



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

MEDIDAS INVARIANTES PARA CADENAS DE MARKOV FINITAS

T E S I S



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

Eneida Domínguez Gracia

DIRECTOR DE TESIS

M.C. MARIA TERESA ROBLES ALCARAZ

HERMOSILLO, SONORA

JUNIO DEL 2000

AGRADECIMIENTOS

A mi directora de tesis:

M.C. María Teresa Robles Alcaraz, por su gran apoyo incondicional, dedicación y confianza que siempre me brindó.

A mis sinodales:

Dr. Fernando Luque Vázquez

Dr. Adolfo Minjarez Sosa

Dr. Oscar Vega Amaya

Por sus valiosas aportaciones, que enriquecieron y mejoraron este trabajo.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)**, por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo por medio de los proyectos 387IP-E9607 y 28309-E.

A la **Universidad de Sonora**, por la oportunidad de estudio.

A mis **Maestros**, por su ejemplo y empeño en la enseñanza.

A mis **compañeros y amigos**, por su apoyo y amistad.

A mi **familia**, en especial a mis **padres y hermanos**, por su ayuda, comprensión y afecto, con respeto y cariño a todos...

GRACIAS.

Contenido

Introducción.

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN A CADENAS DE MARKOV.

1.1. Definición y ejemplos	1
1.2. Probabilidades de Orden Mayor	7
1.3. Clasificación de Estados de una cadena de Markov	11
1.4. Descomposición del Espacio de Estados	21
1.5. Conclusiones	33

Capítulo 2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS .

2.1. Definición y Propiedades de la Distribución Estacionaria	35
2.2. Existencia y Unicidad de Distribuciones Estacionarias	42
2.3. Conclusiones	55

Capítulo 3. CADENAS DE MARKOV CON ESPACIO DE ESTADOS FINITO.

3.1. Cadenas de Markov Irreducibles	55
3.2. Cadenas de Markov Reducibles	64
3.3. Probabilidades de absorción.....	68
3.4. Conclusiones	75

Apéndice	77
----------------	----

Bibliografía	85
--------------------	----

Introducción :

La teoría de procesos estocásticos es un área de las Matemáticas, que tiene mucha importancia por sus múltiples aplicaciones. Estas se encuentran tanto en las Ciencias Sociales, Biología, Economía, y en diversas áreas de la Ingeniería. Una clase importante de procesos estocásticos la constituyen los procesos de Markov. Estos tienen la característica general de que las observaciones futuras sólo dependen del presente y no del pasado, y para su estudio se pueden clasificar dependiendo del espacio de estados, el tiempo en que se observan y la ley de evolución

A los procesos de Markov con espacio de estados numerable, se les conoce como cadenas de Markov. En este trabajo nos concentraremos en el estudio de las cadenas de Markov a tiempo discreto, y con distribución de probabilidades estacionaria.

Los conceptos básicos de la teoría de las cadenas de Markov finitas fueron introducidas por *A. A. Markov (1856-1922)*, y desde entonces ésta teoría ha sido desarrollada por un buen número de importantes matemáticos. Un problema importante que se presenta en el estudio de las cadenas de Markov es analizar su comportamiento en tiempos futuros. Dicho comportamiento se puede caracterizar por medio de medidas de probabilidad invariantes asociadas al proceso. En este sentido el objetivo del presente trabajo es estudiar la existencia y la unicidad de medidas invariantes para cadenas de Markov con espacio de estados finito. Mismo que está organizado en tres capítulos de la siguiente manera.

En el primer capítulo, se dan las definiciones básicas de la teoría de cadenas de Markov, se clasifican los estados desde dos puntos de vista diferente, y se estudia la descomposición del espacio de estados, de acuerdo a estas clasificaciones.

En el segundo capítulo, los resultados principales se refieren a la existencia de algunos límites y distribuciones de equilibrio.

Finalmente en el tercer capítulo, se restringe el estudio de cadenas de Markov con espacio de estados finito, con esta restricción las probabilidades de transición es posible representarlas por una matriz cuadrada. Esto permite estudiar con mas detalle los resultados asintóticos obtenidos en el capítulo dos. Finalmente se anexa un apéndice de resultados que estaremos refiriendo a lo largo del trabajo.

Capítulo I

Cadenas de Markov

Introducción.

Las cadenas de Markov constituyen una clase de procesos estocásticos que ha tomado gran importancia por sus múltiples aplicaciones, así como sus aspectos teóricos. Quizá esto se deba a que gran parte de la teoría se puede interpretar de una manera intuitiva. Mas aún cuando los objetos que intervienen para su descripción se pueden analizar de manera discreta, como es el caso del presente trabajo.

En este capítulo presentaremos los aspectos generales de la teoría de cadenas de Markov con espacio de estados discreto. Introduciremos las definiciones y resultados más importantes que serán usados en el resto del trabajo.

1.1 Definición y ejemplos

Sea Ω el espacio muestral y P una medida de probabilidad en Ω , y considere un proceso estocástico $X = \{X_n; n \in N\}$ con espacio de estados numerable E . Esto es, para cada $n \in N$ y $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \in E$. Se dirá que "el proceso está en el estado x al tiempo n " si $X_n = x$. Entonces nos referiremos a X_n como el estado del proceso X al tiempo n , y al conjunto E como al espacio de estados del proceso X .

DEFINICION 1.1. El proceso estocástico $X = \{X_n, n \in N\}$ se dice que es una cadena de Markov si satisface la propiedad

$$(1.2) \quad P(X_{n+1} = y / X_0 = y_0, X_1 = y_1, \dots, X_{n-1} = y_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1} = y / X_n = x)$$

para todo $y_0, y_1, \dots, y_m, x, y \in E, n \in N$.

A esta propiedad se le conoce como propiedad de Markov.

Entonces, una cadena de Markov, es una sucesión de variables aleatorias $X_0, X_1, \dots$, tal que para cada n , la distribución del "futuro" X_{n+1} es condicionalmente independiente de los estados "pasados" $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$, dado el estado "presente" X_n .

A las probabilidades $P(X_{n+1} = y/X_n = x)$ se les conoce como probabilidades de transición en un paso para la cadena $\{X_n, n \geq 0\}$.

Si las probabilidades de transición en un paso no dependen de n se dice que la cadena de Markov es homogénea en el tiempo ó estacionaria, y en este caso a las probabilidades de transición se denotan por:

$$(1.3) \quad P(x, y) := P(X_{n+1} = y/X_n = x) \text{ para cada } x, y \in E, n \in N$$

De aquí en adelante supondremos que $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov estacionaria, con probabilidad de transición $P(x, y)$.

Las probabilidades de transición satisfacen las siguientes propiedades

$$(1.4) \quad P(x, y) \geq 0, \text{ para todo } x, y \in E.$$

$$(1.5) \quad \sum_{y \in E} P(x, y) = 1, \text{ para todo } x \in E.$$

Si el espacio de estados es finito, por ejemplo $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$, entonces las probabilidades de transición se pueden representar en una matriz con $n+1$ renglones y $n+1$ columnas.

$$(1.6) \quad P = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & \dots & P(0,n) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n,0) & P(n,1) & P(n,2) & \dots & P(n,n) \end{bmatrix}$$



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

DEFINICION 1.7. La función $\pi_0(\cdot)$ definida por

$$\pi_0(x) = P(X_0 = x), x \in E$$

se le llama distribución inicial de la cadena y, claramente satisface

$$(1.8) \quad \pi_0(x) \geq 0, x \in E$$

$$(1.9) \quad \sum_{x \in E} \pi_0(x) = 1$$

La distribución conjunta de las variables aleatorias $X_0, X_1, \dots, X_n$ pueden ser expresadas en términos de la función de transición y la distribución inicial. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1/X_0 = x_0) \\ &= \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Luego por inducción y por la propiedad de Markov se cumple

$$(1.10) \quad P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n)$$

para todo $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ y $n \in N$.

Ahora supongamos que $X = \{X_n, n \in N\}$ es un proceso estocástico con espacio de estados numerable E , $P(x, y)$ es una función de transición que satisface (1.4) y (1.5) y $\pi(\cdot)$ es una distribución que satisface (1.8) y (1.9). Si la distribución conjunta de $X_1, \dots, X_n$ está dada por (1.10), no es difícil ver que se cumple la propiedad de Markov, es decir, se satisface (1.2) y (1.3) siempre que las probabilidades condicionales en las respectivas ecuaciones esten bien definidas.

EJEMPLO 1.11. Sean $X_0, X_1, \dots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común

$$P(X=x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{si } x \notin N. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = x/X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] &= P[X_{n+1} = x/X_n = x_n] \\ &= P[X_{n+1} = x] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

En consecuencia $\{X_n; n \in N\}$ es una cadena de Markov, con distribución inicial f y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} f(0) & f(1) & \dots \\ f(0) & f(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Recíprocamente, si $\{X_n, n \in N\}$ es una cadena de Markov cuya matriz de transición tiene todos sus renglones idénticos, entonces $\{X_n, n \in N\}$, son independientes e idénticamente distribuidas (ver Apéndice A.1).

EJEMPLO 1.12. Caminatas Aleatorias. Sean $\xi_1, \xi_2, \dots$ variables aleatorias independientes con valores en los enteros y con densidad común f . Sea X_0 una variable aleatoria con valores en los enteros independiente de las variables $\xi_1, \xi_2, \dots$ y defina $X_n = X_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n \in N$.

Al proceso $X = \{X_n\}$ se le llama caminata aleatoria. Mostraremos que X es una cadena de Markov con función de transición

$$P(x, y) = f(y - x), \quad x, y \text{ en los enteros,}$$

y distribución inicial π_0 . Para hacer esto, observe que

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= P(X_0 = x_0, \xi_1 = x_1 - x_0, \xi_2 = x_2 - x_1, \dots, \xi_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= P(X_0 = x_0)P(\xi_1 = x_1 - x_0)P(\xi_2 = x_2 - x_1) \cdots P(\xi_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= \pi_0(x_0)f(x_1 - x_0)f(x_2 - x_1) \cdots f(x_n - x_{n-1}) \\ &= \pi_0(x_0)p(x_0, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n); \end{aligned}$$

es decir, (1.10) se cumple. En consecuencia, $X = \{X_n, n \in N\}$ es una cadena de Markov.

Supóngase que una "partícula" se mueve en los enteros de acuerdo a esta cadena de Markov. Si la partícula está inicialmente en x , esta salta (se mueve) al estado y con probabilidad $f(y - x)$.

En el caso particular, $f(1) = p$, $f(-1) = q$, $f(0) = r$, donde p , q y r son reales no-negativos cuya suma es igual a uno, se dice que la caminata aleatoria es simple. En este caso la función de transición está dada por

$$P(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ q & \text{si } y = x - 1 \\ r & \text{si } y = x \end{cases}.$$

EJEMPLO 1.13. Cadena de Nacimiento y Muerte. Considérese una cadena de Markov con espacio de estado $E = \{0, 1, \dots\}$, tal que la función de transición de la cadena está dada por

$$P(x, y) = \begin{cases} q_x & \text{si } y = x - 1 \\ r_x & \text{si } y = x \\ p_x & \text{si } y = x + 1 \end{cases},$$

donde q_x, r_x y p_x son números no-negativos, tal que $p_x + q_x + r_x = 1$.

Notemos que si la cadena de nacimiento y muerte tiene espacio de estados finito $E = \{0, 1, \dots, d\}$, la función de transición está dada como antes, solo que $P(d, d-1) + P(d, d) = q_d + r_d = 1$.

En particular las probabilidades de transición pueden depender del estado en el cual el proceso está localizado. La frase "Nacimiento y Muerte", se deriva de aplicaciones en las cuales el estado de la cadena es la población de un sistema viviente. En esas aplicaciones la transición del estado x al estado $x+1$ corresponde a "nacimiento", mientras que la transición de un estado x al estado $x-1$ corresponde a "muerte".

Un ejemplo de una cadena de Nacimiento y Muerte es la que representa el capital de un jugador, que se describe a continuación.

EJEMPLO 1.14. Ruina del jugador. Supongamos que un jugador empieza con un capital inicial, apostando en cada juego 1 dolar, donde la probabilidad de ganar es p y la probabilidad de perder es $q = 1 - p$. Si el capital del jugador llegara a ser cero, entonces éste se retira. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ el proceso que representa el capital del jugador al tiempo n . Esta es una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ y probabilidades de transición dada por: $P(0, 0) = 1$ y, para $x \geq 1$,

$$(1.14^*) \quad P(x, y) = \begin{cases} q & \text{si } y = x - 1 \\ p & \text{si } y = x + 1 \end{cases}.$$

Se puede modificar este modelo, suponiendo que el jugador dejará de jugar si incrementa su capital a d dolares. En este caso tomamos $P(d, d) = 1$, mientras que las probabilidades de transición restantes son las dadas en (1.14*), pero restringidas a los estados $x = 1, 2, \dots, d-1$.

EJEMPLO 1.15. Cadenas de Colas. Suponga que llegan clientes en forma aleatoria a solicitar un determinado servicio, para ser atendidas en forma inmediata ó pasar a una línea de espera (cola). La línea de espera se observa en periodos determinados y en cada periodo de tiempo se atiende exactamente un cliente. Denotemos por

ξ_n := número de nuevos clientes que llegan durante el n -ésimo periodo.

Supongamos que las variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ son independientes con valores en los enteros no-negativos y tienen densidad común f . Sean

X_0 := el número inicial de clientes.

X_n := el número de clientes al fin del n -ésimo periodo.

Se puede corroborar directamente que estas variables satisfacen la siguiente relación recursiva

$$X_{n+1} = \begin{cases} \xi_{n+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \\ X_n + \xi_{n+1} - 1 & \text{si } X_n \geq 1 \end{cases}.$$

Verifiquemos que $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov con valores en los enteros no-negativos y función de transición

$$P(0, y) = f(y), \quad y \geq 0$$

$$p(x, y) = f(y - x + 1), \quad x \geq 1.$$

De la independencia de las variables $\xi_1, \xi_2, \dots$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= P(X_0 = x_0, \xi_1 = x_1 - x_0 + 1, \dots, \xi_{n+1} = x_n - x_{n-1} + 1) \\ &= P(X_0 = x_0)P(\xi_1 = x_1 - x_0 + 1) \cdots P(\xi_{n+1} = x_n - x_{n-1} + 1) \\ &= \pi_0(x_0)f(x_1 - x_0 + 1) \cdots f(x_n - x_{n-1} + 1) \\ &= \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov.

1.2 Probabilidades de Orden Mayor

Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, una cadena de Markov con espacio de estados E y función de transición $P(.,.)$. En esta sección discutiremos como expresar ciertas probabilidades condicionales en términos de las probabilidades de transición.

DEFINICION 2.1. Se define la probabilidad de transición de orden $m \in N$, $P^m(x, y)$ como la probabilidad condicional de ir de un estado x al estado y en m -pasos. Es decir

$$P^m(x, y) := P(X_{n+m} = y / X_n = x), \text{ para toda } x, y \in E, n = 0, 1, \dots$$

y

$$P^0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

LEMA 2.2. Las probabilidades de orden mayor satisfacen las siguientes igualdades:

- a) $P^m(x, y) = \sum_{y_1} \dots \sum_{y_{m-1}} P(x, y_1)P(y_1, y_2) \dots P(y_{m-2}, y_{m-1})P(y_{m-1}, y).$
b) $P^{n+m}(x, y) = \sum_{z \in E} P^n(x, z)P^m(z, y).$

A la propiedad en b) se le conoce como Ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Demostración :

- a) Primeramente observe que

$$\begin{aligned} (2.3) \quad & P(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x, X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m)}{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)} \\ &= \frac{\pi_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x)P(x, y_1) \dots P(y_{m-1}, y_m)}{\pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x)} \\ &= P(x, y_1)P(y_1, y_2) \dots P(y_{m-1}, y_m), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene de (1.10).

Sean $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, subconjuntos de E . Se tiene de (2.3) y del Apéndice A.2

$$(2.4) \quad \begin{aligned} P(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m / X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x) \\ = P(x, y_1)P(y_1, y_2) \cdots P(y_{m-1}, y_m). \end{aligned}$$

Sean $B_1, B_2, \dots, B_m$, subconjuntos de E . De (2.4) y Apéndice A.5 tenemos

$$(2.5) \quad \begin{aligned} P(X_{n+1} \in B_1, \dots, X_{n+m} \in B_m / X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x) \\ = \sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} P(x, y_1)P(y_1, y_2) \cdots P(y_{m-1}, y_m). \end{aligned}$$



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

Tomando

$$B_1 = B_2 = \dots = B_{m-1} = A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = E \quad \text{y} \quad B_m = \{y\}$$

en (2.5), se obtiene

$$(2.6) \quad P(X_{n+m} = y / X_n = x) = \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_{m-1}} P(x, y_1)P(y_1, y_2) \cdots P(y_{m-1}, y);$$

luego de (2.6) y de la Definición 2.1 se sigue

$$(2.7) \quad P^m(z, y) = \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_{m-1}} P(z, y_1)P(y_1, y_2) \cdots P(y_{m-1}, y).$$

Para demostrar la parte b) del lema notemos que

$$\begin{aligned} P^{n+m}(x, y) &= P(X_{n+m} = y / X_0 = x) \\ &= \sum_z P(X_n = z / X_0 = x) P(X_{n+m} = y / X_0 = x, X_n = z) \\ &= \sum_z P^n(x, z) P(X_{n+m} = y / X_0 = x, X_n = z), \\ &= \sum_z P^n(x, z) P^m(z, y), \end{aligned}$$

para la segunda igualdad ver Apéndice A.3 Δ

Así como a las probabilidades de transición se le asocia una matriz de transición P (ver (1.6)), análogamente se puede hacer para las probabilidades de transición en n -pasos.

Del Lema 2.2 b) obtenemos

$$P^2(x, y) = \sum_z P(x, z)P(z, y)$$

$$P^n(x, y) = \sum_z P^{n-1}(x, z)P(z, y).$$

De la definición ordinaria de multiplicación de matrices, observamos que el producto de la matriz P con ella misma, esta dada por $[P^2(.,.)]$. Además si $m = 1$ en el Lema 2.2 a) se tiene $P^1(x, y) = P(x, y)$ luego por inducción se sigue que la n -ésima potencia de P esta dada por $[P^n(x, y)]$.

Sea π_0 la distribución inicial de la cadena de Markov. Entonces

$$\begin{aligned} P(X_n = y) &= \sum_x P(X_0 = x, X_n = y) \\ &= \sum_x P(X_0 = x)P(X_n = y/X_0 = x) \\ &= \sum_x \pi_0(x)P^n(x, y); \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(2.8) \quad P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)P^n(x, y).$$

Esta fórmula expresa la distribución de X_n en términos de la distribución inicial π_0 y la probabilidad de transición en n -pasos, $P^n(x, y)$. Además, obsérvese que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y) &= \sum_x P(X_n = x, X_{n+1} = y) \\ &= \sum_x P(X_n = x)P(X_{n+1} = y/X_n = x) \\ &= \sum_x P(X_n = x)P(x, y), \end{aligned}$$

luego

$$(2.9) \quad P(X_{n+1} = y) = \sum_x P(X_n = x)P(x, y).$$

Si conocemos la distribución de X_0 , podemos usar (2.9) y encontrar la distribución de X_1 ; luego, usando de nuevo (2.9) encontraremos la distribución de X_2 . Y así sucesivamente, podemos encontrar la distribución de X_n aplicando (2.9) n -veces.

