



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARÁ MI GRANDEZA

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

El problema de corte unidimensional aplicado a la  
obtención de elementos longitudinales de domos  
geodésicos

## T E S I S

Que para obtener el título de:

**Licenciado en Matemáticas**

Presenta:

Alejandro Dueñas Osuna

Director de tesis:

M.C. Héctor Alfredo Hernández Hernández

Hermosillo, Sonora, México, 18 de enero de 2013



## SINODALES

Dra. Olivia Carolina Gutú Ocampo  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Irene Rodríguez Castillo.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Israel Segundo Caballero.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Héctor Alfredo Hernández Hernández.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México



# Índice general

<b>1. Estructuras geodésicas</b>	<b>5</b>
1.1. Antecedentes históricos. . . . .	5
1.2. Domo geodésicos clase I . . . . .	8
1.3. Fracción de un domo . . . . .	17
<b>2. Patrones de corte</b>	<b>19</b>
2.1. El problema de corte unidimensional y bidimensional. . . . .	19
2.2. Importancia del problema de corte unidimensional . . . . .	21
2.3. Patron de corte . . . . .	21
2.4. Generación de patrones de corte esenciales . . . . .	25
2.5. Crecimiento del problema . . . . .	33
<b>3. El problema de corte unidimensional y soluciones simples</b>	<b>37</b>
3.1. Método canónico . . . . .	38
3.2. Método grandes primero . . . . .	42
3.3. Método exacto . . . . .	46
3.4. Medidas de eficiencia . . . . .	48
<b>4. Programación lineal</b>	<b>53</b>
4.1. El método simplex . . . . .	55
4.2. Descomposición LU . . . . .	61
4.2.1. Esquema de actualización . . . . .	64
4.3. Simplex revisado con descomposición LU . . . . .	68
4.4. Método de las dos fases . . . . .	75
4.5. Método de ramificación y acotamiento . . . . .	78
4.6. Implementación del método exacto . . . . .	84
4.7. Método de generación de columnas. . . . .	86
<b>5. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A. Biografías</b>	<b>91</b>
<b>B. Código de patrón de corte</b>	<b>99</b>



## *Agradecimientos*

*A Dios:*

*Gracias por prestarme vida para poder terminar la licenciatura en matemáticas, ya que gracias a eso tuve la oportunidad de escribir este trabajo de tesis para concluir mis estudios profesionales como licenciado.*

*A mis padres y hermano:*

*Gracias **María Eva** y **Salvador** por el apoyo incondicional que me han dado estos 23 años de vida, por guiarme en el camino para convertirme en un hombre de bien, por estar en todos esos momentos, que buenos o malos, los hemos superado juntos, por permitirme estudiar todo lo que he querido y por ser mis ejemplos a seguir, me lleno de orgullo decir que soy su hijo.*

*Te doy las gracias **David** por ser un excelente hermano, por motivarme a ser mejor cada día, por todos tus logros en los cuales me reflejo como si fueran los míos.*

*A mi director de tesis:*

*Gracias **Héctor A. Hernández Hernández** por ofrecerme tu ayuda para realizar este trabajo de tesis, por el consejo, el regaño y el jaloncito de oreja cuando se necesitó. Por las correcciones y mejoras no solo en el trabajo sino en la vida.*

*A mis sinodales:*

*Gracias por la comprensión y el apoyo en las correcciones, explicaciones y mejoras propuestas para este trabajo y en general, en la vida.*

*A mi familia y amigos.*

*Gracias por la ayuda en todas mis ocurrencias, cada uno forma parte de este trabajo y ocupa un lugar muy especial en mi corazón.*

*Les dedico este trabajo a mis familiares, amigos y a todos los que se me han adelantado en el camino, en particular a mis abuelos, Alejandrina Ruiz López, María Olivia Tamayo Vasquez, Francisco Dueñas Gallardo y Roberto Osuna Ocampo, y a Raúl Castro Quintero (“El Tata”).*



# Introducción

En este trabajo se desarrolla una de las aplicaciones clásicas de la programación lineal entera, que ha sido ampliamente estudiada, esto se puede observar ingresando en un buscador de páginas de internet las palabras clave *cutting stock problem*. Aquí se revisaron los aspectos más importantes del problema de corte, la idea principal es realizar un estudio introductorio, que sirva como guía a estudiantes interesados.

Existe una gran variedad de aplicaciones concretas del problema de corte, el trabajo se enfocará solamente en la obtención de elementos longitudinales a través del proceso de corte para la construcción de domos geodésicos. Ya que la motivación que se tuvo para el trabajo fue la idea de construcciones de domos como casa-habitación, aprovechando sus cualidades de las cuales se mencionan algunas.

En el primer capítulo se presenta brevemente antecedentes históricos sobre las estructuras geodésicas, una introducción breve al diseño de domo geodésico a partir de un poliedro base, que en general es generar más caras al poliedro base al particionar las caras ya existentes. Se propone una nomenclatura para referirse a la fracción de la esfera, siendo más clara que la usual.

En el segundo capítulo se mencionan en concreto qué es el problema de corte, la importancia que tiene en distintas áreas de investigación y las diferencias entre el problema de corte unidimensional y bidimensional, se presentan ejemplos de problemas que en primera instancia no parecieran ser problemas de corte unidimensional, pero que se adaptan muy bien a este tipo de problema. Para resolver el problema de corte de los diseños que se presentarán a lo largo del trabajo se definen patrones de corte, que ayudarán a hacer el plan corte para los diseños de los domos y como variar el diseño original de un domo para convertir el problema en uno de gran escala.

En el tercer capítulo se resuelven los problemas de corte asociados a los diseños mencionados en el capítulo anterior, utilizando para ello los métodos de corte únicamente los métodos que son esencialmente simples. Después se resuelven con el método exacto, con lo anterior se valora su eficiencia.

Se propone cambiar la forma de medir la eficiencia de los métodos de corte, ya que no se reconoce intrínsecamente que ninguno va a mejorar al método exacto.

En el cuarto capítulo se presentan el método de ramificación y acotamiento para resolver el problema de programación lineal entera, que en este trabajo se llama método exacto y se comentará sobre un método alternativo.



# Capítulo 1

## Estructuras geodésicas

En la primera sección se presentan antecedentes históricos sobre las estructuras geodésicas, además de mostrar imágenes sobre algunas de las primeras construcciones geodésicas.

En la segunda sección se explica brevemente como diseñar una clase de domo geodésico a partir de un poliedro base, al cual se le genera más caras al particionar las ya existentes.

Por último en la tercera sección se propone una nomenclatura para referirse a la fracción de la esfera, que es más clara que la usual, pues solo depende del poliedro base, el nivel deseado y la frecuencia del domo.

### 1.1. Antecedentes históricos.

Desde tiempos antiguos una de las prioridades del hombre fue protegerse de los percances del clima, construyendo refugios para vivir como chozas, iglúes y tipis con la necesidad de que estos fueran lo suficientemente fuertes para soportar las distintas condiciones climáticas, así como fácilmente desmontables para el momento de la migración.

Después de inventar la agricultura y con ello volverse sedentario, tubo la necesidad de cambiar las técnicas de construcción de sus vivienda, así como los materiales empleados, ya que no se requiere de la portatilidad de los refugios. Gracias a esto el ser humano pudo empezar a construirlos de materiales más rígidos y durables según el lugar y medio donde se encontraba. Regularmente las construcciones han tomado formas de prisma rectangular con algunas variantes, dando lugar a paredes y techos planos. Sin embargo éstos no son las únicas formas, se pueden observar paredes y techos a las que se han agregado arcos, tragaluces, cúpulas, etc., construidas de distintos materiales como por ejemplo ladrillo, piedra, madera, adobe, entre otros, este tipo de construcciones han sobrevivido al pasar de los años y caprichos del clima.

En particular, se centrará la atención a un tipo de construcción los domos<sup>1</sup> (una

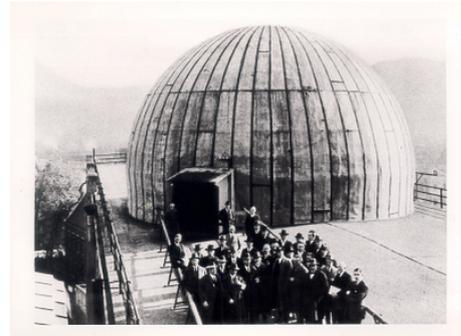
---

<sup>1</sup>El término geodesia fue usado inicialmente por Aristóteles (384-322 a. C.), refiriéndose tanto divisiones geográficas de la tierra, como también el acto de dividir la tierra.

fracción de una esfera). El primer domo del que se tiene registro fue diseñado por Walther Bauersfeld (1887-1953) y Franz Dischinger (1887-1953), usando geometría esférica. Este último fue el primero en combinar el triángulo con el arco de estabilidad reconocida, construyendo una estructura fuerte y ligera. Este domo se construyó en 1922 en Jena Alemania sobre la azotea del edificio Carl Zeiss (ver figuras 1.1 y 1.1) [1], para ser usado como planetario.



Domo en construcción.



Domo terminado.

Figura 1.1: Domo Carl Zeiss Optical Works Corporation [1].

Sin embargo, fue hasta finales de los años cuarenta que Richard Buckminster Fuller [20] rediseñó el domo geodésico, de hecho realizó sus diseños de manera independiente de Bauersfeld, basándose en el empaquetamiento de esferas. Fuller fue comisionado para construir el Pabellón Estadounidense en la exposición mundial de Montreal Canadá en 1967 (ver figura 1.2).



Figura 1.2: Pabellón estadounidense exposición 1967 [1].

A finales de los años sesenta los *hippies* en la costa Este de Estados Unidos construyeron domos con materiales de desecho. Desafortunadamente tuvieron muchos problemas con filtraciones de agua y la mayoría de estas construcciones fueron abandonadas. Las que continuaron habitadas resolvieron el problema utilizando grandes cantidades de fibra de vidrio, perdiendo así su carácter ecológico.

Probablemente esta sea una de las causas por lo cual los domos geodésicos no hayan logrado mayor popularidad. Vistos como una forma demasiado excéntrica de construir, a pesar de ello existen miles de casas con esta forma concentradas en Estados

Unidos y Canadá. En la actualidad no existe registro de este tipo de construcciones.

Los domos se clasifican en:

- Los domos monolíticos que se elaboran con bloques de piedra, ladrillo, o nieve compactada. Las cúpulas de las iglesias y los iglúes son ejemplos de este tipo de domos.
- Los de membrana que deben su nombre al procedimiento de construcción, donde se infla un molde sobre el cual se lanza mezcla de cemento y arena utilizando una máquina neumática. Esta clase de domos se asemejan a un cascarón de huevo, pues tiene una cáscara delgada de cemento de apariencia esférica.
- Los domos estructurales, mejor conocidos como *domos geodésicos*, que deben su nombre a que los elementos con los que se le dan forma, son semejantes a curvas sobre la esfera. En realidad son cuerdas que van desde un punto de la esfera a otro. En otras palabras un domo geodésico es un poliedro.

El domo, aparte de ser usado para los fines específicos mencionados, tienen propiedades interesantes debido a su forma [2], por ejemplo:

- Facilita la iluminación ya que la luz se refleja de manera más eficiente.
- Al no necesitar columnas y paredes de soporte, estos espacios dan una sensación de libertad.
- Los espacios libres facilitan la circulación del aire, gracias a que no hay bordes o rincones. La temperatura es más uniforme en todo el domo. La buena circulación del aire, no permiten el estancamiento de aire que puedan crear proliferación de hongo o bacterias.
- Al no tener esquinas tradicionales el sonido se propaga de una forma armónica.

A pesar de que el domo geodésico parece una invención moderna (siglo XX), existen ejemplos antiguos de cúpulas geodésicas. En el Palacio Imperial de China (1885), perteneciente a las dinastías Ming y Qing, se puede observar una esfera con una subdivisión geodésica de un icosaedro, ver figura 1.3. Se trata de una esfera bajo la garra de un león guardián en la Nurturing Heart Gate, similar a otro del Palacio de Verano de China (próximo a Pekín), que data aproximadamente de 1885 [3].



Figura 1.3: León Guardian en la Nuting Heart Gate [4].

Incluso los poliedros, tampoco son inventos recientes. De hecho existe la evidencia de que el hombre de la edad de piedra ya los conocía. En *Ashmolean Museum de Oxford*, se encuentran los restos arqueológicos más antiguos tallados aproximadamente 2000 a. C., encontrados en Escocia[5] (ver figura 1.4).

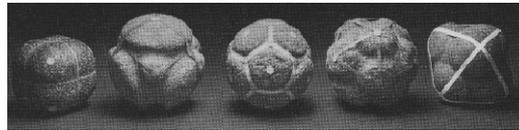


Figura 1.4: Restos arqueológicos [5].

Los domos geodésicos merecen una atención especial, pues una de las mejores opciones para construir casa-habitación, si bien es cierto que al revisar información donde se explica el proceso de construcción y diseño de domos geodésicos se encuentran con explicaciones poco claras y confusas. En este trabajo se proponen pequeñas aportaciones en ese sentido.

## 1.2. Domo geodésicos clase I

Existen muchos métodos para el diseño de domos geodésicos, aquí se explica brevemente uno de estos métodos, conocido como Método I clase I [6].

Un domo geodésico se obtiene al generar más caras a una fracción del poliedro base. Se ilustrará la forma de diseñar un domo a partir de un icosaedro, como el que se muestra en la figura 1.5. Nótese que la estructura está formada por elementos longitudinales, a simple vista parecen de la misma longitud, que implicaría que todos los triángulos serían equiláteros. De esta manera la estructura sería una fracción de un poliedro de 180 triángulos equiláteros. Esto es imposible, ya que el poliedro platónico con más triángulos equiláteros es el icosaedro [5] (20 caras). Sin embargo vale la pena mencionar, que la estructura se obtiene generando más caras al icosaedro, como se verá más adelante.



Figura 1.5: Domo jardín.

Para el diseño de la fracción de domo de la figura 1.5 se utilizó un icosaedro, al cual se partitionaron cada una de sus aristas en tres partes iguales y marcándola con un punto cada partición, se unen los puntos con segmentos de recta paralelas a cada arista obteniendo 9 triángulos iguales, cada punto obtenido se proyecta sobre la esfera que contiene a este icosaedro, por último se considera la fracción que aparece en la figura 1.5. En la figura 1.6 una cara representa la partición y otra cara la proyección sobre la esfera.

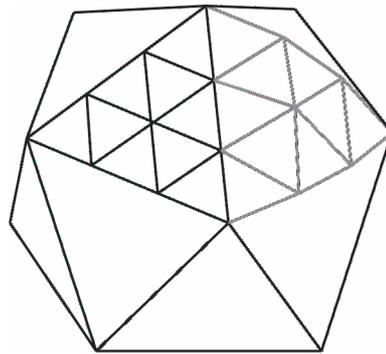


Figura 1.6: Icosaedro particionado.

Después de realizar el proceso anterior sobre todas las caras del icosaedro se tiene la figura 1.7, de la que se toma una fracción para obtener el domo de la figura 1.8.

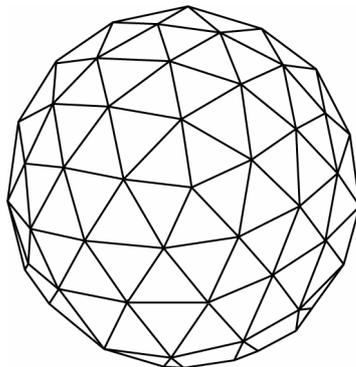


Figura 1.7: Domo completo.

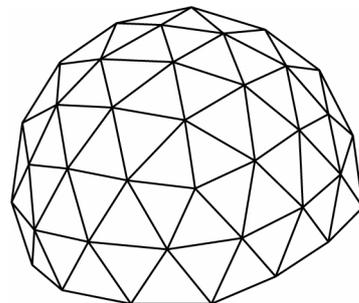


Figura 1.8: Fracción del domo.

A continuación se explica más detalladamente el procedimiento anterior.

Procedimiento general para el diseño de este tipo de domos es el siguiente:

1. Se elige un poliedro base.

Por lo general el poliedro que se elige es regular. En particular se consideran como poliedros bases tetraedros, octaedros e icosaedros (ver figura 1.9) por tener triángulos como caras, además el icosaedro es el poliedro más popular para la construcción de domos geodésicos, pues tiene más caras.

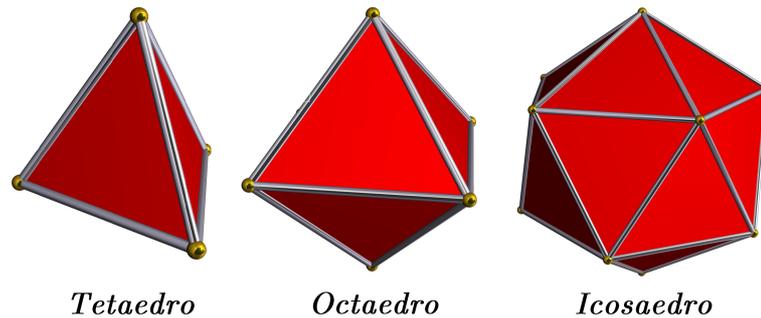


Figura 1.9: Poliedros.

2. Se particiona las caras de la fracción del poliedro.

- a) Se considera una de las caras de la fracción del poliedro.
- b) Se dividen todas las aristas de está cara en  $\eta$  partes iguales, marcando con un punto cada división.
- c) Considérese una de estas aristas como base (el segmento de recta formado por  $e_1e_2$ ), después se unen los puntos de las dos caras restantes con segmentos de recta paralelos a la arista base.

Se repiten el paso 2 b) y 2 c), con las aristas restantes como base, para obtener la cara totalmente dividida.

Al terminar se repite el paso 2 con el resto de las caras de la fracción del poliedro.  $\eta$  se le conoce como frecuencia.

3. Calcular las coordenadas de los nuevos puntos.

Se observa que después de particionar las caras del poliedro aparecen nuevos puntos, a partir de las intersecciones de las líneas paralelas a cada arista, los que se llamarán  $v_{ij}$  se calculan de la siguiente manera:

$$v_{ij} \leftarrow e_1 + \frac{i}{\eta}X + \frac{j}{\eta}Y$$

$$j = 0, \dots, \eta$$

$$i = 0, \dots, \eta - j$$

Donde  $X$ ,  $Y$  son los vectores que parten desde  $e_1$  a  $e_2$  y  $e_3$  respectivamente y se calcula como  $X = e_2 - e_1$  y  $Y = e_3 - e_1$  y  $\eta$  es la frecuencia elegida para el domo geodésico.

Para saber cuál punto es el  $v_{ij}$ , se pondrá especial cuidado en la diferencia entre  $i$  y  $j$ .

- a)  $i$  nos indica la posición sobre la fila  $j$ .
- b)  $j$  nos indica el nivel en el que está el punto, es decir, es el número de la fila paralela a  $X$  en el que se encuentra el punto.

#### 4. Proyecta cada punto de la partición en la esfera.

Para poder proyectar cada punto en la esfera de radio 1 y centrada en el origen es necesario normalizar cada vector formado del origen a cada uno de los punto  $v_{ij}$ , al punto proyectado se le llama  $w_{ij}$ .

Normalizar cada vector del origen a  $v_{ij}$ , es dividir el vector sobre su propia norma, es decir,

$$w_{ij} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{v_{ijx}^2 + v_{ijy}^2 + v_{ijz}^2}} \cdot (v_{ijx}, v_{ijy}, v_{ijz})$$

#### 5. Se calcula las nuevas longitudes de los segmentos, es decir, la distancia euclidiana.

En la literatura se hacen diseños de domos de distintas maneras, que son difíciles de comprender al momento de armar las estructuras, por lo tanto se presenta la siguiente propuesta de etiquetas para las distintas de los segmentos, que depende del nivel y posición en el que se encuentre el segmento.

Se etiqueta en orden alfabético empezando por la letra  $A$ , siendo la etiqueta del segmento del nivel más alto de la cara, es decir, el segmento localizado entre los puntos  $w_{0, \eta-1}$  y  $w_{1, \eta-1}$ .

Si el segmento se encuentra en las orillas del triángulo original no lleva un subíndice, de lo contrario se le pondrá un subíndice iniciando en 2 y aumentando a medida que el segmento se encuentre más cerca del centro del triángulo original, así se sabrá que tan interno es el nivel en el que se encuentra el segmento (ver observación 4 al final de la sección).

De las siguientes forma:

$$d(w_{ij}, w_{kl}) = \sqrt{(w_{klx} - w_{ijx})^2 + (w_{kly} - w_{ijy})^2 + (w_{klz} - w_{ijz})^2}$$

Se diseñará en el siguiente ejemplo un domo geodésico, aunque se mencionó que el icosaedro es el poliedro más popular para el diseño de domos geodésicos, se realizará el diseño para el domo basándose en un octaedro.

### Ejemplo 1.

1. Se considera como poliedro base  $\frac{1}{2}$  octaedro de radio 1 y centrado en el origen y para realizar los siguientes pasos se considerará la cara que se localiza en el primer octante, como se muestra en la siguiente figura 1.10.

