

BIBLIOTECA CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES

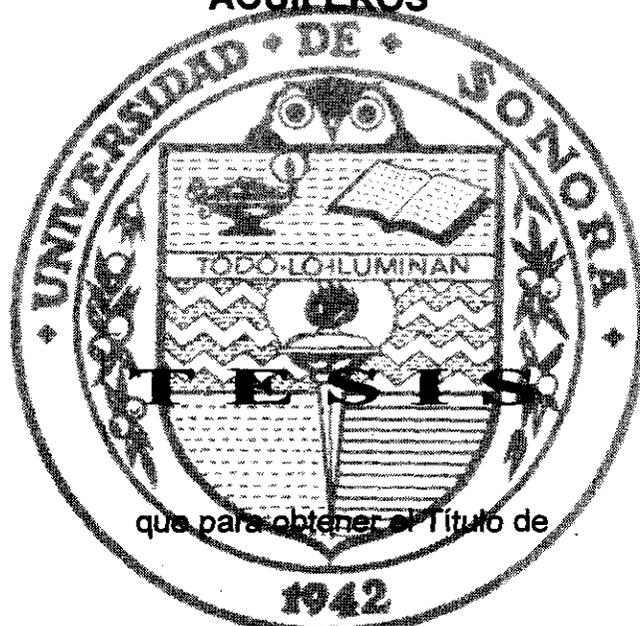
GB1199
.L63



15/T335

UNIVERSIDAD DE SONORA
DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA PRUEBAS DE BOMBEO CON
APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA TRANSMISIVIDAD DE
ACUÍFEROS**



que para obtener el Título de

1942

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Pedro Ignacio Loera Burnes

Hermosillo Sonora, México.

Febrero de 1999.

A mi Asesora del Departamento de Geología:

M.I. EVA LOURDES VEGA GRANILLO

Con Admiración y Respeto.

AGRADECIMIENTOS:

A **DIOS** por haberme puesto en los brazos de una mujer firme, decidida y cariñosa: mi **MADRE** y por haberme dado un **PADRE** consentidor pero al mismo tiempo fuerte e incansable, que junto con **mis hermanos** me enseñaron a enfrentar retos y vencer obstáculos.

Al **Dr. Fernando Ávila Murillo** por aceptar dirigir este trabajo.

Al **Dr. José Castillo Gurrola** por su desinteresado apoyo y calidad humana.

Al **Dr. Martín G. García Alvarado** y al **M.C. Rodrigo González González** del Depto. de Matemáticas por sus asesorías académicas.

Al **M.C. Ricardo Vega Granillo** del Departamento de Geología, por su disponibilidad para ayudarme en la realización de este trabajo.

Al **Prof. Ernesto Ogarrío H.** por haber logrado que se terminaran mis limitaciones y debilidades físicas.

A **PUPY Borgo** por estar siempre conmigo apoyándome en todo.

A mi exalumno **Edmundo Chávez** de la Escuela de Ingeniería Civil por el apoyo logístico.

Al **Departamento de Geología** de la Universidad de Sonora por hacerme sentir como uno más de sus miembros.

Al **Departamento de Matemáticas** y sus **Maestros** a los cuales debo mi formación académica.

A la **UNIVERSIDAD DE SONORA** a quien debo mi formación profesional.

GRACIAS

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	i
I GEOLOGÍA: HIDRÁULICA DE POZOS	1
I.1 Porosidad.	1
I.2 Permeabilidad.	2
I.3 Permeabilidad Intrínseca.	2
I.4 Ley de Darcy.	
I.4.1 Extensiones de la Ley de Darcy.	4
I.5 Conductividad Hidráulica.	6
I.6 Transmisividad.	6
I.7 Coeficiente de Almacenamiento.	6
I.8 Suposición de Dupuit.	7
II MODELOS MATEMÁTICOS PARA ACUÍFEROS	
II.1 Flujo estacionario a un pozo en un acuífero confinado.	14
II.2 Flujo en régimen no laminar.	17
II.3 Flujo estable a un pozo en un acuífero freático.	18
II.4 Flujo en estado estacionario a un pozo en un acuífero confinado filtrante.	21
II.4.1 Abatimiento en un acuífero infinito.	22
II.4.2 Abatimiento en un acuífero finito.	23
II.4.3 Abatimiento en un acuífero con varias capas.	24
II.5 Flujo Transitorio a un pozo en un acuífero confinado.	25
II.5.1 Abatimiento en un acuífero infinito $Q_w = \text{constante}$	26
II.5.2 Abatimiento en un acuífero infinito $Q_w = Q_w(t)$	31
II.5.3 Abatimiento en un acuífero finito $Q_w = Q_w(t)$	33
II.5.4 Un pozo artesiano en un acuífero infinito.	34
II.6 Flujo en estado estacionario a un pozo en un acuífero freático.	36
II.7 Flujo transitorio a un pozo en un acuífero filtrante.	40
II.7.1 Flujo transitorio a un pozo parcialmente penetrante.	45
II.8 Solución de Boulton.	47
II.8.1 Modelo de Streltsova.	47
II.9 Flujo en un acuífero no confinado considerando la respuesta retardada del nivel del agua.	49
II.9.1 Solución promedio sobre el espesor del acuífero.	53
II.9.2 Reducción a la solución de Theis.	54
II.9.3 Solución asintótica para intervalos de tiempo muy grandes y reducción a la ecuación de Boulton.	54
II.10 Sistemas de pozos múltiples.	56
II.10.1 Flujo estacionario.	56
II.10.2 Flujo Transitorio.	56
II.11 Pozos con fronteras cercanas tratadas por el método de imágenes.	58
II.12 Pozos de bombeo y de recarga en flujo uniforme.	60
II.13 Pérdidas en el pozo y descarga específica.	60

II.13.1 Descarga específica de un pozo o capacidad específica.	62
II.13.2 Abatimiento específico.	62
II.14 Hidráulica de pozos de recarga.	62
III PRUEBAS DE BOMBEO	
III.1 Generalidades.	65
III.1.1 Objetivos de las pruebas.	65
III.1.2 Estudios preliminares.	65
III.1.3 Estimación de la transmisividad por medio de mediciones estratigráficas	65
III.1.4 Selección del sitio de la prueba.	65
III.1.5 Piezómetros.	66
III.1.6 Distancia de los piezómetros.	66
III.2 Ejecución de una prueba de bombeo.	66
III.2.1 Mediciones.	66
III.2.2 Duración de la prueba de bombeo.	66
III.3 Análisis de los datos.	67
III.3.1 Aplicación de los métodos de análisis.	67
III.3.2 Reporte.	67
IV EJEMPLOS	
Ejemplo 1. Campo Experimental del Departamento de Agricultura y Ganadería.	69
Ejemplo 2. Arizona 1: Planet Ranch.	78
Ejemplo 3. Ejemplo teórico.	81
Ejemplo 4. Arizona 2.	82
Ejemplo 5. Arizona 3: Acuífero Ubutte.	86
V CONCLUSIONES	90
BIBLIOGRAFÍA	91

INTRODUCCIÓN

La hidráulica subterránea se basa en el estudio de la ocurrencia, disponibilidad y calidad del agua del subsuelo. El primer aspecto importante es el conocer la geología del medio para explicar la presencia del agua subterránea en las diferentes formaciones geológicas que permitan su almacenamiento y su facilidad a ser extraídas. La hidráulica nos ayuda a comprender el movimiento natural o inducido del agua a través de formaciones de rocas permeables.

El principal método de estudio en la hidráulica subterránea son las pruebas de bombeo y el análisis de las ecuaciones derivadas por condiciones a la frontera particulares. De estas pruebas se obtienen parámetros que definen el comportamiento de un acuífero ante la acción de un pozo y dentro del marco de una teoría determinada.

En la práctica, antes de ejecutar una prueba de bombeo, se tiene tan sólo una idea derivada del examen de los cortes geológicos y detalles de instalación de los pozos. Estos parámetros hidráulicos son la permeabilidad, conductividad hidráulica, transmisividad y coeficiente de almacenamiento.

Las pruebas de bombeo y las teorías que las originan tienen posibilidad de aplicación dentro de la Mecánica de Suelos y de la Geohidrología. En Mecánica de Suelos hay dos aplicaciones importantes:

- a) Estimación del bombeo necesario para el control del agua del subsuelo durante el proceso constructivo de presas, edificios, puentes, etc.
- b) Predicción de asentamientos ocasionados por bombeo.

En Geohidrología la aplicación es más directa, ya que teorías y pruebas tuvieron su origen en su seno.

La formulación matemática se apoya en esencia en los siguientes puntos :

El principio de la conservación de la masa.

La Ley de Darcy.

Las Leyes de variación volumétrica del agua y el suelo.

Simplificaciones relativamente arbitrarias de las ecuaciones resultantes y de condiciones de frontera, para llegar a soluciones más manejables.

Debido a la naturaleza puntual del parámetro transmisividad y a la dificultad para el realizar una prueba de bombeo con todos los requisitos necesarios de información, por lo general esta información es escasa y de dudosa validez,

se realizan pocas actividades para su determinación y se tiene que apoyar en la interpolación para discretizar sus valores en toda la zona de estudio.

El objetivo tiene como objetivo hacer una revisión de esas técnicas y revisar el problema de la obtención de este parámetro hidráulico.

GENERALES

Modelos matemáticos para describir la hidrodinámica de un acuífero.

Modelos matemáticos desarrollados a casos específicos.

ARTICULARES

Modelos matemáticos que describan la respuesta de un acuífero a un bombeo.

Modelos matemáticos para estimar el parámetro hidrogeológico

de manera general los modelos matemáticos.

I. GEOLOGÍA: HIDRÁULICA DE POZOS

A la hidráulica de aguas subterráneas le concierne inducir o deducir el movimiento de agua a través de formaciones de rocas permeables, apoyándose principalmente en las pruebas de bombeo y en ecuaciones en derivadas con condiciones a la frontera. Antes de 1935 tales ecuaciones nos indicaban el comportamiento del acuífero con condiciones de flujo relativamente estable, que generalmente en la naturaleza no ocurre. En 1935, Theis desarrolló una ecuación para el flujo de agua subterránea no estable la cual fue la base para el desarrollo de la hidráulica de aguas subterráneas.

Acuífero. Es una formación o grupo de formaciones geológicas que contiene una cantidad significativa de agua y permite su transporte bajo condiciones de campo ordinarias.

Acuitardo. Es una formación geológica que es, por naturaleza, semipermeable; puede transmitir agua a una razón mucho menor que un acuífero; se le conoce también como *capa semipermeable o filtrante*.

Acuicluso. Es una formación geológica que puede contener agua (algunas veces en cantidades apreciables) pero que es incapaz de transmitirla; también se conoce como *capa impermeable o confinante*.

Acuífugo. Es una formación impermeable, es decir, nunca contiene ni transmite agua.

Los acuíferos se clasifican en *confinados* y *no confinados*. Un *acuífero confinado* o *acuífero de presión* está acotado por formaciones impermeables. Si un pozo penetra completamente un acuífero confinado, el nivel del agua se elevará por encima de la *capa confinante superior* pudiendo alcanzar la superficie, cuando esto ocurre, se le llama *acuífero artesiano*. Un *acuífero freático* o *no confinado* tiene como frontera superior el *nivel de agua* o *superficie freática* que es la superficie sobre la cual la presión del fluido en el medio poroso es la presión atmosférica. Los acuíferos, confinados o no confinados, que pierden o ganan agua debido a escurrimientos entre sus mismos estratos se llaman *acuíferos filtrantes*. Si en un acuífero freático o libre existe (en una parte de él), una capa semipermeable entonces se llama *acuífero freático filtrante*, si se trata de un acuífero confinado con un estrato confinante semipermeable entonces es un *acuífero confinado filtrante*. Por último, mencionaremos un caso especial de los acuíferos freáticos es el *acuífero colgante* que ocurre sobre una capa impermeable o semipermeable y que se localiza entre el nivel de agua del acuífero freático y la superficie terrestre.

1.1 Porosidad. La porosidad de una roca o suelo es la propiedad que tiene de contener intersticios; se define como:

$$n = \frac{v_i}{v} = \frac{v_w}{v} = \frac{v - v_m}{v} = 1 - \frac{v_m}{v} \quad (1.1)$$

Donde n es la porosidad, v_i es el volumen de los intersticios, v es el volumen total, v_w es el volumen de agua y v_m es el volumen de partículas minerales. También se puede expresar como

$$n = \frac{\rho_m - \rho_d}{\rho_m} = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_m} \quad (1.2)$$

donde ρ_m es la densidad media de las partículas minerales (densidad de grano) y ρ_v es la densidad de una muestra seca (densidad de volumen). Las condiciones que controlan la porosidad de los materiales granulares son el arreglo de los granos (asumidos esféricos y del mismo tamaño), su forma y su ángulo. Los espacios vacíos de una roca o suelo están representados por la razón entre el volumen de sus intersticios y el volumen de sus partículas minerales:

$$\text{razón de vacíos} = \frac{v_i}{v_m} = \frac{v_w}{v_m} = \frac{n}{1-n} \quad (1.3)$$

1.2 Permeabilidad. La permeabilidad de una roca o suelo es una medida de su habilidad para transmitir fluido, tales como agua, bajo un gradiente hidropotencial. La permeabilidad es aproximadamente proporcional al cuadrado del diámetro medio de los granos:

$$k \approx C d^2 \quad (1.4)$$

donde: k es la permeabilidad intrínseca, C es un coeficiente adimensional que depende de la porosidad, tamaño y distribución de las partículas, forma y disposición del arreglo y otros factores y d diámetro medio del grano.

1.3 Permeabilidad Intrínseca. Es una propiedad del medio que considera las propiedades naturales del agua subterránea. Un medio poroso tiene una permeabilidad intrínseca de una unidad cuadrada de longitud si transmite en una unidad de tiempo, una unidad de volumen de fluido de una unidad de viscosidad cinemática a través de una sección transversal de unidad de área medidas perpendicularmente a la dirección de flujo bajo una unidad de gradiente de potencial. Se expresa mediante:

$$k = -\frac{qv}{g \frac{dh}{dl}} = -\frac{qv}{\frac{d\phi}{dl}} \quad (1.5)$$

donde: k es la permeabilidad intrínseca, q es la razón de flujo por unidad de área Q/A , v es la viscosidad cinemática, g es la aceleración de la gravedad, dh/dl indica el gradiente o unidad de cambio en la carga por unidad de longitud de flujo, y $d\phi/dl$ es el gradiente de potencial, o unidad de cambio en el potencial por unidad de longitud de flujo.

La viscosidad cinemática v está relacionada con la viscosidad dinámica η mediante la relación $\eta = vp$ donde p es la densidad del fluido. Otros conceptos importantes son:

Homogéneo e isotrópico. Un medio poroso es *homogéneo* si su permeabilidad es la misma en todos sus puntos, de otra manera, el medio es *heterogéneo* o *no homogéneo*, además, si la permeabilidad en un punto del medio poroso es independiente de la dirección, el medio es *isotrópico*, si ésta varía de una dirección a otra el medio es *anisotrópico*.

Filtración: La filtración q_f es el volumen de agua por unidad de área y por unidad de tiempo que fluye a través de una capa semipermeable desde un acuífero

sobreyacente (o subyacente) con una carga piezométrica ϕ_{ext} hacia un acuífero con carga piezométrica ϕ , esta dada por:

$$q_v = K' \frac{\phi_{ext} - \phi}{B'} \quad (1.6)$$

donde K' y B' son la conductividad hidráulica y el espesor, respectivamente, de la capa semipermeable.

1.4 Ley de Darcy. En 1856, Henry Darcy investigó el flujo de agua en filtros verticales homogéneos de arena conectados con las fuentes de la ciudad de Dijon (Francia). De su experimento (Figura 1.1), Darcy concluyó que la tasa de flujo (o volumen de agua por unidad de tiempo), Q , es:

- a) proporcional a un área de sección transversal A ,
- b) proporcional a $(h_1 - h_2)$ y,
- c) inversamente proporcional a la longitud L , o sea la separación entre los filtros.

Cuando se combinan, estas conclusiones dan la famosa Fórmula (o Ley) de Darcy:

$$Q = KA(h_1 - h_2)/L \quad (1.7)$$

donde h es la carga piezométrica y $(h_1 - h_2)$ es la diferencia entre las cargas piezométricas a través del filtro de longitud L . Debido a que la carga piezométrica describe (en términos de carga de agua) la suma de la presión y energía de potencial del fluido por unidad de peso, $(h_1 - h_2)/L$ se interpreta como el *gradiente hidráulico*. Denotando este gradiente por $J = (h_1 - h_2)/L$ y definiendo la *descarga específica*, q , como el volumen de agua que fluye por unidad de tiempo a través de un área transversal unitaria normal a la dirección de flujo, obtenemos:

$$q = KJ \quad (1.8)$$

donde $q = Q/A$ y $J = (h_1 - h_2)/L$; esta expresión es otra forma de la Ley de Darcy, la cual se puede extender a flujo a través de una columna inclinada en un medio poroso homogéneo:

$$Q = KA(\phi_1 - \phi_2)/L; \quad q = K(\phi_1 - \phi_2)/L = KJ; \quad \phi = z + p/\gamma \quad (1.9)$$

donde p es la presión y γ es el peso específico del agua. El coeficiente de proporcionalidad, K , denota la *conductividad hidráulica* del medio poroso o *coeficiente de permeabilidad*.

La *pérdida de energía* $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ se debe a la fricción en un flujo a través de patrones angostos y tortuosos del medio poroso. Realmente, en la Ley de Darcy, ha sido despreciada la energía cinética del agua, debido a que en general, los cambios en la carga piezométrica a lo largo del patrón de flujo son más grandes que los cambios en la energía cinética.

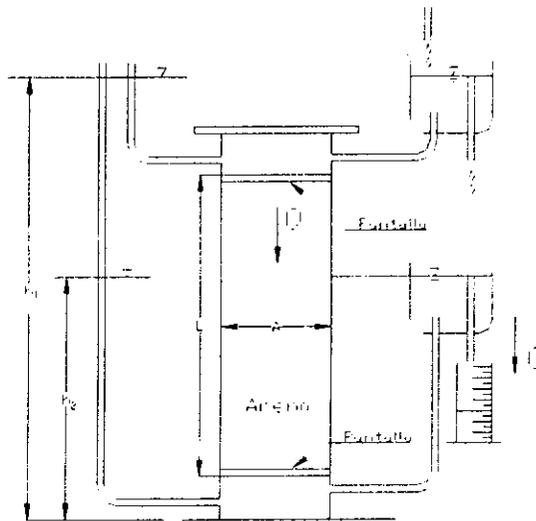


Figura I.1 Experimento de Darcy.

El cociente p/γ que aparece en la ecuación (I.9) se conoce como la *carga de presión*; representa la *energía de presión* por unidad de peso de agua con peso específico γ en ese punto. Para un fluido compresible bajo condiciones isotermales, $\gamma = \gamma(p)$, la carga de presión es definida por

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\gamma(p)}$$

tal que la carga piezométrica se torna:

$$\phi^* = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\gamma(p)} \quad (I.10)$$

Esta carga piezométrica fue introducida por Hubbert (1940). La longitud z de la Figura I.2 (z_1 para el punto 1 y z_2 para el punto 2) representa la *carga de elevación*, esto es, la energía potencial por unidad de peso de agua. La suma de la carga de presión y la carga de elevación es la *carga piezométrica* ϕ .

Es importante notar que la ecuación (I.9) establece que el flujo toma lugar de una carga piezométrica más grande a una más pequeña y no de una presión más grande a una más pequeña. En el caso de un flujo horizontal, $z_1 = z_2$ y la ecuación queda:

$$Q = KA(p_1 - p_2)/\gamma L \quad (I.11)$$

Realmente, el flujo toma lugar sólo a través de parte del área de sección transversal A de la columna de medio poroso, la parte restante está ocupada por medio sólida. Debido a que sólo puede mostrarse que la porosidad areal promedio es igual a la porosidad volumétrica n , la porción del área A disponible para el flujo es nA . De acuerdo a esto, la *velocidad promedio* V de flujo a través de la columna es (Bear, 1972):

$$V = Q/nA = q/n \quad (I.12)$$

I.4.1 Extensiones de la ley de Darcy. Cuando el flujo es tridimensional, las ecuaciones (I.9) y (I.12) se generalizan quedando:

$$\mathbf{q} = K\mathbf{J} = -K \text{grad}\phi; \quad \mathbf{V} = \mathbf{q}/n \quad (1.13)$$

donde \mathbf{V} es el vector velocidad con componentes V_x, V_y , y V_z , \mathbf{q} es el vector de descarga específica cuyas componentes son q_x, q_y, q_z con las direcciones del plano cartesiano xyz , respectivamente, y $\mathbf{J} = -\text{grad}\phi \equiv -\nabla\phi$ es el gradiente hidráulico con componentes $J_x = -\partial\phi/\partial x$, $J_y = -\partial\phi/\partial y$, $J_z = -\partial\phi/\partial z$ en las direcciones de los ejes xyz . Cuando el flujo toma lugar en un medio homogéneo isotrópico, la conductividad hidráulica K es un escalar y la ecuación (1.13) se puede escribir como

$$\left. \begin{aligned} q_x &= KJ_x = -K \partial\phi/\partial x = nV_x \\ q_y &= KJ_y = -K \partial\phi/\partial y = nV_y \\ q_z &= KJ_z = -K \partial\phi/\partial z = nV_z \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

o para el flujo en la dirección que indique el vector unitario $\mathbf{1}_s$

$$q_s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{1}_s = -K \partial\phi/\partial s = nV_s \quad (1.15)$$

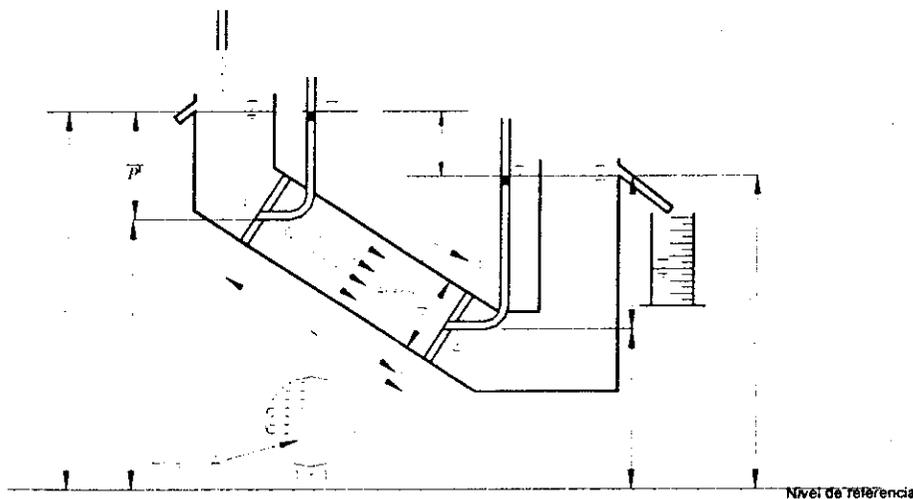


Figura 1.2 Infiltración a través de un filtro de arena.

En un medio isotrópico K es un escalar y los vectores \mathbf{q} y $\text{grad } \phi$ son colineales. De la ecuación (1.13) y la definición de $\text{grad } \phi$, se sigue que el vector \mathbf{q} es normal en todos los puntos de la superficie equipotencial $\phi = \text{constante}$. Cuando el medio es homogéneo e isotrópico la ecuación (4.9) puede escribirse

$$\mathbf{q} = -\text{grad}(K\phi) = -\text{grad } \Phi, \quad \Phi = K\phi, \quad [\Phi] = L^2/T \quad (1.16)$$

donde Φ es el *potencial de descarga específica*. Otras formas de escribir la misma ecuación son:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= -(k/\mu)(\text{grad } p + \rho g \mathbf{1}_z) = -(k/\mu) \left[\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{1}_y + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \mathbf{1}_z \right], \\ \mathbf{q} &= -(k/\mu)(\text{grad } p - \rho g) \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

donde $K = k\rho g/\mu$, μ es la viscosidad dinámica del fluido, $\rho = \gamma/g \neq \text{constante}$, es la densidad del fluido, k es la *permeabilidad intrínseca* del medio y $\mathbf{g} = -g \mathbf{1}_z$ es el vector de aceleración debido a la gravedad en dirección hacia abajo.

Para un fluido compresible, donde $\rho = \rho(p)$, la ecuación de movimiento (1.13) es

$$\mathbf{q} = -K \text{grad } \phi^* \quad (1.18)$$

donde ϕ^* es el *potencial de Hubbert* definido en la ecuación (1.10).

1.5 Conductividad hidráulica. En un medio isotrópico, la *conductividad hidráulica* K , puede definirse mediante la ecuación (1.8) como la descarga específica por unidad de gradiente hidráulico. La *conductividad hidráulica* $K [L/T]$ es un coeficiente que depende de las propiedades del medio poroso y del fluido y expresa la facilidad con la cual el fluido es transportado a través de un medio poroso.

1.6 Transmisividad. Consideremos un flujo a través de un acuífero confinado de espesor B como el mostrado en la Figura 1.3. Si el acuífero es homogéneo e isotrópico con conductividad hidráulica K , entonces la descarga total en la dirección $+x$, Q_x , a través del área WB normal al flujo, está dada por la Ley de Darcy

$$Q_x = -KBW \partial\phi/\partial x \equiv KBWJ_x; \quad \mathbf{J}' \equiv -\text{grad}'\phi; \quad J_x = -\partial\phi/\partial x \quad (1.19)$$

La descarga por unidad de ancho del acuífero, Q'_x , normal a la dirección de flujo es

$$Q'_x \equiv Q_x/W = KBJ_x \equiv TJ_x; \quad T = Q'_x/J_x \quad (1.20)$$

En forma vectorial podemos escribir

$$\mathbf{Q}' = -T\nabla'\phi; \quad \nabla'(\) = \frac{\partial(\)}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial(\)}{\partial y} \mathbf{1}_y \equiv \text{grad}'\phi \quad (1.21)$$

El producto KB denotado por T , es la *transmisividad* la cual se define como la tasa de flujo por unidad de ancho que cruza el espesor de un acuífero por unidad de gradiente hidráulico.

1.7 Coeficiente de Almacenamiento. El *coeficiente de almacenamiento* de un acuífero se define como el volumen de agua extraída (o recargada) en una unidad de

volumen de acuífero por unidad de disminución (o aumento) en la presión o, por unidad de cambio en la carga piezométrica ϕ^* y se expresa mediante:

$$S = \Delta U_w / U_b \Delta p = \Delta U_w / U_b \Delta \phi^* \quad (1.22)$$

donde U_w es el volumen de una unidad de masa de agua, U_b es el volumen de una unidad de medio poroso, Δp cambio de una unidad de carga o $\Delta \phi^*$ cambio en una unidad de carga piezométrica.

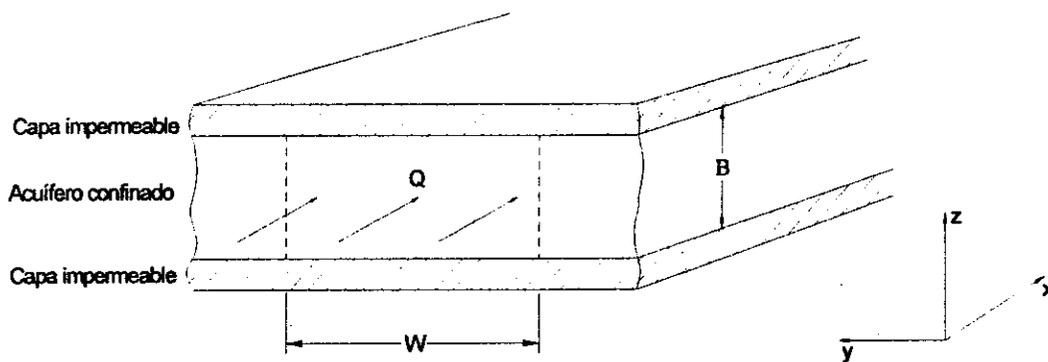


Figura 1.3 Flujo a través de un acuífero confinado.

1.8 Suposición de Dupuit. En un acuífero freático tenemos que el nivel del agua o superficie freática sirve como frontera superior de esto que ϕ y q varían de un punto a otro. Para obtener la descarga específica $q = q(x, y, z, t)$ en todos los puntos debemos conocer la carga piezométrica $\phi = \phi(x, y, z, t)$ para resolver el modelo de flujo, de aquí que existe una dificultad adicional contenida en el hecho de que la superficie piezométrica, la cual sirve como frontera al acuífero es desconocida, el hecho esto es parte de la solución del modelo. Dupuit (1863) observó que en el flujo de aguas subterráneas, la pendiente de la superficie piezométrica es muy pequeña, (ver Figura 1.4); él observó que en flujo estable la superficie piezométrica es una línea de corriente y que en cada punto P de ésta, la descarga específica es en la dirección tangente y esta dada por la ley de Darcy:

$$q_s = -K d\phi/ds = -K dz/ds = -K \text{ sen } \theta \quad (1.23)$$

Por lo tanto, a lo largo de la superficie freática $p=0$ y $\phi=z$. Como θ es muy pequeño, Dupuit sugirió que $\text{sen } \theta$ se remplazara por la pendiente $\text{tg } \theta = dh/dx$ lo cual es equivalente a asumir que las superficies equipotenciales son verticales (es decir $\phi = \phi(x)$ y $\phi = \phi(x, z)$) y que el flujo es esencialmente horizontal. De esta suposición obtenemos la descarga específica

$$q_x = -K dh/dx, \quad h = h(x) \quad (1.24)$$

En general, $h = h(x, y)$ por lo que tenemos

$$q_x = -K \partial h / \partial x, \quad q_y = -K \partial h / \partial y; \quad \mathbf{q} = -K \nabla' h \quad (1.25)$$

Como q es independiente de la altura la descarga total correspondiente a través de la superficie vertical tomando considerando W como un espesor (normal a la dirección del flujo) es

$$Q_x = -KWh \partial h / \partial x, \quad Q_y = -KWh \partial h / \partial y, \quad h = h(x, y) \quad (1.26)$$

en forma vectorial

$$\mathbf{Q} = -KWh \nabla' h \quad (1.27)$$

o por unidad de espesor tenemos

$$\mathbf{Q}' \equiv \mathbf{Q}/W = -Kh \nabla' h. \quad (1.28)$$

En las ecuaciones (1.25) a (1.28) el fondo del acuífero es horizontal. Debemos enfatizar que la suposición de Dupuit se considera muy buena aproximación en las regiones donde θ es pequeño o el flujo es horizontal. Hay que notar que la suposición de flujo horizontal es equivalente a la suposición de distribución de carga hidrostática $\partial p / \partial z = -\rho g$. La ventaja de emplear la suposición de Dupuit es que la variable de estado $\phi = \phi(x, y, z)$ se reemplaza por $h = h(x, y)$, es decir, z no aparece como variable independiente. También, como en cada punto del nivel freático, $p = 0$ y $\phi = h$, asumimos que la línea vertical a través del cada punto es una equipotencial en la cual $\phi = h = \text{constante}$. En general, h también varía con el tiempo de tal manera que $h = h(x, y, t)$.

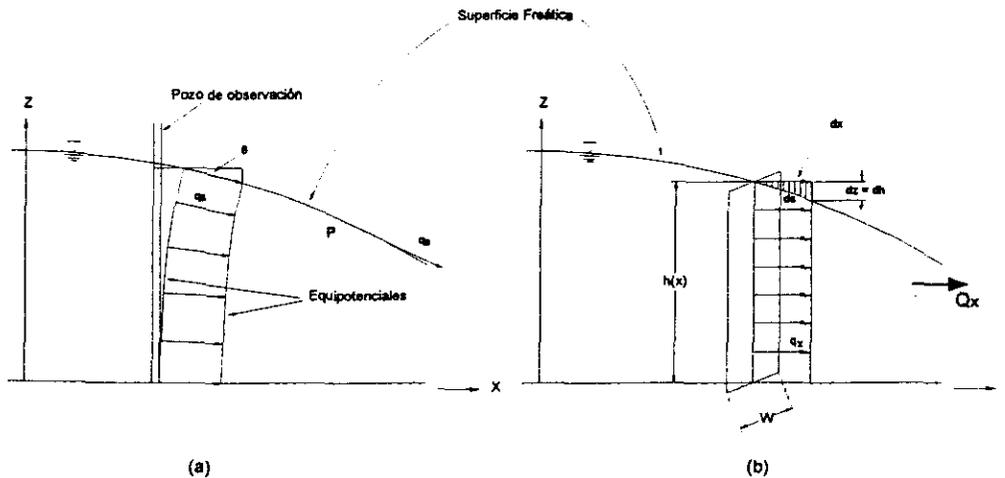


Figura 1.4 Suposición de Dupuit (Bear, 1979).