DEFINICION 2.10. Sea A un subconjunto de E . El tiempo de entrada T_A al conjunto A , se define como

$$T_A = \min \{n > 0 : X_n \in A\},$$

y $T_A = \infty$ si $X_n \notin A$, para todo $n > 0$.

Note que T_A representa el tiempo (positivo) en el cual la cadena de Markov entra por primera vez al conjunto A . Por simplicidad, cuando $A = \{a\}$, el tiempo de entrada a dicho conjunto lo denotaremos por T_a .

Usaremos $P_x(\cdot)$ para denotar la probabilidad de los eventos definidos en términos de una cadena de Markov con estado inicial x . Con esta notación, $P^n(x, y) = P[X_n = y / X_0 = x]$ se puede escribir como $P_x[X_n = y]$.

Una ecuación importante que involucra tiempo de entrada con las probabilidades de transición de orden n es la siguiente :

PROPOSICIÓN 2.11. $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m] P^{n-m}(y, y), \quad n \geq 1, \quad x, y \in E$

Demostración :

Obsérvese que los eventos $[T_y = m, X_n = y]$, $1 \leq m \leq n$, son disjuntos y que

$$[X_n = y] = \bigcup_{m=1}^n [T_y = m, X_n = y].$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} P^n(x, y) &= P_x[X_n = y] \\ &= \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m, X_n = y] \\ &= \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m] P_x[X_n = y / T_y = m] \\ &= \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m] P[X_n = y / X_0 = x, X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y] \\ &= \sum_{m=1}^n P_x[T_y = m] P^{n-m}(y, y). \quad \Delta \end{aligned}$$

I.3 Clasificación de Estados de una Cadena de Markov.

Con el fin de describir con más detalle el comportamiento de una cadena de Markov presentaremos algunos conceptos y definiciones adicionales.

DEFINICIÓN 3.1. A un estado $x \in E$ se le llama estado **absorbente** si $P(x, x) = 1$.

DEFINICIÓN 3.2. Sean $x, y \in E$ estados de una cadena de Markov. Definimos

$$\varphi_{xy} := P_x(T_y < \infty).$$

Observe que φ_{xy} denota la probabilidad de que (la cadena) habiendo iniciado en el estado x ($X_0 = x$), la cadena esté en el estado y en un número finito de pasos. En particular, φ_{yy} denota la probabilidad de que la cadena retorne al estado y . La siguiente clasificación está dada en términos de estas probabilidades de retorno.

DEFINICIÓN 3.3. A un estado $y \in E$ se le llama

- a) **recurrente**, si $\varphi_{yy} = 1$
- b) **de tránsito**, si $\varphi_{yy} < 1$.

Si una cadena de Markov se encuentra en un estado recurrente y , entonces con probabilidad uno la cadena regresa al estado y en un tiempo finito. Si el proceso se encuentra en un estado de tránsito y , con probabilidad positiva ($1 - \varphi_{yy}$) la cadena no regresa al estado y .

Si y es un estado absorbente, entonces $P_y(T_y = 1) = P(y, y) = 1$; por lo tanto y es un estado recurrente.

Usaremos $E_x(\cdot)$ para denotar el valor esperado de variables aleatorias definidas en términos de la cadena de Markov con estado inicial x .

DEFINICIÓN 3.4. Sea y un estado de la cadena de Markov. Se define el tiempo medio de regreso al estado y por

$$m_y = E_y(T_y).$$

Es importante mencionar que el tiempo medio de retorno a un estado puede ser infinito, aún cuando éste sea recurrente.

DEFINICIÓN 3.5. A un estado recurrente y se le llama :

- a) **recurrente nulo** si $m_y = \infty$.
- b) **recurrente positivo** si $m_y < \infty$.

Sea $I_y(z)$, $z \in E$, la función indicadora del conjunto $\{y\}$, es decir, la función definida por

$$I_y(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = y \\ 0 & \text{si } z \neq y \end{cases} .$$

Definamos las variables aleatorias

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n)$$

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^n I_y(X_m) .$$

Note que $N(y)$ y $N_n(y)$ representan el número de visitas al estado y y el número de visitas al estado y hasta el tiempo n , respectivamente, y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(y) = N(y) .$$

Por otro lado note que $E[I_y(X_n)/X_0 = x] = E_x[I_y(x_n)] = P_x[X_n = y]$; entonces por el Teorema de la Convergencia Monótona (ver Apéndice A.7), se cumple

$$\begin{aligned} E(N(y)/X_0 = x) &= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_x(I_y(X_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n = y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) . \end{aligned}$$

Sea

$$(3.6) \quad G(x, y) = E_x(N(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y), \quad x, y \in E.$$

Observe que $G(x, y)$ representa el número esperado de visitas al estado y , cuando la cadena empieza en el estado x .

TEOREMA 3.7

a) Sea y un estado de tránsito, entonces :

$$i.- P_x(N(y) < \infty) = 1,$$

$$ii.- G(x, y) = \frac{\varphi_{xy}}{1 - \varphi_{yy}} < \infty, \quad \forall x \in E,$$

b) Sea y un estado recurrente, entonces:

$$i.- P_x(N(y) = \infty) = P_x(T_y < \infty) = \varphi_{xy}, \quad x \in E.$$

$$ii.- P_y(N(y) = \infty) = 1, \quad G(y, y) = \infty.$$

$$iii.- \text{Si } \varphi_{xy} = 0, \text{ entonces } G(x, y) = 0.$$

$$iv.- \text{Si } \varphi_{xy} > 0, \text{ entonces } G(x, y) = \infty.$$

Este Teorema, describe las diferencias fundamentales entre un estado de tránsito y un estado recurrente. Si y es un estado de tránsito no importa donde empiece la cadena, con probabilidad uno, visita a y solo un número finito de veces y el número esperado de visitas a y es finito. Pero si y es un estado recurrente y la cadena empieza en y , con probabilidad uno, ésta regresa a y una infinidad de veces. Si la cadena comienza en algún otro estado x , puede ser imposible alcanzar a y pero si ésto es posible y la cadena visita a y en algún tiempo finito, entonces visitará a y una infinidad de veces.

OBSERVACIÓN 3.8. Note que si y es un estado de tránsito, del Teorema 3.7 y de (3.6), se sigue que

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) < \infty, \text{ para todo } x \in E.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Para demostrar el Teorema 3.7 es necesario el siguiente lema.

LEMA 3.9 . Sean $x, y \in E$, entonces

$$a) P_x(N(y) = 0) = 1 - \varphi_{xy}$$

$$b) P_x(N(y) \geq m) = \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

$$c) P_x(N(y) = m) = \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1} (1 - \varphi_{yy}), \quad m \geq 1.$$

Demostración:

a) Observemos que

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n) \geq 1 \quad \text{si y sólo si} \quad T_y < \infty.$$

Entonces, de la Definición 3.2 se sigue

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = 0) &= 1 - P_x(N(y) \geq 1) \\ &= 1 - \varphi_{xy}, \end{aligned}$$

lo cuál demuestra a).

b) Sean n, m enteros positivos ; luego

$$\begin{aligned} P_x(X_1 \neq y, X_2 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y, X_{m+1} \neq y, \dots, X_{n+m-1} \neq y, X_{n+m} = y) \\ &= P_x(X_{m+1} \neq y, \dots, X_{m+n-1} \neq y, X_{n+m} = y / X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y) \\ &\quad P_x(X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y) \\ &= P(X_{m+1} \neq y, \dots, X_{m+n-1} \neq y, X_{n+m} = y / X_0 = x, X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y) \\ &\quad P_x(X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y) \\ &= P_y(X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y, X_n = y) P_x(X_1 \neq y, \dots, X_{m-1} \neq y, X_m = y) \\ &= P_y(T_y = n) P_x(T_y = m). \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de que la cadena de Markov con estado inicial x visite al estado y por primera vez en el tiempo m y la siguiente visita sea n unidades después, esta dada por $P_x(T_y = m) P_y(T_y = n)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P_x(N(y) \geq 2) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_x(T_y = l) P_y(T_y = k) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} P_x(T_y = l) \sum_{k=1}^{\infty} P_y(T_y = k) = \varphi_{xy} \varphi_{yy}. \end{aligned}$$

Análogamente tenemos que la probabilidad de que la cadena de Markov con estado inicial x visite al estado y por primera vez en el tiempo k_1 , y la siguiente visita sea k_2 unidades después, y la tercera visita sea k_3 unidades después que la segunda, y así sucesivamente la m -ésima visita será k_m unidades después de la $(m-1)$ -ésima visita esta dada por

$$P_x[T_y = k_1]P_y[T_y = k_2] \cdots P_y[T_y = k_m].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P_x[N(y) \geq m] &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} P_x[T_y = k_1]P_y[T_y = k_2] \cdots P_y[T_y = k_m] \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} P[T_y = k_1] \sum_{k_2=1}^{\infty} P_y[T_y = k_2] \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} P_y[T_y = k_m] \\ &= \varphi_{xy} \varphi_{yy} \cdots \varphi_{yy} \\ &= \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1}. \end{aligned}$$

c) Esta parte es consecuencia de b). En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = m) &= P_x(N(y) \geq m) - P_x(N(y) \geq m+1) \\ &= \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1} - \varphi_{xy} \varphi_{yy}^m \\ &= \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1} (1 - \varphi_{yy}), \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

lo cual demuestra c). Δ

Demostración del Teorema 3.7

a)i Sea y un estado de tránsito, es decir $0 \leq \varphi_{yy} < 1$, Del Lema 3.9 b), tenemos

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = \infty) &= \lim_{m \rightarrow \infty} P_x(N(y) \geq m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1} = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$P_x(N(y) < \infty) = 1.$$

a)ii. Esta parte es consecuencia de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} G(x, y) &= E_x(N(y)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m P_x(N(y) = m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} m \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1} (1 - \varphi_{yy}) \quad (\text{Lema 3.9 c}) \\
&= \varphi_{xy} (1 - \varphi_{yy}) \sum_{m=0}^{\infty} m \varphi_{yy}^{m-1} \\
&= \varphi_{xy} (1 - \varphi_{yy}) \frac{1}{(1 - \varphi_{yy})^2} = \frac{\varphi_{xy}}{1 - \varphi_{yy}}.
\end{aligned}$$

b)i y b)ii. Del Lema 3.9 b) y $\varphi_{yy} = 1$, tenemos que

$$P_x(N(y) = \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_x(N(y) \geq m)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{xy} \varphi_{yy}^{m-1}$$

$$= \varphi_{xy}, \quad \text{para todo } x, y.$$

Luego tomando $x = y$, se sigue $P_y(N(y) = \infty) = 1$. Entonces, puesto que $N(y)$ es una variable aleatoria no-negativa, tiene esperanza infinita; es decir,

$$G(y, y) = E_y(N(y)) = \infty.$$

b)iii. Si $\varphi_{xy} = P_x(T_y < \infty) = 0$, entonces $P_x(T_y = m) = 0$, para todo entero m finito; luego, (2.11) implica que $P^n(x, y) = 0$, para $n \geq 1$. Entonces, de (3.6) se sigue que $G(x, y) = 0$.

b)iv. Si $\varphi_{xy} > 0$ entonces b)i implica que $P_x(N(y) = \infty) = \varphi_{xy} > 0$. Por lo tanto

$$G(x, y) = E_x(N(y)) = \infty,$$

lo cual completa la demostración de Teorema 3.7. Δ

Recordemos que

$$E_x(I_y(X_n)) = P_x(X_n = y) = P^n(x, y), \quad x, y \in E,$$

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^n I_y(X_m),$$

y definimos

$$G_n(x, y) = E_x(N_n(y)) = \sum_{m=1}^n P^m(x, y).$$

TEOREMA 3.10

a) Si y es un estado tránsito, entonces

$$i. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = 0, \text{ con probabilidad uno}$$

$$ii. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0, \quad x \in E.$$

b) Si y es un estado recurrente, entonces

$$i. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{I_{\{T_y < \infty\}}}{m_y}, \text{ con probabilidad uno.}$$

$$ii. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{\phi_{xy}}{m_y}, \quad x \in E.$$

c) Si y es un estado recurrente positivo, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(y, y)}{n} = \frac{1}{m_y} > 0$$

d) Si y es un estado recurrente nulo, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0, \quad x \in E.$$

Observación 3.11. Note que $\frac{N_n(y)}{n}$ es la proporción de veces que la cadena esta en el estado y en los primeros n -pasos, y $\frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n P^m(x, y)$, es el valor esperado de esta proporción, cuando la cadena empieza en el estado x .

Definimos los siguientes conjuntos

E_T : = Es el conjunto de estados de tránsito,

E_R : = Es el conjunto de estados recurrentes,

$E_{R(+)}$: = Es el conjunto de estados recurrentes positivos,

$E_{R(-)}$: = Es el conjunto de estados recurrentes nulos.

Se tiene del Teorema 3.10 que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, y)$, siempre existe y satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E, y \in E_T \text{ ó } y \in E_{R^{(-)}} \\ \frac{1}{m_y} & \text{si } x = y, y \in E_{R^{(+)}} \\ \frac{\phi_{xy}}{m_y} & \text{si } x \in E, y \in E_{R^{(+)}} \end{cases}.$$

Demostración del Teorema 3.10:

a). Supongase que y es un estado de tránsito. Se tiene entonces del Teorema 3.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(y) = N(y) < \infty, \text{ con probabilidad uno, entonces}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = 0, \text{ con probabilidad uno.}$$

Por el Teorema 3.7, $G(x, y) < \infty$; $\forall x \in E$, por lo tanto se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x, y) = G(x, y) < \infty, x \in E, \text{ entonces}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0, x \in E.$$

b). Consideremos que la cadena empieza en un estado recurrente y ; Entonces, con probabilidad uno, regresa al estado y una infinidad de veces. Esta propiedad nos garantiza que las siguientes variables son finitas con probabilidad uno:

$$T_y^r = \min\{n \geq 1 : N_n(y) = r\},$$

donde r es natural. Observe que T_y^r representa el tiempo de la r -ésima visita a y .

Ahora defina las variables

$$W_y^1 = T_y^1 = T_y, \quad y \quad W_y^r = T_y^r - T_y^{r-1}, \quad \text{para } r \geq 2.$$

Observe que W_y^r nos proporciona el tiempo de espera entre la $(r-1)$ -ésima y r -ésima visita al estado y . Claramente

$$T_y^r = W_y^1 + W_y^2 + \dots + W_y^r.$$

Las variables $W_y^1, W_y^2, \dots$ son independientes e idénticamente distribuidas (ver Apéndice A.6) y

$$E_y(W_y^r) = E_y(W_y^{r-1}) = \dots = E_y(W_y^1) = E_y(T_y) = m_y;$$

luego, por la Ley de los Grandes Números, se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W_y^1 + \dots + W_y^k}{k} = m_y, \text{ con probabilidad uno; es decir}$$

$$(3.12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_y^k}{k} = m_y, \text{ con probabilidad uno.}$$

Sea $r = N_n(y)$ el número de visitas al estado y en las primeras n transiciones. Entonces la r -ésima visita a y ocurre en el tiempo n ó antes del tiempo n , y la $(r+1)$ -ésima visita a y ocurre después del tiempo n ; esto es

$$T_y^{N_n(y)} \leq n < T_y^{N_n(y)+1},$$

entonces,

$$\frac{T_y^{N_n(y)}}{N_n(y)} \leq \frac{n}{N_n(y)} \leq \frac{T_y^{N_n(y)+1}}{N_n(y)}.$$

Como $N_n(y) \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$, con probabilidad uno, pues y es un estado recurrente; entonces de (3.12) se sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N_n(y)} = m_y, \text{ con probabilidad uno,}$$

ó equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{m_y}.$$

Sea y un estado recurrente. Cuando X_0 tiene distribución arbitraria, la cadena puede no alcanzar a y , pero si es alcanzado, el argumento anterior nos muestra que, con probabilidad uno,

$$\frac{N_n(y)}{n} \rightarrow \frac{I_{\{T_y < \infty\}}}{m_y}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por otra parte, puesto que $0 \leq N_n(y) \leq n$, tenemos que

$$0 \leq \frac{N_n(y)}{n} \leq 1.$$

Ahora usando el Teorema de la Convergencia Dominada, podemos intercambiar límite con el operador E_x para tener:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_x \left(\frac{N_n(y)}{n} \right) &= E_x \left(\frac{I_{\{T_y < \infty\}}}{m_y} \right) \\ &= \frac{P_x(T_y < \infty)}{m_y} = \frac{\phi_{xy}}{m_y}. \end{aligned}$$

Puesto que

$$G_n(x, y) = E_x(N_n(y)), \text{ por lo tanto,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(y, y)}{n} = \frac{\Phi_{yy}}{m_y}, \quad x \in E.$$



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Demostración de c) y d) .

Si un estado y es recurrente positivo, es decir, $m_y < \infty$, entonces por b)ii, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{\Phi_{xy}}{m_y} = \frac{1}{m_y} > 0.$$

Ahora si y es un estado recurrente nulo ($m_y = \infty$), y de nuevo de b)ii se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{\Phi_{xy}}{m_y} = 0, \quad x \in E.$$

Δ

I.4 Descomposición del Espacio de Estados.

DEFINICIÓN 4.1 Sean x y y estados distintos. Diremos que

- a) x alcanza a y si $\varphi_{xy} > 0$.
- b) x se comunica con y si x alcanza a y y y alcanza a x .

TEOREMA 4.2

- a) x alcanza a y si, y solo si $P^n(x, y) > 0$, para algún $n > 0$.
- b) Si x alcanza a y y y alcanza a z , entonces x alcanza a z .

Demostración :

a). Supongase que x alcanza a y , es decir, que $\varphi_{xy} = P_x[T_y < \infty] > 0$. Entonces existe algún entero positivo n , tal que $P_x[T_y = n] > 0$ de la Proposición 2.11 se tiene

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{n-1} P_x(T_y = m)P^{n-m}(y, y) + P_x(T_y = n)P^0(y, y).$$

$$\geq P_x(T_y = n) > 0.$$

Ahora supóngase que $P^n(x, y) > 0$, para algún $n > 0$. Entonces de la Proposición 2.11 se sigue

$$P_x(T_y = m) > 0, \quad \text{para algún entero } 0 < m \leq n,$$

lo cual implica que

$$P_x(T_y < \infty) = \varphi_{xy} > 0.$$

b) Por a) existen enteros positivos m y n tales que

$$P^m(x, y) > 0 \quad \text{y} \quad P^n(y, z) > 0.$$

Ahora, de la ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.2), se tiene

$$P^{n+m}(x, z) = \sum_{h \in E} P^m(x, h)P^n(h, z) > 0$$

$$\geq P^m(x, y)P^n(y, z) > 0;$$

por lo tanto, de a) se sigue que x alcanza a z . Δ

TEOREMA 4.3. Sean $x, y \in E$.