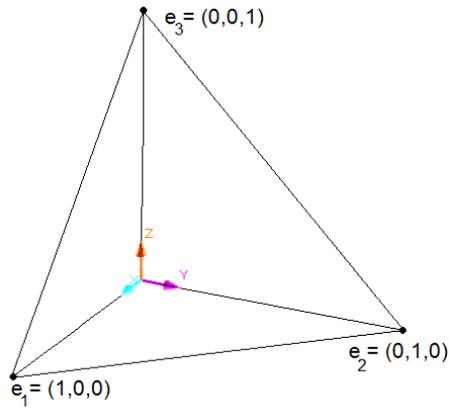


Figura 1.10: Cara de  $\frac{1}{2}$  octaedro en el primer octante.

2. Se realizará este paso en la cara del octaedro localizada en el primer octante (figura 1.10) y las demás se dejarán al lector.

Se divide en  $\eta = 4$  partes iguales las aristas de esta cara, después se trazan las paralelas a la arista  $\overline{e_1e_2}$  (ver figura 1.11).

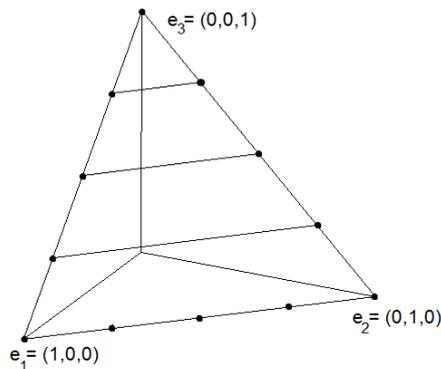


Figura 1.11: Trazado de paralelas a la arista  $\overline{e_1e_2}$ .

Repitiendo lo anterior sobre todas las aristas restantes como base se tiene la figura 1.12.

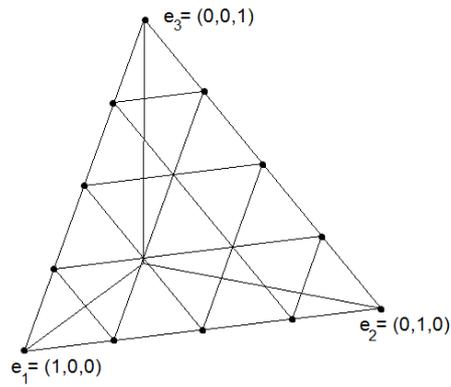


Figura 1.12: Cara totalmente dividida.

3. Calcular las coordenadas de los nuevos puntos.

En la figura 1.13 se muestra la localización de los puntos  $v_{ij}$  en el primer octante.

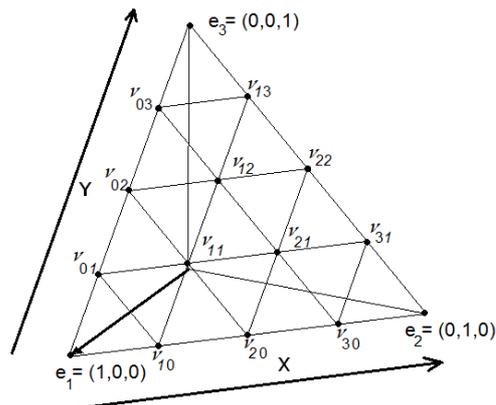


Figura 1.13: Mapa de coordenadas  $v_{ij}$ .

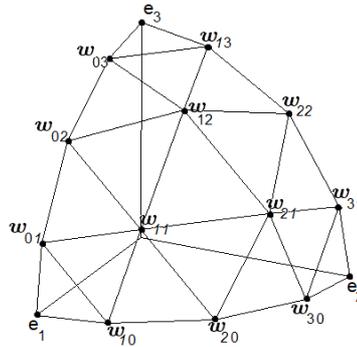
En la figura 1.14 se presentan las coordenadas de cada uno de los puntos  $v_{ij}$ .

$$\begin{aligned}
v_{04} &= (0,0,1) \\
v_{03} &= (0.25,0.75,0) \quad v_{13} = (0,0.25,0.75) \\
v_{02} &= (0.5,0,0.5) \quad v_{12} = (0.25,0.25,0.5) \quad v_{22} = (0,0.5,0.5) \\
v_{01} &= (0.75,0,0.25) \quad v_{11} = (0.5,0.25,0.25) \quad v_{21} = (0.25,0.5,0.25) \quad v_{31} = (0,0.75,0.25) \\
v_{00} &= (1,0,0) \quad v_{10} = (0.75,0.25,0) \quad v_{20} = (0.5,0.5,0) \quad v_{30} = (0.25,0.75,0) \quad v_{40} = (0,1,0)
\end{aligned}$$

Figura 1.14: Coordenadas de  $v_{ij}$ .

4. Calcular los puntos proyectados en la esfera de radio 1.

En la figura 1.15 se muestra la localización de los puntos  $w_{ij}$  en el primer octante.

Figura 1.15: Mapa de los puntos  $w_{ij}$ .

En la figura 1.16 se presentan cada una de las coordenadas aproximadas de los puntos  $w_{ij}$ .

$$\begin{aligned}
w_{04} &= (0,0,1) \\
w_{03} &= (0.31,0,0.94) \quad w_{13} = (0,0.31,0.94) \\
w_{02} &= (0.70,0.70,0) \quad w_{12} = (0.40,0.40,0.81) \quad w_{22} = (0,0.70,0.70) \\
w_{01} &= (0.94,0,0.31) \quad w_{11} = (0.81,0.40,0.40) \quad w_{21} = (0.40,0.81,0.40) \quad w_{31} = (0,0.94,0.31) \\
w_{00} &= (1,0,0) \quad w_{10} = (0.94,0.31,0) \quad w_{20} = (0.70,0.70,0) \quad w_{30} = (0.31,0.94,0) \quad w_{40} = (0,1,0)
\end{aligned}$$

Figura 1.16: Coordenadas de los puntos  $w_{ij}$ .

5. Calcular las distancias de los nuevos segmentos.

Antes de mostrar la tabla con las longitudes de los segmentos se presentará la propuesta de etiquetas para el domo, en la figura 1.17 se muestra las etiquetas para cada longitud, mientras que la figura 1.18 se presenta el mapa completo de etiquetas.

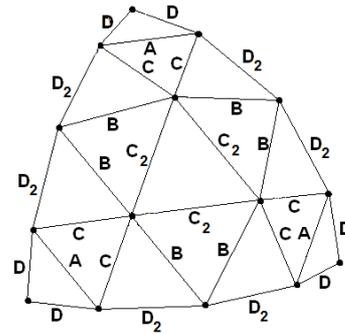
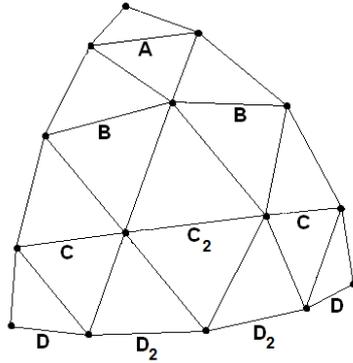


Figura 1.17: Propuesta para etiqueta.

Figura 1.18: Mapa de etiquetas completo.

Se calculan las distancias euclidianas aproximadas de los puntos normalizados. Calculando solamente las longitudes de  $A, B, C, C_2, D, D_2$ .

<i>Segmentos</i>	$v_{ij}, v_{kl}$	<i>Distancia</i>
$A$	$v_{03}, v_{13}$	0.4472
$B$	$v_{02}, v_{12}$	0.5176
$C$	$v_{01}, v_{11}$	0.5773
$C_2$	$v_{11}, v_{21}$	1.2461
$D$	$v_{00}, v_{10}$	0.3203
$D_2$	$v_{10}, v_{20}$	0.4595

Finalmente el domo queda de la siguiente forma:

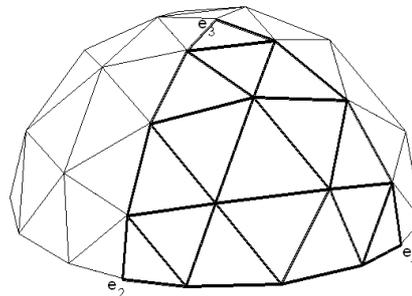


Figura 1.19:  $\frac{1}{2}$  octaedro frecuencia  $\eta = 4$  y radio 1 Método Clase I.

### Observaciones:

1. Para hacer los cálculos es suficiente considerar el poliedro de radio = 1 y centrado en el origen.

Las longitudes de los segmentos obtenidas con radio igual a 1, reciben el nombre de **factores de cuerda**. Su nombre se debe a que si se desean calcular las longitudes de los segmentos de un domo de radio  $r$ , basta multiplicar los factores de cuerda por  $r$  para obtener las longitudes de los segmento correspondiente al domo.

2. El proceso descrito del paso 2 de dividir en  $\eta$  partes iguales un lado del poliedro original genera  $\eta^2$  triángulos equiláteros, después de proyectar cada punto en la esfera, estos triángulos serán modificados perdiendo esta cualidad, esto último se explica a continuación.
3. Se tiene que los triángulos obtenidos en la figura 1.15 no son todos iguales, la razón es que cada punto recorre distinta diferentes, entre más cercano este el punto al centro del triángulo original mayor es la distancia que recorre al ser proyectado sobre la esfera, lo contrario si el punto está cercano a las aristas del triángulo original.
4. En la literatura [7] se tienen distintas manera de etiquetar a las longitudes de la fracción del domo, en la figura 1.20 te presenta una forma de etiquetar,

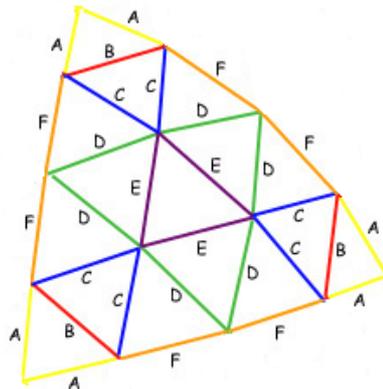


Figura 1.20: Cara de la fracción de un domo octaedro frecuencia 4.

en donde no puede apreciar algún orden en la forma de etiquetar las longitudes (factores de cuerda), además el mapa de la figura 1.20 es difícil de memorizar, es decir, para armar la estructura se necesitaría acudir al plano del diseño. Los nombres no describen la localización del segmento, por estas razones se hizo la propuesta de etiqueta en el inciso 5 del procedimiento general.

### 1.3. Fracción de un domo

Existen diferentes formas para llamar a una fracción de un domo, por lo general se basan en comparar el volumen de la fracción del domo con el volumen de la esfera que lo contiene, ver [8] y [9], por ejemplo considérese un domo basado en un icosaedro y frecuencia 5.

“ $\frac{3}{8}$ ” de este domo se refiere a considerar  $\frac{3}{8}$  del volumen de la esfera, como se muestra en la figura 1.21.

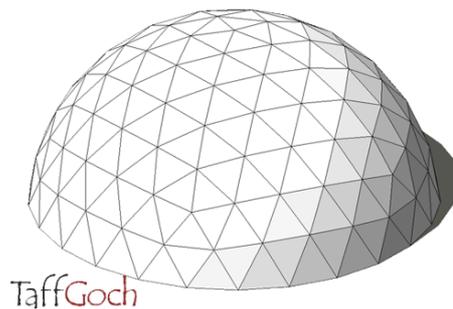


Figura 1.21: Domo clase I, frecuencia 5 (“ $\frac{3}{8}$ ”)

“ $\frac{5}{8}$ ” de este domo se refiere a considerar  $\frac{5}{8}$  del volumen de la esfera, como se muestra en la figura 1.22.

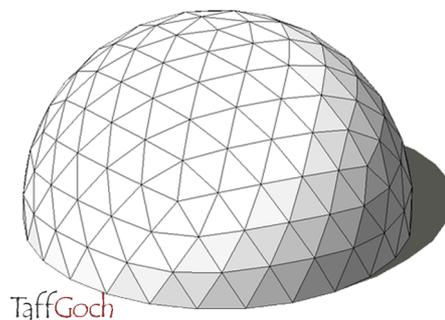


Figura 1.22: Domo clase I, frecuencia 5 (“ $\frac{5}{8}$ ”)

La nomenclatura anterior genera incertidumbre, ya que esta relacionada con el volumen de la esfera y el volumen del domo, siendo necesario estar calculando estos volúmenes y estimar que tan parecido son.

Se propone una forma de referirse a una fracción del domo, que sólo depende del domo, la frecuencia elegida y los niveles tomados, lo cual se muestra con el siguiente ejemplo. Considérese la parte sombreada de un icosaedro visto de frente, como se muestra en la siguiente figura 1.23, donde se identifican tres partes “base”, “cintura” y “cúspide”

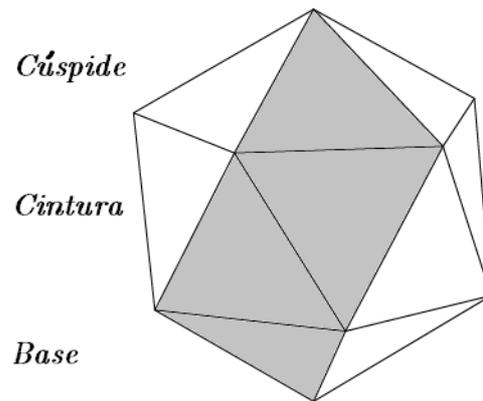
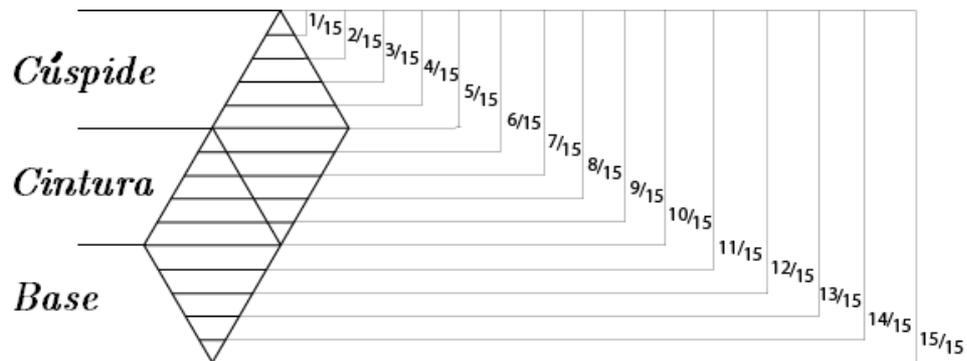


Figura 1.23: Partes del icosaedro.

cada una se divide en cinco niveles, dando un total de quince de ellos, los cuales se muestran en la siguiente figura



donde la parte inferior del nivel determina la fracción del domo, se facilita al lector entender la fracción del domo.

Los domo de las figura 1.21 y 1.22 en la nueva nomenclatura son  $\frac{7}{15}$  y  $\frac{8}{15}$  respectivamente.

## Capítulo 2

### Patrones de corte

En la primera sección de éste capítulo se mencionan qué es el problema de corte, la diferencia entre el problema unidimensional y bidimensional, y como se resuelve este último. Se presentan ejemplos de problemas que se adaptan a el modelo de corte unidimensional.

En la segunda sección se da la explicación de la importancia del problema de corte unidimensional, que fue una parte de la motivación para desarrollar este trabajo.

En la tercera sección se establecen las características que se necesitan para las longitudes de los tramos de longitud estándar, las uniones de los segmentos para el armado del domo y se definen distintos patrones de corte que ayudarán a hacer el plan corte para cubrir los requerimiento del diseño del domo.

La cuarta y quinta sección están enfocadas en la obtención de un conjunto muy particular de patrones llamados *patrones esenciales*, definidos en la tercera sección, además de como al variar los requerimientos del domo, cambiando el radio, obteniendo problemas de gran escala.

#### 2.1. El problema de corte unidimensional y bidimensional.

Existen dos problemas importantes al momento de obtener las partes con las que se construyen los domos geodésicos: la obtención de los elementos longitudinales y la obtención de los triángulos para cubrir la estructura.

El problema de la cubierta, se considera resuelto ya que se cuenta con proveedores que suministran rectángulos con medidas especificadas y además es posible obtener dos triángulos iguales, cortando de manera adecuada un rectángulo, donde uno de los triángulos está formado por dos pequeños, como se muestra en la figura 2.1, se corta el rectángulo en tres triángulos  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , donde  $B$  es el mayor y se forma uniendo los triángulos  $A$  y  $C$ .

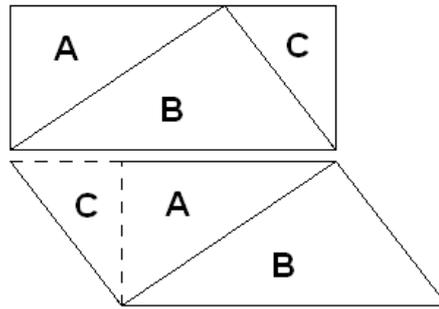


Figura 2.1: Ambos triángulos son iguales.

El problema de corte unidimensional se puede plantear como un problema de programación entera, que se aplica en la industria para el corte de diversos materiales. El objetivo principal es recortar el material en cuestión en distintos tamaños, para cumplir los requerimientos establecidos, utilizando la menor cantidad del material completo. El proceso de corte arroja desperdicios de distintas medidas, según la forma de cortar, esto último se le conoce como optimizar un proceso de corte, donde el desperdicio del material debe de ser el mínimo posible. Algunas veces es necesario obtener y utilizar piezas completas, es decir, sin uniones de ningún tipo (soldadura, amarres, etc.).

El problema de corte unidimensional tiene varias aplicaciones en procesos industriales, plomería, herrería, electricidad, construcción, carpintería, entre otros, se tiene por ejemplos:

1. Corte de varillas.
2. Corte de tubos.
3. Corte de cable o alambre.
4. Corte de elementos longitudinales de madera (barrotes de madera).
5. Corte de ventanas de aluminio.
6. Corte de persianas.
7. Corte de rollos de papel.
8. Corte de lámina con ancho constante.
9. Corte de fierro.
10. Atraque de barcos<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Este ejemplo se refiere al acomodo de barcos en el muelle.

## 2.2. Importancia del problema de corte unidimensional

El problema de corte unidimensional es un proceso importante en distintas áreas como se mencionó anteriormente [10]. Tal es su importancia, que existen paquetes computacionales para resolver los procesos de corte. En general los programas no describen el proceso que se utilizó para resolver el problema. Siendo de gran importancia conocer los métodos, ya que en algunas ocasiones se requiere insertar el problema de corte como parte de un sistema de diseño más amplio.

Además se puede utilizar estos métodos para generar nuevos programas de cómputo orientados a otro tipo de problemas, con las especificaciones determinadas.

Resulta necesario establecer terminología para describir las formas en que se cortarán los tramos estándar, a éstos se les conocen como *patrones de corte* y son indispensables para obtener los planes de corte.

Por otra parte, el problema de corte unidimensional, aplicado a la obtención de segmentos para estructuras geodésicas, tiene la propiedad de ser fácilmente modificado, para obtener problemas de una amplia variedad de tamaños, incluso obteniéndose fácilmente problemas a gran escala, que forzosamente tendrán que ser resueltos con métodos heurísticos, ya que sencillamente lograrían rebasar las capacidades de los equipos de cómputo y/o el tiempo que se esté dispuesto a esperar para obtener los resultados con un método exacto.

## 2.3. Patron de corte

Antes de abordar cada uno de los métodos para resolver el problema de corte unidimensional, que se ven en el siguiente capítulo, conviene establecer las siguientes condiciones y definiciones del patrones de corte:

Todos los tramos estándar, de donde se obtendrán los segmentos, miden lo mismo, dado que es la medida estándar más común en el mercado, que tendrá una longitud 6 metros. Cuando se lleva la práctica el proceso de corte, es normal que haya pequeños errores, para compensarlos se descontará un par de centímetros a la longitud del tramo estándar ( $L_{tramo}$ ), es decir, se supondrá que el tubo mide 5.98 metros.

En términos comunes se puede definir como patrón de corte a una forma de cortar un tubo, de dicho corte se obtienen segmentos de los que se requieren y un segmento sobrante. Sin embargo se definirá patrón de corte utilizando vectores, pues resulta natural al hacer la implementación computacional y muy adecuado para expresarlo matemáticamente.

A las longitudes de los segmentos a considerar se almacenan en el vector renglón  $L$  de dimensión  $k$ , resulta conveniente almacenar las longitudes en orden decreciente,

esto implica que la primera longitud ( $L_0$ ) es la mayor de todas y la última longitud ( $L_{k-1}$ ) es la menor de todas. De la misma manera se define el vector columna  $R$  como el vector de requerimientos, esto es,  $R_i$  es el número de segmentos de longitud  $L_i$  que se requiere obtener de todo el proceso de corte.

**Observación:**

El vector  $R$  es de dimensión  $k$  y  $R_i$  es un número entero positivo. Además para cada tramo de longitud  $L_i$  haremos barrenos (agujeros u orificios) que servirán para unir los segmentos entre sí con un tornillo y una tuerca. La distancia entre ellos está determinado por el diseño del domo geodésico.