II. MODELOS MATEMÁTICOS PARA ACUÍFEROS

Para empezar a estudiar los modelos matemáticos para acuíferos, mencionaremos las suposiciones en los que están basados estos modelos:

- (i) El flujo en el acuífero obedece la Ley de Darcy.
- (ii) El agua sale inmediatamente el acuífero y hay una disminución de la presión.
- (iii) El acuífero es homogéneo, isotrópico y con un área infinita.
- (iv) La base del acuífero es horizontal y en un acuífero confinado el espesor es constante.
- (v) El nivel del agua, o superficie piezométrica antes de iniciarse el bombeo es horizontal.
- (vi) En un acuitardo, el almacenamiento se desprecia.

En la práctica, antes de aplicar los resultados que se derivarán en este capítulo se debe tomar en cuenta las condiciones de campo pues algunas de ellas no se satisfacen y habrá que introducir otras.

Ecuaciones Fundamentales de Continuidad para flujo de Aguas Subterráneas:

Partiremos de la ecuación general de flujo para aguas subterráneas (Flores S., 1990):

$$\nabla \cdot (K \nabla \phi) = S \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Acuífero confinado filtrante no homogéneo: Asumiendo flujo horizontal (esta suposición es válida cuando las permeabilidades del acuífero y del acuitardo no difieren mucho). La figura muestra un volumen de masa de agua (con densidad constante), tenemos que el exceso de flujo que entra sobre el flujo de masa que sale durante un intervalo de tiempo δt , a través de la superficie perpendicular a la dirección de cada eje, puede ser expresada por:

$$\left\{ \left[Q'_x \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}, y} - Q'_x \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}, y} \right] \delta y + \left[Q'_x \Big|_{x, y-\frac{\delta y}{2}} - Q'_x \Big|_{x, y+\frac{\delta y}{2}} \right] \delta x + (q_{v2} - q_{v1}) \delta x \delta y + (R - P) \delta x \delta y \right\} \delta t = S \delta x \delta y (\phi|_{t+\Delta t} - \phi|_t)$$

A1

donde $\phi(x, y, t)$ es la carga piezométrica, q_{v1} y q_{v2} son las tasas de filtración [L/T] a través de las capas semipermeables y $R(x, y, t)$ y $P(x, y, t)$ son las tasas de recarga artificial y de bombeo respectivamente [L/T]. $\phi_2(x, y, t)$ y $\phi_1(x, y, t)$ denotan las cargas piezométricas por encima de los acuitardos superior e inferior respectivamente y asumiendo que la distribución de la carga piezométrica es lineal a través de cada acuitardo entonces la tasa de filtración es:

$$q_{v2} = K^{(2)} \frac{\phi - \phi_2}{B^{(2)}} = \frac{\phi - \phi_2}{\sigma^{(2)}}; \quad q_{v1} = K^{(1)} \frac{\phi_1 - \phi}{B^{(1)}} = \frac{\phi_1 - \phi}{\sigma^{(1)}} \quad A2$$

donde $\sigma^{(1)} = B^{(1)}/K^{(1)}$ y $\sigma^{(2)} = B^{(2)}/K^{(2)}$ ó $K^{(i)}/B^{(i)} = 1/\sigma^{(i)}$ es el coeficiente de filtración (Hantush, 1946,1964) que se define como la tasa de flujo a través de una unidad horizontal de área de una capa semipermeable que entra (o sale) del acuífero bajo una unidad de diferencia de carga a través de ésta capa. Dividiendo la ecuación A1 por $\delta x \delta y \delta t$ obtenemos la masa que entra sobre la que sale por unidad de área de medio poroso por unidad de tiempo. Si hacemos que este volumen converja, es decir $\delta x \delta y \delta t \rightarrow 0$ obtenemos

$$-\nabla' \cdot \mathbf{Q}' + q_{v1} - q_{v2} + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad A3$$

con $\mathbf{Q}' = -\mathbf{T} \cdot \nabla \phi$, y q_{v1} , q_{v2} definidos anteriormente obtenemos

$$\nabla' \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla \phi) + \frac{\phi_1 - \phi}{\sigma^{(1)}} - \frac{\phi - \phi_2}{\sigma^{(2)}} + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad A4$$

esta Ecuación modela el flujo para un acuífero confinado filtrante.

Si el acuífero es no homogéneo e isotrópico tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\phi_1 - \phi}{\sigma^{(1)}} - \frac{\phi - \phi_2}{\sigma^{(2)}} + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad A5$$

esta es la ecuación de continuidad que describe el flujo de aguas subterráneas en un acuífero confinado filtrante.

Para un acuífero homogéneo e isotrópico tenemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\phi_1 - \phi}{\lambda^{(1)2}} - \frac{\phi - \phi_2}{\lambda^{(2)2}} + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad A6$$

donde $\lambda^{(i)} = (Tc^{(i)})^{1/2}$; $i=1,2$ es el factor de filtración del acuífero que determina la distribución de la filtración sobre un área.

$P(x, y, t)$ y $R(x, y, t)$ representan fuentes y sumideros, en algunos casos se reemplazan por

$$\sum_{(i)} P^*(x_i, y_i, t) \delta(x - x_i, y - y_i) \quad y$$

$$\sum_{(j)} R^*(x_j, y_j, t) \delta(x - x_j, y - y_j)$$

donde $P^*(x_i, y_i, t)$ y $R^*(x_j, y_j, t)$ denotan las tasas de bombeo [L^3/T] respectivamente en los puntos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) con $i=1,2,\dots,m_P$ y $j=1,2,\dots,m_R$. El símbolo $\delta(x - x_i, y - y_i)$ es la función Delta de Dirac.

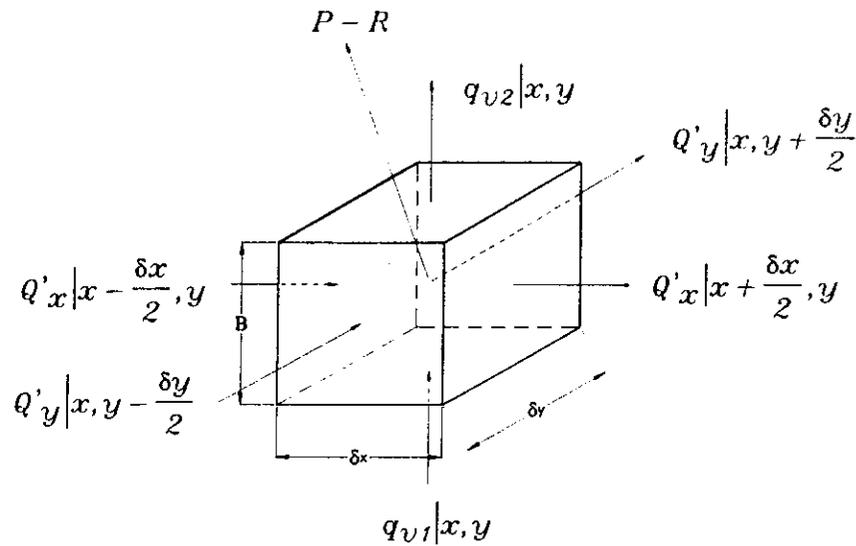


Figura A. Flujo en un acuífero confinado filtrante.

Acuífero confinado: Haciendo $q_{v1} = q_{v2} = 0$, es decir, reemplazamos los acuitardos por capas impermeables, entonces la ecuación A3 nos queda:

$$\nabla' \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla \phi) + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{A7}$$

donde $\phi = \phi(x, y, t) = \tilde{\phi}(x, y, t)$. Esta es la *Ecuación de Balance para un acuífero confinado*.

Si tenemos un *acuífero no-homogéneo y anisotrópico*: $T_x(x, y) \neq T_y(x, y)$; entonces la ecuación A7 toma la forma

$$q'_y \Big|_{x, y - \frac{\delta y}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{A8}$$

Para un *acuífero homogéneo e isotrópico* la ecuación A8 queda

$$T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + R - P \equiv T \nabla^2 \phi + N = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{A9}$$

Si tenemos *flujo estable* o cuando el coeficiente de almacenamiento S puede ser despreciado entonces la ecuación A9 se transforma en

$$T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + R - P = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{A10}$$

y en ausencia de fuentes y sumideros:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \equiv \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{A11}$$

tenemos la ecuación de Laplace.

Acuífero Freático Filtrante: La figura representa un volumen representativo de un acuífero freático filtrante a una altura $\eta(x, y)$ desde el fondo. Sea $N = N(x, y, t)$ el abastecimiento al acuífero por recarga natural (precipitación), $R = R(x, y, t)$ la recarga artificial y $P = P(x, y, t)$ la extracción por bombeo. Basándonos en las suposiciones de Dupuit: flujo horizontal y filtración normal a la capa semipermeable; el balance del volumen de agua despreciando el coeficiente de almacenamiento ya que debido a los escurrimientos que ocurre por los intersticios es mucho mayor al que resulta debido a la elasticidad del agua y del medio poroso: $S_y \gg S_0(h - \eta)$ (Bear, 1972):

$$\left\{ \left[Q'_x \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}, y} - Q'_x \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}, y} \right] \delta y + \left[Q'_x \Big|_{x, y-\frac{\delta y}{2}} - Q'_x \Big|_{x, y+\frac{\delta y}{2}} \right] \delta x + q_v \delta x \delta y + (R + N - P) \delta x \delta y \right\} \delta t = S_y \delta x \delta y (h|_{t+\Delta t} - h|_t) \quad A12$$

En esta ecuación S_y es el coeficiente de producción específica del acuífero. Dividiendo la ecuación A12 por $\delta x \delta y \delta t$ obtenemos la masa que entra sobre la que sale por unidad de área de medio poroso por unidad de tiempo. Si hacemos que este volumen converja, es decir $\delta x \delta y \delta t \rightarrow 0$ obtenemos que para un acuífero no homogéneo e isotrópico, con $K = K(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + R + N - P + q_v = S_y \frac{\partial h}{\partial t} \quad A13$$

o expresando q_v mediante la definición dada anteriormente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + R + N - P + \frac{\phi - h}{\sigma^{(i)}} = S_y \frac{\partial h}{\partial t} \quad A14$$

Esta es la Ecuación de continuidad para el flujo de agua en un acuífero freático filtrante o Ecuación de Boussinesq.

Si el acuífero es homogéneo, $K = \text{constante}$ entonces tenemos:

$$K \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial y} \right\} + R + N - P + \frac{\phi - h}{\sigma^{(i)}} = S_y \frac{\partial h}{\partial t} \quad A15$$

Para el caso de un acuífero confinado filtrante resolvemos:

$$\int_{\eta(x, y)}^{h(x, y, t)} \left(\nabla \cdot \mathbf{q} + S_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dz = 0 \quad A16$$

Empleando la regla de Leibnitz:

$$\int_{\eta(x, y)}^{h(x, y, t)} \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] dz + S_0 \int_{\eta(x, y)}^{h(x, y, t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz = 0$$

II.1 Flujo Estacionario a un Pozo en un Acuífero Confinado.

La Figura 1 muestra la convergencia radial de flujo a un pozo completamente penetrante en un acuífero confinado homogéneo con conductividad hidráulica K y espesor B constantes, de área infinita. La razón de flujo, Q_w , es constante. La superficie piezométrica inicial es $\phi(r_w, z) = z$, $h_w \leq z \leq h_s$. Cuando se empieza a bombear, se forma un cono de depresión debido al abatimiento en la vecindad del pozo de bombeo. Bajo la suposición de que el flujo es radialmente simétrico, horizontal y estacionario, el nivel de la superficie de abatimiento, que denotaremos con, $\phi(r)$, puede obtenerse resolviendo la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.1})$$

con condiciones de frontera en el pozo, $r = r_w$, $\phi = h_w$, y para cualquier distancia r , $\phi = \phi(r)$.

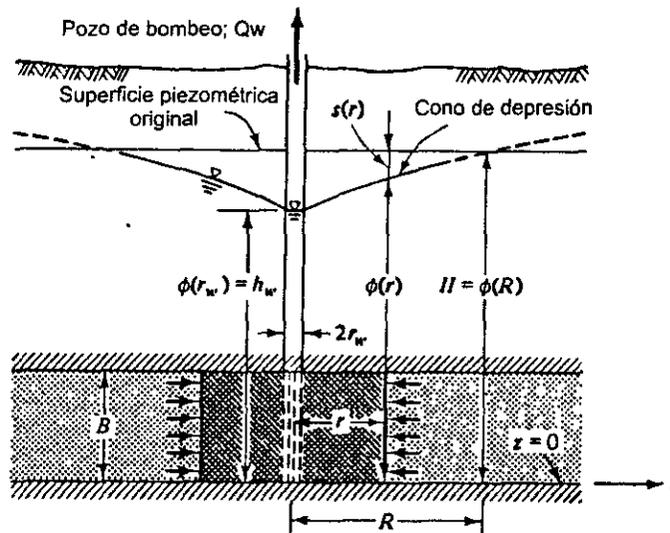


Figura 1. Un pozo en un acuífero confinado

La distribución del potencial $\phi(r)$ puede derivarse aplicando el *principio de continuidad* para la porción del acuífero entre dos cilindros concéntricos de radios r_w y r :

Flujo que entra $Q =$ flujo que sale Q_w ,
que, en nuestro caso, toma la forma

$$Q = A \times q_r = 2\pi r B \times K \frac{\partial \phi}{\partial r} = Q_w, \quad (11.2)$$

donde q_r es la descarga específica en dirección radial.

De la ecuación (11.2) obtenemos

$$2\pi r B K \frac{\partial \phi}{\partial r} = Q_w$$

de donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q_w}{2\pi r B K}.$$

Definamos la *transmisividad* T mediante $T = BK$. Entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q_w}{2\pi T} \frac{1}{r},$$

e, integrando, obtenemos

$$\int_{h_w}^{\phi(r)} \partial \phi = \frac{Q_w}{2\pi T} \int_{r_w}^r \frac{\partial r}{r}.$$

De aquí se sigue que, el potencial hidráulico $\phi = \phi(r)$ está dado por

$$\phi(r) - h_w = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) \quad (11.3)$$

De esta expresión para $\phi = \phi(r)$ podemos hacer las siguientes observaciones :

a) $\phi(r)$ es función creciente.

b) Como la superficie piezométrica es acotada (no puede ser mayor que H) y la función $\phi = \phi(r)$ dada en la ecuación (11.3) es no acotada, vemos que la ecuación (11.3) proporciona un modelo *local*, es decir, válido solamente en una proximidad del pozo, para la superficie piezométrica.

Integrando la Ecuación (11.2) en el intervalo $[r_w, R]$ (es decir, con condiciones a la frontera $\phi(R) = H$, $\phi(r_w) = h_w$) obtenemos

$$\int_{h_w}^H \partial \phi = \frac{Q_w}{2\pi T} \int_{r_w}^R \frac{\partial r}{r},$$

de donde

$$s_w \stackrel{def}{=} H - h_w = \phi(R) - \phi(r_w) = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln\left(\frac{R}{r_w}\right). \quad (11.4)$$

s_w denota la profundidad de agua en el pozo.

Para cualesquiera dos distancias r_1 y r_2 ($r_2 > r_1$) obtenemos:

$$\int_{\phi(r_1)}^{\phi(r_2)} \partial \phi = \frac{Q_w}{2\pi T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial r}{r}$$

de donde

$$\phi(r_2) - \phi(r_1) = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (11.5)$$

La Ecuación (II.5) es el Modelo de Thiem (1906).

Entre dos distancias r y R :

$$s(r) = \phi(R) - \phi(r) = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln\left(\frac{R}{r}\right). \quad (II.6)$$

La ecuación (II.6) nos da el abatimiento a cualquier distancia r del pozo de bombeo en términos del radio de influencia del acuífero.

Dividiendo las Ecuaciones (II.3) y (II.4) obtenemos:

$$\phi(r) - h_w = (H - h_w) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_w}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)}, \quad (II.7)$$

lo cual prueba que, dados h_w y H así como r_w y R , la gráfica de la curva $\phi = \phi(r)$, es independiente de Q_w y T .

La distancia R en las ecuaciones (II.4), (II.6) y (II.7), cuando el abatimiento es cero, se llama *radio de influencia del pozo*. Como hemos establecido anteriormente el flujo estacionario no puede prevalecer en un acuífero infinito, así que la distancia R se puede interpretar como un parámetro que indica la distancia más allá de la cuál el abatimiento es despreciable o no observable.

Se han hecho varios intentos para relacionar el radio de influencia R , con el pozo, el acuífero y los parámetros de flujo para estado estacionario y no estacionario en acuíferos confinados y freáticos, a partir de los cuales se han obtenido algunas relaciones puramente empíricas y otras semi-empíricas. A continuación mencionamos algunas de ellas (Bear, 1979).

Relaciones semi-empíricas:

$$\text{Lembke: } R = H(K/2N)^{1/2} \quad (II.8)$$

$$\text{Weber: } R = 2.45(HKt/n_e)^{1/2} \quad (II.9)$$

$$\text{Kusakin: } R = 1.9(HKt/n_e)^{1/2} \quad (II.10)$$

Relaciones empíricas:

$$\text{Siehardt: } R = 3000s_w K^{1/2} \quad (II.11)$$

$$\text{Kusakin: } R = 575s_w (HK)^{1/2} \quad (II.12)$$

En acuíferos freáticos N , H y n_e representan el aumento debido a precipitación, el espesor inicial de la zona saturada y la producción específica (o porosidad efectiva) del acuífero respectivamente. En acuíferos confinados, H y n_e se reemplazan por el espesor del acuífero B , y su coeficiente de almacenamiento S .

En un acuífero infinito R se puede considerar como un coeficiente, visualizando el caso de un acuífero de área finita en forma circular, en donde a lo largo de la frontera $r = R$, la presión H se mantiene constante como el mostrado

II.3 Flujo estable a un pozo en un acuífero freático. La Figura 3 muestra el cono de depresión en la vecindad de un pozo que bombea a razón Q_w en un acuífero isotrópico freático.

El flujo es radialmente simétrico entre las fronteras equipotenciales circulares en $r = R$ y $r = r_w$. Aquí la distribución del potencial $\phi = \phi(r, z)$ satisface la ecuación:

$$\partial^2 \phi / \partial r^2 + (1/r) \partial \phi / \partial r + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \quad (\text{II.18})$$

La cual es la ecuación de Laplace para flujo simétrico radial. Asumiendo que no hay pérdidas en el pozo, las condiciones de frontera son:

$$\left. \begin{aligned} \phi(R, z) &= H_0, \quad 0 \leq z \leq H_0 \\ \phi(r_w, z) &= h_w, \quad 0 \leq z \leq h_w \\ \phi(r_w, z) &= z, \quad h_w \leq z \leq h_s \\ \partial \phi / \partial z &= 0, \quad z = 0; r_w \leq r \leq R \\ \phi(r, h) &= h, \quad r_w \leq r \leq R \\ \partial \phi / \partial n &= 0, \quad z = h \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.19})$$

donde n es la distancia medida en dirección a la normal a la superficie freática.

Otra posible condición de frontera en el pozo es que el flujo sea constante Q_w . Entonces la segunda condición se reemplaza por:

$$K \int_0^{h_w} 2\pi r [\partial \phi(r, z) / \partial r] dz = Q_w$$

Para otro tipo de flujo en acuíferos no confinados, el problema es no lineal y no puede resolverse analíticamente.

Bajo la suposición de Dupuit, se puede derivar la ecuación de continuidad. Boulton (1951) sugirió la relación:

$$h_s - h_w \approx (H_0 - h_w) - 3.75 Q_w / 2\pi K H_0 \quad (\text{II.20})$$

donde 3.75 se reemplaza por 3.5 si r_w / H_0 es de orden 0.25

Consideremos un cilindro de radio r alrededor del pozo. Considerando flujo en estado estacionario y bajo las consideraciones de Dupuit tenemos:

$$Q_w = 2\pi r h q_r = 2\pi r h K dh/dr = 2\pi r K \partial(h^2/2) / \partial r \quad (\text{II.21})$$

donde q_r es la descarga específica en dirección radial. Integrando desde $h = h_w$ hasta $r = r_w$ y $h = h_0$ hasta $r = R$, obtenemos:

$$H_0^2 - h_w^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln(R/r_w) \quad (\text{II.22})$$

En este caso despreciamos el frente de infiltración y hacemos $h_s = h_w$. Si consideramos desde una distancia r a una frontera externa R , obtenemos:

$$H_0^2 - h^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln(R/r) \quad (\text{II.23})$$

Dividiendo la Ecuación (II.23) por la Ecuación (II.22):

$$H_0^2 - h^2 = (H_0^2 - h_w^2) \frac{\ln(R/r)}{\ln(R/r_w)} \quad (II.24)$$

La curva en la Figura 3 da las elevaciones de la superficie freática, $h = h(r)$.

La Ecuación (II.22) es la Formula de Dupuit-Forchheimer y es la solución exacta de la ecuación de continuidad basada en las suposiciones de Dupuit:

$$\partial Q / \partial r = 0 = \partial(2\pi r h K \partial h / \partial r) / \partial r = \partial(\pi K r \partial h^2 / \partial r) / \partial r \quad (II.25)$$

ó

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h^2}{\partial r} = 0 \quad (II.26)$$

la cual es lineal en h^2 .

La Ecuación (II.23) puede escribirse como:

$$H_0 - h = \frac{1}{(H_0 + h)} \frac{Q_w}{\pi K} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (II.27)$$

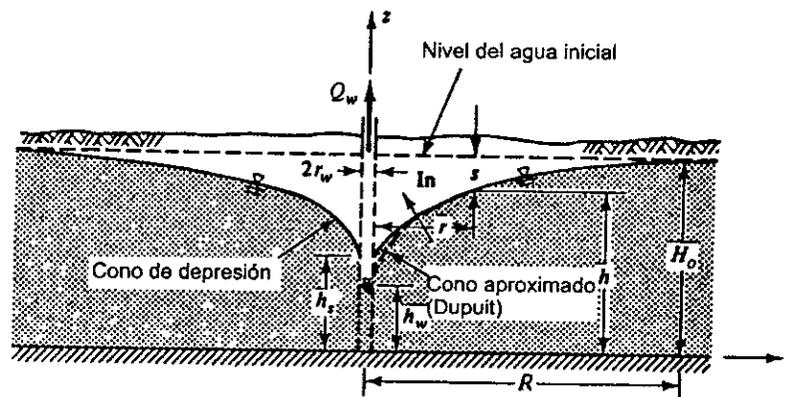


Figura 3. Flujo radial a un pozo en un acuífero freático.

Para un acuífero con espesor y abatimiento pequeños, $(H_0 - h) \ll H_0$, $(H_0 + h) \approx 2H_0$, y la Ecuación (II.23) puede ser aproximada por:

$$s = \frac{Q_w}{\pi K (H_0 + h)} \ln \frac{R}{r} \quad \text{o} \quad s = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \frac{R}{r} \quad (II.28)$$

donde $s = H_0 + h$ es el abatimiento y $T = K(H_0 + h)/2 \approx KH_0$ es la transmisividad promedio del acuífero. La Ecuación (II.28) es idéntica a la Ecuación (II.2) que describe el flujo en estado estacionario para un acuífero confinado. De esta manera tenemos que para abatimientos pequeños (en relación con H_0 o h), un acuífero freático puede ser tratado como uno confinado.

Entre cualesquiera dos puntos r con abatimiento s_1 y r_2 con abatimiento s_2 , la Ecuación (II.23) resulta:

$$h_2^2 - h_1^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln \frac{r_2}{r_1} : (H_0 - s_2)^2 - (H_0 - s_1)^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{ó}$$

$$(s_1 - s_1^2/2H_0) - (s_2 - s_2^2/2H_0) = \frac{Q_w}{2\pi K H_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{II.29})$$

$$s'_1 - s'_2 = \frac{Q_w}{2\pi K H_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

donde $s' = s - s^2/2H_0$ es el abatimiento corregido, es decir; el abatimiento que podría ocurrir en un acuífero confinado.

Aunque la Ecuación (II.22) es una aproximación para $h(r)$ basada en las suposiciones de Dupuit, Charni (1951) y Polubarinova-Kochina (1952,1962) probaron que ésta da exactamente el flujo Q_w .

La ecuación exacta para el flujo en el pozo puede expresarse como:

$$Q_w = 2\pi K r \int_0^{h(r)} [\partial\phi(r,z)/\partial r] dz = 2\pi r K \partial\phi'/\partial r$$

$$\phi' = \int_0^{h(r)} \phi(r,z) dz - h^2(r)/2 \quad (\text{II.30})$$

En la aproximación de Dupuit (Ecuación II.21) para Q_w , hemos reemplazado ϕ' por $h^2/2$. Para un acuífero anisotrópico ($K_r \neq K_z$), puede probarse que:

$$0 < \frac{h^2/2 - \phi'(r)}{h^2/2} < \frac{(K_r/K_z)i^2}{1 + (K_r/K_z)i^2} \quad (\text{II.31})$$

donde $i = dh/dr$. Así, si $i \ll 1$, el error al reemplazar ϕ' por $h^2/2$ es pequeño (Bear, 1972, p.363).

La Figura 4 muestra un flujo en estado estacionario y simétrico a un pozo en un acuífero freático. El pozo es alimentado a una razón constante de recarga (N). Asumiendo que el flujo en el acuífero es esencialmente horizontal (es decir, basándonos en las suposiciones de Dupuit), tenemos:

$$Q_w = \pi(r^2 - r_w^2)N + 2\pi r K h \partial h/\partial r \quad (\text{II.32})$$

integrando entre $r = r_w$ y $h = h_w$ (despreciando la infiltración) y a un punto a una distancia r :

$$h^2 - h_w^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln \frac{r}{r_w} - \frac{N}{2K} (r^2 - r_w^2) + \frac{r_w^2 N}{K} \ln \frac{r}{r_w} \quad (\text{II.33})$$

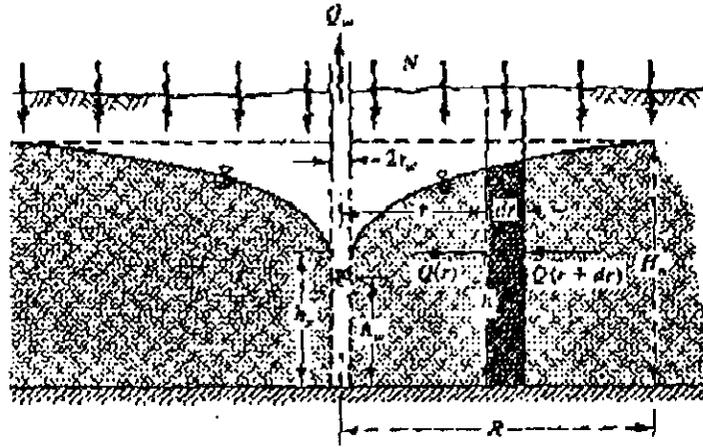


Figura 4. Flujo radial a un pozo en un acuífero freático con recarga.

II.4 Flujo en estado estacionario a un pozo en un acuífero confinado filtrante.
El flujo $Q(r)$ en un cilindro de radio r y altura B (centrado en el pozo: ver Figura 5), esta dado por:

$$Q(r) = 2\pi r B K \frac{\partial \phi}{\partial r} = 2\pi r T \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\text{II.34})$$

considerando que el flujo es continuo para la porción del acuífero entre dos cilindros de radios r y $(r + \Delta r)$ tenemos:

$$Q(r + \Delta r) - Q(r) + (2\pi r \Delta r) q_v = 0 \quad (\text{II.35})$$

donde q_v se muestra en la misma Figura 5.

En el límite, si $\Delta r \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} + 2\pi r q_v = 0: q_v = K' \frac{\phi_0 - \phi}{B'} = \frac{\phi_0 - \phi}{\sigma'} \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\phi_0 - \phi}{\lambda^2} = 0: \lambda^2 = \sigma' T = \frac{B' B K}{K'} \quad (\text{II.37})$$

donde λ es el factor de filtración. Reescribiendo la ecuación anterior:

$$r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{r^2}{\lambda^2} (\phi_0 - \phi) = 0$$

si hacemos $y = \phi_0 - \phi$, $y' = -\lambda \frac{\partial \phi}{\partial r}$, $y'' = -\lambda^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$, y $x = r/\lambda$ tenemos la ecuación:

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 - 0) y = 0$$

la cual es una ecuación de Bessel Modificada de orden cero cuya solución es:

$$\phi_0 - \phi(r) = \alpha I_0(r/\lambda) + \beta K_0(r/\lambda) \quad (\text{II.38})$$

donde α y β son constantes que se derivan de las condiciones de frontera y $I_0(x)$ y $K_0(x)$ son funciones de Bessel Modificadas de primera clase y orden cero y de segunda clase y orden cero, respectivamente.

Consideremos los siguientes casos:

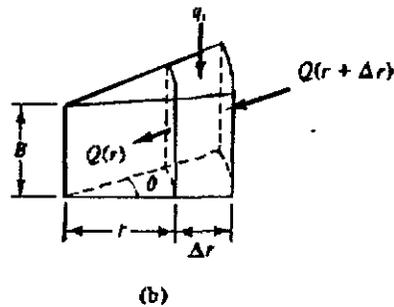
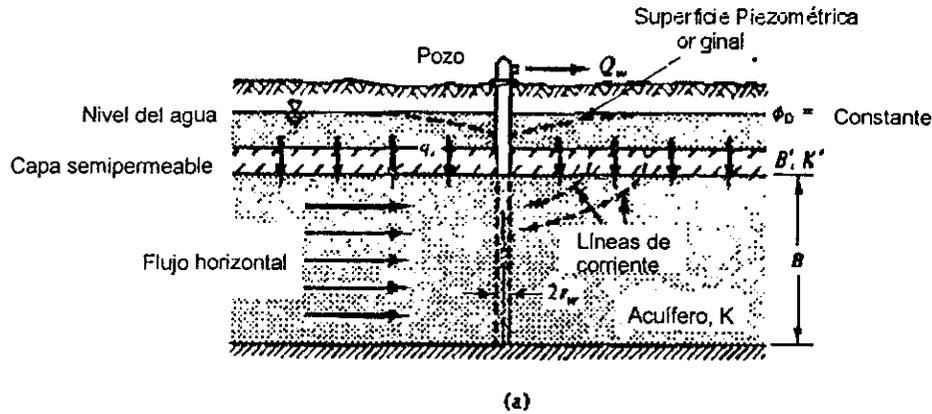


Figura 5. Representación esquemática de la aproximación del flujo a un pozo en un acuífero filtrante con agua estancada en la parte superior de la capa semipermeable

II.4.1 Abatimiento en un acuífero infinito. Tomamos como condiciones de frontera $\phi = \phi_0$ en $r = \infty$, se sigue que $\alpha = 0$. Así $\phi_0 - \phi(r) = \beta K_0(r/\lambda)$. Como una segunda condición consideremos, que el flujo en el pozo es constante:

$$Q_w = 2\pi r_w B K \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = 2\pi r_w B K \beta K_1(r_w/\lambda) / \lambda :$$

$$\beta = Q_w / [2\pi T (r_w/\lambda) K_1(r_w/\lambda)] \quad \text{y}$$

$$s(r) = \phi_0 - \phi(r) = \frac{Q_w}{2\pi T} \frac{K_0(r/\lambda)}{(r_w/\lambda) K_1(r_w/\lambda)} \quad (\text{II.39})$$

donde Y_1 es una función de Bessel Modificada de segunda clase y primer orden.

En la práctica $r_w/\lambda \ll 1$. Así para $x \ll 1$, $xK_1(x) \approx 1$ con un error menor del uno por ciento para $x < 0.02$, entonces podemos aproximar la Ecuación (II.39) mediante:

$$s(r) = \frac{Q_w}{2\pi T} K_0(r/\lambda) \quad (II.40)$$

bajo estas condiciones $s(r)$ es independiente de r_w .

En la vecindad del pozo de bombeo, $r/\lambda \ll 1$. Para $x \ll 1$, $Y_0(x) \approx \ln(1.123/x)$. Entonces la Ecuación (II.40) resulta:

$$s(r) = \frac{Q_w}{2\pi T_0} \ln \frac{1.123\lambda}{r} \quad (II.41)$$

con un error menor del cinco por ciento para $r/\lambda < 0.35$, y menor del uno por ciento para $r/\lambda < 0.18$.

