UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS

"EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA"

SOBRE LAS SUPERFICIES DE RIEMANN HIPERELIPTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

JUAN ANTONIO NIDO VALENCIA

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO 1979

A mi querida esposa Emma, porque
ha sido mi gran compañera.

INDICE

I N T R O D U C C I O N

Dada una superficie de Riemann compacta M, siempre se puede encontrar un isomorfismo con una curva proyectiva. Si denotamos por g al género de M, podemos dividir en varios casos.

Si g=0, la superficie de Riemann es isomorfa al espacio proyectivo de dimensión 1. Si g=1, se trata de las superficies de Riemann elípticas y éste es todo un campo de gran interés matemático en si mismo. Así, pues, consideraremos que $g\geq 2$.

La manera de realizar una superficie de Riemann compacta M como una curva proyectiva es vía las secciones de un haz lineal holomorfo (siempre y cuando el haz tenga "suficientes" secciones). El primer candidato será, pues, el haz de las 1-formas holomorfas, el cual nos dá un isomorfismo excepto en un caso especial, que es el de la s superficies hiperelípticas. Como primer objetivo estudiaremos estas superficies, estudio que desemboca en el teorema de Clifford, que no solo nos dá información sobre las hiperelípticas sino que nos indica que la realización de una superficie de Riemann compacta como curva proyectiva tiene severas limitaciones en la dimensión de espacio proyectivo donde se encuentra con respecto a su grado como variedad proyectiva. Volviendo al morfismo canónico de una superficie de Riemann compacta general (ésto es, la supondremos no hiperelíptica) nos interesa describir la curva imagen como variedad proyectiva.

El Teorema de Noether nos dice que toda la información proyectiva de la curva canónica está en las potencias del haz de las 1-formas en M y finalmente el Teorema de Petri nos describe específicamente a la curva canónica como intersección de las hipersuperficies cuádricas que la contienen. Esto es, la curva canónica se puede describir usando las 1-formas holomorfas cuadráticas en M que tienen dimensión 3g-3.

El tema de esta tesis fue propuesto por el Dr. Sevín Recillas, investigador del Instituto de Matemáticas de la U. N. A. M.. Agradezco al Dr. Recillas su valiosa ayuda en la preparación de este trabajo, así como en mi formación académica.

CAPITULO I

En todo este trabajo M denotará una superficie de Riemann compacta de género g=2, K el haz canónico de M - y si ξ es un haz lineal holomorfo, $\mathcal{O}(\xi)$ denota la gavilla de secciones holomorfas, $\gamma(\xi) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{O}(\xi))$ y $c(\xi)$ la clase de Chern de ξ.

I. Superficies de Riemann Hiperelípticas.

Sea $\Gamma(M, \mathcal{O}(K))$ el espacio de las diferenciales abelianas sobre M. A cada p M le asociamos el siguiente subespacio

$$\Gamma_p^1 = \{ h \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K)) \mid h(p) \neq 0 \}.$$

Ahora, sea $\nu_2 = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \nu_p(h) = n \text{ para } h \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K)) \}$ donde $\nu_p(h)$ denota el orden de la sección h en p, y consideremos el subespacio

$$\Gamma_p^2 = \{ h \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K)) \mid \nu_p(h) \geq \nu_2 \} = \{ h \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K)) \mid h(p) = 0 \}$$

O sea que Γ_p^2 consiste, precisamente, de aquellas diferenciales abelianas que "pasan" por el punto p cuando menos ν_2 veces. Luego tomemos las diferenciales abelianas que pasan por p cuando menos ν_2+1 veces y obtendremos el subespacio

$$\Gamma_p^3 = \{ h \in \Gamma_p^2 \mid \nu_p(h) \geq \nu_3 \}$$

Donde ν_3 es el mínimo entero tal que $h \in \Gamma_p^3$ pasa por p -

cuando menos ν_3 veces y $\nu_3 \geq \nu_2+1$.

siguiendo este procedimiento obtenemos $\Gamma_p^1, \ldots, \Gamma_p^g$.

Dada la sucesión de espacios $\Gamma_p^1, \ldots, \Gamma_p^g$, se puede obtener la sucesión de enteros $\rho_1(p), \ldots, \rho_g(p)$ de la siguiente manera. A Γ_p^i $i=2,\ldots,g$ le asociamos el valor $\rho_i(p)=\nu_i+1$ y a Γ_p^1 le asociamos el valor $\rho_1(p)=1$.