En cada extremo se da una holgura de dos centímetros desde el centro del orificio y se aplana una longitud de seis centímetros, a esto se le conoce como oreja, (ver figura 2.2) para hacer posible la unión entre los segmentos y exista la flexibilidad necesaria para el armado de la estructura (ver figura 2.3). Estas dimensiones pueden variar dependiendo de la longitud de los segmentos, en la práctica han resultado adecuadas para el armado de estructuras similares a las estructuras cuyos diseños se muestran al final de esta sección.

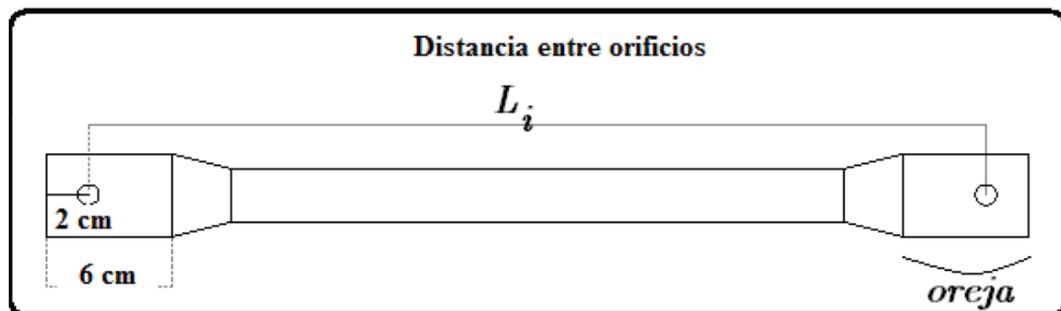


Figura 2.2: Forma que deberá tomar el tubo.

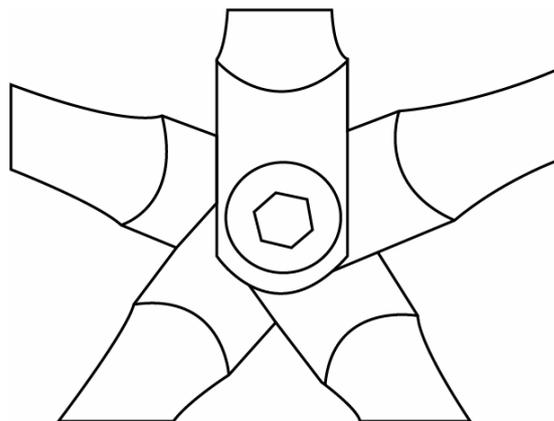


Figura 2.3: Uniones de los segmentos.

Las medidas calculadas de esta sección en adelante serán aproximadas, mostrando pocos decimales.

**Definición 1.** (*Patrón de corte*)

Un patrón de corte  $j$  se define como el vector columna  $p^j$  con componentes enteras no negativas, de dimensión  $k$ .

**Observaciones:**

1. La consecuencia de haber ordenado las componentes del vector de longitudes es que de esta manera cada patrón es único, así se identifica de manera inequívoca a un patrón de corte con el conjunto de segmentos que se obtienen al cortar un tubo.
2. Un patrón, para fines prácticos, no puede tener cualquier conjunto de valores enteros no negativos, ya que la suma de las longitudes obtenidas podría superar la longitud del tubo ( $L_{tramo}$ ), es por ello que se da la siguiente definición.

**Definición 2.** (*Patrón de corte factible*)

$p^j$  es un patrón de corte factible si la suma de las longitudes obtenidas es menor o igual que la longitud del tubo, es decir,

$$\sum_{i=0}^{k-1} L_i P_{ij} \leq L_{tramo},$$

donde cada  $P_{ij}$  es la cantidad de segmentos de longitud  $L_i$  en el patrón  $j$ .

Al realizar un corte según el patrón  $j$ , se tiene un sobrante cuya longitud está dada por:

$$L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} L_i P_{ij}.$$

**Definición 3.** (*Vector de sobrantes*)

Se define el vector de sobrantes, denotado por  $S$ , como:

$$S = \left( L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} L_i P_{i0}, L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} L_i P_{i1}, \dots, L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} L_i P_{i,m-1} \right),$$

al implementar  $m$  patrones diferentes de corte.

De los patrones de corte factibles hay un subconjunto de ellos que se distinguen por representar un aprovechamiento máximo del tubo, pues la longitud sobrante no es suficiente para obtener un segmento más (ni siquiera el de menor longitud  $L_{k-1}$ ) de tal manera que el sobrante en realidad es un desperdicio.

**Definición 4.** (*Patrón de corte esencial*)

Se define patrón de corte esencial como aquel que cumple

$$L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} L_i P_{ij} < L_{k-1}.$$

En un patrón de corte no esencial es aquel en que la longitud del sobrante todavía puede ser utilizada para obtener más segmentos. Es importante señalar que un patrón de corte no esencial puede ser derivado de un patrón de corte esencial, basta con disminuir el valor de alguna componente o varias de ellas.

Hay patrones con solamente cortes de una sola longitud. Estos patrones se les llama *canónicos*, sirven para determinar los segmentos de longitud  $L_i$ , que se obtienen de un tramo estándar de longitud  $L_{tramo}$ . La forma de calcularlos es la siguiente:

**Ejemplo 2.**

Considérese la longitud  $L_1 = 1.21$  y el tramo de longitud estándar  $L_{tramo} = 5.98$ .

Entonces para poder saber cuántos tramos de longitud  $L_1$  se obtienen de un tramo de longitud estándar  $L_{tramo}$ , se divide la longitud del tramo estándar entre la longitud del segmento  $L_1$ .

$$\frac{L_{tramo}}{L_1} = \frac{5.98}{1.21} = 4.9421.$$

Observe que el resultado no es entero, entonces nos quedaremos con la parte entera que es 4, es decir, de un tramo de longitud estándar 5.98 se obtiene 4 segmentos de longitud 1.21.

Matemáticamente se obtiene el mismo resultado con la función piso, definida a continuación.

**Definición 5.** (*Función piso*)

Para cualquier número real  $x$ , la función piso de  $x$  (que lo denotaremos por  $\lfloor x \rfloor$ ) es el entero menor o igual más próximo a  $x$ , es decir, si  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lfloor x \rfloor = \sup \{n : n \leq x, n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Ejemplo 3.**

Considérese  $L_{tramo} = 5.98$  y  $L_1 = 1.8099$ ,  $L_2 = 1.6636$ ,  $L_3 = 1.2915$

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_1} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{5.98}{1.8099} \right\rfloor = \lfloor 3.3040 \rfloor = 3 \\ \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{5.98}{1.6636} \right\rfloor = \lfloor 3.0060 \rfloor = 3 \\ \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_3} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{5.98}{1.2915} \right\rfloor = \lfloor 4.6302 \rfloor = 4 \end{aligned}$$

Se denotará a la máxima cantidad de segmentos de longitud  $L_i$  que se obtiene de un tramo de longitud estándar  $L_{tramo}$ .

$$N_{\text{máx}} L_i = \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_i} \right\rfloor.$$

**Definición 6.** (*Patrón canónico*)

El patrón  $p^j$  se dice canónico si es de la forma

$$p^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ N_{\text{máx}} L_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras un patrón canónico es aquel que proporciona la máxima cantidad de segmentos de la misma longitud. Es evidente que sólo hay  $k$  patrones de este tipo, uno por cada componente.

**Observación:**

Un patrón de corte canónico no necesariamente es esencial, pues cabe la posibilidad que del sobrante se pueda obtener un segmento más pequeño.

## 2.4. Generación de patrones de corte esenciales

Los patrones de corte en los que se centrará la atención son los esenciales. En esta sección se muestra como obtener el conjunto completo de estos patrones utilizando dos métodos distintos, el primero es la idea intuitiva de cómo generar este tipo

de patrones, que se basa en generar patrones factibles y después evalúa si estos son esenciales, el segundo es una mejora del primer método, ya que genera solamente los patrones esenciales.

### 1. Ciclos anidados

Este método tiene un ciclo para cada uno de los segmentos a cortar que va desde cero hasta la cantidad máxima de segmentos que se pueden obtener de un tramo sobrante, en caso de ser la primera iteración en el primer ciclo el sobrante es igual a la longitud del tramo estándar. Al estar en el ciclo más interno se identifica si el patrón es esencial o no, de acuerdo a la definición 4.

A continuación se presenta el pseudocódigo:

Variables del problema.

L_tramo	Longitud del tramo estándar.
n	Número de longitudes diferentes de segmentos a corta.
L	Vector de longitudes.
S	Vector de longitudes sobrante.

Variables auxiliares.

i_1	Índice relacionado con L_1
.	.
.	.
.	.
i_n	Índice relacionado con L_m

Iniciar

```

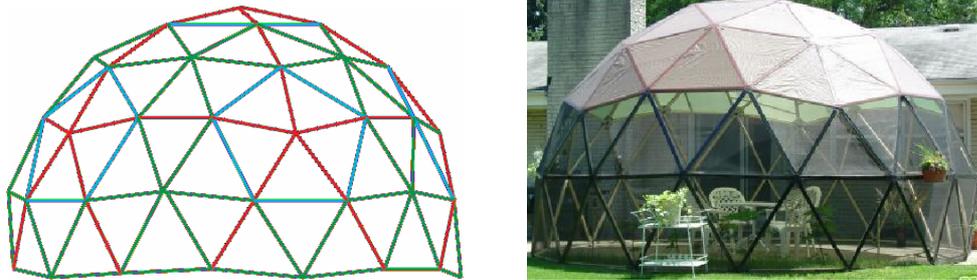
para i_1 = 1, ... ,n {
  s_i = 0;                                ( S <- 0 )
}
Iniciar s_1 como L_tramo                  ( s_1 <- L_tramo )
para i_1 = 0, ..., piso(L_tramo/L_1){
  Actualizar s_1                          ( s_1 <- s_1-i_1*L_1 )
  para i_2 = 0, ..., piso(s_1/L_2){
    Actualizar s_2                        ( s_2 <- s_2-i_2*L_2 )
    .
    .
    .
    para i_n=0, ..., piso(s_n-1/L_n){
      si (s_n-1 -k*L_m<L_n) imprime( i_1,i_2,...,i_n );
    }
  }
}
Actualizar s_1                            ( s_1 <- L_tramo )

```

}  
Fin

**Ejemplo 4.**

Considérese el siguiente requerimiento para  $\frac{5}{9}$  fracción del domo basado en un icosaedro frecuencia 3 y radio 3 metros.



$L$	<i>Longitudes</i>	<i>Cantidades</i>
$L_0$	1.3152	35
$L_1$	1.2556	80
$L_2$	1.1438	50

Al realizar el método sin verificar que el patrón sea esencial se obtiene la siguiente lista de patrones, donde el primer renglón nos representa el patrón y último renglón representa el desperdicio.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
5.98	4.83	3.69	2.54	1.40	0.26	4.72	3.58	2.43	1.29
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	2	2	2	2	3	3	4	0	0
4	0	1	2	3	0	1	0	0	1
0.14	3.46	2.32	1.18	0.03	2.21	1.06	0.95	4.66	3.52
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
0	0	0	1	1	1	2	2	3	0
2	3	4	0	1	2	0	1	0	0
2.37	1.23	0.08	3.40	2.26	1.12	2.15	1.00	0.89	3.34

31	32	33	34	35	36	37	38	39
2	2	2	2	2	3	3	3	4
0	0	1	1	2	0	0	1	0
1	2	0	1	0	0	1	0	0
2.20	1.06	2.09	0.95	0.83	2.03	0.89	0.77	0.71

El conjunto anterior es el conjunto de patrones factibles, dado que se pretende es obtener el conjunto de patrones esenciales, se eliminarán todas las columnas que no son un patrón esencial, obteniendo el conjunto completo de patrones esenciales  $P$ , que es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 & p^4 & p^5 & p^6 & p^7 & p^8 & p^9 & p^{10} & p^{11} & p^{12} & p^{13} & p^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que se pueden esquematizar de la siguiente forma:

$L_{tramo}$					
0	$L_2$	$L_2$	$L_2$	$L_2$	$L_2$
1	$L_1$	$L_2$	$L_2$	$L_2$	$L_2$
2	$L_1$	$L_1$	$L_2$	$L_2$	$L_2$
3	$L_1$	$L_1$	$L_1$	$L_2$	
4	$L_1$	$L_1$	$L_1$	$L_1$	
5	$L_0$	$L_2$	$L_2$	$L_2$	$L_2$
6	$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_2$	
7	$L_0$	$L_1$	$L_1$	$L_2$	
8	$L_0$	$L_1$	$L_1$	$L_1$	
9	$L_0$	$L_0$	$L_2$	$L_2$	
10	$L_0$	$L_0$	$L_1$	$L_2$	
11	$L_0$	$L_0$	$L_1$	$L_1$	
12	$L_0$	$L_0$	$L_0$	$L_2$	
13	$L_0$	$L_0$	$L_0$	$L_1$	
14	$L_0$	$L_0$	$L_0$	$L_0$	

El número de patrones esenciales,  $\alpha$ , se puede acotar con el producto de las cantidades máxima de los segmentos que se obtienen de un tramo de longitud estándar. Formalmente tenemos:

$$\alpha \leq Nmax L_1 \cdot Nmax L_2 \cdot \dots \cdot Nmax L_m.$$

Siguiendo el ejemplo 4 se observa que se cumple la desigualdad anterior:

$$15 \leq 5 \cdot 4 \cdot 4$$

$$15 < 80.$$

**Observación:**

Una desventaja de este método es que calcula un conjunto de 39 patrones factibles y después elimina todos los patrones que no son esenciales, obteniendo el conjunto  $P$  el cual solo tiene 15 patrones que son esenciales. Por lo que se propone un método más eficiente, que a diferencia de este método no evalúa si el patrón es esencial o no, simplemente salta de un patrón esencial al siguiente esencial.

2. “Método eficiente”.

Este método consiste en pasar de un patrón esencial al siguiente esencial y se explicará a continuación.

En general se tiene que los patrones de corte son de forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k-1} \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix},$$

con  $a_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ . Utilizando la descripción del patrón de corte anterior se describe el método paso a paso.

- a) El primer patrón de  $P$  se obtiene al hacer  $a_0 = N \text{ máx } L_0$  y  $a_i = 0$  para  $i = 1, \dots, k-1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ N \text{ máx } L_0 \end{pmatrix}$$

- b) El siguiente bloque de patrones se genera haciendo  $\alpha_1 \neq 0$ , iniciando con  $\alpha_1 = 1$  y se calculando  $\alpha_0 = \left\lfloor \frac{L_{tramo} - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_0} \right\rfloor$ ,  $\alpha_1$  aumentará su valor en uno al calcular el siguiente patrón, repitiendo este proceso hasta que  $\alpha_1 = \left\lfloor \frac{L_{tramo} - \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_1} \right\rfloor$ , por tanto se tiene que el último patrón

de este bloque es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left[ \frac{L_{tramo} - \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_1} \right] \\ \left[ \frac{L_{tramo} - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_0} \right] \end{pmatrix}.$$

- c) El siguiente bloque de patrones se genera haciendo  $\alpha_2 \neq 0$ , iniciando con  $\alpha_2 = 1$  y se repite el paso b) con la excepción de empezar  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2$  aumentará su valor en uno al calcular el siguiente bloque de patrones, repitiendo este proceso hasta que  $\alpha_2 = \left[ \frac{L_{tramo} - \sum_{i=3}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_2} \right]$ , por tanto se tiene que el último patón de este paso es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \left[ \frac{L_{tramo} - \sum_{i=3}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_2} \right] \\ \left[ \frac{L_{tramo} - \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_1} \right] \\ \left[ \frac{L_{tramo} - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \cdot L_i}{L_0} \right] \end{pmatrix}.$$

- d) Para  $\alpha_i$  con  $i = 4, \dots, k-1$  se realiza la misma idea para el paso c), obteniendo el conjunto completo de patrones de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & N \text{ máx } L_1 \\ N \text{ máx } L_0 & \left[ \frac{L_{tramo} - L_1}{L_0} \right] & & \left[ \frac{L_{tramo} - (N \text{ máx } L_1) L_1}{L_0} \right] \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \beta_1 \end{array} \\
\left[ \frac{L_{tramo} - L_2}{L_0} \right] & \left[ \frac{L_{tramo} - L_2 - L_1}{L_0} \right] & \left[ \frac{L_{tramo} - L_2 - \beta_1 L_1}{L_0} \right] \\
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\
\dots & N \text{ máx } L_2 & \dots \\
\begin{array}{c} 0 \\ \left[ \frac{L_{tramo} - (N \text{ máx } L_2)L_2}{L_0} \right] \end{array} & & \begin{array}{c} N \text{ máx } L_2 \\ \beta_1 \\ \left[ \frac{L_{tramo} - (N \text{ máx } L_2)L_2 - \beta_1 L_1}{L_0} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \dots & \begin{array}{c} N \text{ máx } L_{k-1} \\ \beta_{k-2} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \left[ \frac{L_{tramo} - L_{k-1}}{L_0} \right] \end{array} \\
\left[ \frac{L_{tramo} - L_{k-1}}{L_0} \right] & & \left[ \frac{L_{tramo} - (N \text{ máx } L_{k-1})L_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i L_i}{L_0} \right]
\end{array}$$

con  $\beta_j = \frac{L_{tramo} - \sum_{i=j+1}^{k-2} \beta_i \cdot L_i}{L_j}$  para  $j = 1, \dots, k - 2$ .

En el apéndice B se muestra el código de este último método, esperando que el lector pueda comprenderlo y de ser necesario reproducirlo o en su defecto mejorarlo.

### Ejemplo 5.

Considere los requerimientos para la  $\frac{5}{10}$  fracción del domo basado en el octaedro de frecuencia 5 y radio 4 metros, con base cilíndrica, diseñado con el *método mexicano*.<sup>2</sup> Con longitudes y cantidades siguientes.

Etiqueta	$L$	Longitud	Cantidades
$db$	$L_0$	1.8099	20
$A$	$L_1$	1.7881	12
$B$	$L_2$	1.7523	24
$C$	$L_3$	1.6636	36
$D$	$L_4$	1.5102	48
$E$	$L_5$	1.2915	80

<sup>2</sup>El diagrama que se mostrará a continuación fue obtenido en <http://www.domerama.com/calculators/octahedral-5v-mexican-method/> o se puede buscar utilizando las palabras claves *Octahedral 5v Mexican method*

De donde se obtiene el vector columna de longitudes  $L$  y vector columna de cantidades  $R$ :

$$L = \begin{pmatrix} 1.8099 \\ 1.7881 \\ 1.7523 \\ 1.6636 \\ 1.5102 \\ 1.2915 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 24 \\ 36 \\ 48 \\ 80 \end{pmatrix},$$

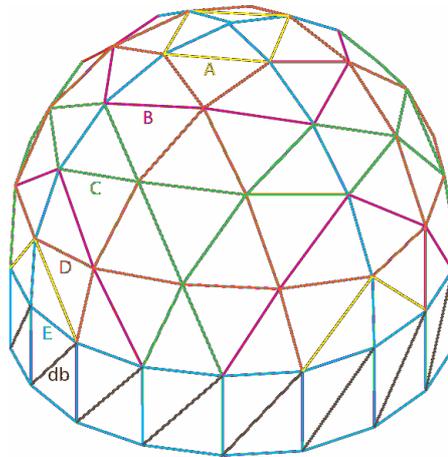


Figura 2.4: Domo basado en un octaedro de frecuencia 5 y radio 4 metros.

Para este domo se obtiene el conjunto de patrones esenciales  $P$ .

$$P = \begin{pmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 & p^4 & p^5 & p^6 & p^7 & p^8 & p^9 & p^{10} & p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ \\ p^{14} & p^{15} & p^{16} & p^{17} & p^{18} & p^{19} & p^{20} & p^{21} & p^{22} & p^{23} & p^{24} & p^{25} & p^{26} & p^{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$p^{28}$	$p^{30}$	$p^{31}$	$p^{32}$	$p^{33}$	$p^{34}$	$p^{35}$	$p^{36}$	$p^{37}$	$p^{38}$	$p^{39}$	$p^{40}$	$p^{44}$	$p^{41}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	3	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	3	2	0	1	0	0	1
$p^{42}$	$p^{43}$	$p^{45}$	$p^{46}$	$p^{47}$	$p^{48}$	$p^{49}$	$p^{50}$	$p^{51}$	$p^{52}$	$p^{53}$	$p^{54}$	$p^{55}$	
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	
0	0	0	1	1	1	2	0	0	0	0	1	0	
1	1	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	

Cualquier otro patrón que no esté en la matriz  $P$ , no es esencial,

$$p^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, p^9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p^{19} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p^{34} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p^{55} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ son patrones}$$

canónicos y además son esenciales.

## 2.5. Crecimiento del problema

Las domos geodésicos son estructuras que tienen un conjunto finito de patrones esenciales.

Existen dos formas de hacer crecer el conjunto de patrones esenciales tan grande como se desee:

1. Conservar el conjunto de segmentos de la misma forma y variar el tamaño de la longitud estándar. Aumentando este tamaño, puede existir el inconveniente de que el proveedor no tenga en existencia tramos de la longitud necesaria o que no se puedan transportar.
2. La otra opción de hacer crecer el problema es variar el radio, con la idea de que mientras más pequeño sea el radio más grande será el conjunto de patrones esenciales. El siguiente ejemplo lo ilustra.