Si comparamos las Ecuaciones (II.28) y (II.41) tenemos que λ (o 1.123λ) expresa el radio de influencia del acuífero filtrante. La razón Q_r/Q_w indica el porcentaje de descarga de flujo del pozo de bombeo a la distancia r ; la parte restante $Q_w - Q(r)$ entra al acuífero a través de la capa semipermeable:

$$Q(r)/Q_w = (r/\lambda)K_1(r/\lambda) \quad (II.42)$$

La Figura 6 muestra la gráfica de la Ecuación (II.42)

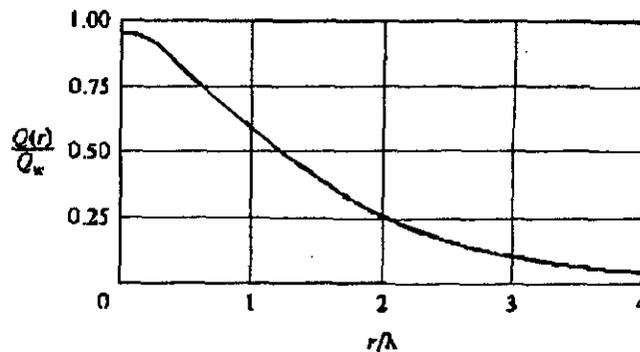


Figura 6. Representación gráfica de la Ecuación II.42

II.4.2 Abatimiento en un acuífero finito. Las condiciones de frontera para un acuífero filtrante de área finita son $\phi = \phi_0$ en $r = R$ y $Q(r_w) = Q_w = \text{constante}$. Para $r_w \ll \lambda$, usamos aproximaciones para $x \ll 1$: $xK_1(x) \approx 1$, $xI_1(x) \approx 0$, obteniendo la solución aproximada:

$$s(r) = \phi_0 - \phi(r) = \frac{Q_w}{2\pi T} \left[K_0(r/\lambda) - I_0(r/\lambda) \frac{K_0(R/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right] \quad (II.43)$$

Para $R \ll \lambda$, excepto cuando r está muy próxima de R , la Ecuación (II.43) se puede aproximar mediante la Ecuación (II.40).

Para una frontera impermeable en $r = R$, la solución esta dada por:

$$s(r) = \frac{Q_w}{2\pi T} \left[K_0(r/\lambda) - I_0(r/\lambda) \frac{K_1(R/\lambda)}{I_1(R/\lambda)} \right] \quad (II.44)$$

donde I_1 es una función de Bessel Modificada de primera clase y primer orden.

II.4.3 Abatimiento en un acuífero con varias capas. En la Figura 7 se muestran varios acuíferos separados por estratos semipermeables.

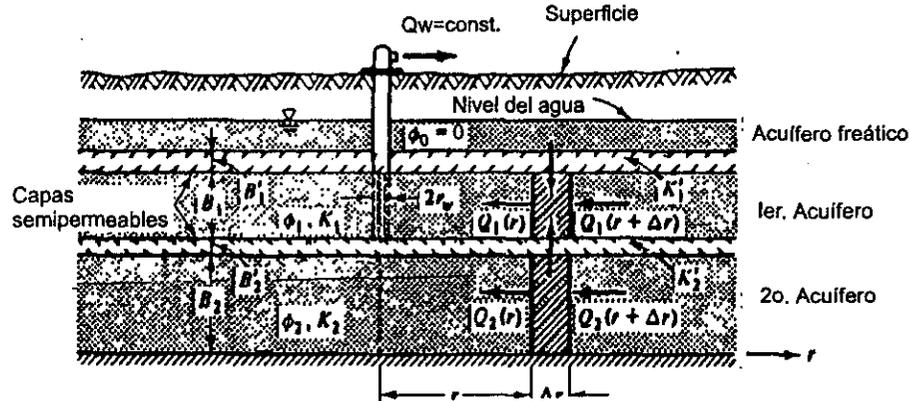


Figura 7. Un pozo en un acuífero con varias capas filtrantes.

Sean: $Q_1 = 2\pi r K_1 B_1 \partial \phi_1 / \partial r$; $Q_2 = 2\pi r K_2 B_2 \partial \phi_2 / \partial r$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial r} = 2\pi r \left(\frac{\phi_1}{\sigma'_1} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\sigma'_2} \right); \quad \frac{\partial Q_2}{\partial r} = 2\pi r \frac{\phi_2 - \phi_1}{\sigma'_2} \quad (II.45)$$

donde $\sigma'_1 = B'_1/K'_1$, $\sigma'_2 = B'_2/K'_2$. Sustituyendo Q_1 y Q_2 en esta última ecuación tenemos:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \frac{\phi_1}{\lambda_{11}^2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\lambda_{12}^2}; \quad \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\lambda_{22}^2} \quad (II.46)$$

donde $\lambda_{ij}^2 = K_i B_i \sigma'_j = T_i \sigma'_j$. Estas dos ecuaciones de Bessel forman un sistema que se resuelve simultáneamente, sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_i(r) = 0, \text{ para } i = 1, 2;$$

$$Q_w = 2\pi T_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w, \neq 0}; \quad Q_w = 2\pi T_2 \left(r \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w, \neq 0}$$

Resolviendo el sistema llegamos a la solución:

$$\phi_1(r) = \frac{Q_w}{2\pi T_1} \frac{1}{\chi_1^2 - \chi_2^2} \{ (\chi_1^2 - \alpha_{22}^2) Y_0(\chi_1 r) + (\alpha_{22}^2 - \chi_2^2) Y_0(\chi_2 r) \}$$

$$\phi_2 = \frac{Q_w}{2\pi T_1} \frac{\alpha_{22}^2}{\chi_1^2 - \chi_2^2} \{ -Y_0(\chi_1 r) + Y_0(\chi_2 r) \} \quad (II.47)$$

donde

$$\left. \begin{matrix} \chi_1^2 \\ \chi_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2) \pm \left[(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2)^2 - 4\alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$\alpha_{ij}^2 = 1/\lambda_{ij}^2$$

Para el caso en que se bombea de la capa inferior únicamente obtenemos:

$$\phi_1(r) = \frac{Q_w}{2\pi T_2} \frac{\alpha_{12}^2}{\chi_1^2 - \chi_2^2} \{-Y_0(\chi_1 r) + Y_0(\chi_2 r)\}$$

$$\phi_2(r) = \frac{Q_w}{2\pi T_2} \frac{1}{\chi_1^2 - \chi_2^2} \{(\chi_1^2 - \alpha_{22}^2)Y_0(\chi_2 r) + (\alpha_{22}^2 - \chi_2^2)Y_0(\chi_1 r)\} \quad (11.48)$$

II.5 Flujo transitorio a un pozo en un acuífero confinado. La Figura 8 muestra un pozo completamente penetrante que bombea a una razón de flujo constante, Q_w en un acuífero confinado. El acuífero es homogéneo, isotrópico, y con un espesor constante B . Asumimos que la capacidad de almacenamiento S del acuífero, resultante de las propiedades del agua y la geología del manto acuífero, es constante (en espacio y tiempo), y que el agua se bombea instantáneamente del manto con una disminución de presión

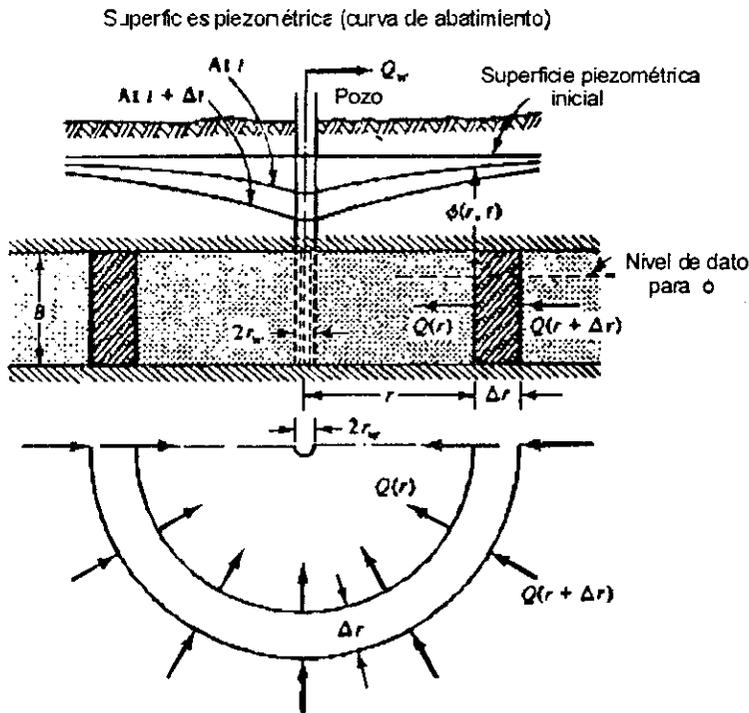


Figura 8. Flujo transitorio a un pozo en un acuífero confinado.

Consideremos un dominio del acuífero entre dos cilindros concéntricos al pozo de radios r y $r + \Delta r$. El exceso de volumen de agua que sale de este dominio sobre el volumen que le entra, en un intervalo de tiempo Δt es tomado desde el manto al dominio, causando una disminución en la presión $\Delta\phi = \phi(t) - \phi(t + \Delta t)$. Expresando esto matemáticamente tenemos:

$$\Delta t[Q(r) - Q(r + \Delta r)] = S \times 2\pi r \Delta r [\phi(t) - \phi(t + \Delta t)]$$

$$Q(r) = 2\pi r T \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (II.49)$$

$$\frac{Q(r) - Q(r + \Delta r)}{\Delta r} = 2S\pi r \left[\frac{\phi(t) - \phi(t + \Delta t)}{\Delta t} \right]; \quad Q'(r) = 2S\pi r \phi'(t) \quad (II.49a)$$

de la Ecuación (II.49) obtenemos $Q'(r) = 2\pi r T \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + 2\pi T \frac{\partial\phi}{\partial r}$ sustituyendo en la Ecuación (II.49a):

$$2\pi r T \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + 2\pi T \frac{\partial\phi}{\partial r} = 2S\pi r \frac{\partial\phi}{\partial t}; \text{ si dividimos esta ecuación por } 2\pi r T \text{ obtenemos:}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (II.50)$$

esta ecuación describe el flujo transitorio (convergente o no convergente) en un acuífero no confinado.

Consideremos los siguientes casos:

II.5.1 Abatimiento en un acuífero infinito, $Q_w = \text{constante}$. Al resolver la Ecuación (II.50) consideraremos que el pozo es infinitesimalmente angosto y las condiciones de frontera e iniciales son:

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, 0) &= \phi_0, \quad r_w \leq r \leq \infty \\ \phi(\infty, t) &= \phi_0, \quad t \geq 0 \\ \lim_{r=r_w \rightarrow 0} 2\pi r T \frac{\partial\phi}{\partial r} &= Q_w = \text{constante}, \quad t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (II.51)$$

Escribiendo la Ecuación (II.50) en términos del abatimiento $s(r, t) = \phi_0 - \phi(r, t)$:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (II.52)$$

con las condiciones de frontera: $s(r, 0) = 0$, $s(\infty, t) = 0$, $\lim_{r=r_w \rightarrow 0} (2\pi r T \frac{\partial s}{\partial r}) = -Q_w$,

resolviendo la Ecuación (II.52):

Hacemos el cambio de variable:

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad \text{y} \quad s = s(u(r, t)) \text{ (Transformación de Boltzman)} \quad (II.52a)$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial s}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (\text{II.52b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2rS}{4Tt} = \frac{2rS}{4Tt} \frac{r}{r} = \frac{2u}{r} \quad (\text{II.52c})$$

$$\text{y } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{2S}{4Tt} = \frac{2S}{4Tt} \frac{r^2}{r^2} = \frac{2u}{r^2} \quad (\text{II.52d})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{r^2 S}{4Tt^2} = -\frac{u}{t} \quad \text{ó} \quad -\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} \quad (\text{II.52e})$$

sustituyendo las Ecuaciones (II.52c) y (II.52d) en la Ecuación (II.52b)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \left(\frac{2u}{r} \right)^2 + \frac{\partial s}{\partial u} \left(\frac{2u}{r^2} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \frac{4u^2}{r^2} + \frac{\partial s}{\partial u} \frac{2u}{r^2} \quad (\text{II.52f})$$

y además:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial s}{\partial u} \frac{2u}{r} \quad (\text{II.52g})$$

$$\text{y } \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial u} \frac{u}{t} \quad (\text{II.52h})$$

sustituyendo las Ecuaciones (II.52f), (II.52g) y (II.52h) en la Ecuación (II.52) tenemos:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \frac{4u^2}{r^2} + \frac{\partial s}{\partial u} \frac{2u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{2u}{r} = -\frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{u}{t}$$

$$\frac{4u^2}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{4u}{r^2} \frac{\partial s}{\partial u} = -\frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{u}{t}; \quad \frac{4u^2}{r^2} \left[u \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{\partial s}{\partial u} \right] = -\frac{Su}{Tt} \frac{\partial s}{\partial u}$$

o bien

$$u \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{Sr^2}{4Tt} \frac{\partial s}{\partial u} = 0 \quad \text{de la Ecuación (II.52a):}$$

$$u \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + [1+u] \frac{\partial s}{\partial u} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left[1 + \frac{1}{u} \right] \frac{\partial s}{\partial u} = 0. \quad (\text{II.52i})$$

Haciendo $y = \frac{\partial s}{\partial u}$ y $y' = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}$ la Ecuación (II.52i) nos queda:

$$y' + \left(1 + \frac{1}{u} \right) y = 0 \quad \text{integrando obtenemos } y = c \frac{e^{-u}}{u}, \quad \text{por tanto } \frac{\partial s}{\partial u} = c \frac{e^{-u}}{u}, \quad \text{o bien}$$

$$s = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (\text{8.52j})$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$Q_w = -\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi Tr \frac{\partial s}{\partial r} = -\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi Tr \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi Tr c \frac{e^{-u}}{u} \frac{2u}{r}$$

como $\lim_{r \rightarrow 0} u = 0$ y $\lim_{r \rightarrow 0} e^{-u} = 1$ entonces $Q_w = -4\pi T c$ por lo tanto $c = \frac{Q_w}{4\pi T}$ sustituyendo en la Ecuación (II.52j):

$$s = \frac{Q_w}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Otra solución para la Ecuación (II.52) viene dada por:

$$s = (A/t)e^{-u}, \quad A = \text{constante}, \quad u = Sr^2/4Tt \quad (\text{II.53})$$

para $t > 0$, el volumen total de agua extraída del acuífero es $U_0 = \int s \times S \times 2\pi r dr = 4\pi T A$ entonces $A = U_0/4\pi T$, sustituyendo en la Ecuación (II.53):

$$s = (U_0/4\pi T t) e^{-u} \quad (\text{II.54})$$

donde U_0 es el volumen de agua extraído instantáneamente del acuífero en el tiempo $t = 0$. Podemos relacionar esto con la razón de flujo Q_w por: $U_0 = Q_w dt$.

Si las extracciones varían con el tiempo, es decir; $Q_w = Q_w(t)$, tenemos:

$$s = \frac{1}{4\pi T} \int_0^t \frac{Q_w(\tau)}{t-\tau} e^{\left\{ \frac{-r^2 s}{4T(t-\tau)} \right\}} d\tau \quad (\text{II.55})$$

Para el caso en que tenemos $Q(t) = Q_w = \text{constante}$ la Ecuación (II.55) se reduce a:

$$s = \frac{Q_w}{4\pi T} \int_{x=u}^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = -\frac{Q_w}{4\pi T} Ei(-u) \quad (\text{II.56})$$

La solución dada por Theis (1935) tiene la forma:

$$\left. \begin{aligned} s(r,t) = \phi_0 - \phi(r,t) &= \frac{Q_w}{4\pi T} W(u) \\ W(u) &= \int_{x=u}^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.57})$$

donde $W(u)$ es la función de pozo de $u = Sr^2/4\pi T$ para un acuífero confinado (Jacob, 1940). La Figura 9 muestra el abatimiento $s(r,t)$. La ecuación (II.57) es el Modelo de Theis.

Existe un punto de inflexión cuando $u=1$ (esto es, $t = S^2/4T$). De allí en adelante, la razón del abatimiento $\partial s/\partial t (= -\partial \phi/\partial t)$ decrece pero, teóricamente nunca desaparece.

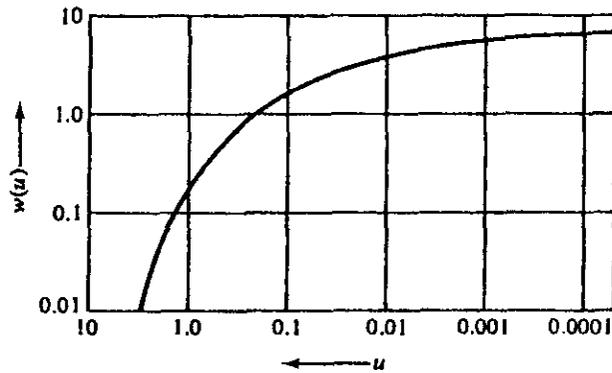
La función de pozo o integral exponencial se obtiene de la serie:

$$W(u) = -0.5572 - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \times 2!} + \frac{u^3}{3 \times 3!} - \frac{u^4}{4 \times 4!} + \dots$$

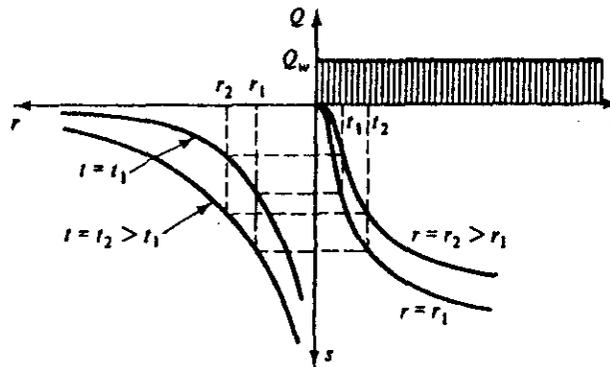
Para valores pequeños de u , por decir $u < 0.01$, la serie puede aproximarse con los primeros dos términos (Cooper y Jacob, 1946; Jacob, 1950):

$$s(r, t) \cong \frac{Q_w}{4\pi T} \left(-0.5572 - \ln \frac{r^2 S}{4Tt} \right) = \frac{Q_w}{4\pi T} \ln \frac{2.25Tt}{r^2 S} \quad (II.58)$$

La ecuación (II.58) es el *Modelo de Jacob*.



(a)



(b)

Figura 9. (a) Abatimiento $s(r, t)$ en un acuífero confinado infinito.
(b) Curva tipo para un acuífero confinado.

La función de pozo $W(u)$ definida anteriormente se obtiene de la siguiente manera

Sea $\gamma = 0.5772\dots$ y sea $\int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma$ vamos a demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx + \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx$$

Resolvemos por partes la última integral de esta expresión y obtenemos:

$$\int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = -e^{-x} \ln x \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \text{ el segundo término es cero (Regla de$$

L'Hopital) lo que resulta $\int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx$ ahora aplicamos integración por partes al primer término de esta última expresión

$\int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = (e^{-x} - 1) \ln x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \ln x dx$ el segundo término de esta expresión también es cero pues el término $(e^{-x} - 1)$ tiene un orden de convergencia de dos (9(2)) por lo que concluimos que

$$\int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma \text{ es decir,}$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx + \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma$$

Ahora resolveremos la Función de pozo $W(u)$ o Función Exponencial:

$$W(u) = \int_{x=u}^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = -0.5772\dots - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

Sea

$$W(u) = \int_{x=u}^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx + \int_u^0 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx + \int_u^1 \frac{1}{x} dx$$

de aquí tenemos que los dos primeros términos son igual a $-0.5772\dots$, es decir

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = -\gamma = -0.5772\dots \text{ y las soluciones para los dos últimos}$$

términos se obtienen mediante una integración de desarrollo en serie y una

$$\text{integración directa: } \int_u^0 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx = u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots \text{ y } \int_u^1 \frac{1}{x} dx = -\ln u$$

por lo que tenemos la Función de Pozo resuelta.

De las Ecuaciones (II.57) o (II.58), se observa que las líneas equipotenciales ($s = \text{constante}$) son círculos con centro en el pozo, descritos por:

$$x^2 + y^2 = \frac{2.25Tt}{S} e^{\left(\frac{4\pi Ts}{Q_u}\right)} \quad (\text{II.59})$$

Reescribiendo la Ecuación (II.58) en la forma:

$$s = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \frac{1.5(tT/S)^{\frac{1}{2}}}{r} \quad (\text{II.60})$$

y comparándola con la Ecuación (II.6) podemos definir el radio de influencia R (esto es, a una distancia donde $s=0$) mediante:

$$R = 1.5(tT/S)^{\frac{1}{2}} = (2.25T/S)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.61})$$

Este resultado es algo diferente al dado por las Ecuaciones (II.9) o (II.10). Para grandes periodos de tiempo, se sigue de la Ecuación (II.58) que entre dos puntos situados a distancias r_1 y r_2 , tendremos:

$$s_1 - s_2 = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{II.62})$$

la cual es la Ecuación para flujo en estado estacionario (II.5). Haciendo $r_1 = r_w$ y $r_2 = r$, obtenemos la Ecuación (II.3).

II.5.2 Abatimiento en un acuífero infinito, $Q_w = Q_w(t)$. La Ecuación (II.50) y las condiciones de frontera dadas en la Ecuación (II.51) son lineales, por lo tanto el principio de superposición es aplicable, de acuerdo con esto, la Ecuación (II.55) nos da el abatimiento para $Q_w = Q_w(t)$ por la superposición de la Ecuación (II.54). Para el caso en que Q_w varía con el tiempo (ver la Figura 10-c), el abatimiento resultante puede calcularse sumando los incrementos Δs (positivos y negativos) resultante de los incrementos de ΔQ_w .

Cada disminución parcial o completa en la razón de bombeo, produce una recuperación de la presión alrededor del pozo. Si un pozo bombea a una razón Q_w^1 desde $t = 0$ hasta $t = t_1$ y luego cambia a Q_w^2 , entonces el abatimiento en cualquier instante de tiempo es:

$$s(r, t) = \frac{Q_w^1}{4\pi T} W\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right) : t \leq t_1$$

$$s(r, t) = \frac{Q_w^1}{4\pi T} W\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right) + \frac{Q_w^2 - Q_w^1}{4\pi T} W\left(\frac{Sr^2}{4T(t-t_1)}\right) : t > t_1 \quad (\text{II.63})$$

Cuando un pozo bombea Q_w^1 durante un tiempo t_1 y luego se cierra el bombeo, se obtiene un abatimiento residual $s(r, t)$ para $t > t_1$, es decir $Q_w^2 = 0$:

$$s(r, t) = \frac{Q_w^1}{4\pi T} W\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right) - W\left(\frac{Sr^2}{4T(t-t_1)}\right) : t > t_1 \quad (\text{II.63a})$$

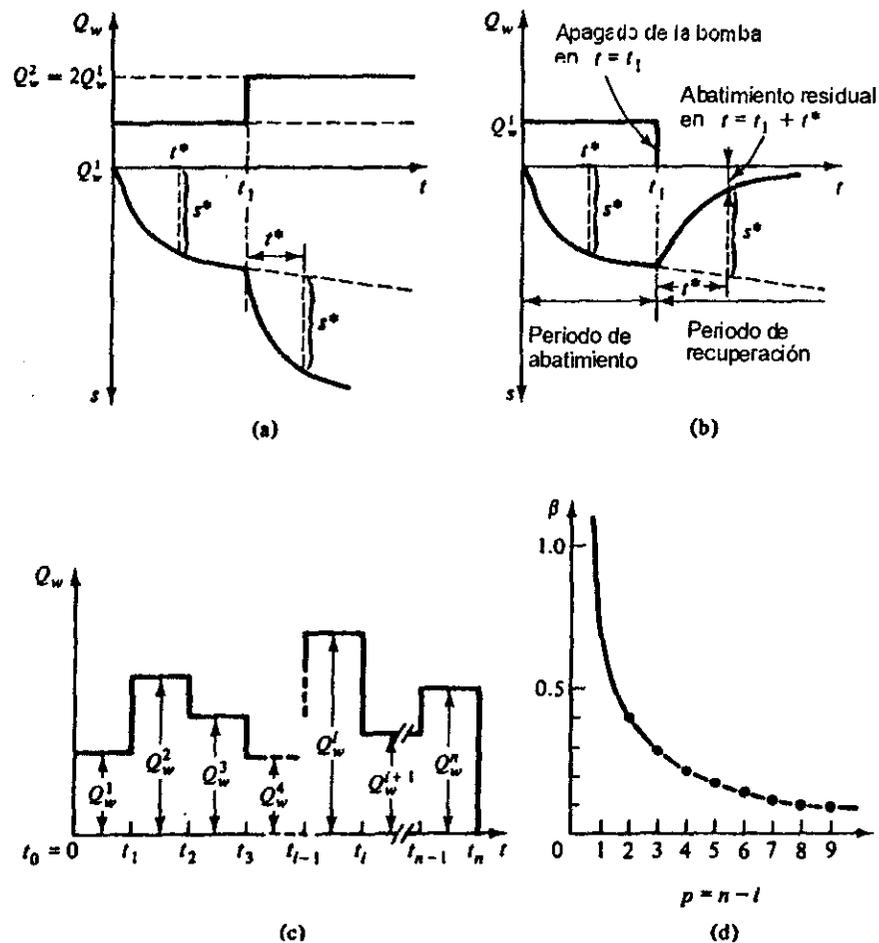


Figura 10. Representación gráfica de las curvas de abatimiento cuando la razón de descarga varía con respecto al tiempo.

La Figura 10-a muestra $s(r, t)$ para el caso en que $Q_w^{(2)} = 2Q_w^{(1)}$. En la Figura 10-b se muestra el caso en que se para de bombear en t_1 , esto es, $Q_w^{(2)} = 0$. Para un pozo bombeando a una razón constante no conocida (Ecuación II.57), el caso en que $Q_w^{(2)} = 2Q_w^{(1)}$ se obtiene por la superposición de dos pozos imaginarios: el primero empieza a bombear en $t = 0$ a una razón de $Q_w^{(1)}$ y el otro empieza en t_1 y bombea $Q_w^{(1)}$. Para el caso en que uno de los pozos se para el segundo pozo imaginario es de recarga e inyecta $Q_w^{(1)}$ empezando en t_1 . Se observa que en cada caso, el incremento en el abatimiento, positivo o negativo, es con respecto al producido por el primer pozo que continua en operación.

En la práctica un acuífero con área infinita no existe y esta suposición es válida ya que el cono de depresión no alcanza las fronteras del acuífero. Más adelante veremos el caso contrario.

Si un pozo bombea a una razón Q_w^1 desde $t = t_0$ hasta $t = t_1$, y luego a una razón Q_w^2 desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$ y en general Q_w^i desde t_{i-1} hasta

$t_i (i=1,2,\dots,n)$, como en la Figura 10-c, entonces el abatimiento en cualquier instante de tiempo $t (\equiv t_n)$ esta dado por:

$$s(r,t) = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^n (Q_w^i - Q_w^{i-1}) W \left\{ \frac{Sr^2}{4T(t-t_{i-1})} \right\}; t_{n-1} < t \leq t_n \quad (II.64)$$

Para $t = t_n, W(\infty) = 0$ la Ecuación (II.64) puede escribirse:

$$s(r,t_n) = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^n Q_w^i \left[W \left\{ \frac{Sr^2}{4T(t-t_{i-1})} \right\} - W \left\{ \frac{Sr^2}{4T(t-t_i)} \right\} \right] \quad (II.64a)$$

Si $t_i - t_{i-1} = \Delta t = \text{constante}$, entonces la Ecuación (II.64a) para $t = t_n$ es:

$$\begin{aligned} s(r,t_n) &= \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^n Q_w^i \left[W \left\{ \frac{Sr^2}{4T(n-i+1)\Delta t} \right\} - W \left\{ \frac{Sr^2}{4T(n-i)\Delta t} \right\} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n Q_w^i \beta(n-i) \end{aligned} \quad (II.64b)$$

donde $n\Delta t = t_n, \beta(p) = [W\{Sr^2/4T(p+1)\Delta t\} - W\{Sr^2/4Tp\Delta t\}]/4\pi T$ y $p=0, W(\infty)=0, u = Sr^2/4Tp\Delta t = \infty$. En la Figura 10-d se da un ejemplo de $\beta(p)$, esta función muestra cómo disminuye rápidamente la contribución del i -ésimo período en el intervalo $[t_i, t_n]$.

Cuando $u < 0.01$ se aplica la Ecuación (II.12) y el abatimiento residual después de un paro total de bombeo (en la Figura 10-b se muestra la curva de recuperación) es:

$$s(r,t) = \frac{Q_w^1}{4\pi T} \left[\ln \frac{2.25Tt}{Sr^2} - \ln \frac{2.25T(t-t_1)}{Sr^2} \right] = \frac{Q_w^1}{4\pi T} \ln \frac{t}{t-t_1} \quad (II.65)$$

con $s(r,t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. De esta ecuación se sigue que el efecto del bombeo puede persistir por largo tiempo. En la mayoría de los casos, el tiempo es relativamente corto.

II.5.3 Abatimiento en un acuífero finito, $Q_w = Q_w(t)$. Sea un pozo localizado en el centro de un acuífero circular de radio externo r_e . La Ecuación (II.50) describe la distribución de potencial $\phi(r,t)$ en el acuífero, asumiendo flujo simétrico radial convergente o divergente. Las condiciones iniciales y de frontera a considerar son:

$$\left. \begin{aligned} t=0, r_w \leq r \leq r_e, \phi &= \phi(r,0) = g(r) \\ t \geq 0, r = r_w, \phi &= f_1(t) \\ r = r_e, \phi &= f_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (II.66)$$

Para derivar la solución, se aplica el principio de superposición y asumimos que podemos resolver para ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 de los siguientes tres subproblemas:

$$\left. \begin{aligned} \text{Una solución } \phi_0 &= \phi_0(r,t), \text{ para } g(r) \neq 0, f_1(t) \equiv 0, f_2(t) \equiv 0 \\ \text{Una solución } \phi_1 &= \phi_1(r,t), \text{ para } g(r) \equiv 0, f_1(t) = 1, f_2(t) \equiv 0 \\ \text{Una solución } \phi_2 &= \phi_2(r,t), \text{ para } g(r) \equiv 0, f_1(t) \equiv 0, f_2(t) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (II.67)$$

Una vez halladas las soluciones, satisfacen:

$$\phi(r, t) = \phi_0(r, t) + \int_0^t \left[f_1(\tau) \frac{\partial \phi_1(r, t - \tau)}{\partial t} + f_2(\tau) \frac{\partial \phi_2(r, t - \tau)}{\partial t} \right] d\tau \quad (II.68)$$

Muskat (1973) dio soluciones para ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 en términos de series infinitas de funciones de Bessel para los casos en que $r_w \neq 0$ y $r_w \rightarrow 0$.

II.5.4 Un pozo artesiano en un acuífero infinito. Cuando se tiene un pozo artesiano en un acuífero infinito, el abatimiento s_w se mantiene constante mientras que su descarga, Q_w varía con el tiempo. La Ecuación (II.50) gobierna este tipo de flujo con condiciones iniciales y de frontera dadas por:

$$\phi(r, 0) = \phi_0, \quad r_w \leq r \leq \infty$$

$$\phi(\infty, t) = \phi_0, \quad t > 0$$

$$\phi(r_w, t) = \phi_0 - s_w = \text{constante} \quad t > 0$$

La solución dada por Jacob y Lohman (1952) es:

$$s_w = \frac{Q_w}{2\pi T} \frac{1}{G(1/4u_w)}; \quad Q_w(t) = 2\pi T s_w G(1/4u_w) \quad (II.69)$$

donde:

$$u_w = Sr_w^2/4Tt; \quad G(1/4u_w) = \frac{1}{\pi u_w} \int_0^\infty x e^{-x^2/4u_w} \left\{ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} [K_0(x)/J_0(x)] \right\} dx$$

J_0, K_0 son funciones de Bessel de primera y segunda clase y orden cero respectivamente.

II.5.5 Efectos del almacenamiento en un pozo de diámetro finito.