A la sucesión $1=\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_g<2g$ le llamamos la sucesión de huecos de Weierstrass.

Definición . Definimos el peso de Weierstrass de un punto $p \in M$ como

$$\omega(p)=\sum_{i=1}^{g}(\rho_i(p)-i)$$

y decimos que p es un punto de Weierstrass si $\omega(p)>0$.

Definición de Superficie de Riemann Hiperelíptica.

En caso de que $\rho_2 \geq 3$ decimos que p es un punto de Weierstrass hiperelíptico y si todos los puntos de Weierstrass de la superficie M son hiperelípticos diremos que M es una superficie hipeelíptica.

Interpretando, tenemos que una superficie es hiperelíptica si siempre que exista una diferencial abeliana que pase por uno de sus puntos de Weierstrass, pasa por él cuando menos dos veces pues $\nu_2=\rho_2-1$.

Un resultado importante es el siguiente

Teorema 1. Si M es una superficie de Riemann compacta de género g, entonces

$$\sum_{p \in M} \omega(p) = (g-1)\, g\, (g+1)$$

Demostración. Sea $h_1, \dots, h_g \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K))$ una base para el espacio de las diferenciales abelianas sobre M y sea

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_g \end{bmatrix}$$

Si $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ es una cubierta coordenada de M, entonces para cada $z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ tenemos

$$\underline{h}(z_\alpha) = \begin{bmatrix} h_1(z_\alpha) \\ \vdots \\ h_g(z_\alpha) \end{bmatrix}$$

donde cada $h_i(z_\alpha)$ es una función analítica , $i = 1, \dots, g$ y en los puntos en $U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos que

$$\underline{h}(z_\alpha) = K_{\alpha\beta}\, \underline{h}(z_\beta) \qquad \text{(I.1)}$$

donde $K_{\alpha\beta}(z_\beta) = dz_\beta / dz_\alpha$. Así, derivando (I.1), obtenemos

$$\underline{h}'(z_\alpha) = (dz_\beta/dz_\alpha)\, d/dz_\beta (K_{\alpha\beta}(z_\beta)\underline{h}(z_\beta)) = K^2_{\alpha\beta}(z_\beta)\, \underline{h}'(z_\beta) + (*)\, \underline{h}(z_\beta)$$

donde $(*)$ es una función holomorfa . En general

$$\underline{h}^{(\nu)}(z_\alpha) = K^{\nu+1}_{\alpha\beta}(z_\beta)\, \underline{h}^{(\nu)}(z_\beta) + (*)\, \underline{h}^{(\nu-1)}(z_\beta) + \dots + (*)\, \underline{h}(z_\beta) \quad \text{(I.2)}$$

definimos ahora la función

$$g_\alpha(z_\alpha) = \det(\underline{h}(z_\alpha), \dots, \underline{h}^{(g-1)}(z_\alpha))$$

que es holomorfa en $z_\alpha(U_\alpha)$ y de (I.2) tenemos que en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\begin{aligned} g_\alpha(z_\alpha) &= K_{\alpha\beta}(z_\beta)^{1+2+\dots+(g-1)}\, g_\beta(z_\beta) \\ &= K_{\alpha\beta}(z_\beta)^{g(g-1)/2}\, g_\beta(z_\beta) \end{aligned}$$

o sea que las funciones $g = \{g_\alpha(z_\alpha)\}$ definen una sección del haz lineal $K^{g(g-1)/2}$. Como el grado del divisor de una sección de un haz lineal coincide con la cla se de Chern del haz, se tiene:

$$\sum_{p\in M} \nu_p(g) = c(K^{g(g-1)/2}) = (g(g-1)/2)\, c(K) = (g-1)g(g+1)$$

Ahora, si aplicamos una transformación lineal no singular a h_i no se altera el valor $\nu_p(g)$, así que podemos considerar que $\nu_p(h_i) = \rho_i(p) - 1$.

Sea z un mapeo coordenado local tal que $z(p)=0$, entonces la expansión de la serie de potencias de la finción $h_i(z)$ empezará con un término de orden $\rho_i - 1$. De la misma manera los términos de menor orden de la expansión de la serie de potencias de $g(z)$ provienen de

$$\det \begin{bmatrix} z^{\rho_1-1} & (\rho_1-1)z^{\rho_1-2} & \cdots & (\rho_1-1)\cdots(\rho_1-g+1)z^{\rho_1-g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^{\rho_g-1} & (\rho_g-1)z^{\rho_g-2} & \cdots & (\rho_g-1)\cdots(\rho_g-g+1)z^{\rho_g-g} \end{bmatrix}$$

Como este determinante no se anula y como cada monomio de su expansión tiene orden $(\rho_1-1)+\cdots+(\rho_g-g) = \omega(p)$, se tiene que su orden total es precisamente $\nu_p(g)=\omega(p)$ con lo que queda demostrado el teorema.