**Ejemplo 6.** Considérese los requerimientos para el domo del ejemplo anterior, tomando el radio igual a 1 metro y sin considerar la longitud de la holgura, se

obtiene la siguiente tabla de requerimientos.

$L$	<i>Longitudes</i>	<i>Cantidades</i>
$L_0$	0.4424	20
$L_1$	0.4370	12
$L_2$	0.4280	24
$L_3$	0.4059	36
$L_4$	0.3675	48
$L_5$	0.3128	80

Se aumenta el radio entre 0.5 y 13, se considera el radio hasta 13 ya que es el mayor radio entero que se puede aplicar al domo para obtener el segmento  $L_0$  del tramo de longitud estándar, de la forma descrita en la sección 1.2, utilizando los *factores de cuerda*. Al calcular el conjunto de patrones esenciales de cada nuevo conjunto de longitudes obtenidos a partir de cada radio, se tiene la siguiente tabla, donde se compara la cantidad de patrones con el radio del domo.

<i>Radio</i>	<i>Cantidad de patrones del conjunto esencial (CPCE)</i>	<i>Radio</i>	<i>Cantidad de patrones del conjunto esencial (CPCE)</i>
0.5	111160	7	13
1	7610	8	7
2	545	9	6
3	132	10	6
4	56	11	6
5	24	12	6
6	21	13	6

Para poder hacer alguna conjetura se graficaran 100 puntos con radio entre 0.5 y 9, calculando cada uno de sus respectivos CPCE (ver la figura 2.5).

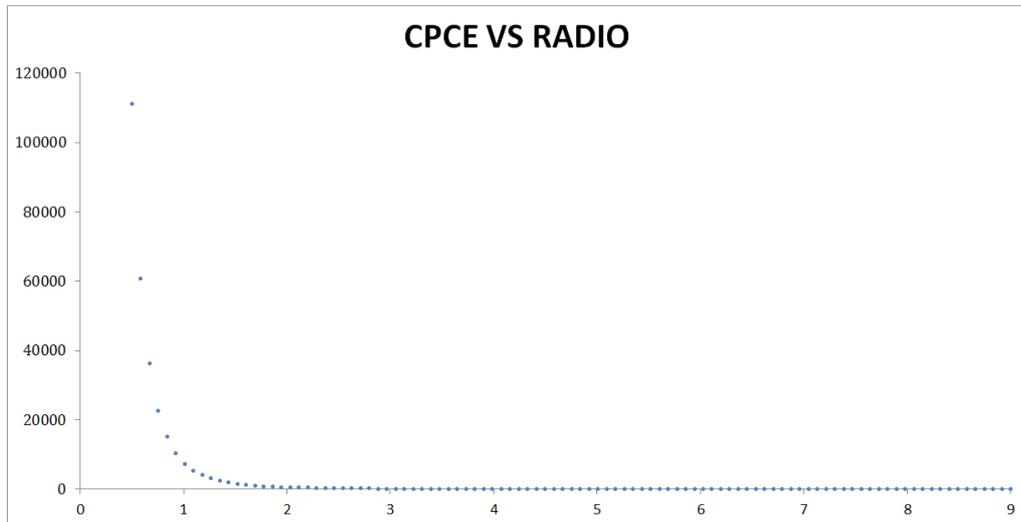
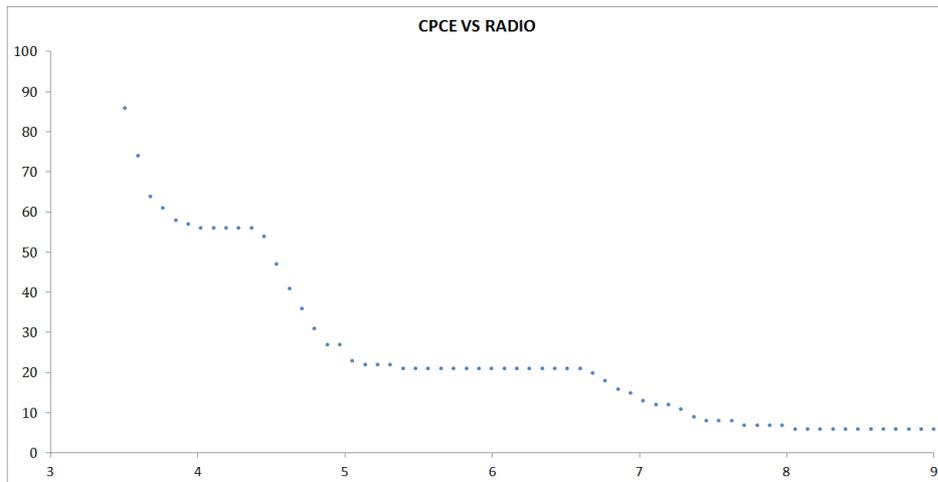


Figura 2.5: CPEC vs Radio

Podría suponerse que el comportamiento es simplemente una exponencial. Sin embargo, si se limita el radio entre 3.5 y 9 se observa el siguiente comportamiento:

Figura 2.6: CPEC vs Radio, limitada a  $r = 3, \dots, 9$ .



## Capítulo 3

### El problema de corte unidimensional y soluciones simples

En el capítulo anterior se definió patrón de corte, patrón factible, patrón canónico, entre otros conceptos, en este capítulo se explica sobre el objetivo central de este trabajo, se proponen e implementan soluciones simples al problema de corte. Posteriormente se realiza el planteamiento matemático del problema de corte y el método que le da solución, conocido como método exacto. Aunque siempre en las aplicaciones de optimización se menciona que el objetivo es minimizar el desperdicio, se termina minimizando la cantidad de materiales utilizados.

En el problema abordado el objetivo es reducir o minimizar la cantidad de tramos del longitud  $L_{tramo}$  que se utilizarán para cubrir los requerimientos. A continuación se muestra la equivalencia que existe entre minimizar el desperdicio y minimizar la cantidad de tramos de longitud estándar:

**Proposición 1.** *Minimizar el desperdicio es equivalente a minimizar la cantidad de tramos de longitud  $L_{tramo}$  utilizada.*

El desperdicio es igual al total de la longitud de los tramos utilizados menos la suma de las longitudes de los segmentos requeridos, es decir:

$$\text{desperdicio} = (\text{NúmeroDeTramos})L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} R_i L_i,$$

entonces, minimizar el desperdicio es:

$$\text{mín desperdicio} = \text{mín} \left( (\text{NúmeroDeTramos})L_{tramo} - \sum_{i=0}^{k-1} R_i L_i \right),$$

donde  $L_{tramo}$  y  $R_i L_i$  son constantes, por tanto se tiene que

$$\text{mín desperdicio} \text{ es equivalente a } \text{mín}(\text{NúmeroDeTramos}).$$

Se consideran los problemas de corte para dos estructuras y se aplican los siguientes métodos:

1. Método canónico (primera sección).
2. Método grandes primero (segunda sección) .
3. Método exacto (tercera sección).

Por último en la cuarta sección se menciona la medida de eficiencia usual para los distintos métodos descritos en este capítulo y se da una propuesta de eficiencia (eficiencia real).

### 3.1. Método canónico

Es el método más simple de todos, pues consta de cortar de cada tramo de longitud  $L_{tramo}$  solamente tramos de longitud  $L_i$ , es decir, solo se utilizaran patrones canónicos.

En el capítulo 2 se definió  $N \text{ máx } L_i$  como la máxima cantidad de segmento obtenido de la longitud  $L_i$  de un tramo de longitud estándar  $L_{tramo}$ , a continuación se define  $N \text{ máx } L$  como el vector columna que contiene cada  $N \text{ máx } L_i$ .

$$N \text{ máx } L = \begin{pmatrix} N \text{ máx } L_0 \\ N \text{ máx } L_1 \\ \vdots \\ N \text{ máx } L_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Es necesario saber cuántos tubos de longitud  $L_{tramo}$  son necesarios para cubrir cada una de las cantidades del conjunto de requerimientos  $R_i$ .

#### Ejemplo 7.

Supóngase que se necesita  $R_1 = 32$  segmentos de longitud  $L_1 = 1.1$  de tramos de longitud  $L_{tramo} = 5.98$ .

$$N \text{ máx } L_1 = \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5.98}{1.1} \right\rfloor = \lfloor 5.4363 \rfloor = 5,$$

luego, si se divide el requerimiento entre la cantidad máxima de tramos de longitud  $L_1$  y se obtiene la cantidad de tubos de longitud  $L_{tramo}$  necesaria para cubrir el requerimiento.

$$\frac{32}{5} = 6.4,$$

se observa que la cantidad no es entera y que al tomar la parte entera y multiplicarla por la cantidad máxima de longitud  $L_1$  no se cubriría el requerimiento así que se tomará la parte entera más uno.

Para obtener cuál es la cantidad de tubos adecuada para cumplir el requerimiento se usará la siguiente definición.

**Definición 7.** (*Función Techo*)

Para cualquier número real  $x$ , la función techo de  $x$  (denotada por  $\lceil x \rceil$ ) es el entero mayor o igual más próximo a  $x$ , es decir, si  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lceil x \rceil = \inf \{n : n \geq x, n \in \mathbb{Z}\}$$

Con la función techo podemos calcular la cantidad de segmentos de longitud  $L_{tramo}$  necesarios para cubrir cada una de las cantidades  $R_i$  con  $i = 0, \dots, k - 1$  de la siguiente forma

$$\left\lceil \frac{R_i}{Nmax L_i} \right\rceil = \left\lceil \frac{R_i}{\left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_i} \right\rfloor} \right\rceil.$$

También se puede calcular la cantidad de segmentos de longitud  $L_{tramo}$  para cubrir el requerimiento del vector columna  $R$ , de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{R_i}{Nmax L_i} \right\rceil = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{R_i}{\left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_i} \right\rfloor} \right\rceil,$$

donde  $k$  es el número de longitudes de los segmentos del requerimiento.

**Ejemplo 8.**

Considérese los requerimientos del ejemplo 4 y  $L_{tramo} = 5.98$ , se tiene en la siguiente tabla el conjunto de requerimientos.

$L$	Longitud	Cantidades
$L_0$	1.3152	35
$L_1$	1.2556	80
$L_2$	1.1438	50

se calculará

$$Nmax L_0 = \left\lceil \frac{L_{tramo}}{L_0} \right\rceil = \left\lceil \frac{5.98}{1.3152} \right\rceil = \lceil 4.5468 \rceil = 5,$$

$$Nmax L_1 = \left\lceil \frac{L_{tramo}}{L_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{5.98}{1.2556} \right\rceil = \lceil 4.7626 \rceil = 5,$$

$$Nmax L_2 = \left\lceil \frac{L_{tramo}}{L_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{5.98}{1.1438} \right\rceil = \lceil 5.2281 \rceil = 6,$$

$$N \max L = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\left\lceil \frac{35}{4} \right\rceil = \lceil 8.75 \rceil = 9,$$

$$\left\lceil \frac{80}{4} \right\rceil = \lceil 20 \rceil = 20,$$

$$\left\lceil \frac{50}{5} \right\rceil = \lceil 10 \rceil = 10.$$

Por lo tanto se necesitan 9, 20 y 10 segmentos de longitud  $L_{tramo}$  respectivamente para cubrir los requerimientos anteriores, en total 39 segmentos de longitud  $L_{tramo}$ . Utilizando los siguientes patrones.

$$9 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

### Observación

Al implementar 9 veces el patrón de corte  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , se sobrepasa los requerimientos

$R_0$ , ya que el cociente entre  $R_0$  y  $N \max L_0$  no es entero, es decir, se aplica un corte innecesario de la longitud  $L_0$ , por lo tanto se utilizará un patrón factible que cumpla el requerimiento, es decir, se implementará 8 veces el patrón esencial

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y una vez el patrón factible  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , que es el patrón que completa el

requerimiento  $R_0$ . Entonces se tienen la siguiente implementación de patrones para resolver el requerimiento del domo:

$$8 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

### Ejemplo 9.

Considérese el ejemplo 5 de donde se tiene la siguiente tabla de requerimientos.

$L$	Longitudes	Cantidades
$L_0$	1.8099	20
$L_1$	1.7881	12
$L_2$	1.7523	24
$L_3$	1.6636	36
$L_4$	1.5102	48
$L_5$	1.2915	80

Se obtiene  $Nmax L = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  y para cada  $R_i$  se tiene que

$$\left\lceil \frac{R_0}{Nmax L_0} \right\rceil = \left\lceil \frac{20}{3} \right\rceil = [6.66] = 7,$$

$$\left\lceil \frac{R_1}{Nmax L_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = [4] = 4,$$

$$\left\lceil \frac{R_2}{Nmax L_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{24}{3} \right\rceil = [8] = 8,$$

$$\left\lceil \frac{R_3}{Nmax L_3} \right\rceil = \left\lceil \frac{36}{3} \right\rceil = [12] = 12,$$

$$\left\lceil \frac{R_4}{Nmax L_4} \right\rceil = \left\lceil \frac{48}{3} \right\rceil = [16] = 16,$$

$$\left\lceil \frac{R_5}{Nmax L_5} \right\rceil = \left\lceil \frac{80}{4} \right\rceil = [20] = 20.$$

Y la cantidad total de segmentos de longitud  $L_{tramo} = 5.98$  es 67.

Se observa nuevamente un cociente no entero entre  $R_0$  y  $N \text{ máx } L_0$  como en el ejemplo 8, por lo tanto se tiene

$$6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 36 \\ 24 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix},$$

donde el patrón

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es el patrón factible que a completa el requerimiento  $R_0$ .

### 3.2. Método grandes primero

En esta sección se explica el método grandes primero, que se consideraba uno de los mejores método de corte [11], y se comparará las cantidades de tramos de longitud estándar utilizadas para satisfacer el conjunto de requerimientos del domo en cuestión con las utilizadas por el método canónico, de antemano se advierte que el método de grandes primero da una mejor o igual solución que el método canónico.

La idea principal del método es obtener en cada patrón de corte la mayor cantidad de segmentos de todas las longitudes, el sobrante debe ser utilizado obteniendo del segmento más pequeño que el segmento usado. Tal vez del sobrante puede no obtenerse un segmento grande pero probablemente podría obtenerse uno pequeño de este nuevo sobrante también se podría obtener más segmentos pequeños que grandes. Se describe a continuación como se irá construyendo una matriz de corte ( $C$ ) donde en cada columna se especifica la ejecución de un patrón de corte, es decir, la cantidad de cada  $L_i$  que se puede obtener en ese patrón a partir de los sobrantes, a diferencia de la matriz de patrones de corte, está puede tener columnas repetidas. Así el número de columnas de  $C$  será el número de tubos a utilizar.

La matriz de corte se llena de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Para calcular cada  $c_{ij}$  es necesario considerar la longitud del sobrante del tubo en cuestión ( $S_j$ ) para saber cuantos segmentos se pueden obtener de él. Es necesario saber la cantidad de segmentos de longitud  $L_i$  que faltan de obtener, para esto se calcula la diferencia entre  $R_i$  y la cantidad de segmentos obtenidos hasta el momento de dicha longitud, a lo cual se le denomina déficit ( $Def_i$ ). El sobrante  $S_j$  y el déficit  $Def_i$  se calculan como sigue:

$$S_j = L_{tramo} - \sum_{k=0}^{i-1} c_{kj} L_k \quad y \quad Def_i = R_i - \sum_{k=0}^{j-1} c_{ik} .$$

De tal manera que  $c_{ij}$  se calcula como el mínimo entre la cantidad de segmentos de longitud  $L_i$  que pueden obtener del sobrante  $S_j$  y los que faltan de obtener, es decir,

$$c_{ij} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{S_j}{L_i} \right\rfloor, Def_i \right\}$$

A continuación el pseudocódigo para implementar el método grandes primero es el siguiente:

Variables del problema.

L_tramo	Longitud del tramo estándar.
m	Número de longitudes diferentes de segmentos a corta.
R	Vector de requerimientos.
L	Vector de longitudes.



obtiene la siguiente matriz de corte:

$$C = \begin{pmatrix} c^0 & \dots & c^7 & c^8 & c^9 & \dots & c^{27} & c^{28} & c^{29} & \dots & c^{37} & c^{38} \\ 4 & \dots & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & \dots & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 5 & \dots & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Se observa que el ejemplo 8 se necesitan 39 segmentos de longitud estándar  $L_{tramo}$  para cubrir los requerimientos del domo, de igual manera la matriz de corte anterior se tiene 39 columnas, es decir, no se redujo la cantidad de segmentos de longitud  $L_{tramo}$  con este método.

**Ejemplo 11.** Considérese los requerimientos del ejemplo 5, que se presentan en la siguiente tabla.

<i>Longitudes</i>	<i>Cantidades</i>
1.8099	20
1.7881	12
1.7523	24
1.6636	36
1.5102	48
1.2915	80

Al utilizar el método grandes primero con el conjunto de restricciones anterior se obtiene la siguiente matriz de corte.

$$C = \begin{pmatrix} c^0 & \dots & c^5 & c^6 & c^7 & \dots & c^9 & c^{10} & c^{11} & \dots & c^{17} & c^{18} \\ 3 & \dots & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & \dots & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c^{19} & \dots & c^{29} & c^{30} & c^{31} & \dots & c^{45} & c^{46} & c^{47} & \dots & c^{61} & c^{62} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & \dots & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & \dots & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & 4 & \dots & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Se observa que en este ejemplo si se redujo la cantidad de segmentos de longitud estándar  $L_{tramo}$ , comparando la cantidad de estos segmentos utilizados en el ejemplo

9 con la cantidad de columnas de la matriz anterior.

La posibilidad de reducir el número de tubos de longitud estándar al implementando el *método de grandes primero* respecto al *método canónico* se fundamenta en utilizarán además de los patrones esenciales canónicos, patrones factibles que intentan aprovechar los sobrantes para obtener segmentos pequeños, lo cual se muestra a continuación.

Considérese los siguientes patrones que resuelven los requerimientos para algún domo con el método canónico.

$$\begin{pmatrix} R_{k-1} \\ R_k \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{pmatrix} = \alpha_{k-1} \begin{pmatrix} \beta_{k-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{k-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_k \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_k \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ \dots + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha = \left\lfloor \frac{R_i}{N \max L_i} \right\rfloor$ ,  $\beta_i = N \max L_i$  y  $\gamma_i = R_i - \alpha_i \beta_i$ . Mientras que usando el método grandes primero se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{k-1} \\ R_k \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} a_{0j} \\ a_{1j} \\ \vdots \\ a_{k-2j} \\ a_{k-1j} \end{pmatrix},$$

donde  $a_{ij} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{L_{tramo} - \sum_{l=i+1}^{k-1} a_{lj} \times L_l}{L_i} \right\rfloor, R_i \right\}$ , después se actualiza  $R_i = R_i - a_{ij}$ .

Es claro que el desperdicio se va a aprovechando para tratar de obtener segmentos de longitud más pequeños en el patrón, por lo tanto se tiene la posibilidad de eliminar patrones, por ejemplo, supóngase que la longitud  $L_0$  es menor que el desperdicio obtenido en el  $k$ -ésimo y que  $R_0 = \left\lfloor \frac{L_{tramo} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} \times L_l}{L_0} \right\rfloor$ , esto implicaría que se reduce un patrón del método canónico en el método grandes primero, es decir, se reduce la cantidad de tramos de longitud estándar.

La igualdad se obtiene cuando las longitudes  $L_i$  son muy parecidos, lo que implica que no se pueden obtener segmentos de longitud menor en un mismo patrón, es decir, se obtendrán solo patrones canónicos o patrones factibles que a completen los distintos requerimientos  $R_i$  para  $i = 0, \dots, k - 1$ .

Sin embargo ninguno de estos métodos garantiza reducir el número de segmentos de longitud estándar al mínimo. Lo que implica necesario considerar el siguiente método.

### 3.3. Método exacto

Esté método es un clásico del área de investigación de operaciones como se puede ver en [12]. Aquí se considerará solamente el conjunto de patrones esenciales. La finalidad es reducir el tamaño del modelo sin afectar la solución.

Se mostrará cómo construir el modelo, considerando que el objetivo es determinar el menor número de segmentos de longitud  $L_{tramo}$  a utilizar para cubrir las cantidades del vector columna  $R$  correspondiente a el vector columna de longitudes  $L$ , además de saber cómo cortar cada uno de estos segmentos.

Sea  $x_j$  el número de veces que se implementa el patrón  $p^j$  para  $j = 0, \dots, m - 1$ , el patrón  $p^j$  es un elemento del conjunto de patrones esenciales  $P$  y  $m$  la cantidad de patrones esenciales.

Obsérvese que al calcular el producto entre la matriz  $P$  y el vector  $X$  se obtiene un vector columna, donde la  $i$ -ésima componente es la cantidad de segmentos de longitud  $L_i$  que se obtienen del proceso de corte.

$$PX \geq R,$$

por otra parte la cantidad de segmentos de longitud estándar a cortar se expresa como

$$z = \sum_{i=0}^{m-1} x_i,$$

que se pretende minimizar. Además el vector columna  $X$  debe tener solo cantidades enteras no negativas, entonces se tiene

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$i = 1, \dots, m - 1,$$

por lo tanto el modelo queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \text{mín } z \\ \text{sujeto a } & PX \geq R \\ & x_i \geq 0 \\ & x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ & i = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Este tipo de modelos se resuelven con el método programación lineal entera, ya que la solución al problema es la cantidad de veces que se implementa cada uno de los patrones de corte.

