e_1}{a_{12}} + \frac{\beta b_1}{a_{12}} - \frac{\mu e_2}{a_{21}} + \frac{\gamma b_2}{a_{21}} + b_1 + b_2$$

$$(2.13)$$

Demostración. Sustituyendo R en (2.3) y simplificando obtenemos

$$\frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x_1} a_{12}x_1x_2 + \frac{1}{R_2} \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}x_2} a_{21}x_1x_2 + F_1(x_1) + F_2(x_2) = 0$$
(2.14)

donde

$$F_1(x_1) = \frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x_1} \left(b_1 x_1 + a_{11} x_1^2 + e_1 \right) + b_1 + 2a_{11} x_1 + a_{21} x_1$$

у

$$F_2(x_2) = \frac{1}{R_2} \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}x_2} \left(b_2 x_2 + a_{22} x_2^2 + e_2 \right) + b_2 + 2a_{22} x_2 + a_{12} x_2$$

Como se puede observar hemos obtenido una ecuación en términos de $R_1 ext{ y } R_2 ext{ y de dos funciones } F_1, F_2$ que dependen sólamente de $x_1 ext{ y } x_2$ respectivamente. Recordemos que las incógnitas son las funciones $R_1 ext{ y } R_2$, por ello procederemos a suprimir $F_1 ext{ y } F_2$ en (2.14) aplicando el operador $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ en ambos lados de la ecuación, obteniendo asi que

$$a_{12} \left[x_1 \frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d}^2 R_1}{\mathrm{d} x_1^2} - x_1 \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\mathrm{d} R_1}{\mathrm{d} x_1} \right)^2 + \frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d} R_1}{\mathrm{d} x_1} \right] + \\ a_{21} \left[x_2 \frac{1}{R_2} \frac{\mathrm{d}^2 R_2}{\mathrm{d} x_2^2} - x_2 \frac{1}{R_2^2} \left(\frac{\mathrm{d} R_2}{\mathrm{d} x_2} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \frac{\mathrm{d} R_2}{\mathrm{d} x_2} \right] = 0$$

Notemos que cada miembro del lado derecho de la ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Además, el primer miembro tiene como variable independiente

únicamente a x_1 y el segundo miembro únicamente a x_2 . Por este motivo, la única posbilidad que existe para que la igualdad se cumpla es que

$$a_{12}\left[x_1 \ \frac{1}{R_1} \ \frac{\mathrm{d}^2 R_1}{\mathrm{d} x_1^2} - x_1 \ \frac{1}{R_1^2} \ \left(\frac{\mathrm{d} R_1}{\mathrm{d} x_1}\right)^2 + \frac{1}{R_1} \ \frac{\mathrm{d} R_1}{\mathrm{d} x_1}\right] = \mu \tag{2.15}$$

$$a_{21}\left[x_2 \ \frac{1}{R_2} \ \frac{\mathrm{d}^2 R_2}{\mathrm{d} x_2^2} - x_2 \ \frac{1}{R_2^2} \ \left(\frac{\mathrm{d} R_2}{\mathrm{d} x_2}\right)^2 + \frac{1}{R_2} \ \frac{\mathrm{d} R_2}{\mathrm{d} x_2}\right] = -\mu \tag{2.16}$$

Haciendo los cálculos correspondientes, los cuales se pueden consultar en el apéndice B, de (2.15) se obtiene que $R_1(x_1) = x_1^{\frac{\beta}{a_{12}}} e^{\frac{\mu x_1}{a_{12}}}$ y de (2.16) que $R_2(x_2) = x_2^{\frac{\gamma}{a_{21}}} e^{\frac{-\mu x_2}{a_{21}}}$.

Sustituyendo R en (2.11), obtenemos que

$$0 = \left(\gamma + \frac{\mu b_1}{a_{12}} + \frac{\beta a_{11}}{a_{12}} + 2a_{11} + a_{21}\right) x_1 + \left(\beta - \frac{\mu b_2}{a_{21}} + \frac{\gamma a_{22}}{a_{21}} + 2a_{22} + a_{12}\right) x_2$$
$$\left(\frac{\mu a_{11}}{a_{12}}\right) x_1^2 + \left(-\frac{\mu a_{22}}{a_{21}}\right) x_2^2 + \left(\frac{\beta e_1}{a_{12}}\right) \frac{1}{x_1} + \left(\frac{\gamma e_2}{a_{21}}\right) \frac{1}{x_2} + \frac{\mu e_1}{a_{12}} + \frac{\beta b_1}{a_{12}} - \frac{\mu e_2}{a_{21}} + \frac{\gamma b_2}{a_{21}} + b_1 + b_2$$

Es inmediato que, para que la igualdad anterior se cumpla, cada uno de los coeficientes de los términos en los que están involucradas las variables x_1 y x_2 tienen que ser cero y de la misma manera la suma de los términos independientes. Es así como se consigue el sistema (2.13).

Como se puede apreciar en la última parte de la demostración, para obtener el sistema de ecuaciones que menciona la Proposición 2.1.1 se sustituyó R en la ecuación (2.11), esto implica que, obtener soluciones al sistema (2.13) nos da condiciones para resolver la ecuación (2.3) las que a su vez servirán para encontrar una integral primera del sistema Lotka-Voterra. Por ello, centraremos nuestro estudio en torno al sistema (2.15). Dividiremos este estudio en dos partes, la primer parte consistirá en el análisis fijando $\mu = 0$ y la segunda fijando $\mu \neq 0$. Se hará asi pues como podemos observar en la Proposición 2.1.1 el sistema (2.13) posee más ecuaciones que incógnitas, por lo que hay que fijar ciertos parámetros como incógnitas y resolver el sistema en base a éstos.

Para el caso $\mu = 0$ introduciremos las variables $l_1 = \frac{\beta}{a_{12}} + 1$ y $l_2 = \frac{\gamma}{a_{21}} + 1$, este cambio nos permite transformar el sistema (2.13) en el siguiente siguiente sistema de ecuaciones equivalente, que va a ser el que utilizaremos en este caso por ser más operable.

$$e_1 l_1 = e_1$$
 (2.17)

$$e_2 l_2 = e_2$$
 (2.18)

- $a_{11}l_1 + a_{21}l_2 = -a_{11} \tag{2.19}$
- $a_{12}l_1 + a_{22}l_2 = -a_{22} \tag{2.20}$
- $b_1 l_1 + b_2 l_2 = 0 \tag{2.21}$

Caso 1 $(\mu = 0, e_1, e_2 \neq 0)$

Si las constantes e_1 y e_2 no son cero, entonces de (2.17) y (2.18) se sigue que $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$, lo cual implica que $\frac{\beta}{a_{12}} = \frac{\gamma}{a_{21}} = 0$ y por el la Proposición 2.1.1 se tiene que $R \equiv 1$.

Ahora, al sustituir l_1 y l_2 en (2.19), (2.20) y (2.21) obtenemos que

$$b_1 + b_2 = 0,$$
 $2a_{11} + a_{21} = 0$ y $a_{12} + 2a_{22} = 0,$

y utilizando (2.10) probamos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. El sistema Lotka-Volterra con términos constantes $e_1 y e_2$ distintos de cero,

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 - 2a_{22}x_2) + e_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-b_1 - 2a_{11}x_1 + a_{22}x_2) + e_2$$

admite una integral de la forma

$$K(x) = -e_2x_1 + e_1x_2 + b_1x_1x_2 - a_{22}x_1x_2^2 + a_{11}x_1^2x_2.$$

Caso 2 $(\mu = 0, e_1 \neq 0, e_2 = 0)$

Si $e_1 \neq 0, e_2 = 0$ de (2.17) y (2.18) se sigue que $l_1 = 1$ y de ésto que $\frac{\beta}{a_{12}} = 0$ con lo cual, por la Proposición 2.1.1 se tiene que $R = x_2^{\frac{\gamma}{a_{21}}}$. $l_2 \neq 0$ es un parámetro libre que habrá que determinar. Notemos que el sistema de ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) puede ser escrito de la forma

$$A_1 l_2 = r$$

donde
$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ b_2 \end{bmatrix}$$
 y $r = (-1) \begin{bmatrix} 2a_{11} \\ a_{12} + a_{22} \\ b_1 \end{bmatrix}$ es fijo.

Auxiliándonos de la representación anterior, analizaremos las condiciones para los parámetros cuando la matriz A_1 tiene rango máximo, ya que si rank $(A_1) = 0$, el sistema (2.9) se vuelve trivial con $v_2 \equiv 0$, cuya integral primera es $K = K(x_2)$.

Como rank $(A_1) = 1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_{21} \neq 0$, con lo cual $l_2 = -\frac{2a_{11}}{a_{21}}$; ya que hemos supuesto que $l_2 \neq 0$ se tiene que $a_{11} \neq 0$ y por tanto las condiciones de solubilidad para el sistema anterior inducido por la matriz A_1 son

$$\frac{2a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a_{12} - a_{22} = 0 \quad y \quad 2b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0.$$

Con las condiciones anteriores y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.3. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$,

$$\dot{x}_1 = x_1 \left(\frac{2a_{11}b_2}{a_{21}} + a_{11}x_1 + \left(\frac{2a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a_{22} \right) x_2 \right) + e_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2 (b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = x_2^{\frac{-2a_{11}}{a_{21}}} \left(-b_2 x_1 - \frac{a_{21}}{2} x_1^2 - a_{22} x_1 x_2 - \frac{a_{21} e_1}{2a_{11}} \right)$$

bajo la condición $a_{11}a_{21} \neq 0$.

Ahora, para el caso en que $l_2 = 0$, podemos concluir que $a_{11} = 0$ y las condiciones de solubilidad encontradas lineas atrás se convierten en $a_{12} + a_{22} = 0$ y $b_1 = 0$. Con las condiciones anteriores y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$,

$$\dot{x}_1 = -a_{22}x_1x_2 + e_1 \dot{x}_2 = x_2(b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = -b_2 x_1 - \frac{a_{21}}{2} x_1^2 - a_{22} x_1 x_2 + e_1 \ln|x_2|$$

bajo la condición $a_{21} \neq 0$.

Caso 3 $(\mu = 0, e_1 = e_2 = 0)$

Si $e_1 = e_2 = 0$, entonces las ecuaciones (2.17) y (2.18) se vuelven triviales. Notemos que el sistema de ecuaciones restantes (2.19), (2.20) y (2.21) puede ser escrito como

 $A_2 l = s$

donde
$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$
, $l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ y $s = \begin{bmatrix} -a_{11} \\ -a_{22} \\ 0 \end{bmatrix}$ es fijo.

Si la matriz A_2 tiene rango máximo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la primera y la segunda fila de A_2 son linealmente independientes. Estas dos filas forman una matriz $A_{2\times 2}$ cuyo determinante es distinto de cero, es decir, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; luego por la regla de Cramer

$$l_1 = \frac{a_{22}(a_{21} - a_{11})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad y \qquad l_2 = \frac{a_{11}(a_{12} - a_{22})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

y por tanto la condición de solubilidad para el sistema anterior inducido por la matriz A_2 es $b_1a_{22}(a_{21} - a_{11}) + b_2a_{11}(a_{12} - a_{22}) = 0$. Suponiendo que $l_1, l_2 \neq 0$, con las condiciones anteriores y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.5. El sistema Lotka-Volterra,

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2)$$
$$\dot{x}_2 = x_2 \left(-\frac{b_1l_1}{l_2} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \right)$$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \left(\frac{b_1}{l_2} + \frac{a_{11}}{l_2} x_1 - \frac{a_{22}}{l_1} x_2 \right)$$

donde $l_1 = \frac{a_{22}(a_{21} - a_{11})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ y $l_2 = \frac{a_{11}(a_{12} - a_{22})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, bajo las siguientes condiciones $l_1, l_2 \neq 0$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Supongamos ahora que $l_1 = 0, l_2 \neq 0$ (el tratamiento para $l_1 \neq 0, l_2 = 0$ es análogo). El que l_1 sea igual a cero implica que $a_{22} = 0$ ó $a_{11} = a_{21}$.

Si $a_{22} = 0$, entonces $l_2 = -\frac{a_{11}}{a_{21}}$, el determinante de $\widetilde{A}_{2\times 2}$ es $-a_{12}a_{21} \neq 0$ y además las condiciones de solubilidad para el sistema inducido por la matriz A_2 consisten en que $b_2 = 0$ y $a_{11} \neq a_{21}$, con las condiciónes anteriores y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.6. El sistema Lotka-Volterra,

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2)$$

 $\dot{x}_2 = a_{21}x_1x_2$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = x_2^{-\frac{a_{11}}{a_{21}}} \left(-\frac{b_1 a_{21}}{a_{11}} - a_{21} x_1 + \frac{a_{12} a_{21}}{a_{21} - a_{11}} x_2 \right)$$

bajo las siguientes condiciones

$$a_{11}a_{12}a_{21} \neq 0 \qquad y \qquad a_{11} \neq a_{21}$$

Si $a_{11} = a_{21}$, entonces el determinante de la matriz $\widetilde{A}_{2\times 2}$ es $a_{11}(a_{22} - a_{12}) \neq 0$, $l_2 = -1$ y la condición de solubilidad para el sistema inducido por la matriz A_2 es $b_2 = 0$. Con las condiciónes anteriores y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.7. El sistema Lotka-Volterra,

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \dot{x}_2 = x_2(a_{11}x_1 + a_{22}x_2)$$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = -a_{22}\ln|x_1| + a_{12}\ln|x_2| - a_{11}\frac{x_1}{x_2} - \frac{b_1}{x_2}.$$

bajo la condición $a_{11}(a_{12} - a_{22}) \neq 0$.

Ahora, si $l_1 = l_2 = 0$, se sigue entonces que $a_{11} = a_{22} = 0$. No se puede concluir que $a_{21} = a_{11}$ y $a_{12} = a_{22}$, porque de ser así se tendría que el determinante de la matriz $\widetilde{A}_{2\times 2}$ es igual a cero, lo cual estamos suponiendo no es así. Entonces, con la condición $a_{11} = a_{22} = 0$ y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.8. El sistema Lotka-Volterra,

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{12}x_2)$$

 $\dot{x}_2 = x_2(b_2 + a_{21}x_1)$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = -b_2 \ln |x_1| - a_{21}x_1 + b_1 \ln |x_2| + a_{12}x_2.$$

bajo la condición $a_{12}a_{21} \neq 0$.

Finalmente, si la matriz A_2 tiene rango uno (excluimos el caso trivial en el cual algún vector columna de la matriz A_2 es cero) podemos asumir que

$$(a_{11}, a_{12}, b_1)^{\mathrm{T}} = \lambda \ (a_{21}, a_{22}, b_2)^{\mathrm{T}}$$

para alguna $\lambda \neq 0$. Con la condición anterior y utilizando (2.10) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.9. El sistema Lotka-Volterra,

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \dot{x}_2 = \frac{x_2}{\lambda}(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2)$$

Admite una integral de la forma

$$K(x) = x_1 x_2^{-\lambda}$$

Caso 4 $(\mu \neq 0)$

En este caso, del sistema de ecuaciones (2.13) se sigue inmediatamente que $a_{11} = 0$ y $a_{22} = 0$. Depués de algunas manipulaciones algebraicas en las últimas tres ecuaciones del sistema obtiene

$$(\beta + a_{12}) \ b_1 a_{21} + (\gamma + a_{21}) \ b_2 a_{12} = \mu \ (e_2 a_{12} - e_1 a_{21}) = 0$$

y por ser μ distinto de cero se sigue $(e_2a_{12} - e_1a_{21}) = 0$. Finalmente, la segunda ecuación del sistema (2.13) nos arroja tres subcasos de estudio

(a) $\gamma = \beta = 0$ (b) $\gamma \neq 0, \beta = 0$ (c) $\gamma, \beta \neq 0$

El subcaso $\gamma = 0, \beta \neq 0$ es análogo a (b). Notemos que las condiciones (b) y (c) implican que $e_1 = e_2 = 0$. Estos subcasos por tanto ya están discutidos y haciendo los cálculos correspondientes con (2.10) se demuestra que las integrales primeras obtenidas son equivalentes a la integral primera de la Proposición 2.1.8.

Notemos que el subcaso (a) proporciona la condición $b_1 + b_2 = 0$ y $a_{12}a_{21} \neq 0$. Con las condiciones anteriores y utilizando (2.10) la siguiente proposición.
Proposición 2.1.10. El sistema Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = x_1(-b_2 + a_{12}x_2) + e_1$$

 $\dot{x}_2 = x_2(b_2 + a_{21}x_1) + \frac{e_1a_{21}}{a_{12}}$

adminte una integral primera de la forma

$$K(x) = (e_1 + a_{12}x_1x_2) e^{\frac{a_{21}x_1 - a_{12}x_2}{b_2}}$$

bajo la condición $a_{12}a_{21}b_2 \neq 0$.

2.2. Caso \mathbb{R}^3

En esta sección nos dedicaremos a la demostración del método del factor integrante para el caso 3-dimensional. Al igual que en la sección anterior, nos auxiliaremos de herramientas de la teoría de formas diferenciales y de cálculo vectorial. Nuevamente el Teorema de Stokes en su forma diferencial (ver [12, p. 94], será fundamental en la demostración. Analizaremos previamente conceptos de la teoría de formas diferenciales que nos serán de gran utilidad para la demostración. Reiteramos la invitación a consultar [11, 12] para una revisión previa de estos temas.