En las discusiones antes hechas, con excepción de un caso, hemos supuesto que el radio del pozo es infinitesimalmente pequeño. Cuando se considera un pozo con radio finito, la capacidad de almacenamiento del mismo se desprecia, es decir, se asume que su descarga es $Q_w = 2\pi T r \partial \phi / \partial r$, evaluado en $r = r_w$; sin embargo, cuando se tiene un pozo con un diámetro relativamente grande, se cambia la condición de frontera en el pozo, de la Figura 11:

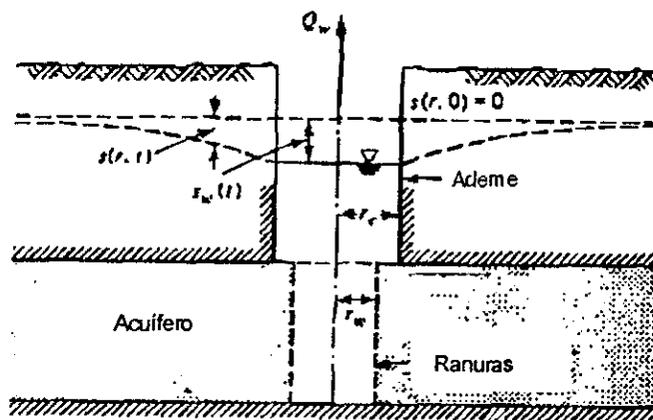


Figura 11. Un pozo con diámetro grande.

$$t > 0 \quad 2\pi r_w T \left. \frac{\partial s(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_w} - \pi r_c^2 \frac{\partial s_w}{\partial t} = -Q_w \quad (II.70)$$

donde r_c es el radio del ademe del pozo en el intervalo en que s_w ocurre, y r_w es el radio efectivo del pozo. Si despreciamos las pérdidas en el pozo, tenemos que:

$$s(r_w, t) = s_w(t) \quad (II.71)$$

de lo contrario, $\phi(r_w, t) - \phi(r, t) = s_w(t) - s(r_w, t) = \text{pérdidas en la tubería}$.

Resolviendo la Ecuación (II.52) con las condiciones de frontera $s(r_w, t) = s_w(t)$ y $s(\infty, t) = 0, s(r, 0) = 0$ para $r \geq r_w$, y $s_w(0) = 0$ se obtiene:

$$s = \frac{2Q_w \alpha}{\pi^2 T} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\beta^2 / u_w}\right) \{J_0(\beta r / r_w) [\beta Y_0(\beta) - 2\alpha Y_1(\beta)] - Y_0(\beta r / r_w) [\beta J_0(\beta) - 2\alpha J_1(\beta)]\} [1 / \beta^2 \Delta(\beta)] \alpha \beta \quad (II.72)$$

donde:

$\alpha = r_w^2 S / r_c^2, u_w = r_w^2 S / 4Tt, \Delta(\beta) = [\beta J_0(\beta) - 2\alpha J_1(\beta)]^2 + [\beta Y_0(\beta) - 2\alpha Y_1(\beta)]^2$, J_i y Y_i son funciones de Bessel de primera y segunda clase e i -ésimo orden respectivamente. El abatimiento adentro del pozo es:

$$s_w = \frac{Q_w}{4\pi T} F(u_w, \alpha) \quad (II.73)$$

donde $F(u_w, \alpha) = (32\alpha^2 / \pi^2) \int_0^\infty \left[\left(1 - e^{-\beta^2 / u_w}\right) / \beta^3 \Delta(\beta) \right] \alpha \beta$ En la Tabla 1 se dan

algunos valores de $F(u_w, \alpha)$ (Papadopoulos y Cooper, 1967).

Tabla 1. Función de pozo $F(u_w, \alpha)$ para diámetros grandes.

u_w	$\alpha=10^{-1}$	$\alpha=10^{-2}$	$\alpha=10^{-3}$	$\alpha=10^{-4}$	$\alpha=10^{-5}$
10	9.755x10 ⁻³	9.976x10 ⁻⁴	9.998x10 ⁻⁵	1.000x10 ⁻⁵	1.000x10 ⁻⁵
1	9.192x10 ⁻²	9.914x10 ⁻³	9.991x10 ⁻⁴	1.000x10 ⁻⁴	1.000x10 ⁻⁵
5x10 ⁻¹	1.767x10 ⁻¹	1.974x10 ⁻²	1.997x10 ⁻³	2.000	2.000
2	4.062	4.890	4.989	4.999	5.000
1	7.336	9.665	9.966	9.997	1.000x10 ⁻⁴
5x10 ⁻²	1.260x10 ⁰	1.896x10 ⁻¹	1.989x10 ⁻²	1.999x10 ⁻³	2.000
2	2.303	4.529	4.949	4.995	5.000
1	3.276	8.520	9.834	9.984	1.000x10 ⁻³
5x10 ⁻³	4.255	1.540x10 ⁰	1.945x10 ⁻¹	1.994x10 ⁻²	2.000
2	5.420	3.043	4.725	4.972	4.998
1	6.212	4.545	9.069	9.901	9.992
5x10 ⁻⁴	6.960	6.031	1.688x10 ⁰	1.965x10 ⁻¹	1.997x10 ⁻²
2	7.866	7.557	3.523	4.814	4.982
1	8.572	8.443	5.526	9.340	9.932
5x10 ⁻⁵	9.318	9.229	7.631	1.768x10 ⁰	1.975x10 ⁻¹
2	1.024x10 ¹	1.020x10 ¹	9.676	3.828	4.861
1	1.093	1.087	1.068x10 ¹	6.245	9.493
5x10 ⁻⁶	1.163	1.162	1.150	8.991	1.817x10 ⁰
2	1.255	1.254	1.249	1.174x10 ¹	4.033
1	1.324	1.324	1.321	1.291	6.779
5x10 ⁻⁷	1.393	1.393	1.392	1.378	1.013x10 ¹
2	1.485	1.485	1.484	1.479	1.371
1	1.554	1.554	1.554	1.551	1.513
5x10 ⁻⁸	1.623	1.623	1.623	1.622	1.605
2	1.705	1.705	1.705	1.714	1.708
1	1.784	1.784	1.784	1.784	1.781
5x10 ⁻⁹	1.854	1.854	1.854	1.854	1.851
2	1.945	1.945	1.945	1.945	1.940
1	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015

II.6 Flujo en estado transitorio a un pozo en un acuífero freático. El flujo radialmente convergente a un pozo completamente penetrante se describe mediante la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{S_0}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (II.74)$$

donde S_0 es el almacenamiento específico del acuífero debido a las propiedades elásticas de la matriz sólida y el agua. Las condiciones de frontera a considerar son: $\phi = \phi_0$ cuando $r \rightarrow \infty$, $\partial \phi / \partial z = 0$ sobre la capa impermeable del acuífero, $Q_w = \text{constante} = \int_0^{h_w(t)} 2\pi r_w K (\partial \phi / \partial r) dz$ en $r = r_w$, $0 \leq z \leq h_w$ y $\phi = z$ en $r = r_w$, $h_w \leq z \leq h_s$ (frente de infiltración). Despreciando el almacenamiento elástico (para un acuífero freático, $n_e \gg BS_0$), el lado derecho de la Ecuación (II.74) es cero. Como las condiciones de frontera a lo largo del acuífero freático son no lineales y la forma y posición de la superficie freática son desconocidas (es parte de la solución buscada), no es posible resolver analíticamente este problema. Empleando las suposiciones hechas por Dupuit, reemplazamos la Ecuación (II.74) por:

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{2S}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (II.75)$$

aquí S es el coeficiente de almacenamiento en un acuífero freático (o la producción específica, o porosidad efectiva n_e). Ahora la Ecuación (II.75) es no lineal en h y tiene la ventaja de que ya están consideradas las condiciones de frontera no lineales del acuífero freático. La variable es $h = h(r, t)$ en vez de $\phi = \phi(r, z, t)$. Es importante recordar que para obtener la Ecuación (II.75) asumimos que (1) S es constante, (2) el agua sale instantáneamente desde el manto aunque la superficie freática disminuya, y (3) las descargas son linealmente proporcionales a los cambios en el almacenamiento. Sustituyendo $h = H_0 - s$ en la Ecuación (II.75) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'}{\partial r} = \frac{H_0}{(H_0 - s)} \frac{S}{KH_0} \frac{\partial s'}{\partial t}; s' = s - \frac{s^2}{2H_0}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{H_0 - s}{H_0} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (II.76)$$

Denotando $T = KH_0 = \text{transmisividad inicial}$ y $S' = SH_0 / (H_0 - s) = \text{coeficiente de almacenamiento aparente}$, y asumiendo que S' y T son constantes, la Ecuación (II.76) nos queda:

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'}{\partial r} = \frac{S'}{T} \frac{\partial s'}{\partial t} \quad (II.77)$$

la cual es lineal en s' . Esta suposición da una buena aproximación ya que $s \ll H_0$.

La solución para esta ecuación esta dada por la Ecuación (II.57) solo que reemplazamos s y S por s' y S' respectivamente:

$$s' = \frac{Q_w}{4\pi T} W\left(\frac{S' r^2}{4Tt}\right) \quad (II.78)$$

y como los abatimientos son muy pequeños comparados con la profundidad promedio del flujo, ($s \ll 0.02H$; Jacob, 1950), de la Ecuación (II.78) tenemos:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (II.79)$$

con $T = KH$, donde H es la profundidad promedio del flujo. La solución para $s = s(r, t)$ también esta dada por la Ecuación (II.57). Si asumimos que los gradientes en el nivel del agua son pequeños, más o menos $(\partial h / \partial r) \ll (h/r)$ o $(\partial h / \partial r)^2 \ll h \partial^2 h / \partial r^2$, de la Ecuación (II.75) obtenemos la Ecuación (II.78) haciendo $T = Kh$.

Boulton (1954) dio una solución aproximada para el abatimiento en un acuífero freático con flujo transitorio considerando $Q_w = \text{constante}$. Sugirió que cuando los abatimientos son pequeños ($s_{max} = H_0 - h_w < 0.5H_0$); ver Figura 3; las condiciones e frontera no lineales en la superficie freática se aproximan mediante:

$$-K \frac{\partial \phi(r, h, t)}{\partial z} = n_e \frac{\partial \phi(r, h, t)}{\partial t} \quad (II.80)$$

Esta ecuación puede interpretarse como la manera en que los niveles de agua bajan debido al flujo vertical.

Reemplazando la expresión exacta de la constante de descarga del pozo (Boulton, 1954):

$$Q_w = \int_0^{h_w(t)} 2\pi K (\partial \phi / \partial r)_{r=r_w} dz \quad \text{por} \quad Q_w = 2\pi K H_0 \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (II.80a)$$

es decir, un pozo infinitesimalmente angosto con una descarga Q_w , penetrando uniformemente a lo largo de la profundidad de saturación H_0 aunque la actual longitud de saturación en el frente del pozo varíe durante el bombeo. Finalmente, se asume que la contribución del flujo de agua y la compresión del acuífero se pueden despreciar, excepto durante el primer período de bombeo, es decir, el lado derecho de la Ecuación (II.74) es cero. Podemos notar que aunque Boulton consideró condiciones de frontera no estables resolvió para $\phi = \phi(r, z, t)$ y obtuvo la solución:

$$H_0 - \phi(r, z, t) = \frac{Q_w}{2\pi T} \int_0^\infty \frac{J_0(\chi r / H_0)}{\chi} \left\{ 1 - \frac{\cosh \chi z / H_0}{\cosh \chi} e^{-\tau \chi \tanh \chi} \right\} d\chi \quad (II.80b)$$

y

$$s(r, t) = H_0 - h(r, t) = \frac{Q_w}{2\pi T} V(\rho, \tau) \equiv \frac{Q_w}{2\pi T} \int_0^\infty \frac{J_0(\chi \rho)}{\chi} \{ 1 - e^{-\tau \chi \tanh \chi} \} d\chi \quad (II.80c)$$

donde $\rho = r/H_0$, $\tau = Kt/n_e H_0$, $T = KH_0$. Para minimizar los errores involucrados al obtener la Ecuación (II.80c), aplicamos el factor de corrección C_f :

$$s = \frac{Q_w}{2\pi T} (1 + C_f) V(\rho, \tau) \quad (II.80d)$$

donde C_f depende de $\rho, \tau, r_w/H_0$ y Q_w/H_0^2 .

Los valores para $V(\rho, \tau)$, la función de pozo por gravedad; se pueden aproximar mediante:

Para $\tau < 0.05$

$$V(\rho, \tau) \approx \sinh^{-1}(1/\rho) + \sinh^{-1}(\tau/\rho) - \sinh^{-1}[(1 + \tau)/\rho]$$

Para $\tau > 5$

$$V(\rho, \tau) \approx \frac{1}{2} W(\rho^2/4\tau) = \frac{1}{2} W(u); u = n_e r^2/4Tt$$

donde $W(u)$ es la función de pozo de un acuífero confinado.

Para $\tau < 0.01$

$$V(\rho, \tau) \approx \sinh^{-1}(\tau/\rho) - \tau/\sqrt{1 + \rho^2}$$

Para $\tau < 0.01$ y $\tau/\rho > 10$

$$V(\rho, \tau) \approx Ln(2\tau/\rho)$$

Para los niveles de abatimiento en el pozo de bombeo, Boulton (1954) sugirió para $\tau < 0.05$ calcular el abatimiento mediante la Ecuación (II.80d), con $\rho \rightarrow \rho_w = r_w/H_0$ y $h \rightarrow h_w$; para $0.05 < \tau < 5$ el abatimiento puede calcularse por:

$$s_w = H_0 - h_w = \frac{Q_w}{2\pi T} (m - \ln \rho_w) \quad (II.81)$$

donde:

τ	0.05	0.2	1.00	5.00
M	-0.043	0.087	0.512	1.288

Y para valores intermedios se interpolan.

Para $\tau > 5$ tenemos:

$$H_0^2 - h_w^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln \left(\frac{1.5\sqrt{\tau}}{\rho_w} \right) = \frac{Q_w}{2\pi K} \ln \frac{2.25Tt}{n_e r_w^2} \quad (II.82)$$

El abatimiento para un acuífero anisotrópico puede calcularse sustituyendo τ por $\tau' = K_z t/n_e H_0$ y ρ por $\rho' = (r/H_0) (K_z/K_r)^{1/2}$. Para los abatimientos en los pozos de observación ubicados a cierta distancia del pozo de bombeo consideraremos que en la región $r > 1.5H_0$, las líneas equipotenciales son prácticamente verticales y que el abatimiento promedio es igual al abatimiento del nivel del agua dado por la Ecuación (II.80d), (Hantush, 1964).

En la región comprendida por $r < 1.5H_0$ se sugiere para $(H_0 - h_w) < 0.5H_0$ y $t > 30r^2 n_e/T$:

$$H_0^2 - \tilde{h}^2 = (Q_w/2\pi K)W(u); \quad u = n_e r^2/4Tt; \quad T \approx KH_0 \quad (II.83)$$

donde \tilde{h} es la presión promedio definida por $\tilde{h} = (1/h) \int_0^h \phi(r, t) dz$ ($\tilde{h} < h$). Para $u < 0.05$ o $t > 5r^2 n_e/T$:

$$H_0^2 - \tilde{h}^2 = \frac{Q}{2\pi K} \ln \frac{2.25Tt}{n_e r^2} \quad (II.84)$$

Si comparamos las Ecuaciones (II.83) y (II.84):

$$H_0^2 - \tilde{h}^2 = (H_0 - \tilde{h})(H_0 + \tilde{h}) = s(H_0 + H_0 - s) = 2H_0 s(1 - s/2H_0)$$

Si $s \ll 0.02H_0$ podemos aproximarla por $2H_0 s$ de tal manera que la fórmula de Theis (Ecuación II.57) y Jacob (Ecuación II.58) se pueden aplicar.

Boulton (1965) resolvió el caso en que tenemos un pozo de bombeo en un acuífero infinito el cual tiene un abatimiento constante. Las condiciones de frontera no lineales exactas en la superficie freática se reemplazan por las dadas en la Ecuación (II.76) y se resumen en la Figura 3 de la cual tenemos:

$$\left. \begin{aligned} t=0; \quad r \geq r_w, \quad 0 \leq z \leq H_0, \quad \phi = H_0 \\ t>0; \quad r = r_w, \quad 0 \leq z \leq h_w, \quad \phi = h_w \\ r \rightarrow \infty, \quad 0 \leq Z \leq H_0, \quad \phi \rightarrow H_0 \\ r \geq r_w, \quad z=0, \quad \partial\phi/\partial z = 0 \\ r = r_w, \quad h_w \leq z \leq h_s, \quad \phi = z \\ r \geq r_w, \quad z = h, \quad n_e \partial\phi/\partial t + K \partial\phi/\partial z = 0 \\ Q_w = 2\pi r_w K \int_0^{h_w} (\partial\phi/\partial z)_{r=r_w} dz \end{aligned} \right\} \quad (II.85)$$

Al resolver la Ecuación (II.74) vemos que el lado derecho de ésta vale cero, de tal manera que la dependencia del tiempo de ϕ se introduce cuando se consideran las condiciones de frontera de la superficie freática. Boulton llegó a la solución:

$$Q_w = \frac{8}{\pi} KH_0^2 \int_0^\infty \frac{\cosh \chi - \cosh(\chi h_w/H_0)}{\chi^3 \cosh \chi} \times \frac{e^{-\tau\chi \tanh \chi}}{J_0^2(\rho_w \chi) + Y_0^2(\rho_w \chi)} d\chi \quad (II.86)$$

donde $\rho = r/H_0$; $\tau = Kt/n_e H_0$ y J_0 y Y_0 son funciones de Bessel de primera y segunda clase y orden cero respectivamente. La Ecuación (II.86) puede escribirse como:

$$Q_w = \pi KH_0^2 [1 - (h_w/H_0)^2] G', \quad \text{o} \quad H_0^2 - h_w^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \frac{1}{G'} \quad (II.87)$$

donde G' está definida por la Ecuación (II.86). Para $\tau \gg 1$, $1/G' = \frac{1}{2} \ln(2.25KH_0 t/n_e r_w^2)$. Para valores grandes de t , G' es idéntica a G de la Ecuación (II.69). Para abatimientos suficientemente pequeños (por decir s_w/H_0

$\ll 1$), la descarga está dada por: $Q_w = 2\pi T s_w G'$, $T = KH_0$, la cual es idéntica a la Ecuación (II.66).

• Para tiempos largos, obtenemos:

$$H_0^2 - h_w^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln\left(\frac{R}{r_w}\right), \quad R = 1.5H(Kt/n_e H)^{1/2} \quad (\text{II.88})$$

la cual es idéntica a la Ecuación de Dupuit-Forchheimer (II.22), pero el radio de influencia depende del tiempo.

Boulton asumió que la cantidad de agua extraída del almacenamiento en un acuífero freático (por unidad de área horizontal) debido a un incremento del abatimiento Δs durante el intervalo de tiempo $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ consiste de dos partes: (i) un volumen de agua, $S\Delta s$, que sale instantáneamente del almacenamiento, y (ii) una extracción retardada al tiempo $t > \tau$ desde que empieza a bombear, dada por $\alpha\Delta s \times S' e^{-\alpha(t-\tau)}$, donde α es un parámetro empírico (igual al recíproco al índice de retraso; de dimensiones T^{-1} y s' es el coeficiente de almacenamiento definido como el volumen total de la producción retrasada de almacenamiento por unidad de abatimiento y por unidad de área horizontal (comúnmente referida como coeficiente de producción específico).

De acuerdo a esto, la ecuación diferencial parcial que gobierna este flujo es:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} + \alpha \frac{S'}{t} \int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \quad (\text{II.89})$$

donde τ es el tiempo transcurrido desde que empieza el almacenamiento retrasado. Boulton (1963) resolvió esta ecuación y obtuvo expresiones para el abatimiento la cual toma en cuenta el almacenamiento retrasado:

$$s = \frac{Q_w}{4\pi t} W\left(u_{ay}, \frac{r}{D_t}\right) \quad (\text{II.90})$$

donde $W(u_{ay}, r/D_t)$ es la función de pozo para un acuífero freático con un pozo completamente penetrante.

$$u_{ay} = \begin{cases} u_a = Sr^2/4Tt & (\text{para valores pequeños de } t) \\ u_y = S'r^2/4Tt & (\text{para valores grandes de } t) \end{cases}$$

$$r/D_t = r/\sqrt{T/\alpha S'}$$

$$\alpha = (r/D_t)^2 / 4u_y t$$

$$u_y = u_a / (N - 1)$$

$$N = (S + S') / S$$

II.7 Flujo transitorio a un pozo en un acuífero filtrante. Todas las suposiciones y la nomenclatura de la Figura 5 sobre el tipo de flujo discutido anteriormente son aplicadas en este caso. Si la presión se mantiene constante en la parte superior del estrato semipermeable, y la razón de filtración se considera proporcional al abatimiento del acuífero, la siguiente ecuación diferencial parcial para $\phi = \phi(r, t)$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi_0 - \phi}{\lambda^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II.91})$$

donde S y T son el almacenamiento y la transmisibilidad del acuífero respectivamente y $\lambda = (B'T/K')^{1/2}$ es el factor de filtración. Al derivar la Ecuación (II.91) se asume que el almacenamiento de la capa semipermeable se desprecia. Algunas veces ϕ_0 se toma como una referencia de la presión, $\phi_0 = 0$. Se asume también que la filtración a través de la capa semipermeable está dada por $K'(\phi_0 - \phi)/B'$ o por $(\phi_0 - \phi)/\sigma'$. Jacob (1946) resolvió la Ecuación (II.91) para $\phi(R, t) = \phi_0 = \text{constante}$ sobre una frontera circular exterior $r = R$. La solución toma la forma de la sumatoria de los abatimientos en estado estacionario, s , dada por la Ecuación (II.43) y, un abatimiento transiente, s' :

$$s' = -\frac{Q_w}{\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_0(r\alpha_n) \exp[-(\alpha_n^2 + c)t] / R^2 \alpha_n^2 J_1^2(R\alpha_n) \times (1 + c/\alpha_n^2) \right\} \quad (\text{II.92})$$

donde $\alpha = t/s$; $c = K'/B'S$; $\alpha/c = \lambda^2$; J_0 y J_1 son funciones de Bessel de primera clase y de orden cero y no respectivamente. Los valores de $(\alpha_n R)$ son las raíces de la ecuación $J_0(\alpha R) = 0$. Para una frontera exterior circular impermeable, s es la suma de la Ecuación (II.44) y:

$$s' = -\frac{Q_w}{\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_0(\alpha_n r) \exp[-(\alpha_n^2 + c)t] / [R^2 \alpha_n^2 J_0'(\alpha_n R) \times (1 + c/\alpha_n^2)] \right\} \quad (\text{II.93})$$

donde $(\alpha_n R)$ es la n -ésima raíz de la ecuación $J_0'(\alpha R) = -J_1(\alpha R) = 0$. Para un acuífero infinito con filtración proporcional al abatimiento, Hantush y Jacob (1955) mostraron que

$$s(r, t) = \frac{Q_w}{4\pi T} \int_{y=u}^{\infty} \frac{1}{y} \exp\left(-y - \frac{r^2}{4\lambda^2 y}\right) dy = \frac{Q_w}{4\pi T} W(u, r/\lambda) \quad (\text{II.94})$$

$$\begin{aligned} s(r, t) &= \frac{Q_w}{4\pi T} \left\{ 2K_0(r/\lambda) - \int_{y=u}^{\infty} \frac{1}{y} \exp(-y - r^2/4\lambda^2 y) dy \right\} \\ &= \frac{Q_w}{4\pi T} [2K_0(r/\lambda) - W(u, r/\lambda)] \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

donde $u = r^2 S/4Tt$, $\alpha = r^2/4\lambda^2 u = Tt/S\lambda^2$.

La Tabla 2 muestra algunos valores seleccionados para la función de pozo para un acuífero filtrante $W(u, r/\lambda)$ tomados de la tabla dada por Hantush (1956, 1961, 1964). La Figura 12 muestra curvas típicas del flujo transitorio.

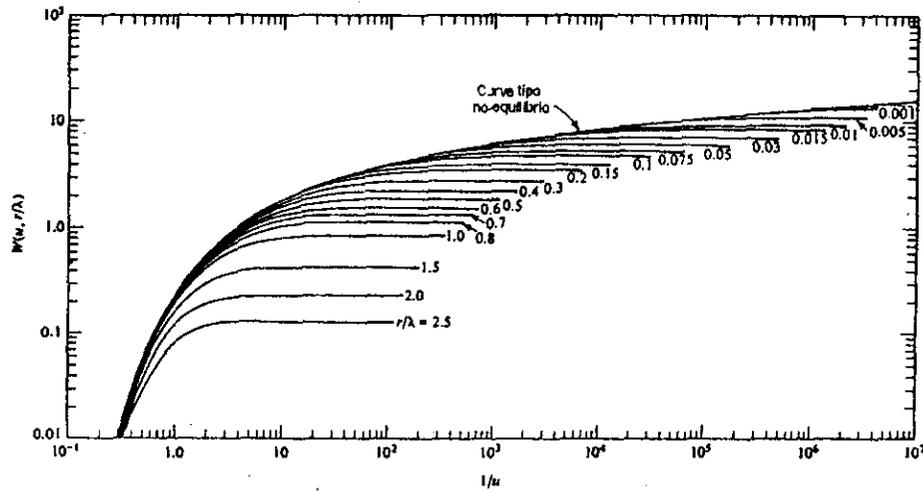


Figura 12. Curva tipo para un acuífero filtrante con flujo en estado no estable.

Tabla 2. Función de pozo para un acuífero filtrante $W(u, r/\lambda)$.

u	r/λ	0	0.002	0.004	0.005	0.007	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
0			12.6611	11.2748	10.8286	10.1557	9.4425	8.0569	6.6731	5.8456	5.2950	4.8541
1×10^{-6}		13.2383	12.4417	11.2711	10.8283	10.1557						
2×10^{-6}		12.5451	12.1013	11.2259	10.8174	10.1554						
5×10^{-6}		11.6289	11.4384	10.9642	10.6822	10.1290	9.4425					
8×10^{-6}		11.1589	11.0377	10.7151	10.5027	10.0602	9.4313					
1×10^{-5}		10.9357	10.8382	10.5725	10.3963	10.0034	9.4176	8.0569				
2×10^{-5}		10.2426	10.1932	10.0522	9.9530	9.7126	9.2961	8.0558				
5×10^{-5}		9.3263	9.3064	9.2480	9.2052	9.0957	8.8827	8.0080	6.6730			
7×10^{-5}		8.9899	8.9756	8.9336	8.9027	8.8224	8.6625	7.9456	6.6726			
1×10^{-4}		8.6332	8.6233	8.5937	8.5717	8.5145	8.3983	6.6828	6.2748	5.7658	5.2749	4.8510
2×10^{-4}		7.9402	7.9352	7.9203	7.8958	7.8800	7.8192	6.5508	6.1917	5.7274	5.2618	4.8478
5×10^{-4}		7.0242	7.0222	7.0163	7.0118	6.9999	6.9750	6.8346	6.3626	5.8011	5.2848	4.8530
7×10^{-4}		6.6879	6.6865	6.6823	6.6790	6.6706	6.6527	6.5508	6.1917	5.7274	5.2618	4.8478
1×10^{-3}		6.3315	6.3305	6.3276	6.3253	6.3194	6.3069	6.2347	5.9711	5.6058	5.2087	4.8292
2×10^{-3}		5.6394	5.6389	5.6374	5.6363	5.6334	5.6271	5.5907	5.4516	5.2411	4.9848	4.7079
5×10^{-3}		4.7261	4.7259	4.7253	4.7249	4.7237	4.7212	4.7068	4.6499	4.5590	4.4389	4.2990
7×10^{-3}		4.3915	4.3915	4.3910	4.3908	4.3899	4.3882	4.3779	4.3374	4.2719	4.1839	4.0771
0.01		4.0378	4.0378	4.0375	4.0373	4.0368	4.0351	4.0285	4.0003	3.9544	3.8920	3.8190
0.02		3.3547	3.3547	3.3545	3.3544	3.3542	3.3536	3.3502	3.3365	3.3141	3.2832	3.2442
0.05		2.4679	2.4679	2.4678	2.4679	2.4677	2.4675	2.4662	2.4613	2.4531	2.4416	2.4271
0.07		2.1508	2.1508	2.1508	2.1508	2.1507	2.1506	2.1497	2.1464	2.1408	2.1331	2.1232
0.10		1.8229	1.8229	1.8229	1.8229	1.8228	1.8227	1.8222	1.8200	2.8164	1.8114	1.8050
0.20		1.2227	1.2226	1.2226	1.2226	1.2226	1.2226	1.2224	1.2215	1.2201	1.2181	1.2155
0.50		0.5598	0.5598	0.5598	0.5598	0.5598	0.5598	0.5597	0.5597	0.5592	0.5587	0.5581
0.70		0.3738	0.3738	0.3738	0.3738	0.3738	0.3738	0.3737	0.3736	0.3734	0.3732	0.3729
1.00		0.2194	0.2194	0.2194	0.2194	0.2194	0.2194	0.2194	0.2193	0.2192	0.2191	0.2190
2.00		0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0489	0.0488
5.00		0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
7.00		0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
8.00		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Hantush (1959,1964) determinó también la distribución de potencial y la variación de descargas con respecto al tiempo para un pozo artesiano en un acuífero homogéneo en el que se presenta o no filtración proporcional al abatimiento. Consideró tres casos de un acuífero homogéneo isotrópico con espesor constante.

I Un pozo artesiano en un acuífero filtrante de área infinita.

II Un pozo artesiano con centro en un acuífero circular sin abatimiento sobre su frontera exterior.

III Un pozo artesiano con centro en un acuífero circular sin flujo a través de su frontera exterior (impermeable)

En todos los casos, la presión piezométrica es constante en el acuífero superior a la capa semipermeable. Una vez que la distribución del abatimiento $s = s(r, t)$ o $\phi = \phi(r, t)$ en la vecindad del pozo artesiano es calculada, la descarga del pozo se determina mediante: $Q_w = 2\pi T r_w \partial s(r_w, t) / \partial r$.

Las siguientes soluciones fueron obtenidas por Hantush (1959) para el

Caso I:

$$\frac{s}{s_w} = K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) / K_0\left(\frac{r_w}{\lambda}\right) + \frac{2}{\pi} \exp(-\alpha r_w^2 / \lambda^2) \int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha \mu^2)}{\mu^2 + [r_w / \lambda]^2} \times \frac{J_0\left(\frac{\mu r}{r_w}\right) Y_0(\mu) - Y_0\left(\frac{\mu r}{r_w}\right) J_0(\mu)}{J_0^2(\mu) + Y_0^2(\mu)} \mu d\mu = Z(\alpha, \rho, \beta) \quad (II.96)$$

$$\alpha = Tt / s r_w^2, \rho = r / r_w, \beta = r_w / \lambda$$

donde la integral infinita se evalúa numéricamente.

Cuando $t \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \infty$ la Ecuación (II.96) se reduce a la Ecuación (II.40) o la Ecuación (II.41) (solución para el flujo en estado estacionario) para $r / \lambda < 0.05$. La descarga del pozo correspondiente al abatimiento descrito por la Ecuación (II.96) es:

$$Q_w = -2\pi T r_w \partial s(r_w, t) / \partial r|_{r=r_w} = 2\pi T s_w G(\alpha, r_w / \lambda) \\ G(\alpha, r_w / \lambda) = (r_w / \lambda) K_1(r_w / \lambda) / K_0(r_w / \lambda) \\ + (4 / \pi^2) \exp[-\alpha (r_w / \lambda)^2] \times \int_0^\infty \frac{\mu \exp(-\alpha \mu^2)}{J_0^2(\mu) + Y_0^2(\mu)} \times \frac{d\mu}{\mu^2 + (r_w / \lambda)^2} \quad (II.97)$$

donde K_1 es la función de Bessel de segunda clase y primer orden. $G(\alpha, \rho, \beta)$ es la función de descarga para un pozo artesiano para acuíferos filtrantes. Cuando α o t tienden a ser muy grandes, obtenemos la descarga de flujo en estado estacionario, o la producción mínima del pozo; bajo las condiciones asumidas. Entonces:

$$Q_w = 2\pi T s_w (r_w / \lambda) K_1(r_w / \lambda) / K_0(r_w / \lambda) \quad (II.98)$$

En la práctica $r_w < \lambda < 0.01$. Entonces las soluciones para flujo en estado estacionario dadas por las Ecuaciones (II.40) y (II.41) se aplican para Q_w .

Hantush (1959) encontró soluciones asintóticas para valores del tiempo cortos y grandes. En el último caso:

$$s \approx [s_w/2K_0(s_w/\lambda)]W(u, r/\lambda) \quad (II.98)$$

donde $W(u, r/\lambda)$ es la función de pozo para un acuífero filtrante dada en la Tabla 2. La descarga del pozo correspondiente es:

$$W_w \approx 4\pi T s_w / W(1/4\alpha, r_w/\lambda) \quad (II.99)$$

que es la misma como la que da el abatimiento en un pozo de radio r_w , descargando por períodos de tiempo t . En otras palabras las razones de descarga al abatimiento en dos pozos aislados uno con descarga constante y el otro con abatimiento constante son iguales para períodos de tiempo suficientemente grandes. Esta misma observación fue hecha en el caso similar en un acuífero confinado (Jacob y Lohman, 1952).