Se mostrarán a continuación los modelos para las fracciones de domos siguientes:

1.  $\frac{5}{9}$  fracción del domo basado en un icosaedro frecuencia 3 y radio 3 metros (ejemplo 4).
2.  $\frac{5}{10}$  fracción del domo basado en un octaedro de frecuencia 5 y radio 4 metros, con base cilíndrica (ejemplo 5).

**Ejemplo 12.** Considérese la siguiente matriz de patrones de corte esencial  $P$  del ejemplo 4:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^t = (x_0, x_2, \dots, x_{14}) \quad R^t = (35, 80, 50).$$

Entonces, se realizará las siguientes operaciones para obtener el modelo:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=0}^{14} x_i \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{14} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \\ 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} & \text{mín} \sum_{i=0}^{14} x_i \\ \text{s.a. } & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80 \\ & 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50 \\ & x_i \geq 0 \\ & x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ & i = 0, \dots, 14. \end{aligned}$$

**Ejemplo 13.** Considerando la matriz de patrones de corte esencial  $P$  del ejemplo 5, se tiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} & \text{mín} \sum_{i=0}^{55} x_i \\ & x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \\ & \quad + x_{47} + x_{48} + x_{49} + 2x_{50} + 2x_{51} + 2x_{52} + 2x_{53} + 2x_{54} + 3x_{55} \geq 20 \\ & x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + 2x_{30} \\ & \quad + 2x_{31} + 2x_{32} + x_{33} + 3x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + 2x_{49} + x_{54} \geq 12 \\ & x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + 2x_{18} + 3x_{19} + x_{26} \\ & \quad + x_{27} + x_{28} + 2x_{29} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + 2x_{44} + x_{48} + x_{53} \geq 24 \\ & x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9 + x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + x_{18} + x_{23} \\ & \quad + x_{24} + x_{25} + x_{28} + x_{32} + x_{38} + x_{39} + 2x_{40} + x_{43} + x_{47} + x_{52} \geq 36 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 + x_8 + x_{11} + 2x_{12} + x_{14} + x_{17} + x_{21} \\ & \quad + 2x_{22} + x_{24} + x_{27} + x_{31} + x_{36} + 2x_{37} + x_{39} + x_{42} + x_{46} + x_{51} \geq 48 \\ & 4x_0 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 6x_6 + 2x_7 + 3x_{10} + 2x_{11} + x_{13} + x_{16} \\ & \quad + 3x_{20} + 2x_{21} + x_{23} + x_{26} + x_{30} + 3x_{35} + 2x_{36} + x_{38} + x_{41} + x_{45} + x_{50} \geq 80 \\ & x_i \geq 0 \\ & i = 0, \dots, 55. \end{aligned}$$

Estos modelos se resolverán en el siguiente capítulo.

### 3.4. Medidas de eficiencia

La eficiencia de un método de corte comúnmente se mide respecto a los porcentajes de desperdicios, calculado de la siguiente forma

$$\% \text{ de desperdicio} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} s_i}{Z \times L_{\text{tramo}}} \times 100 \%,$$

donde  $k$  es la cantidad de longitudes a cortar,  $s_i$  es el sobrante obtenido por el patrón de corte, y  $Z$  la cantidad de tramos de longitud estándar utilizados para cubrir el requerimiento, entonces se tiene que la eficiencia es:

$$\text{Eficiencia del método} = 100\% - \% \text{ de desperdicio.}$$

**Ejemplo 14.** Considérese el ejemplo 8 resuelto con el *método canónico*, donde se tiene el siguiente vector de sobrantes  $S$ .

$$S = (0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 2.0344, \\ 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, \\ 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, \\ 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261),$$

y la cantidad a utilizar de 39 tramos de longitud estándar para cubrir el requerimiento.

El porcentaje de desperdicio con el método es:

$$\% \text{ de desperdicio} = \frac{19.7496}{39 \times 5.98} \times 100\% = \frac{19.7496}{233.22} \times 100\% = 12.67\%,$$

por lo tanto, el método tiene una eficiencia de

$$\text{Eficiencia del método} = 100\% - 12.67\% = 87.32\%.$$

**Ejemplo 15.** Considérese el ejemplo 9 resuelto con el *método canónico*, donde se tiene el siguiente vector de sobrantes  $S$ .

$$S = (0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5503, 2.3602, 0.6157, 0.6157, \\ 0.6157, 0.6157, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, \\ 0.7231, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, \\ 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, \\ 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, 1.4494, \\ 1.4494, 1.4494, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, \\ 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814),$$

y la cantidad a utilizar de 67 tramos de longitud estándar para cubrir el requerimiento.

El porcentaje de desperdicio con el método es:

$$\% \text{ de desperdicio} = \frac{65.2504}{67 \times 5.98} \times 100\% = \frac{65.2504}{400.66} \times 100\% = 16.28\%,$$

por lo tanto, el método tiene una eficiencia de

$$\text{Eficiencia del método} = 100\% - 16.28\% = 83.71\%.$$

**Ejemplo 16.** Considérese el ejemplo 10 resuelto con el *método grandes primero*, donde se tiene el siguiente vector de sobrantes  $S$ .

$$S = (0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7192, 0.7788, 0.9576, \\ 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, \\ 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 0.9576, 1.0694, 0.261, 0.261, \\ 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 0.261, 1.4048),$$

y la cantidad a utilizar de 39 tramos de longitud estándar para cubrir el requerimiento.

El porcentaje de desperdicio con el método es:

$$\% \text{ de desperdicio} = \frac{29.55}{39 \times 5.98} \times 100\% = \frac{29.55}{233.22} \times 100\% = 12.67\%,$$

por lo tanto, el método tiene una eficiencia de

$$\text{Eficiencia del método} = 100\% - 12.67\% = 87.32\%.$$

**Ejemplo 17.** Considérese el ejemplo 11 resuelto con el *método grandes primero*, donde se tiene el siguiente vector de sobrantes  $S$ .

$$S = (0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5503, 0.5721, 0.6157, 0.6157, 0.6157, \\ 0.6515, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.7231, 0.8118, 0.9892, \\ 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, 0.9892, \\ 1.1426, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, \\ 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.1579, 0.3766, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, \\ 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 0.814, 2.1055),$$

y la cantidad a utilizar de 63 tramos de longitud estándar para cubrir el requerimiento.

El porcentaje de desperdicio con el método es:

$$\% \text{ de desperdicio} = \frac{41.3304}{63 \times 5.98} \times 100\% = \frac{41.3304}{376.74} \times 100\% = 10.97\%,$$

por lo tanto, el método tiene una eficiencia de

$$\text{Eficiencia del método} = 100\% - 10.97\% = 89.02\%.$$

**Observaciones**

1. La eficiencia de los métodos *canónico* y *grandes primero* en los ejemplos 14 y 16 fue la misma debido a que se utilizó la misma cantidad de segmentos de longitud estándar.
2. Esta forma de medir la eficiencia no es realista, ya que se da por hecho que siempre se puede alcanzar el 100 % de eficiencia con algún método, esto se consigue en muy raros casos o en ejemplos diseñados para lograrlo de eficiencia.

A continuación se propone una manera más realista de medir la eficiencia de un método, *eficiencia real*, que depende del método con el que se obtuvo la solución.

$$eficiencia_R = 100\% - (\% \text{ de desperdicio del método} \\ - \% \text{ de desperdicio del método exacto}),$$

donde el porcentaje de desperdicio se calcula como se menciona al principio de esta sección (página 48), después de resolver los modelos anteriores se calculará su eficiencia real con respecto a los métodos *canónicos* y *grandes primero*.



## Capítulo 4

### Programación lineal

En la primera sección se presentan definiciones, que ayudan a comprender el método simplex clásico, se presenta brevemente en qué consiste el método en cual se puede revisar con más detalle en la literatura, las utilizadas en este trabajo son [12], [13], [14], [15], que se utiliza para resolver los problemas de programación lineal donde la solución es real.

En la segunda sección se aborda el método de descomposición LU, utilizándose para resolver sistemas de ecuaciones lineales, la forma en que se aborda prepara al lector para entender la versión del *simplex revisado con descomposición LU*, tema que se aborda en tercera sección, usando esquemas de actualización.

Las versiones revisadas del método simplex, propiamente implementadas, reducen la cantidad de operaciones necesarias que se hacen en el método clásico, aunque cuando se éstas se desarrollan podría parecer lo contrario.

En la cuarta sección se presenta el método de dos fases, debido a que el método simplex solo trabaja con problemas de programación lineal donde el conjunto de restricciones son del tipo “ $\leq$ ” y se observa que en el la sección 3.3 que la forma de las restricciones de los modelos son “ $\geq$ ”.

En la quinta sección se explica brevemente sobre la programación lineal entera, para centrar la atención al método de ramificación y acotamiento, que se utilizará para dar solución al método exacto.

En la sexta sección se implementa el método exacto, es decir, después de realizar el modelo de programación lineal para el diseño de la fracción del domo, se resuelve el problema de programación entera.

En la séptima sección se comenta una alternativa al método exacto, esta alternativa se debe a que para ciertos modelos que contengan una gran cantidad de patrones esenciales el método exacto no podría resolverlos o tardaría demasiado tiempo, y se muestra brevemente el algoritmo.



**Observaciones:**

1. El conjunto de restricciones puede ser  $\leq$ ,  $=$  y  $\geq$ .
2. Aunque en el conjunto de restricciones pueden aparecer desigualdades de la forma  $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j$ , y matemáticamente sea equivalente a

$$-a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - \dots - a_{jn}x_n \geq -b_j$$

En el caso de la programación lineal no son equivalentes, pues el conjunto de  $b_j$  para  $j = 1, \dots, m$  no puede ser negativo.

3. Minimizar la función  $z$  es equivalente a maximizar  $-z$ .

**4.1. El método simplex**

Publicado por **George Dantzing** [21] en 1947, un algoritmo iterativo que va aproximando al óptimo de Programación Lineal en caso de existir.

La primera implementación computacional fue en 1952 para un problema de 71 variables y 48 restricciones, el cual tardó 18 horas en ser resuelto. El ejemplo original de Dantzig de la búsqueda de la mejor asignación de 70 personas a 70 puestos de trabajo es un ejemplo de la utilidad de la programación lineal. La potencia de computación necesaria para examinar todas las permutaciones a fin de seleccionar la mejor asignación es inmensa ( $70!$ ); el número de posibles configuraciones excede al número de partículas en el universo. Sin embargo, toma sólo un momento encontrar la solución óptima mediante el planteamiento del problema como una programación lineal y la aplicación del algoritmo simplex. La teoría de la programación lineal reduce drásticamente el número de posibles soluciones óptimas que deben ser revisadas.

Antes de describir el método es necesario escribir el sistema en forma matricial. A partir de tener la forma canónica de un PPL se obtiene la forma matricial (forma estándar) de un PPL, se escribe a la función  $z$  como el producto de los siguientes vectores columna:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

se comprueba que al multiplicar el vector  $C^t$  por el vector columna  $X$  se tiene

$$z = C^t X = (c_1 \quad \dots \quad c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n).$$



1. Desigualdades de la forma “ $\leq$ ”.

Para convertir este tipo de desigualdades a igualdades se agregará una nueva variable a cada restricción de este tipo, conocidas como *variable de holgura*, ilustrado en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 18.** Considérese que se tiene la siguiente desigualdad

$$a_{i1} + \dots + a_{in} \leq b_i$$

que se convierte en igualdad de la siguiente forma

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + a_{i, n+1}x_{n+1} = b_i$$

2. Desigualdades de la forma “ $\geq$ ”.

Para convertir este tipo de desigualdades a igualdades se agregará dos nuevas variables a cada restricción de este tipo, una será la *variable de holgura* y la otra se le conoce como *variable artificial* conoce como variables de holgura, que se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 19.** Considérese que se tiene la siguiente desigualdad

$$a_{i1} + \dots + a_{in} \geq b_i,$$

que se convierte en igualdad de la siguiente forma

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + a_{i, n+1}x_{n+1} - a_{i, n+2}x_{n+2} = b_i,$$

donde la variable  $x_{n+2}$  es la variable artificial.

### Observación:

Cabe mencionar que estas nuevas variables, de holgura y artificiales, en la función objetivo tienen coeficiente cero.

Con lo anterior se puede escribir cualquier conjunto de restricciones de un PPL a un conjunto de igualdades, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 20.** Considérese el siguiente problema de PPL en su forma canónica

$$\begin{array}{rcll} \text{mín } z & = & 2x_1 + & x_2 \\ \text{s. a.} & & 10x_1 + & 10x_2 & \leq & 9 \\ & & 10x_1 + & 5x_2 & \geq & 1 \\ & & & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



donde la primera fila es etiqueta que sirve solamente de referencia y la primera columna indica las variables que entra a la base, la que inicialmente tendrá a las variables de holgura.

A continuación se explica paso a paso el algoritmo.

1. Se construye la tabla inicial.
2. Se verifica que las componentes de  $-C$ , fila correspondiente a la función objetivo, si todas las componentes son negativos y/o ceros ya se está en el óptimo, en caso contrario se determina aquella componente de  $-C$  que sea el valor mayor estrictamente positivo. En caso de existir varias componentes con este valor se elige la primera que apareció. La columna que contiene este valor es llamada *columna pivote*.
3. Se busca aquel elemento que minimice el valor del cociente entre la columna pivote y su correspondiente valor en la columna  $b$ , es decir,

$$\text{mín } \left\{ \frac{b_i}{y_i} \mid y_i > 0, \text{ para } i = 1, \dots, m \right\},$$

este elemento es llamado *elemento pivote*.

4. Se convierte el elemento pivote en 1, de la siguiente forma, supóngase que el elemento pivote es  $a_{ij}$ , entonces se multiplica por  $\frac{1}{a_{ij}}$  todo el renglón de  $i$ .

Se sigue hacer cero todos los elementos de la columna pivote, la  $j$ -ésima columna, excepto la  $i$ -ésima componente, ya que es el elemento pivote, que se consigue multiplicando cada elemento del renglón  $i$  por  $a_{kj}$  y restándolo a su correspondiente componente en el renglón  $k$ , para  $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ , es decir,

$$a_{kl} = a_{kl} - a_{kj} \cdot a_{il}, \quad \forall k \neq i, \quad \forall l = 1, \dots, n$$

5. Se cambia en la columna de las variables de la base, *V.B.*, la variable  $x_i$ , a esta variable se le llama variable de entrada, correspondiente al renglón del elemento pivote por la variable  $x_j$ , a esta variable se le llama variable de salida, correspondiente a la columna pivote.
6. Se repite el paso 2 hasta que se llegue al óptimo.

### Observación:

En caso de que todos los elementos de la columna pivote sean negativos esto indicará que la solución no está acotada.

**Ejemplo 21.** Considérese el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{llll} \text{mín} & -3x_1 & -5x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 + & 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array},$$

obteniendo el sistema aumentado

$$\begin{array}{llllllll} \text{mín} & -3x_1 & -5x_2 & & & & & \\ \text{s.a.} & x_1 & & & +x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & & & +x_4 & & = 12 \\ & 3x_1 + & 2x_2 & & & & +x_5 & = 18 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

**Iteración 0.**

1. Se construye la tabla inicial del simplex.

V.B.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_3$	1	0	1	0	0	4
$x_4$	0	2	0	1	0	12
$x_5$	3	2	0	0	1	18
$z$	3	5	0	0	0	0

Se observa que el valor de la función objetivo es cero inicialmente, esto se tiene ya que  $x_1 = x_2 = 0$ , por no aparecer como variables de la base, mientras que  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = 12$  y  $x_5 = 18$ , pero al multiplicar los correspondientes valores de  $x_i$  por los coeficientes de el renglón  $z$  se obtiene el valor de cero.

2. Se observa que existe valores positivos en la fila  $-C$ , se calcula el elemento más positivo, que resulta ser 5, lo que implica que  $x_2$  entra a la base.
3. Se localiza el elemento pivote

$$\text{mín} \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18}{2} \right\} = 6,$$

lo que implica que  $a_{22} = 2$  es el elemento pivote y que sale de la base  $x_4$ .

4. Se hace uno el elemento pivote multiplicando todo el segundo renglón por  $\frac{1}{2}$ .

V.B.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_3$	1	0	1	0	0	4
$x_4$	0	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	$\frac{1}{2}$	0	6
$x_5$	3	2	0	0	1	18
$z$	3	5	0	0	0	0

El siguiente paso es hacer cero en los elementos de la columna pivote, excepto en el elemento pivote, obteniendo la siguiente tabla.

5. Se cambia  $x_4$  de las variables de la base por  $x_2$ .

### Iteración 1

V.B.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_3$	1	0	1	0	0	4
$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
$x_5$	3	0	0	-1	1	6
$z$	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	-30

Nuevamente se observa que existe valores positivos en la fila  $-C$ , por lo tanto se calcula el elemento pivote que es  $a_{13} = 3$  la variable  $x_1$  entra a la base y la variable  $x_5$  sale de la base. Después de hacer 1 el elemento pivote y hacer ceros los demás elementos de la columna pivote se tiene la siguiente tabla.

### Iteración 2

V.B.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
$z$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	-36

Al verificar los valores del renglón  $-C$  se tiene que todos los valores son menores iguales que cero. Por tanto se ha llegado al mínimo con  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$  y  $z = -36$ .

Al método anterior se le conoce como método clásico. A continuación se presentará un método de factorización de matrices llamado descomposición  $LU$ , que será utilizado en una versión del método simplex revisado, con el fin de reducir el número de operaciones que se realizan al resolver los problemas de programación lineal con el método clásico.

## 4.2. Descomposición LU

Considérese el sistema de ecuaciones lineales  $AX = b$ , y que se tiene la descomposición  $LU$  de matriz  $A$ , esto es  $L$  y  $U$  son matrices cuadradas tales que  $A = LU$ , con  $L$  triangular inferior y  $U$  triangular superior, sustituyendo en  $AX = b$  se tiene:

$$LUX = b,$$

haciendo cambio de variable  $Y = UX$  se tiene

$$LY = b,$$

por lo que se tendría que resolver el sistema  $LY = b$  y después  $Y = UX$ , ahora se requiere de calcular  $U$  y  $L$ .

Para construir  $U$  es necesario multiplicar por la izquierda a la matriz  $A$  por matrices que realicen unos en la diagonal principal y ceros de debajo de la misma, que se obtiene con matrices  $E_i$  que son de la siguiente forma:

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{ii}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{a_{i+1 i}}{a_{ii}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{a_{mi}}{a_{ii}} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2.1)$$

por lo tanto se tiene

$$U = E_m \cdot E_{m-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A. \quad (4.2.2)$$

Para obtener a la matriz  $L^{-1}$  se despeja a  $A$  de la ecuación 4.2.2 obteniendo

$$(E_m \cdot E_{m-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot U = A,$$

recordando que  $A = LU$ , se concluye que

$$L = (E_m \cdot E_{m-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1},$$

por lo tanto

$$L^{-1} = E_m \cdot E_{m-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1.$$

Así la solución del sistema  $LY = b$  es

$$Y = E_m \cdot E_{m-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 b, \quad (4.2.3)$$

luego la solución de  $UX = Y$  se encuentra a través de una sustitución hacia atrás.

Con el fin de clarificar lo anterior se realizará el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 22.** Considérese el sistema

$$\begin{array}{rcccccc} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 3 \\ x_1 & & & & & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & & & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & & & & & = & 0 \end{array},$$

de donde se obtienen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ya que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

se calculará  $U$  y  $L$

$$\begin{aligned} E_1 A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ E_2 E_1 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ E_3 E_2 E_1 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene  $U$

$$U = E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y la matriz  $L^{-1}$  está dada por:

$$E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego se resuelve el sistema  $Y = L^{-1}b$  con sustitución hacia adelante

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

y por último se resuelve  $UX = Y$  con sustitución hacia atrás

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la solución es  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$  y  $x_3 = 4$ .

#### 4.2.1. Esquema de actualización

Supongase que se tiene un dos sistemas de ecuaciones

$$AX = b \quad y \quad \widehat{A}\widehat{X} = b,$$

donde  $A$  y  $\widehat{A}$  son matrices cuadradas que difieren solamente en una columna, es decir,

$$A = (A^1 \dots A^m) \quad y \quad \widehat{A} = (A^1 \dots A^{k-1} A^{k+1} \dots A^m \widehat{A}^k)$$

además supóngase que se tiene las matrices  $U$  y  $L^{-1}$  asociadas al sistema  $AX = b$ .

Se resolverá el sistema  $\widehat{A}\widehat{X} = b$  aplicando descomposición  $LU$ , aprovechando los cálculos realizados para resolver el sistema  $AX = b$ .