De la teoría de formas diferenciales es bien sabido que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un isomorfismo que a cada campo vectorial suave definido en un abierto de \mathbb{R}^3 le hace corresponder una k-forma diferencial definida en el mismo abierto y recíprocamente. En base a lo anterior, definimos los siguientes isomorfismos para el caso k = 1, 2.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(U) \ni v &\longmapsto & \alpha_v \in \Omega^1(U) \\ \mathfrak{X}(U) \ni v &\longmapsto & \omega_v \in \Omega^2(U) \end{aligned}$$

por

$$\alpha_v = v_1 \, \mathrm{d}x_1 + v_2 \, \mathrm{d}x_2 + v_3 \, \mathrm{d}x_3 \tag{2.22}$$

$$\omega_v = v_1 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + v_2 \, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + v_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \,. \tag{2.23}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto. Aquí $\Omega^k(U)$, denota el conjunto de todas las k-formas diferenciales en U, k = 1, 2.

Como consecuencia de la de definición de estos isomorfismo se tiene que $\alpha_v = 0$ si, y sólo si, v = 0 y de igual manera $\omega_v = 0$ si, y sólo si, v = 0. En adelante, cada vez que escribamos α_v u ω_v estaremos haciendo referencia a los isomorfismos anteriores, para cualquier campo vectorial suave v. A continuación presentamos un lema que se desprende de la definición del isomorfismo anterior y que será de gran ayuda para la demostración del método del factor integrante.

Lema 2.2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto. Para cada $v \in \mathfrak{X}(U)$ y su correspondiente 1-forma α_v , se tiene que

 $d\alpha_v = 0$ si y sólo si rot(w) = 0.

Demostración. Realizando un breve cálculo se demuestra que $d\alpha_v = \omega_{rot(v)}$.

Ahora bien, se denomia *factor integrante* a una función vectorial suave $a: U \to \mathbb{R}^3, a \neq 0$; tal que la 1-forma asociada a $v \neq a$,

$$\alpha_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\|a\|^2} \left\langle a \times v, \mathrm{d}x \right\rangle$$

es cerrada en U, es decir, $d\alpha_a = 0$. Lo anterior es equivalente a pedir que $rot(a \times v) = 0$ y es esta condición la que permite establecer el método del factor integrante, el cual enunciamos a continuación.

Criterio 2.2.1. (Método del Factor Integrante). Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo y simplemente conexo y sea $v \in \mathfrak{X}(U)$. Si existe una función $a: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[v, a] + a \operatorname{div}(v) - v \operatorname{div}(a) = 0$$
(2.24)

entonces el sistema (2.1) admite una Integral Primera $K \in C^{\infty}(U)$ de la forma

$$K = \int_{\Gamma_x} \alpha, \tag{2.25}$$

donde α es la 1-forma definida por

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\|a\|^2} \langle a \times v, \mathrm{d}x \rangle$$

 $\begin{array}{l} y \ \Gamma_x = \left\{ \ \gamma(\tau): \ [\ 0,1 \] \to U \ | \ \gamma(0) = x^0, \ \gamma(1) = x \end{array} \right\}, \ es \ la \ curva \ que \ conecta \ a \ los \ puntos \ x^0, x \in U. \end{array}$

Demostración. Primero demostraremos que la integral primera está bien definida, es decir, que no depende de la elección de la curva. Sea

$$\widetilde{\Gamma}_x = \left\{ \widetilde{\gamma}(\tau) : [0,1] \to U \mid \widetilde{\gamma}(0) = x^0, \ \widetilde{\gamma}(1) = x \right\}$$

otra curva que conecte a los puntos $x^0, x \in U$, y sea $\alpha = \alpha_w$ la 1-forma asociada al campo vectorial w definido por $w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\|a\|^2} a \times v$. Ahora, por ser U simplemente conexo, usando el Teorema de Stokes, se tiene que

$$\int_{\Gamma_x} \alpha_w - \int_{\widetilde{\Gamma}_x} \alpha_w = \int_{\sigma_x} \alpha_w = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\alpha_w \qquad (2.26)$$

donde $\sigma_x = \widetilde{\Gamma}_x^{-1} \circ \Gamma_x$ y \mathcal{D} es la región delimitada por las curvas Γ_x y $\widetilde{\Gamma}_x$. Aqui $\widetilde{\Gamma}_x^{-1}$ denota que la curva es recorrida en sentido contrario, es decir, va del punto x al punto x^0 . Realizando un breve cálculo y usando la hipótesis (2.24) se tiene que

$$\operatorname{rot}(w) = \frac{1}{\|a\|^2} \left([v, a] + a \operatorname{div}(v) - v \operatorname{div}(a) \right) = 0$$

y por el Lema 2.2.1 se sigue que es α_w cerrada. Por lo tanto, de (2.26) se concluye que

$$\int_{\Gamma_x} \alpha = \int_{\widetilde{\Gamma}_x} \alpha$$

Con lo anterior demostramos que la integral primera no depende de la elección de curva que hagamos.

Demostraremos ahora que efectivamente K es una integral primera del sistema (2.1). Se sigue de (2.25) que $\alpha_w = dK$ lo cual, por (2.22), implica que $w = \frac{\partial K}{\partial x}$. Por tanto, por como se ha definido w, se tiene que

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{1}{\|a\|^2} \ a \times v.$$

Luego,

$$\mathcal{L}_{v}K = \sum_{i=1}^{3} v_{i}\frac{\partial K}{\partial x_{i}} = \left\langle v, \frac{\partial K}{\partial x} \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto, K es una integral primera del sistema (2.1).

2.2.1. Aplicación al sistema Lotka-Volterra en \mathbb{R}^3

Procederemos en este momento a aplicar el método del factor integrante al sistema Lotka-Volterra 3-dimensional con términos constantes para exhibir una integral primera del sistema. El sistema contará con parámetros para los cuales determinaremos condiciones que permitan garantizar la existencia de dicha integral primera. Al igual que para el caso 2dimensional, propondremos una función vectorial a para poder utilizar el Criterio 2.2.1, el cual tendrá ciertos parámetros que nos ayudarán a formar un sistema de ecuaciones algebraicas, cuyas condiciones de solubilidad serán las que nos permitirán encontrar una integral primera para el sistema Lotka-Volterra.

Consideremos el sistema Lotka-Volterra 3-dimensional con términos constantes

$$\dot{x}_1 = v_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_1$$

$$\dot{x}_2 = v_2 = x_2(b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + e_2$$

$$\dot{x}_3 = v_3 = x_3(b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + e_3$$
(2.27)

donde $b_i, a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$; son parámetros arbitrarios y e_1, e_2, e_3 son términos constantes.

Supondremos al abierto U del Criterio 2.1.1 como todo \mathbb{R}^3 . Definimos la 1-forma $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\|a\|^2} \langle a \times v, dx \rangle$, donde $v_1, v_2 \neq v_3$ son las componentes del campo que determina al sistema (2.27) y a es el factor por determinar. La curva Γ_x a lo largo de la cual integraremos la 1-forma α , será $\Gamma_x = \Gamma_{x_2} \circ \Gamma_{x_1} \circ \Gamma_{x_3}$, donde

$$\Gamma_{x_3} = \{ \ \widetilde{\gamma}(\tau) : \ [\ 0,1 \] \to U \ | \ \widetilde{\gamma}(\tau) = (0,0,\tau x_3) \ \},$$

$$\Gamma_{x_1} = \{ \ \gamma(\tau) : \ [\ 0,1 \] \to U \ | \ \gamma(\tau) = (\tau x_1,0,x_3) \ \},$$

$$\Gamma_{x_2} = \{ \ \widehat{\gamma}(\tau) : \ [\ 0,1 \] \to U \ | \ \widehat{\gamma}(\tau) = (x_1,\tau x_2,x_3) \ \}$$

esto es, para cualquier $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$, la curva Γ_x conecta al punto $x^0 = 0$ con x, por medio de la recta Γ_{x_3} que une x^0 con el punto $(0, 0, x_3)$, por medio de la recta Γ_{x_1} que une al punto $(0, 0, x_3)$ con el punto $(x_1, 0, x_3)$ y por medio de la recta Γ_{x_2} que une al punto $(x_1, 0, x_3)$ con x, tal como se muesta en la Figura 2.4.



Figura 2.4: Rectas $\Gamma_{x_1}, \Gamma_{x_2}$ y Γ_{x_3}

у

 $e_2(\gamma_2 l_1 + \alpha_2 l_3)$]

Estableceremos dos propuestas para la función vectorial a(x) que son

$$a_1(x) = R(x) (\gamma_1, -\beta_1, \alpha_1)$$
 $y \quad a_2(x) = R(x) (\gamma_2 x_1, -\beta_2 x_2, \alpha_2 x_3)$

donde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$; son parámetros arbitrarios y $R \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, la definiremos como $R = x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1}$, donde $l_i, i = 1, 2, 3$; son parámetros arbitrarios que determinaremos más adelante.

Realizando cálculos utilizando (2.25) y con la curva Γ_x definida anteriormente, obtenemos que la integral primera es dada por

$$K_i(x) = \int (Ra_i^1 v_2 - Ra_i^2 v_1) dx_3 + h(x_1, x_2)$$
(2.28)

donde $h(x_1, x_2)$ se determina mediante las siguientes condiciones

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_1} = Ra_i^2 v_3 - Ra_i^3 v_2$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial x_2} = Ra_i^3 v_1 - Ra_i^1 v_3$$

donde a_i^j , i = 1, 2; j = 1, 2, 3; representa la *j*-ésima componente de la función vectorial a_i . La fórmula anterior es la que utilizaremos en esta sección para determinar la forma explícita de la integral primera.

Las propuestas establecidas para a ciertamente son restrictivos y no generan integrales primeras de carácter más general del sistema Lotka-Volterra que se puediésen obtener con el método propuesto. Sin embargo, una propuesta más general para el factor integrante (por ejemplo, que R sea separable) da lugar a ecuaciones diferenciales parciales, cuyo análisis queda fuera de los propósitos de este texto y que aún está en proceso de estudio. Aún así, con las funciones vectoriales propuestas se obtienen una cantidad considerable de integrales primeras con un grado de generalidad aceptable.

Continuando, sustituiremos primeramente la función vectorial a_2 en (2.24) por ser más general que a_1 , con lo cual obtenemos que

$$\begin{array}{l} 0 \ = \ R \cdot \ \left[\ \left[\ \gamma_2(b_2l_2 + b_3l_3) \ + \ b_1(\beta_2l_2 - \alpha_2l_3) \ \right] x_1 \ + \ \left[\ (\gamma_2a_{22} + \beta_2a_{12})(l_2 + 1) \ + \\ l_3(\gamma_2a_{32} - \alpha_2a_{12}) \ \right] x_1x_2 \ + \ \left[\ (\gamma_2a_{33} - \alpha_2a_{13})(l_3 + 1) \ + \ l_2(\beta_2a_{13} \ + \ \gamma_2a_{23}) \ \right] x_1x_3 \ + \\ \left[\ \gamma_2(a_{21}l_2 + a_{31}l_3) \ + \ a_{11}(\beta_2l_2 - \alpha_2l_3) \ \right] x_1^2 \ + \ \gamma_2e_2(l_2 - 1) \ x_1x_2^{-1} \ + \ \gamma_2e_3(l_3 - 1) \ x_1x_3^{-1} \ + \\ e_1(\beta_2l_2 - \alpha_2l_3) \ \right] \\ 0 \ = \ -R \cdot \left[\ \left[\ \beta_2(b_1l_1 + b_3l_3) \ + \ b_2(\gamma_2l_1 + \alpha_2l_3) \ \right] x_2 \ + \ \left[\ (\beta_2a_{11} + \gamma_2a_{21})(l_1 + 1) \ + \\ l_3(\alpha_2a_{21} + \beta_2a_{31}) \ \right] x_1x_2 \ + \ \left[\ (\alpha_2a_{23} + \beta_2a_{33})(l_3 + 1) \ + \ l_1(\beta_2a_{13} \ + \ \gamma_2a_{23}) \ \right] x_2x_3 \ + \\ \left[\ \beta_2(a_{12}l_1 + a_{32}l_3) \ + \ a_{22}(\gamma_2l_1 + \alpha_2l_3) \ \right] x_2^2 \ + \ \beta_2e_1(l_1 - 1) \ x_1^{-1}x_2 \ + \ \beta_2e_3(l_3 - 1) \ x_2x_3^{-1} \ + \\ \end{array}$$

$$0 = R \cdot \left[\left[\alpha_2(b_1l_1 + b_2l_2) + b_3(\beta_2l_2 - \gamma_2l_1) \right] x_3 + \left[(\alpha_2a_{11} - \gamma_2a_{31})(l_1 + 1) + l_2(\alpha_2a_{21} + \beta_2a_{31}) \right] x_1x_3 + \left[(\alpha_2a_{22} + \beta_2a_{32})(l_2 + 1) + l_1(\alpha_2a_{12} - \gamma_2a_{32}) \right] x_2x_3 + \left[\alpha_2(a_{13}l_1 + a_{23}l_2) + a_{33}(\beta_2l_2 - \gamma_2l_1) \right] x_3^2 + \alpha_2e_1(l_1 - 1) x_1^{-1}x_3 + \alpha_2e_2(l_2 - 1) x_2^{-1}x_3 + e_3(\beta_2l_2 - \gamma_2l_1) \right]$$

Se sigue de manera inmediata que los coeficientes de los términos en los cuales están involucradas las variables x_i , i = 1, 2, 3; y los términos independientes deben de ser cero para que las tres igualdades anteriores se cumplan. Lo anterior nos induce el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas.

$$0 = B_1 l_1 + B_2 l_2 \tag{2.29}$$

$$0 = B_3 l_1 + B_2 l_3 \tag{2.30}$$

$$0 = B_{3}l_{2} - B_{1}l_{3}$$
(2.31)
$$0 = A_{1}l_{1} + A_{2}l_{2}$$
(2.32)

$$0 = A_{13}l_1 + A_{23}l_2$$
(2.32)
$$0 = A_{32}l_1 + A_{22}l_3$$
(2.33)

$$0 = A_{31}l_2 - A_{11}l_3 \tag{2.34}$$

$$0 = A_{21}l_2 + A_{11}(l_1 + 1) \tag{2.35}$$

$$0 = A_{12}l_1 + A_{22}(l_2 + 1) (2.36)$$

$$0 = A_{21}l_3 + A_{31}(l_1 + 1) \tag{2.37}$$

$$0 = A_{33}l_1 + A_{23}(l_3 + 1) \tag{2.38}$$

$$0 = A_{12}l_3 - A_{32}(l_2 + 1) (2.39)$$

$$0 = A_{33}l_2 - A_{13}(l_3 + 1) \tag{2.40}$$

$$0 = \gamma_2 e_2(l_2 - 1)x_2^{-1} = \gamma_2 e_3(l_3 - 1)x_3^{-1} = e_1(\beta_2 l_2 - \alpha_2 l_3)x_1^{-1}$$
(2.41)

$$0 = \beta_2 e_1 (l_1 - 1) x_1^{-1} = \beta_2 e_3 (l_3 - 1) x_3^{-1} = e_2 (\alpha_2 l_3 + \gamma_2 l_1) x_2^{-1}$$
(2.42)

$$0 = \alpha_2 e_1 (l_1 - 1) x_1^{-1} = \alpha_2 e_2 (l_2 - 1) x_2^{-1} = e_3 (\beta_2 l_2 - \gamma_2 l_1) x_3^{-1}$$
(2.43)

donde

$$B_{1} = \alpha_{2}b_{1} - \gamma_{2}b_{3} \qquad A_{1i} = \alpha_{2}a_{1i} - \gamma_{2}a_{3i}$$
$$B_{2} = \alpha_{2}b_{2} + \beta_{2}b_{3} \qquad A_{2i} = \alpha_{2}a_{2i} + \beta_{2}a_{3i}$$
$$B_{1} = \beta_{2}b_{1} + \gamma_{2}b_{2} \qquad A_{3i} = \beta_{2}a_{1i} + \gamma_{2}a_{2i}$$

A continuación, comenzaremos el análisis para derivar las integrales primeras del sistema Lotka-Volterra (2.27) usando el sistema de ecuaciones anteriores y en su defecto la función vectorial a_1 . Dividiremos este estudio en los siguientes casos: $e_1e_2e_3 \neq 0$; $e_1e_2 \neq 0$, $e_3 = 0$; $e_1 \neq 0$, $e_2 = e_3 = 0$; y $e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Los demás casos son análogos. El hecho de que centremos el estudio en torno a las constantes e_i es dejar el sistema (2.27) lo más general posible.