La sucesión de Weierstrass está determinada univocamente para cada $p\in M$ y se tiene el siguiente resultado significativo.

Teorema 2. Si consideramos la sucesión de Weierstrass en un punto p M , entonces

(a) $\gamma(\xi_p^{\nu}) = \nu + 1 - \#\{\rho_i \mid \rho_i \leq \nu\}$

$$\gamma(\xi_p^{\nu}) - \gamma(\xi_p^{\nu-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \text{ es hueco} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde ξ_p denota el haz lineal de clace de Chern 1 que tiene una sección holomorfa global cuyo divisor es precisamente p .

(b) Existe una función meromorfa en la superficie cuya unica singularidad es un polo de orden precisamente ν en p si y solo si ν es un hueco .

Demostración. Sea $h_1,\ldots,h_g$ base de $\Gamma(M,\Theta(K))$ y

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_g \end{bmatrix}$$

Con $\nu_p(h_i)=\rho_i-1$. Por tanto la matriz $(\underline{h}(p), h'(p),\ldots)$ es de la forma

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \cdots & \rho_2 & \rho_2+1 & \cdots & \rho_3 & & & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccccc} * & - & \cdots & - & - & \cdots & - & - & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & - & \cdots & - & - & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & * & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \end{array}\right] \quad (\mathrm{I}.3)$$

Donde $*$ indica una constante diferente de cero

Si concideramos las primeras ν columnas de (I.3) la matriz asociada tiene rango $\rho = \#\{\rho_i \mid \rho_i \leq \nu\}$

Como $c(\xi_p^\nu)=\nu$ tenemos por Riemann-Roch que

$$\gamma(\xi_p^\nu) = \nu - g + 1 + \gamma(K\xi_p^{-\nu})$$

Por otro lado , si $f_1,\ldots,f_t$ forman una base de $\Gamma(M,\Theta(K\xi_p^{-\nu}))$ y $g_1 \in \Gamma(M,\Theta(\xi_p))$ es tal que $D(g_1)=1\cdot p$, entonces $f_1g_1,\ldots,f_tg_1$ forman una base de $\{h\in\Gamma(M,\Theta(K)) \mid D(h)\geq 1\cdot p\}$

por tanto

$$\gamma(K\xi_p^{-\nu}) = \dim\{h\in\Gamma(M,\Theta(K)) \mid D(h)\geq 1\cdot p\}$$

Pero $D(h)\geq 1\cdot p$ significa que

$$h(p)=\sum_{j=1}^{g} c_j h_j(p)=0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$h^{(\nu)}(p)=\sum_{j=1}^{g} c_j h_j^{(\nu)}(p)=0$$

Es decir $(c_1,\dots,c_g)$ se anula por la matriz y por lo tanto $i(K\zeta_p^{-\nu})=g-\rho$, así que se cumpla (a).

Para ver (b) tomemos $g\in\Gamma(M,\Theta(\zeta_p))$, $f\in\Gamma(M,\Theta(\zeta_p^{\nu}))$, entonces tenemos que f/g^{ν} es meromorfa y su única singularidad es un polo en p de orden a lo sumo ν. Inversamente siempre se puede realizar tal tipo de función. Así que $\gamma(\zeta_p^{\nu})$ coincide con la dimensión del espacio de las funciones meromorfas cuyas unicas singularidades son polos en p de órdenes a lo sumo ν.

Si ν no es hueco, $\gamma(\zeta_p^{\nu})=\gamma(\zeta_p^{\nu-1})+1$ y debe existir una función meromorfa cuya unica singularidad es un polo en p de orden precisamente ν. Si ν no es hueco, $\gamma(\zeta_p^{\nu})=\gamma(\zeta_p^{\nu-1})$ de donde se sigue que si tenemos una función meromorfa cuya única singularidad es un polo en p de orden a lo sumo ν, de hecho es un polo de orden a lo sumo $\nu-1$. Con lo que queda demostrado el teorema.