- a) Si x es un estado recurrente, y además x alcanza a y , entonces y es un estado recurrente y $\varphi_{xy} = \varphi_{yx} = 1$.
- b) Si x es un estado recurrente positivo y x alcanza a y , entonces y es recurrente positivo.

Demostración :

a) Suponemos que $x \neq y$. Como x alcanza a y , se tiene $\varphi_{xy} = P_x(T_y < \infty) > 0$, lo cual implica que $P_x[T_y = n] > 0$, para algún entero positivo n . Sea n_0 el menor entero positivo, tal que $P_x[T_y = n] > 0$, es decir,

$$(4.4) \quad n_0 = \min\{n \geq 1 : P_x(T_y = n) > 0\};$$

entonces de la Proposición 2.11 y de $P_x(T_y = n_0) > 0$ se sigue que $P^{n_0}(x, y) > 0$ y

$$(4.5) \quad P^m(x, y) = 0, \quad 1 \leq m \leq n_0.$$

Por otra parte, como $P^{n_0}(x, y) > 0$, existen estados $y_0, y_1, \dots, y_{n_0-1}$ tal que

$$(4.6) \quad \begin{aligned} P_x(X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_{n_0-1} = y_{n_0-1}, X_{n_0} = y) \\ = P(x, y_1)P(y_1, y_2) \cdots P(y_{n_0-1}, y) > 0. \end{aligned}$$

Note que ninguno de los estados $y_1, \dots, y_{n_0-1}$ coincide con x ó y ; pues si coincidieran sería posible ir del estado x al estado y en un número menor que n_0 pasos, lo cual contradice (4.5).

Probemos ahora que $\varphi_{yx} = 1$.

Primero observemos que

$$\begin{aligned} P_x(X_1 = y_1, \dots, X_{n_0} = y, X_{n_0+k} \neq x, \forall k \geq 1) \\ = P_x(X_{n_0+k} \neq x, k \geq 1 | X_1 = y_1, \dots, X_{n_0} = y) P_x(X_1 = y_1, \dots, X_{n_0} = y) \\ = P_y(T_x = \infty) P_x(X_1 = y_1, \dots, X_{n_0} = y) \\ = P_y(T_x = \infty) P(x, y_1) P(y_1, y_2) \cdots P(y_{n_0-1}, y) \\ = (1 - \varphi_{yx}) P(x, y_1) P(y_1, y_2) \cdots P(y_{n_0-1}, y) > 0. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\varphi_{yx} = 1$, ya que de lo contrario tendríamos que $\varphi_{yx} < 1$, lo cual no puede ocurrir puesto que x es un estado recurrente.

Como $\varphi_{yx} = 1$, del Teorema 4.2 a), existe un entero positivo n_1 tal que

$$P^{n_1}(y, x) > 0.$$

Ahora de la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tiene

$$\begin{aligned} P^{n_1+n+n_0}(y, y) &= \sum_{x \in E} P^{n_1}(y, x) P^n(x, x) P^{n_0}(x, y) \\ &\geq P^{n_1}(y, x) P^n(x, x) P^{n_0}(x, y). \end{aligned}$$

Entonces

$$(4.7) \quad P^{n_1+n+n_0}(y, y) \geq P^{n_1}(y, x) P^n(x, x) P^{n_0}(x, y), \quad y$$

$$\begin{aligned} G(y, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, y) \geq \sum_{n=n_1+1+n_0}^{\infty} P^n(y, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P^{n_1+n+n_0}(y, y) \\ &\geq P^{n_1}(y, x) P^{n_0}(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, x) \\ &= P^{n_1}(y, x) P^{n_0}(x, y) G(x, x) = \infty; \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que y es también un estado recurrente. Además y alcanza a x , y de la primera parte de la demostración se sigue que $\varphi_{xy} = 1$.

b) Del Teorema 4.2 a), existen enteros positivos n_1 y n_2 , tal que

$$P^{n_1}(y, x) > 0 \quad y \quad P^{n_2}(x, y) > 0;$$

entonces del Lema 2.2 b), se tiene

$$P^{n_1+m+n_2}(y, y) \geq P^{n_1}(y, x) P^m(x, x) P^{n_2}(x, y).$$

Ahora sumando en ambo lados de la desigualdad para $m=1, 2, \dots, n$ y multiplicando por $\frac{1}{n}$ se tiene

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{n_1+m+n_2}(y, y) \geq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{n_1}(y, x) P^m(x, x) P^{n_2}(x, y),$$

lo cual puede escribirse como

$$\sum_{m=1}^{n_1+n+n_2} \frac{P^m(y, y)}{n} - \sum_{m=n_1+n+n_2}^{n_1+n_2} \frac{P^m(y, y)}{n} \geq P^{n_1}(y, x) P^n(x, y) \sum_{m=1}^n \frac{P^m(x, x)}{n}.$$

Es decir

$$\frac{G_{n_1+n_2}(y,y)}{n} - \frac{G_{n_1+n_2}(y,y)}{n} \geq P^{n_1}(y,x)P^{n_2}(x,y)\frac{G_n(x,x)}{n}.$$

Entonces, tomando limite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$\frac{1}{m_y} \geq P^{n_1}(y,x)P^{n_2}(x,y)\frac{1}{m_y} > 0,$$

y en consecuencia $m_y < \infty$. Δ

DEFINICIÓN 4.8. Un conjunto no-vacio C de estados, es cerrado si ningún estado de C alcanza a estados fuera de C , es decir, si

$$(4.9) \quad \varphi_{xy} = 0, \quad x \in C, \quad y \notin C.$$

Equivalentemente, por Teorema 4.2 a), C es cerrado si, y sólo si

$$(4.10) \quad P^n(x,y) = 0, \quad \forall x \in C, \quad y \notin C, \quad n \geq 1.$$

Si x es un estado absorbente, entonces el conjunto $C = \{x\}$ es un conjunto cerrado.

DEFINICIÓN 4.11. Un conjunto cerrado C es irreducible si x alcanza a y , para todo $x, y \in C$.

El siguiente Corolario se sigue del Teorema 4.3.

COROLARIO 4.12. Sea C un conjunto cerrado e irreducible en una cadena de Markov. Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones

- a) todos los estados en C son recurrentes positivos.
- b) todos los estados en C son recurrentes nulos.
- c) todos los estados en C son de tránsito.

Demostración:

Primero demostraremos que todos los estados de un conjunto cerrado e irreducible de una cadena de Markov, son de tránsito o recurrentes.

i) Sea $x \in C$ un estado recurrente. Por definición de conjunto irreducible, se cumple que el estado x se comunica con el estado $y \forall y \in C$; entonces por el Teorema 4.3 a) se tiene que y es un estado recurrente; es decir cada estado en C es recurrente.

ii) Sea $y \in C$, un estado de tránsito, donde el estado x se comunica con el estado $y \forall x \in C$. Supongamos que x es un estado recurrente, entonces por el Teorema 4.3 a),

se tiene que y es un estado recurrente, lo cual es una contradicción, por lo tanto el estado x es necesariamente de tránsito, así cada estado en el conjunto C es de tránsito.

Ahora se demostrará que si se tiene un conjunto cerrado e irreducible C de estados recurrentes, entonces o todos los estados son recurrentes positivos o todos son recurrentes nulos.

i) Sea $x \in C$ un estado recurrente positivo. Por definición de conjunto irreducible, se cumple que el estado x se comunica con el estado $y \forall y \in C$, entonces por el Teorema 4.3 b) se tiene que y es un estado recurrente positivo; es decir cada estado en C es recurrente positivo.

ii) Sea y un estado recurrente nulo. Supongamos que x es un estado recurrente positivo, entonces por el Teorema 4.3 b), se tiene que y es un estado recurrente positivo, lo cual es una contradicción, por lo tanto el estado x es necesariamente recurrente nulo, así cada estado en el conjunto C es recurrente nulo. Δ

DEFINICIÓN 4.13. A una cadena de Markov se le llama :

- a) recurrente positiva si todos sus estados son recurrentes positivos.
- b) recurrente nula si todos sus estados son recurrentes nulos.
- c) transitoria si todos sus estados son de tránsito.
- d) Irreducible si x alcanza a y , para todo $x, y \in E$, es decir $\varphi_{xy} > 0$, para todo $x, y \in E$.

Entonces de Corolario 4.12, se sigue que una cadena de Markov irreducible, es una cadena recurrente positiva, recurrente nula ó de tránsito.

TEOREMA 4.14. Si C es un conjunto cerrado y finito, entonces tiene al menos un estado recurrente positivo.

Demostración :

Tenemos que para cada $m = 1, 2, \dots$, se cumple

$$\sum_{y \in C} P^m(x, y) = 1, \quad x \in C.$$

Sumando para $m = 1, \dots, n$ y dividiendo por n , se tiene

$$\sum_{m=1}^n \sum_{y \in C} \frac{1}{n} P^m(x, y) = \sum_{y \in C} \frac{G_n(x, y)}{n} = 1, \quad x \in C.$$

Si C es finito y suponemos que cada estado en C es de tránsito ó recurrente nulo, entonces por el Teorema 3.10

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in C} \frac{G_n(x, y)}{n}$$

$$= \sum_{y \in C} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = 0,$$

lo cual es una contradicción ; por lo tanto C tiene al menos un estado recurrente positivo. Δ

COROLARIO 4.15. Sea C un conjunto de estados finito, cerrado e irreducible. Entonces cada estado en C es recurrente positivo.

Demostración : Como C es cerrado y finito, del Teorema 4.14, existe al menos un estado recurrente positivo en C , y del Corolario 4.12 , cada estado en C es recurrente positivo. Δ

COROLARIO 4.16. Una cadena de Markov finita, no puede ser de tránsito ni recurrente nula.

Demostración : Consecuencia inmediata del Teorema 4.15. Δ

COROLARIO 4.17. Una cadena de Markov irreducible, con un número finito de estados, es recurrente positiva.

Demostración : Consecuencia inmediata del Corolario 4.14. Δ

COROLARIO 4.18. Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Entonces

$$\varphi_{xy} = 1, \quad P_x(N(y) = \infty) = 1 \text{ y } G(x, y) = \infty, \quad \text{para } x, y \in C.$$

Demostración : La primera igualdad se sigue del Teorema 4.3 a); la segunda igualdad del Teorema 3.7 b)i y del Teorema 4.3 a) y la tercera igualdad del Teorema 3.7 b) iv. Δ

COROLARIO 4.19. Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{1}{m_y}, \quad x, y \in C.$$

Si además $P(X_0 \in C) = 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{m_y}, \quad y \in C.$$

Demostración : Se sigue del Teorema 3.10 b) y Corolario 4.18. Δ

En general es difícil decidir cuando una cadena de Markov irreducible con, espacio de estados infinito es recurrente o de tránsito. En el siguiente ejemplo veremos que condición debe cumplir una cadena de nacimiento y muerte, con espacio de estados infinito, para que sea recurrente o de tránsito.

EJEMPLO 4.20. Consideremos una cadena de Nacimiento y Muerte, con $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ó $E = \{0, 1, \dots, d\}$, y función de transición

$$P(x, y) = \begin{cases} q_x & \text{si } y = x - 1 \\ r_x & \text{si } y = x \\ p_x & \text{si } y = x + 1 \end{cases},$$

donde $p_x + q_x + r_x = 1$.

Supongamos que la cadena es irreducible, es decir, $p_x > 0$, si $x \geq 0$, y $q_x > 0$, si $x \geq 1$.

Recuerde que si el espacio de estados es finito, por hipótesis de irreducibilidad, tenemos por el Corolario 4.17 que la cadena de Nacimiento y Muerte es recurrente positiva.

Por lo tanto consideremos el caso con espacio de estados infinito.

Para $a, b \in E$, tal que $a < b$, sea

$$u(x) = P_x(T_a < T_b), \quad a < x < b \quad y \quad u(a) = 1, \quad u(b) = 0.$$

Si la cadena de nacimiento y muerte se encuentra en el estado y , en un paso puede ir al estado $y-1$, y ó $y+1$, con probabilidades q_y, r_y ó p_y respectivamente.

Por lo tanto

$$(4.21) \quad u(y) = q_y u(y-1) + r_y u(y) + p_y u(y+1), \quad a < y < b.$$

Como $r_y = 1 - p_y - q_y$, se tiene de (4.21) que

$$(4.22) \quad u(y+1) - u(y) = \frac{q_y}{p_y} (u(y) - u(y-1)), \quad a < y < b.$$

Sea $\psi_0 = 1$ y

$$(4.23) \quad \psi_y = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_y}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_y}, \quad y > 0.$$

De (4.22), se tiene

$$u(y+1) - u(y) = \frac{\psi_y}{\psi_{y-1}} (u(y) - u(y-1)), \quad a < y < b,$$

de lo cual se sigue que,

$$u(y+1) - u(y) = \frac{\psi_{a+1}}{\psi_a} \cdot \dots \cdot \frac{\psi_y}{\psi_{y-1}} (u(a+1) - u(a))$$

$$= \frac{\psi_y}{\psi_a}(u(a+1) - u(a)) .$$

En consecuencia

$$(4.24) \quad u(y) - u(y+1) = \frac{\psi_y}{\psi_a}(u(a) - u(a+1)), \quad a \leq y < b .$$

Sumando en (4.24) para $y = a, \dots, b-1$ y tomando en cuenta que $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$, concluimos que,

$$\frac{u(a) - u(a+1)}{\psi_a} = \frac{1}{\sum_{y=a}^{b-1} \psi_y} .$$

De (4.24), se tiene

$$(4.25) \quad u(y) - u(y+1) = \frac{\psi_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \psi_y}, \quad a \leq y < b .$$

Ahora si sumando en (4.25) de $y = x, \dots, b-1$ y tomando en cuenta que $u(b) = 0$, se tiene

$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \psi_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \psi_y}, \quad a \leq x < b .$$

Y por la definición de $u(x)$, se tiene que :

$$(4.26) \quad P_x(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \psi_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \psi_y}, \quad a < x < b .$$

Un caso particular de (4.26), es

$$(4.27) \quad P_1(T_0 < T_n) = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{n-1} \psi_y}, \quad n > 1 .$$

Consideremos una cadena de Nacimiento y Muerte con estado inicial $x = 1$. Como la cadena puede moverse a lo más un lugar hacia la derecha en un paso. Entonces,

$$(4.28) \quad 1 \leq T_2 < T_3 < \dots .$$

Se sigue de (4.28) que $\{T_0 < T_n\}$, $n > 1$, forma una sucesión no decreciente de eventos. Luego de Apéndice A.9 se sigue que :

$$(4.29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(T_0 < T_n) = P_1(T_0 < \infty, \text{ para algún } n > 1) .$$

La ecuación (4.28), implica que $T_n \geq n$, entonces $T_n \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$; entonces el evento $(T_0 < T_n, \text{ para algún } n > 1)$, ocurre sí y sólo si el evento $(T_0 < \infty)$ ocurre. Por lo tanto

$$(4.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(T_0 < T_n) = P_1(T_0 < \infty).$$

De (4.27) y de (4.30), se sigue que,

$$(4.31) \quad P_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{\infty} \psi_y}.$$

Ahora demostraremos que la cadena de nacimiento y muerte, es recurrente sí y sólo si

$$(4.32) \quad \sum_{y=0}^{\infty} \psi_y = \infty.$$

Si la cadena es recurrente, entonces $P_1(T_0 < \infty) = 1$. Por lo tanto (4.32) se sigue de (4.31). Para demostrar el inverso observemos que $P(0, y) = 0$, para $y \geq 2$, entonces

$$(4.33) \quad P_0(T_0 < \infty) = P(0, 0) + P_1(T_0 < \infty).$$

Supongamos que (4.32) se cumple. Entonces por (4.31) $P_1(T_0 < \infty) = 1$, de (4.33) concluimos que

$$P_0(T_0 < \infty) = P(0, 0) + P(0, 1) = 1.$$

Entonces el estado 0, es un estado recurrente y por hipótesis la cadena es irreducible, por lo tanto la cadena es recurrente.

En resumen hemos demostrado que una cadena de nacimiento y muerte, irreducible, con espacio de estados $E = \{0, 1, \dots\}$, es recurrente, sí y sólo si

$$(4.34) \quad \sum_{x=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_x}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_x} = \infty.$$

Recuerde que E_R denota el conjunto de estados recurrentes de la cadena, mientras que E_T denota el conjunto de estados de tránsito de la cadena.

TEOREMA 4.35. Suponga $E_R \neq \emptyset$. Entonces, existe un número finito ó numerable de conjuntos $C_1, C_2, \dots$, cerrados e irreducibles tales que $E_R = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

Observación: En general podemos escribir al espacio de estados $E = E_T \cup E_R$, $E_R = \bigcup_i C_i$, y podemos usar esta descomposición del espacio de estados para describir el comportamiento del sistema.

Cuando el sistema empieza en un estado de un conjunto C_i cerrado e irreducible, el sistema permanecerá para siempre en dicho conjunto y con probabilidad uno, visitará cada estado de C_i una infinidad de veces. Por otro lado si el sistema empieza desde un estado tránsito puede ocurrir lo siguiente: a) que el sistema pase finalmente a uno de los conjuntos cerrados C_i 's

y quede en él para siempre; b) el sistema permanecerá para siempre en el conjunto de estados de tránsito E_T .

Demostración del Teorema 4.35:

Tomemos $x \in E_R$ y sea C el conjunto de todos los estados $y \in E_R$, tal que x alcanza a y . Como x es recurrente ($\phi_{xx} = 1$), entonces $x \in C$. Verifiquemos que C es un conjunto cerrado e irreducible. Supongase que $y \in C$ y y alcanza a z . Como y es recurrente, se sigue del Teorema 4.3 a) que z es recurrente. Como x alcanza a y y además y alcanza a z , concluimos que x alcanza a z , entonces $z \in C$ y C es cerrado.

Supóngase que $y, z \in C$. Como x es recurrente y x alcanza a y , del Teorema 4.3 a) y alcanza a x . Como y alcanza a x y x alcanza a z , concluimos que y alcanza a z , esto demuestra que C es irreducible.

Para completar la demostración del Teorema, probaremos que si C y D son dos subconjuntos de E_R , cerrados e irreducibles, entonces son disjuntos o son idénticos. Supóngase que no son disjuntos y sea x un estado que está en C y en D . Tomemos $y \in C$. Como C es irreducible, x alcanza a y . Ahora D es cerrado, $x \in D$ y x alcanza a y , entonces $y \in D$. Entonces cada estado en C está en D . Similarmente cada estado en D está en C , por lo tanto C y D son idénticos. Δ

COROLARIO 4.36. Una cadena de Markov que tiene un número finito de estados, no tiene estados recurrentes nulos.

Demostración :

Tomemos $y \in E$. Supongamos que y es un estado recurrente, entonces por el Teorema 4.35 el estado y pertenece a un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Como C es finito, del Corolario 4.17 se tiene que todos los estados en C , incluyendo a y son recurrentes positivos. Entonces cada estado es recurrente positivo, lo cual quiere decir que no tiene estados recurrentes nulos. Δ

DEFINICIÓN 4.37. Se define el periodo d_x , de un estado x , como el máximo común divisor de todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales $P^n(x, x) > 0$; es decir

$$d_x = m.c.d\{n \geq 1 : P^n(x, x) > 0\} ;$$

si $P^n(x, x) = 0$, para todo $n \geq 1$, definimos $d_x = 0$.