Hantush obtuvo soluciones para los casos II y III. DeWiest (1961, 1963) resolvió el caso en que tenemos flujo transitorio en un acuífero filtrante infinito, con condiciones a la frontera que dependen del tiempo sobre el área de influencia y con diferentes presiones iniciales en el acuífero principal y en la capa semiconfinada superior. Consideró dos casos: (a) un pozo que bombea una descarga constante; un pozo artesiano con abatimiento constante.

Para un pozo en un acuífero filtrante Neuman y Witherspoon (1969, 1969a) dieron soluciones numéricas. Dentro de las consideraciones que se tomaron para deducir la Ecuación (II.91), se asumió que la razón de filtración a través de la capa semiconfinante es proporcional a la disminución de presión en el acuífero principal. Aunque, para el flujo transitorio, tal proporcionalidad es posible solamente si el gradiente hidráulico a través de la capa semiconfinante se ajusta instantáneamente a la disminución de presión en el acuífero. Esta condición puede ser considerada si (i) B' es suficientemente pequeño, (ii) la razón de disminución de presión en el acuífero es suficientemente lento, o (iii) $K'B'/S'$ (coeficiente de difusividad de la capa confinante) es pequeña. En general, además de la filtración, toda el agua del acuífero principal se obtiene también desde el estrato semiconfinante. Hantush (1960, 1964) presentó una teoría en la cual las capas semipermeables que tienen una conductividad hidráulica muy baja, pueden producir una cantidad significativa de agua desde el almacenamiento. De nuevo se asume que el flujo es prácticamente vertical en la capa semiconfinante y horizontal en el acuífero principal porque $K' \ll K$. Sean $\phi' = \phi'(r, z, t)$ la presión piezométrica y $s' = s'(r, z, t)$ el abatimiento en un acuífero semipermeable, y consideramos un acuífero filtrante homogéneo con flujo horizontal y de espesor constante B (ver la Figura 5), entonces las ecuaciones simultáneas que rigen este flujo son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{K'}{T} \frac{\partial s'}{\partial z} \Big|_{z=B} &= \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} \\ K' \frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} &= S'_s \frac{\partial s'}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.100})$$

donde $S'_s (= S'/B')$ es el coeficiente de almacenamiento específico de la capa semipermeable.

Las condiciones iniciales y de frontera son:

$$\left. \begin{aligned} s(r,0) &= 0 & s'(r,z,0) &= 0 \\ s(\infty,t) &= 0 & s'(r,B+B',t) &= 0 \\ \text{para } Q_w &= \text{constante, } \lim_{r \rightarrow 0} (r \partial s / \partial r) &= Q_w / 2\pi T S' & s'(r,B,t) = s(r,t) \\ s_w &= s(r_w,t) = \text{constante (pozo artesiano)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.102})$$

Mencionaremos algunas soluciones asintóticas de este problema dadas por Hantush (1960,1964).

Para períodos de tiempo muy grandes tal que $2B'S'/K'$ y $30\delta_1 r_w^2 / v [1 - (10r_w/\lambda)^2]$, con $r_w/\lambda < 0.1$, $\delta_1 = 1 + S'/3S$, $v = T/S$ y la descarga del pozo Q_w constante, el abatimiento está dado por:

$$s(r,t) = \frac{Q_w}{4\pi T} W(\delta_1 u, r/\lambda) \quad (\text{II.103})$$

donde $W(u, r/\lambda)$ es la función de pozo para un acuífero filtrante (ver Tabla 3).

Para un pozo artesiano $t > 2B'S'/K'$, obtuvo:

$$s(r,t) = s_w Z(\tau/\delta_1, \rho, \beta) \quad (\text{II.104})$$

donde la función Z está definida por la ecuación (II.96) y $\tau = vt/r_w^2$, $\rho = r/r_w$.

Para períodos de tiempo cortos $t \leq B'S'/10K'$, obtuvo:

$$s = \frac{Q_w}{4\pi T} H(u, \beta') \quad (\text{II.105})$$

donde :

$$u = Sr^2/4Tt, \quad \beta' = r/4\lambda \sqrt{S'/S} = r \sqrt{K'S'_s/16TS} \quad \text{y}$$

$$H(u, \beta') = \int_0^\infty (e^{-y}/y) \operatorname{erfc}[\beta' \sqrt{u}/\sqrt{y(y-u)}] dy$$

Los valores de $H(u, \beta')$ fueron dados por Hantush (1964).

II.7.1 Flujo transitorio a un pozo parcialmente penetrante.

Hantush (1957,1961,1964) derivó las soluciones y desarrolló las técnicas de pruebas de bombeo para flujo transitorio hacia pozos parcialmente penetrantes en

acuíferos confinados y filtrantes, despreciando el coeficiente de almacenamiento en la ecuación diferencial parcial de flujo tridimensional de un acuífero confinado, introduciendo el factor de filtración como una condición de frontera en $z = b$, sugirió que la filtración cruza la frontera en $z = B$ y asumió hipotéticamente que se genera en el acuífero principal cuyas capas confinantes se consideran completamente impermeables. La razón de la filtración generada hipotéticamente por unidad de volumen en cada punto del acuífero es $(K'/B')s(r,t)/B$, esto es $q_v(r)$ dividida por B (Ecuación (II.36)). La ecuación que rige éste flujo es

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{S}{\lambda^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (\text{II.109})$$

las condiciones iniciales y de frontera son (ver Figura 13-a).

$$\left. \begin{aligned} s(r, z, 0) = s(\infty, z, t) = 0; \partial s(r, 0, t) / \partial z = \partial s(r, B, t) / \partial z = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} b_s r \partial s / \partial r = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < z < b_1 \\ -Q_w / 2\pi K & \text{para } b_1 < z < b_1 + b_s \\ 0 & \text{para } b_1 + b_s < z < B \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.110})$$

Mencionaremos algunas soluciones dadas por Hantush para el caso en que se tiene un pozo parcialmente penetrante con $b_2 = 0$:

- Para flujo transitorio en un acuífero filtrante tenemos:

$$s = \frac{Q_w}{4\pi T} \left[W(u, r/\lambda) + \frac{2B}{\pi b_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi z}{B} \operatorname{sen} \frac{n\pi b_s}{B} W_n \left(u, \left\{ \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{n\pi r}{B} \right)^2 \right\}^{1/2} \right) \right]$$

$$W_n(u, x) = \int_u^{\infty} \exp \left(-y - \frac{x^2}{4y} \right) \frac{dy}{y} \quad (\text{II.111})$$

- Para flujo estacionario en un acuífero filtrante:

$$s = \frac{Q_w}{2\pi T} \left[K_0(r/\lambda) + \frac{2B}{\pi b_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi z}{B} \operatorname{sen} \frac{n\pi b_s}{B} K_0 \left(\left\{ \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{n\pi r}{B} \right)^2 \right\}^{1/2} \right) \right] \quad (\text{II.112})$$

- Para flujo transitorio en un acuífero confinado:

$$s = \frac{Q_w}{4\pi T} \left[W(u) + \frac{2B}{\pi b_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi z}{B} \operatorname{sen} \frac{n\pi b_s}{B} W_n \left(u, \frac{n\pi r}{B} \right) \right] \quad (\text{II.113})$$

La conclusión más importante de esto es que para propósitos prácticos, $r \geq 1.5B$ y podemos emplear las soluciones derivadas para flujo hacia un pozo completamente penetrante. En el caso que tengamos un acuífero anisotrópico, el rango es $r \geq 1.5B \sqrt{K_z/K_r}$.

II.8 Solución de Boulton. Boulton (1963) hizo suposiciones concernientes a la filtración causada por el abatimiento: él asumió de manera semiempírica que un incremento en el abatimiento Δs a un tiempo t provoca un aumento en el flujo de filtración Δq el cual decrece exponencialmente con respecto al tiempo:

$$\Delta q(\tau) = S' f e^{-f(\tau-t)} \Delta s$$

donde f es un parámetro de dimensiones $[T^{-1}]$, integrando esta ecuación

$$q = \int_0^{\infty} S' f e^{-f(\tau-t)} \Delta s d\tau, \quad q = S' \Delta s$$

donde el término S' es el coeficiente de almacenamiento de la capa superior o inferior del acuífero la cual recarga al acuífero confinado por medio de filtración, de aquí que un abatimiento Δs provoca un abatimiento acumulado $S' \Delta s$. En la mayoría de las veces este flujo no se extrae instantáneamente del acuífero, Boulton sugirió que la solución corresponde a un decaimiento exponencial del flujo de filtración. El modelo que rige este tipo de flujo se obtiene calculando el flujo de filtración F_t para todo instante de tiempo por convolución, es decir, sumando los flujos elementales producidos por los abatimientos desde que se comienza a bombear:

$$\nabla^2 s = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{S'}{T} \int_0^t f e^{-f(t-\tau)} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\tau} d\tau$$

Boulton dio una solución para esta ecuación para valores pequeños de r

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W^*(u, S', f)$$

donde $u = 4Tt/r^2 S$. Si se graficara esta solución observaríamos que al inicio del bombeo la curva de abatimiento concuerda con el modelo de Theis, con parámetros (T, S) luego la curva se aplanando haciendo posible obtener al parámetro f y finalmente la curva vuelve a tomar la forma del modelo de Theis pero desplazada paralelamente con parámetros $(T, S + S\Box)$, esta característica nos sirve para reconocer el tipo de acuífero y además hace posible el cálculo de $S\Box$. Si t es el tiempo en que empieza la curva de Theis desplazada tenemos que $f = 0.561/t$, (Berkaloff, 1966). Este tipo de comportamiento es más frecuente en acuíferos no confinados donde el flujo retrasado se debe a los escurrimientos del medio no saturado cuando el nivel saturado es abatido.

II.8.1 Modelo de Streltsova. Boulton y Streltsova estudiaron un modelo más detallado para este tipo de flujo considerando un acuífero confinado con un pozo de bombeo en un acuitardo (Ver Figura II). Bajo las siguientes suposiciones:

- (1) El acuitardo es homogéneo y con flujo vertical hacia abajo. El agua y el acuitardo son incompresibles: el agua contenida en el acuitardo es por escurrimientos produciendo una disminución del nivel del agua en el acuífero suficientemente pequeña tal que el espesor saturado del acuitardo es constante y el nivel del agua se mantiene fijo. No hay recarga vertical en el acuitardo.

- (2) El acuífero confinado es compresible y anisotrópico, las conductividades hidráulicas vertical y horizontal son constantes y subyace sobre una capa impermeable horizontal. El pozo bombea a una razón constante en el instante $t=0$ y el pozo es parcialmente penetrante y el radio del pozo se considera infinitesimalmente pequeño.

Las ecuaciones y condiciones de frontera son:

$$K_r \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \right) + K_z \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = S_s \frac{\partial s}{\partial t}, \quad 0 < z < e$$

el abatimiento del nivel del agua

$$K \frac{\partial s'}{\partial z} = -\omega'_d \frac{\partial s'}{\partial t}, \quad z = e + e'$$

en la interfase del acuitardo y el acuífero

$$K_z \frac{\partial s}{\partial z} = K' \frac{\partial s'}{\partial z}, \quad z = e \quad \forall r, t$$

y en la capa impermeable

$$\frac{\partial s}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad \forall r, t$$

A lo largo del pozo

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi K_r (b-a)}, \quad a < z < b, \quad \forall t$$

A lo largo de la sección que no abarca al frente del pozo

$$\frac{\partial s}{\partial r} = 0, \quad 0 < z < a \quad \text{y} \quad b < z < e, \quad r = 0, \quad \forall t$$

en el infinito

$$s = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \forall z, t$$

y las condiciones iniciales

$$s = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \forall r, z$$

donde s, s' son los abatimientos en el acuífero y el acuitardo respectivamente; K_r, K_z son las conductividades hidráulicas horizontal y vertical del acuífero; S_s es el coeficiente de almacenamiento específico del acuífero y $S = S_s e$ es el coeficiente de almacenamiento; K', ω'_d son la conductividad hidráulica vertical y la producción específica del acuitardo; e y e' es el espesor del acuífero y del acuitardo; a y b indican la posición del frente del pozo (ver Figura X).

El abatimiento en el acuífero está dado por

$$s(r, z, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty 4y J_0(y\beta^{1/2}) \left[u_0(y) + \sum_1^\infty u_n(y) \right] dy$$

y la transmisividad del acuífero

$$T = K_r e$$

y

$$\beta = (K_z / K_r) (r^2 / e^2)$$

$$\sigma = \frac{S}{\omega' \alpha}$$

$$C = K'e/K_z e'$$

y

$$u_0(y) = \left[1 - e^{-t, \beta(y^2 - \gamma_0^2)} \right] \left\{ \sinh(\gamma_0 b/e) - \sinh(\gamma_0 a/e) \right\} \times \cosh(\gamma_0 z/e)$$

$$\left\{ (b-a)/e (y^2 - \gamma_0^2) x_0 \cosh(\gamma_0) \right\}^{-1}$$

donde γ_0 es la raíz positiva de la ecuación

$$(y^2 - \gamma_0^2 - C\sigma) \gamma_0 \sinh(\beta_0) + C(y^2 - \gamma_0^2) \cosh(\beta_0) = 0$$

y

$$x_0 = \left[1 + \frac{C(y^2 + \gamma_0^2)}{y^2 + \gamma_0^2 - C\sigma} \right] \sinh(\gamma_0) + \left[1 + \frac{2C^2\sigma}{(y^2 - \gamma_0^2 - C\sigma)^2} \right] \gamma_0 \cosh(\gamma_0)$$

$$u_n(y) = \left[1 - e^{-t, \beta(y^2 + \gamma_n^2)} \right] \left\{ \sinh(\gamma_n b/e) - \sinh(\gamma_n a/e) \right\} \times \cosh(\gamma_n z/e)$$

$$\left\{ (b-a)/e (y^2 + \gamma_n^2) x_n \cosh(\gamma_n) \right\}^{-1}$$

donde γ_n es la n-ésima raíz positiva de

$$(y^2 + \gamma_n^2 - C\sigma) \gamma_n \sin(\gamma_n) - C(y^2 + \gamma_n^2) \cos(\gamma_n) = 0$$

y

$$x_n = \left[1 + \frac{C(y^2 + \gamma_n^2)}{y^2 + \gamma_n^2 - C\sigma} \right] \sin(\gamma_n) + \left[1 + \frac{2C^2\sigma}{(y^2 + \gamma_n^2 - C\sigma)^2} \right] \gamma_n \cos(\gamma_n)$$

El abatimiento s se calcula a la altura z en el acuífero es decir para un piezómetro abierto sólo sobre una distancia corta a la altura z . Si el piezómetro es completamente penetrante se calcula un promedio de s desde $z=0$ hasta e .

Esta solución fue desarrollada por Neuman para producción retardada en un acuífero no confinado; y se tratará en el siguiente tema.

II.9 Flujo en un acuífero no confinado considerando la respuesta retardada del nivel del agua. Consideremos un acuífero no confinado de extensión lateral infinita sobre una capa horizontal impermeable. El acuífero es homogéneo y anisotrópico y sus permeabilidades están orientadas paralelas a los ejes coordenados. Un pozo completamente penetrante descarga un flujo a una razón constante Q del acuífero. La ecuación que gobierna este flujo es:

R15, T335

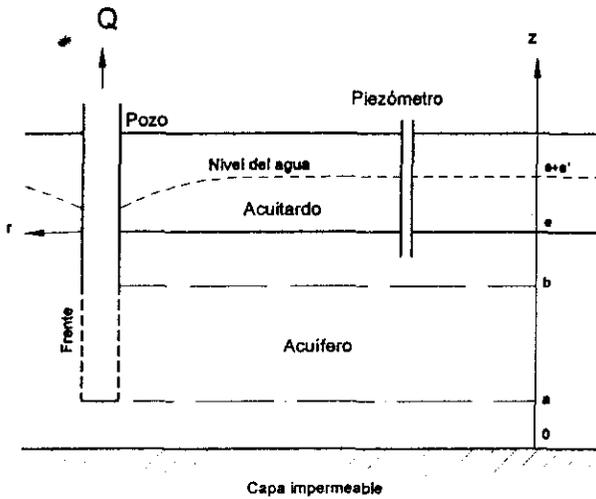


Figura II. Acuífero y acuitardo (Modelo de Streltsova).

$$K_r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{K_r}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + K_z \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = S_s \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1)$$

$$0 < z < \xi$$

$$s(r, z, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\xi(r, 0) = b \quad (3)$$

$$s(\infty, z, t) = 0 \quad (4)$$

$$\partial s / \partial z (r, 0, t) = 0 \quad (5)$$

$$K_r \frac{\partial s}{\partial r} n_r + K_z \frac{\partial s}{\partial z} n_z = \left(S_y \frac{\partial \xi}{\partial t} - I \right) n_z \text{ en } (r, \xi, t) \quad (6)$$

$$\xi(r, t) = b - s(r, \xi, t) \quad (7)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\xi r \frac{\partial s}{\partial r} dz = -\frac{Q}{2\pi K_r} \quad (8)$$

donde $\alpha_y = K_z / S_y$, suponiendo que el espesor del acuífero es suficientemente grande y que el abatimiento s permanece mucho menor que la altura del nivel del agua ξ , cambiando la condición de frontera $z = b$ eliminamos ξ y en ausencia de infiltración de la superficie libre obtenemos

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + K_D \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (9)$$

$$0 < z < b$$

$$s(r, z, 0) = 0 \quad (10)$$

$$s(\infty, z, t) = 0 \quad (11)$$

$$\partial s / \partial z(r, 0, t) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial s}{\partial z}(r, b, t) = -\frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial s}{\partial t}(r, b, t) \quad (13)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^b r \frac{\partial s}{\partial r} dz = -\frac{Q}{2\pi K_r} \quad (14)$$

Donde $\alpha_s = K_r / S_s$, aplicando transformadas de Laplace y de Hankel a las ecuaciones (9)-(14) y sus inversas, obtenemos una aproximación de primer orden del problema inicial. Ahora veremos como obtenemos la solución para la ecuación (9). Sea

$$s = s_1(r, t) + s_2(r, z, t) \quad (B1)$$

las condiciones de frontera (13) y (14) son

$$\partial s_1 / \partial z(r, b, t) = 0 \quad (B2)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial z}(r, b, t) = -\frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial (s_1 + s_2)}{\partial t}(r, b, t) \quad (B3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial s_1}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi T} \quad (B4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \partial s_2 / \partial r = 0 \quad (B5)$$

Aplicando primeramente transformadas de Laplace y luego transformadas de Hankel a las ecuaciones (9)-(11) y (B4) con respecto a s_1 obtenemos una ecuación diferencial ordinaria en términos de z esta ecuación se resuelve utilizando las ecuaciones (12) y (B4) obteniendo una doble transformación de la primera componente $s_1^* = Q / 2\pi T K_D p \eta^2$, donde $\eta^2 = (\alpha^2 / K_D) + (p / \alpha_s K_D)$ aplicando el mismo procedimiento en las ecuaciones (9)-(12), (B3) y (B5) con respecto a s_2 y aplicando las transformadas en ambas componentes tenemos:

$$s = s_1^* + s_2^* = \frac{Q}{2\pi T K_D p \eta^2} \cdot \left(1 - \frac{p \cosh(\eta z)}{\alpha_y \eta \sinh(\eta b) + p \cosh(\eta b)} \right) \quad (B6)$$

la transformada inversa de Hankel de s^* se obtiene directamente de las ecuaciones (B6) y (H2) quedando donde (H2) es:

$$H^{-1}[F(\alpha)] = f(r) = \int_0^\infty \alpha J_0(r\alpha) F(\alpha) d\alpha \quad (H2)$$

$$s = \frac{Q}{2\pi T K_D} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{p \cosh(\eta z)}{\alpha_y \eta \sinh(\eta b) + p \cosh(\eta b)} \right) \cdot \frac{\alpha J_0(r\alpha)}{\eta^2} d\alpha$$

definiendo una nueva variable $x = \alpha r / (K_D)^{1/2}$ podemos reescribir la expresión anterior

$$\bar{s} = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{\cosh(vz_D b_D)}{(\alpha_y / r) v \sinh(vb_D) + p \cosh(vb_D)} \right) \cdot \frac{x J_0[x(K_D)^{1/2}]}{v^2} dx \quad (B7)$$

donde $v^2 = x^2 + (p r^2 / \alpha_s K_D)$.

La transformada inversa de Laplace de \bar{s} se realiza utilizando la fórmula de inversión de Mellin :

$$s(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} [e^{\lambda t} - 1] \bar{s}(r, z, \lambda) d\lambda \quad (B8)$$

donde γ es un constante positiva real y λ es una variable compleja que reemplaza a ρ , asumiendo que podemos intercambiar el orden de integración con respecta a λ y x , obtenemos de las ecuaciones (B7) y (B8)

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty x J_0 [x(K_D)^{1/2}] \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f(\lambda)}{\pi i} d\lambda dx \quad (B9)$$

donde

$$f(\lambda) = \frac{e^{(\lambda t)} - 1}{\xi^2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cosh(\xi z_D b_D)}{(\alpha_y/r) \xi \sinh(\xi b_D) + \lambda \cosh(\xi b_D)} \right) \quad (B10)$$

$$\xi^2 = x^2 + (\lambda r^2 / \alpha_s K_D) \quad (B11)$$

Ahora determinaremos las singularidades de $f(\lambda)$ en el dominio complejo de λ . Es fácil verificar que en $\lambda=0$ es una singularidad removible y que $\lambda = -x^2 \alpha_s K_D / r^2$ donde $\xi^2 = 0$ es un polo simple. Para hallar las demás singularidades, expresaremos el segundo denominador de la ecuación (B10) como

$$\frac{\alpha_y}{r} \xi \sinh(\xi b_D) + \frac{\alpha_s K_D}{r^2} (\xi^2 - x^2) \cosh(\xi b_D) \quad (B12)$$

y $\xi = u + iv$ donde u y v son variables reales. Note que $\xi = 0$ no es raíz de la ecuación (B12). Si igualamos a cero esta última ecuación y la resolvemos para $e^{(2\xi b_D)}$, luego tomamos el cuadrado del módulo obtenemos

$$e^{(4ub_D)} = \frac{[(\alpha_s K_D / r^2)(u^2 - v^2 - x^2) - (\alpha_y / r)u]^2 + v^2 [(\alpha_y / r) - 2(\alpha_s K_D / r^2)u]^2}{[(\alpha_s K_D / r^2)(u^2 - v^2 - x^2) + (\alpha_y / r)u]^2 + v^2 [(\alpha_y / r) + 2(\alpha_s K_D / r^2)u]^2}$$

cuyas soluciones son:

- (1) $u^2 - v^2 - x^2 = 0$ y $v^2 = 0$ entonces tenemos un polo simple en $\xi = 0$ o en $\lambda = (\beta^2 - x^2) \alpha_s K_D / r^2$ donde β_0 es la raíz de la ecuación (16) y,
- (2) $u^2 - v^2 - x^2 \geq 0$ y $u^2 = 0$ entonces existe un número infinito de polos simples $\xi = i\beta_n$ ($n=1,2,\dots$) o en $\lambda = -(\beta_n^2 + x^2) \alpha_s K_D / r^2$ y β_n son las raíces de la ecuación (18).

De esta manera $f(\lambda)$ tiene un número infinito de polos simples en el dominio de λ . Como segundo paso determinamos los residuos de $f(\lambda)$ en cada polo.

Usando, la fórmula $\text{Re}|_{\lambda=\lambda_i} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} (\lambda - \lambda_i) f(\lambda)$ tenemos que

$$\text{Re}|_{\lambda = -x^2 \alpha_s K_D / r^2} = 0 \quad (B13)$$

$$\text{Re}|_{\lambda = (\beta_0^2 - x^2) \alpha_s K_D / r^2} = 2\omega_0(x) \quad (B14)$$

$$\operatorname{Re}\left|_{\lambda = -(\beta_0^2 - x^2) \pm i K_D / r^2} = 2\omega_n(x) \quad (\text{B15})$$

donde ω_0 y ω_n están definidas por la ecuación (15).

Para evaluar la integral compleja de la ecuación (B9) aplicamos el teorema del residuo de Cauchy y el contorno de integración (ver Figura II.a) usado en la fórmula de inversión de Mellin:

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{f(\lambda)}{\pi i} d\lambda = -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_A^{A'} \frac{f(\lambda)}{\pi i} d\lambda + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}\left|_{\lambda = \lambda_n} \quad (\text{B16})$$

Donde λ_n son singularidades no removibles de $f(\lambda)$. La integral del lado derecho de esta ecuación es cero cuando $R \rightarrow \infty$. Más aún si sustituimos las ecuaciones (B13)-(B16) en la ecuación (B9) llegamos a la solución dada por la ecuación (15). Las transformadas de Hankel utilizadas son (Neuman y Witherspoon, 1969)

Esta solución se expresa en términos de cinco parámetros (adimensionales): σ , z_D , b_D , K_D y t_s :

$$s(r, z, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^{\infty} 4x J_0[x(K_D)^{1/2}] \cdot \left[\omega_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \right] dx \quad (15)$$

donde

$$\omega_0(x) = \frac{\{1 - e^{-[t_s K_D (x^2 - \beta_0^2)]}\} \cosh(\beta_0 z_D b_D)}{\{x^2 + (1 + \sigma)\beta_0^2 - [(x^2 - \beta_0^2)^2 b_D^2 / \sigma]\} \cosh(\beta_0 b_D)}$$

$$\omega_n(x) = \frac{\{1 - e^{-[t_s K_D (x^2 + \beta_n^2)]}\} \cos(\beta_n z_D b_D)}{\{x^2 - (1 + \sigma)\beta_n^2 - [(x^2 + \beta_n^2)^2 b_D^2 / \sigma]\} \cos(\beta_n b_D)}$$

y los términos β_0 y β_n son las raíces de las ecuaciones

$$\frac{\sigma}{b_D} \beta_0 \sinh(\beta_0 b_D) - (x^2 - \beta_0^2) \cdot \cosh(\beta_0 b_D) = 0 \quad \beta_0^2 < x^2 \quad (16)$$

$$\frac{\sigma}{b_D} \beta_n \sinh(\beta_n b_D) - (x^2 + \beta_n^2) \cdot \cos(\beta_n b_D) = 0 \quad (17)$$

donde

$$(2n - 1)\pi/2 < \beta_n b_D < n\pi \quad n > 1 \quad (18)$$

Como la ecuación (15) es la solución al problema lineal podemos usar el principio de superposición para obtener soluciones a cualquier número de pozos de bombeo o recarga en el acuífero.

II.9.1 Solución promedio sobre el espesor del acuífero El abatimiento medido en un pozo de observación cuyo frente va desde z_1 a z_2 es el promedio se la distancia vertical y esta dado por

$$s_{z_1, z_2}(r, t) = \frac{1}{z_1 - z_2} \int_0^{\infty} s(r, z, t) dz \quad (19)$$

esta ecuación nos da el abatimiento promedio, este abatimiento puede ser mayor que la caída del nivel del agua en el pozo de observación. Si redefinimos las expresiones para ω_0 y ω_n de la ecuación (15):

$$\omega_0(x) = \frac{\left\{ 1 - e^{-t_s K_D (x^2 - \beta_0^2)} \right\} \operatorname{tgh}(\beta_0 z_D b_D)}{\left\{ x^2 + (1 + \sigma) \beta_0^2 - \left[(x^2 - \beta_0^2)^2 b_D^2 / \sigma \right] \right\} (\beta_0 b_D)} \quad (20)$$

$$\omega_n(x) = \frac{\left\{ 1 - e^{-t_s K_D (x^2 + \beta_n^2)} \right\} \operatorname{tg}(\beta_n z_D b_D)}{\left\{ x^2 - (1 + \sigma) \beta_n^2 - \left[(x^2 + \beta_n^2)^2 b_D^2 / \sigma \right] \right\} (\beta_n b_D)} \quad (21)$$

obtenemos el abatimiento promedio en un pozo de observación completamente penetrante en un acuífero no confinado.

II.9.2 Reducción a la solución de Theis Si no hay escurrimientos ($S_y = 0$, $\sigma = \infty$) el acuífero es artesiano y la ecuación (15) puede reducirse a la solución de Theis con respecto a t_s . De la ecuación (16) tenemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \beta_0 = 0; \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \beta_0^2 = \lim_{\beta_0 \rightarrow 0} \frac{\beta_0 b_D}{\sinh(\beta_0 b_D)} (x^2 - \beta_0^2) \cdot \cosh(\beta_0 b_D) = x^2 \quad y$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \omega_0(x) = \frac{1 - e^{-t_s K_D x^2}}{2x^2} \quad (22)$$

y por otro lado

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \omega_n(x) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

sustituyendo en la ecuación (15) las dos ecuaciones anteriores e introduciendo una nueva variable $y = x(K_D)^{1/2}$ esta se convierte en

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty 2 \left[1 - e^{-t_s y^2} \right] J_0(y) \frac{dy}{y} \quad (24)$$

de las tablas de integrales definidas (Gradshteyn y Ryzhik, 1963) tenemos:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} J_0(y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\alpha}} e^{-y} \frac{dy}{y} \quad (25)$$

donde la parte real de α es no negativa. Si combinamos las ecuaciones (24) y (25) tenemos

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_{1/4t_s}^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (26)$$

la cual es la solución de Theis con respecto a t_s .

II.9.3 Solución asintótica para intervalos de tiempo muy grandes y reducción a la ecuación de Boulton. Para períodos de tiempo grandes la curva de abatimiento es asintótica

$$s(r, z, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty 2 J_0 \left[x (K_D)^{1/2} \right] \left\{ 1 - e^{-t_s \frac{K_D x}{b_D} \operatorname{tgh}(x b_D)} \right\} \frac{\cosh(x z_D b_D)}{\cosh(x b_D)} \frac{dx}{x} \quad (27)$$

Cuando el acuífero es rígido y considerando que el agua es incompresible $S_s = 0$ y la ecuación (27) se aplica a todos los valores de tiempo. Se esperaría que esta ecuación fuera igual a la ecuación de Boulton y de hecho la ecuación (27) es la forma correcta de la ecuación (9) para un acuífero anisotrópico. Esta solución asintótica del abatimiento demuestra que los efectos del almacenamiento elástico desaparecen con el tiempo y de esto que las soluciones de Boulton (1954) y Dagan (1967) se aplican sólo en períodos de tiempo suficientemente grandes. Cuando el acuífero es muy delgado, $b_D \rightarrow 0$ y la ecuación (27) tiende al límite

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty 2J_0[x(K_D)^{1/2}] \left\{ 1 - e^{-t_y K_D x^2} \right\} \frac{dx}{x}$$

Definiendo una nueva variable $y = x(K_D)^{1/2}$ y siguiendo los pasos de las ecuaciones (24)-(26) obtenemos

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_{\gamma + iy}^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (28)$$

que es la solución de Theis con respecto a t_y . Como t y p están relacionadas inversamente en la transformadas de Laplace, si $t \rightarrow \infty$ implica que $p \rightarrow 0$ y $v \approx x$ en la ecuación (B7) para valores grandes de tiempo. Lo mismo pasa cuando $S_s = 0$ porque $\alpha_s = \infty$ por lo tanto $f(\lambda)$ en la ecuación (B10) tiene solamente un polo simple en $\lambda = -(\alpha_y x/r) \operatorname{tgh}(x b_D)$ y su residuo es

$$\frac{1}{x^2} \left[1 - e^{-\frac{\alpha_y x}{r} \operatorname{tgh}(x b_D)} \right] \frac{\cosh(x z_D b_D)}{\cosh(x b_D)}$$

Usando el teorema del residuo de Cauchy para evaluar la integral compleja de la ecuación (B9) se obtiene la solución dada por la ecuación (27).

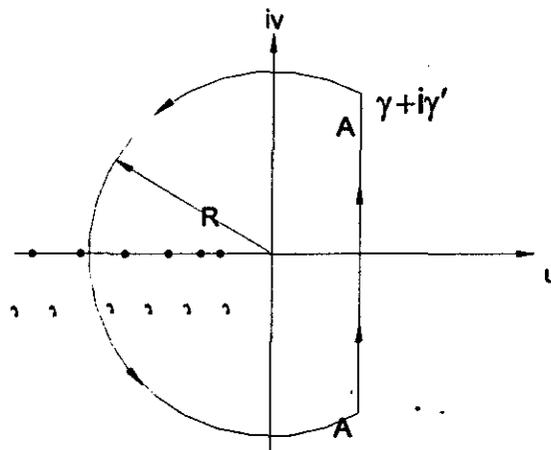


Figura II.a Contorno de integración usado con la fórmula de inversión de Mellin.