Antes de proseguir, notemos que del teorema 1 podemos deducir que existe solo un número finito de puntos de Weierstrass así como que no existen superficies hiperelípticas de géneros 1 y 0.

Del teorema 2 podemos concluír que el conjunto

$$g=\sum_{i=1}^{r-1}(\lambda_i+1) = r-1+\sum_{i=1}^{r-1}\lambda_i \qquad (I.4)$$

y el peso de p es

$$\omega(p) = 1/2\, r(r-1)+\sum_{i=1}^{r-1} 1/2\,\lambda_i(2i+r\lambda_i+r) - 1/2\, g(g+1)$$

Ahora, como $(i+r\lambda_i)$ es un hueco, se sigue que $i+r\lambda_i \leq 2g-1$ de donde $2i+r\lambda_i+r \leq i+(2g-1)+r \leq (r-1)+(2g-1)+1 = 2(g+r-1)$

Entonces de (I.4)

$$\sum_{i=1}^{r-1} 1/2\,\lambda_i(2i+r\lambda_i+r) \leq (g+r-1)\sum_{i=1}^{r-1}\lambda_i = (g+r-1)(g-r+1)$$

o sea que $\quad \omega(p) \leq 1/2\, g(g-1) - 1/2\,(r-1)(r-2)$

Como $r>1$, se sigue que el máximo valor de $\omega(p)$ es $1/2\, g(g-1)$ que se obtiene precisamente cuando $r=2$, es decir, cuando el punto es hipeelíptico.

Para la segunda parte del teorema observemos que

$$\sum_{p\in M}\omega(p) \leq N/2\; g(g-1) - 1/2\sum (r(p)-1)(r(p)-2)$$

Si $N=2(g+1)$, entonces $\sum (r(p)-1)(r(p)-2)=0$ pero - como todos los términos de la suma son no negativos entonces para todo punto de Weierstrass se debe tener $r=2$.

Definición. Si M y N son dos superficies topológicas de dimensión 2 decimos que una función continua $f: M \longrightarrow N$ es un cubrimiento ramificado de r hojas si f es un cubrimiento local ramificado y si para todo $q\in N$

$$\sum_{\{p\in M \mid f(p)=q\}} (o_f(p)+1) = r$$

$\{\nu\in\mathbb{Z} \mid \nu \text{ no es hueco}\}$ es cerrado bajo adición. Por lo tanto si r es el mínimo valor que no es hueco para el punto p y ν es un hueco, $r<\nu$, entonces $\nu-r$, es tambien un hueco pues $\nu=\nu-r+r$. O sea que si p es hiperelíptico, los huecos no pueden tomar valores pares pues si $\rho_i=2n$, $i\geq 2$, tendríamos que $\rho_{i-2}=2n-1$, así eventualmente llegaríamos a que $\rho_2=4$ y por tanto $r=2$ sería un hueco. Así que si p es hiperelíptico, su sucesión de Weierstrass es 1,3, 5,...,2g-1.

Y por lo tanto su peso es

$$\omega(p) = 1/2\ g(g-1)$$

De hecho tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3. Sea p un punto de Weierstrass en una superficie de Riemann compacta, entonces

$$1 \leq \omega(p) \leq 1/2\ g(g-1)$$

y $\omega(p)=1/2\,g(g-1)$ precisamente cuando p es hiperelíptico.

Si N es el número de puntos de Weierstrass, entonces

$$2(g+1) \leq N \leq (g-1)g(g+1)$$

Si $N=2(g+1)$, entonces la superficie es hiperelíptica.

Demostración. Sea $r(p)>1$ el mínimo valor que no es hueco en un punto p de Weierstrass, así los huecos se pueden escribir de la forma

$$i,\ i+r, \dots, i+\lambda_i r \qquad (i=1,\dots,r-1\ ,\ \lambda_i=0,1,\dots)$$

El número total de huecos es

donde $a_f(p)$ es el orden de ramificación de f en p .