Si $d_x > 1$ decimos que x es un estado **periódico** con periodo d_x , mientras que si $d_x = 1$, decimos que x es un estado **aperiódico**.

TEOREMA 4.38. Si x y y son estados que se comunican, entonces $d_x = d_y$.

Demostración: Sean n_1 y n_2 enteros positivos tales que

$$P^{n_1}(x, y) > 0 \quad \text{y} \quad P^{n_2}(y, x) > 0 .$$

Entonces

$$P^{n_1+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x) > 0 ,$$

lo cual implica que d_x es divisor de $n_1 + n_2$. Si $P^n(y, y) > 0$, entonces

$$P^{n_1+n+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^n(y, y)P^{n_2}(y, x) > 0 ,$$

lo cual significa que d_x es divisor de $n_1 + n + n_2$. Como d_x es divisor de $n_1 + n_2$ y de $n_1 + n + n_2$ entonces d_x es divisor de n , por lo tanto d_x es divisor de todos los números del conjunto:

$$\{n \geq 1 : P^n(y, y) > 0\} ,$$

y como d_y es el máximo común divisor de este conjunto, concluimos que $d_x \leq d_y$; similarmente concluimos que $d_y \leq d_x$. Por lo tanto $d_x = d_y$.

△

Del Teorema anterior se tiene el siguiente corolario:

COROLARIO 4.39. Los estados de una cadena de Markov irreducible tienen periodo común d .

La definición de periodo de un estado, se extiende para cadenas irreducibles, es decir:

DEFINICIÓN 4.40. Diremos que una cadena de Markov irreducible es

- a) **periódica** si $d > 1$.
- b) **aperiódica** si $d = 1$.

Note que una condición suficiente para que una cadena de Markov irreducible sea aperiódica, es que $P(x, x) > 0$, para algún $x \in E$.

EJEMPLO 4.41. Consideremos de nuevo una cadena de Nacimiento y Muerte, irreducible, como en el Ejemplo 4.20, es decir la función de transición esta dada por

$$P(x, y) = \begin{cases} q_x & \text{si } y = x - 1 \\ r_x & \text{si } y = x \\ p_x & \text{si } y = x + 1 \end{cases} ,$$

donde $p_x + q_x + r_x = 1$, $p_x > 0$ y $q_x > 0$.

Si además $r_x > 0$, entonces $P(x, x) = r_x > 0$. Como la cadena es irreducible se tiene que ésta es aperiódica.

Suponga ahora que $r_x = 0$, $\forall x \in E$. Entonces si la cadena empieza en un estado x , esta regresará al estado inicial x sólo en un número par de transiciones. Por lo tanto la cadena tiene periodo 2 ó múltiplo de 2. Como

$$P^2(0, 0) = p_0 q_1 > 0,$$

se concluye que la cadena tiene periodo 2.

LEMA 4.42. Sea $X_n, n \geq 0$, una cadena de Markov irreducible, recurrente, con periodo d . Entonces los estados pueden ser divididos en d conjuntos disjuntos $B_1, B_2, \dots, B_d$, tal que $P(x, y) = 0$, excepto para $x \in B_i$ y $y \in B_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, d-1$ ó $x \in B_d$ y $y \in B_1$.

Observemos que de este resultado tenemos que las transiciones en un paso, solo son posibles de un conjunto B_i al conjunto B_{i+1} $i = 1, \dots, d-1$ ó de B_d a B_1 ; por lo tanto después de " d -pasos" se llega a un estado del mismo conjunto. Entonces si consideramos la cadena en los tiempos $d, 2d, 3d, \dots$ de esta forma obtendremos una nueva cadena de Markov con probabilidades de transición $P^d(x, y)$. Y en esta nueva cadena, cada conjunto B_i es cerrado e irreducible, ya que la cadena original es irreducible, y aperiódica porque dentro del mismo conjunto, el número requerido de pasos para regresar al mismo estado con probabilidad positiva, es necesariamente divisible entre d .

Demostración: Consideremos un estado x arbitrario pero fijo. Como la cadena es irreducible para cada estado y existe un entero s tal que, $\beta = P^s(y, x) > 0$. De la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se tiene

$$(4.43) \quad P^{m+s}(x, x) \geq P^m(x, y)P^s(y, x) = \beta P^m(x, y).$$

Entonces si $P^m(x, y) > 0$, se tiene que $P^{m+s}(x, x) > 0$, por lo tanto $m+s$ es divisible entre el periodo d , es decir $m = kd - s$, para algún k . Si fijamos s concluimos que cada entero m , para el cual $P^m(x, y) > 0$, es de la forma $m = \alpha, \alpha + d, \alpha + 2d, \dots$, donde el número α es un entero fijo con $1 \leq \alpha \leq d$. El entero α es característico del estado y , así, todos los estados pueden dividirse en d conjuntos mutuamente excluyentes $B_1, B_2, \dots, B_d$, definidos de la siguiente manera;

$$B_\alpha := \{z \in E : P^m(x, z) > 0, m = kd + \alpha\}, \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

Ahora supongase que $P(z, y) > 0$ y que $z \in B_\alpha$. Entonces $P^{kd+\alpha}(x, z) > 0$, para alguna k , y por lo tanto $P^{kd+\alpha+1}(x, y) \geq P^{kd+\alpha}(x, z)P(z, y) > 0$, entonces $y \in B_{\alpha+1}$. Δ

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO I :

1) Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, y)$, siempre existe y satisface:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E, y \in E_T \text{ ó } y \in E_{R^{(*)}} \\ \frac{1}{m_y} & \text{si } x = y, y \in E_{R^{(*)}} \\ \frac{\varphi_{xy}}{m_y} & \text{si } x \in E, y \in E_{R^{(*)}} \end{cases}$$

En cambio el $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y)$, "no siempre existe", este límite es importante en el estudio de las cadenas de Markov como veremos en el capítulo II.

En el caso en que $y \in E_T$, tenemos de la Observación 3.8, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0 \text{ para todo } x \in E.$$

2) El conjunto de estados E , se puede descomponer de la siguiente manera

$$E = E_T \cup E_R, \quad E_R = \bigcup_i C_i,$$

donde cada C_i es un conjunto cerrado e irreducible.

Además cada conjunto C_i , puede ser periódico o aperiódico. En el caso periódico (con periodo $d > 1$), los estados del conjunto C_i están divididos en d conjuntos cíclicos $B_1, B_2, \dots, B_d$. Entonces el comportamiento del sistema se puede describir de la siguiente manera:

Cuando el sistema empieza en el conjunto de estados de tránsito, existen dos posibilidades. El sistema se quedará para siempre en el conjunto de estados de tránsito ó bien el sistema pasará finalmente a un conjunto cerrado e irreducible C_i . Si el conjunto C_i es periódico, la cadena se mueve a través del conjunto cíclico en un orden definido por $B_1, B_2, \dots, B_d$.

3) Si la cadena de Markov tiene espacio de estados finito, en el comportamiento del sistema dado en 2), no puede ocurrir que el sistema se quede en el conjunto de estados de tránsito.

a) Si una cadena de Markov es finita e irreducible, en este caso la cadena es recurrente positiva.

b) Si la cadena de Markov no es irreducible (reducible), no tiene estados de tránsito ($E_T = \emptyset$) y está formada por dos ó más conjuntos cerrados e irreducibles, en éste caso no hay interacción entre los estados que están en diferentes conjuntos. Entonces es como tener dos ó más cadenas de Markov que no están relacionadas y pueden ser estudiadas en forma independiente. Entonces podemos suponer que la cadena está formada por un solo conjunto cerrado e irreducible como en a).

c) Si la cadena tiene estados de tránsito ($E_T \neq \emptyset$), en este caso la matriz que representa a las probabilidades de transición se pueden escribir en bloques de la siguiente manera:

$$P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & Q \end{pmatrix},$$

donde:

R , es la submatriz cuadrada correspondiente a los estados recurrentes (donde R puede descomponerse nuevamente);

0 , es la matriz de ceros que representa las probabilidades de ir de estados recurrentes a estados de tránsito;

Q , es la matriz cuadrada que representa las probabilidades de ir de estados de tránsito a estados de tránsito;

S , representa la matriz de ir de estados de tránsito a estados recurrentes.

De la ecuación de Chapman-kolmogorov se sigue que las probabilidades de transición de orden mayor se pueden escribir en bloques de la siguiente manera:

$$P^n = \begin{pmatrix} R^n & 0 \\ S_n & Q^n \end{pmatrix},$$

donde R^n y Q^n , representan las n -ésimas potencias de las matrices R y Q respectivamente.

Recuerde que $P^n(x, y) \rightarrow 0$, si y es un estado de tránsito ó recurrente nulo. Necesitamos, por lo tanto, considerar solamente el caso en que cada estado y es recurrente positivo, es decir, $m_y < \infty$.

Capítulo 2

Introducción.

En este capítulo trataremos algunos conceptos importantes en el estudio de teoría de cadenas de Markov, así como algunos límites, los cuales determinarán cuando una cadena de Markov tendrá o no, una distribución estacionaria, cuando es única y cuando esta distribución es de equilibrio.

II.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN ESTACIONARIA.

De los conceptos más importantes en el estudio de la teoría de cadenas de Markov, están la distribución estacionaria o invariante y la distribución de equilibrio que a continuación introducimos.

Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov con espacio de estados E y probabilidades de transición $P(.,.)$.

DEFINICIÓN 1.1 Sea π una distribución de probabilidad en E .

a) Diremos que π es una distribución invariante o estacionaria para $P(.,.)$ si

$$(1.2) \quad \pi(y) = \sum_{x \in E} \pi(x)P(x,y), \quad \forall y \in E.$$

b) Diremos que π es una distribución de equilibrio o asintóticamente estable para $P(.,.)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x,y) = \pi(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Es importante notar que si π es una distribución de equilibrio entonces es estacionaria. Para probar esto observe que

$$\pi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1}(z,y), \quad \forall z, y \in E$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in E} P^n(z, x) P(x, y) \\
&= \sum_{x \in E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z, x) \right] P(x, y) \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x) P(x, y), \quad \forall y \in E.
\end{aligned}$$

Observemos que si π es una distribución estacionaria, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in E} \pi(x) P^2(x, y) &= \sum_{x \in E} \pi(x) \sum_{z \in E} P(x, z) P(z, y) \\
&= \sum_{z \in E} \left(\sum_{x \in E} \pi(x) P(x, z) \right) P(z, y) \\
&= \sum_{z \in E} \pi(z) P(z, y) = \pi(y).
\end{aligned}$$

Usando argumentos de inducción y la ecuación

$$P^{n+1}(x, y) = \sum_{z \in E} P^n(x, z) P(z, y),$$

se puede mostrar que

$$(1.3) \quad \sum_{x \in E} \pi(x) P^n(x, y) = \pi(y), \quad \forall n, y \in E$$

Si la distribución inicial π_0 es estacionaria, entonces de (1.3) obtenemos

$$(1.4) \quad P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x) P^n(x, y) = \pi_0(y), \quad \forall n \geq 0, y \in E.$$

Es decir, la distribución de X_n es independiente de n . Ahora supongamos que la distribución de X_n es independiente de n , entonces

$$\pi_0(y) = P(X_0 = y) = P(X_1 = y) = \sum_x \pi_0(x) P(x, y),$$

lo cual significa que π_0 es estacionaria. La discusión precedente se resume en el siguiente lema.

LEMA 1.5 La distribución de X_n es independiente de n si, y sólo si, la distribución inicial es una distribución estacionaria.

Supongase que π es distribución de equilibrio y sea π_0 la distribución inicial. Mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = y] = \pi(y),$$

y que π es la única distribución estacionaria.



Para hacer lo anterior, primero observe que

$$P[X_n = y] = \sum_{x \in E} \pi_0(x) P^n(x, y), \quad \forall n \geq 0.$$

Ahora, por el Teorema de la Convergencia Dominada, al tomar límite en la ecuación anterior se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = y] = \sum_x \pi_0(x) \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \sum_x \pi_0(x) \pi(y) = \pi(y) \sum_x \pi_0(x),$$

lo cual implica que

$$(1.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = y) = \pi(y), \quad \forall y \in E,$$

puesto que $\pi_0(\cdot)$ es una distribución de probabilidad.

Para mostrar la unicidad de $\pi(\cdot)$, supongamos que π^* es otra distribución estacionaria y tomemosla como distribución inicial. Entonces, de (1.4)

$$P(X_n = y) = \pi^*(y), \quad \forall n \geq 0; \forall y,$$

lo cual, por (1.6), implica que

$$\pi(y) = \pi^*(y), \quad y \in E.$$

Para cadenas de Markov con un número finito de estados, la distribución estacionaria puede encontrarse resolviendo un sistema finito de ecuaciones lineales. A continuación ilustraremos este hecho para una cadena con dos estados.

EJEMPLO 1.7 Consideremos una cadena de Markov con dos estados, por ejemplo $E = \{0, 1\}$. Y cuya matriz de probabilidades P , cumple con

$$P(X_{n+1} = 1/X_n = 0) = p, \quad P(X_{n+1} = 0/X_n = 1) = q, \quad \text{y} \quad P(X_0 = 0) = \pi_0(0).$$

Como sólo existen dos estados, entonces se sigue inmediatamente que

$$P(X_{n+1} = 0/X_n = 0) = 1 - p \quad \text{y} \quad P(X_{n+1} = 1/X_n = 1) = 1 - q;$$

de manera que la matriz de probabilidades de transición para la cadena es

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

Para encontrar la distribución estacionaria, se tiene de (1.2) que

$$\pi(0) = \pi(0)(1-p) + \pi(1)q \quad \text{y} \quad \pi(1) = \pi(0)p + \pi(1)(1-q).$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y si p y q no son ambos iguales a cero, es decir $p+q > 0$, se tiene

$$\pi(0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad \pi(1) = \frac{p}{p+q},$$

es decir, la distribución estacionaria esta dada por :

$$\pi = (\pi(0), \pi(1)) = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right).$$

Ahora veamos si esta distribución estacionaria, es de equilibrio.

Observemos que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0, X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1, X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0/X_n = 0) + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0/X_n = 1) \\ &= (1-p)P(X_n = 0) + qP(X_n = 1) \\ &= (1-p)P(X_n = 0) + q(1 - P(X_n = 0)) \\ &= (1-p-q)P(X_n = 0) + q. \end{aligned}$$

Ahora $P(X_0 = 0) = \pi_0(0)$, entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0) &= (1-p-q)\pi_0(0) + q \quad \text{y} \\ P(X_2 = 0) &= (1-p-q)P(X_1 = 0) + q \\ &= (1-p-q)^2\pi_0(0) + q[1 + (1-p-q)], \end{aligned}$$

repitiendo n -veces este procedimiento, obtenemos:

$$(1.8) \quad P(X_n = 0) = (1-p-q)^n\pi_0(0) + q \sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j.$$

Por la fórmula

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j = \frac{1 - (1-p-q)^n}{p+q},$$

y de (1.8) se tiene que

$$(1.9) \quad P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left(\pi_0(0) - \frac{q}{p+q} \right),$$

y en consecuencia, se tiene

$$(1.9)^* \quad P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left(\pi_0(1) - \frac{p}{p+q} \right).$$

Ahora para encontrar P^n , notemos que

$$P^n(0, 0) = P_0[X_n = 0] \quad \text{y} \quad P^n(0, 1) = P_0[X_n = 1].$$

Por lo tanto, tomando $\pi_0(0) = 1$ en (1.9) y $\pi_0(1) = 0$ en (1.9)*, se obtiene

$$(1.10) \quad P^n(0, 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q},$$

$$(1.10)^* \quad P^n(0, 1) = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}.$$

Analógamente concluimos que

$$(1.11) \quad P^n(1, 0) = \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q},$$

$$(1.11)^* \quad P^n(1, 1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}.$$

Así de (1.10), (1.10)*, (1.11) y (1.11)* se cumple

$$(1.12) \quad P^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}.$$

Supongamos que p y q no pueden ser ambos iguales a uno, al mismo tiempo. Entonces $0 < p+q < 2$, lo cual implica que $|1-p-q| < 1$. En este caso, concluimos de (1.12) que cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y),$$

con $\pi = (\pi(0), \pi(1)) = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right)$, por lo tanto es de equilibrio.

Enseguida se encontrará la distribución estacionaria para una cadena de nacimiento y muerte.

EJEMPLO 1.13 Consideremos de nuevo la cadena de nacimiento y muerte del ejemplo 4.20 del Capítulo I. Recuerde que el espacio de estados está dado por $E = \{0, 1, \dots\}$ ó bien $E = \{0, 1, \dots, d\}$, y función de transición

$$P(x, y) = \begin{cases} q_x & \text{si } y = x - 1 \\ r_x & \text{si } y = x \\ p_x & \text{si } y = x + 1 \end{cases},$$

donde, $p_x + q_x + r_x = 1$.

Además si suponemos que la cadena es irreducible, es decir, $p_x > 0$ si $x \geq 0$ y $q_x > 0$ si $x \geq 1$.

Supongase que d es infinito. El sistema de ecuaciones

$$\sum_x \pi(x)P(x, y) = \pi(y), \quad y \in E,$$

se transforma en

$$\pi(0) = \pi(0)r_0 + \pi(1)q_1,$$

$$\pi(y-1)p_{y-1} + \pi(y+1)q_{y+1} = \pi(y), \quad y \geq 1.$$

Como $p_y + q_y + r_y = 1$, las ecuaciones se reducen a

$$(1.14) \quad q_1\pi(1) - p_0\pi(0) = 0,$$

$$q_{y+1}\pi(y+1) - p_y\pi(y) = q_y\pi(y) - p_{y-1}\pi(y-1), \quad y \geq 1.$$

De (1.14), y por inducción se sigue,

$$q_{y+1}\pi(y+1) - p_y\pi(y) = 0, \quad y \geq 0,$$

entonces se tiene que

$$\pi(y+1) = \frac{p_y}{q_{y+1}}\pi(y), \quad y \geq 0.$$

En consecuencia

$$(1.14)^* \quad \pi(x) = \frac{p_0 p_1 \dots p_{x-1}}{q_1 q_2 \dots q_x} \pi(0), \quad x \geq 1.$$

Sea

$$(1.15) \quad \pi_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{p_0 p_1 \dots p_{x-1}}{q_1 q_2 \dots q_x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces (1.14)* se puede escribir como,

$$(1.16) \quad \pi(x) = \pi_x \pi(0), \quad x \geq 0.$$

Supongamos ahora que $\sum_x \pi_x < \infty$, ó equivalentemente

$$(1.17) \quad \sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \dots p_{x-1}}{q_1 \dots q_x} < \infty.$$

Sumando para $x \geq 1$ en ambos lados de la igualdad (1.16), obtenemos que

$$\pi(0) = \frac{1}{\sum_{x \geq 1} \pi_x}.$$

Entonces, si sustituimos $\pi(0)$ en (1.16), concluimos que la cadena de nacimiento y muerte tiene una única distribución estacionaria dada por

$$(1.18) \quad \pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^{\infty} \pi_y}, \quad x \geq 0.$$

Supóngase que $\sum_{x=0}^{\infty} \pi_x = \infty$, concluimos de (1.16) y (1.18) que (1.2) tiene suma infinita.