Caso 1 $(e_1 e_2 e_3 \neq 0)$

Notemos que si $e_1, e_2, e_3 \neq 0$, entonces de (2.41), (2.42) y (2.43) se sigue que $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ y con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_2 - \alpha_2 &= 0\\ \alpha_2 + \gamma_2 &= 0\\ \beta_2 - \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, es decir $a_2 \equiv 0$. Por tanto, utilizaremos la función vectorial a_1 , que al sustituirlo en (2.24) obtenemos que

$$0 = -R(x) \cdot \left[\beta_{1}\left[a_{11}(l_{1}+1) + a_{31}l_{3}\right]x_{1} + \left[\beta_{1}\left(a_{12}l_{1} + a_{32}l_{3}\right) + \gamma_{1}a_{21}l_{1} + \alpha_{1}a_{23}l_{3}\right]x_{2} + \beta_{1}\left[a_{13}l_{1} + a_{33}\left(l_{3}+1\right)\right]x_{3} + \left(\beta_{1}e_{1} + \gamma_{1}e_{2}\right)\left(l_{1}-1\right)x_{1}^{-1} + \left(\alpha_{1}e_{2} + \beta_{1}e_{3}\right)\left(l_{3}-1\right)x_{3}^{-1} + \gamma_{1}b_{2}\left(l_{1}-1\right)x_{1}^{-1}x_{2} + \alpha_{1}b_{2}\left(l_{3}-1\right)x_{2}x_{3}^{-1} + \gamma_{1}a_{22}\left(l_{1}-1\right)x_{1}^{-1}x_{2}^{2} + \alpha_{1}a_{22}\left(l_{3}-1\right)x_{2}^{2}x_{3}^{-1} + \gamma_{1}a_{23}\left(l_{1}-1\right)x_{1}^{-1}x_{2}x_{3} + \alpha_{1}a_{21}\left(l_{3}-1\right)x_{1}x_{2}x_{3}^{-1} + \beta_{1}\left(b_{1}l_{1}+b_{3}l_{3}\right)\right]$$

Com
o $\ l_1=l_2=l_3=1,\ de$ las igualdades anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \alpha_1(b_1 + b_2) \tag{2.44}$$

- $0 = \beta_1(b_1 + b_3) \tag{2.45}$
- $0 = \gamma_1(b_2 + b_3) \tag{2.46}$
- $0 = \alpha_1(2a_{11} + a_{21}) \tag{2.47}$
- $0 = \alpha_1(2a_{22} + a_{12}) \tag{2.48}$
- $0 = \beta_1(2a_{11} + a_{31}) \tag{2.49}$
- $0 = \beta_1(2a_{33} + a_{13}) \tag{2.50}$
- $0 = \gamma_1(2a_{22} + a_{32}) \tag{2.51}$
- $0 = \gamma_1(2a_{33} + a_{23}) \tag{2.52}$
- $0 = \gamma_1(a_{21} + a_{31}) + \beta_1 a_{12} \alpha_1 a_{13}$ (2.53)
- $0 = \beta_1(a_{12} + a_{32}) + \gamma_1 a_{21} + \alpha_1 a_{23}$ (2.54)
- $0 = \alpha_1(a_{13} + a_{23}) + \beta_1 a_{32} \gamma_1 a_{31}$ (2.55)

Ahora, como queremos que la función vectorial a_1 sea no trivial, el estudio del sistema de ecuaciones anterior lo dividiremos en los siguientes subcasos: $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$; $\alpha_1\beta_1\neq 0$, $\gamma_1 = 0$; y $\alpha_1\beta_1\gamma_1\neq 0$. Los demás casos pueden ser tratados análogamente.

Si $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, entonces de las ecuaciones (2.44 - 2.55) obtenemos las siguientes condiciones de solubilidad

 $b_1 + b_2 = 0$, $2a_{11} + a_{21} = 0$, $2a_{22} + a_{12} = 0$, $a_{13} = a_{23} = 0$.

Con las condiciones anteriores y utilizando (2.28) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. El sistema Lotka-Volterra con términos constantes e_1, e_2, e_3 distintos de cero

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(b_1 + a_{11}x_1 - 2a_{22}x_2) + e_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2(-b_1 - 2a_{11}x_1 + a_{22}x_2) + e_2 \\ \dot{x}_3 &= x_3(b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + e_3 \end{aligned}$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = -e_2x_1 + e_1x_2 + b_1x_1x_2 - a_{22}x_1x_2^2 + a_{11}x_1^2x_2$$

Ahora, si $\alpha_1\beta_1 \neq 0$, $\gamma_1 = 0$, entonces de las ecuaciones (2.44 - 2.52) obtenemos que

$$b_1 + b_2 = 0 \qquad 2a_{11} + a_{21} = 0 \qquad 2a_{11} + a_{31} = 0$$

$$b_1 + b_3 = 0 \qquad 2a_{22} + a_{12} = 0 \qquad 2a_{33} + a_{13} = 0$$

mientras que de las ecuaciones (2.53 - 2.55) demostramos el siguiente sistema lineal

$[-a_{13}]$	a_{12}	α		[0]
a_{23}	$(a_{12} + a_{32})$		=	0
$\left[(a_{13} + a_{23}) \right]$	a_{32}	β		0

cuyas condiciones de solubilidad son $a_{12}(a_{13} + a_{23}) + a_{13}a_{32} = 0$ y $\alpha = \frac{a_{12}}{a_{13}}$. Con las condiciones encontradas y utilizando (2.28) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.2. El sistema Lotka-Volterra con términos constantes e_1, e_2, e_3 distintos de cero

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 - 2a_{22}x_2 - 2a_{33}x_3) + e_1 \dot{x}_2 = x_2(-b_1 - 2a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + e_2 \dot{x}_3 = x_3(-b_1 - 2a_{11}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + e_3$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = 2(e_3a_{33} + e_2a_{22})x_1 + 2e_1a_{22}x_2 - 2e_1a_{33}x_3 - 2b_1a_{22}x_1x_2 - 2b_1a_{33}x_1x_3 + 2a_{22}^2x_1x_2^2 + 2a_{33}^2x_1x_3^2 + 2a_{11}a_{22}x_1^2x_2 - 2a_{11}a_{33}x_1^2x_3 + 4a_{22}a_{33}x_1x_2x_3$$

bajo la condición $2a_{22}a_{33} - a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0.$

Finalmente, si $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \neq 0$, entonces de las ecuaciones (2.44 - 2.52) obtenemos que

$$b_i = 0 \qquad 2a_{ij} + a_{ij} = 0 \tag{2.56}$$

para toda $~i\neq j,~i,j=1,2,3.~$ De las ecuaciones (2.53-2.55) obtenemos el siguiente sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -a_{13} & a_{12} & (a_{21}+a_{31}) \\ a_{23} & (a_{12}+a_{32}) & a_{21} \\ (a_{13}+a_{23}) & a_{32} & -a_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando (2.56) el sistema anterior lo podemos expresar de la siguiente forma equivalente

$$\begin{bmatrix} -a_{33} & 0 & a_{11} \\ 0 & a_{22} & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual obtenemos que $\alpha = \frac{a_{11}}{a_{33}}\gamma$ y $\beta = -\frac{a_{11}}{a_{22}}\gamma$. Por tanto, de lo anterior y de (2.56) y utilizando (2.28) demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. El sistema Lotka-Volterra con términos constantes e_1, e_2, e_3 distintos de cero

$$\dot{x}_1 = x_1(a_{11}x_1 - 2a_{22}x_2 - 2a_{33}x_3) + e_1 \dot{x}_2 = x_2(-2a_{11}x_1 + a_{22}x_2 - 2a_{33}x_3) + e_2 \dot{x}_3 = x_3(-2a_{11}x_1 - 2a_{22}x_2 + a_{33}x_3) + e_3$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = a_{11}(e_3a_{33} - e_2a_{22})x_1 + a_{22}(e_1a_{11} - e_3a_{33})x_2 + a_{33}(e_2a_{22} - e_1a_{11})x_3 -a_{11}a_{22}^2x_1x_2^2 + a_{11}a_{33}^2x_1x_3^2 + a_{11}^2a_{22}x_1^2x_2 - a_{11}^2a_{33}x_1^2x_3 - a_{22}a_{33}^2x_2x_3^2 + a_{22}^2a_{33}x_2^2x_3.$$

Caso 2 $(e_1e_2 \neq 0, e_3 = 0)$

En este caso utilizaremos únicamente la función vectorial a_2 para derivar las condiciones que nos permitirán exhibir las integrales primeras del sistema Lotka-Volterra, pues de utilizar la función vectorial a_1 obtendríamos las mismas integrales primeras que en el caso 1 salvo los términos en los que interviene la constante e_3 .

Por ser $e_3 = 0$ se sigue que $a_2 \neq 0$, lo que nos permite utilizar el sistema de ecuaciones (2.29 - 2.43) para realizar nuestro estudio. Las manipulaciones algebraicas son similares a las que ya hemos realizados en casos anteriores por lo que solamente presentamos, mediante una tabla, las integrales primeras obtenidas en este caso y las respectivas condiciones que deben de cumplir los parámetros involucrados para asegurar su existencia.

SISTEMA LOTKA-VOLTERRA	INTEGRAL PRIMERA		
$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 - 2a_{22}x_2) + e_1$ $\dot{x}_2 = x_2(-b_1 - 2a_{11}x_1 + a_{22}x_2) + e_2$ $\dot{x}_3 = x_3(b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$	$K(x) = -e_2x_1 + e_1x_2 + b_1x_1x_2$ $-a_{22}x_1x_2^2 + a_{11}x_1^2x_2.$		
$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_1$ $\dot{x}_2 = x_2(b_1 + a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + a_{23}x_3) + e_2$ $\dot{x}_3 = x_3(-b_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \frac{a_{13} + a_{23}}{a_{33}}x_3)$	$K(x) = -e_2 x_1 x_3 + e_1 x_2 x_3 + \frac{(a_{13} - a_{23})}{2} x_1 x_2 x_3^2$		
$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_1$ $\dot{x}_2 = x_2(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_2$ $\dot{x}_3 = x_3(b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$	$K(x) = (e_1 x_2 - e_2 x_1) x_3^{l^3}$		

Caso 3 $(e_1 \neq 0, e_2, e_3 = 0)$

Este caso es muy especial ya que muestra como el sistema (2.27), que está definido por un campo vectorial suave en todo el espacio \mathbb{R}^3 , admite integrales primeras definidas en un abierto contenido propiamente en él y esto debido a que en la estructura de estas integrales primeras intervienen funciones de tipo exponencial y logarítmicas. Por ser las manipulaciones algebraicas similares a las ya realizadas en casos anteriores solamente presentaremos las integrales primeras y las condiciones que deben cumplir los parámetros involucrados para asegurar su existencia.

Proposición 2.2.4. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_1 \dot{x}_2 = a_{23}x_2x_3 \dot{x}_3 = -x_3(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = -a_{23}x_1x_3 + e_1\ln|x_2|$$

bajo la condición $a_{23} \neq 0$.

Proposición 2.2.5. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = e_1 \dot{x}_2 = x_2(b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \dot{x}_3 = x_3(b_3 + a_{31}x_1 + \lambda a_{22}x_2 + \lambda a_{23}x_3)$$

con $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, admite una integral primera de la forma

$$K(x) = \left(\frac{b_3}{\lambda} - b_2\right) x_1 + \frac{\left(\frac{a_{31}}{\lambda} - a_{21}\right)}{2} x_1^2 + e_1 \ln \left|\frac{x_2}{x_3^{1/\lambda}}\right|$$

bajo la condición $a_{22}a_{23} \neq 0$.

Proposición 2.2.6. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_1 \dot{x}_2 = a_{23}x_2x_3 \dot{x}_3 = x_3(-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + a_{33}x_3)$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = -a_{23}x_1x_2^{-\frac{a_{13}+a_{33}}{a_{23}}}x_3 - \frac{e_1a_{23}}{a_{13}+a_{33}}x_2^{-\frac{a_{13}+a_{33}}{a_{23}}}$$

bajo la condición $\frac{a_{13}+a_{33}}{a_{23}} \neq 0.$

Proposición 2.2.7. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + e_1 \dot{x}_2 = x_2(-b_1 - a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \dot{x}_3 = x_3(-b_1 - a_{11}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = \left[(a_{22} - a_{32}) x_1 x_2 + \frac{(a_{13} + a_{23})(a_{22} - a_{32})}{a_{12} + 2a_{22} - a_{32}} x_1 x_3 + \frac{e_1(a_{22} - a_{32})}{a_{12} + a_{22}} \right] x_2^{\frac{a_{12} + a_{22}}{a_{32} - a_{32}}} x_3^{\frac{a_{12} + a_{22}}{a_{32} - a_{32}}} x_3^{\frac{a_{12} - a_{22}}{a_{32} - a_{32}$$

bajo las siguientes condiciones

$$(a_{12}+a_{22})(a_{13}+a_{33})(a_{22}-a_{32})(a_{23}-a_{33}) \neq 0, (a_{13}+a_{33})(a_{22}-a_{32})-(a_{12}+a_{22})(a_{23}-a_{33}) = 0.$$

Caso 4 $(e_1 = e_2 = e_3 = 0)$

Al igual que en el Caso 3 solamente mostraremos las integrales primeras halladas junto con las condiciones que deben cumplir los parámetros involucrados para asegurar su existencia. Queremos resaltar el hecho de que en la estructura de las integrales primeras encontradas en este caso intervienen funciones que no están definidas en todo el espacio \mathbb{R}^3 a pesar de que el campo vectorial que define al sistema (2.27) es suave en todo \mathbb{R}^3 .

Proposición 2.2.8. El sistema Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = b_1 x_1 \dot{x}_2 = x_2 (b_2 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) \dot{x}_3 = x_3 (b_3 + a_{31} x_1 + \lambda a_{22} x_2 + \lambda a_{23} x_3)$$

 $con \ \ \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}, \ \ admite \ una \ integral \ primera \ de \ la \ forma$

$$K(x) = \left(a_{21} - \frac{a_{31}}{\lambda}\right)x_1 + \left(b_2 - \frac{b_3}{\lambda}\right)\ln|x_1| - b_1\ln|x_2| + \frac{b_1}{\lambda}$$

bajo la condición $a_{22}a_{23}b_1 \neq 0$.

Proposición 2.2.9. El sistema Lotka-Volterra Consideremos el sistema Lotka-Volterra 3dimensional con términos constantes

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2(b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(b_3 + a_{31}x_1 + \lambda a_{22}x_2 + \lambda a_{23}x_3) \end{aligned}$$

 $con \ \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}, \ admite \ una \ integral \ primera \ de \ la \ forma$

$$K(x) = \left(b_2 - \frac{b_3}{\lambda}\right) \frac{1}{x_1} + \left(\frac{a_{31}}{\lambda} - a_{21}\right) \ln|x_1| + a_{11}\ln|x_2| - \frac{a_{11}}{\lambda}\ln|x_3|$$

bajo la condición $a_{11}a_{22}a_{23} \neq 0$.

Proposición 2.2.10. El sistema Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \dot{x}_2 = x_2(b_1 + a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + a_{23}x_3) \dot{x}_3 = x_3(b_1 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{13}x_3)$$

admite una integral primera de la forma

$$K(x) = (a_{12} - a_{32})\frac{x_2}{x_1} + (a_{23} - a_{13})\frac{x_3}{x_1} + (a_{31} - a_{21})\ln|x_1| + (a_{11} - a_{31})\ln|x_2| + (a_{21} - a_{11})\ln|x_3|$$

bajo las siguientes condiciones

$$a_{22} - a_{31} \neq 0, \ a_{23} - a_{33} \neq 0 \quad y \quad (a_{11} - a_{31})^2 + (a_{11} - a_{21})^2 \neq 0.$$

Proposición 2.2.11. El sistema Lotka-Volterra con término constante $e_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \dot{x}_2 = \lambda x_2(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \dot{x}_3 = -\lambda x_3(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)$$

con $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, admite una integral primera de la forma

$$K(x) = x_1^{\xi} x_2^{\xi - \frac{\xi}{\lambda}} x_3^{\xi} .$$

 $con \ \xi \neq 0 \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Capítulo 3

Estabilidad

En este capítulo desarrollaremos brevemente la teoría de estabilidad para sistemas dinámicos. Estudiaremos la estabilidad en torno a puntos de equilibrio en el sentido de Lyapunov, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Hacer este estudio es imprescindible para los propósitos de este texto, el cual tiene como objetivo aplicar los métodos de energía, cuyo análisis desarrollaremos en el Capítulo 4, para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico. Primeramente se presentarán las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov y posteriormente los teoremas de Lyapunov, los cuales dan un criterio para determinar la estabilidad de un sistema alradedor de sus puntos de equilibrio.

3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Esta sección estará dedicada únicamente en definir de manera precisa el que una solución al problema de Cauchy sea estable o inestable en el sentido de Lyapunov. Posteriormente reformularemos dicha definición para establecer de manera concreta que significa el que un punto de equilibrio sea estable en el sentido de Lyapunov.

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x) \\ x \mid_{t=t_0} &= \xi \end{aligned} \tag{3.1}$$

con $v \in \mathfrak{X}(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

Definición 3.1.1. Sea χ una solución de (3.1) definida en $[t_0, \infty)$. Se dice que χ es estable en el sentido de Lyapunov cuando $t \to \infty$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$; tal que

1. Cada solución x(t) de (3.1) con

$$\parallel x(t_0) - \chi(t_0) \parallel < \delta$$

está bien definida para todo $t \in [t_0, \infty).$

2. Se cumple que

$$\parallel x(t) - \chi(t) \parallel < \varepsilon$$

para todo $t \in [t_0, \infty).$

En palabras: una solución es estable si cualquier otra solución que está cerca de ella en un instante inicial, permanece cerca de ella en cualquier instante posterior. Notemos que lo anterior no implica que las soluciones converjan, ya que una puede oscilar alrededor de la otra, relacionado con esto tenemos la definición de estabilidad asintótica que enunciamos a continuación.



Figura 3.1: Estabilidad en el sentido de Lyapunov de la solución $\chi(t)$

Definición 3.1.2. Sea χ una solución de (3.1) definida en $[t_0, \infty)$. Se dice que χ es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov cuando $t \to \infty$, si es estable en el sentido de Lyapunov y además existe $\eta > 0$ tal que

 $Si \quad \|x(t) - \chi(t)\| < \eta \quad entonces \quad \lim_{t \to \infty} x(t) = \chi(t)$

donde x(t) es solución del sistema (3.1).