Teorema 4. Sea M compacta de género g, $\xi \in H^1(M,\mathcal{O}^*)$ un haz lineal complejo de clase de Chern $c(\xi)=r$. Entonces si $f_0, f_1 \in \Gamma(M,\mathcal{O}(\xi))$ son dos secciones que no - tienen ceros en común, existe un mapeo analítico complejo canónico

$$f=(f_0,f_1): M \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

que es un cubrimiento ramificado de r hojas con orden total de ramificación $2(g+r-1)$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}=\{V_\alpha, z_\alpha\}$ una cubierta coordenada de M y $(\xi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)$ un cociclo representativo de ξ .- Las secciones f_i se representan por las funciones $f_{i\alpha}(z_\alpha)$ donde $f_{i\alpha}(z_\alpha(p)) = \xi_{\alpha\beta}(p) f_{i\beta}(z_\beta(p))$ si $p\in U_\alpha\cap U_\beta$. El mapeo -

$$U_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$p \longmapsto (f_{0\alpha}(z_\alpha(p)), f_{1\alpha}(z_\alpha(p)))$$

es complejo analítico y coincide con el mapeo respectivo en $U_\alpha\cap U_\beta$, quedando así definido un mapeo analítico $f:M\longrightarrow\mathbb{P}^1$ que es cubrimiento local de $\mathbb{P}^1$. Tomemos ahora $a=(a_0,a_1)\in\mathbb{P}^1$, $p\in M$, entonces $f(p)=a$ precisamente cuando $a_1 f_0(p) - a_0 f_1(p) = 0$ y así tenemos que los puntos $p_i\in M$ tales que $f(p_i)=a$ son precisamente los - ceros de la sección $h=a_1f_0-a_0f_1 \in \Gamma(M,\mathcal{O}(\xi))$.

Ahora supongamos que $p_i\in U_\alpha$ y que $a_1\neq 0$, entonces, concideramos las coordenadas locales no homogéneas de $\mathbb{P}^1$,-

el mapeo f se puede ver localmente cerca de p_i como

$$p \longmapsto \frac{f_{0\alpha}(z_\alpha(p))}{f_{1\alpha}(z_\alpha(p))} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{h_\alpha(z_\alpha(p))}{a_1 f_{1\alpha}(z_\alpha(p))}$$

y por tanto

$$o_f(p) = \nu_{p_i}(f_{0\alpha}/f_{1\alpha})' = \nu_{p_i}(h_\alpha/a_1 f_{1\alpha}) - 1 = \nu_{p_i}(h_\alpha) - 1$$

y

$$r = c(\xi) = \sum_i \nu_{p_i}(h) = \sum_i (o_f(p_i) + 1)$$

Así que $f: M \to \mathbb{P}^1$ es cubrimiento de r hojas.

Ahora introducimos las siguientes funciones analíticas

$$g_\alpha(z_\alpha) = \det \begin{bmatrix} f_{0\alpha}(z_\alpha) & f_{0\alpha}'(z_\alpha) \\ f_{1\alpha}(z_\alpha) & f_{1\alpha}'(z_\alpha) \end{bmatrix}$$

Si $f_1(p) \neq 0$, $o_f(p) = \nu_p(f_{0\alpha}/f_{1\alpha})' = \nu_p(-g_\alpha f_{1\alpha}^{-2}) = \nu_p(g_\alpha)$.

Lo mismo ocurre en los puntos donde $f_2(p) \neq 0$. por lo tanto el orden total de ramificación es el orden total - de las funciónes g_α. Tomemos ahora $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}'(z_\alpha(p)) &= d/dz_\alpha \left(\xi_{\alpha\beta}(z_\beta(p)) \cdot f_{1\beta}(z_\beta(p)) \right) \\ &= K\left(\xi_{\alpha\beta}(z_\beta(p)) \cdot f_{1\beta}'(z_\beta(p)) + \xi_{\alpha\beta}'(z_\beta(p)) \cdot f_{1\beta}(z_\beta(p)) \right) \end{aligned}$$

y por lo tanto $g_\alpha(z_\alpha(p)) = K_{\alpha\beta}(p)\, \xi_{\alpha\beta}^2(p)\, g_\beta(z_\beta(p))$

de donde $(g_\alpha) \in \Gamma(M, \mathcal{O}(\kappa\xi^2))$ y como

$$b = \sum_{p \in M} o_f(p) = \sum_{p \in M} \nu_p(g_\alpha) = c(\kappa\xi^2) = 2(r+g-1),$$

hemos demostrado el teorema.

Corolario. Si $\xi \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ es tal que $c(\xi) = r$ y $\gamma(\xi) \geq 2$, entonces para $f_0, f_1 \in \Gamma(M, \mathcal{O}(\xi))$ linealmente independientes, existe un morfismo analítico

$$f=(f_0,f_1):M\longrightarrow \mathbb{P}^1$$

que exhibe a M como cubrimiento ramificado de $\mathbb{P}^1$ de a lo sumo r hojas.