II.10 Sistemas de pozos múltiples. Consideremos pozos espaciados a distancias cortas y con radio de influencia r , entonces el abatimiento y la razón de descarga se ven afectados. Como las ecuaciones para flujo en acuíferos confinados y semiconfinados son lineales en $\phi(x,y)$ se aplicó el principio de superposición. En un acuífero freático en estado estable consideramos las suposiciones de Dupuit donde la ecuación diferencial parcial con $\partial h/\partial t = 0$ es lineal en h^2 también se aplica el mismo principio. Cuando se tiene flujo en estado no estable la ecuación diferencial parcial es no lineal entonces usamos linealización para poder aplicar el mismo principio.

Todas las ecuaciones de acuíferos lineales o no lineales, pueden escribirse en términos del abatimiento $s = \phi_0 - \phi(t)$, ó $s = h_0 - h(t)$ donde $\phi_0 = \text{constante}$ ó $h_0 = \text{constante}$ representan las condiciones iniciales del nivel del agua horizontal. Si inicialmente $\phi_0 = f(x,y) \neq \text{constante}$, tenemos que descomponer el problema de acuerdo a cada uno de los casos: flujo en estado estable, flujo en estado estable con pozos, flujo en estado no estable con condiciones a la frontera independientes del tiempo, flujo en estado no estable creciente, flujo en estado no estable con condiciones de frontera dependientes del tiempo. El principio de superposición es aplicado cuando tenemos condiciones de frontera homogéneas (es decir; $\phi = 0, s = 0, \partial\phi/\partial n = 0$).

II.10.1 Flujo estacionario. Consideremos flujo estacionario en un acuífero infinito (o con una frontera, con condiciones iniciales y de frontera

$$s_i = \sum_{j=1}^N (Q/2\pi T) \ln(R/r_{ij}) = \frac{NQ}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_i^*} \quad (\text{II.117})$$

donde $(r_i^*)^N = r_{i1}r_{i2}r_{i3}\dots r_{iN}$. De esta manera tenemos que el abatimiento s_i es igual al producido por un pozo de bombeo con una razón de flujo NQ localizado a una distancia equivalente r_i^* desde (x_j, y_j) .

De manera similar, para flujo en estado estable con pozos en un acuífero filtrante, tenemos de las Ecuaciones (II.40) o (II.41):

$$s_i = \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi T} K_0\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right); s_i = \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi T} \ln \frac{1.123\lambda}{r_{ij}} \quad (\text{II.118})$$

II.10.2 Flujo transitorio. El método de superposición también se aplica en este caso. Sean N pozos descargando un flujo Q_j en los puntos (x_j, y_j) en un acuífero confinado o semiconfinado, el abatimiento s_i en el pozo de observación (x_i, y_i) está dado por

$$s_i = \sum_{j=1}^N Q_j Z_{ij}(r_{ij}, t_j) \quad (\text{II.119})$$

donde Q_j Z_{ij} es el abatimiento producido por un pozo de bombeo ubicado a una distancia r_{ij} desde el pozo de observación, y t_j es el tiempo medido desde que se comienza a bombear en el j -ésimo pozo hasta que termina la observación. Si tenemos varias observaciones hechas en el pozo de bombeo, $r_{ii} = r_{jj} = (r_w)_j$. Para un acuífero confinado $Z = (1/4\pi T) W(u)$. Cuando todas las observaciones se hacen en uno de los pozos de bombeo, la Ecuación (II.119) es un sistema de N ecuaciones lineales con $2N$ variables s_j y Q_j . Consideramos los siguientes casos:

- Para N pozos que empiezan a bombear simultáneamente en un acuífero confinado isotrópico y homogéneo de área infinita, el abatimiento total en el punto $P_i(x_i, y_i)$ es:

$$s(P_i, t) = \left(\frac{1}{4\pi T} \right) \sum_{j=1}^N Q_j W(u_j) u_j = \frac{S r_{ij}^2}{4Tt} \quad (\text{II.120})$$

- Para pozos con descarga variable, de la Ecuación (II.64) obtenemos:

$$s(P_i, t) = \left(\frac{1}{4\pi T} \right) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n [Q_j^{(k)} - Q_j^{(k-1)}] W(r_{ij}, t - t_{k-1}) t_{n-1} < t \leq t_n \quad (\text{II.121})$$

- Dos pozos ubicados a una distancia $L \gg r_w$, con el mismo abatimiento s_w , de la Ecuación (II.120) tenemos:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{4\pi T s_w}{W(S r_w^2 / 4Tt) + W(S L^2 / 4Tt)} \quad (\text{II.122})$$

- Para tres pozos ubicados en los vértices de un triángulo equilátero, tenemos:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{4\pi T s_w}{W(S r_w^2 / 4Tt) + 2W(S L^2 / 4Tt)} \quad (\text{II.123})$$

Si el tiempo es tal que $S L^2 / 4Tt$ es suficientemente pequeño (por decir < 0.01) entonces la Ecuación (II.122) resulta:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{2\pi T s_w}{\ln(R_i^2 / L r_w)}; R_i = 1.5 \sqrt{Tt/S} \quad (\text{II.124})$$

y la Ecuación (II.123) resulta:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{2\pi T s_w}{\ln(R_i^3 / L^2 r_w)} \quad (\text{II.125})$$

Si tenemos un gran número de pozos concentrados en cierta región y queremos determinar los efectos de su bombeo sobre el nivel del agua y no conocemos la razón de bombeo en cada pozo, como por ejemplo; consideremos cierta porción de un acuífero de área A y asumamos que la razón de bombeo de los pozos distribuidos en A es más o menos uniforme. Sea $\sum Q$ la razón de bombeo total, entonces el problema puede simplificarse si consideramos $(1/A) \sum Q$ como la influencia de una extracción por unidad de área en vez de analizar los efectos individuales de cada pozo. Para regímenes en los que

podemos aplicar superposición, el abatimiento $s(P, t)$ en un punto de observación P en un tiempo t está dado por:

$$s(P, t) = \frac{1}{4\pi T} \int_{(A)} \frac{\sum Q}{A} Z(P, P', t) dA(P') \quad (II.126)$$

donde el punto P' denota la localización de un pozo descargando a una razón $(\sum Q/A)dA$, y Z es la función de pozo correspondiente al tipo de acuífero que se está considerando.

Si A es un círculo de radio R , las coordenadas de P son (r, θ) y las de P' son (r', θ') entonces tenemos:

$$s(r, t) = \frac{1}{4\pi T} \int_{(A)} \frac{\sum Q}{\pi R^2} Z(r, \theta; r', \theta'; t) r' d\theta' dr' \quad (II.127)$$

Para un acuífero confinado, Z es la función de pozo $W(u_p)$ donde $u_p = S\rho^2/4Tt, \rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')$. Para este caso, mencionaremos las soluciones dadas por Hantush (1964) cuando $t > 0.4r^2 S/T$ y $r < R$:

$$s(r, t) = \frac{\sum Q}{4\pi T} \left\{ W(u_R) + (1/u_R) [1 - \exp(-u_R)] - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \exp(-u_R) \right\} \quad (II.128)$$

y cuando $t > 0.4R^2 S/T$ y $r > R$:

$$s(r, t) = \frac{\sum Q}{4\pi T} \{ W(u) + 0.5u_R e^{-u} \} \quad (II.129)$$

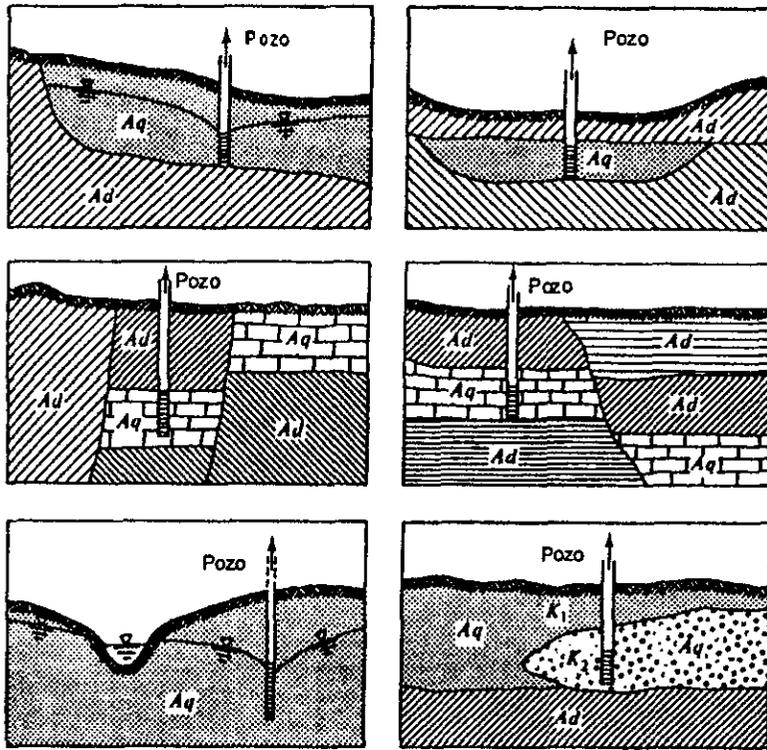
donde $u = Sr^2/4Tt$, $u_R = SR^2/4Tt$.

Si tenemos un acuífero freático con abatimientos relativamente pequeños de tal manera que las suposiciones de Dupuit son aplicables, reemplazamos $4\pi T$ en las Ecuaciones (II.128) y (II.129) por $2\pi K(H^2 - h^2)$.

II.11 Pozos con fronteras cercanas tratados por el método de imágenes. La Figura 15 muestra ejemplos de acuíferos con fronteras resultantes de discontinuidades geológicas o de la presencia de corrientes, las más comunes son las impermeables y las fronteras equipotenciales, aunque podemos tener como frontera, una interfase que separa las regiones de diferentes propiedades del acuífero, a menudo, las fronteras se pueden considerar como discontinuidades abruptas; lo que simplifica su tratamiento matemático para determinar la distribución de potencial en regiones acotadas. Esta aproximación se justifica siempre y cuando los pozos estén a una distancia suficiente de la frontera considerada y bajo ciertas condiciones las fronteras curvas se pueden aproximar por planos o rectas.

El método de imágenes (Bear, 1972) es el más usado en el tratamiento de pozos cercanos a fronteras rectas. De acuerdo a este método, la frontera real del flujo se reemplaza por una ficticia con condiciones simples, pero de gran área; se

ubican pozos imaginarios en el dominio imaginario de tal manera que los patrones de flujo producidos en ambos dominios sean los mismos y aunque una frontera ha sido removida y no aparece en el dominio ficticio, el patrón de flujo satisficará la condición impuesta. Además de satisfacer las condiciones de frontera en conjunto, los pozos reales e imaginarios producen una distribución de potencial que satisface la ecuación de continuidad como si fuera el dominio real.



Aq: Acuífero Ad: Capa confinante:

Figura 15. Tipos de fronteras resultantes de discontinuidades geológicas o corrientes naturales.

Los principios de este método se resumen en la Figura 16. Un pozo imaginario actúa como uno real con respecto a una frontera recta. Para una frontera con potencial constante, como muestra la Figura 16-a, tenemos que la imagen de un pozo de bombeo $+Q_w$, es un pozo de recarga $-Q_w$ con la misma potencia. Para una frontera impermeable (Figura 16-b), el pozo imaginario tiene el mismo signo del pozo real. En todos los casos, a menos que se especifique lo contrario, los pozos de bombeo se consideran matemáticamente puntos sumidero y los de recarga puntos fuente. En el Capítulo IV daremos un ejemplo sobre la aplicación de este método.

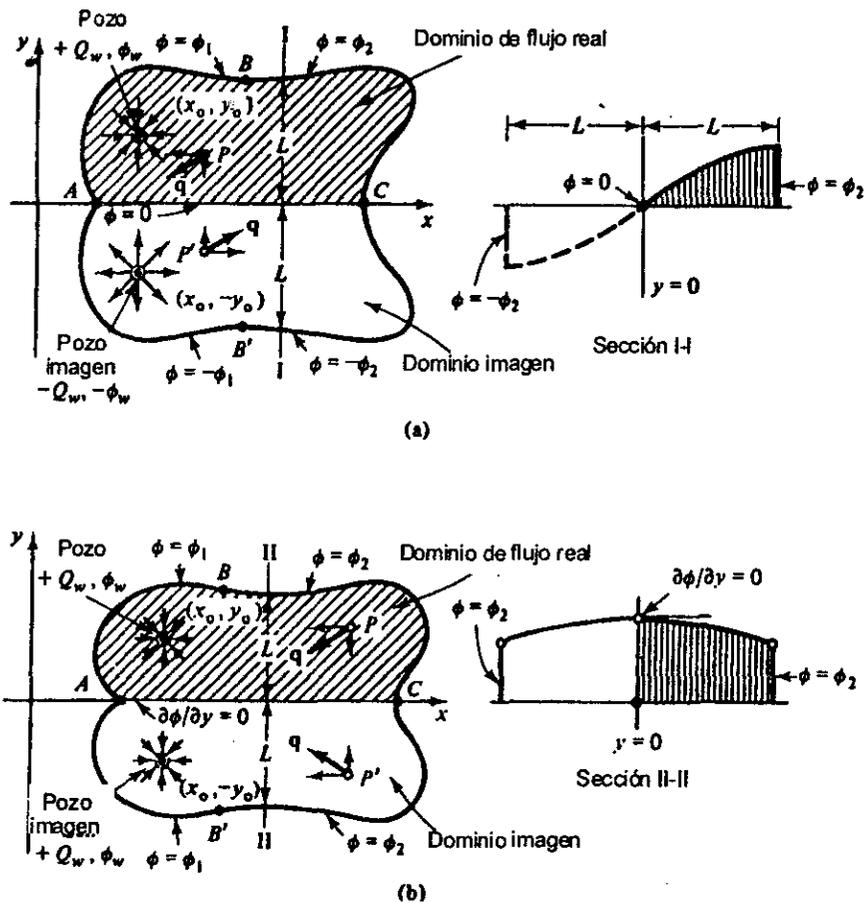


Figura 16. Método de imágenes. (a) Dominio imagen para $\phi = 0$ a lo largo de $y = 0$. (b) Dominio imagen para $\partial\phi/\partial y = 0$ a lo largo de $y = 0$.

II.12 Pozos de bombeo y de recarga en flujo uniforme. Como forma natural, este tipo de flujo se da, por lo menos localmente en la mayoría de los acuíferos. Cuando se ha construido en este tipo de acuíferos un pozo de bombeo o de recarga, se puede emplear el método de superposición para determinar el flujo neto resultante. En un acuífero freático, este método se emplea para calcular el flujo neto solo como una aproximación. En el Capítulo IV analizaremos un caso en el que tenemos un pozo de bombeo en un flujo uniforme.

II.13 Pérdidas en el pozo y descarga específica. Hasta aquí hemos asumido que los niveles de abatimientos en un pozo de bombeo (o de observación) se debe únicamente a la pérdida de presión en el acuífero a través de las cuales el flujo hacia el pozo de bombeo toma lugar. En la práctica, casi siempre, en un pozo de bombeo resulta un abatimiento adicional debido a la pérdida de presión causada por el flujo a través de la cara del pozo o del ademe,

cuando esto sucede, y por la turbulencia del flujo del agua dentro del pozo a la entrada de la bomba (ver Figura 17).

Como la velocidad del agua aumenta cuando se aproxima al pozo ($V_r = Q_w / 2\pi r B n$), es posible que al llegar a éste, el flujo en el acuífero se haga turbulento. Considerando esta posibilidad se introduce el concepto de radio efectivo (Jacob, 1947).

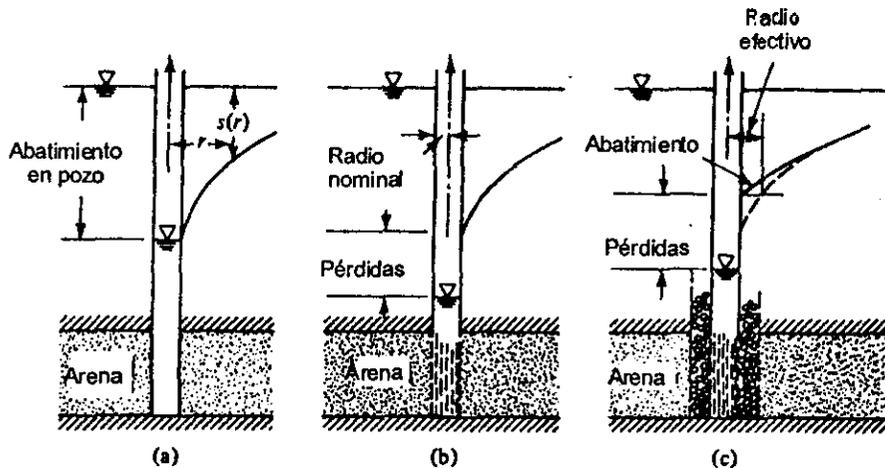


Figura 17. Abatimiento en un pozo de bombeo en un acuífero confinado. (a) Perforación sin entubar. (b) Pozo ranurado. (c) Relleno de gravas.

Para un pozo bombeando a una razón Q_w , la pérdida es CQ_w^2 , donde C es la constante de pérdidas en el pozo (Jacob, 1950). Las características a considerar son la calidad del acabado del pozo, su relleno de gravas (si es que tiene), su criba, etc. El abatimiento total, s_{tw} , está dado por:

$$s_{tw} = s_w(r_w, t) + CQ_w^2 = B(r_w, t)Q_w + CQ_w^2 \quad (II.130)$$

donde $s_w(r_w, t) = B(r_w, t)Q_w$ es la formación de la pérdida (a través del acuífero) expresada por alguna ecuación dependiendo del tipo de acuífero. La Figura 18 muestra C como una función del abatimiento debido a la pérdida en el pozo para razones de bombeo seleccionadas.

El término s_w se incluyó en el tipo de acuífero, los efectos de las fronteras en la vecindad, penetración parcial, etc. Para flujo en estado estable a un pozo en un acuífero confinado, tenemos de la Ecuación (II.4)

$$B = [\ln(R/r_w)] / 2\pi T \quad (II.131)$$

Para flujo en estado no estable a un pozo en un acuífero confinado, de la Ecuación (II.57) tenemos:

$$B = [W(S r_w^2 / 4TT)] / 4\pi T \quad (II.132)$$

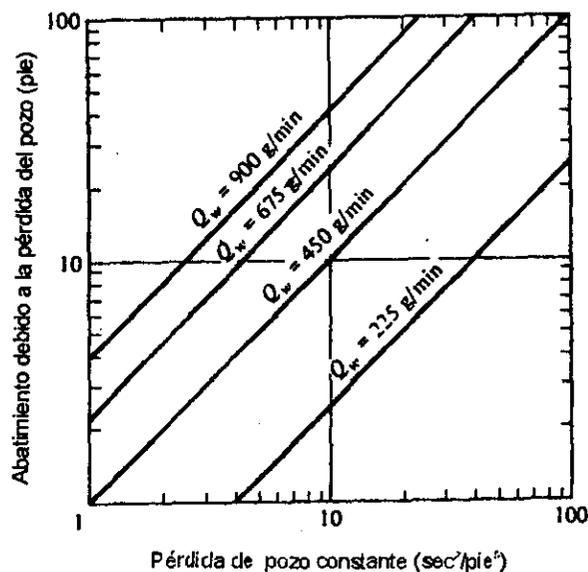


Figura 18. Gráfica que muestra la relación entre las pérdidas del pozo constante y el abatimiento.

II.13.1 Descarga específica de un pozo o capacidad específica.

Se define como la razón de la descarga y su abatimiento total (descarga por unidad de abatimiento), tomando en cuenta la formación pérdidas en el pozo. De la Ecuación (II.130) se sigue que:

$$\frac{Q_w}{s_{wt}} = \frac{1}{B(r_w, t) + CQ_w} \quad (\text{II.133})$$

esta ecuación muestra que la descarga específica disminuye respecto al tiempo y a la razón de descarga. Como B depende de r_w , B es muy pequeño. La Figura 19 muestra las variaciones de la descarga específica de un pozo con respecto al tiempo.

II.13.2 Abatimiento específico: Es el abatimiento por unidad de descarga:

$$\frac{s_{wt}}{Q_w} = CQ_w + B(r_w, t) \quad (\text{II.134})$$

II.14 Hidráulica de pozos de recarga. En esta sección enfatizaremos que en general, la discusión presentada anteriormente es aplicable también en los pozos de recarga en los cuales el agua se introduce al manto acuífero como parte de las operaciones de una recarga artificial. Mientras que el bombeo produce un

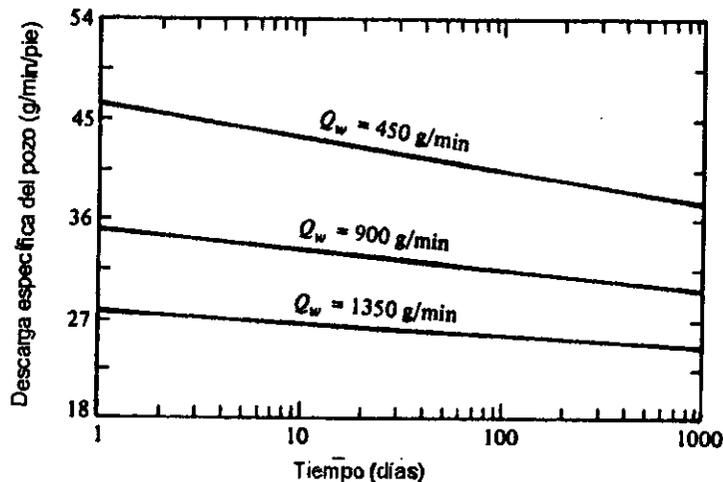


Figura 19. Ejemplo de la variación de la descarga específica de un pozo con respecto a la razón de bombeo y el tiempo.

superficie piezométrica, un pozo de recarga produce un patrón de flujo radialmente divergente desde el pozo y aumenta el nivel del agua, o de la superficie piezométrica. Aún así debemos recalcar una diferencia importante que algunas veces no puede pasarse por alto. Cuando el bombeo toma lugar, si en la formación se presentan limos y materiales finos, éstos son eliminados en la vecindad del pozo donde la velocidad promedio del flujo ($V_r = Q_w / 2\pi r B n$) es muy grande. Los finos son removidos con el bombeo del agua. De ésta manera se crea alrededor del pozo una zona de mayor permeabilidad, en la Figura 17-c se muestra este caso. Actualmente esto es tomado en cuenta en el procedimiento estándar (llamado desarrollo de pozos) para perforar un pozo nuevo. En un pozo de recarga, siempre dejamos impurezas en su construcción, esas impurezas incluyen materiales finos, material orgánico y aire. A cierta distancia del pozo de recarga, se reduce la velocidad del agua al punto en que los sedimentos de limo y partículas finas son atraídos con ella. De esta manera se reduce la permeabilidad. El agua también lleva burbujas de aire que se aloja en poros pequeños los cuales ejercen alguna presión en el ademe o la construcción del pozo. Se puede producir un crecimiento en el pozo de material orgánico y bacterias. Todo esto provoca una reducción del área de flujo efectiva. Debido a las altas velocidades y a los gradientes de presión cercanos al pozo, la disminución de la permeabilidad ocurre a cierta distancia del pozo por lo que cerca de éste tenemos una zona de mínima permeabilidad. Esta continúa disminuyendo conforme aumenta el volumen de agua recargada. Esto produce un aumento adicional que debe tomarse en cuenta en los cálculos de la recarga. Para terminar, mencionaremos la posibilidad de que en el método de perforación, la permeabilidad en la vecindad inmediata del pozo se reduce.

en el método de perforación, la permeabilidad en la vecindad inmediata del pozo se reduce.

III PRUEBAS DE BOMBEO

III.1 Generalidades.

III.1.1 Objetivo de las pruebas. Una prueba de bombeo tiene dos objetivos principales: para determinar las características hidráulicas de los acuíferos y proveer la información básica para la solución de problemas de flujo de aguas subterráneas, ya sea local o regionalmente. Por otra parte, una prueba de bombeo nos da información acerca de la producción y abatimiento del pozo. Estos datos se usan para determinar la capacidad específica o la razón de descarga-abatimiento del pozo, para seleccionar el tipo de bomba que debe instalarse o estimar su costo.

III.1.2 Estudios preliminares. Antes de realizar una prueba de bombeo es necesario tener información de las condiciones geológicas e hidrológicas del subsuelo.

La mayoría de las ecuaciones relacionadas con las pruebas de bombeo están basadas bajo la suposición de que el acuífero tiene un área infinita, aunque esto es solamente para propósitos prácticos, pues la mayoría de los acuíferos tienen una extensión limitada por material impermeable, tales como fronteras de barreras, capas de rocas impermeables de material fosilizado o simplemente cambios litológicos dentro del acuífero. Debe tomarse en cuenta las fronteras de recarga a lo largo de las cuales no hay abatimiento. Una frontera de recarga es aquella en la que el acuífero está conectado hidráulicamente con el cauce de un río, un canal, un lago o el océano (acuíferos libres).

III.1.3 Estimación de la transmisividad por medio de mediciones estratigráficas. Cuando se perfora un pozo, se obtienen muestras de las diferentes formaciones geológicas que forman el subsuelo lo cual sirve para obtener una descripción litológica del mismo. Estos datos pueden utilizarse para obtener una idea inicial de la conductividad hidráulica del material del acuífero y así de la transmisividad del mismo. Debe considerarse la separación entre los granos y los contenidos de arcilla y arena. La experiencia ha demostrado que el valor de la transmisividad obtenido por medio de estudios estratigráficos es muy preciso.

III.1.4 Selección del sitio de la prueba. En ciertos casos el lugar de la prueba está predeterminado y no hay posibilidad de escoger otro sitio, por ejemplo cuando ya existen pozos que pueden usarse o por factores específicos del lugar. En el caso de estudios de agua subterránea a nivel regional podemos escoger la ubicación de los pozos más adecuada teniendo en cuenta los siguientes factores: Que las condiciones hidrogeológicas no varíen en distancias cortas y que sean representativas del área bajo consideración; que el agua bombeada no se recarge al manto acuífero; etc.

III.1.5 Piezómetros. El objetivo principal de una prueba de bombeo es el de obtener mediciones de los efectos del bombeo sobre el nivel del agua en la vecindad del pozo. Para este propósito es necesario contar con varios piezómetros cercanos al pozo de bombeo. El número de piezómetros. Depende de la cantidad de información requerida y el grado de confiabilidad deseada pero también de los fondos disponibles para su instalación. Los datos obtenidos por mediciones de abatimientos con solo un piezómetro permiten calcular la conductividad hidráulica y transmisividad promedios del acuífero así como su coeficiente de almacenamiento. La ventaja de tener dos o más piezómetros ubicados a ciertas distancias del pozo de bombeo es que los abatimientos medidos en ellos se pueden analizar de dos formas: relacionando tiempo-abatimiento y distancia-abatimiento, es obvio que los resultados obtenidos de esta manera son más confiables y representativos para una área de extensión grande.

III.1.6 Distancia de los piezómetros. Para ubicar los piezómetros se debe considerar:

- a) El tipo de acuífero.
- b) La conductividad hidráulica.
- c) La razón de descarga.
- d) La longitud del frente del pozo (porcentaje de penetración).
- e) Estratificación.

III.2 Ejecución de una prueba de bombeo.

III.2.1 Mediciones. Las mediciones que se tomarán durante la prueba de bombeo son:

- mediciones del nivel del agua
- medición del tiempo desde el inicio de la prueba hasta su finalización
- mediciones de la razón de descarga
- observaciones durante la realización de la prueba

El aspecto más importante de la prueba de bombeo es tomar las medidas de la profundidad del agua en todos los piezómetros y de ser posible en el pozo de bombeo. Como los niveles de agua están cayendo durante la primera o segunda hora de la prueba, las lecturas deben ser tomadas en intervalos cortos y de acuerdo como continúe el bombeo estos se incrementan gradualmente.

III.2.2. Duración de la prueba de bombeo. El período de bombeo depende del tipo de acuífero y el grado de exactitud deseado para establecer las propiedades hidráulicas del acuífero. Si la prueba de bombeo se realiza en un acuífero confinado se recomienda bombear el pozo por un período de 24 horas. Pero si el cono de depresión se expande lentamente es necesario un período más grande, se recomiendan tres días.

III.3 Análisis de los datos. Después de completada la prueba de bombeo y se tiene toda la información necesaria sobre el pozo de bombeo, los abatimientos en los piezómetros, y en el pozo, dirección del flujo de agua, etc. se procede a su análisis que debe incluir:

- gráficas de los datos.
- determinación del tipo de acuífero en el que se realizó la prueba.

Estos datos se registran en una hoja de observación prediseñada. Se hace una gráfica en papel logarítmico o semilogarítmico de los abatimientos contra el tiempo en la que se observe la curva tiempo-abatimiento ya que esta determina el tipo de acuífero (Ver Figura 20).

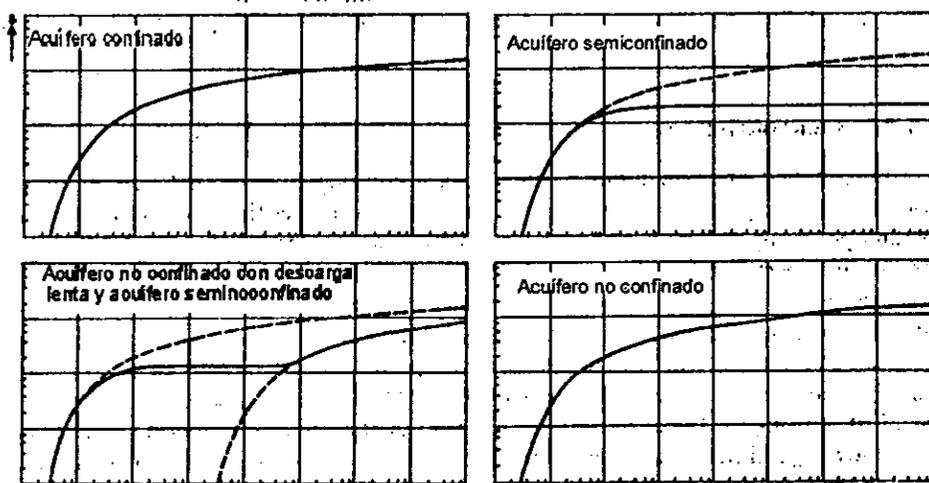


Figura 20. Curvas tipo de tiempo-abatimiento para diferentes tipos de acuíferos.

III.3.1 Aplicación de los métodos de análisis. Antes de aplicar alguno de los métodos de análisis se deben considerar las suposiciones a las que está sujeto el método. Por otro lado un examen cuidadoso de los datos de abatimiento revelarán ciertas suposiciones no conocidas y esto ayuda para seleccionar el método más apropiado.

III.3.2 Reporte. Debe incluir los siguientes puntos:

- un mapa que describa el lugar de la prueba de bombeo, el pozo de bombeo y piezómetros además de las fronteras impermeables y de recarga,
- una sección litológica del lugar de la prueba basada en datos obtenidos de perforaciones,
- tablas con los resultados de las mediciones hechas en el campo que incluyan mediciones del pozo de descarga y los niveles de agua en los piezómetros,
- hidrogramas,
- curvas de tiempo-abatimiento y curvas de distancia-abatimiento,
- consideraciones que se tomaron para seleccionar el método de análisis

- los cálculos en forma abreviada incluyendo los valores obtenidos de las características del acuífero y una discusión de su exactitud,
- recomendaciones para futuras investigaciones,
- un resumen de los principales resultados obtenidos.
- se recomienda hacer un archivo detallado del reporte.

IV. EJEMPLOS

Ejemplo 1. La presente prueba de bombeo se realizó el 17 de Octubre de 1998, en el Campo Experimental del Departamento de Agricultura y Ganadería de la Universidad de Sonora. Las coordenadas geográficas son 29°00'50" Latitud Norte y 111°07'55" Longitud Oeste y tiene una altura de 149 m sobre el nivel del mar. Debido a que se tienen siembras experimentales en el sitio, se cuenta con un pozo de bombeo y se utilizaron 2 pozos fuera de uso, como de observación.

El primer pozo de la zona se perforó en Abril de 1955 con una profundidad de 213.41 m, nombrado en el presente estudio como Pozo de Observación 2 con una distancia de 159.6 m del pozo de bombeo. En Agosto de 1980, se construyó el segundo pozo con 251.0 m de profundidad, aquí llamado Pozo de Observación 1 y ubicado a 33.6 m del pozo de bombeo. En 1985, se perforó el pozo de bombeo, en el cual se realizó la presente prueba.

El equipo de bombeo tiene una potencia de 250 HP; cuenta con una columna de 8" de diámetro y con tazones de 12" de diámetro y longitud de 140 m.