Nuevamente en palabras, una solución χ es estable si (además de ser estable) cualquier otra solución x que en un cierto instante pase cerca de ella, al hacer tender el tiempo a infinito se aproxima a χ tanto como queramos. La contraparte de las dos definiciones anteriores, es decir, que χ sea inestable significa que al menos hay otra solución que inicialmente está cerca de ella y al cabo de un cierto tiempo se ha separado tanto como queramos, lo cual se especifica en la siguiente definición.

Definición 3.1.3. Sea χ una solución de (3.1) definida en $[t_0, \infty)$. Se dice que χ es **inestable en el sentido de Lyapunov** cuando $t \to \infty$, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe una solución $x_{\delta}(t)$ de (3.1) y un tiempo $t_1 = t_1(\delta) > t_o$, tal que

 $|| x_{\delta}(t_0) - \chi(t_0) || < \delta \qquad y \qquad || x_{\delta}(t_1) - \chi(t_1) || \ge \varepsilon .$

Ya que el propósito de este texto es estudiar sólamente la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema (3.1), procederemos a dar esta definición. Por conveniencia enunciaremos la definición con $x^* = 0$ como punto de equilibrio. Esto no implica pérdida de generalidad, ya que se puede definir el cambio de coordenadas $\tilde{x} = x - x_0(t)$, para alguna solución $x_0(t)$.

Definición 3.1.4. Si el origen es un punto de equilibrio, éste se dice estable en el sentido de Lyapunov cuando $t \to \infty$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

1. Cada solución x(t) de (3.1) con

$$\parallel x(t_0) \parallel < \delta$$

está bien definida para todo $t \in [t_0, \infty)$.

2. Se cumple que

 $\parallel x(t) \parallel < \varepsilon$

para todo $t \in [t_0, \infty).$

Para ejemplificar la definición anterior, consideremos el sistema dinámico 2-dimensional

$$\dot{x}_1 = x_2$$
 (3.2)
 $\dot{x}_2 = -x_1$

cuyas soluciones son $x(t) = [x_1(t), x_2(t)] = [c_2 \sin(t) + c_1 \cos(t), c_2 \cos(t) - c_1 \sin(t)],$ obteniendo asi que las trayectorias son todas las circunferencias centradas en el origen, el cual es el único punto de equilibrio del sistema, tal como se muesta en la Figura 3.2.

Debido a los fines de esta sección no profundizará en la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, si se desea profundizar en esta teoría recomendamos las referencias [7, 3].



Figura 3.2: Soluciones del sistema 3.2

3.2. Teoremas de Lyapunov

Para determinar la estabilidad a partir de las definiciones dadas en la sección anterior, por un lado, necesitamos conocer la expresión analítica de las soluciones de (3.1), algo que sabemos es generalmente imposible, por otro lado, suponiendo que tuviéramos dicha expresión para las soluciones, no es trivial hacer las estimaciones pertinentes para δ . De la teoría clásica de la Mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio. Aleksandr Lyapunov, generalizando este hecho, demostró que ciertas funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema. Los tres teoremas que presentamos en esta sección son denominados primer, segundo y tercer Teorema de Lyapunov y proveen un método para determinar la estabilidad de las soluciones del sistema (3.1) sin conocerlas explícitamente.

Antes de enunciar y demostrar el primer Teorema de Lyapunov, recordemos que para cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y cualquier $x_0 \in U$, la bola abierta n-dimensional con centro en x_0 y de radio r > 0, es el conjunto definido por

$$B_r^n(x_0) = \{ x \in U \mid \| x - x_0 \| < r \}$$

y se define la esfera (n-1)-dimensional con centro en x_0 y de radio r > 0 por

$$\mathbf{S}_{r}^{n-1}(x_{0}) = \{ x \in U \mid \| x - x_{0} \| = r \}$$

Teorema 3.2.1. (Primer Teorema de Lyapunov). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideremos sistema (3.1) y supongamos que x = 0 es un punto de equilibrio. Si existe r > 0 y una función $F \in C^{\infty}(\mathbb{B}^n_r(0))$, tal que

- 1. F(0) = 0
- 2. F(x) > 0, $\forall x \in B_r^n(0) \setminus \{0\}$
- 3. $L_v F \leq 0, \quad \forall x \in B_r^n(0)$

Entonces x = 0 es estable en el sentido de Lyapunov cuando $t \to \infty$, i.e, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$si \parallel x(t_0) \parallel < \delta, \quad entonces \parallel x(t) \parallel < \varepsilon,$$

para toda $t \in [t_0, \infty)$ y donde x(t) es solución de (3.1).

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r$, y consideremos la esfera (n-1)-dimensional $S_r^{n-1}(0)$. Por ser $S_r^{n-1}(0)$ compacta y F continua podemos definir

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{S}_{\varepsilon}^{n-1}(0)} F(x)$$

Además, como F(0) = 0 y usando nuevamente que es continua, existe $\delta > 0$ tal que $B^n_{\delta}(0) \subset B^n_{\varepsilon}(0)$ y $F(x) < \alpha$, para toda $x \in B^n_{\delta}(0)$.

Sea x(t) una solución de (3.1) con $||x(t_0)|| < \delta$, es decir, $x(t_0) \in B^n_{\delta}(0)$. Vamos a probar que $||x(t)|| < \varepsilon$ para toda $t \in I^+_{x(t_0)}$. Supongamos que existe $t_1 > 0$ tal que $||x(t_1)|| = \varepsilon$. Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}F(x(t)) = (\mathrm{L}_v F)(x(t))$$

lo cual implica, por la hipótesis 3, que F es decreciente.

De lo anterior y por definición de α se sigue que $F(x(t_0)) \ge F(x(t_1)) > \alpha$, lo cual no es posible, ya que por construcción $F(x(t_0)) < \alpha$. Por lo tanto, se concluye que $|| x(t) || < \varepsilon$, para toda $t \in I^+_{x(0)}$. Usando el Teorema 1.1.2 se concluye también que $I^+_{x(t_0)} = [t_0, \infty)$ por ser S^{n-1}_{ε} compacto. El primer Teorema de Lyapunov convierte el problema de encontrar las soluciones explícitas del sistema (3.1) para determinar la estabilidad en una vecindad del origen, si éste es un punto de equilibrio, en encontrar una función F de clase C^{∞} que se anule en el origen, tome valores positivos en todos los puntos cercanos a él, en la bola acotada por r para ser exactos, y además la evolución a lo largo de cada trayectoria del sistema (3.1) sea decreciente, lo cual se traduce en que la derivada de Lie de F sea no negativa. A la función F se le llama función de Lyapunov tipo I.

Del teorema anterior se sigue el siguiente corolario. El cual es muy importante para los propósitos de este texto, pues proporciona la base mediante el cual se desarrollan los métodos de energía, los cuales abordaremos en el Capítulo 4.

Corolario 3.2.1. Si el sistema (3.1) admite una integral primera F en $B_r^n(0)$ tal que F(0) = 0 y F(x) > 0 para toda $x \in B_r^n(0) \setminus \{0\}$, entonces el origen es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.

El corolario anterior es muy útil ya que nos transforma el problema de encontrar funciones de Lyapunov en encontar una integral primera para el sistema (3.1), que como presentamos en el Capítulo 2, para el caso 2 y 3-dimensional podemos utilizar el método del factor integrante. Algo muy importante que hay que señalar es que este corolario nos asegura únicamente estabilidad y no estabilidad asintótica pues, como mostraremos en el siguiente teorema, una integral primera no cumple con todas las condiciones requeridas para ello.

Teorema 3.2.2. (Segundo Teorema de Lyapunov). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideremos sistema (3.1) y supongamos que x = 0 es un punto de equilibrio. Si existe r > 0 y una función $F \in C^{\infty}(\mathbb{B}^n_r(0))$, tal que

- 1. F(0) = 0
- 2. F(x) > 0, $\forall x \in B_r^n(0) \setminus \{0\}$
- 3. $L_v F < 0, \quad \forall x \in B_r^n(0)$

4.
$$(L_v F)(0) = 0$$

Entonces x = 0 es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov cuando $t \to \infty$.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r$ y sea $\delta > 0$. Por el primer Teorema de Lyapunov se sigue que, si x(t) es una solución de (3.1) tal que $||x(t_0)|| < \delta$, entonces $||x(t)|| < \varepsilon$ para toda $t \in [t_0, \infty)$. Definamos $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(x(t))$ y notemos que

$$f(t) > 0 \qquad y \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{dt}} < 0 \tag{3.3}$$

para toda $t \neq 0 \in [t_0, \infty)$. Esto último implica que f(t) es estrictamente decreciente y además está acotada inferiormente por cero. Por tanto

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = a$$

existe y además $\alpha \geq 0$. Vamos probar que $\alpha = 0$. Supongamos que $\alpha > 0$, por ser f(t) estrictamente decreciente se tiene que $f(t) \geq \alpha > 0$, entonces podemos tomar $\zeta > 0$ tal que $\zeta < \varepsilon$ y $||x(t)|| > \zeta > 0$ para toda $t \in [t_0, \infty)$. Luego por la hipótesis 3, $(L_v F)(x(t)) < 0$ para toda x(t) tal que $\zeta \leq ||x(t)|| \leq \varepsilon$ y por ser F continua existe m > 0 tal que

$$(\mathbf{L}_v F)(x(t)) < -m < 0.$$

en $\overline{\mathrm{B}^n_{\varepsilon}(0)} \setminus \mathrm{B}^n_{\zeta}(0)$. Lo anterior implica que

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{dt}} < -m$$

Integrando, de 0 a t, la expresión anterior se obtiene que f(t) < f(0) - tm para toda $t \in [t_0, \infty)$. Notemos que tomando $t_1 > \frac{f(0)}{m}$ implica que $f(t_1) < 0$, pero esto contradice (3.3). Por lo tanto se concluye que $\alpha = 0$.

El segundo Teorema de Lyapunov, en otras palabras, nos dice que si existe una función F que, a diferencia de una función de Lyapunov tipo I, su evolución a lo largo de cada trayectoria del sistema (3.1) sea estrictamente decreciente, entonces el origen no solamente es estable en el sentido de Lyapunov sino que además existe una vecindad con centro cero en la que cualquier solución del sistema (3.1) que inicie en ella converge al origen. A la función F se le llama función de Lyapunov tipo II. Es importante señalar que, como se mencionó anteriormente, si el sistema (3.1) admite una integral primera no se puede asegurar que el origen sea estable asintóticamente por la condición 3 del teorema anterior. A continuación presentamos el tercer Teorema de Lyapunov que es una contarparte a los dos primeros teoremas, pues nos da condiciones para que el origen se inestable en el sentido de Lyapunov.

Teorema 3.2.3. (Tercer Teorema de Lyapunov). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideremos sistema (3.1) y supongamos que x = 0 es un punto de equilibrio. Si existe r > 0 y una función $F \in C^{\infty}(\mathbb{B}^n_r(0))$, tal que

- 1. F(0) = 0
- 2. F(x) > 0, $\forall x \in B_r^n(0) \setminus \{0\}$
- 3. $L_v F > 0, \quad \forall x \in B_r^n(0)$

4.
$$(L_v F)(0) = 0$$

Entonces x = 0 es inestable en el sentido de Lyapunov.

La demostración del tercer Teorema de Lyapunov será omitida, pues para los propósitos de este texto no es relevante. Una demostración del teorema anterior puede ser consultada en [13, p. 206].

A pesar de que no existen reglas generales para obtener funciones de Lyapunov en un problema dado, la principal ventaja del método de Lyapunov es que, cuando se puede encontrar la función F asegura la estabilidad asintótica, además de que es aplicable a sistemas no necesariamente lineales ni autónomos. Conlcluimos el estudio de la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Si se está interesado en un estudio más extenso de esta teoría puede consultar en [13].

Capítulo 4

Métodos de energía

Este capítulo es, sin duda, el más importante de este texto. Lo anterior debido a que nuestro principal objetivo es presentar y demostrar los denominados métodos de energía para determinar los puntos de equilibrio de un sistema de dinámico son estables. Para mostrar en qué consiste estos métodos procederemos a contextualizarlos.

Consideremos el siguiente sistema 3-dimensional

$$\dot{x} = v(x) \tag{4.1}$$

con $v(x) \in \mathfrak{X}(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto.

El primer y segundo Teorema de Lyapunov presentados en la sección anterior son una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presentan dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov y por tanto hay que proponer una función candidata a ser función de Lyapunov y verificar si cumple con los requisitos. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes, por lo tanto el hecho de no encontrar una función de Lyapunov no significa que los puntos de equilibrio del sistema (4.1) sean inestables o no asintóticamente estables.

Súpongamos que x = a es un punto de equilibrio del sistema anterior, es decir, v(a) = 0. Como ya mencionamos, la mayor parte de las veces es muy complicado encontar funciones de Lyapunov tipo I (o de cualquier tipo), sin embargo, auxiliandonos del Corolario 3.2.1 en muchas situaciones se puede utilizar integrales primeras del sistema (4.1) como funciones de Lyapunov tipo I. De hecho, este enfoque es ampliamente utilizado en el contexto de sistemas con estructura Hamilton-Poisson en los que el Hamiltoniano y el Casimir proveniente de la estructura de Poisson vienen a ser integrales primeras del sistema [15, 16, 17].

Los métodos para el estudio de la estabilidad de puntos de equilibrio mediante integrales primeras son denominados *métodos de energía*. En este capítulo presentamos tres métodos llamados método de Arnold, método de energía de Casimir y método de Ortega-Ratiu. Lo que haremos es demostrar que efectivamente el método de Arnold nos brinda un criterio para determinar la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema (4.1) y posteriormente demostraremos que el método de energía de Casimir y el método de Ortega-Ratiu son equivalentes con éste, en el sentido de que si se cumplen las hipótesis requeridas para el método de Arnold también se cumplen las hipótesis requeridas para el métodos. Cabe señalar que por conveniencia estudiaremos los métodos de energía para el caso 3-dimensional, las demostraciones que exhibiremos para este caso no difieren en gran medida del caso *n*dimensional. Una vez demostrados los métodos de energía los aplicaremos al sistema del trompo de Euler correspondientes a las álgebras SO(3) y $Sl(2; \mathbb{R})$.

4.1. Método de Arnold

En 1965 Arnold ofrece en sus estudios un teorema que proporciona un método, el cual lleva su nombre, para determinar la estabilidad en un punto de equilibrio del sistema (4.1). Presentamos este teorema acontinuación.

Teorema 4.1.1. (Método de Arnold). Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto $y \ v(x) \in \mathfrak{X}(U)$. Supongamos que $x = a \in U$, es un punto de equilibrio del sistema (4.1) y que $K_1, K_2 \in C^{\infty}(U)$ son integrales primeras del mismo sistema. Si existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a) = 0$ 2. $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a)$, es positiva o negativa definida en $W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\top \frac{\partial K_2}{\partial x}(a) = 0 \right\}.$

Entonces x = a es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.

Antes de formular la demostración del teorema, presentamos tres lemas que serán fundamentales para la demostración.

Lema 4.1.1. Sea Q una matriz 3×3 real, simétrica y positiva semidefinida. Sea P una matriz 3×3 real y simétrica con la siguiente propiedad: Si $x \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ y $x^{\top}Q$ x = 0, entonces $x^{\top}P$ x > 0. Entonces existe $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que $P + \alpha^* Q > 0$.

Demostración. Por la Proposición 1.3.2, existe un cambio de coordenadas

$$\begin{array}{rccc} x & \longmapsto & y = L^{-1}x \\ y & \longmapsto & x = L \ y \end{array}$$

con $x, y \in \mathbb{R}^3$ y donde $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un operador lineal no singular, i.e., $\det(L) \neq 0$; tal que

$$x^{\top}Q \ x \quad = \quad y^{\top} \left(\ L^{\top}Q \ L \ \right) y$$

y donde $\widetilde{Q} = L^{\top}Q L$ es una matriz 3×3 diagonal, más aún, por ser Q una matriz semidefinida positiva los elementos de la diagonal de \widetilde{Q} son 1's y/ó 0's, y esto depende directamente del rango de Q.

Por otra parte, para la matriz P tenemos que

$$x^{\top}P \ x = y^{\top} \left(\ L^{\top}P \ L \right) y$$

donde $\widetilde{P} = L^{\top}P L$ es una matriz 3×3 no necesariamente diagonal, esto es

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} & \widetilde{P}_{13} \\ \widetilde{P}_{21} & \widetilde{P}_{22} & \widetilde{P}_{23} \\ \widetilde{P}_{31} & \widetilde{P}_{32} & \widetilde{P}_{33} \end{pmatrix}$$

Vamos dividir nuestra demostración en torno al rank(Q) y lo que haremos es mostrar que en todos los casos existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{P} + \alpha \ \tilde{Q} > 0$, lo que es equivalente a demostrar que $P + \alpha \ Q > 0$.

Caso $\operatorname{rank}(Q) = 3$

Si el rango de Q es igual a tres tenemos que

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $y^{\top} \widetilde{Q} \ y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Luego si $y \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $y^{\top} \widetilde{Q} \ y \neq 0$ y por la propiedad de la matriz P que tenemos por hipótesis, se sigue que $y^{\top} \widetilde{\widetilde{P}} \ y > 0$ para toda $y \neq 0$.