Se expresa a  $\widehat{A}$  como

$$\widehat{A} = \widehat{L}\widehat{U},$$

y se sustituirá en  $\widehat{A}\widehat{X} = b$  obteniendo:

$$\widehat{L}\widehat{U}\widehat{X} = b,$$

haciendo cambio de variable  $\widehat{Y} = \widehat{U}\widehat{X}$  se tiene

$$\widehat{L}\widehat{Y} = b,$$

por lo tanto se tendría que resolver el sistema  $\widehat{L}\widehat{Y} = b$  y después  $\widehat{Y} = \widehat{U}\widehat{X}$ , se requiere de calcular  $\widehat{U}$  y  $\widehat{L}$ .

Obsérvese que para construir  $\widehat{U}$  se tiene:

$$E_m \cdot \dots \cdot E_1 \widehat{A},$$

donde  $E_i$  es de la forma 4.2.1 expresando a  $\widehat{A}$  en terminos de la matriz  $A$  se obtiene:

$$\begin{aligned} E_m \dots E_1 \left( A^1 \dots A^{k-1} A^{k+1} \dots A^m \widehat{A}^k \right) = \\ \left( (E_m \dots E_1 A^1) \dots (E_m \dots E_1 A^{k-1}) \right. \\ \left. (E_m \dots E_1 A^{k+1}) \dots (E_m \dots E_1 A^m) \left( E_{k-1} \dots E_1 \widehat{A}^k \right) \right), \end{aligned}$$

ya que  $U^i = E_m \dots E_1 A^i$  se obtiene:

$$\left( U^1 \dots U^{k-1} U^{k+1} \dots U^m \left( E_{k-1} \dots E_1 \widehat{A}^k \right) \right).$$

Notese que las columnas  $U^1 \dots U^{k-1} \dots U^{k+1} U^m$  ya fueron calculadas cuando se resolvió el sistema  $AX = b$ , por tanto el cálculo necesario es mínimo, al requerir obtener un cero más, como se muestra enseguida.

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & a_{1 \ k-1} & a_{1 \ k} & a_{1 \ k+1} & \dots & a_{1 \ m} \\ 0 & \dots & a_{2 \ k-1} & a_{2 \ k} & a_{2 \ k+1} & \dots & a_{2 \ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1 \ k} & a_{k-1 \ k+1} & \dots & a_{k-1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k \ k} & a_{k \ k+1} & \dots & a_{k \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{k+1 \ k+1} & \dots & a_{k+1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{k+1 \ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m \ m} \end{bmatrix},$$

para obtener  $\widehat{U}$  se necesita multiplicar por nuevas matrices, que se definen a continuación:

$$\widehat{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{i+1 \ i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

para  $i = k, \dots, m-1$ , se multiplicará por la izquierda  $\widehat{E}_k$  a  $E_m \dots E_1 \widehat{A}$ , obsérvese que no realiza ningún cambio en las columnas primeras  $k-1$  columnas de :

$$\widehat{E}_k E_m \dots E_1 \widehat{A} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{k+1 \ k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & a_{1 \ k-1} & a_{1 \ k} & a_{1 \ k+1} & \dots & a_{1 \ m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1 \ k} & a_{k-1 \ k+1} & \dots & a_{k-1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k \ k} & a_{k \ k+1} & \dots & a_{k \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{k+1 \ k+1} & \dots & a_{k+1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{k+2 \ m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m \ m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & a_{1 \ k-1} & a_{1 \ k} & a_{1 \ k+1} & \dots & a_{1 \ m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1 \ k} & a_{k-1 \ k+1} & \dots & a_{k-1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{k+1 \ k+1} & \dots & a_{k+1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k \ k+1} - a_{k+1 \ k+1} & \dots & a_{k \ m} - a_{k+1 \ m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{k+2 \ m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m \ m} \end{bmatrix},$$

después de multiplicar por la izquierda  $\widehat{E}_i$  para  $i = k, \dots, m-1$  se consigue:

$$\widehat{E}_{m-1} \dots \widehat{E}_k E_m \dots E_1 \widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & a_{1 \ k} & \dots & a_{1 \ m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & a_{k-1 \ m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{m \ m} \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$\widehat{U} = \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k E_m \dots E_1 \widehat{A} = \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k L^{-1} \widehat{A}, \quad (4.2.4)$$

donde  $\widehat{E}_m$  es la matriz que hace solamente uno a el elemento  $a_{mm}$  y  $E_m \dots E_1 = L^{-1}$ .

Para obtener  $\widehat{L}^{-1}$  se despeja  $\widehat{A}$  de  $\widehat{U} = \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k L^{-1} \widehat{A}$

$$\left( \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k L^{-1} \right)^{-1} \widehat{U} = \widehat{A},$$

ya que  $\widehat{A} = \widehat{L} \widehat{U}$  se concluye que

$$\widehat{L} = \left( \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k L^{-1} \right)^{-1},$$

lo que implica que

$$\widehat{L}^{-1} = \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k L^{-1}. \quad (4.2.5)$$

Así la solución del sistema  $\widehat{L} \widehat{Y} = b$  es

$$\widehat{Y} = \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k L^{-1} b = \widehat{E}_m \dots \widehat{E}_k Y, \quad (4.2.6)$$

donde  $Y$  es la solución del sistema 4.2.3, luego la solución de  $\widehat{U} \widehat{X} = \widehat{Y}$  se calcula efectuando sustitución hacia atrás.

Con el fin de clarificar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 23.** Supóngase que se tiene un siguiente sistema de ecuaciones muy parecido al del ejemplo 22, son idénticos salvo que ahora en lugar de tener  $x_2 = 0$  se tiene  $x_5 = 0$ .

$$\begin{array}{rcccccccc} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 3 \\ x_1 & & & & & & & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & & & & & = & 0 \\ & & & & & & & & x_5 & & & = & 0 \end{array},$$

dado que  $x_1 = x_3 = x_5 = 0$  el sistema se reduce a  $\widehat{A}\widehat{X} = b$ , donde

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

en los índices de  $\widehat{X}$  se observa el reacomodo de las columnas de la matriz  $\widehat{A}$  para resolver el sistema anterior se obtendrán  $\widehat{U}$  y  $\widehat{L}^{-1}$  aprovechando el resultado 4.2.4 y las operaciones realizadas en el ejemplo 22.

$$L^{-1}\widehat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E_4L^{-1}\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{U} = E_4L^{-1}\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo  $E_5$  es la matriz identidad, dado que ya se consiguió la matriz triangular superior, después se calcula  $\widehat{L}^{-1}$ , así  $\widehat{L}^{-1} = E_4L^{-1}$ , como se indicó en 4.2.5.

Ahora se resuelve el sistema  $\widehat{L}\widehat{Y} = b$ , así  $\widehat{Y} = \widehat{L}^{-1}b$  (4.2.6)

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

luego se resuelve el sistema  $\widehat{U}\widehat{X} = \widehat{Y}$  por sustitución hacia atrás

$$\widehat{U}\widehat{X} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto se obtiene la solución  $x_4 = -2$ ,  $x_6 = 7$  y  $x_2 = 3$ .

### 4.3. Simplex revisado con descomposición LU

El método simplex con descomposición LU reduce la cantidad de operaciones realizadas en la tabla del simplex, por solo trabajar con la parte necesaria de la tabla, a los elementos de la matriz  $B$  no es necesario realizarles operaciones en la tabla.

A continuación se presenta el funcionamiento de este método sin muchos detalles, si el lector requiere mayor información puede consultar en la literatura existente, que es abundante, por ejemplo en [13] y [14].

Originalmente se tiene la tabla del simplex de la siguiente forma

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} N & B & I & b \\ \hline -C_N^t & -C_B^t & 0 & -Z \end{array} \right],$$

donde  $N|B$  son las columnas de las variables no básicas,  $I$  son las columnas de las variables básicas,  $b$  la columna de requerimiento,  $-C_N^t|-C_B^t$  vector de costos de las variables no básicas y  $-z$  el valor de la función objetivo.

Después de realizar algunas iteraciones se tiene, las columnas de  $B$  entran a la base y se obtiene la siguiente tabla:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} B^{-1}N & I & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline C_B^t B^{-1}N - C_N^t & 0 & C_B^t B^{-1} & C_B^t B^{-1}b - Z \end{array} \right],$$

al llegar aquí se tiene una base en términos de las variables originales del problema, por lo tanto se puede olvidar de las variables de holgura y/o artificiales y el tableau nos queda de a siguiente manera:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} B^{-1}N & I & B^{-1}b \\ \hline C_B^t B^{-1}N - C_N^t & 0 & C_B^t B^{-1}b - Z \end{array} \right],$$

Hasta aquí la base del sistema es  $B$ , ahora considere que continúa el procedimiento, esto es: que una columna no básica  $A^j \in N$  entrará a la base y entonces la nueva base será  $\widehat{B}$ .

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \widehat{B}^{-1}N & I & \widehat{B}^{-1}b \\ \hline C_{\widehat{B}}^t \widehat{B}^{-1}N - C_N^t & 0 & C_{\widehat{B}}^t \widehat{B}^{-1}b - Z \end{array} \right],$$

De la tabla anterior se deduce que  $\widehat{B}^{-1}b$  es la actualización de  $b$ , esto es  $\widehat{b} = \widehat{B}^{-1}b$ , en este caso se calcula  $\widehat{b}$  como la solución de  $\widehat{L}\widehat{U}\widehat{b} = b$ , por consiguiente el procedimiento a emplear es el mismo que se realizó en la sección 4.2.1.

Obsérvese que la actualización para el valor de la función objetivo es  $C_{\widehat{B}}^t \widehat{b} - Z$ .

Además, de la tabla también se observa que la actualización de  $N$  es  $\widehat{N} = \widehat{B}^{-1}N$  y se calcula al igual que  $\widehat{b}$ .

Es importante resaltar lo siguiente:

1. No es necesario realizar operaciones para obtener  $\widehat{A}^j$  pues será un vector canónico por estar en la base, al igual que el costo asociado, tomando el valor cero.
2. Una vez que sale una columna de la base, esta se actualizará forma parte de la matriz  $N$  y no es necesario que se la columna de la tabla inicial.

Por último es necesario actualizar el vector de costos no básicos calculando

$$C_{\widehat{B}}^t \widehat{N} - C_N^t.$$

que se requiere para decidir qué columna entra a la base o en su caso si se termina el método.

**Ejemplo 24.** Considérese el ejemplo 12, el cual se resolverá por el método simplex con descomposición LU.

### Iteración 0

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

$$C_N^t = [-3, -5], \quad C_B^t = [0, 0, 0].$$

1. Se calcula  $U$  y  $L^{-1}$

$$U = L^{-1} = E_3 = E_2 = E_1 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Se resuelve con sustitución regresiva el sistema  $XU = C_B^t$  luego se calcula  $Y = XL^{-1}$ .

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 0, 0] \Rightarrow X = [0, 0, 0],$$

$$Y = X L^{-1} = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 0, 0],$$

3. Se calcula la máxima componente de  $YN - C_N^t$ .

$$YN - C_N^t = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [-3, -5] = [3, 5],$$

por lo tanto la máxima componente de  $YN - C_N^t$  es 5.

4. Se elige al vector  $A^q$  que entra a la base y se actualiza calculando  $Y = L^{-1}A^q$  y se resuelve  $UY^q = Y$ .

Como el máximo fue 5, entonces entra a la base  $X_2$ . Luego

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Después

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5. Se actualiza al vector  $b$  calculando  $Y = L^{-1}b$  y se resuelve  $U\hat{b} = Y$ .

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix},$$

después

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

6. Se elige el vector  $A^k$  que saldrá de la base intercambiándose por  $A^q$  y se cambia el vector  $X_B$ .

$$\min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18}{2} \right\} = 6,$$

lo que implica que sale de la base  $x_4$ . Por tanto al actualizar el vector columna  $X_B$  se tiene:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

7. Se construye  $M$ .

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Se calculan las  $m - k + 1$  matrices elementales que actualicen a:

$$\hat{U} \text{ y } \hat{L}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{U} &= E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 B \\ \hat{U} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{L}^{-1} &= E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 \\ \hat{L}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Observación:** La matriz  $\hat{L}^{-1}$  es triangular inferior, salvo que existieran intercambios de columnas como fue en el caso anterior.

### Iteración 1

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, & b &= \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ X_N &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}, & X_B &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ C_N^t &= [-3, 0], & C_B^t &= [0, 0, -5]. \end{aligned}$$

1. Se calcula  $U$  y  $L^{-1}$

$$U = E_5 E_4 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L^{-1} = E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Se resuelve con sustitución regresiva el sistema  $XU = C_B^t$  luego se calcula  $Y = XL^{-1}$ .

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 0, -5] \Rightarrow X = [0, 0, -5],$$

$$Y = X L^{-1} = [0, 0, -5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left[0, \frac{-5}{2}, 0\right].$$

3. Se calcula la máxima componente de  $YN - C_N^t$ .

$$YN - C_N^t = \left[0, \frac{-5}{2}, 0\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - [-3, 0] = \left[3, \frac{-5}{2}\right],$$

por lo tanto la máxima componente de  $YN - C_N^t$  es 3.

4. Se elige al vector  $A^q$  que entra a la base y se actualiza calculando  $Y = L^{-1}A^q$  y se resuelve  $UY^q = Y$ .

Como el máximo fue 3, entonces entra a la base  $X_1$ . Luego

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

después

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Y^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Se actualiza al vector  $b$  calculando  $Y = L^{-1}b$  y se resuelve  $\widehat{U}b = Y$ .

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix},$$

después

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

6. Se elige el vector  $A^k$  que saldrá de la base intercambiándose por  $A^q$  y se cambia el vector  $X_B$ .

$$\min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{3} \right\} = 2,$$

Lo que implica que sale de la base  $x_5$ . Por tanto al actualizar el vector columna  $X_B$  se tiene:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

7. Se construye  $M$ .

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Se calculan las  $m - k + 1$  matrices elementales que actualicen a:

$$\hat{U} \text{ y } \hat{L}^{-1}.$$

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

### Iteración 2

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

$$C_N^t = [0, 0], \quad C_B^t = [0, -5, -3].$$

1. Se calcula  $U$  y  $L^{-1}$

$$U = E_7 E_6 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L^{-1} = E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Se resuelve con sustitución regresiva el sistema  $XU = C_B^t$  luego se calcula  $Y = XL^{-1}$ .

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, -5, -3] \Rightarrow X = \left[0, -5, \frac{9}{2}\right],$$

$$Y = X L^{-1} = \left[0, -5, \frac{9}{2}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left[0, \frac{-3}{2}, -1\right].$$

3. Se calcula la máxima componente de  $YN - C_N^t$ .

$$YN - C_N^t = \left[0, \frac{-3}{2}, -1\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [0, 0] \left[-1, \frac{-3}{2}\right],$$

como el máximo de  $YN - C_N^t$  fue -1, entonces se está en el óptimo. Se pasa a actualizar  $\hat{b}$  como en el paso 5.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix},$$

después

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

se resuelve  $z = C_B^t \hat{b}$

$$z = C_B^t \hat{b} = [0, -5, -3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -36,$$

por lo tanto se tiene que  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$  minimizan a  $z$  con valor -36.

En [13] se presenta un análisis de la cantidad de operaciones que realizan en el *método simplex clásico* y el *método simplex con descomposición LU*, donde se muestra que este último reduce la cantidad de operaciones que el método clásico.

Se puede observar en el ejemplo que en realidad se realizaron más operaciones que en el método clásico, por haber realizado operaciones elementales a través de multiplicación de matrices ( $E$ ). Sin embargo esta situación tiene solución.

En las implementación computacional, en lugar de utilizar la matrices completas ( $E$ ) y su multiplicación, se construye funciones, procedimientos o sub-rutinas que realicen el mismo efecto. Para ello se extrae de cada matriz ( $E$ ) la información necesaria y se ingresa en un vector columna de la siguiente manera.

A la matriz  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{ii}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -\frac{a_{i+1 i}}{a_{ii}} & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & -\frac{a_{ni}}{a_{ii}} & & 0 & 1 \end{bmatrix}$  se le representa con la siguiente acción

$$\begin{bmatrix} i \\ \hline a_{ii} \\ a_{i+1 i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

#### 4.4. Método de las dos fases

El método de dos fases consiste en completar una base, agregando variables artificiales y resolver primeramente un nuevo problema de programación lineal.

Se inicia la *fase I*, la cual consiste en resolver el nuevo problema que tiene una nueva función objetivo

$$\min z = \sum_{i=m-1}^{m+k-1} x_i$$

donde  $x_i$  corresponden a todas las variables artificiales,  $k$  es la cantidad de variables artificiales y  $m$  es la cantidad de variables del problema original más las mismas. Se recuerda se agrega una variable de holgura y una variable artificial a toda restricción de tipo " $\geq$ ", pero al usar el método de las dos fases se agregará a una variable artificial a las restricciones del tipo "=", pero en este trabajo no se considerará este último criterio.

Con un vector  $C_N^t$  que tiene la cantidad de componentes de  $C_N^t$  más las variables artificiales que se hayan agregado al modelo, todas las componentes correspondientes a las variables de holgura tomarán el valor de cero y las componentes correspondientes a cada variable artificial toman el valor de -1, con el fin de que las variables artificiales agregadas salgan de la base. Además se considera el mismo conjunto de restricciones, agregando a la función objetivo del problema original como una nueva restricción.

Después de resolver el nuevo problema con el *método simplex revidado con descomposición LU* descrito en sección anterior, se obtiene una base para resolver el problema original.

Se pasa a la *fase II* siempre y cuando el valor de la función objetivo  $z^*$  sea igual a cero. De caso contrario el sistema no tiene solución factible.

La *fase II* consiste en resolver el problema original con el cambio de considerar las matrices  $N$  y  $B$  las obtenidas en la *fase I*.

Se resolverá el siguiente ejemplo con el método de las dos fase.

### Ejemplo 25.

Considérese el ejemplo 12

$$\text{mín } \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} &\geq 35 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} &\geq 80 \\ 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} &\geq 50 \\ x_i &\geq 0 \\ i &= 0, \dots, 14 \end{aligned}$$

### Fase I

Se escribe el problema a resolver en la *fase I*.

$$\begin{aligned} \text{mín } \sum_{i=18}^{20} x_i \\ \text{s.a. } x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} - x_{15} + x_{16} &= 35 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} - x_{17} + x_{18} &= 80 \\ 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} - x_{19} + x_{20} &= 50 \\ x_i &\geq 0 \\ i &= 0, \dots, 20 \end{aligned}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 35 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_N^t = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{17}, x_{19}]$$

$$X_B^t = [x_{16}, x_{18}, x_{20}]$$

$$C_N^t = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$C_B^t = [1, 1, 1]$$

Donde las últimas tres columnas corresponderán a la nueva base de la *fase II* ( $B^*$ ), después de resolver el problema de la *fase I*, se tiene que  $z = 0$  y

$$B^* = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 8.75 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix},$$

Por lo tanto se olvidará de las variables artificiales y se obtendrá la nueva  $N$  para resolver con la *fase II*.

$$N = B^* N =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.75 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto se puede pasar a la *fase II*.

### **Fase II**

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.75 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 8.75 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$X_N^t = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}],$$

$$X_B^t = [x_{15}, x_{16}, x_{17}],$$

$$C_N^t = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],$$

$$C_B^t = [0, 0, 0],$$

después de resolver la segunda fase se tiene la siguiente solución y el valor de la función objetivo.

$$X^T = (0, 0, 16.66, 0, 11.66, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.75),$$

$$z = 37.083$$

## 4.5. Método de ramificación y acotamiento

Un problema de programación lineal entera (PLE) son todos aquellos problemas en donde se restrinja la solución o una parte de ella a ser entera, lo cual es necesario para realizar el *método exacto*.

Existen tres tipos de problemas de programación enteros

### 1. **Enteros:**

Son aquellos en que todas las variables únicamente pueden tomar valores enteros.

### 2. **Mixtos:**

Son aquellos en los que se permiten que algunas variables sean enteras y otras no sean enteras.

### 3. **Binarios:**

Son aquellos en que todas las variables toman el valor de cero o uno.

Se puede pensar que un problema de programación lineal entera es más fáciles de resolver uno continuo, por tener un número de soluciones finito, pero este número puede ser suficientemente grande (en un problema binario con  $n$  variables el número de soluciones factibles es  $2^n$ ).

En el caso particular de este trabajo se necesita que todas las variables sean enteras no negativas, para resolver el problema de que todas la variables sean enteras se utilizará el *método de ramificación y acotamiento*.

El método de ramificación y acotación, o en inglés Branch and Bound [16], el cual recibe su nombre precisamente por las dos técnicas en las que se basa su desarrollo, comienza por resolver el problema de programación original donde las variables toman valores reales, al cual se le conocerá como problema de programación relajado (PPR), si la solución es entera se termina el método, de lo contrario se comienza

con la ramificación del problema.

La ramificación consiste en dividir cada problema en dos nuevos subproblemas, semejantes al problema original, pero se agrega una nueva restricción a cada subproblema.

Las restricciones adicionales dependen de la solución al PPR ( $X^*$ ), buscando la primera variable  $x_i^*$  no entera y se agrega al primer subproblema la restricción  $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$  y al segundo subproblema la restricción  $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$ .

A cada subproblemas de la ramificación se le conoce como hijo izquierdo e hijo derecho, los cuales a su vez pueden ramificarse.

El proceso anterior se repite con cada uno de los dos subproblemas obtenidos, los cuales darán lugar a otros dos subproblemas cada uno de ellos y así sucesivamente.