Por lo tanto no existe distribución estacionaria, por lo que la cadena tiene distribución estacionaria si, y sólo si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \dots p_{x-1}}{q_0 \dots q_x} < \infty,$$

y está dada por

$$(1.19) \quad \pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^{\infty} \pi_y}, \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad \pi_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{p_0 \dots p_{x-1}}{q_1 \dots q_x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Supongamos ahora que $d < \infty$. Por los mismos argumentos que se hicieron para obtener (1.19) concluimos que la cadena de nacimiento y muerte, con espacio de estados finito tiene una distribución estacionaria dada por

$$\pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^d \pi_y}, \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad \pi_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{p_0 \dots p_{x-1}}{q_1 \dots q_x} & \text{si } 0 \leq x \leq d \end{cases}.$$

II.2 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS.

En esta sección se determinará cuando una cadena de Markov tiene una distribución estacionaria, cuando es única y cuando es de equilibrio.

Del Teorema 3.10 del Capítulo I, se tiene que si x es un estado de tránsito o recurrente nulo, entonces

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(z, x)}{n} = 0, \quad x \in E.$$

Si además π es una distribución estacionaria, de (1.3), se tiene

$$(2.2) \quad \pi(x) = \sum_{z \in E} \pi(z) P^m(z, x), \quad x \in E.$$

Ahora, sumando en ambos lados de la igualdad para $m = 1, 2, \dots, n$, y dividiendo por n , se tiene

$$(2.3) \quad \pi(x) = \sum_{z \in E} \pi(z) \frac{G_n(z, x)}{n},$$

lo cual combinado con (2.1), (2.3) y el Teorema de la Convergencia Dominada, implica que

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z \in E} \pi(z) \frac{G_n(z, x)}{n} = 0, \quad x \in E.$$

De lo anterior tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.4. Sea π una distribución estacionaria para la cadena de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$. Si x es un estado de tránsito o recurrente nulo, entonces $\pi(x) = 0$. En consecuencia, una cadena de Markov que no tenga estados recurrentes positivos no tendrá distribución estacionaria.

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la distribución estacionaria.

TEOREMA 2.5. Una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva, tiene una única distribución estacionaria π dada por

$$(2.6) \quad \pi(x) = \frac{1}{m_x}, \quad x \in E.$$

Demostración :

Del Teorema 3.10 c) del Capítulo I, y la hipótesis de este Teorema, se tiene que

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(z, x)}{n} = \frac{1}{m_x}, \quad x, z \in E.$$

Supongamos que π es una distribución estacionaria. De (2.3), (2.7) y del Teorema de la Convergencia Dominada se obtiene

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z \in E} \pi(z) \frac{G_n(z, x)}{n} \\ &= \frac{1}{m_x} \sum_{z \in E} \pi(z). \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que $\sum_{z \in E} \pi(z) = 1$, concluimos que

$$\pi(x) = \frac{1}{m_x}, \quad x \in E.$$

Por lo tanto, si existe la distribución estacionaria, estará dada por (2.6).

Para completar la demostración del teorema se mostrará que la función $\pi(x)$, $x \in E$, definida por (2.6), es una distribución estacionaria. Es claro que es *no-negativa*, de manera que sólo hace falta verificar que

$$(2.8) \quad \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} = 1$$

y

$$(2.9) \quad \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} P(x, y) = \frac{1}{m_y}, \quad y \in E.$$

Para hacer esto, obsérvese que para cada $z \in E$

$$\sum_{x \in E} P^m(z, x) = 1,$$

lo cual implica

$$(2.10) \quad \sum_{x \in E} \frac{G_n(z, x)}{n} = 1, \quad \forall z \in E.$$

Por otra parte, de las Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, tenemos

$$\sum_{x \in E} P^m(z, x) P(x, y) = P^{m+1}(z, y),$$

lo cual a su vez implica

$$(2.11) \quad \sum_{x \in E} \frac{G_n(z, x)}{n} P(x, y) = \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} - \frac{P(z, y)}{n}.$$

Si E es finito, (2.7) y (2.10) implica que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in E} \frac{G_n(z, x)}{n} = \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x};$$

es decir (2.8) se cumple.

Ahora tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (2.11) tenemos

$$\sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} P(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in E} \frac{G_n(z, x)}{n} P(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(z, y)}{n} = \frac{1}{m_y}.$$

Por lo tanto (2.9) se cumple. Esto demuestra que $\pi(\cdot)$ es estacionaria cuando el espacio de estados es finito.

Cuando E es infinito, la argumentación anterior no es adecuada ya que, en general, el Teorema de la Convergencia Dominada no es aplicable.

Sea E_1 , un subconjunto finito de E , entonces de (2.10) se tiene

$$\sum_{x \in E} \frac{G_n(z, x)}{n} \leq 1, \quad z \in E.$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ concluimos de (2.7) que

$$\sum_{x \in E_1} \frac{1}{m_x} \leq 1, \quad \text{para todo } E_1 \subset E \text{ finito,}$$

lo cual a su vez implica que

$$(2.12) \quad \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} \leq 1,$$

ya que de lo contrario la suma sobre algún conjunto finito de E , también excedería a uno.

Análogamente, concluimos de (2.11), que si E_1 es un subconjunto finito de E , entonces

$$\sum_{x \in E_1} \frac{G_n(z, x)}{n} P(x, y) \leq \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} - \frac{P(z, y)}{n},$$

lo cual implica

$$\sum_{x \in E_1} \frac{1}{m_x} P(x, y) \leq \frac{1}{m_y}.$$

Como en la demostración de (2.12) concluimos que

$$(2.13) \quad \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} P(x, y) \leq \frac{1}{m_y}, \quad y \in E.$$

Ahora demostraremos que la igualdad se cumple en (2.13). Si no es así, entonces de (2.12) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_y \frac{1}{m_y} &> \sum_y \left(\sum_x \frac{1}{m_x} P(x, y) \right) \\ &= \sum_x \frac{1}{m_x} \left(\sum_y P(x, y) \right) \\ &= \sum_x \frac{1}{m_x}, \end{aligned}$$



lo cual es una contradicción. Por lo tanto se cumple (2.9).

Sólo nos falta mostrar que

$$\sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} = 1.$$

Defina

$$C := \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} \quad y \quad \pi_0(x) = \frac{1}{C m_x}, \quad x \in E.$$

Observe que $\pi_0(\cdot)$ es una distribución de probabilidad y que es estacionaria, es decir,

$$\sum_{x \in E} \pi_0(x) P(x, y) = \frac{1}{C} \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} P(x, y) = \frac{1}{C} \frac{1}{m_y} = \pi_0(y), \quad \forall y \in E.$$

Entonces, $C = 1$, lo cual demuestra (2.8). Δ

De los Teoremas 2.4 y 2.5 se tiene inmediatamente el siguiente corolario.

COROLARIO 2.15. Una cadena de Markov irreducible es recurrente positiva si y sólo si tiene una distribución estacionaria.

Del Corolario 4.19 del capítulo I y Teorema 2.5 de esta sección, se sigue el siguiente teorema

TEOREMA 2.16. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, una cadena de Markov, irreducible, recurrente positiva con distribución estacionaria π . Entonces con probabilidad uno

$$(2.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x)}{n} = \pi(x), \quad \forall x \in E.$$

Este resultado es conocido como Ley Fuerte de los Grandes Números para cadenas de Markov.

COROLARIO 2.18. Si una cadena de Markov con un número finito de estados es irreducible, entonces tiene una única distribución estacionaria.

Demostración :

La demostración para este corolario, se sigue del Teorema 2.5 de este Capítulo y del Corolario 4.17 del Capítulo I. Δ

DEFINICIÓN 2.19. Sea π una distribución de probabilidad en E , y sea C un subconjunto de E . Diremos que π está concentrada en C si

$$\pi(x) = 0 \text{ para } x \notin C \text{ y } \pi(x) > 0 \text{ para } x \in C$$

Escencialmente por los mismos argumentos de la demostración del Teorema 2.5 podemos obtener un resultado más general

TEOREMA 2.20 . Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes positivos. Entonces

$$(2.21) \quad \pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{m_x} & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases},$$

es la única distribución estacionaria concentrada en C .

Del Teorema 2.20, se sigue que si C_0 y C_1 son conjuntos distintos, cerrados e irreducibles de estados recurrentes positivos, entonces existe una distribución estacionaria π_0 concentrada en C_0 y una distribución estacionaria π_1 concentrada en C_1 .

Por otro lado las distribuciones

$$(2.22) \quad \pi_\alpha(x) = (1 - \alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x) \quad x \in E, \quad \alpha \in (0, 1),$$

son distribuciones estacionarias.

Por lo tanto para demostrar (2.22) es suficiente mostrar

$$a) \sum_{x \in E} \pi_\alpha(x) = 1,$$

$$b) \pi_\alpha(x) = \sum_{y \in E} \pi_\alpha(y)P(y, x).$$

Demostración:

a)

$$\begin{aligned}\sum_{x \in E} \pi_\alpha(x) &= \sum_{x \in E} ((1-\alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x)) = (1-\alpha) \sum_{x \in E} \pi_0(x) + \alpha \sum_{x \in E} \pi_1(x) \\ &= (1-\alpha) + \alpha = 1,\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se cumple, ya que π_0 y π_1 son distribuciones estacionarias, por la tanto

$$\sum_{x \in E} \pi_\alpha(x) = 1.$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{y \in E} \pi_\alpha(y)P(y, x) &= \sum_{y \in E} ((1-\alpha)\pi_0(y) + \alpha\pi_1(y))P(y, x) \\ &= (1-\alpha) \sum_{y \in E} \pi_0(y)P(y, x) + \alpha \sum_{y \in E} \pi_1(y)P(y, x) \\ &= (1-\alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x) = \pi_\alpha(x),\end{aligned}$$

luego $\sum_{y \in E} \pi_\alpha(y)P(y, x) = \pi_\alpha(x)$, es decir b) se cumple, y así $\pi_\alpha(x)$ es una distribución estacionaria.

COROLARIO 2.23. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

- a) Si $E_{R^+} = \emptyset$, entonces la cadena no tiene distribución estacionaria.
- b) Si $E_{R^+} \neq \emptyset$ e irreducible, entonces la cadena tiene una única distribución estacionaria.
- c) Si $E_{R^+} \neq \emptyset$ y reducible, entonces la cadena tiene una infinidad de distribuciones estacionarias.

Claramente a) se sigue del Teorema 2.4, b) se sigue del Teorema 2.5 y c) se sigue de (2.22).

Observación: es importante notar que si la cadena de Markov es finita, entonces tiene al menos un estado recurrente positivo ($E_{R^+} \neq \emptyset$); en consecuencia, por el corolario anterior, tiene al menos una distribución estacionaria.

En los resultados anteriores, se ha demostrado que si $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov irreducible recurrente positiva con distribución estacionaria π , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^m(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \pi(y), \quad x, y \in E.$$

Enseguida se demostrará un resultado más fuerte, que nos dice cuando la distribución estacionaria π es de equilibrio, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y), \quad x, y \in E.$$

TEOREMA 2.24. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva, con distribución estacionaria π

a) Si la cadena es **aperiódica**, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y), \quad x, y \in E$$

b) Si la cadena es periódica, con periodo d , entonces para cada par de estados $x, y \in E$, existe un entero r , $0 \leq r < d$, tal que $P^n(x, y) = 0$, excepto para $n = md + r$ para algún entero no-negativo m y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{md+r}(x, y) = d\pi(y)$$

Demostración :

a) Consideremos una cadena de Markov, recurrente positiva, irreducible, aperiódica con función de transición $P(x, y)$, espacio de estados E y distribución estacionaria π .

Sea $a \in E$ y definamos el conjunto

$$I = \{n > 0 : P^n(a, a) > 0\}.$$

Entonces

- i) m.c.d. $I = 1$;
- ii) Si $m \in I$ y $n \in I$, entonces $m+n \in I$.

La propiedad ii) se sigue de la desigualdad

$$P^{n+m}(a, a) \geq P^n(a, a)P^m(a, a).$$

Las propiedades i) y ii) implican que existe un entero positivo n_1 , tal que $n \in I, \forall n \geq n_1$. La demostración está dada en el Apéndice A.8. Usando este resultado concluimos que $P^n(a, a) > 0$, para todo $n \geq n_1$.

Sean $x, y \in E$ arbitrarios. De la hipótesis de irreducibilidad y por el Teorema 4.2 a) del Capítulo I, existen enteros positivos n_2 y n_3 tales que

$$P^{n_2}(x, a) > 0 \quad \text{y} \quad P^{n_3}(a, y) > 0 ;$$

entonces para $n \geq n_1$

$$P^{n_2+n+n_3}(x, y) \geq P^{n_2}(x, a)P^n(a, a)P^{n_3}(a, y) > 0 ;$$

lo cual demuestra que para cada par $x, y \in E$, existe un entero $n_0 = n_1 + n_2 + n_3$ tal que

$$(2.25) \quad P^n(x, y) > 0, \quad n \geq n_0.$$

Sea $E^2 = \{(x, y) : x, y \in E\}$, el conjunto de pares ordenados de elementos de E . Consideremos la cadena de Markov (X_n, Y_n) con espacio de estados E^2 y función de transición P_2 , definida por

$$P_2((x_0, y_0), (x, y)) = P(x_0, x)P(y_0, y) .$$

Entonces se sigue que $\{X_n, n \geq 0\}$ y $\{Y_n, n \geq 0\}$ son cadenas de Markov con función de transición P y las transiciones de la cadena X_n y Y_n son independientes una de otra.

Se demostrará que la cadena (X_n, Y_n) es aperiódica, irreducible, recurrente positiva, y posteriormente usaremos estos hechos para verificar la conclusión del Teorema.

Tomando $(x_0, y_0), (x, y) \in E^2$. Por (2.25) se sigue que existe $n_0 > 0$, tal que

$$(2.26) \quad P^n(x_0, x) > 0 \quad \text{y} \quad P^n(y_0, y) > 0, \quad \text{para } n \geq n_0 .$$

Entonces

$$P_2^n((x_0, y_0), (x, y)) = P^n(x_0, x)P^n(y_0, y) > 0, \quad n \geq n_0 .$$

Concluyendo así que la cadena es irreducible y aperiódica.

La distribución π_2 en E^2 definida por $\pi_2(x_0, y_0) = \pi(x_0)\pi(y_0)$ es una distribución estacionaria, ya que

$$\begin{aligned} \sum_{(x_0, y_0) \in E^2} \pi_2(x_0, y_0) P_2((x_0, y_0), (x, y)) &= \sum_{x_0 \in E} \sum_{y_0 \in E} \pi(x_0)\pi(y_0) P(x_0, x) P(y_0, y) \\ &= \left(\sum_{x_0 \in E} \pi(x_0) P(x_0, x) \right) \left(\sum_{y_0 \in E} \pi(y_0) P(y_0, y) \right) \\ &= \pi(x)\pi(y) \\ &= \pi_2(x, y) . \end{aligned}$$

Entonces por el Corolario 2.15 de éste Capítulo, se tiene que esta cadena es recurrente positiva, y en particular recurrente.

Sea $a \in E$ fijo y defina

$$T_{(a,a)} := \min\{n > 0 : (X_n, Y_n) = (a, a)\}$$

$$T = \min\{n > 0 : X_n = Y_n\} .$$

Observe que $T \leq T_{(a,a)}$ y también que $T_{(a,a)}$ es una variable finita con probabilidad uno, puesto que la cadena es recurrente. En consecuencia, T también es finita con probabilidad uno.

Para $n \geq 1$

$$(2.27) \quad P(X_n = y, T \leq n) = P(Y_n = y, T \leq n), \quad y \in E.$$

Esta fórmula es intuitivamente razonable, ya que las dos cadenas son indistinguibles para $n \geq T$. Para demostrar (2.27) tomemos $1 \leq m \leq n$. Entonces para $z \in E$

$$(2.28) \quad P(X_n = y/T = m, X_m = Y_m = z) = P(Y_n = y/T = m, X_m = Y_m = z),$$

ya que ambas probabilidades condicionales son iguales a $P^{n-m}(z, y)$. Ahora ya que el evento $\{T \leq n\}$ es la unión de los eventos ajenos

$$\{T = m, X_m = Y_m = z\}, \quad 1 \leq m \leq n \quad y \quad z \in E,$$

se sigue de (2.28) y del Apéndice A.4 que,

$$P(X_n = y/T \leq n) = P(Y_n = y/T \leq n).$$

De aquí (2.27) se cumple.

La ecuación (2.27) implica que

$$\begin{aligned} P(X_n = y) &= P(X_n = y, T \leq n) + P(X_n = y, T > n) \\ &= P(Y_n = y, T \leq n) + P(X_n = y, T > n) \\ &\leq P(Y_n = y) + P(T > n); \end{aligned}$$

análogamente tenemos que

$$P(Y_n = y) \leq P(X_n = y) + P(T > n).$$

Por lo tanto para $n \geq 1$

$$(2.29) \quad |P(X_n = y) - P(Y_n = y)| \leq P(T > n), \quad \forall y \in E.$$

Por otra parte, cómo T es finito con probabilidad uno,

$$(2.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(T > n) = 0.$$

Por lo tanto, de (2.29) y (2.30), se sigue que

$$(2.31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (P(X_n = y) - P(Y_n = y)) = 0, \quad \forall y \in E.$$

Ahora usaremos (2.31) para completar la demostración del teorema. Sean $x \in E$ y la distribución inicial de (X_n, Y_n) , tal que $P(X_0 = x) = 1$ y

$$P(Y_0 = y_0) = \pi(y_0), \quad y_0 \in E.$$

Puesto que $\{X_n, n \geq 0\}$ y $\{Y_n, n \geq 0\}$, son cadenas de Markov con función de transición P , se tiene que

$$(2.32) \quad P(X_n = y) = P^n(x, y), \quad y \in E$$

y

$$(2.33) \quad P(Y_n = y) = \pi(y), \quad y \in E$$

Entonces de (2.31)-(2.33), se sigue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P^n(x, y) - \pi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(X_n = y) - P(Y_n = y)) = 0.$$

Por lo tanto, se cumple el Teorema 2.24 a).

Antes de seguir con la demostración del Teorema 2.24 b), notemos que si C es un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes positivos aperiódicos y π es la única distribución estacionaria concentrada en C , entonces restringiendo la cadena al conjunto C , concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y) = \frac{1}{m_y}, \quad \forall x, y \in C.$$

En particular si y es un estado recurrente positivo, entonces por ser C un conjunto cerrado e irreducible que contiene a y , tenemos

$$(2.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(y, y) = \frac{1}{m_y}.$$

b) Sea $X_n, n \geq 0$, una cadena de Markov recurrente positiva y periódica ($d > 1$). Sea $Y_m = X_{md}$, $m \geq 0$. Entonces $Y_m, m \geq 0$, es una cadena de Markov con función de transición $Q = P^d$. Tomando $y \in E$, entonces

$$\begin{aligned} m.c.d\{m/Q^m(y, y) > 0\} &= m.c.d\{m/P^{md}(y, y) > 0\} \\ &= \frac{1}{d} m.c.d\{n/P^n(y, y) > 0\} = 1. \end{aligned}$$

Entonces todos los estados tienen periodo 1 con respecto a la cadena Y_m .