Ahora, defininamos la matriz M^3_{α} por

$$M_{\alpha}^{3} = \widetilde{P} + \alpha \ \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_{11} + \alpha & \widetilde{P}_{12} & \widetilde{P}_{13} \\ \\ \widetilde{P}_{21} & \widetilde{P}_{22} + \alpha & \widetilde{P}_{23} \\ \\ \\ \widetilde{P}_{31} & \widetilde{P}_{32} & \widetilde{P}_{33} + \alpha \end{pmatrix}$$

A continuación calcularemos los menores principales de la matriz M_{α}^3

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha + \widetilde{P}_{11} \\ \Delta_2 &= \alpha^2 + (\operatorname{tr}[\widetilde{P}] - \widetilde{P}_{33}) \alpha + \widetilde{S}_{33} \\ \Delta_3 &= \alpha^3 + \operatorname{tr}[\widetilde{P}] \alpha^2 + (\widetilde{S}_{11} + \widetilde{S}_{22} + \widetilde{S}_{33}) \alpha + \operatorname{det}(\widetilde{P}) \end{aligned}$$

donde \widetilde{S}_{ii} , i = 1, 2, 3; es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la *i*-ésima fila y la *i*-ésima columna en la matriz \widetilde{P} .

Notemos que tomando $\alpha > 0$, cada Δ_i se convierte en un polinomio de grado *i* en la variable α que, usando resultados de cálculo elemental, cumple que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \Delta i = \infty \qquad i = 1, 2, 3$$

Lo anterior nos asegura que para cada Δ_i , existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta_i > 0$. Tomando $\alpha^* = \max \{ \alpha_i, i = 1, 2, 3. \}$, por el Criterio 1.3.2 se tiene que $M_{\alpha}^3 > 0$ y por tanto $P + \alpha^* Q > 0$.

Caso $\operatorname{rank}(Q) = 2$

Si el rango de Q es igual a dos tenemos que

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto $y^{\top} \widetilde{Q} \ y = y_1^2 + y_2^2$. Luego si $y \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $y^{\top} \widetilde{Q} \ y = 0$ si, y sólo si, $y_1, y_2 = 0$ y $y_3 \neq 0$. Por la propiedad de la matriz P que tenemos por hipótesis, se sigue que $y^{\top} \widetilde{P} \ y > 0$ si, y sólo si, $\widetilde{P}_{33} > 0$.

Ahora, defininamos la matriz M_{α}^2 por

$$M_{\alpha}^{2} = \widetilde{P} + \alpha \ \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_{11} + \alpha & \widetilde{P}_{12} & \widetilde{P}_{13} \\ \\ \widetilde{P}_{21} & \widetilde{P}_{22} + \alpha & \widetilde{P}_{23} \\ \\ \\ \widetilde{P}_{31} & \widetilde{P}_{32} & \widetilde{P}_{33} \end{pmatrix}$$

A continuación calcularemos los menores principales de la matriz M_{α}^2

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha + \widetilde{P}_{11} \\ \Delta_2 &= \alpha^2 + (\operatorname{tr}[\widetilde{P}] - \widetilde{P}_{33}) \alpha + \widetilde{S}_{33} \\ \Delta_3 &= \widetilde{P}_{33} \alpha^2 + (\widetilde{S}_{11} + \widetilde{S}_{22}) \alpha + \operatorname{det}(\widetilde{P}) \end{aligned}$$

donde \widetilde{S}_{ii} , i = 1, 2, 3; es definido como en el caso anterior y por los argumentos usados ese caso se tiene que existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta_i > 0$. Tomando $\alpha^* = \max \{ \alpha_i, i = 1, 2, 3. \}$, por el Criterio 1.3.2 se tiene que $M_{\alpha}^2 > 0$ y por tanto $P + \alpha^* Q > 0$.

Caso $\operatorname{rank}(Q) = 1$.

Si el rango de Q es igual a uno tenemos que

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto $y^{\top} \widetilde{Q} \ y = y_1^2$. Luego si $y \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $y^{\top} \widetilde{Q} \ y = 0$ si, y sólo si, $y_1 = 0$ y $y_2 y_3 \neq 0$ ó $y_2 \neq 0, y_3 = 0$ (el caso $y_2 = 0, y_3 \neq 0$ es análogo).

Analicemos primero el caso $y_1 = 0, \ y_2 y_3 \neq 0$. Por la propiedad de la matriz P que tenemos por hipótesis, se sigue que $y^{\top} \tilde{P} y > 0$ si, y sólo si, $\tilde{P}_{22}, \tilde{P}_{33} > 0$ y $\tilde{P}_{23} + \tilde{P}_{32} = 0$. Defininamos la matriz M_{α}^1 por

$$M^{1}_{\alpha} = \widetilde{P} + \alpha \ \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_{11} + \alpha & \widetilde{P}_{12} & \widetilde{P}_{13} \\ \widetilde{P}_{21} & \widetilde{P}_{22} & \widetilde{P}_{23} \\ \widetilde{P}_{31} & \widetilde{P}_{32} & \widetilde{P}_{33} \end{pmatrix}$$

A continuación calcularemos los menores principales de la matriz M^1_{α}

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha + \widetilde{P}_{11} \\ \Delta_2 &= \widetilde{P}_{22} \alpha + \widetilde{S}_{33} \\ \Delta_3 &= \left(\widetilde{P}_{22} \widetilde{P}_{33} + \widetilde{P}_{32}^2 \right) \alpha + \widetilde{S}_{11} + \det(\widetilde{P}) \end{aligned}$$

donde \widetilde{S}_{11} , es definido como en el caso donde el rango de la matriz Q es igual a 3 y por los argumentos usados ese caso se tiene que existe $\overline{\alpha}_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta_i > 0$. Tomando $\overline{\alpha} = \max \{ \overline{\alpha}_i, i = 1, 2, 3. \}$, por el Criterio 1.3.2 se tiene que $M^1_{\alpha} > 0$ y por tanto $P + \overline{\alpha} Q > 0$.

Ahora, el caso $y_1 = y_3 = 0$, $y_2 \neq 0$. Por la propiedad de la matriz P que tenemos por hipótesis, se sigue que $y^{\top} \tilde{P} y > 0$ si, y sólo si, $\tilde{P}_{22} > 0$. De la expresión para el menor Δ_1 se obtiene la condición adiconal $\tilde{P}_{33} > 0$. Por los argumentos usados en el caso donde el rango de la matriz Q es igual a 3 se tiene que existe $\hat{\alpha}_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta_i > 0$. Tomando $\hat{\alpha} = \max \{ \hat{\alpha}_i , i = 1, 2, 3. \}$, por el Criterio 1.3.2 se tiene que $M^1_{\alpha} > 0$ y por tanto $P + \hat{\alpha} Q > 0$.

Por último, eligiendo $\alpha^* = \max \{ \overline{\alpha}, \widehat{\alpha} \}$, se concluye que $P + \alpha^* Q > 0$.

Una pequeña observación acerca del lema anterior es que también es válido si se considera en las hipótesis el caso $x^{\top}P \ x < 0$ y cuya tesis contemplaría la desigualdad $P + \alpha^*Q < 0$. La demostración es totalmente análoga.

Lema 4.1.2. Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $F \in C^{\infty}(U)$. Para $a \in U$ fijo, la matriz Q definida por

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x}(a) \left[\frac{\partial F}{\partial x}(a) \right]^{\top}$$

comple las siguientes propiedades

1. Q es positiva semidefinida.

2.
$$x \ Q^{\top}x = 0$$
 si, $y \text{ solo si}, x \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in U \mid x^{\top} \frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0 \right\}.$

Demostración. 1) Sea $x \in U$ arbitrario, luego

$$x^{\top}Q \ x = x^{\top}\frac{\partial F}{\partial x}(a) \left[\frac{\partial F}{\partial x}(a) \right]^{\top} x$$
$$= \left(x^{\top}\frac{\partial F}{\partial x}(a) \right)^{2}.$$
$$\ge 0$$

por lo tanto, se concluye que Q es positiva semidefinida.

2) Definamos el conjunto $W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in U \mid x^{\top} \frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0 \right\}$. Como $x^{\top}Q \ x = \left(x^{\top} \frac{\partial F}{\partial x}(a) \right)^2$

se sigue que $x^{\top}Q \ x = 0$ si y sólo si $x \in W$.

Es importante notar que la matriz Q definida en el lema anterior es simétrica.

Lema 4.1.3. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto. Sean $F \in C^{\infty}(U)$ y $a \in U$ fijo. Si F(a) = 0, $\frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0$ y $(D^2_{xx}F)(a)$ es positiva definida, entonces existe un abierto V que contiene al punto a tal que, F(x) > 0 para toda $x \in V \setminus \{a\}$.

Demostración. Es consecuencia directa del Lema de Morse.

Demostración del Teorema 4.1.1. Comenzaremos la demostración definiendo la siguiente función

$$L_{\lambda,\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} K_1(x) - \lambda \ K_2(x) + \frac{\alpha}{2} \left[\ K_1(x) - K_2(x) \right]^2$$

con $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$. Haciendo un breve cálculo se demuestra que $L_{\lambda,\alpha}(x)$ cumple con las siguientes propiedades

$$i) \frac{\partial}{\partial x} L_{\lambda,\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) - \lambda K_2(x)]$$

$$ii) (D_{xx}^2 L_{\lambda,\alpha})(a) = P_{\lambda} + \alpha Q$$

$$con P_{\lambda} = D_{xx}^2 (K_1 - \lambda K_2)(a) \quad y \quad Q = \frac{\partial K_2}{\partial x}(a) \left[\frac{\partial K_2}{\partial x}(a)\right]^{\top}.$$

Observemos que por el Lema 4.1.2, Q es simétrica y positiva semidefinida. Ahora, nuevamente por el Lema 4.1.2 y de la hipóstesis 2 del teorema se tiene que, si $\lambda = \lambda^*$, entonces $P_{\lambda^*} \mid_{W \times W}$, lo cual es necesario y suficiente para que $x^{\top}Q \ x = 0$, para toda $x \in W$. Lo anterior es importante, pues nos proporciona las condiciones requeridas para poder utilizar el Lema 4.1.1, el cual nos asegura que existe α^* , tal que $P_{\lambda^*} + \alpha^* Q > 0$. Es decir, $(D^2_{xx}L_{\lambda^*,\alpha^*})(a) > 0$.

A continuación, definamos $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\lambda^*,\alpha^*}(x) - L_{\lambda^*,\alpha^*}(a)$. Haciendo unos pequeños cálculos, se demuestra que F(x) cumple con las siguientes propiedades

i) F(a) = 0ii) $\frac{\partial F}{\partial x}(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x}L_{\lambda^*,\alpha^*}\right)(a) = 0$ iii) $(D^2_{xx}F)(a) = (D^2_{xx}L_{\lambda^*,\alpha^*})(a) > 0$

y por el Lema 4.1.3 existe un abierto V que contiene al punto x = a, tal que F(x) > 0, para toda $x \in V \setminus \{a\}$. Por otra parte se puede demostrar, haciendo los cálculos correspondientes, que $L_v F = 0$.

Con lo anterior, se conluye que F(x) es una función de Lyapunov tipo I y por el primer Teorema de Lyapunov x = a es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov cuando $t \to \infty$.

La ventaja del método de Arnold, como se puede observar en el teorema anterior, es que transforma el problema de buscar literalmente funciones de Lyapunov tipo I en encontrar una constante λ^* que verifique las condiciones del teorema para la combinación lineal $K_1 - \lambda^* K_2$, de las integrales primeras del sistema (4.1).

Probablemente surga la pregunta de que si realmente es ventajoso trabajar con el método de Arnold, pues en principio requiere que se conozcan explícitamente dos integrales del sistema (4.1), lo cual no es inmediato determinar para un sistema dinámico arbitrario e incluso puede resultar un problema aún más complicado. Lo anterior pudiera paracer una gran desventeja en este método, sin embargo, a pesar de que no es un asunto trivial el encontar dos integrales primeras para el sistema (4.1), es un problema ampliamente estudiado y que es abordado desde distintos enfoques. Además, una vez obtenidas las integrales primeras no sólamente nos servirán para determinar la estabilidad en puntos de equilibrio del sistema (4.1) mediante el método de Arnold, sino que nos proporcionarán, como se mencionó en el Capítulo 1, información valiosa acerca del comportamiento del sistema. Para ejemplificar lo anterior, está el hecho de que si un sistema posee una estrucutura Hamilton-Poisson entonces el Hamiltoniano y la función de Casimir proveniente de la estrutura de Poisson son integrales primeras del sistema. El problema de Hamiltonización del sistema (4.1) es un tema de estudio actual y de gran relavancia.

4.2. Métodos de energía de Casimir y Ortega-Ratiu

En esta sección mostraremos el método de energía de Casimir y el método de Ortega-Ratiu, que al igual que el método de Arnold nos proporcionan un criterio para determinar la estabilidad en un punto de equilibrio del sistema (4.1). Nuestro principal propósito es demostrar el teorema que nos muestra la equivalencia de estos tres métodos, en el sentido de que si se cumple las hipótesis requeridas para alguno de los métodos, entonces se cumplen las hipótesis requeridas para los otros dos.

En 1985, Holm D. Marsden, estudiando la estabilidad de sistemas con estructura Hamilton-Poisson, dio a conocer un método para determinar la estabilidad del (4.1) en un punto de equilibrio llamado método de energía de Casimir, el cual presentamos a continuacion.

Teorema 4.2.1. (Método de energía de Casimir). Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto $y \ v(x) \in \mathfrak{X}(U)$. Supongamos que $x = a \in U$, es un punto de equilibrio del sistema (4.1) y que $K_1, K_2 \in C^{\infty}(U)$ son integrales primeras del mismo sistema. Si existe una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^{∞} , tal que

- 1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) = 0$
- 2. $D_{xx}^2(K_1 + \varphi \circ K_2)(a)$ es positiva o negativa definida en U.

Entonces x = a es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.

Notemos como a diferencia del método de Arnold, que requiere encontrar una constante λ^* , el método de energía de Casimir requiere encontrar una función escalar φ suave. Lo anterior podría suponer una desventaja en el método, sin embargo, en algunos casos la función φ simplifica en gran medida la expresión para la integral K_2 , lo cual para fines prácticos es de gran utilidad.

Estudiando de la estabilidad de equilibrios relativos, en 1998, Ortega y Ratiu obtienen, como corolario de sus resultados sobre la estabilidad de equilibrios relativos, el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2. (Método de Ortega-Ratiu). Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto $y \ v(x) \in \mathfrak{X}(U)$. Supongamos que $x = a \in U$, es un punto de equilibrio del sistema (4.1) y que $K_1, K_2 \in C^{\infty}(U)$ son integrales primeras del mismo sistema. Si existe una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^{∞} , tal que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) = 0$ 2. $D_{xx}^2(K_1 + \varphi \circ K_2)(a)$, es positiva o negativa en $\widetilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in U \mid x^\top \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi \circ K_2)(a) \right] = 0 \right\}$

Entonces x = a es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.

Notemos la similitud entre el método de energía de Casimir y el método de Ortega-Ratiu. Pudiera pensarse que no existe diferencia relevante entre ambos métodos, sin embargo, la restricción al conjunto \widetilde{W} en la hipótesis 2 del Teorema 4.2.2, para fines prácticos, ayuda a simplificar cálculos (más si se trabaja en dimensiones mayores a tres).

Ahora, vamos a probar el teorema principal de esta sección, el cual enunciamos a continuación.

Teorema 4.2.3. Los siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1. Las hipóstesis del Teorema 4.1.1 se cumplen.
- 2. Las hipóstesis del Teorema 4.2.1 se cumplen.
- 3. Las hipóstesis del Teorema 4.2.2 se cumplen.

El siguiente lema será de ayuda en la demostración del teroema.

Lema 4.2.1. Sean $A \ y \ B$ dos matrices $n \times n$ reales arbitarias y sean $z, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $z^{\top}A \ y = z^{\top}B \ y$ si, y sólo si, A = B.

Demostración del Teorema 4.2.3. Primero demostraremos que 1 implica 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto. Consideremos el sistema (4.1) y supongamos que $a \in \mathbb{R}^3$ es un punto de equilibrio del sistema. Asumamos que las hipótesis del Teorema 4.1.1 se cumplen y consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\lambda^* t + \frac{\alpha}{2} (t - K_2(a))^2$$

donde λ^* viene dado por el Teorema 4.1.1 y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Realizando un breve cálculo tenemos que

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial x} (K_1 + \varphi \circ K_2)(x) = \frac{\partial}{\partial x} (K_1 - \lambda^* K_2)(x) + \alpha (K_2 - K_2(a)) \left(\frac{\partial K_2}{\partial x}(x)\right)$$
$$ii) \quad D^2_{xx} (K_1 + \varphi \circ K_2)(a) = P_{\lambda^*} + \alpha Q$$

con $P_{\lambda^*} = \mathcal{D}_{xx}^2 (K_1 + \lambda^* K_2)(a)$ y $Q = \frac{\partial K_2}{\partial x}(a) \left[\frac{\partial K_2}{\partial x}(a) \right]^\top$.

Vamos a probar que la hipótesis 1 del Teorema 4.2.1 se cumple. Sustituyendo x = a en i) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) = \frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(x)$$

y por la hipótesis 1 del Teorema 4.1.1 se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) = 0$$

con lo cual probamos la hipótesis 1 del Teorema 4.2.1 se cumple.