Si se utiliza únicamente la ramificación, la cantidad de subproblemas a resolver crece exponencialmente, por lo cual se debe tener alguna acotación.

La acotación se da de dos formas:

1. La solución es no factible.
2. La solución es entera.

La primera solución entera es una cota para todo el problema (que va tomando forma de árbol), es decir, si existen niveles superiores donde el óptimo de la solución sea peor que la solución entera, lo que cortará la rama y ya no seguirá creciendo, en caso contrario se tendrá que la solución entera actual es mejor que la primera entera, entonces se considerará esta como la nueva cota para el método de ramificación y acotamiento. De este modo se reduce el número de subproblemas.

Para identificar a los subproblemas al momento de ramificar el problema se darán las siguientes etiquetas. Al problema original se le conocerá como raíz. Cada vez que se ramifica el árbol se tiene un nuevo nivel que se inicia como 0, donde el nivel cero es una raíz, para cada nivel pueden existir a lo más  $2^n$  hijos, suponiendo que  $n$  es el nivel en el que se encontraba. Se diferencia a los hijos izquierdos y derechos como  $i$  y  $d$  respectivamente. Según el nivel es la cantidad de letras que aparecen en el subproblema agregando un  $h$  por al principio, diciendo que es un hijo. Según aparezca  $i$  o  $d$  indica que es un hijo izquierdo del nivel anterior. Se lee de izquierda a derecha, donde cada  $i$  o  $d$  indica un nivel.

Como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 26.** Considérese el subproblema *hidi*, esto nos indica que el subproblema está en el tercer nivel, en el primer nivel se mueve hacia el subproblema que está en

el lado izquierda, en el segundo nivel se mueve hacia el subproblema que está en el lado derecha y en el tercer nivel se mueve hacia el subproblema que se encuentra hacia la izquierda.

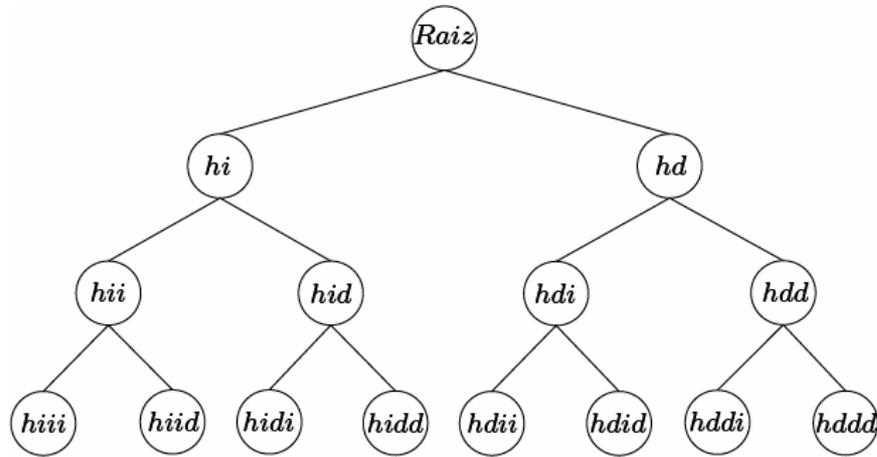


Figura 4.1: Ramificación de un PPL hasta el nivel 3.

El siguiente ejemplo considera un PPL, el cual se resolverá con el método de ramificación y acotamiento.

**Ejemplo 27.** Considérese el problema del ejemplo 12 al cual se le desea obtener la solución entera.

$$\text{mín} \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80 \\ & 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50 \\ & x_i \geq 0 \\ & i = 0, \dots, 14, \end{aligned}$$

Se resolverá el problema hasta el segundo nivel para ejemplificar el proceso y se dará la solución final entera.

### 1. Nivel 0

a) Raíz

$$\text{min} \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80 \\
& 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50 \\
& x_i \geq 0 \\
& i = 0, \dots, 14,
\end{aligned}$$

$$(X^*)^t = (0, 0, 16.66, 0, 11.66, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.75),$$

$$z = 37.083,$$

## 2. Nivel 1

a) *hi*

$$\min \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80 \\
& 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50 \\
& x_2 \leq 16 \\
& x_i \geq 0 \\
& i = 0, \dots, 14
\end{aligned}$$

$$(X^*)^t = (0, 0.5, 16, 0, 11.875, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.75),$$

$$z = 37.125,$$

b) *hd*

$$\min \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80 \\
& 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50 \\
& x_2 \geq 17 \\
& x_i \geq 0 \\
& i = 0, \dots, 14,
\end{aligned}$$

$$(X^*)^t = (0, 0, 17, 0, 11.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.75),$$

$$z = 37.25,$$

## 3. Nivel 2

a) *hii*

$$\min \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$s.a. \ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80$$

$$5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50$$

$$x_2 \leq 16$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_i \geq 0$$

$$i = 0, \dots, 14,$$

$$(X^*)^t = (0, 0, 16, 0, 12, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.625),$$

$$z = 37.125,$$

b) *hiid*

$$\min \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$s.a. \ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80$$

$$5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50$$

$$x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_i \geq 0$$

$$i = 0, \dots, 14$$

$$(X^*)^t = (0, 1, 15.333, 0, 12.083, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.75)$$

$$z = 37.166,$$

c) *hdi*

$$\min \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$s.a. \ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} \geq 35$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} \geq 80$$

$$5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 50$$

$$x_2 \geq 17$$

$$x_4 \leq 11$$

$$x_i \geq 0,$$

$$i = 0, \dots, 14,$$

$$(X^*)^t = (0, 0, 17, 0, 11, 0, 0, 0, 0, 0.66, 0, 0, 0, 0, 8.583),$$

$$z = 37.25,$$

d) *hdd*

$$\min \sum_{i=0}^{14} x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} &\geq 35 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} &\geq 80 \\ 5x_0 + 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} + x_{12} &\geq 50 \\ x_2 &\geq 17 \\ x_4 &\geq 12 \\ x_i &\geq 0 \\ i &= 0, \dots, 14, \end{aligned}$$

$$(X^*)^t = (0, 0, 17, 0, 12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8.75),$$

$$z = 37.75,$$

la solución entera es  $(X^*)^t = (0, 0, 16, 2, 0, 0, 0, 0, 10, 0, 0, 2, 0, 8, 0)$  y valor de la función objetivo  $z = 38$ .

Se recuerda que el valor de la función objetivo  $z$  corresponde a la cantidad de segmentos de longitud estándar necesarios para cumplir el requerimiento.

La solución  $X^*$  representa la cantidad de veces que se implementara cada uno de los patrones esenciales, por lo cual se obtiene:

$$16p^2 + 2p^3 + 10p^8 + 2p^{11} + 8p^{13} =$$

$$16 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

los patrones anteriores se esquematiza de la siguiente forma:

*Patron*

2	$L_1$	$L_1$	$L_2$	$L_2$	$L_2$
3	$L_1$	$L_1$	$L_1$	$L_2$	
8	$L_0$	$L_1$	$L_1$	$L_1$	
11	$L_0$	$L_0$	$L_1$	$L_1$	
13	$L_0$	$L_0$	$L_0$	$L_1$	

Se medirá la eficiencia real ( $eficiencia_R$ ) propuesta en la sección 3.4, para los ejemplos 8 y 10, por lo cual se necesita calcular el desperdicio del método exacto:

$$\% \text{ de desperdicio del método exacto} = \frac{17.5604}{38 \times 5.98} \times 100 \% = \frac{17.5604}{227.24} \times 100 \% = 7.72 \%$$

**Ejemplo 28.** Se calcula la  $eficiencia_R$  del *método canónico*:

$$\begin{aligned} eficiencia_R &= 100\% - (\% \text{ de desperdicio del método} \\ &\quad - \% \text{ de desperdicio del método exácto}) \\ &= 100\% - (12.67\% - 7.72\%) \\ &= 100\% - 4.95\% = 95.05\% \end{aligned}$$

## 4.6. Implementación del método exacto

Implementar el método exacto para este trabajo consiste en después de ver desarrollado el diseño para una fracción de un domo geodésico (capítulo 1) y obtener el conjunto de patrones esenciales (capítulo 2), seguir los siguientes siguientes pasos.

1. Plantear el problema de programación lineal entero apartir del *conjunto de patrones esenciales* (capítulo 3).
2. Resolver el problema del paso anterior con soluciones enteras, implementando el método de programación entera *ramificación y acotamiento* (capítulo 4).

**Ejemplo 29.** Considérese el modelo del ejemplo 13.

$$\begin{aligned} &\text{mín } \sum_{i=0}^{55} x_i \\ &x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \\ &\quad + x_{47} + x_{48} + x_{49} + 2x_{50} + 2x_{51} + 2x_{52} + 2x_{53} + 2x_{54} + 3x_{55} \geq 20 \\ &x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + 2x_{30} \\ &\quad + 2x_{31} + 2x_{32} + x_{33} + 3x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + 2x_{49} + x_{54} \geq 12 \\ &x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + 2x_{18} + 3x_{19} + x_{26} \\ &\quad + x_{27} + x_{28} + 2x_{29} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + 2x_{44} + x_{48} + x_{53} \geq 24 \\ &x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9 + x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + x_{18} + x_{23} \\ &\quad + x_{24} + x_{25} + x_{28} + x_{32} + x_{38} + x_{39} + 2x_{40} + x_{43} + x_{47} + x_{52} \geq 36 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 + x_8 + x_{11} + 2x_{12} + x_{12} + x_{14} + x_{17} + x_{21} \\ &\quad + 2x_{22} + x_{24} + x_{27} + x_{31} + x_{36} + 2x_{37} + x_{39} + x_{42} + x_{46} + x_{51} \geq 48 \\ &4x_0 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 6x_6 + 2x_7 + 3x_{10} + 2x_{11} + x_{13} + x_{16} \\ &\quad + 3x_{20} + 2x_{21} + x_{23} + x_{26} + x_{30} + 3x_{35} + 2x_{36} + x_{38} + x_{41} + x_{45} + x_{50} \geq 80 \\ &x_i \geq 0 \\ &x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ &i = 0, \dots, 55. \end{aligned}$$

Obteniendo la siguiente solución entera y valor de la función objetivo

$$(X^*)^t = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 13, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 13, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 80, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ z = 58.$$

La solución  $X^*$  representa los siguientes patrones

$$13p^6 + 11p^7 + 13p^{21} + p^{26} + 9p^{37} + 80p^{49} + p^{50} = \\ 13 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 80 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

los patrones anteriores se esquematiza de la siguiente forma:

*Patrón*

6	$L_3$	$L_4$	$L_4$	$L_5$
7	$L_3$	$L_3$	$L_5$	$L_5$
21	$L_1$	$L_4$	$L_5$	$L_5$
26	$L_1$	$L_2$	$L_5$	
37	$L_0$	$L_2$	$L_2$	
49	$L_0$	$L_1$	$L_1$	
50	$L_0$	$L_0$	$L_5$	

Se medirá la eficiencia real ( $eficiencia_R$ ), propuesta en la sección 3.4, para los ejemplos 9 y 11, por lo cual se necesita calcular el desperdicio del método exacto:

$$\% \text{ de desperdicio del método exacto} = \frac{4.1334}{58 \times 5.98} \times 100\% = \frac{4.1334}{346.84} \times 100\% = 1.19\%.$$

**Ejemplo 30.** Se calcula la  $eficiencia_R$  del método canónico:

$$\begin{aligned} eficiencia_R &= 100\% - (\% \text{ de desperdicio del método} \\ &\quad - \% \text{ de desperdicio del método exacto}) \\ &= 100\% - (16.28\% - 1.19\%) \\ &= 100\% - 15.09\% = 84.91\%. \end{aligned}$$

**Ejemplo 31.** Se calcula la  $eficiencia_R$  del método grandes primero:

$$\begin{aligned} eficiencia_R &= 100\% - (\% \text{ de desperdicio del método} \\ &\quad - \% \text{ de desperdicio del método exacto}) \\ &= 100\% - (10.97\% - 1.19\%) \\ &= 100\% - 9.78\% = 90.22\%. \end{aligned}$$

El método exacto es un buen método, pero tiene sus alcances, los cuales se tienen al tener un conjunto absurdamente grandes de variables a comparación de sus restricciones, por lo cual se presenta una alternativa a este método, la cual solo se comentará, en caso de que el lector desee tener más información puede consultar las distintas bases de datos con las palabras *Gilmore and gomory* o *método de generación de columnas*.

#### 4.7. Método de generación de columnas.

Esté método es muy útil con problemas con una gran cantidad de patrones en comparación con la cantidad de restricciones, esta técnica heurística fue propuesta por Gilmore y Gomory en 1961 para resolver el problema de corte unidimensional.

La idea principal es resolver el problema de programación entera con un conjunto restringido de patrones de corte, ya que el conjunto completo de patrones esenciales es demasiado grande, lo que podría implicar que la solución requiera demasiado tiempo o el equipo de computo no sea suficiente

El método consiste en lo siguiente:

Supóngase que se tiene el siguiente conjunto de requerimientos.

<i>Longitudes</i>	<i>Cantidades</i>
$L_0$	$R_0$
$L_1$	$R_1$
$\vdots$	$\vdots$
$L_{n-1}$	$R_{n-1}$

Con  $L_i > L_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n - 2$ .

1. Elegir un conjunto mínimo de patrones de corte, que aseguren que el problema tiene solución.
2. Agregar un nuevo patrón de corte al conjunto.  
Repetir el paso 2, hasta que sea posible.
3. Resolver el PPE con el conjunto de patrones ampliado.  
Detalle del paso 1.

Se calcula el conjunto inicial de patrones de corte de la siguiente forma.

$$B = \begin{pmatrix} \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_0} \right\rfloor & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \left\lfloor \frac{s_0}{L_1} \right\rfloor & \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_1} \right\rfloor & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left\lfloor \frac{s_{n-3}}{L_{n-2}} \right\rfloor & \left\lfloor \frac{s_{n-3}}{L_{n-2}} \right\rfloor & \dots & \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_{n-2}} \right\rfloor & 0 \\ \left\lfloor \frac{s_{n-2}}{L_{n-1}} \right\rfloor & \left\lfloor \frac{s_{n-2}}{L_{n-1}} \right\rfloor & \dots & \left\lfloor \frac{s_{n-2}}{L_{n-1}} \right\rfloor & \left\lfloor \frac{L_{tramo}}{L_{n-1}} \right\rfloor \end{pmatrix}$$

donde  $s_i$  es el residuo que se va obteniendo de forma similar a la que se empleó que en el *método grandes primero*.

Detalle del paso 2.

Se resuelve el PPL con el conjunto actual de patrones de corte, del cual se obtienen los costos actualizados para plantear un problema de la mochila, cuya solución es un patrón de corte que promete mejorar al conjunto de patrones.

El problema de la mochila a resolver es:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot a_i \\ \text{s. a. } \sum_{i=0}^{n-1} R_i \cdot a_i &\leq L_{tramo} \\ a_i &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Donde  $y_i$  son los costos duales actualizados, estos se calculan  $Y = C_B^t B^{-1}$  y  $a_i$  son las componentes del patrón de corte a agregar.

Observación: Cuando el paso 2 se repite, es necesario que el nuevo patrón de corte entre a la base, para lo cual se actualiza la solución del problema anterior.

Si sucede que el valor de la función objetivo del problema de la mochila es menor o igual que 1, significa que ya no es posible agregar un patrón de corte y se realiza el siguiente paso, es decir se resuelve el PPE con el conjunto de patrones extendido (paso 3).

Para más detalles ver [17].



## Capítulo 5

### Conclusiones

Al revisar la literatura se encontró que la terminología empleada en de la descripción estructura de los domos geodésicos poco clara, por tanto se realizaron dos propuestas en este sentido:

1. Otra manera de etiquetar a los segmentos de la estructura, facilitando de localizar de los segmentos y sin requerir un plano en el proceso de armado, a pesar de lo complicado que parezca la estructura.
2. Otra manera de referirse a la fracción del domo, basada en niveles, que resulta más fácil de comprender.

Se ejemplificó como hacer crecer el problema de corte a un problema de gran escala. Lo anterior se logró modificando levemente el problema, esto es, al reducir el radio de la estructura, el número de patrones creció de una manera muy parecida a la exponencial.

Se evidenció que el método exacto fue mejor que los métodos heurísticos que se desarrollaron (canónico y grandes primero) mejorando la solución obtenida por estos métodos al minimizar la cantidad de tramos de longitud estándar empleados para satisfacer los requerimientos de los ejemplos presentados. Sin embargo, no siempre es posible utilizar el método exacto o no resulta práctico.

Se mostró que el método exacto es suficiente para resolver los problemas planteados a lo largo del trabajo, siendo el mejor e insuperable<sup>1</sup> de los métodos. Dando lugar a ver propuesto una medida de eficiencia del método que reconoció lo anterior.

Reconociendo que el problema de corte puede ser retomado como tema de desarrollo y que fácilmente puede ser un problema de gran escala, se presento una introducción a un método heurístico conocido como *método de generación de columnas* propuesto por Gilmore y Gomory.

---

<sup>1</sup>Siempre y cuando la capacidad de computo no sea rebasada.



## Apéndice A

### Biografías

Se consideró importante saber a cerca de los pioneros de estas ideas, por lo que se incluyó las siguientes biografías.



Figura A.1: Walther Bauersfeld

Walther Bauersfeld [18] (23 de enero de 1879 en Berlín - 28 de octubre de 1959 en Heidenheim an der Brenz) fue un ingeniero alemán, empleado de la Corporación Zeiss, quien en una sugerencia del astrónomo alemán Max Wolf, comenzó a trabajar en la primera proyección del planetario en 1912. El cual fue detenido por las necesidades militares durante la Primera Guerra Mundial, siendo reanudo después de la guerra.

Bauersfeld completado el primer planetario, conocido como el modelo Zeiss I en 1923, el cual fue colocado inicialmente en la azotea de un edificio de Zeiss en la ciudad de Jena. Este modelo proyecta 4900 estrellas y mostro el cielo a la latitud de Jena.

Posteriormente, Bauersfeld desarrolló el segundo Modelo (Modelo 2), el cual proyectaba 8956 estrellas a capacidad completa de latitud. Más de una docena fueron instaladas antes de la Segunda Guerra Mundial, los cuales fueron nuevamente suspendidos al iniciar la Segunda Guerra. Estos planetarios fueron construidos en Berlín y Düsseldorf, en Alemania, así como Roma, París, Chicago, Los Ángeles y Nueva York.

El planetario Zeiss I en Jena se considera la primera cúpula geodésica derivado del icosaedro, más de 20 años antes de Buckminster Fuller la reinventará y popularizará este diseño.

Bauersfeld fue galardonado con el Franklin Institute's Elliott Cresson Medal en 1933.

Después de la guerra, la firma Zeiss, se dividió en dos. Bauersfeld se quedó con el firme núcleo en Jena, Alemania del Este, donde a partir de 1953 desarrolló el ZKP-1 (Zeiss Small Planetarium #1). Esto fue pensado para domos-planetarios más pequeños, lo que logró cambios en sus capacidades de latitud, el operador tenía que girar una manivela para lograr esto. El ZKP-2 añadió un motor para el cambio de latitud. Bauersfeld se retiró poco después de que el ZKP-2 fue introducido.

Un boletín de noticias mensual fue llamado en su honor "Bauersfeld's Folly", el cual fue distribuido a los planetarios de Norte América entre los años 1973 a 1983.

En su honor fue nombrado el "Asteroide 1553 Bauersfelda".

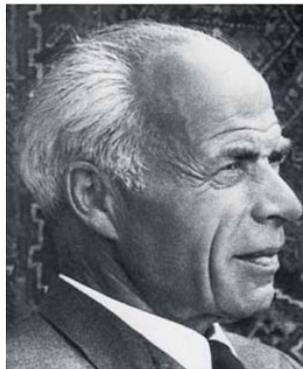


Figura A.2: Franz Dischinger

Franz Dischinger [19] (8 octubre 1887 a 9 de enero 1953) fue un pionero alemán, civiles e ingeniero estructural, responsable del desarrollo del moderno puente atirantado (the modern cable-stayed bridge). También fue un pionero en el uso de hormigón pretensado, patentar la técnica del pretensado exterior (donde las barras de pretensado o tendones no están encerradas en el concreto) en 1934. Después de completar la escuela secundaria en Karlsruhe, Alemania, Dischinger fue a la Universidad Técnica de Karlsruhe, donde estudió y se recibió en Ingeniería de Edificación. Después de obtener su grado en 1913, comenzó a trabajar para Dyckerhoff & Widmann A.G., una firma de ingeniería en Alemania.

En 1928 Dischinger regresó a la escuela para recibir su doctorado en la Escuela Técnica de Dresden, Alemania. En 1922, diseñó el Zeiss Planetarium en Jena con Walther Bauersfeld, utilizando una delgada cáscara cubierta de concreto en forma de un hemisferio. El cual posteriormente fue patentado y Dischinger publicó un artículo

sobre las matemáticas aplicadas en 1928. Decidió publicar su propio cable puente atirantado. Este diseño se ha utilizado desde entonces, más de 100 de estos puentes atirantados se han construido.