Demostración. Si $D_0=\sum_{i=1}^{s} 1\cdot P_i$ es un divisor de los ceros en común de f_0 y f_1 y $g\in\Gamma(M,\mathcal{O}(\eta))$, con $\eta=\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_s}$, es tal que $D(g)=D_0$, entonces f_0/g y f_1/g son secciones de ξ_η^{-1} y no tienen ceros en común y así

$$(f_0/g\ ,\ f_1/g):M\longrightarrow \mathbb{P}^1$$

es cubrimiento de $c(\xi_\eta^{-1})=r-s\leq r$ hojas.

Si notamos que g no se anula fuera de los puntos de D_0 tenemos que $(f_0/g\ ,f_1/g)$ y (f_0,f_1) definen el mismo mapeo.

Ahora podemos caracterizar a las superficies hiper-elípticas.

Teorema 5. Una superficie de Riemann de género g 1 es hiperelíptica si se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones.

(i) La superficie tiene un punto de Weierstrass hiperelíptico.

(ii) La superficie tiene un haz lineal holomorfo con $c(\xi)=2$ y $\gamma(\xi)=2$.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Tenemos que si p es hiperelíptico, por el teorema 2, $c(\xi_p^2)=2$ y como $c(\xi_p^2)=2$, tenemos lo deseado.

(ii)$\Rightarrow$(i). Usando el hechh de que $M\neq\mathbb{P}^1$ y el corolario anterior, tenemos que M es cubrimiento de dos hojas de $\mathbb{P}^1$. Ahora, como cada punto de ramificación tiene orden 1 y el orden total es $2(g+1)$, por el teorema 4, tenemos que existirán $2(g+1)$ puntos de ramificación.

En general si $f: M\to\mathbb{P}^1$ es cubrimiento de r hojas y $p\in M$ es punto de ramificación de orden r-1, entonces r no es un hueco pues $f(p)\in\mathbb{P}^1$ se puede tomar como el punto al infinito de $\mathbb{P}^1$ por medio de una transformación proyectiva y la composición de f con dicha transformación es una función meromorfa cuya unica singularidad es un polo en p de orden r. Por lo tanto, por el teorema 2, tenemos que r=2 es un valor que no es un hueco y todos los puntos de ramificación son hiperelípticos.

De acuerdo a lo anterior, tenemos que las superficies hi perelípticas M son precisamente aquellas que satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones (recordando que g 1).

a). M tiene un punto de Weierstrass hiperelíptico.

b). M se puede expresar como cubrimiento analítico ramificado de 2 hojas de la esfera de Riemann.

c). Todos los puntos de Weierstrass de M son hipere--

lípticos.

d). El número de puntos de Weierstrass de M es el mínimo posible.

Observando que b)$\Rightarrow$c) puesto que los puntos de ramificación son puntos de Weierstrass hiperelípticos y que son $2(g+1)$ de ellos, o sea que de acuerdo a la fórmula del teorema 1 son todos los puntos de Weierstrass posibles.

CAPITULO II

Las propiedades de una superficie de Riemann compacta se reflejan en propiedades geométricas de su variedad jacobiana asociada ([7]), en este capítulo traduciremos las propiedades anteriormente descritas y se obtendrá para éstas una generalización.

Usaremos la notación de Gunning ([3]), esto es, $M^{(r)}$ denotará el producto simétrico de M r veces, o sea, el conjunto de divisores positivos de grado r, J(M) la variedad jacobiana de M que se puede identificar de manera natural con $Pic_0(M)$ (haces lineales holomorfos de clase de Chern 0) y $\varphi : M^{(r)} \longrightarrow J(M)$, la función natural asociada a un punto base p_0 que supondremos fijo en todo lo que sigue.

I. El Teorema de Clifford.

Definimos $W_r = \varphi(M^{(r)})$. Equivalentemente se tiene que

$$W_r = \{\xi \in Pic_0(M) \mid r(\xi\,\zeta_{p_0}^{r}) \geq 1\}\ , \ (W_r \subsetneq J(M) \text{ si } r \leq g-1)$$

Definición. Si S, T son subconjuntos de J(M), definimos

$$-S = \{-s \mid s \in S\}$$

$$S+u = \{s+u \mid s \in S\}$$

$$S+T = \{s+t \mid s \in S,\ t \in T\}$$

$$S\ominus T=\{u\in J(M)\mid T+u\subset S\}=\bigcap_{t\in T}(S-t)$$

Algunas propiedades importantes son las siguientes

$$W_r+W_s=W_{r+s} \qquad \text{si } r,s\geq 0$$

$$W_s\ominus W_r=W_{s-r} \qquad \text{si } 0\leq r\leq s\leq g-1$$

Ahora podemos definir en forma natural

$$W_r^\nu=\{\xi\in Pic_0(M)\mid r(\xi\,\zeta_{P_0}^r)\geq\nu\}$$

Así tenemos la cadena $W_r\supset W_r^2\supset\cdots$ de divisores positivos especiales.