Ahora, vamos a probar que la hipótesis 2 del Teorema 4.2.1 se cumple. Notemos que por el Lema 4.1.2 Q es simétrica y positiva semidefinida. Nuevamente por el Lema 4.1.2 y de la hipótesis 2 del Teorema 4.1.1 se tiene que $P_{\lambda^*} > 0$, para toda $x \in W$; lo cual es necesario y sufuciente para que $x^{\top}Q x=0$, donde W es el conjunto definido en el Teorema 4.1.1. Lo anterior nos proporciona las condiciones requeridas para poder utilizar el Lema 4.1.1, el cual nos asegura que existe α^* , tal que $P_{\lambda^*} + \alpha^* Q > 0$, lo que implica que $D_{xx}^2(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) > 0$. Así probamos que la hipótesis 2 del Teorema 4.2.1 también se cumple y con ello demostramos la primera implicación de nuestro teorema.

A continuación demostraremos que 2 implica 3. Para demostrar esta implicación basta probar que $D_{xx}^2(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) > 0$ en

$$\widetilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in U \mid x^{\top} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi \circ K_2)(a) \right] = 0 \right\}$$

tal como en el Teorema 4.2.2. Pero por la hipótesis 2 del Teorema 4.2.1 se tiene que $D_{xx}^2(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) > 0$ un todo U y teniendo en cuenta que $\widetilde{W} \subseteq U$, la implicación queda demostrada.

Por último, vamos a probar que 3 implica 1. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.2.2 y sea $\lambda^* = -\varphi'(K_2(a))$. Primero vamos a probar que la hipótesis 1 del Teorema 4.1.1 se cumple. Realizando unos breves cálculos se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a) = \frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi \circ K_2)(a)$$

Luego, por la hipótesis 1 del Teorema 4.2.2 $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi \circ K_2)(a) = 0$, lo que implica que $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a) = 0$ y por tanto demostramos que la hipótesis 1 del Teorema 4.1.1 se cumple.

Por otra parte, definamos

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in U \mid x^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a) = 0 \right\}$$

y notemos que por la definición de \widetilde{W} en el Teorema 4.2.2 se sigue que

$$\widetilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in U \mid x^{\top} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \circ K_2)(a) = 0 \right\} \\ = \left\{ x \in U \mid \lambda^* \left[x^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a) \right] = 0 \right\}$$

y ya que λ^* puede ser cero, se tiene $W \subseteq \widetilde{W}$.

Ahora, sean $\ z,y\in \mathbb{R}^3\,$ arbitarios. Haciendo los cálculos pertinentes se obtiene la siguiente igualdad

$$z^{\top} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{D}_{xx}^{2}(K_{1} + \varphi \circ K_{2})(a) \end{array} \right] y = z^{\top} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{D}_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*} K_{2})(a) \end{array} \right] y + \\ \varphi''(K_{2}(a)) z^{\top} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial K_{2}}{\partial x}(a) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial K_{2}}{\partial x}(a) \end{array} \right)^{\top} \right] y \end{array}$$

Luego, si $z, y \in W$, entonces el segundo sumando de la igualdad anterior, por el Lema 4.1.2, es igual a cero, y por tanto

$$z^{\top} \left[D_{xx}^{2} (K_{1} + \varphi \circ K_{2})(a) \right] y = z^{\top} \left[D_{xx}^{2} (K_{1} - \lambda^{*} K_{2})(a) \right] y$$

De lo anterior y usando el Lema 4.2.1 se sigue que

$$D_{xx}^{2}(K_{1} + \varphi \circ K_{2})(a) = D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*} K_{2})(a)$$

y por la hipótesis 2 del Teorema 4.2.2 se concluye que $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a)$ es positiva o negativa definida en W, de esta manera se demuesta que la hipótesis 2 del Teorema 4.1.1 se cumple.

En resumen la equivalencia entre los 3 métodos de energía analizados en esta sección, muestran que si se determina la estabilidad en un punto de equilibrio del sistema (4.1) utilizando dos integrales primeras con alguno de los tres métodos, entonces los otros dos también proporcionarán la estabilidad del punto de equilibrio utilizando las mismas dos integrales primeras. De este modo podemos elegir el método más conveniente desde un punto de vista práctico. De igual manera, dado que los cálculos pueden llegar a ser engorrosos en algunos casos, es importante tener en mente que si no se puede determinar la estabilidad en un punto de equilibrio del sistema (4.1) utilizando las integrales primeras K_1 y K_2 con alguno de los tres métodos, entonces no podemos determinar la estabilidad en el punto de equilibrio utilizando los otros dos métodos con las mismas dos integrales primeras.

4.3. Aplicación al sistema del trompo de Euler

El movimiento de un cuerpo rígido sometido a fuerzas externas es uno de los problemas más fascinantes de la mecánica clásica. El extraño comportamiento de un trompo que apoyado en el piso rehusa caer ha atraido a niños y adultos desde tiempo inmemorial; la teoría sin lugar a duda también atrae a físicos y matemáticos por igual. Ha de saberse que los sistemas que modelan el movimiento de un trompo bajo la influencia de la gravedad no son en general integrables. Sin embargo, hay tres famosos casos que si lo son, el de Euler, Lagrange y Kovalevskaya.

El trompo de Euler describe un trompo sin ningún tipo de simetría particular que se mueve en ausencia de fuerzas de torsión. En esta sección utilizaremos los métodos de energía para determinar bajo que condiciones los puntos de equilibrio del sistema que modela el movimiento anteriormente descrito, denominado trompo de Euler, son estables en el sentido de Lyapunov. Abordaremos los casos de los sistemas del trompo de Euler asociados a las álgebras SO(3) y SL(2; \mathbb{R}).

4.3.1. Caso SO(3)

Consideremos el sistema del trompo de Euler

$$\dot{x}_1 = (c_2 - c_3)x_2x_3
\dot{x}_2 = (c_3 - c_1)x_1x_3
\dot{x}_3 = (c_1 - c_2)x_1x_2$$
(4.2)

con $c_i \neq 0 \in \mathbb{R}$ y $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$; i, j = 1, 2, 3.

Notemos que el campo vectorial asociado al sistema del trompo de Euler está bien definido en $U = \mathbb{R}^3$. No es difícil verificar que el sistema (4.2) admite las siguientes dos integrales primeras, que también estan bien definidas en todo \mathbb{R}^3 ,

$$K_1 = \frac{1}{2}(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Lo primero que debemos determinar, para poder aplicar los métodos de energía, son los puntos de equilibrio del sistema (4.2). Mediante un sencillo cálculo se obtiene que éstos son

$$a_i = \delta e_i \qquad y \qquad a_0 = (0, 0, 0) \tag{4.3}$$

donde $\{e_i\}$ representa la base canónica en \mathbb{R}^3 y $\delta \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, con i = 1, 2, 3. Observemos que no se trata de puntos de equilibrio aislados sino más bien de una cantidad no numerable de éstos, precisando cada punto preteneciente a algún eje coordenado en el espacio de fases es un punto de equilibrio del sistema (4.2).

Con los elementos anteriores, procederemos a aplicar los respectivos métodos de energía para determinar si es posible bajo ciertas condiciones en los parámetros c_i que cada punto de equilibrio del sistema (4.2) sea estable en el sentido de Lyapunov.

Método de Arnold

Desarrollaremos los cálculos primeramente en torno a los puntos de equilibrio $a_1 = \delta e_1$, ya que por simetría los casos i = 2, 3; se realizan de manera análoga, y posteriormente para el punto de equilibrio $a_0 = (0, 0, 0)$. En el primer caso se tiene que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1) = [(c_1 - \lambda^*)\delta, 0, 0], \text{ por tanto}$ $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1) = 0$

si, y sólo si, $\lambda^* = c_1$.

2.
$$D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 - c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 - c_1 \end{bmatrix}$$
, con lo cual
 $w^\top \begin{bmatrix} D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1) \end{bmatrix} w = (c_2 - c_1)w_2^2 + (c_3 - c_1)w_3^2$

donde $w \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_1) = 0 \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w = (0, w_1, w_2) \right\}$. Por tanto, $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1)$ es positiva definida en W si $c_2 - c_1 > 0$ y $c_3 - c_1 > 0$, y es negativa definida en W si $c_2 - c_1 < 0$ y $c_3 - c_1 > 0$,

Para el punto de equilibrio a_0 , se tiene que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0) = 0$. Por tanto, se puede fijar $\lambda^* \in \mathbb{R}$ de manera arbitraria.

2.
$$D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{0}) = \begin{bmatrix} c_{1} - \lambda^{*} & 0 & 0\\ 0 & c_{2} - \lambda^{*} & 0\\ 0 & 0 & c_{3} - \lambda^{*} \end{bmatrix}, \text{ con lo cual}$$
$$w^{\top} \begin{bmatrix} D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{0}) \end{bmatrix} w = (c_{1} - \lambda^{*})w_{1}^{2} + (c_{2} - \lambda^{*})w_{2}^{2} + (c_{3} - \lambda^{*})w_{3}^{2}$$

donde $w \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_0) = 0 \right\} = \mathbb{R}^3$. Por tanto, $D^2_{xx}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0)$ es positiva definida en W si $c_i - \lambda^* > 0$ y es negativa definida en W si $c_i - \lambda^* < 0$, para toda i = 1, 2, 3.

Notemos que sin pérdida de generalidad podemos tomar $\lambda^* = 0$ y en tal caso las condiciones para que $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0)$ sea positiva o negativa definida en W se reducen a que $c_i > 0$ ó $c_i < 0$, para toda i = 1, 2, 3; respectivamente.

Empleando todos los resultados anteriores y utilizando el Teorema 4.1.1 desprendemos la siguiente proposición.

Proposición 4.3.1. El sistema del trompo de Euler

 $\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& (c_2-c_3)x_2x_3\\ \dot{x}_2 &=& (c_3-c_1)x_1x_3\\ \dot{x}_3 &=& (c_1-c_2)x_1x_2 \end{array}$

con $c_i \neq 0 \in \mathbb{R}$ y $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$; i, j = 1, 2, 3. Posee unicamente los siguientes puntos de equilibrio

 $a_i = \delta e_i$ y $a_0 = (0, 0, 0)$

donde $\{e_i\}$ representa la base canónica en \mathbb{R}^3 y $\delta \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, con i = 1, 2, 3.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov para cada punto de equilibrio está determinado por las siguientes condiciones

- i) Los puntos de equilibrio a_i , para cada i = 1, 2, 3 fijo; son estables en el sentido de Lyapunov si $c_j c_i > 0$ con $i \neq j$, para todo j = 1, 2, 3.
- ii) Los puntos de equilibrio a_i , para cada i = 1, 2, 3 fijo; son estables en el sentido de Lyapunov si $c_j c_i < 0$ con $i \neq j$, para todo j = 1, 2, 3.
- iii) El origen a_0 es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov si $c_1, c_2, c_3 > 0$ ó $c_1, c_2, c_3 < 0$.
Método de energía de Casimir

Comenzaremos observando que el campo que determina al sistema (4.2) está definido en el abierto $U = \mathbb{R}^3$, aclarar esto es importante para poder utilizar correctamente el método en cuestión (Teorema 4.2.1). Ahora, definamos para cada punto de equilibrio a_i del sistema (4.2), con i = 1, 2, 3; las siguientes funciones escalares

$$\varphi_i(t) = -c_i t + \frac{\alpha}{2} (t - K_2(a_i))^2$$

con $\alpha \neq 0$.

Desarrollaremos en primer lugar los cálculos para el caso i = 1, ya que los casos restantes por simetria se realizan de manera análoga, posteriormente efectuaremos el análisis en torno al punto de equilibrio a_0 . Para el primer caso tenemos que

1.
$$\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1) = [0, (c_2 - c_1)x_2, (c_3 - c_1)x_3]_{x=(\delta,0,0)} = 0$$

2. $D^2_{xx}(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1) = D^2_{xx}(K_1 - c_1K_2)(a_1) + \alpha \left[\frac{\partial K_2}{\partial x}(a_1)\right]^\top \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_1)$
 $= \begin{bmatrix} \alpha \delta^2 & 0 & 0\\ 0 & c_2 - c_1 & 0\\ 0 & 0 & c_3 - c_1 \end{bmatrix}$
(4.4)

con lo cual tenemos que

$$w^{\top} \left[D_{xx}^{2} (K_{1} + \varphi_{1} \circ K_{2})(a_{1}) \right] w = \alpha \delta^{2} w_{1}^{2} + (c_{2} - c_{1}) w_{2}^{2} + (c_{3} - c_{1}) w_{3}^{2}$$

con $w \in \mathbb{R}^3$. Por tanto fijando $\alpha > 0$, la matriz $D_{xx}^2(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1)$ no puede ser negativa definida, sin embargo, es positiva definida bajo la condición que $c_2 - c_1 > 0$ y $c_3 - c_1 > 0$. De igual manera, fijando $\alpha < 0$, la matriz $D_{xx}^2(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1)$ no puede ser positiva definida, sin embargo, es negativa definida bajo la condición que $c_2 - c_1 < 0$ y $c_3 - c_1 < 0$.

Notemos como las condiciones anteriores para las constantes c_i , i = 1, 2, 3; coinciden con las halladas mediante el método de Arnold. Por medio de un análisis similar se puede constatar que para los puntos de equilibrio a_2 y a_3 las condiciones también coinciden.

Para el punto de equilibrio a_0 definimos la función escalar $\varphi_0(t) = t \left(\frac{\alpha}{2}t - \lambda^*\right)$, de esta manera se tiene que

1.
$$\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1) = [(c_1 - \lambda^*), (c_2 - \lambda^*)x_2, (c_3 - \lambda^*)x_3]_{x=(0,0,0)} = 0$$

2. $D^2_{xx}(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1) = D^2_{xx}(K_1 - c_1K_2)(a_1) + \alpha \left[\frac{\partial K_2}{\partial x}(a_1)\right]^\top \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_1)$

$$= \begin{bmatrix} c_1 - \lambda^* & 0 & 0\\ 0 & c_2 - \lambda^* & 0\\ 0 & 0 & c_3 - \lambda^* \end{bmatrix}$$
(4.5)

con lo cual tenemos que

$$w^{\top} \left[D_{xx}^{2} (K_{1} + \varphi_{1} \circ K_{2})(a_{1}) \right] w = (c_{1} - \lambda^{*})w_{1}^{2} + (c_{2} - \lambda^{*})w_{2}^{2} + (c_{3} - \lambda^{*})w_{3}^{2}$$

con $w \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0)$ es positiva definida si $c_i - \lambda^* > 0$ y es negativa definida si $c_i - \lambda^* < 0$, para toda i = 1, 2, 3.

Notemos que sin pérdida de generalidad podemos tomar $\lambda^* = 0$ y en tal caso las condiciones para que $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0)$ sea positiva o negativa definida se reducen a que $c_i > 0$ ó $c_i < 0$, para toda i = 1, 2, 3; respectivamente.

Reiteramos el notar que las condiciones anteriores para las constantes c_i , i = 1, 2, 3; son iguales a las que se determinan mediante el método de Arnold.

Empleando todos los resultados anteriores y utilizando el Teorema 4.2.1 se desprende la Proposición 4.3.2.

Método de Ortega-Ratiu

Para aplicar este método (Teorema 4.2.2) al sistema (4.2), en virtud de la estrecha similitud que guarda con las hipótesis necesitadas para utilizar el método de energía de Casimir (Teorema 4.2.1), nos basta determinar el conjunto \widetilde{W} requerido por el Teorema 4.2.2 para definir, en cada punto de equilibrio a_i , $i = 0, \ldots, 3$; las condiciones para las constantes c_i del sistema (4.2) bajo las cuales la matriz $D_{xx}^2(K_1 + \varphi_i \circ K_2)(a_i)$ es positiva o negativa definida en dicho conjunto, donde las funciones escalares φ_i son las mismas que se definieron en el método anterior.

Para el punto de equilibrio a_1 tenemos que

$$\widetilde{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^{\top} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 \circ K_2)(a_1) \right] = 0 \right\} \\ = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w = (0, w_2, w_3) \right\}$$

asi, usando (4.4) se tiene que

$$w^{\top} \left[D_{xx}^{2} (K_{1} + \varphi_{1} \circ K_{2})(a_{1}) \right] w = (c_{2} - c_{1})w_{2}^{2} + (c_{3} - c_{1})w_{3}^{2}$$

con $w \in \widetilde{W}$. Por tanto la matriz $D^2_{xx}(K_1 + \varphi_1 \circ K_2)(a_1)$ es positiva definida en \widetilde{W} si $c_2 - c_1 > 0$ y $c_3 - c_1 > 0$, y es negativa definida en \widetilde{W} si $c_2 - c_1 < 0$ y $c_3 - c_1 < 0$.

Podemos observar de los cálculos anteriores como las condiciones para las constantes c_i son las mismas que las encontradas por medio del método de Arnold. Realizando un análisis similar para los puntos de equilibrio a_2 y a_3 se puede confirmar que las condiciones halladas también coinciden.

Ahora, para el punto de equilibrio a_0 se tiene que

$$\widetilde{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^\top \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_0 \circ K_2)(a_0) \right] = 0 \right\}$$
$$= \mathbb{R}^3$$

y por tanto, para este punto de equilibrio el análsis y las concluciones son las mismas que en el método de energía de Casimir.

Con todos los resultados anteriores y usando el Teorema 4.2.2 se concluye la Proposición 4.3.2.