La zona de estudio se localiza en el antiguo lecho del Río Sonora, cuya cuenca pertenece a la Región Hidrológica No. 9, Sonora Sur.

El sistema acuífero de la Costa de Hermosillo consiste de dos acuíferos interconectados. La zona vadosa y la parte superior del acuífero del Valle de Hermosillo, consisten en material aluvial del Mioceno y más joven proveniente del antiguo delta del Río Sonora (Steinich et. al., 1997). El acuífero inferior contiene rocas clásticas volcánicas e ígneas del Mesozoico Tardío – Terciario Temprano.

Arreguín et. al. (1968) mencionan que el acuífero inferior no es apropiado para la irrigación debido a sus características hidrotermales y a su alto contenido de sulfuros. Los mismos autores señalan que la recarga al sistema acuífero es por flujo horizontal proveniente de la parte norte y noreste de Hermosillo y por flujo vertical ascendente del acuífero inferior al superior.

Al crearse el distrito de riego agrícola extensivo en el Valle de Hermosillo, en la década de los sesentas, se requirieron extracciones masivas de agua subterránea, por lo que la zona vadosa sufrió cambios sustanciales en las últimas tres décadas. Aunado a esto, la parte más superior del acuífero sufrió un importante cambio en su dinámica de infiltración. Mientras la infiltración originalmente ocurre sólo en la estación de lluvia, de mayo a octubre, la irrigación se efectúa prácticamente durante todo el año, excepto por algunas semanas en el otoño cuando todos los pozos se apagan para darles mantenimiento.

Por ello, el balance hídrico de la zona resulta negativo debido a que se cuenta con 498 pozos profundos que extraen 566 millones de m³ de agua por año, habiéndose estimado la recarga en un rango de 250 a 350 millones de m³

por año (Matlock et. al. , 1966). Como el bombeo excede a la recarga el nivel freático ha caído más de 40 m en las últimas cuatro décadas.

Con lo que respecta a la geología de la zona alrededor del Departamento de Agricultura y Ganadería, se localizan afloramientos terciarios de rocas volcánicas específicamente riolitas fluidales. Sobre éstos se observan sedimentos cuaternarios coluviales y aluviales, constituidos de arenas y gravas predominantemente en el cauce del Río Sonora intercalados con limos y arcillas de la antigua planicie de inundación. Es precisamente en esta planicie de inundación donde se encuentra localizado el pozo de bombeo en estudio (ver Mapa Anexo).

Los datos de tiempo contra abatimiento obtenidos en el ensayo por bombeo y su análisis se muestran más adelante. Se bombeó a una razón de descarga de 75 L/s. El nivel estático inicial fue de 107 m en el Pozo de Observación 1 y de 105 m en el Pozo de Observación 2. Se calculó la transmisividad (T) y el coeficiente de almacenamiento (S) del acuífero aplicando el modelo de Theis; los cálculos están hechos manualmente y aplicando el Programa PUMP.

RESULTADOS CON EL PROGRAMA PUMP

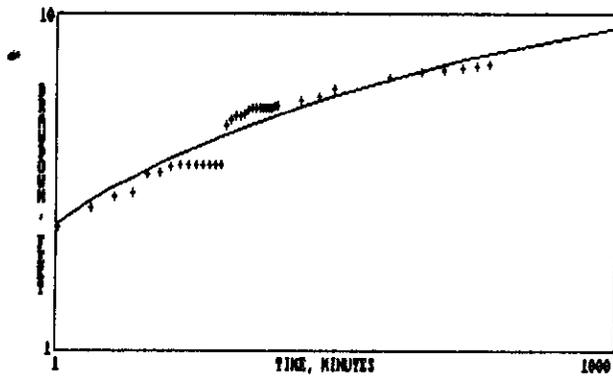
POZO DE OBSERVACION 1

ANALISIS DE LA PRUEBA DE BOMBEO CON EL METODO DE THEIS

TRANSMISIVIDAD, GPD\FT	= 134976
COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO	= 2.39E-04
Descarga de bombeo (gpm)	= 1188.76
Distancia al pozo de bombeo (pies)	= 110.23
Nivel estático inicial (pies)	= 0.00

POZO DE OBSERVACION 1

Tiempo (min)	Profun. Observada (pie)	Abati- miento (pie)	Abatim. calc. (pie)	Error (pie)
0.50	1.60	1.60	1.71	-0.11
1.00	2.30	2.30	2.35	-0.05
1.50	2.60	2.60	2.74	-0.14
2.00	2.82	2.82	3.02	-0.20
2.50	2.92	2.92	3.24	-0.32
3.00	3.32	3.32	3.42	-0.10
3.50	3.37	3.37	3.57	-0.20
4.00	3.47	3.47	3.70	-0.23
4.50	3.55	3.55	3.82	-0.27
5.00	3.55	3.55	3.93	-0.38
5.50	3.55	3.55	4.02	-0.47
6.00	3.55	3.55	4.11	-0.56
6.50	3.55	3.55	4.19	-0.64
7.00	3.55	3.55	4.26	-0.71
7.50	3.55	3.55	4.33	-0.78
8.00	4.67	4.67	4.40	0.27
8.50	4.87	4.87	4.46	0.41
9.00	4.96	4.96	4.52	0.44
9.50	5.01	5.01	4.57	0.44
10.00	5.06	5.06	4.62	0.44
10.50	5.16	5.16	4.67	0.49
11.00	5.28	5.28	4.72	0.56
11.50	5.28	5.28	4.76	0.52
12.00	5.28	5.28	4.80	0.48
12.50	5.28	5.28	4.84	0.44
13.50	5.28	5.28	4.92	0.36
14.00	5.28	5.28	4.96	0.32
14.50	5.30	5.30	4.99	0.31
15.00	5.30	5.30	5.03	0.27
20.00	5.55	5.55	5.32	0.23
25.00	5.72	5.72	5.54	0.18
30.00	5.98	5.98	5.73	0.25
60.00	6.48	6.48	6.42	0.06
90.00	6.78	6.78	6.83	-0.05
120.00	6.90	6.90	7.12	-0.22
150.00	6.99	6.99	7.35	-0.36
180.00	7.02	7.02	7.53	-0.51
210.00	7.09	7.09	7.69	-0.60



CURVA DE CAMPO PARA EL POZO DE OBSERVACION 1

POZO DE OBSERVACION 2

ANALISIS DE LA PRUEBA DE BOMBEO CON EL METODO DE THEIS

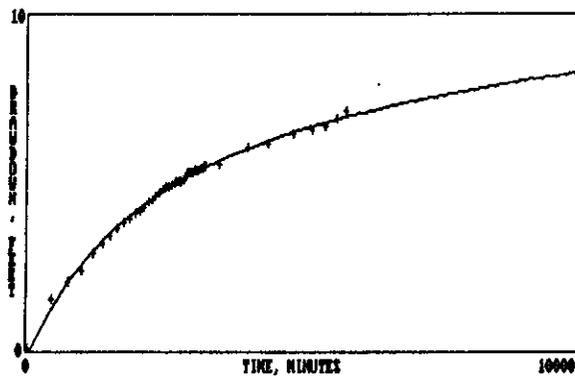
TRANSMISIVIDAD, GPD\FT = 250678
 COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO = 4.06E-04

 Descarga de bombeo (gpm) = 1188.76
 Distancia al pozo de bombeo (pies) = 523.62
 Nivel estático inicial (pies) = 0.00

POZO DE OBSERVACION 2

Tiempo (min)	Profun. Observada (pie)	Abati- miento (pie)	Abatim. calc. (pie)	Error (pie)
0.50	0.05	0.05	0.02	0.03
1.00	0.10	0.10	0.09	0.01
1.50	0.20	0.20	0.17	0.03
2.00	0.25	0.25	0.25	-0.00
2.50	0.30	0.30	0.32	-0.02
3.00	0.37	0.37	0.38	-0.01
3.50	0.42	0.42	0.44	-0.02
4.00	0.47	0.47	0.49	-0.02
4.50	0.52	0.52	0.54	-0.02
5.00	0.57	0.57	0.59	-0.02
5.50	0.60	0.60	0.63	-0.03
6.00	0.65	0.65	0.67	-0.02
6.50	0.67	0.67	0.70	-0.03
7.00	0.70	0.70	0.74	-0.04
7.50	0.75	0.75	0.77	-0.02
8.00	0.78	0.78	0.80	-0.02
8.50	0.83	0.83	0.83	-0.00

9.00	0.86	0.86	0.85	0.00
9.50	0.90	0.90	0.88	0.03
10.00	0.92	0.92	0.90	0.02
10.50	0.94	0.94	0.93	0.02
11.00	0.96	0.96	0.95	0.01
11.50	0.98	0.98	0.97	0.01
12.00	1.01	1.01	0.99	0.02
12.50	1.01	1.01	1.01	0.00
13.00	1.01	1.01	1.03	-0.02
13.50	1.04	1.04	1.05	-0.01
14.00	1.06	1.06	1.07	-0.01
14.50	1.14	1.14	1.09	0.06
15.00	1.15	1.15	1.10	0.05
15.50	1.16	1.16	1.12	0.04
16.00	1.17	1.17	1.14	0.03
16.50	1.18	1.18	1.15	0.03
17.00	1.19	1.19	1.17	0.02
17.50	1.20	1.20	1.18	0.02
18.00	1.22	1.22	1.20	0.02
15.50	1.16	1.16	1.12	0.04
16.00	1.17	1.17	1.14	0.03
16.50	1.18	1.18	1.15	0.03
17.00	1.19	1.19	1.17	0.02
17.50	1.20	1.20	1.18	0.02
18.00	1.22	1.22	1.20	0.02
18.50	1.23	1.23	1.21	0.02
19.00	1.24	1.24	1.22	0.02
19.50	1.25	1.25	1.24	0.01
24.50	1.30	1.30	1.35	-0.06
39.50	1.62	1.62	1.60	0.02
54.50	1.72	1.72	1.77	-0.06
84.50	1.97	1.97	2.01	-0.04
114.50	2.07	2.07	2.17	-0.11
144.50	2.17	2.17	2.30	-0.13
174.50	2.41	2.41	2.40	0.02
204.50	2.66	2.66	2.48	0.10



CURVA DE CAMPO PARA EL POZO DE OBSERVACION 2

RESULTADOS OBTENIDOS MANUALMENTE

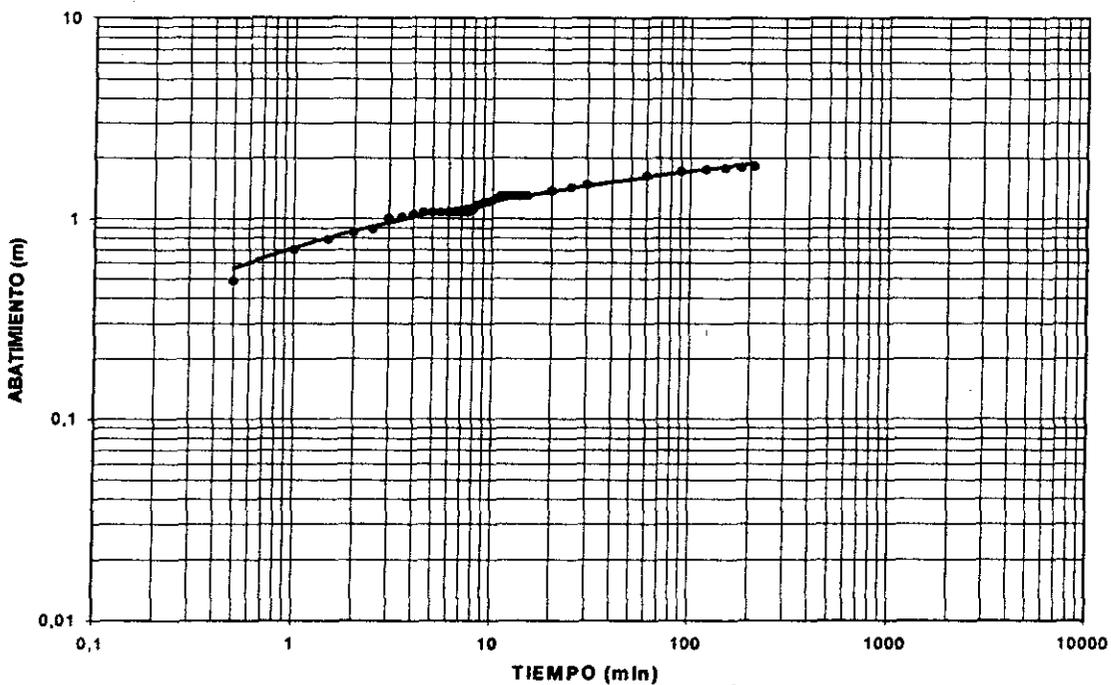
MÉTODO DE THEIS

POZO DE OBSERVACION 1

$$T = \frac{Q}{4\pi s} W(u) = \frac{4.5 \text{ m}^3/\text{min}}{4\pi (0.24 \text{ m})} \approx 1.5 \frac{\text{m}^2}{\text{min}} = 0.025 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$S = \frac{4Tt}{r^2} u = \frac{4(1.5 \text{ m}^2/\text{min})(0.33 \text{ min})}{(33.6 \text{ m})^2} \approx 1.75 \times 10^{-3}$$

POZO DE OBSERVACION 1



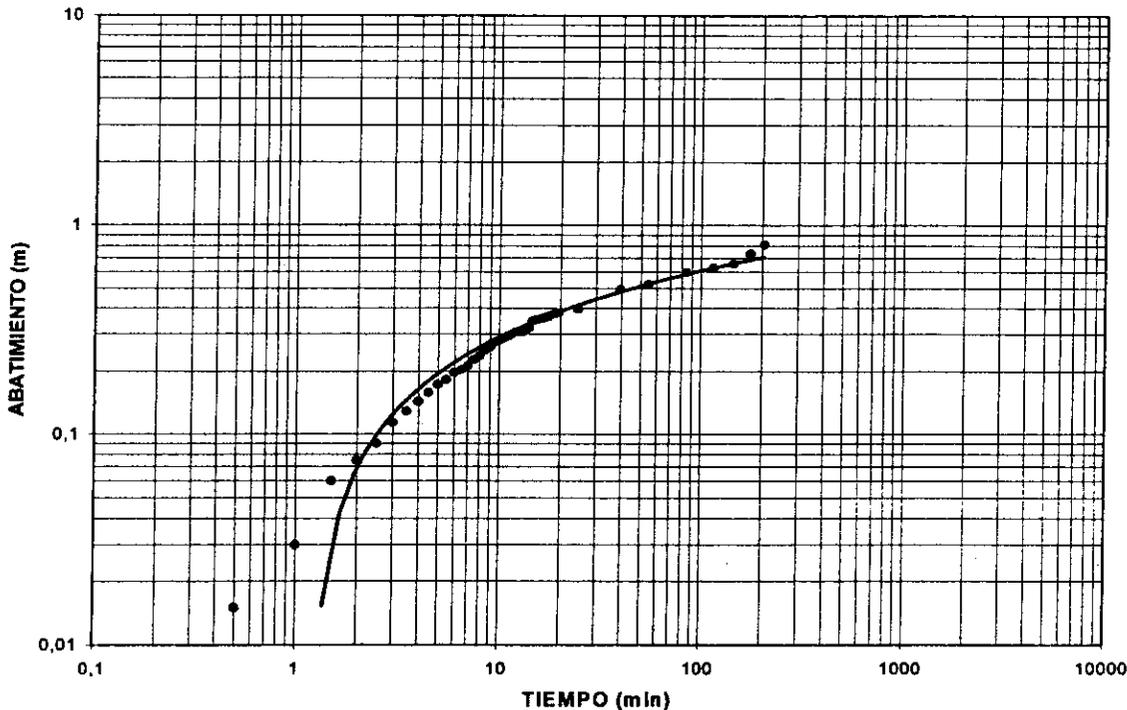
CURVA DE CAMPO PARA EL POZO DE OBSERVACIÓN 1

POZO DE OBSERVACION 2

$$T = \frac{Q}{4\pi s} W(u) = \frac{4.5 \text{ m}^3/\text{min}}{4\pi (0.18 \text{ m})} \approx 2.0 \frac{\text{m}^2}{\text{min}} = 0.033 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$S = \frac{4Tt}{r^2} u = \frac{4(2.0 \text{ m}^2/\text{min})(1.0 \text{ min})}{(159.6 \text{ m})^2} \approx 3.14 \times 10^{-3}$$

POZO DE OBSERVACION 2



CURVA DE CAMPO PARA EL POZO DE OBSERVACIÓN 2

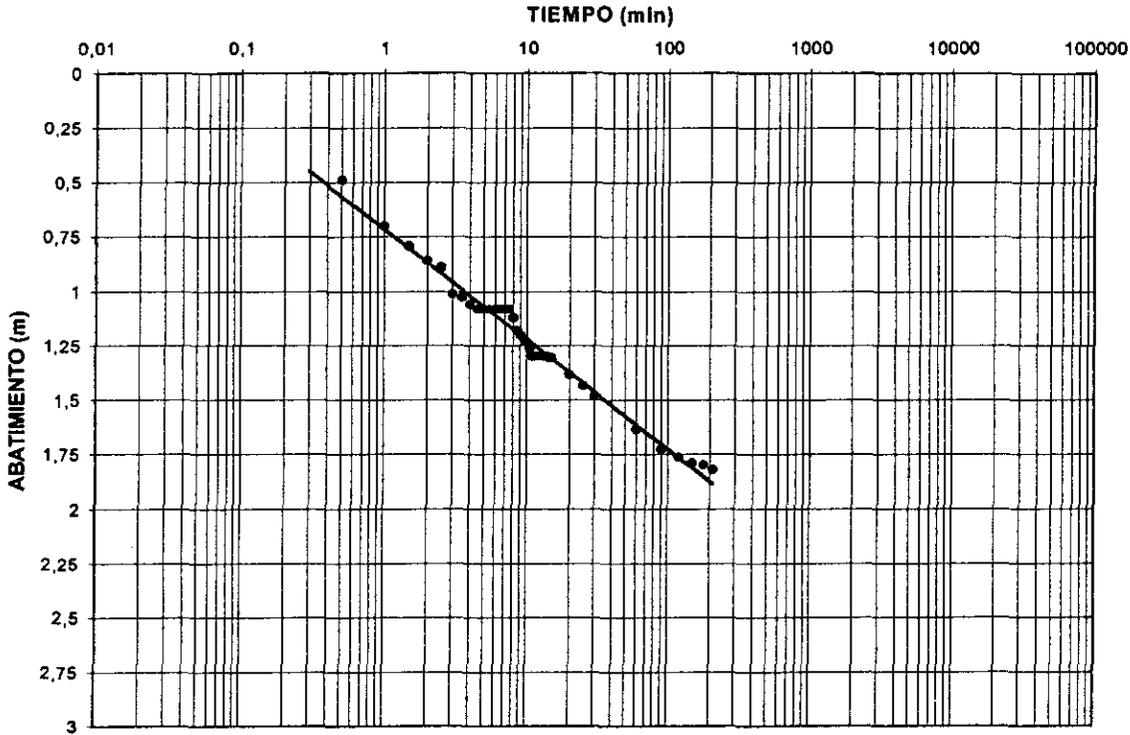
MÉTODO DE JACOB-COOPER

POZO DE OBSERVACIÓN 1

$$T = \frac{0.183Q}{p} = \frac{(0.183)(4.5 \text{ m}^3/\text{min})}{0.17 \text{ m}} = 4.844 \frac{\text{m}^2}{\text{min}} \approx 0.08 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$S = \frac{2.25Tt}{r^2} = \frac{2.25(4.844 \text{ m}^2/\text{min})(0.038 \text{ min})}{(33.6 \text{ m})^2} = 3.6686 \times 10^{-4}$$

POZO DE OBSERVACION 1



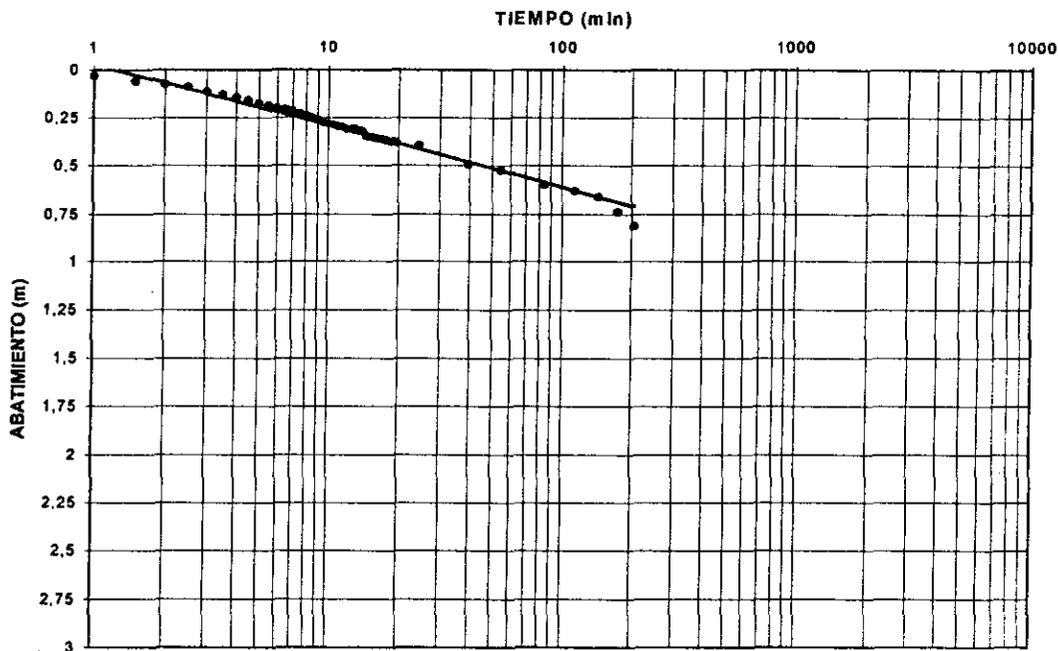
CURVA DE CAMPO PARA EL POZO DE OBSERVACIÓN 1

POZO DE OBSERVACIÓN 2

$$T = \frac{0.183Q}{p} = \frac{(0.183)(4.5 \text{ m}^3/\text{min})}{0.3 \text{ m}} = 2.745 \frac{\text{m}^2}{\text{min}} = 0.04575 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$S = \frac{2.25Tt}{r^2} = \frac{2.25(2.745 \text{ m}^2/\text{min})(1.4 \text{ min})}{(159.6 \text{ m})^2} = 3.39458 \times 10^{-4}$$

POZO DE OBSERVACION 2



CURVA DE CAMPO PARA EL POZO DE OBSERVACIÓN 2

Resumiendo los resultados obtenidos:

POZO 1

METODO	TRANSMISIVIDAD*	COEF. ALMACENAMIENTO
THEIS (PUMP)	0.98	2.39E-4
THEIS (MANUALMENTE)	1.5	1.75E-3
JACOB-COOPER	4.8	3.6686E-4

POZO 2

METODO	TRANSMISIVIDAD*	COEF. ALMACENAMIENTO
THEIS (PUMP)	1.8335	4.06E-4
THEIS (MANUALMENTE)	1.98	3.145E-3
JACOB-COOPER	2.745	3.3945E-4

* La transmisividad está dada en m²/min.

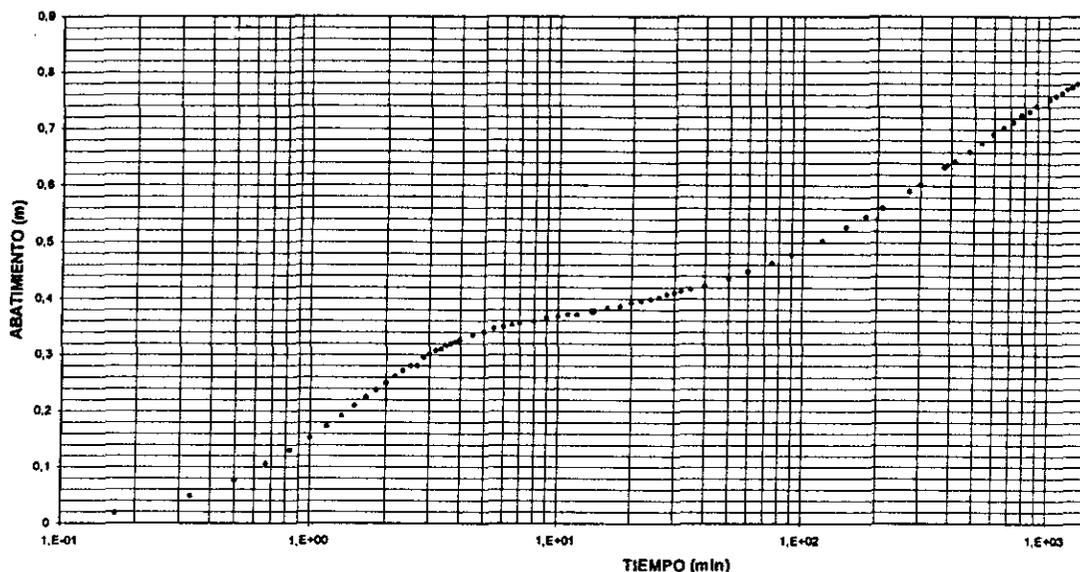
Ejemplo 2. Arizona 1: La siguiente información muestra los datos de tiempo y abatimiento que se obtuvieron en una prueba de bombeo en Planet Ranch, Arizona. El espesor del acuífero es de 30.48 m y los pozos son completamente penetrantes. El pozo de bombeo descarga un flujo de $11 \text{ m}^3/\text{min}$ y la distancia entre el pozo de bombeo y el de observación es de 21.3 m. Se estimaron los valores de la *transmisividad T* y el *coeficiente de almacenamiento S* del acuífero, aplicando el método de Neuman.

Se aplicó el Método de Neuman para calcular los valores de T y S. Se calcularon K_r y K_z asumiendo que la zona saturada del acuífero tiene un espesor de 30.5 m y que los pozos son completamente penetrantes. El Método de Jacob fue utilizado para corregir el abatimiento.

TIEMPO (s)	TIEMPO (m)	PROFUNDIDAD (m)	ABATIMIENTO (m)	SUM ABAT (m)
0	0,000	2,465832		
10	0,167	2,484120	0,018288	0,018288
20	0,333	2,514600	0,03048	0,048768
30	0,500	2,542032	0,027432	0,0762
40	0,667	2,572512	0,03048	0,10668
50	0,833	2,596896	0,024384	0,131064
60	1,000	2,618232	0,021336	0,1524
70	1,167	2,639568	0,021336	0,173736
80	1,333	2,657856	0,018288	0,192024
90	1,500	2,676144	0,018288	0,210312
100	1,667	2,691384	0,01524	0,225552
110	1,833	2,703576	0,012192	0,237744
120	2,000	2,715768	0,012192	0,249936
130	2,167	2,727960	0,012192	0,262128
140	2,333	2,737104	0,009144	0,271272
150	2,500	2,746248	0,009144	0,280416
160	2,667	2,746248	0	0,280416
170	2,833	2,761488	0,01524	0,295656
180	3,000	2,767584	0,006096	0,301752
190	3,167	2,773680	0,006096	0,307848
200	3,333	2,776728	0,003048	0,310896
210	3,500	2,782824	0,006096	0,316992
220	3,667	2,785872	0,003048	0,32004
230	3,833	2,788920	0,003048	0,323088
240	4,000	2,791968	0,003048	0,326136
270	4,500	2,801112	0,009144	0,33528
300	5,000	2,807208	0,006096	0,341376
330	5,500	2,813304	0,006096	0,347472
360	6,000	2,816352	0,003048	0,35052
390	6,500	2,819400	0,003048	0,353568
420	7,000	2,822448	0,003048	0,356616
480	8,000	2,825496	0,003048	0,359664
540	9,000	2,831592	0,006096	0,36576

600	10,000	2,834640	0,003048	0,368808
660	11,000	2,837688	0,003048	0,371856
720	12,000	2,837688	0	0,371856
840	14,000	2,843784	0,006096	0,377952
960	16,000	2,849880	0,006096	0,384048
1080	18,000	2,852928	0,003048	0,387096
1200	20,000	2,859024	0,006096	0,393192
1320	22,000	2,862072	0,003048	0,39624
1440	24,000	2,865120	0,003048	0,399288
1560	26,000	2,868168	0,003048	0,402336
1680	28,000	2,874264	0,006096	0,408432
1800	30,000	2,877312	0,003048	0,41148
1920	32,000	2,880360	0,003048	0,414528
TIEMPO (s)	TIEMPO (m)	PROFUNDIDAD (m)	ABATIMIENTO (m)	SUM ABAT (m)
2100	35,000	2,883408	0,003048	0,417576
2400	40,000	2,889504	0,006096	0,423672
3000	50,000	2,901696	0,012192	0,435864
3600	60,000	2,913888	0,012192	0,448056
4500	75,000	2,929128	0,01524	0,463296
5400	90,000	2,944368	0,01524	0,478536
7200	120,000	2,968752	0,024384	0,50292
9000	150,000	2,993136	0,024384	0,527304
10800	180,000	3,011424	0,018288	0,545592
12600	210,000	3,026664	0,01524	0,560832
16200	270,000	3,057144	0,03048	0,591312
18000	300,000	3,069336	0,012192	0,603504
22500	375,000	3,099816	0,03048	0,633984
23100	385,000	3,102864	0,003048	0,637032
24900	415,000	3,108960	0,006096	0,643128
28500	475,000	3,127248	0,018288	0,661416
32100	535,000	3,142488	0,01524	0,676656
35700	595,000	3,157728	0,01524	0,691896
39300	655,000	3,169920	0,012192	0,704088
42900	715,000	3,179064	0,009144	0,713232
46500	775,000	3,191256	0,012192	0,725424
50100	835,000	3,197352	0,006096	0,73152
53700	895,000	3,206496	0,009144	0,740664
60900	1015,000	3,218688	0,012192	0,752856
64500	1075,000	3,224784	0,006096	0,758952
68100	1135,000	3,230880	0,006096	0,765048
71700	1195,000	3,236976	0,006096	0,771144
75300	1255,000	3,240024	0,003048	0,774192
78900	1315,000	3,246120	0,006096	0,780288
82500	1375,000	3,249168	0,003048	0,783336
86100	1435,000	3,252216	0,003048	0,786384

ARIZONA 1 NEUMAN



METODO DE NEUMAN: De la gráfica 1 y aplicando las fórmulas para estimar T y S : $T = 2.303Q/4\pi\Delta s$ y $S = 2.246Tt/r^2$ obtenemos los siguientes resultados:

Jacob recomienda que antes de analizar los datos de la prueba de bombeo los abatimientos deben corregirse mediante:

$$s_c = s - s^2/2B$$

donde s_c son los abatimientos corregidos, s los abatimientos y B es el espesor del acuífero.

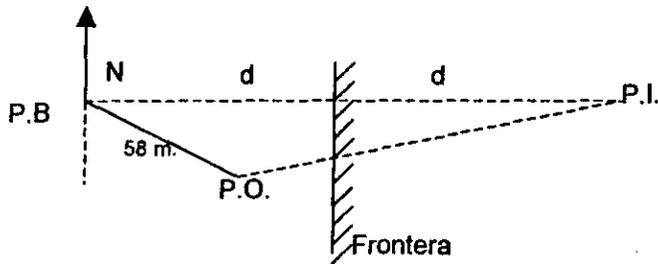
De acuerdo con Neuman (1975) estas correcciones deben aplicarse sólo a los abatimientos obtenidos en la segunda etapa de la prueba (etapa final). Como el abatimiento máximo es $s = 0.786384$ y $B = 30.48 \text{ m}$ entonces el valor del segundo término de la ecuación para los abatimientos corregidos es muy pequeño comparándolo con los abatimientos, por lo cual se desprecia, concluyendo que no es necesario aplicar la corrección de Jacob.

Etapa del bombeo	Δs (m)	t (min)	T (m^2/min)	S
Primera	0.3	0.3	6.719787	0.00997992
Segunda	0.28	2	7.1997717	0.0712851

Ejemplo 3. El siguiente Ejemplo Teórico muestra un conjunto de datos que simulan tiempo-abatimiento obtenidos por simulación, para un pozo de observación localizado a 58 m del pozo de bombeo en dirección S 30° E. La descarga del pozo de bombeo es de 2718.4 m³/día.