Si la cadena X_n tiene estado inicial y , entonces $Y_0 = y$. Además, puesto que la cadena X_n regresa a y en algún múltiplo de d , se sigue que la esperanza del tiempo de regreso al estado y para la cadena Y_m es $d^{-1}m_y$, donde m_y es el valor esperado del tiempo medio de regreso a y para la cadena X_n . En particular, y es un estado recurrente positivo para la cadena de Markov con función de transición Q . Aplicando (2.34) a la función de transición Q concluimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m(y, y) = \frac{d}{m_y} = d\pi(y),$$

entonces

$$(2.35) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P^{md}(y, y) = d\pi(y), \quad y \in E.$$

Sean $x, y \in E$ estados fijos y defina

$$r_1 = \min(n : P^n(x, y) > 0).$$

En particular, $P^{r_1}(x, y) > 0$. Demostraremos que $P^n(x, y) > 0$ sólo si $n - r_1$ es múltiplo de d .

Tomemos n_1 , tal que $P^{n_1}(y, x) > 0$. Entonces

$$P^{r_1+n_1}(y, y) \geq P^{n_1}(y, x)P^{r_1}(x, y) > 0,$$

lo cual implica que $r_1 + n_1$ es múltiplo de d . Si $P^n(x, y) > 0$, por el mismo argumento tenemos que $n + n_1$ es múltiplo de d ; por lo tanto $n - r_1$ también lo es. Entonces, $n = kd + r_1$ para algún entero no-negativo k .

Por otro lado dados dos números r_1 y d con $d > 0$, existe un único par m_1 y r , tal que $r_1 = m_1d + r$, con $0 \leq r < d$. Entonces

$$(2.36) \quad P^n(x, y) = 0, \text{ excepto para } n = md + r,$$

para algún entero no negativo m .

Entonces de (2.36) y de la igualdad

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n P_x(T_y = m)P^{n-m}(y, y), \quad n \geq 1,$$

tenemos

$$(2.37) \quad P^{md+r}(x, y) = \sum_{k=0}^m P_x(T_y = kd + r)P^{(m-k)d}(y, y).$$

Sea

$$a_m(k) = \begin{cases} P^{(m-k)d}(y, y) & \text{si } 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{si } k > m \end{cases}$$

y observe, de (2.35), que para cada k fijo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} P^{(m-k)d}(y, y) = d\pi(y).$$

Finalmente del Teorema de la Convergencia Dominada, y (2.37), concluimos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} P^{md+r}(x, y) &= d\pi(y) \sum_{k=0}^{\infty} P_x(T_y = kd + r) \\ &= d\pi(y) P_x(T_y < \infty) \\ &= d\pi(y). \quad \Delta \end{aligned}$$

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO II :



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

1) Si una cadena de Markov no tiene estados recurrentes positivos, entonces no admite distribuciones estacionarias; pero si el conjunto de estados recurrentes positivo $E_{R^{(+)}}$ es no-vacio, entonces la cadena admite al menos una distribución estacionaria. Si además $E_{R^{(+)}}$ es irreducible, la distribución estacionaria es única y se anula en los estados de tránsito y recurrentes nulos.

2) Por otro lado, cuando $E_{R^{(+)}} \neq \emptyset$ y reducible, la cadena admite una infinidad de distribuciones estacionarias. Para ver esto, note que $E_{R^{(+)}}$ se puede "descomponer" como la unión de conjuntos cerrados e irreducibles y que existen distribuciones estacionarias concentradas en cada uno de ellos. Finalmente observe que cualquier combinación convexa de estas distribuciones también es estacionaria.

3) Observemos que para una cadena de Markov con espacio de estados finito, el conjunto de estados recurrentes positivos siempre es diferente del vacio; por lo tanto, siempre existe (al menos) una distribución estacionaria. Demostraciones alternativas de este resultado se pueden encontrar en [1] y [7]. En la primera referencia, la herramienta básica es el teorema de Punto Fijo de Markov-Kakutani, mientras que en la segunda se usa un procedimiento puramente algebraico.

4) Si una cadena de Markov es irreducible y recurrente positiva, entonces por (1), se tiene que la cadena tiene una única distribución estacionaria. Si además es aperiódica, entonces la distribución estacionaria es de equilibrio, y está dada por $\pi(x) = \frac{1}{m_x}$, $x \in E$.

5) Pero si la cadena tiene periodo $d > 1$, entonces se tiene que la cadena cuenta con d subconjuntos $B_1, B_2, \dots, B_d$, tal que $P(x, y) > 0$ únicamente para $x \in B_1, y \in B_2$ ó $x \in B_2, y \in B_3$ ó ... ó $x \in B_d, y \in B_1$. Por consiguiente después de "d-pasos" se llega a un estado del mismo conjunto. Entonces si consideramos a la cadena en los tiempos $d, 2d, 3d, \dots$ de esta forma obtendremos una nueva cadena de Markov con probabilidades de transición $P^d(x, y)$ y en esta nueva cadena, cada conjunto B_i es cerrado, irreducible y aperiódico. De aquí veremos que $P^n(x, y)$ no converge; por lo tanto π no es de equilibrio. Sin embargo para cada par $x, y \in E$, existe un entero r , $0 \leq r < d$, tal que $P^n(x, y) = 0$, excepto que $n = md + r$, para algún entero m , y en este caso se cumple

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{md+r}(x, y) = d\pi(y) .$$

Capítulo 3

Cadenas de Markov con Espacio de Estados Finito

En este Capítulo estudiaremos cadenas de Markov con espacio de estados finito. Si además la cadena de Markov es irreducible en la primera sección se demostrará que la convergencia del Teorema 2.24, del Capítulo II es geométrica.

En la segunda sección estudiaremos el comportamiento asintótico de P^n , en el caso irreducible.

Finalmente en la tercera sección se estudiarán las probabilidades de absorción.

III.1 Cadenas de Markov irreducibles.

En esta sección nos dedicaremos a cadenas de Markov finitas e irreducibles (ver Definición 4.13, del Capítulo I). En este caso, por el Corolario 4.17, del Capítulo I, tendremos que todos los estados son recurrentes positivos. Para el estudio de este tipo de cadenas, primero nos enfocaremos al caso aperiódico.

Recordemos que una cadena de Markov es irreducible si x alcanza a y , para todo $x, y \in E$, es decir

$$\varphi_{xy} > 0, \text{ para todo } x, y \in E.$$

DEFINICIÓN 1.1. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición P . Diremos que la cadena de Markov o que la matriz P es regular si existe $n > 0$, tal que $P^n(x, y) > 0, \forall x, y \in E$.

Observemos que toda cadena de Markov regular es irreducible, mientras que el recíproco no siempre se cumple como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2 Consideremos la cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observese que

$$P^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots \\ P & \text{si } n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases},$$

por lo tanto, la cadena de Markov es irreducible, pero no es regular.

TEOREMA 1.3 Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, una cadena de Markov irreducible con espacio de estados finito. La cadena es aperiódica si y sólo si la cadena es regular.

Demostración:

Supongamos que la cadena es aperiódica. Del Apéndice A.8, para cada $x \in E$, existe $n_0 \in N$, tal que $P^n(x, x) > 0$, $\forall n \geq n_0$. Por otra parte, de la hipótesis de irreducibilidad, para cada $x, y \in E$, existe un entero positivo $m = m(x, y)$, tal que $P^m(x, y) > 0$. Defina $n = n(x, y) = n_0 + m$ y observe que si $k \geq n$, entonces k se puede escribir como $k = s + m$, donde $s \geq n_0$. Luego, por la ecuación de Chapman- Kolmogorov, se tiene que

$$P^k(x, y) = \sum_{z \in E} P^s(x, z) P^m(z, y) \geq P^s(x, x) P^m(x, y) > 0.$$

Es decir, para cada pareja $x, y \in E$, existe n (que depende de estos estados) tal que

$$P^k(x, y) > 0, \quad \forall k \geq n.$$

Finalmente, defina

$$n^* = \max_{x, y} \{n(x, y)\}$$

y observe que $P^k(x, y) > 0$, $\forall k \geq n^*$, lo cual significa que la cadena es regular.

Ahora supongamos que la cadena es regular, es decir, que existe n tal que $P^n(x, y) > 0$, $\forall x, y \in E$.

En particular, tenemos que $P^{n_0}(x, x) > 0$, para todo $n_0 \geq n$, lo cual implica que la cadena sea aperiódica, puesto que

$$m.c.d\{n \geq 1 : P^n(x, x) > 0\} = m.c.d\{n_0, n_{0+1}, n_{0+2}, \dots\} = 1.$$

△

$$m.c.d\{n \geq 1 : P^n(x, x) > 0\} = m.c.d\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} = 1 .$$

Δ

DEFINICIÓN 1.4 Se dice que una matriz es estacionaria si todos sus renglones son idénticos.

En el Capítulo II se demostro que una cadena con espacios de estados finito admite al menos una distribución estacionaria; si además, es irreducible la cadena es recurrente positiva y

$$\pi(x) = \frac{1}{m_x} , \quad x \in E$$

es la única distribución estacionaria (Teorema 2.5, del Capítulo II).

Si además la cadena es regular, por el Teorema 3 de esta Sección, la cadena es aperiódica, y por el Teorema 2.24 a) del Capítulo II, la distribución estacionaria es asintóticamente estable, es decir

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y) , \quad x, y \in E.$$

Notemos que el límite anterior no depende de x , lo cual significa que la matriz de transición en n -pasos converge a una matriz estacionaria con todos sus renglones iguales a la distribución estacionaria π .

El siguiente resultado, nos asegura que la convergencia en (1.5) es geométrica.

TEOREMA 1.6. Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov regular y π la distribución estacionaria. Entonces existe $\beta \in (0, 1)$ y $v \in N$, tal que

$$(1.6^*) \quad |P^n(x, y) - \pi(y)| \leq \beta^{\lfloor \frac{n}{v} \rfloor}, \quad \forall x, y \in E, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde $[a]$ denota la parte entera del número real a .

Demostración: En el transcurso de la demostración haremos uso de las siguientes cantidades:

$$\delta := \min \{P(x, y) : x, y \in E\},$$

N := número de estados del espacio E ,

$M^n(y)$:= máximo valor de la y -ésima columna de la matriz P^n ,

$m^n(y)$:= mínimo valor de la y -ésima columna de la matriz P^n .

La demostración se hará en dos etapas. Primero mostraremos el teorema para $v = 1$; luego, usaremos este resultado particular, para obtener (1.6*) cuando v es un natural arbitrario.

Supongamos primero que, $P(x, y) > 0, \forall x, y \in E$. Además $P(x, y) \geq \delta$, entonces $P(x, y) = 1 - \sum_{k \neq y} P(x, k) \leq 1 - (N-1)\delta, \forall x$. Por lo tanto

$$(1.7) \quad M^1(y) - m^1(y) \leq 1 - (N-1)\delta - \delta = 1 - N\delta.$$

Sean x, x' dos estados arbitrarios pero fijos. Sean $J = \{y \in E : P(x, y) > P(x', y)\}$, $J' = \{y \in E : P(x, y) \leq P(x', y)\}$. Entonces,

$$(1.8) \quad \begin{aligned} 0 &= 1 - 1 = \sum_y (P(x, y) - P(x', y)) = \sum_{y \in J'} (P(x, y) - P(x', y)) + \sum_{y \in J} (P(x, y) - P(x', y)), \text{ entonces} \\ \sum_{y \in J'} (P(x, y) - P(x', y)) &= - \sum_{y \in J} (P(x, y) - P(x', y)), \\ y \\ \sum_{y \in J} (P(x, y) - P(x', y)) &= \sum_{y \in J} P(x, y) - \sum_{y \in J} P(x', y) \\ &= 1 - \sum_{y \in J'} P(x, y) - \sum_{y \in J} P(x', y) \\ &\leq 1 - \#J'\delta - \#J\delta = 1 - N\delta. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$(1.9) \quad \sum_{y \in J'} (P(x, y) - P(x', y)) = 1 - N\delta.$$

Además

$$\begin{aligned} P^{n+1}(x, y) - P^{n+1}(x', y) &= \sum_k P(x, k)P^n(k, y) - \sum_k P(x', k)P^n(k, y) \\ &= \sum_k (P(x, k) - P(x', k))P^n(k, y) \\ &= \sum_{k \in J} (P(x, k) - P(x', k))P^n(k, y) + \sum_{k \in J'} (P(x, k) - P(x', k))P^n(k, y) \\ &\leq \sum_{k \in J} (P(x, k) - P(x', k))M^n(y) + \sum_{k \in J'} (P(x, k) - P(x', k))m^n(y) \\ &= (M^n(y) - m^n(y)) \left(\sum_{k \in J} (P(x, k) - P(x', k)) \right) \leq (1 - N\delta)(M^n(y) - m^n(y)), \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue ya que $(P(x, y) - P(x', k))$ es negativa para cada $k \in J'$, la última igualdad se sigue de (1.8) y la última desigualdad de (1.9). Por lo tanto

$$(1.10) \quad P^{n+1}(x, y) - P^{n+1}(x', y) \leq (1 - n\delta)(M^n(y) - m^n(y)).$$

Tomemos x, x' , tal que $P^{n+1}(x, y) = M^{n+1}(y)$, $P^{n+1}(x', y) = m^{n+1}(y)$. De (1.10), se tiene

$$(1.11) \quad M^{n+1}(y) - m^{n+1}(y) \leq (1 - N\delta)(M^n(y) - m^n(y)).$$

Iterando (1.11), y usando (1.7), obtenemos

$$(1.12) \quad M^n(y) - m^n(y) \leq (1 - N\delta)^n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Además se cumple

$$\begin{aligned} M^{n+1}(y) &= \max_x P^{n+1}(x, y) = \max_x \left(\sum_k P(x, k) P^n(k, y) \right) \leq \max_x \left(\sum_k P(x, k) M^n(y) \right) = M^n(y), \\ y \\ m^{n+1}(y) &= \min_x P^{n+1}(x, y) = \min_x \left(\sum_k P(x, k) P^n(k, y) \right) \geq \min_x \left(\sum_k P(x, k) m^n(y) \right) = m^n(y). \end{aligned}$$

Es decir, $M^n(y)$ es una sucesión decreciente, y $m^n(y)$ es una sucesión creciente en n . Entonces $M^n(y)$, $m^n(y)$ son sucesiones monótonas y acotadas por 1, por lo tanto convergen. De (1.11) se tiene que ambas sucesiones tienen el mismo límite al que denotaremos por π' .

Por otra parte, notemos que $\delta \leq m^1(y) \leq m^n(y) \leq \pi'(y) \leq M^n(y)$ para toda n , de donde se tiene que $\pi'(y) \geq \delta$, para toda $y \in E$. Además se cumple

$$m^n(y) - M^n(y) \leq P^n(x, y) - \pi'(y) \leq M^n(y) - m^n(y),$$

lo cual combinado con (1.12) implica que

$$(1.13) \quad |P^n(x, y) - \pi'(y)| \leq (1 - N\delta)^n, \quad \text{para todo } x, y \in E, n \geq 1,$$

lo anterior implica que $P^n(x, y) \rightarrow \pi'(y)$, $\forall x, y \in E$.

Entonces, tomando límite en la ecuación

$$P^{n+1}(x, y) = \sum_z P^n(x, y) P(z, y),$$

se obtiene

$$\pi'(y) = \sum_z \pi'(z) P(z, y).$$

Por lo tanto π' es una distribución estacionaria, y por la unicidad se sigue que es igual a π .

Ahora supongamos que la cadena es regular. De la definición (1.1), se tiene que existe v , tal que $P^v(x, y) > 0$ para toda $x, y \in E$. Definamos

$$(1.14) \quad \delta' := \min_{x,y} P^v(x,y) > 0$$

Si reemplazamos P por P^v en la primera parte de la demostración tenemos que

$$(1.15) \quad \max_{x,y} |P^{nv}(x,y) - \pi(y)| \leq (1 - N\delta')^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora usando esta desigualdad, se tiene

$$|P^{nv+m}(x,y) - \pi(y)| = \left| \sum_k P^m(x,k)(P^{nv}(k,y) - \pi(y)) \right| \leq \sum_k P^m(x,k)(1 - N\delta')^n = (1 - N\delta')^n, \quad m \geq 1.$$

Entonces

$$(1.16) \quad |P^{nv+m}(x,y) - \pi(y)| \leq (1 - N\delta')^n, \quad m \geq 1,$$

y obtenemos

$$|P^n(x,y) - \pi(y)| \leq (1 - N\delta')^{\lceil \frac{n}{v} \rceil}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Haciendo $\beta = (1 - N\delta') < 1$ se concluye la demostración. Δ

Cadenas de Markov Irreducibles y Periódicas:

En esta sección supondremos que la cadena de Markov es finita, irreducible y periódica, con período $d > 1$. Recuerde que en éste caso la única distribución estacionaria de la cadena no es de equilibrio. Sin embargo el Teorema 1.18 de esta sección describe el comportamiento asintótico de P^n .

Por el Lema 4.42 del Capítulo I, se tiene que el espacio de estados E de la cadena se puede dividir en d conjuntos disjuntos $B_1, B_2, \dots, B_d$. De tal manera que las transiciones en un paso sólo son posibles de un conjunto B_i a un conjunto B_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, d-1$ ó de B_d a B_1 . Por lo tanto la matriz P^d puede ser considerada como la matriz de transición en un paso del proceso observado cada d -unidades de tiempo.

Antes de establecer el resultado principal daremos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.17 Para cada B_t , $t = 1, 2, \dots, d$, definimos

$$v_t := \min\{n \in \mathbb{N} : P^{nd}(x, y) > 0, x, y \in B_t\},$$

$$\delta_t := \min\{P^{v_t d} : x, y \in B_t\},$$

$$N_t := \text{es el número de estados del conjunto } B_t,$$

$$\delta := \min\{\delta_t : t = 1, \dots, d\},$$

$$L := \min\{N_t : t = 1, \dots, d\},$$

$$v := \max\{v_t : t = 1, \dots, d\}.$$

TEOREMA 1.18 Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov finita, irreducible y periódica con periodo $d > 1$, y π la única distribución estacionaria de la cadena. Entonces existe $\beta(0, 1)$ y $v \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{a) } |P^{nd}(x, y) - d\pi(y)| \leq \beta^{[\frac{n}{v}]} \text{ , } x, y \in B_t, \text{ } t = 1, \dots, d.$$

$$\text{b) } |P^{nd+nr}(x, y) - d\pi(y)| \leq \beta^{[\frac{n}{v}]}, \text{ } x \in B_s, \text{ } y \in B_t, \text{ } t-s=r \pmod{d}.$$

Demostración:

Si restringimos el espacio de estados a uno de los conjuntos B_t , $t = 1, 2, \dots, d$, con matriz de transición en un paso dada por P^d , en este caso tenemos una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y aperiódica. Denotemos por π^t , $t = 1, 2, \dots, d$, a la única distribución de equilibrio en B_t , para la restricción de P^d a B_t .