Por último, recordemos que si el sistema dinámico (4.1) admite una integral primera, las trayectorias de este sistema permanecen en las superficies de nivel de la integral primera. Utilizando este hecho, realizaremos un breve análisis para determinar que, si al restringir el sistema (4.2) a las superficies de nivel de la integral primera K_2 , existen valores de δ tales que algunos de los puntos de equilibrio dados por (4.3) son puntos de equilibrio del sistema restringido y si es posible determinar estabilidad en cada uno de ellos utilizando la Proposición 4.3.1. Con este fin, consideremos la ecuación $K_2 = constante$, esto es

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = p \tag{4.6}$$

con $p \in \mathbb{R}$. Dividiremos el análisis en tres casos, que corresponde a los valores p = 0, p > 0 y p < 0.

Caso p = 0

En este caso el único punto que satisface (4.8) es el origen a_0 el cual es punto de equilibrio del sistema (4.2) y la estabilidad de este punto, bajo las condiciones de la Proposición 4.3.1, depende únicamente de los parámatros c_i , i = 1, 2, 3; del sistema (4.2).

Caso p > 0

En este caso las superficies de nivel de la integral primera K_2 son esferas centradas en el origen de radio $\sqrt{2p}$. Restringiendo el sistema (4.2) a estas superficies resulta que solamente posee seis puntos de equilibrio los cuales son, en términos de (4.3),

$$a_i^{\pm} = \delta^{\pm} e$$

con $\delta^{\pm} = \pm \sqrt{2p}$, i = 1, 2, 3. Lo cual concuerda con lo que se puede apreciar geométricamente, ya que como se observó anteriormente (4.3) nos dice que cada punto perteneciente a algún eje

coordenado del espacio de fases es un punto de equilibrio y éstos son lo únicos que posee el sistema (4.2), por tanto los puntos de equilibrio del sistema (4.2) restringido a las superficies de nivel de K_2 serán las intersecciones de éstas con los ejes coordenados, que en este caso son las intersecciones de estos ejes con las esferas de radio $\sqrt{2p}$, tal como se ilustra en la Figura 4.1. La estabilidad de cada uno de estos puntos de equilibrio, en el contexto de nuestro estudio y bajo las condiciones de la Proposición 4.3.1, depende únicamente de los parámatros c_i , i = 1, 2, 3; del sistema (4.2).



Figura 4.1: Superficie de nivel $K_2 = p$, con p > 0

Caso p < 0

En este caso no existe punto alguno que satisfaga (4.8).

4.3.2. Caso $Sl(2; \mathbb{R})$

Consideremos el sistema del trompo de Euler

$$\dot{x}_1 = -(c_2 + c_3)x_2x_3 \dot{x}_2 = (c_1 + c_3)x_1x_3 \dot{x}_3 = (c_1 - c_2)x_1x_2$$

$$(4.7)$$

con $c_i \neq 0 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3; c_1 + c_2 \neq 0, c_1 + c_3 \neq 0 \text{ y } c_1 \neq c_2.$

Notemos que el campo vectorial asociado al sistema del trompo de Euler está bien definido en $U = \mathbb{R}^3$. No es difícil verificar que el sistema (4.2) admite las siguientes dos integrales primeras, que también estan bien definidas en todo \mathbb{R}^3 ,

$$K_1 = \frac{1}{2}(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$$

Lo primero que debemos determinar, para poder aplicar los métodos de energía, son los puntos de equilibrio del sistema (4.2). Mediante un sencillo cálculo se obtiene que éstos son

$$a_i = \delta e_i \qquad y \qquad a_0 = (0, 0, 0)$$

donde $\{e_i\}$ representa la base canónica en \mathbb{R}^3 y $\delta \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, con i = 1, 2, 3.

Con los elementos anteriores, procederemos a aplicar el método de Arnold (Teorema 4.1.1) para determinar si es posible bajo ciertas condiciones en los parámetros c_i que cada punto de equilibrio del sistema (4.2) sea estable en el sentido de Lyapunov. Lo haremos únicamente con el método de Arnold ya que como se mostró en el Caso SO(3) se obtienen los mismos resultados con los otros dos métodos.

Método de Arnold

Desarrollaremos los cálculos primeramente en torno al punto de equilibrio a_1 . En este caso se tiene que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1) = [(c_1 - \lambda^*)\delta, 0, 0], \text{ por tanto}$ $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1) = 0$

si, y sólo si, $\lambda^* = c_1$.

2.
$$D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{2} - c_{1} & 0 \\ 0 & 0 & c_{1} + c_{3} \end{bmatrix}$$
, con lo cual
 $w^{\top} \begin{bmatrix} D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{1}) \end{bmatrix} w = (c_{2} - c_{1})w_{2}^{2} + (c_{1} + c_{3})w_{3}^{2}$

donde $w \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_1) = 0 \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w = (0, w_1, w_2) \right\}$. Por tanto, $D^2_{xx}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_1)$ es positiva definida en W si $c_2 - c_1 > 0$ y $c_1 + c_3 > 0$, y es negativa definida en W si $c_2 - c_1 < 0$ y $c_1 + c_3 < 0$.

Para el punto de equilibrio a_2 , se tiene que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_2) = [0, (c_2 - \lambda^*)\delta, 0], \text{ por tanto}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_2) = 0$$

si, y sólo si, $\lambda^* = c_2$.

2.
$$D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{2}) = \begin{bmatrix} c_{1} - c_{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{2} + c_{3} \end{bmatrix}$$
, con lo cual
 $w^{\top} \begin{bmatrix} D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{2}) \end{bmatrix} w = (c_{1} - c_{2})w_{1}^{2} + (c_{2} + c_{3})w_{3}^{2}$

donde $w \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_2) = 0 \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w = (w_1, 0, w_3) \right\}.$ Por tanto, $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_2)$ es positiva definida en W si $c_1 - c_2 > 0$ y $c_2 + c_3 > 0$, y es negativa definida en W si $c_1 - c_2 < 0$ y $c_2 + c_3 > 0$.

Para el punto de equilibrio a_3 , se tiene que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_3) = [0, 0, (c_3 + \lambda^*)\delta], \text{ por tanto}$ $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_2) = 0$

si, y sólo si, $\lambda^* = -c_3$.

2.
$$D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_3) = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & 0 & 0\\ 0 & c_2 + c_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
, con lo cual
 $w^\top \begin{bmatrix} D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_3) \end{bmatrix} w = (c_1 + c_3)w_1^2 + (c_2 + c_3)w_2^2$

donde $w \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^\top \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_3) = 0 \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w = (w_1, w_2, 0) \right\}$. Por tanto, $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_3)$ es positiva definida en W si $c_1 + c_3 > 0$ y $c_2 + c_3 > 0$, y es negativa definida en W si $c_1 + c_3 < 0$ y $c_2 + c_3 > 0$,

Para el punto de equilibrio a_0 , se tiene que

1. $\frac{\partial}{\partial x}(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0) = 0$. Por tanto, se puede fijar $\lambda^* \in \mathbb{R}$ de manera arbitraria.

2.
$$D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{0}) = \begin{bmatrix} c_{1} - \lambda^{*} & 0 & 0\\ 0 & c_{2} - \lambda^{*} & 0\\ 0 & 0 & c_{3} + \lambda^{*} \end{bmatrix}, \text{ con lo cual}$$
$$w^{\top} \begin{bmatrix} D_{xx}^{2}(K_{1} - \lambda^{*}K_{2})(a_{0}) \end{bmatrix} w = (c_{1} - \lambda^{*})w_{1}^{2} + (c_{2} - \lambda^{*})w_{2}^{2} + (c_{3} + \lambda^{*})w_{3}^{2}$$

donde $w \in W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w^{\top} \frac{\partial K_2}{\partial x}(a_0) = 0 \right\} = \mathbb{R}^3$. Por tanto, $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0)$ es positiva definida en W si $c_i - \lambda^* > 0$ y es negativa definida en W si $c_i - \lambda^* < 0$, para toda i = 1, 2, 3.

Notemos que sin pérdida de generalidad podemos tomar $\lambda^* = 0$ y en tal caso las condiciones para que $D_{xx}^2(K_1 - \lambda^* K_2)(a_0)$ sea positiva o negativa definida en W se reducen a que $c_i > 0$ ó $c_i < 0$, para toda i = 1, 2, 3; respectivamente.

Empleando todos los resultados anteriores y utilizando el Teorema 4.1.1 desprendemos la siguiente proposición.

Proposición 4.3.2. El sistema del trompo de Euler

$$\dot{x}_1 = -(c_2 + c_3)x_2x_3 \dot{x}_2 = (c_1 + c_3)x_1x_3 \dot{x}_3 = (c_1 - c_2)x_1x_2$$

con $c_i \neq 0 \in \mathbb{R}$, i = 1, 2, 3; $c_1 + c_2 \neq 0$, $c_1 + c_3 \neq 0$ y $c_1 \neq c_2$. Posee unicamente los siguientes puntos de equilibrio

$$a_i = \delta e_i \qquad y \qquad a_0 = (0, 0, 0)$$

donde $\{e_i\}$ representa la base canónica en \mathbb{R}^3 y $\delta \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, con i = 1, 2, 3.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov para cada punto de equilibrio está determinado por las siguientes condiciones

- i) Los puntos de equilibrio a_1 son estables en el sentido de Lyapunov si $c_2 > c_1 > -c_3$ ó $c_2 < c_1 < -c_3$.
- ii) Los puntos de equilibrio a_2 son estables en el sentido de Lyapunov si $c_1 > c_2 > -c_3$ ó $c_1 < c_2 < -c_3$.
- iii) Los puntos de equilibrio a_3 son estables en el sentido de Lyapunov si $c_1 + c_3 > 0$ y $c_2 + c_3 > 0$ ó $c_1 + c_3 < 0$ y $c_2 + c_3 < 0$.
- iv) El origen a_0 es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov si $c_1, c_2, c_3 > 0$ ó $c_1, c_2, c_3 < 0$.

Por último, al igual que en el Caso SO(3), realizaremos un breve análisis para determinar si existen valores de δ tales que algunos de los puntos de equilibrio dados por (4.3) son puntos de equilibrio del sistema restringido a las superficies de nivel de la integral primera K_2 y si es posible utilizar la Proposición 4.3.1 pra determinar estabilidad en cada uno de esos puntos de equilibrio. Recordemos que, por una observación hecha en el Caso SO(3), los puntos de equilibrio del sistema (4.2) restringido a las superficies de nivel de K_2 serán las intersecciones de éstas con los ejes coordenados del espacio de fases.



Figura 4.2: Superficie de nivel $K_2 = 0$

Consideremos la ecuación $K_2 = constante$, esto es

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = p \tag{4.8}$$

con $p \in \mathbb{R}$. Dividiremos el análisis en tres casos, que corresponde a los valores p = 0, p > 0 y p < 0.

Caso p = 0

En este caso la superficie de nivel de la integral primera K_2 resulta ser un cono (cono infinito) y al restringir el sistema (4.2) a esta superficie el único punto de equilibrio que posee es el origen a_0 (ver Figura 4.2) cuya estabilidad, en el contexto de nuestro estudio, depende únicamente de los parámetros c_i , i = 1, 2, 3; del sistema (4.2) bajo las condiciones de la Proposición 4.3.2.

Caso p > 0

En este caso las superficies de nivel de la integral primera K_2 son hiperboloides de una hoja. Restringiendo el sistema (4.2) a estas superficies resulta que posee solamente cuatro puntos de equilibrio los cuales son, en términos de (4.3),

$$a_i^{\pm} = \delta^{\pm} e_i$$

con $\delta^{\pm} = \pm \sqrt{2p}$, i = 1, 2. Lo cual concuerda con lo que se puede apreciar geométricamente en la Figura 4.3 La estabilidad de cada uno de estos puntos de equilibrio, en el contexto de nuestro estudio y bajo las condiciones de la Proposición 4.3.2, depende únicamente de los parámatros c_i , i = 1, 2, 3; del sistema (4.2).



Figura 4.3: Superficie de nivel $K_2 = p$, con p > 0

Caso p < 0

En este caso las superficies de nivel de la integral primera K_2 son hiperboloides de dos hojas. Restringiendo el sistema (4.2) a estas superficies resulta que posee solamente dos puntos de equilibrio los cuales son, en términos de (4.3),

$$a_3^{\pm} = \delta^{\pm} e_3$$

con $\delta^{\pm} = \pm \sqrt{-2p}$. Lo cual concuerda con lo que se puede apreciar geométricamente en la Figura 4.4. La estabilidad de cada uno de estos puntos de equilibrio, en el contexto de nuestro estudio y bajo las condiciones de la Proposición 4.3.2, depende únicamente de los parámatros c_i , i = 1, 2, 3; del sistema (4.2).



Figura 4.4: Superficie de nivel $\ K_2=p,\ {\rm con}\ p<0$

Apéndice

Apéndice A

Formas Bilineales y Formas Cuadráticas

Se analizará de manera general el espacio de las formas bilineales sobre un espacio vectorial real de dimension finita. Se introduce la matriz de una forma bilineal en una base ordenada y se establece el isomorfismo entre el espacio de las formas y el espacio de matrices $n \times n$. Se define el rango de una forma bilineal y se introducen las formas bilineales simétricas.

Formas bilineales. Sea V un espacio vectorial real. Una *forma bilineal* en V es una función $f: V \times V \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u) = \alpha_1 f(v_1, u) + \alpha_2 f(v_2, u)$$
$$f(v, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(v, u_1) + \alpha_2 f(v, u_2)$$

para todo $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Nótese que el nombre bilineal deriva del hecho que, f es lineal como función de uno de cada uno de sus argumentos. El conjunto de todas las formas bilineales sobre V es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $V \times V$ en \mathbb{R} .

Al igual que las transformaciones lineales, fijando una base en V, las formas bilineales pueden caracterizarse por una matriz. Esto último lo expresamos en los siguientes términos: Sea $n = \dim(V), \{e_i\}_{i=1}^n$ una base en $V \neq v, u$ vectores en V con

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$
 y $u = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

De la definición de forma bilineal, se tiene que

$$f(v,u) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} x_i y_j = x^{\top} B y$$
 (A.1)

donde $B_{ij} = f(e_i, e_j)$ y $B = [B_{ij}]_{n \times n}$, siendo $x \in y$ los vectores de coordenadas de v y u, respectivamente, en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$. A la matriz B se le denomina *la matriz de B* en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$.

De lo anterior, toda forma bilineal en V es del tipo (A.1) para alguna matriz $n \times n$ con entradas reales. Recíprocamente, dada una matriz $B n \times n$, (A.1) define una forma bilineal

 f_B sobre V. El siguiente resultado asegura la veracidad de lo anteriormente mencionado,

Proposición A.0.3. Sea V un espacio vectorial real. Para cada base $\{e_i\}_i^n$ en V, la función que asocia a cada forma bilineal en V su matriz en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$, es un isomorfismo del espacio de las formas bilineales sobre el espacio de las matrices $n \times n$ sobre \mathbb{R} .

La demostración de la proposición anterior puede ser consultada en la referencia [9, p. 356]. En lo que resta del texto se referirá a la matriz de f asociada a una base arbitraria, únicamente como la matriz de f, salvo que sea importante distinguirla.

Al igual que para las transformaciones lineales, interesa saber como se transforma la matriz de una forma bilineal bajo cambios de base. Para ello, sean $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ dos bases distintas en V, si

$$v = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \widetilde{e}_i \qquad y \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i \widetilde{e}_i$$

se sigue que

$$f(v,u) = \widetilde{x}^\top \widetilde{B} \ \widetilde{y}$$

donde \widetilde{B} es la matriz de f en la base $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^n$, siendo \widetilde{x} e \widetilde{y} los vectores de coordenadas de v y u respectivamente en la misma base.

Si U es la matriz de transición entre las bases, es decir,

$$\widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^n U_{ji} e_j,$$

entonces de la Proposición A.0.3 se sigue

$$\widetilde{B} = U^{\top} B \ U \tag{A.2}$$

donde *B* es la matriz de *f* en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$, con $U = [U_{ji}]_{n \times n}$ y $\det(U) \neq 0$.

Una consecuencia de la fórmula (A.2) para el cambio de base es que si $B ext{ y } \tilde{B}$ son matrices que representan la misma forma bilineal en V en bases diferentes, entonces $B ext{ y } \tilde{B}$ tienen el mismo rango. De esta manera, se define el *rango* de una forma bilineal f como el rango de la matriz B de f. Se denotará el rango de la forma bilineal f como rank(f). Se define el (espacio nulo) núcleo de una forma bilineal f, como

$$\ker(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in V \mid f(v, u) = 0, \quad \forall v \in V \}.$$

Es importante observar en la definición la posición que el vector u ocupa dentro del argumento de la forma bilineal f. Se dirá que la forma bilineal f es no degenerada si $\ker(f) = 0$, lo que es equivalente a pedir que $\det(B) \neq 0$, con B la matriz de f.

Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial y f una forma bilineal en V, se define el *complemento ortogonal* de W como

$$W^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in V \mid f(w, u) = 0 \quad \forall w \in W \}.$$

Es interesente mencionar que en el contexto de la definición anterior, el núcleo de una forma bilineal f sobre V, se puede considerar como el complemento ortogonal del espacio vectorial V. Es conocido que en general $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) \ge \dim(V)$. Por ello, se mostrará el siguiente criterio que da condiciones para que se de la igualdad

Criterio A.0.1. Sea V un espacio vectorial $y \ W \subset V$ subespacio vectorial. Sea f una forma bilineal en V. Si $f|_W$ es no degenerada, entonces

$$V = W \oplus W^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad W \cap W^{\perp} = \{0\}$$

 $donde ~~f\big|_W ~~es~la~restricción~de~la~forma~bilineal~f~a~~W.$

Formas bilineales simétricas. Una pregunta importante al momento de estudiar formas bilineales es la siguiente: si f es una forma bilineal en V cuándo existe una base de V en la que f esté representada por una matriz diagonal?. Se mostrará que esto es posible si, y sólo si, f es una forma bilineal simétrica.