Tambien tenemos las siguientes propiedades

$$W_r^\nu=W_{r-\nu+1}\ominus-W_{\nu-1} \qquad \text{si } \nu\leq r+1$$

$$W_r^\nu=\phi \qquad \text{si } \nu>r+1$$

$$W_r^{\nu+s}=W_r^\nu\ominus(W_s-W_s) \qquad \text{si } s\leq r-\nu$$

Además tenemos que si $\nu\leq r\leq 2g-2$, $\nu\leq g+1$, entonces

$$W_r^\nu\neq\phi \implies 2(\nu-1)\geq r$$

En caso de que $2(\nu-1)=r$, tendremos que $W_{2\nu-2}^\nu$ consiste de un solo punto u tal que $W_{\nu-1}-u=W_{\nu-1}$.

Por lo tanto si $2\leq\nu\leq g$, tenemos que o bien $W_{2\nu-2}^\nu=\phi$ o bien $W_{2\nu-2}^\nu$ consiste de exactamente un punto.

Enunciamos ahora un resultado importante.

Teorema 1. Las subvariedades W_r^ν son subvariedades analíticas de J(M) tales que

$$\dim W_r^\nu\leq r-2\nu+2 \qquad \text{si } 2\leq\nu\leq r\leq g-1.$$

Consideremos a una superficie de Riemann hiperelíptica

M y sea $\theta: M \to M$ el automorfismo hiperelíptico. Sabemos que los divisores de la forma $p+\theta p$, $p \in M$, son equivalentes. Por lo tanto $\varphi(p+\theta p) = \varphi(q+\theta q) = e$ para cualesquiera $p, q \in M$, y así llamamos a e el punto hiperelíptico de J(M).

Una manera de enunciar los resultados del capítulo I es la siguiente caracterización: M es hiperelíptica si y solo si $W_2^2 \neq \phi$. Además en este caso $W_2^2 = \{e\}$ un resultado directo es que si M es hiperelíptica, entonces

$$\dim W_r^\nu = r-2\nu+2 , \quad 2 \leq \nu \leq r \leq g-1 .$$

Es decir que se alcanza el máximo de

Tenemos que , de hecho, las superficies hipeelípticas se caracterizan por alcanzar dicho máximo y un resultado parcial en esa dirección es el teorema de Clifford que enunciamos a continuación.

Teorema de Clifford. Si $W_{2\nu-2}^\nu \neq \phi$ para alguna ν tal que $2 \leq \nu \leq g-1$, entonces M es hiperelíptica.

lo que se hará en este capítulo es demostrar la caracterización antes menciónada o sea extender el teorema de Clifford.

II Teorema de Clifford Extendido.

Se tiene que $W_r \subset J(M)$ es una subvariedad analítica -

regular de J(M) en todo punto que no esté en W_r^2, -- $1 \leq r \leq g-1$, ([3]).

Definición. Si $V \subset J(M)$ es una subvaridad analítica de J(M), llamamos a los puntos de V donde V es regular, puntos regulares de V ($R(V)$) a los demas -- puntos los llamamos puntos singulares de V ($\mathcal{S}(V)$).

Definición. Si $T_x^*(J(M))$ es el espacio cotangente en x definimos $T_x^*(V)$ como el subespacio de $T_x^*(J(M))$ formado por las diferenciales en x de todos los gérmenes de función analítica en x en $I(V)$. El dual de $T_x^*(V)$ es el subespacio lineal $T_x(V) \subset T_x(J(M))$ y lo llamamos el espacio tangente a la subvariedad V en x, La dimensión de $T_x(V)$ se llamará dimensión de encaje de V en el punto x.