Sea $\pi'(x) = \pi^t(x)$ si $x \in B_t$. Luego por el Teorema 1.6 aplicado a la matriz P^d y a la distribución π^t , se cumple

$$(1.19) \quad |P^{nd}(x, y) - \pi'(y)| \leq (1 - N_t \delta_t)^{\lfloor \frac{n}{v_t} \rfloor}, \quad \forall x, y \in B_t.$$

Además por la definición de δ , L y v se cumple

$$(1 - N_t \delta_t)^{\lfloor \frac{n}{v_t} \rfloor} \leq (1 - L\delta)^{\lfloor \frac{n}{v} \rfloor} \leq (1 - L\delta)^{\lfloor \frac{n}{v} \rfloor}.$$

Por lo tanto de (1.19) y las desigualdades anteriores

$$(1.20) \quad |P^{nd}(x, y) - \pi'(y)| \leq (1 - L\delta)^{\lfloor \frac{n}{v} \rfloor}, \quad x, y \in B_t, \quad t = 1, 2, \dots, d.$$

Si $x \in B_t$, $y \in B_s$, y $s - t = r \pmod{d}$, entonces

$$P^{nd}(k, y) = 0 \quad \text{si } k \notin B_s \quad \text{y} \quad \sum_{k \in B_s} P^r(x, k) = 1.$$

Además se cumple,

$$|P^{nd+r}(x, y) - \pi'(y)| = \left| \sum_{k \in B_s} P^r(x, k) (P^{nd}(k, y) - \pi'(y)) \right|.$$

Por lo tanto de (1.20) se sigue

$$(1.21) \quad |P^{nd+r}(x, y) - \pi'(y)| \leq (1 - L\delta)^{\lfloor \frac{n}{v} \rfloor} \quad x \in B_t, \quad y \in B_s \quad \text{y} \quad s = t + r \pmod{d}.$$

Notemos además que

$$P^{nd+r^*}(x, y) = 0, \quad \text{si } x \in B_t, \quad y \in B_s \quad \text{y} \quad r^* \neq (s - t) \pmod{d},$$

entonces

$$(1.22) \quad \sum_{k=1}^{nd} P^k(x, y) = \sum_{n'=0}^{n-1} P^{n'+d+r}(x, y) \quad \text{si } x \in B_t, \quad y \in B_s \quad \text{y} \quad r = s - t \pmod{d}.$$

Si $s = t$ entonces $r = 0$ y el índice de la sumatoria del lado derecho de (1.22) corre de $n' = 1$ a $n' = n$. Luego de (1.21) se sigue que $P^{n'+d+r}(x, y) \rightarrow \pi(y)$, por lo tanto el promedio también converge a $\pi(y)$ y de la igualdad (1.22) se sigue

$$(1.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{nd} P^k(x, y) = \pi'(y), \quad x, y \in E.$$

Multiplicando (1.23) por $\frac{1}{d}$, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^{nd} P^k(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k(x, y) = \frac{\pi'(y)}{d}.$$

Ahora demostraremos que $\frac{\pi'(y)}{d}$, $y \in E$, es una distribución estacionaria para P . Esto se sigue de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E} \frac{\pi'(k)}{d} P(k, y) &= \sum_{k \in E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k(x, k) \right) P(k, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^{k+1}(x, y) = \frac{\pi'(y)}{d}. \end{aligned}$$

Y por unicidad de la distribución estacionaria se cumple $\pi = \frac{\pi'(y)}{d}$. Luego haciendo $\beta = (1 - L\delta) < 1$ en (1.20) y en (1.21) se sigue a) y b). Δ



III.2 Cadenas de Markov Reducibles.

Es conveniente recordar de las conclusiones del Capítulo I, que si una cadena de Markov es reducible, el conjunto de estados de tránsito E_T , puede ser diferente del vacío. Y el conjunto de estados recurrentes positivos se puede poner como unión finita de conjuntos cerrados e irreducibles, y a su vez cada uno de estos conjuntos, pueden estar compuestos por estados periódicos o aperiódicos.

Si la cadena tiene estados de tránsito ($E_T \neq \emptyset$), en este caso la matriz que represente a las probabilidades de transición se pueden escribir en bloques, de la siguiente manera:

$$(2.1) \quad P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & Q \end{pmatrix}$$

donde:

R es la submatriz cuadrada, que representa la probabilidad de transición en un paso, de ir de un estado recurrente a un estado recurrente.

0 es la matriz de ceros que representa las probabilidades de ir un estado recurrente a un estado de tránsito.

Q es la matriz cuadrada que representa las probabilidades de transición de ir de un estado de tránsito a un estado de tránsito.

S es la matriz que representa la probabilidad de transición de ir de un estado de tránsito a un estado recurrente.

DEFINICIÓN 2.2. Una cadena de Markov, se le llama absorbente, si cada estado recurrente, es un estado absorbente.

En el caso que una cadena de Markov sea absorbente, la submatriz R de (2.1) es la matriz identidad. Por lo tanto la matriz P se puede escribir como

$$(2.3) \quad P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ S & Q \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 2.4. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov absorbente y sea P la matriz de probabilidades de transición dada por (2.3), entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ NS & 0 \end{pmatrix},$$

donde $N = (I - Q)^{-1}$.

Observación:

Notemos que NS representa a la matriz de probabilidad de pasar eventualmente de un estado de tránsito a un estado absorbente. A la matriz N se le llama matriz fundamental.

Demostración del Teorema 2.4:

Denotemos por Q^m a la m -ésima potencia de la matriz Q y por

$$(2.5) \quad S_m = (I + Q + Q^2 + \dots + Q^m)S = \left(\sum_{k=0}^m Q^k \right) S.$$

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov, y la definición del producto de matrices, se tiene que

$$(2.6) \quad P^m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ S_m & Q^m \end{pmatrix}$$

Además $\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0$, por la Observación (3.8) del Capítulo I.

Luego del Lema A.10 del Apéndice, tenemos que en este caso existe la matriz inversa de $(I - Q)$, y la denotaremos por

$$(2.7) \quad N := (I - Q)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m.$$

De (2.5) y (2.7), se tiene

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} S_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m Q^k \right) S \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k \right) S \\ &= NS. \end{aligned}$$

Por lo tanto de (2.6) y (2.8) se sigue

$$(2.9) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P^m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ NS & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta$$

Ahora consideremos la cadena de Markov restringida al conjunto de estados recurrentes y supongamos que el conjunto de estados recurrentes está formado por sólo un conjunto cerrado, irreducible y aperiódico; es decir, la restricción a la clase recurrente, es regular.

Entonces de (2.1) R , es una submatriz irreducible y aperiódica. Luego por el Teorema 2.24 del Capítulo II, se sigue que la única distribución estacionaria π^* concentrada en E_R satisface

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R^n(x, y) = \pi^*(y), \quad x, y \in E_R.$$

Sea

$$(2.10)^* \quad \pi = \begin{cases} \pi^*(x) & \text{si } x \in E_r \\ 0 & \text{si } x \notin E_r \end{cases},$$

la única distribución estacionaria con respecto a P .

Denotemos por 1 al vector columna con la unidad en cada una de sus entradas. Entonces 1π representa la matriz cuadrada con renglones identicos a la distribución π .

TEOREMA 2.11. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición P . Supongamos que la restricción a la clase recurrente es irreducible y aperiódica. Sea π^* la distribución estacionaria concentrada en la clase de estados recurrentes y π dada por (2.10)*. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = 1\pi.$$

Demostración:

Si representamos a P como es (2.11) y Q^n y R^n representan la n -ésima potencia de las matrices Q y R , respectivamente, entonces de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se sigue

$$P^n = \begin{pmatrix} R^n & O \\ S_n & Q^n \end{pmatrix},$$

donde

$$(2.12) \quad S_{n+1} = \sum_{k=0}^n Q^k S R^{n-k} = \sum_{k=0}^n Q^{n-k} S R^k.$$

Sean

$$(2.13) \quad M = R - 1\pi^* \quad \text{y} \quad M^n = R^n - 1\pi^*.$$

Por lo tanto de (2.12) y (2.13), se tiene que S_{k+1} se puede escribir de la siguiente manera

$$(2.14) \quad S_{k+1} = \sum_{n=0}^k Q^{k-n} S l \pi^* + \sum_{n=0}^k Q^{k-n} S M^n .$$

De (2.10) se tiene que existe $0 < \alpha_1 < 1$, tal que cada entrada de la matriz M^n está acotada por α_1^n . De la Observación (3.8) del Capítulo I, se sigue que cada entrada de la submatriz Q^n , está acotada por α_2^n con $0 < \alpha_2 < 1$. Entonces cada entrada de la matriz

$$\sum_{n=0}^k Q^{k-n} S M^n ,$$

está acotada por

$$(2.15) \quad \sum_{n=0}^k \alpha_1^{k-n} \alpha_2^n .$$

Por lo tanto

$$(2.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k Q^{k-n} S M^n = 0 .$$

Luego tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ en (2.14), y por (2.16) obtenemos,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} Q^n S l \pi^* \\ &= (I - Q)^{-1} S l \pi^* \\ &= (I - Q)^{-1} (I - Q) l^* \pi^* \\ &= l^* \pi^* . \end{aligned}$$

Observemos que la segunda igualdad se sigue de (2.7). Además notemos que el vector columna $S l$ se puede escribir como el vector columna $(I - Q) l^*$, ya que la suma de las entradas del i -ésimo renglón de la matriz S es igual a uno menos la suma de las entradas del i -ésimo renglón de la matriz Q (Notemos que S y Q tienen el mismo número de renglones). Además el vector columna l y l^* , no tienen necesariamente la misma dimensión. En el apéndice A.11, se presentan las operaciones con más detalle.

III.3 Probabilidades de Absorción

De las conclusiones del Capítulo I, tenemos que una cadena de Markov con estado inicial en el conjunto tránsito E_T , puede permanecer en él para siempre, ó pasar en algún tiempo a un conjunto cerrado e irreducible C , contenido en E_R . Pero si E_T es finito, entonces necesariamente la cadena entrara a un conjunto cerrado e irreducible y permanecerá en él para siempre.

En muchos ejemplos es importante calcular la probabilidad de que la cadena sea absorbida por un conjunto cerrado e irreducible.

Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes; definamos

$$(3.1) \quad \varphi_C(x) = P_x[T_C < \infty].$$

Esto es, $\varphi_C(x)$ representa la probabilidad de que la cadena de Markov con estado inicial x entre al conjunto C en un tiempo finito. Una vez que la cadena entra al conjunto C permanece en él para siempre, por lo que $\varphi_C(x)$, $x \in E_T$ comunmente se le denomina probabilidad de absorción.

Recuerde que $E_R = \bigcup_{i=1}^n C_i$, donde cada C_i es un conjunto cerrado e irreducible, entonces si $x \in E_R$

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C_i \\ 0 & \text{si } x \notin C_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Lo que no es claro, es como calcular $\varphi_C(x)$, si $x \in E_T$.

Si el espacio de estados E es finito es posible calcular $\varphi_C(x)$ resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Observése que si la cadena empieza en un estado de tránsito ($x \in E_T$), la cadena puede entrar a un conjunto cerrado e irreducible C en un paso o bien en algún tiempo futuro, entonces

$$(3.1) \quad \varphi_C(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in E_T} P(x, y) \varphi_C(y), \quad x \in E_T.$$

La ecuación (3.1) siempre se cumple, ya sea que el conjunto de estados de tránsito sea finito o infinito, pero no es claro como resolver esta ecuación, cuando E_T es infinito.

TEOREMA 3.2. Supongamos que el espacio de estados es finito y que E_T es finito, C es un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Entonces el sistema de ecuaciones

$$(3.3) \quad f(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in E_T} P(x, y) f(y) \quad , \quad x \in E_T \quad ,$$

tiene una única solución, dada por

$$(3.4) \quad f(x) = \varphi_C(x) \quad , \quad x \in E_T \quad .$$

Demostración:

Si (3.3) se cumple, entonces

$$f(y) = \sum_{z \in C} P(y, z) + \sum_{z \in E_T} P(y, z) f(z) \quad , \quad y \in E_T \quad .$$

Sustituyendo en (3.3), encontramos que

$$f(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in E_T} \left(\sum_{z \in C} P(x, y) P(y, z) \right) + \sum_{y \in E_T} \left(\sum_{z \in E_T} P(x, y) P(y, z) f(z) \right)$$

La suma de los dos primeros términos es $P_x(T_C \leq 2)$, y el tercer término se reduce a $\sum_{z \in E_T} P^2(x, z) f(z)$, mismo que es igual a $\sum_{y \in E_T} P^2(x, y) f(y)$. Entonces

$$f(x) = P_x(T_C \leq 2) + \sum_{y \in E_T} P^2(x, y) f(y) \quad .$$

Repitiendo este procedimiento, concluimos que para todo entero positivo n , se tiene

$$(3.5) \quad f(x) = P_x(T_C \leq n) + \sum_{y \in E_T} P^n(x, y) f(y) \quad , \quad x \in E_T \quad .$$

Ademas de la Observación (3.8) del Capítulo I, se sigue que:

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0, \quad x \in E, \quad y \in E_T \quad .$$

Por hipótesis tenemos que E_T es finito, por lo tanto de (3.6) se tiene que la suma en (3.5) se aproxima a cero, cuando $n \rightarrow \infty$. Y en consecuencia para $x \in E_T$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(T_C \leq n) = P_x(T_C < \infty) = \varphi_C(x) \quad . \quad \nabla$$

Observemos que para $x \in E_T$, se tiene que

$$(3.7) \quad \sum_i \varphi_{C_i}(x) = \sum_i P_x(T_{C_i} < \infty) = P_x(T_{E_R} < \infty) \quad .$$

Como el conjunto de estados de tránsito es finito y cada estado de tránsito es visitado sólo un número finito de veces, con probabilidad uno, pasará a un conjunto cerrado e irreducible C_i ; por lo tanto de (3.7) se tiene que

$$(3.8) \quad \sum_i \varphi_{C_i}(x) = 1$$

Además una vez que una cadena de Markov con estado inicial $x \in E_T$, entra en un conjunto cerrado C de estados recurrentes, la cadena visita cada estado de C . Por lo tanto

$$(3.9) \quad \varphi_{xy} = \varphi_C(x), \quad x \in E_T \quad y \quad y \in C.$$

En el siguiente ejemplo se encontrarán las probabilidades de absorción

EJEMPLO 3.10 Considérese una cadena de Markov, con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y con matriz de transición dada por

$$P(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Determinaremos primero cuales estados son de tránsito y cuales estados son recurrentes; para ello denotaremos por φ a la matriz dada por

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0, & \varphi_{xy} = 0 \\ 1, & \varphi_{xy} > 0 \end{cases}.$$

En este ejemplo podemos determinar por inspección que estados están comunicados. En este caso φ esta dada por

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que el estado 0, es un estado absorbente y en consecuencia un estado recurrente. Claramente se observa en la matriz φ , que $\{3,4,5\}$ es un conjunto cerrado e irreducible, y de esta manera del Corolario 4.15 del Capítulo I, tenemos que los estados 3, 4 y 5 son estados recurrentes. Los estados 1 y 2, alcanzan al estado 0, pero este no alcanza a ninguno de los estados 1 y 2. Por lo tanto del Teorema 4.3 a) del Capítulo I, se tiene que ambos estados son de tránsito. En resumen, se tiene

$$E_T = \{1, 2\}$$

$$E_R = \{0, 3, 4, 5\} \text{ con } C_1 = \{0\} \text{ y } C_2 = \{3, 4, 5\}.$$

Ahora encontraremos φ_{10} y φ_{20} . Usando (3.1), podemos ver que φ_{10} y φ_{20} están determinados por las ecuaciones:

$$\varphi_{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varphi_{10} + \frac{1}{4}\varphi_{20} \quad \text{y} \quad \varphi_{20} = \frac{1}{5}\varphi_{10} + \frac{2}{5}\varphi_{20}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontraremos que $\varphi_{10} = \frac{3}{5}$ y $\varphi_{20} = \frac{1}{5}$. Análogamente podemos concluir que:

$$(3.11) \quad \varphi_{\{3,4,5\}}(1) = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \varphi_{\{3,4,5\}}(2) = \frac{4}{5}.$$

Por otro lado de (3.11) y (3.9), tenemos que

$$\varphi_{13} = \varphi_{14} = \varphi_{15} = \varphi_{\{3,4,5\}} = \frac{2}{5}$$

$$\varphi_{23} = \varphi_{24} = \varphi_{25} = \varphi_{\{3,4,5\}} = \frac{4}{5}.$$

EJEMPLO 3.12 Consideremos una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots, d\}$ y con matriz de transición P , tal que satisface lo siguiente:

$$(3.13) \quad \sum_{y=0}^d yP(x, y) = x, \quad x = 0, 1, \dots, d.$$

Luego de (3.13), tenemos que

$$\sum_{y=0}^d yP(0, y) = 0.$$

Entonces

$$P(0, 1) = \dots = P(0, d) = 0 .$$

Por lo tanto, el estado 0 es un estado absorbente.

Ahora verifiquemos que el estado d es tambien un estado absorbente.

De (3.13) se sigue

$$(3.14) \quad 0P(d, 0) + 1P(d, 1) + \dots + dP(d, d) = d .$$

Si multiplicamos por $(-d)$ la suma $\sum_{k=0}^d P(d, k) = 1$, y el resultado lo sumamos con (3.14), tenemos que

$$P(d, 0) = P(d, 1) = P(d, 2) = \dots = P(d, d-1) = 0 .$$

Por lo tanto, el estado d es un estado absorbente.

Supongamos ahora que la cadena no tiene más estados absorbentes. En este caso cada uno de los estados $\{1, 2, \dots, d-1\}$ alcanzan al estado 0, y por lo tanto cada uno de estos estados es de tránsito.

Verifiquemos esto para $x = 1$.

De (3.13) se sigue que $\sum_{y=0}^d yP(1, y) = 1$, además $\sum_{y=0}^d P(1, y) = 1$. Por lo tanto, restando la segunda igualdad de la primera obtenemos

$$-P(1, 0) + P(1, 2) + 2P(1, 3) + \dots + (d-1)P(1, d) = 0 .$$

Si suponemos que $P(1, 0) = 0$, entonces

$$P(1, 2) = P(1, 3) = \dots = P(1, d) = 0 .$$

Y de nuevo por (3.13) con $x = 1$, se sigue que $P(1, 1) = 1$, lo cual contradice la hipótesis de que los estados 0 y d son los únicos estados absorbentes. Por lo tanto $P(1, 0) > 0$, es decir el estado 1 alcanza al estado 0.