Sea V un espacio vectorial real y f una forma bilineal en V. Se dice que f es una forma bilineal simétrica si

$$f(v,u) = f(u,v)$$

para cualesquiera $u, v \in V$.

Es de notar de la definición anterior, que f es una forma bilineal simétrica si, y sólo si, su matriz B es simétrica, es decir, $B^{\top} = B$. En particular, si existe una base en V tal que la forma bilineal f esté representada por una matriz diagonal, entonces f es simétrica, ya que cualquier matriz diagonal es una matriz simétrica. La proposición que se enuncia a continuación muestra que dicha base siempre existe.

Proposición A.O.4. Sea V un espacio vectorial real. Cada forma bilineal f en V, admite una base ortogonal en V $\{e_i\}_{i=1}^n$, es decir, $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Demostración. Supongamos que dim(V) = n. Si $f \equiv 0$ ó n = 1, el teorema es evidente. Por tanto, se puede suponer que $f \neq 0$ y n > 1. Como $f \neq 0$, existe $w \neq 0$ en V tal que $f(w, w) \neq 0$.

Sea $W = \langle w \rangle$, esto es, el subespacio de V generado por el vector w. Luego, $f \mid_W$ es no degenerada y por el Criterio A.0.1 se sigue que $V = W \oplus W^{\perp}$.

Haciendo $e_1 = w$, aplicando el proceso anterior a la forma bilineal simétrica $f_1 = f \mid_{W^{\perp}} y$ continuando inductivamente construimos la base ortogonal $\{e_i\}_{i=1}^n, i = 1, \ldots, n$.

Formas cuadráticas. Sea V un espacio vectorial. Una forma cuadrática en V es una función $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, para toda $u, v \in V$

- 1. q(-v) = q(v)
- 2. La función $\ f_q:\ V\times V\longrightarrow \mathbb{R} \$ definida como

$$f_q(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left[q(u+v) - q(u) - q(v) \right]$$
(A.3)

es una forma bilineal.

El lado derecho de la igualdad en (A.3) se conoce como *polarización* de q.

Nótese que la forma bilineal (A.3) asociada a la polarización de q es simétrica. Las formas cuadráticas y las formas bilineales asociadas a su respectiva polarización cumplen dos propiededes interesantes que es conveniente mencionar, para ello enunciamos la siguiente proposición.

Proposición A.0.5. Sea V un espacio vectorial. Sea q una forma cuadrática en V y f_q la forma bilineal asociada a la polarización de q. Entonces

- 1. q(0) = 0
- 2. $q(u) = f_q(u, u)$, para toda $u \in V$

Demostración. Sea v = -u con $u \in V$. Sustituyendo v en (A.3) se sigue que

$$f_q(u, u) = \frac{1}{2} \left[2q(u) - q(0) \right]$$
(A.4)

luego, haciendo u = 0 se tiene que

$$\frac{1}{2} \left[2q(0) - q(0) \right] = 0$$

por lo que se concluye que q(0) = 0. Por último de (A.4) se tiene que

$$f_q(u, u) = q(u).$$

La siguiente proposición es importante ya que, junto con la definición de forma cuadrática en V, asegura una correspondencia entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas.

Proposición A.0.6. Sea V un espacio vectorial real y sea f una forma bilineal simétrica sobre V. Entonces la función definida por

$$q_f(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(u, u)$$

es una forma cuadrática en V para todo $u \in V$.

Demostración. Sean $u, v \in V$, luego

$$q_f(-u) = f(-u, -u)$$

= $f(u, u)$
= $q_f(u)$.

Por otra parte, nótese que

$$f(u,v) = \frac{1}{2} [f(u+v,u+v) - f(u,u) - f(v,v)] \\ = \frac{1}{2} [q_f(u+v) - q_f(u) - q_f(v)]$$

la cuál por hipótesis es una forma bilineal.

Debido a la correspondencia que existe entre formas cuadráticas y formas bilineles simétricas, se pueden hacer consideraciones análogas a las que se hicieron para formas bilineales, y obtener resultados que son muy útiles para el estudio de formas cuadráticas. Por ejemplo, si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base en V y

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

un vector en V, por la Proposición A.0.5 se tiene que

$$q(v) = x^{\top} B x , \qquad (A.5)$$

donde x es el vector de coordenadas de v en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$ y B es la matriz de q cuyos elementos se definen como $B_{ij} = b_q(e_i, e_j) = \frac{1}{2} [q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)].$

Lo anterior indica que cada forma cuadrática en V se caracteriza por una matriz cuadrada y que además resulta ser simétrica. Al igual que para formas bilineales, interesa saber como se

transforma dicha matriz bajo cambios de base. Para ello, sea q una forma cuadrática en V y sean $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ dos bases distintas en V, si U es la matriz de transición, es decir,

$$\widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^n U_{ji} e_j$$

entonces la matriz de q en la base $\{\widetilde{e}_i\}$, es

$$\widetilde{B} = U^{\top} B \ U$$

donde *B* es la matriz de *q* en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$, con $U = [U_{ji}]_{n \times n}$ y $\det(U) \neq 0$.

Se denotará el *rango* de una forma cuadrática en V, q, por rank(q), la cual se define como el rango de su matriz B, es decir, rank(q) = rank(B).

Se mostró en líneas anteriores que para cada forma bilineal simétrica existe una base ortogonal, esto es, una base en la cual la matriz que representa a la forma bilineal simétrica es una matriz diagonal. Un resultado análogo afirma que para cada forma cuadrática en V, q, existe una base en la cual la matriz de q no sólo es diagonal, sino que los elementos de la diagonal son únicamente 1's, -1s y/ó 0's. La proposición que se presenta a continuación, quizá la más importante de esta sección, formaliza lo anteriormente expuesto.

Proposición A.0.7. Sea V un espacio vectorial real, con $\dim(V) = n$. Si q es una forma cuadrática en V, entonces existe una **base canónica** en V $\{e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$, tal que

$$q(v) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$$

para toda $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ en V y donde $r = \operatorname{rank}(q) \le n$ y s no depende de la elección de la base canónica. A $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se le denomina **índice de inercia**.

Demostración. Supongamos que rank(q) = r. Por la Proposición A.0.4 existe una base ortogonal $\{\tilde{e}_i\}$ en V en la cual la matriz B de q se puede expresar como

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & B_{ss} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & B_{rr} & & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

con $B_{11} \neq 0, \ldots, B_{rr} \neq 0.$

De lo anterior y de la fórmula (A.5) se sigue que, para cada cada $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{e}_i$ en V,

$$q(v) = B_{11}x_1^2 + \dots + B_{rr}x_r^2.$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que

$$B_{11} > 0, \ldots, B_{ss} > 0 \qquad y \qquad B_{s+1 \ s+1} < 0, \ldots, B_{rr} < 0.$$

Haciendo

$$e_i = \frac{\widetilde{e}_i}{\sqrt{B_{ii}}}, \quad para \ i = 1, \ \dots, \ s$$
$$e_i = \frac{\widetilde{e}_i}{\sqrt{-B_{ii}}}, \quad para \ i = s+1, \ \dots, \ r$$

se obtiene la base $\{e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$, la cual cumple con las propiedades establecidas en el teorema.

Por último, se demostrará que el entero no negativo s es independiente de la base particular que tenemos. Sea { $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_t, \hat{e}_{t+1}, \ldots, \hat{e}_r, \hat{e}_{r+1}, \ldots, \hat{e}_n$ }, otra base canónica en V. Para cada $v = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \hat{e}_i$ en V, se tiene que

$$q(v) = \widehat{x}_1^2 + \dots + \widehat{x}_t^2 - \widehat{x}_{t+1}^2 - \dots - \widehat{x}_r^2 .$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que t < s. Sean

$$L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$$
 y $\widehat{L} = \langle \widehat{e}_{t+1}, \ldots, \widehat{e}_n \rangle$

los espacios generados por los primeros s elementos de la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^n$ y los últimos n-t elementos de las base canónica $\{\hat{e}_i\}$, respectivamente. Notemos que para cada $v \neq 0$, se cumple que, q(v) > 0 si $v \in L$ y $q(v) \leq 0$ si $v \in \hat{L}$. Por otra parte,

$$\dim(L \cap \widehat{L}) = \dim(L) + \dim(\widehat{L}) - \dim(L + \widehat{L})$$

$$\geq s + (n - t) - n$$

$$= s - t > 0$$

por lo que existe $a \in L \cap \widehat{L}$, tal que

$$q(a) > 0 \quad y \quad q(a) \le 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se concluye que t = s.

Se presenta a continuación una clasificación de formas cuadráticas que, para fines prácticos, resulta ser de gran utilidad: Sea q una forma cuadrática en V, se dirá que q es

- 1. Positiva definida si q(v) > 0, para todo $v \neq 0 \in V$.
- 2. Negativa definida si q(v) < 0, para todo $v \neq 0 \in V$.
- 3. Positiva semidefinida si $q(v) \ge 0$, para todo $v \in V$.
- 4. Negativa semidefinida si $q(v) \leq 0$, para todo $v \in V$.

En el contexto de la clasificación anterior y como consecuencia de la Proposición A.0.7, obsérvese que si q es positiva definida, entonces s = r = n y $q(v) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, para toda $v \neq 0$ en V, y si q es negativa definida, entonces s = 0, r = n y $q(v) = -x_1^2 - \dots - x_n^2$, para toda $v \neq 0$ en V.

Una cuestión importante es determinar si una forma cuadrática en V es positiva (negativa) definida, para ello, el siguiente criterio resulta ser de gran utilidad.

Criterio A.0.2. Sea V un espacio vectorial real y sea q una forma cuadrática en V. Si $det(\Delta_0) > 0, \ldots, det(\Delta_n) > 0$, entonces q es definida positiva, donde Δ_i , $i = 0, \ldots, n$; son los menores principales de la matriz B de q.

De manera semejante, si el determinante de cada menor principal es estrictamente menor que cero, la forma cuadrática resulta ser negativa definida.

Para un estudio más extenso de estos temas se recomiendan las referencias [9, 10].

Apéndice B

Método del factor integrante

Proposición B.0.8. Las ecuaciones diferenciales de segundo no lineales

$$a_{12}\left[x_1 \frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d}^2 R_1}{\mathrm{d} x_1^2} - x_1 \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\mathrm{d} R_1}{\mathrm{d} x_1}\right)^2 + \frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d} R_1}{\mathrm{d} x_1}\right] = \mu \qquad (B.1)$$

$$a_{21}\left[x_2 \ \frac{1}{R_2} \ \frac{\mathrm{d}^2 R_2}{\mathrm{d} x_2^2} - x_2 \ \frac{1}{R_2^2} \ \left(\frac{\mathrm{d} R_2}{\mathrm{d} x_2}\right)^2 + \frac{1}{R_2} \ \frac{\mathrm{d} R_2}{\mathrm{d} x_2} \right] = -\mu \tag{B.2}$$

admiten por solución las funciones

$$R_1(x_1) = x_1^{\frac{\beta}{a_{12}}} e^{\frac{\mu x_1}{a_{12}}}, \qquad R_2(x_2) = x_2^{\frac{\gamma}{a_{21}}} e^{\frac{-\mu x_2}{a_{21}}}.$$

Demostración. Observemos que las ecuaciones (B.1) y (B.2) son independientes pero principalmente tienen la misma estructura, por tanto es suficiente encontrar la solución de (B.1) ya que los cálculos para resolver (B.2) serán análogos. Realizando el cambio de variable $y = y(x_1) = \frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{dx_1}$, se tiene que

$$\frac{1}{R_1} \frac{\mathrm{d}^2 R_1}{\mathrm{d} x_1^2} = \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x_1} + y^2$$

luego, sustituyendo la igualdad anterior y el cambio de variable $y = y(x_1)$ en (B.1) se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$x_1 \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_1} + y = \frac{\mu}{a_{12}}$$

cuya solución viene dada por

$$y(x_1) = \frac{\mu}{a_{12}} + \frac{b_1}{x_1}$$

de lo cual, retomando el cambio de variable $y(x_1) = \frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{dx_1}$, se sigue que

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x_1} - \left(\frac{\mu}{a_{12}} + \frac{\beta_1}{x_1}\right) R_1 = 0$$

que viene a ser nuevamente una ecuación diferencial lineal de primer orden que tiene por solución

$$R(x_1) = \beta_2 \ x_1^{\beta_1} \ \mathrm{e}^{\frac{\mu}{a_{12}}x_1}$$

Por último, tomando $\beta_1 = \frac{\beta}{a_{12}}$ y $\beta_2 = 1$, obtenemos el resultado deseado $R_1(x_1) = x_1^{\frac{\beta}{a_{12}}} e^{\frac{\mu}{a_{12}}x_1}$.

Г		
L		
L		
L		

Bibliografía

- M. P. DO CARMO. (1976). Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- [2] V. ARNOLD. (1978). Ordinary Differential Equations. MIT Press, Cambridge, MA.
- [3] L. PERKO. (1991). Differential Equations and Dynamical System. Springer-Verlag, New York, NY.
- [4] R. FLORES ESPINOZA & YU. M. VOROBJEV. (1998). Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Geometry. Talleres Gráficos de la Universidad de Sonora, Hermosillo, Son.
- [5] NIKOLAI ALEXANDROVICH MAGNITSKII & SERGEY VASILEVICH SIDOROV. (2006). New Methods for Chaotic Dynamics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Toh Tuck Link, SGP
- [6] LUIS BARREIRA & CLAUDIA VALLS. (2008). Stability of Nonautonomous Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, HD.
- [7] NEMYTSKII V. V. & STEPANOV V. V. (1989). Qualitative Theory of Differential Equations. Dover Publications, INC., New York, NY.
- [8] MANUEL CALVO PINILLA & JESÚS CARNICER ÁLVAREZ. (2010). Curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Prensas Universitarias Zaragoza, Zaragoza, ESP.
- [9] KENNETH HOFFMAN & RAY KUNZE. (1973). Álgebra Lineal. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A, México, DF.
- [10] GUILLERMO DÁVILA RASCÓN, R. FLORES ESPINOZA & YU. M. VOROBIED. (2006). Álgebra Lineal. UniSon, Hermosillo, Son.
- [11] M. P. DO CARMO. (1994). Differential Forms and Aplications. Springer-Verlag, Berlin, HD.
- [12] MICHAEL SPIVAK. (1987). Cálculo en Variedades. Reverté, S. A., Barcelona, ESP.
- [13] SHANKAR SASTRY. (1999). Nonlinear Systems. Analysis, Stability and Control. Springer-Verlag, New York, NY.
- [14] JERROLD E. MARSDEN & TUDOR S. RATIU. (1999). Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer Science+Business Media, Inc., New York, NY.
- [15] MANFRED PLANK. (1995). Hamiltonian Structures for the n-dimensional Lotka-Volterra Equations. American Institute of Physics.

- [16] STANISLAW P. KASPERCZUK. (2008). On Algebraic Structures of Dynamical Systems. Institute of Physics University of Zielona Góra, Podgórna 50, 65 246 Zielona Góra.
- [17] RAZVAN M. TUDORAN & ANANIA GIRBAN. (2009). On a Hamiltonian Version of a 3D Lotka-Volterra System. AMS 2000: 70H05; 37J25; 37J35. Timisoara, Romania.
- [18] K. V. I. SAPUTRA, G. R. W. QUISPEL & L. VAN VEEN. (2010). An Integrating Factor Matrix Method to Find First Integrals. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume 43, Issue 22, pp. 225207, 17 pp.
- [19] F. GONZALEZ-GASCON & D. PERALTA SALAS. (2000). On the First Integrals of Lotka-Volterra Systems. Phys. Lett. A, 266:336-340
- [20] P. BIRTEA & M. PUTA. (2007). Equivalence of Energy Methods in Stability Theory. American Institute of Physics. DOI: 10.1063/1.2716201.
- [21] PATRICK, G. W., ROBERTS, M. & WULFF, C. (2004). Stability of Poisson Equilibria and Hamiltonian Relative Equilibria by Energy Methods. Arch. Ration. Mech. Anal. 174, 36-52
- [22] ORTEGA, J. P., PLANAS-BIELSA, V., AND RATIU, T. (2005). Asymptotic and Lyapunov Stability of Constrained and Poisson Equilibria. J. Differ. Equations 214, 92-127
- [23] M. W. HIRSCH, S. SMALE & R. L. DEVANEY. (2004). Differential Equations, Eynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Elsevier/Academic Press, Amsterdam.
- [24] J. D. MURRAY. (1993). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin.
- [25] F. H. BUSSE, J. P. GOLLUB, S. A. MASLOWE & H. L. SWINNEY. (1985). Recent progress. In Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Springer, Berlin.
- [26] R. H. HERING. (1990). Oscillations in Lotka-Volterra Systems of Chemical Reactions. J. Math. Chem., 5:197-202
- [27] S. E. KINGSLAND. (1985). Modeling Nature, Science and its Conceptual Foundations. University of Chicago Press, Chicago, IL.
- [28] A. J. LOTKA. (1958). *Elements of Physical Biology*. Dover Publications Inc., New York.
- [29] S. MANDERSON. (2002). Evolutionary Game Theory And Population Dynamics. Honours thesis, La Trobe University.
- [30] J. HOFBAUER & K. SIGMUND. (1998). Evolutionary Games And Population Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge.
- [31] COLIN SPARROW. (1998). The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, Berlin.