Diseño de 1938 de un carril de puente colgante, el cual no fue construido, incorporó elementos inclinados, como los de Fernando Arnodin y John Roebling. Luego diseño Strömsund Bridge en Suecia, de 332 m de largo, con una envergadura 182 m de longitud terminado en 1955 y generalmente considerado el primero de la tradición moderna de puentes atirantados.

Empleado una cubierta de acero y cables, con separaciones grandes entre las estancias típicas de los primeros diseños. Este puente aparece en el escudo de armas de Strömsund.

Otras obras importantes son:

1. *Domo Großmarkthalle*, Basel, Switzerland, Suiza, 1929.
2. *Domo polygonal Market Hall*, Leipzig , Alemania, 1930.
3. *Tres puentes de arco de concreto Koblenz bridge*, Alemania, 1935.
4. *Aue bridge*, Alemania, 1936.
5. *Cologne Rodenkirchen Bridge*, Cologne, Alemania, 1954.

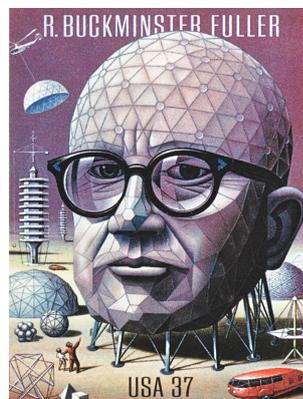


Figura A.3: Estampilla en honor a Richard Buckminster Fuller

Richard Buckminster Fuller [20], nació en Massachussets en el año 1895, en una familia acomodada. Viviendo en un lugar de innovación tecnológica, quizá eso hizo a Richard una persona tan curiosa e innovadora.

Ingresando a la Universidad de Harvard, de donde fue expulsado, por lo que comenzó a trabajar de mecánico. Después volvió a Harvard de donde nuevamente fue expulsado.

Fuller se enlistó en la armada, donde adquirió conocimientos marítimos y matemáticos, desarrollando destrezas en logística.

Luego, contrajo matrimonio con una estudiante de artes, lo que contribuyó a sus conocimientos de diseño, comenzando a pensar en el diseño como una ciencia.

Tres años más tarde, murió su primera hija después de enfermarse de poliomielitis. Richard asumió que la enfermedad de su fue contraída por la mala calidad de su vivienda, comenzó a trabajar en la construcción presentando ideas innovadoras que perfeccionaban el estilo de las casas de la época. Aunque ninguna de sus creaciones tuvo gran alcance.

Después de trabajar varios años en este ámbito, Fuller comenzó a trabajar en el terreno del transporte, creando en 1933 el diseño de un auto poco común, como solían ser todos sus inventos. El cual causo cierto interés por algunas *empresas*, pero finalmente esto no se logró.

En 1938 publicó el libro *Nine Chains to the Moon* (Nueve cadenas a la luna), en el cual manifiesta su punto de vista acerca del uso de la tecnología para el bien de la humanidad, introduce la idea del reciclaje de los residuos, diciendo que las materias primas deben ser alquiladas por los humanos y que los recursos no pertenecen a nadie en particular, por lo que deben ser utilizados, pero no consumidos.

Entre 1938 y 1940, Fuller se fue consultor de la revista *Fortune* lo que le permitió profundizar sobre recursos naturales y técnicas para utilizarlos.

Trabajó para el gobierno de los Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial, e hizo que la industria aeronáutica militar, pasara a ser una industria con propósitos civiles, construyendo casas en serie, que él mismo diseñó. Una vez que se terminó la demanda de este estilo de casas, Fuller se unió a universidades, ahora enfocando sus estudios en la geometría estructural, encontrando un tipo de estructura que poseía la máxima eficiencia en el uso de materiales (la cúpula geodésica). Ésta llamó la atención de arquitectos e ingenieros y se puede decir que fue la invención más importante llevada adelante por Fuller. Fue llamado de muchas instituciones realizando gran cantidad de ellas, en diversos lugares, de variadas formas y materiales.

Fuller murió en Los Ángeles en el año 1983, luego de pasar toda su vida proponiendo ideas para pilotear correctamente la nave Tierra y menospreciando a los políticos afirmando que la nave debía ser dirigida por todos, y no sólo por unos cuantos. Como solía decir:

Podríamos arrancar todo lo producido por la tecnología y arrojarlo al mar; si así lo hiciéramos, dos tercios de la humanidad moriría en seis meses; pero si lanzáramos a todos los políticos al espacio, todos seguiríamos comiendo.



Figura A.4: George Bernard Dantzig

George Bernard Dantzig [21] nació el 8 de noviembre de 1914 en Portland, Oregon, EEUU. Su padre fue profesor de Matemáticas, el cual se retiró dejando su puesto de Jefe del Departamento de Matemáticas en la Universidad de Maryland poco después de la Segunda Guerra Mundial. Su madre una lingüista especializada en idiomas eslavos.

Dantzig estudió su carrera en la Universidad de Maryland, donde se graduó en 1936. Le disgustaba no haber visto aplicaciones en alguno de los cursos de Matemáticas que tomó en esta universidad. Al siguiente año realizó estudios de postgrado en la escuela de Matemáticas de la Universidad de Michigan. Sin embargo, a excepción de la Estadística, considero sus cursos demasiado abstractos.

En 1937 dejó Michigan para trabajar como empleado en Estadística en el *Bureau of Labor Statistics*. Dos años después se inscribió en Berkeley para estudiar un Doctorado en Estadística.

La historia de su tesis doctoral es una anécdota impresionante. Durante su primer año en Berkeley, se inscribió en un curso de Estadística que impartía el famoso profesor **Jerzy Neymann**. Este profesor tenía la costumbre de escribir en el pizarrón un par de ejercicios al comenzar sus clases para ser entregados resueltos en la siguiente clase. En una ocasión Dantzig llegó tarde a una de las clases de Neymann y se encontró con dos problemas escritos en la pizarrón. Supuso que eran problemas de tarea, los copió y los resolvió, aun pareciéndole “un poco más difíciles que los problemas ordinarios”. Algunos días después se los entregó a Neymann, disculpándose por haber tardado tanto. Aproximadamente seis semanas después, un domingo a las 8:00 de la mañana, Neymann llegó a la residencia de Dantzig, explicándole que había escrito una introducción a uno de los artículos y que quería que la leyera a fin de poder enviar el artículo para su publicación. Los dos “*problemas de tarea*” que Dantzig había resuelto eran dos famosos problemas de la estadística no resueltos. Las soluciones de estos problemas se convirtió en su tesis doctoral, a sugerencia de Neymann.

No obstante, Dantzig no terminó su doctorado hasta 1946. Poco después del comienzo de la Segunda Guerra Mundial se unió a la Fuerza Aérea de Estados Unidos y

trabajó con el *Combat Analysis Branch of Statistical Control*. Después de recibir su Doctorado, regresó a la Fuerza Aérea como el asesor de Matemáticas del *U. S. Air Force Controller*. La Fuerza Aérea necesitaba una forma más rápida de calcular el tiempo de duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico.

Dantzig centró básicamente sus desarrollos científicos, cronológicamente, en la RAND Corporation y las universidades de *Berkeley y Stanford en California*, con asignaciones temporales en otros centros como el *IIASA en Viena*. El trabajo de Dantzig generalizó lo hecho por el economista, Wassily Leontief.

Dantzig pronto se dio cuenta de que los problemas de planeación con los que se encontraba eran demasiado complejos para las computadoras más veloces de 1947 (y aun para las de la actualidad).

Habiéndose ya establecido el problema general de Programación Lineal, fue necesario hallar soluciones en un tiempo razonable. Utilizando su intuición geométrica concluyó

Comencé observando que la región factible es un cuerpo convexo, es decir, un conjunto poliédrico. Por tanto, el proceso se podría mejorar si se hacían movimientos a lo largo de los bordes desde un punto extremo al siguiente. Sin embargo, este procedimiento parecía ser demasiado ineficiente. En tres dimensiones, la región se podía visualizar como un diamante con caras, aristas y vértices. En los casos de muchos bordes, el proceso llevaría a todo un recorrido a lo largo de ellos antes de que se pudiese alcanzar el punto de esquina óptimo del diamante.

Esta intuición llevó a la primera formulación del método simplex en el verano de 1947. El primer problema práctico que se resolvió con este método fue uno de nutrición.

El 3 de octubre de 1947 Dantzig visitó el Institute for Advanced Study donde conoció a **John Von Neumann**, quien se consideró el mejor Matemático del mundo. Von Neumann le habló a Dantzig sobre el trabajo conjunto que estaba realizando con **Oscar Morgenstern** acerca de la teoría de juegos. Fue entonces cuando Dantzig supo por primera vez del importante teorema de la dualidad.

Otro de sus grandes logros es la teoría de la dualidad, ideado conjuntamente con **Fulkerson** y **Johnson** en 1954 para resolver el paradigmático problema del Agente Viajero (resolviendo entonces problemas con 49 ciudades) es el precursor de los hoy utilísimos métodos de Branch-and Cut (Bifurcación y corte) tan utilizados en programación entera para resolver problemas de grandes dimensiones.

Muchos de los problemas a resolver mediante Programación Matemática se enmarcan en planificación dinámica. Muchos de los parámetros se refieren al futuro y no se pueden determinar con exactitud. Surge entonces la programación estocástica o programación bajo incertidumbre. Esta rama, con un gran desarrollo hoy día, y un tremendo potencial para el futuro, debe su desarrollo a dos trabajos seminales que de forma independiente son debidos a los profesores **E. Martin L Beale** y **George B. Dantzig** en 1955.

Así mismo es de gran utilización su método denominado *Descomposición de Dantzig-Wolfe* (desarrollado conjuntamente con **Philip Wolfe** en 1959-1960) , para resolver problemas de programación lineal estructurados.

El libro "*Linear Programming and Extensions*" (1963), ha sido su gran libro de referencia durante los 49 años que median desde su publicación. Ha cerrado el ciclo de su extensa bibliografía con el libro en dos tomos "*Linear Programming*" (1997 y 2003), escrito conjuntamente con **N. Thapa**.

En 1976 el presidente **Gerald Ford** otorgó a Dantzig la *Medalla Nacional de Ciencias*, que es la presea más alta de los Estados Unidos en Ciencia. En la ceremonia en la Casa Blanca se citó a George Bernard Dantzig

*"Por haber inventado la Programación Lineal, por haber descubierto métodos que condujeron a aplicaciones científicas y técnicas en gran escala a problemas importantes en logística, elaboración de programas, optimización de redes y al uso de las computadoras para hacer un empleo eficiente de la teoría matemática"*.

Dantzig no pudo conseguir el premio Nobel, pero recibió un cúmulo de distinciones, el premio *Von Neumann Theory* en 1975, *Premio en Matemáticas Aplicadas y Análisis Numérico de la National Academy of Sciences* en 1977, *Harvey Prize en Ciencia y Tecnología de Technion, Israel*, en 1985. Fue miembro de la *Academia de Ciencias* y de la *Academia Nacional de Ingeniería de EEUU*. Las Sociedades de *Programación Matemática* y *SIAM* instituyeron un premio que lleva su nombre.

Dantzig se sorprendió de que el método simplex funcionara con tanta eficiencia. Citando sus palabras:

La mayor parte de las ocasiones el método simplex resolvía problemas de  $m$  ecuaciones en  $2m$  o en  $3m$  pasos, algo realmente impresionante. En realidad nunca pensé que fuese a resultar tan eficiente. En ese entonces yo aún no había tenido experiencias con problemas en dimensiones mayores y no confiaba en mi intuición geométrica. Por ejemplo, mi intuición me decía que el procedimiento requeriría demasiados pasos de un vértice al siguiente. En la práctica son muy pocos pasos. Dicho con pocas palabras, la intuición en espacios de dimensiones mayores no es muy buena guía.

Sólo ahora, 52 años después de haber propuesto el método simplex por primera vez, la gente está comenzando a tener una idea de por qué el método funciona tan bien como lo hace.

No es claro por qué Dantzig llamó al método simplex, “método del conjunto convexo poliédrico”.

El 13 de Mayo de 2004, George Bernard Dantzig, murió a la edad de 90 años en su casa de Stanford debido a complicaciones con la diabetes y problemas cardiovasculares.

## Apéndice B

### Código de patrón de corte

```
/*
Patron de Corte
Hecho por Alejandro Dueñas Osuna
El archivo de entrada debe ser .txt, encontrarse en la carpeta donde este
el ejecutable del programa y deberá tener la siguiente estructura:
    L_tramo
    L_1
    L_2
    .
    .
    .
    L_n
*/

#include<iostream>
#include<cstdlib>
#include<conio>
#include <fstream>
#include <iomanip>

using namespace std;

struct patron{
    int caven,van;
    float tamano;
    patron *siguiente,*anterior;
};

struct lista_patron{
    int van;
    lista_patron *siguiente,*anterior;
};

class patron_corte{
    int n;
    float a,standar,residuo,r,l;
```

```
    patron *principio,*final;
    lista_patron *inicio,*ultimo;
public:
    patron_corte();
    ~patron_corte();
    int agregar(float);
    void leer_patrones();
    void pintar();
    int lista(int);
    int piso(patron*);
    void patrones();
};

patron_corte::patron_corte(){
    principio=NULL;
    final=NULL;
    inicio=NULL;
    ultimo=NULL;
    standar=0;
    residuo=0;
    r=0;
    l=1;
}

patron_corte::~~patron_corte(){
    patron *p;
    p=principio;
    while(p){
        principio=p->siguiente;
        delete p;
        p=principio;
    }
    principio=NULL;
    final=NULL;
    lista_patron *q;
    q=inicio;
    while(q){
        inicio=q->siguiente;
        delete q;
        q=inicio;
    }
    inicio=NULL;
    ultimo=NULL;
}

int patron_corte::agregar(float a){
    patron *p,*q;

    if(principio==NULL){
```

```
p=new patron;
p->tamano=a;
p->caven = 0;
p->van = 0;
p->siguiente=NULL;
p->anterior=NULL;
principio=p;
final=p;
}
else{
p=principio;
while(p){
    if(p->tamano==a) return 1;
    p=p->siguiente;
}
p=new patron;
p->tamano=a;
p->caven = 0;
p->van = 0;
if(principio->tamano<p->tamano){
    p->siguiente=principio;
    principio->anterior=p;
    principio=p;
    principio->anterior=NULL;
}
else{
    if(p->tamano<final->tamano){
        final->siguiente=p;
        p->anterior=final;
        final=p;
        final->siguiente=NULL;
    }
    else{
        q=principio;
        while(q){
            if(q->siguiente->tamano<p->tamano){
                p->siguiente=q->siguiente;
                q->siguiente=p;
                p->anterior=q;
                p->siguiente->anterior=p;
                return 1;
            }
            q=q->siguiente;
        }
    }
}
}
```

```
    }
    return 1;
}
int patron_corte::lista(int a){
    lista_patron *r;

    if(inicio==NULL){
        r=new lista_patron;
        r->van = a;
        r->siguiente=NULL;
        r->anterior=NULL;
        inicio=r;
        ultimo=r;
    }
    else{
        r=new lista_patron;
        r->van = a;
        ultimo->siguiente=r;
        r->anterior=ultimo;
        ultimo=r;
        r->siguiente=NULL;
    }
    return 1;
}

void patron_corte::leer_patrones(){
    n=1;
    char archivo[30];
    float num;
    ifstream entrada;
    cout<<"Patrones: ";
    cin.getline(archivo,30);
    cout<<endl;
    entrada.open(archivo);
    if(!entrada.good()){
        cout<<"NO ESTA EL ARCHIVO"<<endl<<endl;
        entrada.close();
        getch();
        exit(0);
    }
    while(entrada.eof()==false){
        if(n==1) entrada>>standar;
        else{
            entrada>>num;
            if(num<=standar && num>0) agregar(num);
        }
    }
}
```

```

        n++;
    }
    entrada.close();
}
int patron_corte::piso(patron* p){
    patron *q;
    q=principio;
    r=0;
    while(q){
        if(p==q) break;
        r += (q->tamano)*q->van;
        q=q->siguiente;
    }
    residuo = standar-r;
    p->caven=int(residuo/p->tamano);
}

void patron_corte::pintar(){
    ofstream salida("Patron de Corte.txt");
    ofstream output;

    lista_patron *p;
    patron *q;
    int i=0,k=0;
    n=n-2;
    p=inicio;

    for(i=0;i<n;i++){
        p=inicio;
        k=0;
        while(p){
            if(k%(n)==i)salida<<p->van<<" ";
            p=p->siguiente;
            k++;
        } salida<<endl;
    }

    p=inicio;
    q=principio;
    residuo=standar;
    salida<<"S(";
    while(p){
        residuo-=p->van*q->tamano;
        p=p->siguiente;
        q=q->siguiente;
        if(q==NULL){

```

```

        salida<<residuo<<",";
        q=principio;
        residuo=standar;
    }
}
salida<<" "<<endl<<endl;
salida<<"Cantidad de patrones = "<<((k-1)/(n));
salida.close();
output.close();
}

void patron_corte::patrones(){
    patron *p,*q;
    lista_patron *r;
    q=principio;
    r=inicio;
    piso(q);
    do{
        do{
            do{
                q=q->siguiente;
                piso(q);
            }while(q!=final);
            p=principio;

            p=principio;
            while(p){
                piso(p);
                if(p==final) final->van=final->caven;
                lista(p->van);
                p=p->siguiente;
            }

            q=q->anterior;
            q->van++;

        }while(q->van!=q->caven+1);

        p=q;
        while(p->anterior!=NULL && p->caven+1==p->van){
            if(p->caven+1==p->van){
                p=p->anterior;
                p->van++;
            }
        }
        q=p;
    }
}

```

---

```
    p=q->siguiente;
    while(p){
        p->van=0;
        p=p->siguiente;
    }
}while(q!=principio || q->van!=q->caven+1);
}

main(){
    patron_corte A;
    A.leer_patrones();
    A.patrones();
    A.pintar();
    cout<<"Datos Fuera en Patron de Corte.txt";
    getch();
}
```



## Bibliografía

- [1] <http://www.biodomos.cl/historia-domos-geodesicos>
- [2] <http://www.genesisgeodesica.com.ar/index.php?option=com>
- [3] <http://es.wikipedia.org/wiki/C>
- [4] <http://www.forojovenes.com/viajes/china-y-japon-32370.html>
- [5] QUESADA, Carlos, 2006, *Los sólidos platónicos, Historia, Propiedades y Arte*, p. 1 - 41.
- [6] HUGH KENNER. *Geodesic math and how to use it*. 2<sup>da</sup> Edición. The regent of the university of California, 2003, p. 47 - 80.
- [7] <http://foter.com/f/photo/5024800155/06dc4e5596/>
- [8] [http://simplydifferently.org/Geodesic\\_Dome\\_Notes](http://simplydifferently.org/Geodesic_Dome_Notes)
- [9] <http://www.geodesicbuildings.com/es/domas-geodesicas.html>
- [10] W. HAESSLER, Robert; E. SWEENEY, Paul. *Cutting stock problems and solution procedures*, School of Business Administration, The University of Michigan. 1991, P. 1 - 10.
- [11] A. TAHA, Hamdy. *Investigación de Operaciones*. 5<sup>ta</sup> Edición, Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100 México, D.F. Alfaomega Grupo Editor, 2006, pág. 960, ISBN 970-15-0115-2.
- [12] PRAWDA WITENBERG, Juan. *Método y modelación de operaciones I*. LIMUSA, 2004, ISBN 968-18-0590-9. p. 57 - 230.
- [13] HERNANDEZ HERNANDEZ Hector A; RUIZ MORENO Ricardo. Hermosillo, Sonora. 1991. *El método simplex revisado con variables acotadas y su aplicación en el diseño de dietas para camarón*. Universidad de Sonora. p. 5 - 143.
- [14] RUBIN CELIS Héctor Martínez Rubin *Notas del Método Simplex*. Método Simplex p. 1-38.
- [15] JARAMILLO J., Juan David; CORREA Z., Francisco José. *Programación lineal y algoritmos genéticos para la solución del problema de corte*. Universidad EAFIT, Medellín, Colombia. p. 1-13.
- [16] G. Belov, University of Dresden, *A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional Stock Cutting and two-dimensional two-stage Cutting*, Institute of Numerical Mathematics, 2004, p. 1 - 31.
- [17] L. MEDAGLIA, Andres *Programación a gran escala: Generación de columnas* Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes, p. 1 - 5.
- [18] [http://en.wikipedia.org/wiki/Walther\\_Bauersfeld](http://en.wikipedia.org/wiki/Walther_Bauersfeld)

- [19] RAMOS SCHNEIDER, Gonzalo. 1994. *Estudio del comportamiento en servicio, prerotura y rotura de puentes de hormigón con pretensado exterior* Universitat Politecnica de catalunya, p. 1 - 232.
- [20] AGUZZI, Ignacio; GOLBERT, Gastón; HABERKORN, Natalí; LIQUITAY, Federico; NARDI, Leandro. 2011. UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO *Análisis de autores, Richard Bucminster Fuller*. p. 4-13.
- [21] [http://www.phpsimplex.com/biografia\\_Dantzig.htm](http://www.phpsimplex.com/biografia_Dantzig.htm)