Notemos ahora que si z es un estado absorbente, entonces $P^{n-m}(z, z) = 1$, $1 \leq m \leq n$. Luego de la Proposición (2.11) del Capítulo I, se tiene

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n P_x[T_z = m] P^{n-m}(z, z) = \sum_{m=1}^n P_x[T_z = m] = P_x[T_z \leq n] .$$

Entonces si z es un estado absorbente se cumple

$$(3.15) \quad P^n(x, z) = P_x[T_d \leq n], \quad n \geq 1, \quad x \in E .$$

Observe

$$\begin{aligned}
 E_x(X_n) &= \sum_{y=0}^d y P_x(X_n = y) \\
 &= \sum_{y=0}^d y P^n(x, y) \\
 &= \sum_{y=0}^{d-1} y P^n(x, y) + d P^n(x, d) \\
 &= \sum_{y=0}^{d-1} y P^n(x, y) + d P^n(T_d \leq n).
 \end{aligned}$$

Entonces

$$(3.16) \quad E_x(X_n) = \sum_{y=0}^{d-1} y P^n(x, y) + d P^n(T_d \leq n).$$

Además para los estados $y = 1, 2, \dots, d-1$ de tránsito, se cumple $P^n(x, y) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ (ver la observación (3.8) del Capítulo I). Entonces

$$(3.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_x(X_n) = d P_x(d < \infty) = d \varphi_{xd}.$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned}
 E[X_{n+1}] &= \sum_y y P[X_{n+1} = y] = \sum_y y \left[\sum_x P[X_{n+1} = y, X_n = x] \right] \\
 &= \sum_y y \left[\sum_x P[X_{n+1} = y | X_n = x] P[X_n = x] \right] \\
 &= \sum_y y \left[\sum_x P(x, y) P[X_n = x] \right] \\
 &= \sum_x \left[\sum_y y P(x, y) \right] P[X_n = x] \\
 &= \sum_x x P[X_n = x] = E[X_n].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3.18) \quad E[X_{n+1}] = E[X_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces de (3.18) $E[X_n] = E[X_{n-1}] = \dots = E[X_0]$, y en consecuencia $E_x[X_n] = x$.

Por lo tanto

$$(3.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_x(X_n) = x.$$

Igualando los límites dados de (3.16) y (3.17) se tiene que,

$$(3.20) \quad \varphi_{xd} = \frac{x}{d}, \quad x = 0, 1, \dots, d.$$

Además de (3.8) $\varphi_{x0} + \varphi_{xd} = 1$, por lo tanto de (3.20) tenemos que,

$$(3.21) \quad \varphi_{x0} = 1 - \frac{x}{d}, \quad x = 0, 1, \dots, d.$$

EJEMPLO 3.22 Ruina del jugador. Considérese una cadena de Markov como la del ejemplo 1.14 del Capítulo I, con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots, d\}$ y $p = q = \frac{1}{2}$. Es decir con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & . & . & . & . \\ . & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente éste ejemplo satisface (3.13).

Lo podemos interpretar de la siguiente manera.

Supongamos que dos jugadores realizan una serie de apuestas de un dolar hasta que uno de ellos pierde su capital. Y supongamos que cada jugador tiene probabilidad de $\frac{1}{2}$ de ganar y perder en cada apuesta. Si el primer jugador tiene un capital inicial de x dolares, y que el segundo jugador tiene un capital inicial de $d-x$ dolares, entonces el segundo jugador tiene probabilidad de $\varphi_{xd} = \frac{x}{d}$ de perder su capital, mientras que el primer jugador tiene probabilidad de $1 - \frac{x}{d}$ de perder.



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO III:

Sea $\{X_n, n \geq N\}$ una cadena de Markov, con espacio de estados E finito, y probabilidad de transición P .

1) Si la cadena es irreducible tenemos los siguientes dos casos.

i) Si P es regular, entonces la única distribución estacionaria π , con respecto a P , es asintóticamente estable, y de acuerdo al Teorema 1.6, se cumple

$$|P^n(x, y) - \pi(y)| \leq \beta^{[n]} , \quad \forall x, y \in E.$$

ii) Si P es periódica con período d , la única distribución estacionaria π , no es asintóticamente estable, sin embargo de acuerdo al Teorema 1.18 se cumple

$$|P^{nd}(x, y) - d\pi(y)| \leq \beta^{[n]} , \quad x, y \in B_t, \quad t = 1, 2, \dots, d.$$

$$|P^{nd+m}(x, y) - d\pi(y)| \leq \beta^{[n]} , \quad x \in B_s, y \in B_t, \quad t-s = m \pmod{d}$$

2) Si la cadena es reducible, y el espacio de estados E consiste de b conjuntos cerrados e irreducibles $C_1, C_2, \dots, C_b$, entonces los resultados anteriores i) ó ii) pueden ser aplicados a cada uno de estos conjuntos C_i , con la restricción de P a C_i .

Si π_i es la única distribución estacionaria concentrada en C_i , es decir

$$\pi_i(x) > 0 \quad \text{si } x \in C_i \quad \text{y} \quad \pi_i(x) = 0 \quad \text{si } x \notin C_i, \quad i = 1, 2, \dots, b,$$

es una distribución de probabilidad en E .

Además cada combinación convexa de las distribuciones π_i resulta ser distribución estacionaria con respecto a P en E .

Lo anterior significa que si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_b$ son números no negativos, tales que $\sum_{i=1}^b \alpha_i = 1$, entonces $\sum_{i=1}^b \alpha_i \pi_i$ es una distribución estacionaria para P en E .

3) Si la cadena no es irreducible y $E_T \neq \emptyset$, en este caso la matriz de probabilidades de transición se puede escribir en bloques ver (2.1). Si además la restricción a la clase de estados recurrentes positivos es irreducible y aperiódica, entonces existe una única distribución asintóticamente estable respecto a P , ver Teorema 2.11.

Apéndice :

A .1 Si $\{X_n, n \geq 0\}$, es una cadena de Markov, con espacio de estados E , y la matriz de transición tiene todos sus renglones idénticos, es decir $P(x, y) = f(y)$, $x, y \in E$, entonces $X_1, X_2, \dots$ son independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común f .

Demostración :

Para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X_n = x) &= \sum_{x_1} P(X_n = x, X_{n-1} = x_1) \\ &= \sum_{x_1} P(X_n = x | X_{n-1} = x_1) P(X_{n-1} = x_1) \\ &= \sum_{x_1} P(x_1, x) P(X_{n-1} = x_1) \\ &= f(x) \sum_{x_1} P(X_{n-1} = x_1) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Además de (1.10) del Capítulo I, se sigue

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= P(X_0 = x_0) P(x_0, x_1) P(x_1, x_2) \cdots P(x_{n-1}, x_n) \\ &= P(X_0 = x_0) f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \\ &= P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas.

A.2 Sean los conjuntos D_i , $i \geq 1$ ajenos y $P(C/D_i) = p$, $i \geq 1$, entonces $P(C/\cup_i D_i) = p$.

Demostración: Este resultado es consecuencia de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} P(C/\cup_i D_i) &= \frac{P(C \cap (\cup_i D_i))}{P(\cup_i D_i)} = \frac{P(\cup_i (C \cap D_i))}{P(\cup_i D_i)} \\ &= \frac{\sum P(C \cap D_i)}{\sum P(D_i)} \\ &= \frac{\sum P(C/D_i)P(D_i)}{\sum P(D_i)} \\ &= \frac{\sum P(D_i)}{\sum P(D_i)} = p. \quad \nabla \end{aligned}$$

A.3 Si los conjuntos E_i son disjuntos y $\cup_i E_i = \Omega$, entonces

$$P(C/D) = \sum_i P(E_i/D)P(C/E_i \cap D).$$

Demostración: Este resultado se sigue de lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_i P(E_i/D)P(C/E_i \cap D) &= \sum_i \frac{P(E_i \cap D)}{P(D)} \cdot \frac{P(C \cap (E_i \cap D))}{P(E_i \cap D)} \\ &= \sum_i \frac{P(C \cap E_i \cap D)}{P(D)} \\ &= \sum_i \frac{P(C \cap E_i/D)P(D)}{P(D)} \\ &= \sum_i P(C \cap E_i/D) \\ &= \sum_i \frac{P(C \cap E_i \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(C \cap D)}{P(D)} \\ &= P(C/D). \quad \nabla \end{aligned}$$

A.4 Si los conjuntos C_i , son disjuntos y $P(A/C_i) = P(B/C_i), \forall i$, entonces

$$P\left(A/\bigcup_i C_i\right) = P\left(B/\bigcup_i C_i\right) .$$

Demostración: Este resultado lo obtenemos de lo siguiente

$$\begin{aligned} P\left(A/\bigcup_i C_i\right) &= \frac{P\left(A \cap \left(\bigcup_i C_i\right)\right)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} = \frac{P\left(\bigcup_i (A \cap C_i)\right)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= \frac{\sum P(A \cap C_i)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= \frac{\sum P(A/C_i)P(C_i)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= \frac{\sum P(B/C_i)P(C_i)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= \frac{\sum P(B \cap C_i)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_i (B \cap C_i)\right)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= \frac{P\left(B \cap \left(\bigcup_i C_i\right)\right)}{P\left(\bigcup_i C_i\right)} \\ &= P\left(B/\bigcup_i C_i\right) . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P\left(A/\bigcup_i C_i\right) = P\left(B/\bigcup_i C_i\right)$$

A.5 Si los conjuntos $C_i \geq 1$ son ajenos $i \geq 1$, entonces $P\left(\bigcup_i C_i/D\right) = \sum P(C_i/D)$.

Demostración: Las siguientes igualdades demuestran el resultado a probar

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_i C_i/D\right) &= \frac{P\left(D \cap \left(\bigcup_i C_i\right)\right)}{P(D)} = \frac{P\left(\bigcup_i (D \cap C_i)\right)}{P(D)} \\ &= \frac{\sum P(D \cap C_i)}{P(D)} \\ &= \frac{\sum P(C_i/D)P(D)}{P(D)} \\ &= \sum P(C_i/D). \end{aligned}$$

A.6 Se verificará que la variables aleatorias $W_y^1, W_y^2, W_y^3, \dots$, definidas en la demostración del Teorema 3.10 del Capítulo I, son independientes e idénticamente distribuidas. Para esto es suficiente demostrar que para $r \geq 1$,

$$(1) P(W_y^{r+1} = m_{r+1}/W_y^1 = m_1, \dots, W_y^r = m_r) = P_y(W_y^1 = m_{r+1}), \quad r \geq 1,$$

para luego obtener,

$$(2) p_y(W_y^1 = m_1, \dots, W_y^r = m_r) = P_y(W_y^1 = m_1) \dots P_y(W_y^r = m_r).$$

Demostración:

Denotemos por

$$s(r) := m_1 + m_2 + \dots, m_r$$

$$M(r) := \{s(1), s(2), \dots, s(r)\}.$$

Observese que

$$\begin{aligned} P(W_y^{r+1} = m_{r+1}/W_y^1 = m_1, \dots, W_y^r = m_r) &= \frac{P(W_y^1 = m_1, \dots, W_y^{r+1} = m_{r+1})}{P(W_y^1 = m_1, \dots, W_y^r = m_r)} \\ &= \frac{P(X_i = y, \dots, X_j \neq y, i \in M(r+1), j \neq i, j < r+1)}{P(X_i = y, X_j \neq y, i \in M(r), j \neq i, j < r, X_{m_1} = y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P[X_{s(r+1)}=y, X_j \neq y, s(r) < j < s(r+1) / X_i=y, X_j \neq y, i \in M(r), i \neq j, j < r] \cdot P[X_i=y, X_j \neq y, i \in M(r), i \neq j, j < r]}{P[X_i=y, X_j \neq y, i \in M(r), i \neq j, j < r]} \\
&= P[X_{s(r+1)}=y, X_j \neq y, s(r) < j < s(r+1) / X_{s(r)}=y] \\
&= P_y[X_{s(r+1)}=y, X_j \neq y, s(r) < j < s(r+1)] \\
&= P_y(T_y = m_{r+1}) \\
&= P_y(W_y^1 = m_{r+1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (1).

Ahora verifiquemos (2).

$$\begin{aligned}
&P_y(W_y^1 = m_1, \dots, W_y^r = m_r) \\
&= P_y[W_y^r = m_r / W_y^1 = m_1, \dots, W_y^{r-1} = m_{r-1}] \cdot P_y[W_y^{r-1} = m_{r-1} / W_y^1 = m_1, \dots, W_y^{r-2} = m_{r-2}] \cdots \\
&\quad \cdot P_y[W_y^2 = m_2 / W_y^1 = m_1] \cdot P_y[W_y^1 = m_1]. \\
&= P_y(W_y^r = m_r) \cdot P_y(W_y^{r-1} = m_{r-1}) \cdots P_y(W_y^2 = m_2) \cdot P_y(W_y^1 = m_1)
\end{aligned}$$

Concluyendo así que las variables aleatorias $W_y^1, W_y^2, \dots$, son independientes e idénticamente distribuidas.

A.7 Teorema de la Convergencia Dominada. Sean $a(x)$, $x \in E$, números no-negativos con suma finita, y sea $b_n(x)$, $x \in E, n \geq 1$, tal que $|b_n(x)| \leq 1$, $x \in E$, $n \geq 1$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = b(x), \quad x \in E.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_x a(x) b_n(x) = \sum_x a(x) b(x).$$

A.8 Sea I un conjunto no-vacío de enteros positivos, tal que

i). $\text{m.c.d.} I = 1$

ii). si m y $n \in I$, entonces $m + n \in I$.

Entonces existe n_0 , tal que $n \in I$ para todo $n \geq n_0$.

Demostración:

Demostraremos primeramente que I contiene dos enteros consecutivos. Supongamos lo contrario. Entonces existe un entero $k \geq 2$ y $n_1 \in I$, tal que $n_1 + k \in I$, y cualquiera dos enteros distintos en I difieren en almenos k .

Se sigue de la propiedad i), que existe $n \in I$, tal que k no es divisor de n . Entonces podemos escribirlo como $n = mk + r$, donde m es un entero no-negativo y $0 < r < k$. De ii) se sigue, que $(m+1)(n_1+k)$ y $n + (m+1)n_1$ están en I . Además su diferencia

$$(m+1)(n_1+k) - n - (m+1)n_1 = k + mk - n = k - r,$$

es positiva y menor que k . Esto contradice la definición de k , por lo que hemos demostrado que existen dos enteros consecutivos n_1 y $n_1 + 1$ en I . Sea $n \geq n_1^2$, entonces existen enteros no-negativos m y r , tal que $0 \leq r < n$, y

$$n - n_1^2 = mn_1 + r.$$

Entonces

$$n = r(n_1 + 1) + (n_1 - r + m)n_1,$$

el cual esta en I por la propiedad ii). Esto demuestra que $n \in I, \forall n \geq n_0 = n_1^2$. Δ

A.9 Sean los eventos, $A_n, n \geq 1$, tales que satisfacen

- i) Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ó
 ii). Si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ y $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Entonces en estos casos se cumple.

$$\lim P(A_n) = P(A)$$

A.10 Si A^n tiende a la matriz cuyas entradas son iguales a cero, cuando n tiende a infinito, entonces $(I - A)$ tiene inversa y está dada por

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Demostración:



**BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES**

EL SABER DE MIS HIJOS
PARA MI GRANDEZA

Consideremos la identidad:

$$(1) \quad (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) = I - A^n$$

Por hipótesis, se tiene que $(I - A^n)$ tiende a 1, cuando n tiende a infinito. Entonces para n suficientemente grande $(I - A^n)$ tiene determinante distinto de cero. Además como el determinante del producto es el producto de los determinantes, de (1) se sigue que $(I - A)$ tiene determinante diferente de cero, por lo tanto tiene inversa.

Multiplicando ambos lados de (1) por $(I - A)^{-1}$ se tiene que

$$I + A + A^2 + \dots + A^{n-1} = (I - A)^{-1}(I - A^n)$$

Pero como el lado derecho de la igualdad anterior tiende a $(I - A)^{-1}$, cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \nabla$$

A.11 Sea P una matriz de probabilidades de transición dada por (2.1) del Capítulo 3, es decir

$$P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & Q \end{pmatrix}$$

Supongamos que las matrices R , 0 , S y Q tienen orden $r \times r$, $r \times s$, $s \times r$ y $s \times s$, respectivamente.

Si π^* es la distribución estacionaria con respecto a R , entonces

$$(I - Q)^{-1} S 1 \pi^* = (I - Q)^{-1} (I - Q) 1^* \pi^* = 1^* \pi^*,$$

con

$1 :=$ Vector columna de unos en cada una de sus entradas, de dimensión $r \times 1$.

$1^* :=$ Vector columna de unos en cada una de sus entradas, de dimensión $s \times 1$.

Demostración:

Realicemos primeramente el producto de la matriz S con el vector columna 1.

$$(1) \quad S \times 1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1r} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{s1} & S_{s2} & \dots & S_{sr} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{s \times 1} = \begin{bmatrix} S_{11} + S_{12} + \dots + S_{1r} \\ S_{21} + S_{22} + \dots + S_{2r} \\ \vdots \\ S_{s1} + S_{s2} + \dots + S_{sr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - q_{11} - q_{12} - \dots - q_{1s} \\ 1 - q_{21} - q_{22} - \dots - q_{2s} \\ \vdots \\ 1 - q_{s1} - q_{s2} - \dots - q_{ss} \end{bmatrix}.$$

Como $(I - Q)$ es igual a

$$(I - Q) = \begin{bmatrix} 1 - q_{11} & -q_{12} & -q_{13} & \dots & -q_{1s} \\ -q_{21} & 1 - q_{22} & -q_{23} & \dots & -q_{2s} \\ -q_{31} & -q_{32} & 1 - q_{33} & \dots & -q_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_{s1} & -q_{s2} & -q_{s3} & \dots & 1 - q_{ss} \end{bmatrix},$$

se tiene que $(I - Q)1^*$ es igual a

$$(2) \quad (I - Q)1^* = \begin{bmatrix} 1 - q_{11} - q_{12} - \dots - q_{1s} \\ 1 - q_{21} - q_{22} - \dots - q_{2s} \\ 1 - q_{31} - q_{32} - \dots - q_{3s} \\ \vdots \\ 1 - q_{s1} - q_{s2} - \dots - q_{ss} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto de (1) y (2) concluimos que

$$(I - Q)^{-1} S 1^* = (I - Q)^{-1} (I - Q) 1^* \pi^*. \quad \nabla$$

Bibliografía

- [1] Baldwin, Jhon T. On Markov processes in elementary mathematic courses. Departmet of Mathematic, Statistics and Computer Science, University of Illinois. Chicago. II. 60680.83 (1987) 147-153 .
- [2] Bartle, Robert G. , The Elements of Integration.
- [3] Bhattacharya, Rabi N. y Waymire Edward, *Stochastic Processes With Aplications*, New York, Wiley-Interscience Pub., 1990
- [4] Cinlar, E., *Introducción to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, New York 1975.
- [5] Feller, William, *Introducción a la Teoria de Probabilidades y sus aplicaciones*, México, Limusa, 1975.
- [6] Kemeny, John G. And J. Snell Laurie , *Finite Markov Chains*, Princenton, 1960.
- [7] Maltese G. *A simple proof of the fundamental theorem of Markov chains*, Amer. Math. Monthly, 93(1985), 629-630
- [8] Seneta, E., *Non-negative Matrices and Markov Chains*, 2a. Ed., New York, Springer- Verlag. 1981.
- [9] Hoel, P., Port, S.C., and Stone, Ch. J. " *Introducción to Stochastic Processes*; New Jersey, Houshton Mifflin Company, 1972.