TIEMPO (días)	TIEMPO (min)	ABATIMIENTO (m)	ABATIMIENTO (ft)
2,E-04	0,288	0,076	0,25
4,E-04	0,576	0,174	0,57
1,E-03	1,44	0,372	1,22
2,E-03	2,88	0,558	1,83
4,E-03	5,76	0,768	2,52
1,E-02	14,4	1,058	3,47
2,E-02	28,8	1,271	4,17
4,E-02	57,6	1,509	4,95
1,E-01	144	1,804	5,92
2,E-01	288	2,042	6,7
4,E-01	576	2,265	7,43
1,E+00	1440	2,582	8,47

En la gráfica siguiente, observamos un cambio de pendiente (si trazamos la recta de correlación para los primeros tres datos). Esto puede indicar la existencia de una frontera. Para determinar la distancia de la frontera desde el pozo de bombeo emplearemos el método de las imágenes como sigue:

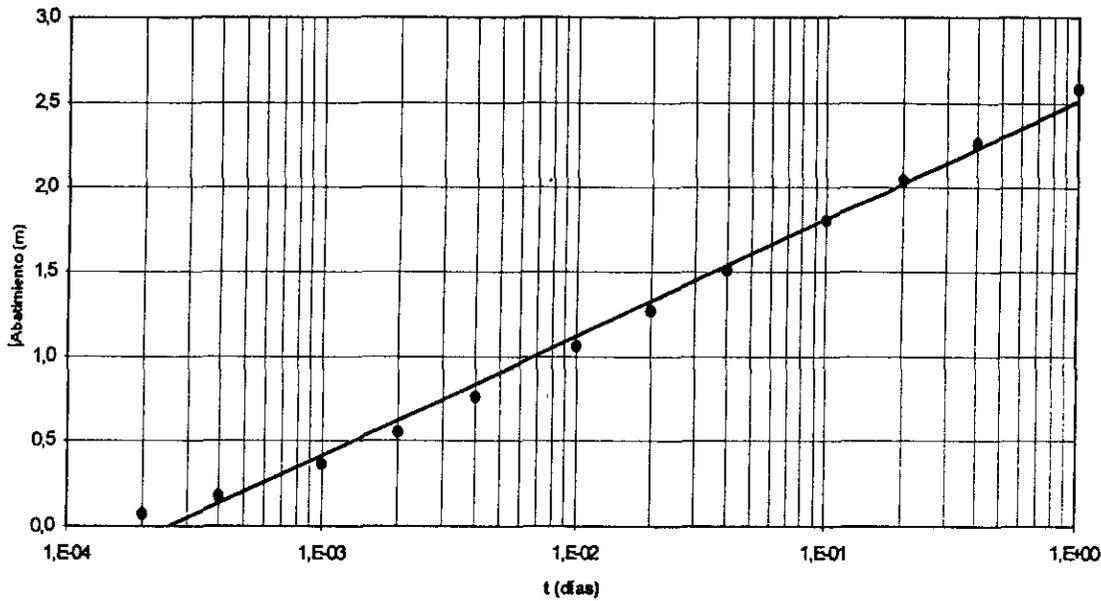


Asumiremos que el abatimiento es la suma de los abatimientos causados por el pozo real y el pozo imaginario. De las fórmulas:

$$s = \frac{2.303Q}{4\pi T} \log \frac{2.25T_1 t_1}{s_1 (58)^2} \text{ y } \Delta s = \frac{2.303Q}{4\pi T} \log \frac{2.25T_2 t_2}{s_2 d^2} \text{ si tomamos } t_1 \text{ y } t_2 \text{ de}$$

tal forma que $s = \Delta s$, de la gráfica del Ejemplo Teórico tenemos que $t_1 = 0.00016$ días y $t_2 = 0.00034$ días. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores tenemos que la frontera se localiza aproximadamente a 42.3 m del pozo de bombeo en dirección este.

EJEMPLO TEORICO



Para calcular la *transmisividad T* y el *coeficiente de almacenamiento S* del acuífero se aplicó de nuevo el método semilogarítmico de Neuman, obteniendo:

Etapa del bombeo	Δs (m)	t (min)	T (m^2/min)	S
Primera	0.3	0.00016	1660.8381	0.000177735
Segunda	0.75	0.00034	664.33524	0.000151075

Ejemplo 4. Arizona 2: Los siguientes datos de una prueba de bombeo muestran los tiempos y abatimientos de tres pozos de observación. El gasto promedio del pozo de bombeo es de $1.83 \text{ m}^3/\text{min}$. Estimaremos T y S aplicando los métodos de Theis y de Jacob -Cooper:

$r = 342,9 \text{ m}$		POZO OBS 1	
TIEMPO (min)	t/r^2	ABATIMIENTO (m)	ABATIMIENTO (ft)
0	0,00E+00		
18	1,53E-04	0,000	0,000
38	3,23E-04	0,006	0,020
65	5,53E-04	0,003	0,010
104	8,85E-04	0,027	0,090
139	1,18E-03	0,034	0,110

195	1,66E-03	0,018	0,060
225	1,91E-03	-0,006	-0,020
285	2,42E-03	-0,018	-0,060
345	2,93E-03	0,006	0,020
525	4,47E-03	0,015	0,050
645	5,49E-03	0,006	0,020
765	6,51E-03	0,006	0,020
885	7,53E-03	0,009	0,030
1005	8,55E-03	0,006	0,020
1245	1,06E-02	0,009	0,030
1365	1,16E-02	-0,006	-0,020
1485	1,26E-02	-0,003	-0,010
1605	1,37E-02	-0,003	-0,010
1785	1,52E-02	-0,003	-0,010
2025	1,72E-02	-0,003	-0,010
2505	2,13E-02	-0,003	-0,010
2745	2,33E-02	-0,003	-0,010
2985	2,54E-02	-0,006	-0,020
3226	2,74E-02	0,003	0,010
3345	2,84E-02	0,018	0,060
3475	2,96E-02	0,015	0,050

r = 251,46 m		POZO OBS 2	
TIEMPO (min)	t/r ²	ABATIMIENTO (m)	ABATIMIENTO (ft)
0	0,00E+00		
13	2,06E-04	0,229	0,750
80	1,27E-03	0,701	2,300
111	1,76E-03	0,780	2,560
143	2,26E-03	0,844	2,770
176	2,78E-03	0,911	2,990
203	3,21E-03	0,927	3,040
265	4,19E-03	0,991	3,250
355	5,61E-03	1,064	3,490
475	7,51E-03	1,122	3,680
625	9,88E-03	1,192	3,910
805	1,27E-02	1,262	4,140
1015	1,61E-02	1,298	4,260
1315	2,08E-02	1,366	4,480
1615	2,55E-02	1,417	4,650
2035	3,22E-02	1,448	4,750
2875	4,55E-02	1,515	4,970
3123	4,94E-02	1,545	5,070
4360	6,90E-02	1,564	5,130
5085	8,04E-02	1,567	5,140
5838	9,23E-02	1,615	5,300

r = 86,868 m		POZO OBS 3	
TIEMPO (min)	t/r^2	ABATIMIENTO (m)	ABATIMIENTO (ft)
0	0,00E+00		
1	1,33E-04	0,177	0,580
2	2,65E-04	0,183	0,600
3	3,98E-04	0,631	2,070
4	5,30E-04	0,777	2,550
5	6,63E-04	0,905	2,970
6	7,95E-04	1,067	3,500
7	9,28E-04	1,106	3,630
8	1,06E-03	1,222	4,010
9	1,19E-03	1,234	4,050
10	1,33E-03	1,295	4,250
11	1,46E-03	1,399	4,590
12	1,59E-03	1,430	4,690
16	2,12E-03	1,527	5,010
20	2,65E-03	1,670	5,480
30	3,98E-03	1,804	5,920
40	5,30E-03	1,893	6,210
50	6,63E-03	1,969	6,460
60	7,95E-03	2,021	6,630
70	9,28E-03	2,070	6,790
80	1,06E-02	2,094	6,870
90	1,19E-02	2,124	6,970
120	1,59E-02	2,185	7,170
140	1,86E-02	2,222	7,290
180	2,39E-02	2,271	7,450
240	3,18E-02	2,335	7,660
605	8,02E-02	2,536	8,320
815	1,08E-01	2,606	8,550
1235	1,64E-01	2,694	8,840
2557	3,39E-01	2,786	9,140
3037	4,02E-01	2,813	9,230
3454	4,58E-01	2,816	9,240
4412	5,85E-01	2,825	9,270
5795	7,68E-01	2,844	9,330

De la gráfica Arizona 2 Theis y aplicando las fórmulas $T = Q/4\pi s$ y $S = 4Tt/r^2$ obtenemos:

POZO OBS.	R (m)	s (m)	t (min)	T (m ² /min)	S
1	343	0.08	70	1.8203347	0.00433485
2	251.5	0.3	3.8	0.4854225	0.00016687
3	86.9	0.35	0.1	0.4160764	0.00002203

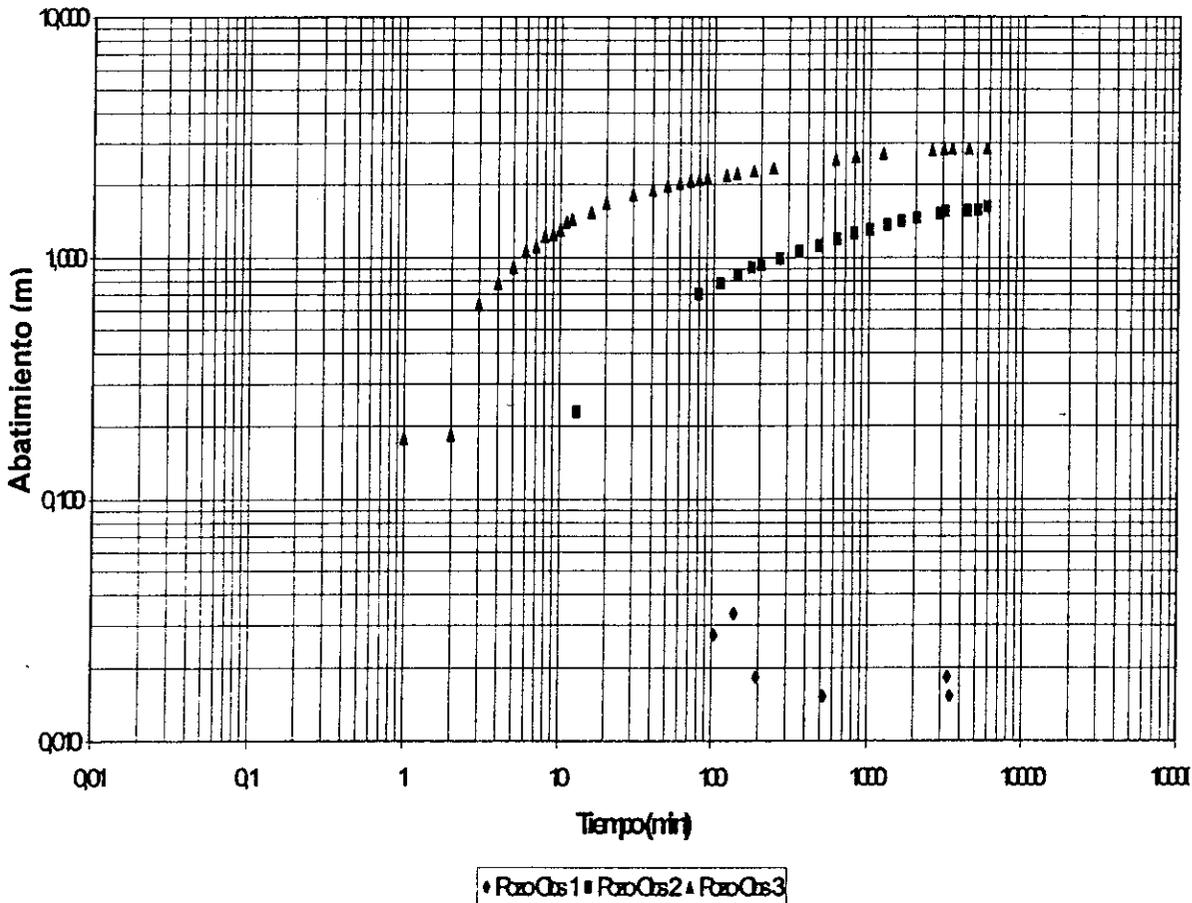
Aplicando el método de Jacob-Cooper: De la gráfica Arizona 2 Jacob-Cooper y aplicando las fórmulas $T = 2.303Q/4\pi\Delta s$ y $S = 2.25Tt_0/r^2$ tenemos:

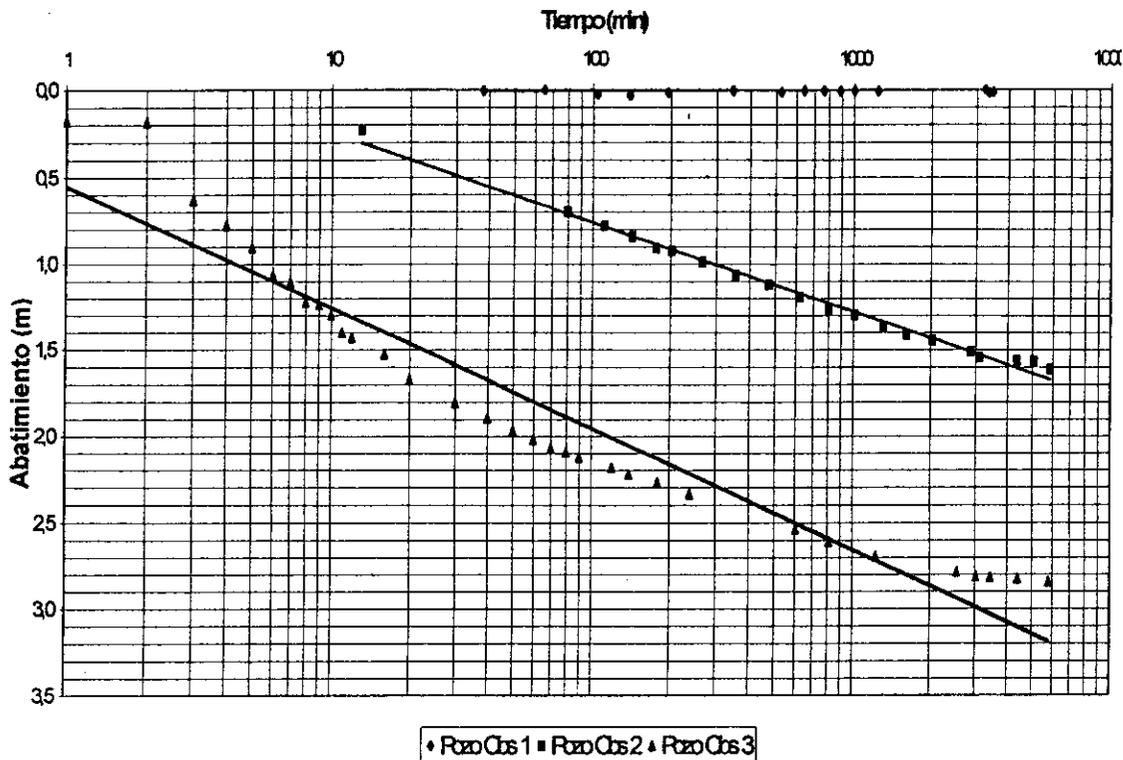
POZO OBS.	r (m)	Δs (m)	t_0 (min)	T (m ² /min)	S
1	343	0.03	38	11.179282	0.0081244
2	251.5	0.5	3.5	0.6707569	0.0000835
3	86.9	0.7	*	0.479112	0.000255**

**Se obtuvo aplicando la fórmula:

$$\log S = \log \frac{2.25Tt_1}{r^2} - \frac{s_1}{c} \quad \text{donde } c = \frac{2.303Q}{4\pi T}, \quad T = 0.479112 \text{ m}^2/\text{min}, \quad r = 86.9 \text{ m}, \quad t_1 = 1 \text{ min} \text{ y } s_1 = 0.177 \text{ m}.$$

ARIZONA2THES





Ejemplo 5. Arizona 3: Los datos mostrados, se obtuvieron del Acuífero Ubutte, Arizona. Este acuífero está compuesto por capas de arena fina y de arenas arcillosas con permeabilidad relativamente baja. La perforación indicó que el espesor promedio del acuífero es de 40 m en la vecindad del pozo de bombeo pero estudios geofísicos preliminares demostraron que el espesor del acuífero es menor hacia el Este del pozo de bombeo. Durante la prueba, el pozo estuvo bombeando a una razón de 1215 m³/día y los abatimientos fueron medidos en tres pozos de observación localizados a 30 m al Este, 80 m al Este y 180 m al Norte del pozo de bombeo respectivamente.

ACUIFERO UBUTTE			
POZO OBS. 1		POZO OBS. 2	POZO OBS. 3
r = 30 m		r = 80 m	r = 180 m
TIEMPO (días)	ABATIMIENTOS (m)	ABATIMIENTOS (m)	ABATIMIENTOS (m)
1,670E-03	0,024		
2,373E-03	0,048		
3,162E-03	0,075		
4,390E-03	0,115		
5,690E-03	0,153	0,003	
7,054E-03	0,188	0,006	
8,473E-03	0,220	0,010	

1,249E-02	0,293	0,026	
1,789E-02	0,366	0,052	
2,543E-02	0,442	0,089	
3,472E-02	0,511	0,130	0,005
4,998E-02	0,594	0,187	0,015
6,479E-02	0,654	0,233	0,028
8,032E-02	0,704	0,273	0,043
1,004E-01	0,756	0,317	0,062
1,405E-01	0,836	0,387	0,100
1,901E-01	0,907	0,452	0,142
2,606E-01	0,982	0,522	0,192
3,584E-01	1,058	0,593	0,249
5,062E-01	1,139	0,671	0,315
6,517E-01	1,148	0,728	0,366
8,042E-01	1,247	0,776	0,409
1,000E+00	1,298	0,825	0,455

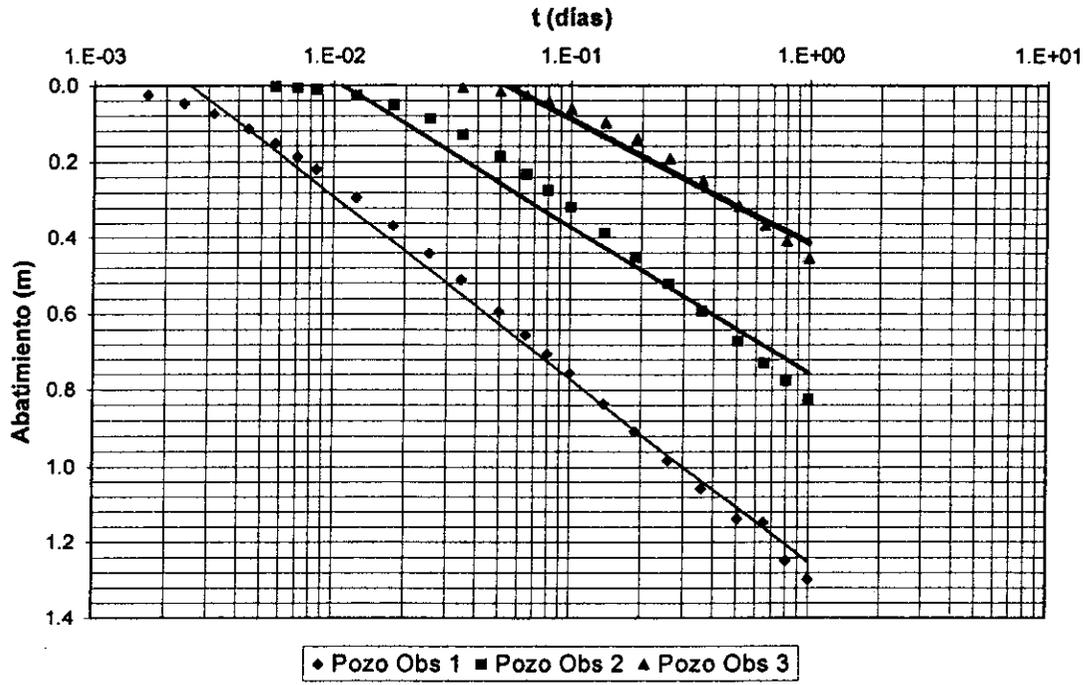
Asumiremos que el acuífero es homogéneo e isotrópico. Si el espesor del acuífero se hace menor hacia el este, por la suposición anterior, deduciríamos que la transmisividad estimada en el pozo de observación 2 es ligeramente mayor que la estimada en el pozo de observación 1. De las gráficas de tiempo-abatimiento para cada uno de los pozos se observa que los pozos 1 y 3 dan muy buen ajuste al modelo de Theis. Aplicando las ecuaciones $T = Q/4\pi s$ y $S = 4T(t/r^2)$ estimaremos los valores de la *Transmisividad T* y del *Coefficiente de almacenamiento S* para cada uno de los pozos (los valores de s y (t/r^2) se obtienen de las gráficas):

POZO OBS.	r (m)	s (m)	t/r^2 (días/m ²)	T (m ² /día)	S
1	30	0.24	2 E-6	402.86095	3.2 E-3
2	80	0.22	2.2 E-6	439.48467	3.8 E-3
3	180	0.2	2 E-6	483.43314	3.8 E-3

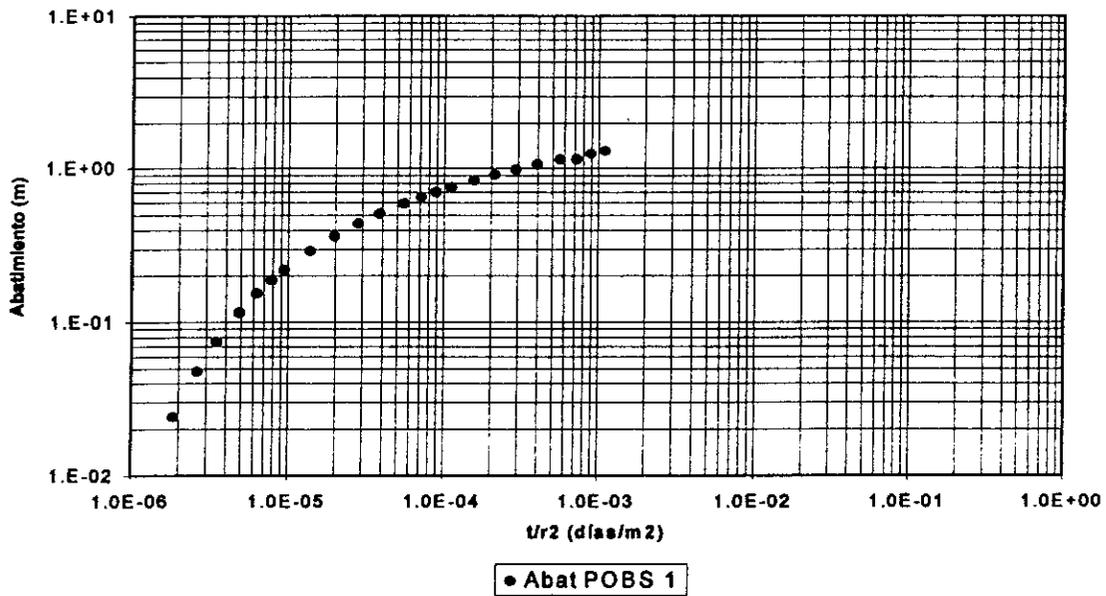
Si aplicamos el modelo de Jacob-Cooper considerando la gráfica siguiente y aplicando las fórmulas $T = 2.303Q/4\pi\Delta s$ y $S = 2.25Tt_0/r^2$ obtenemos:

POZO OBS.	r (m)	Δs (m)	t_0 (días)	T (m ² /día)	S
1	30	0.57	2.6 E-3	390.13903	2.5 E-3
2	80	0.38	1.2 E-2	585.20854	2.4 E-3
3	180	0.33	0.055	673.8765	2.5 E-3

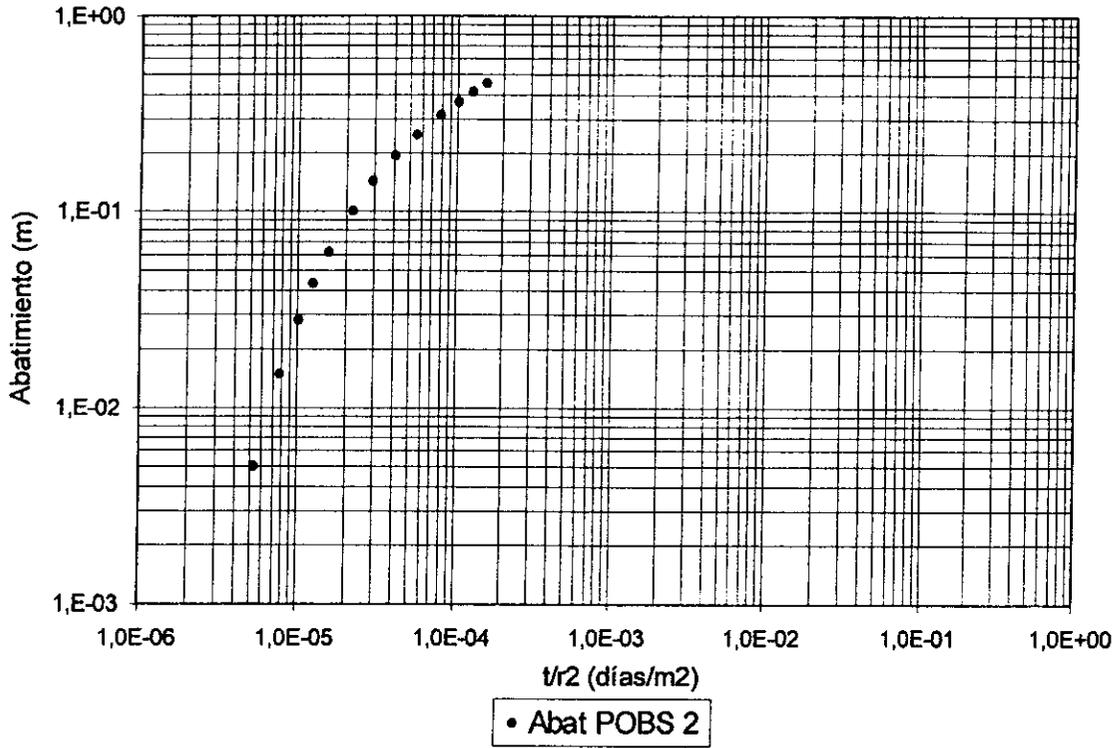
ARIZONA 3 JACOB-COOPER



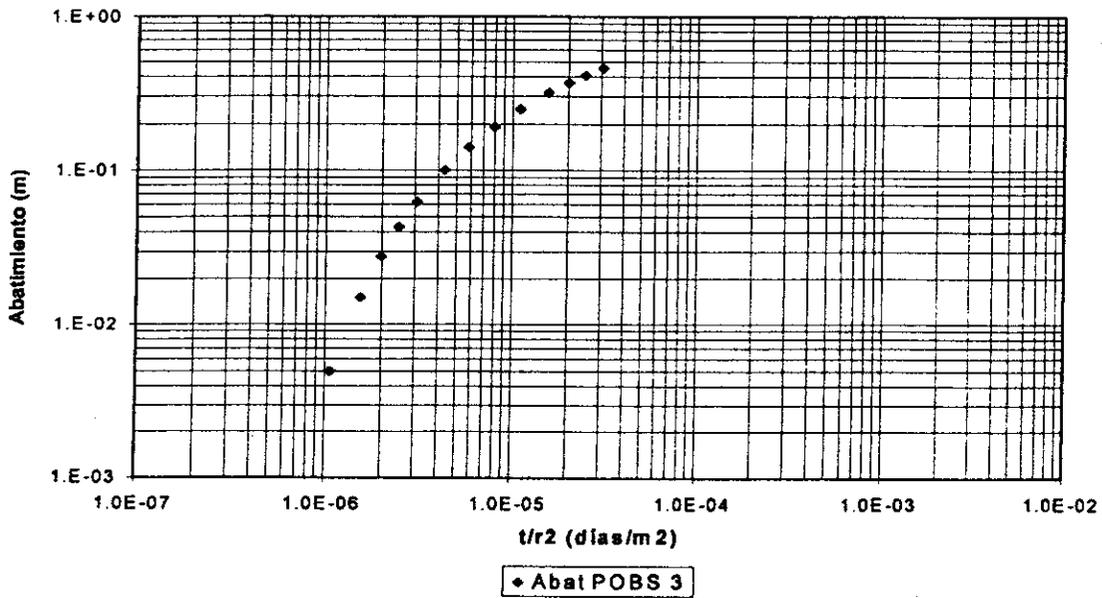
ARIZONA 3 THEIS



ARIZONA 3 THEIS



ARIZONA 3 THEIS



V. CONCLUSIONES

1. Se desarrollaron algunos de los modelos matemáticos restringiéndose a modelos determinísticos y susceptibles a ser resueltos analíticamente.
2. Se aplicaron algunos de los modelos matemáticos desarrollados con datos obtenidos en estudios de campo, pruebas de bombeo y simulados.
3. En este trabajo se ha ejemplificado el uso de las matemáticas en las ciencias naturales, concretamente en Hidrogeología.

BIBLIOGRAFÍA

- ARREGUÍN, J., FIGUEROA, G. Y PEÑA, S. 1968. Estudio Hidrogeológico completo de los Acuíferos de la Costa de Hermosillo, Sonora. Ariel Consultores y Dirección de Aguas Subterráneas. Sría. Rec. Hid. México.
- BEAR, J., VERRUIJT, A. 1987. Modeling Groundwater Flow and Pollution. Edit. Reidel. Netherland.
- BEAR, J. 1979. Hydraulics of groundwater. Mc Graw-Hill. U.S.A.
- BEDIENT P.B., RIFAI H.S., NEWELL C.J. 1994. Groundwater Contamination. Edit. PTR Prentice-Hall, Inc. New Jersey U.S.A.
- BENNETT D.G. 1976. Introduction to groundwater hydraulics. United States Geological Survey. Arlington VA U.S.A.
- BORGO V. G. 1998. El Modelo Matemático SHARP para el estudio de la Intrusión Salina en el Acuífero del Valle de Guaymas Sonora , México. Tesis Depto. de Matemáticas Universidad de Sonora. México.
- CHURCHILL R., BROWN J., VERHEY R. 1974. Complex Variables and Applications. International Student Edition. New York, U.S.A.
- EVETT B.J., LIU C. 1987 . Fundamentals of fluid mechanics. Edit. Mc. Graww Hill. U.S.A.
- FLORES S. B. 1990. Discretización en Diferencias Finitas de Modelos de Acuíferos. Tesis Depto. de Matemáticas Universidad de Sonora . México.
- GEOHIDROLOGÍA. Universidad Autónoma de Chapingo. 1986. México. 170pp.
- HILDEBRAND F. 1976. Advanced calculus for applications. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, U.S.A.
- HOCHSTADT H. 1964. Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, Inc., N. Y. U.S.A.
- HUMI M., MILLER W. 1988. Second course in ordinary differential equations for scientists and engineers. R. R. Donnelly and Sons. Virginia, U.S.A.
- INEGI. 1993. Estudio Hidrológico del Estado de Sonora. Aguascalientes. México.
- INGENIEROS CIVILES Y GEÓLOGOS ASOCIADOS. 1975. Elaboración y Calibración del Modelo Matemático de Intrusión Salina en el Valle de Guaymas, Sonora. Secretaría de Recursos Hidráulicos. México.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SONORA. 1985. Hidrología Superficial. Sonora, México. 129 pp.

KREYSZIG E. 1983. Matemáticas avanzadas para ingeniería. Limusa. Méx. D. F., México.

KRUSEMAN G. P., DE RIDER N. A. 1983. Analysis and evaluation of pumping test data. Bulletin 11 . ILRI. Netherlands. 200 pp.

LAPIDUS L., F. PINDER, GEORGE. 1982. Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering. U.S.A. 677 pp.

LOHMAN S. W. 1983, Ground-Water Hydraulics. United States Government Printing Office. U. S. A. 70 pp.

MATLOCK W.G., FOGEL M., BUSH C.D. 1966. Utilization of Water Resources in a coastal ground water basin. J. Soil and Water Conserv. V. 21. No. 5.

MIJAILOV L. 1985. Hidrogeología. Editorial MIR Moscu. URSS.

RESTREPO I. 1995. Agua, Salud y Derechos Humanos. México. 149 pp.

SCHNEEBELI G. 1966. Hydraulique souterraine. Eyrolles. París. Francia.

SNOEYINK V.L., JENKINS D. 1987. Química del Agua. Editorial Limusa. México.

STEINICH B., SIMON I., CHAVARRÍA A. MARÍN L. 1997. Geophysical Investigations of the vadose zone in the Valley of Hermosillo Acuífer, Sonora, México. Geofísica Internacional. Vol. 36. Num. 3.

THE DIFFERENTIAL EQUATIONS PROBLEM SOLVER. 1989. Research and Education Association. New Jersey, U.S.A.