Teorema 2. (a) $\mathcal{S}(W_r) = W_r^2$ si $1 \leq r \leq g-1$,

(b) Si $r \geq 1$, $\nu \geq 1$ son tales que W_r^ν es una subvariedad analítica propia de J(M), tenemos que $W_r^{\nu+1} \subset \mathcal{S}(W_r^\nu)$, además W_r^ν tiene dimensión de encaje g en cada punto $x \in W_r^{\nu+1}$.

Demostración. (a) Ver observación al principio de esta sección. (b) sabemos que $W_r^{\nu+1} = W_r^\nu \ominus (W_1 - W_1)$, tomamos $x \in W_r^{\nu+1}$ por lo tanto $x + W_1 - W_1 \subset W_r^\nu$ y si $p, q \in M$

$x+\varphi(p)-\varphi(q)\in W_r^{\nu}$. Sea función analítica – en una vecindad de x que se anula en W_r^{ν}, por tanto $f(x+\varphi(p)-\varphi(q))=0$, si tomamos a p y q suficientemente cercanos podemos considerar a f idénticamente nula como función de q y así $d_x f\cdot\varphi'(p)=0$ en términos de un sistema de coordenadas local cercano a – p. Ahora, $\varphi'(p)$ tiene componentes $\{w_i'(p)\}$ y las diferenciales abelianas $w_i'(z)\,dz=\omega_i(z)$ son linealmente independientes, así que los vectores $\varphi'(p)$, $p\in M$, generan a todo $\mathbb{C}^g$, por lo tanto $d_x f=0$, pero como ésto sucede para toda f analítica en una vecindad de x que se anula en W_r^{ν} tenemos el resultado deseado.

Si $x\in W_r^2-W_r^3$, la fibra $\varphi^{-1}(x)$ es una subvariedad – analítica compleja de $M^{(r)}$ analíticamente homeomorfa a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Por lo tanto los puntos de $\varphi^{-1}(x)$ se pueden ver como divisores $p_1(t)+\cdots+p_r(t)$ y puede pasar que – sean de la forma $p_1(t)+\cdots+p_s(t)+p_{s+1}+\cdots+p_r$.

Proposición. $W_{s-1}^2+W_1\subset W_s^2$

Demostración. Es equivalente a demostrar que $W_{s-1}^2\subset W_s^2\ominus W_1$. Tomemos $x\in W_{s-1}^2$, entonces – $x-\varphi(p)\in W_{s-2}$ para toda $p\in M$ y sea $\omega\in W_1$, así

$$(\omega+x)-\varphi(p)=\omega+(x-\varphi(p))\in W_1+W_{s-2}=W_{s-1}$$

por lo tanto $\omega + x \in W_s^2$, es decir $x \in W_s^2 \ominus W_1$.

Podemos descomponer $x = x' + x''$, $x' \in W_s^2$, $x'' = \varphi(P_{s+1} + \cdots + P_r) \in W_{r-s}$

claramente si $x \notin W_{s-1}^2 + W_1$, la descomposición es única

De esta manera si llamamos a la subvariedad $W_{s-1}^2 + W_1 \subset W_s^2$

la subvariedad de puntos huecos de W_s^2 y a su complemento lo denotamos por $\mathring{W}_s^2$, tendremos que cualquier punto $x \in W_r^2 - W_r^3$ se puede escribir en forma única -- como $x = x' + x''$ con $x' \in \mathring{W}_s^2$ y $x \in W_{r-s}$ para algun $s \leq r$, además $x'' = \varphi(P_{s+1} + \cdots + P_r)$ para un divisor único $P_{s+1} + \cdots + P_r \in M^{(r-s)}$ por tanto $x'' \in W_{r-s} - W_{r-s}^2$ pues de lo contrario si $p \neq P_j$, $j = s+1, \ldots, r$, $x'' - \varphi(p) \in W_{r-s-1}$ y x'' sería de la forma $\varphi(p) + \varphi(q_{s+2} + \cdots + q_r)$ de donde $p = P_j$ para alguna $j = s+1, \ldots, r$.

Los puntos $P_{s+1}, \ldots, P_r$ son precisamente aquellos $p \in M$ tales que $x - \varphi(p) \in W_{r-1}^2$ pues

$$x - \varphi(p) = x' + x'' - \varphi(p) = x' + (\varphi(P_{s+1} + \cdots + P_r) - \varphi(p)) \in W_s^2 + W_{r-s-1} \subset W_{r-1}^2$$

Teorema 3.- Sea $x \in W_r^2 - W_r^3$, $1 \leq r \leq g$, donde $x = x' + x''$, $x' \in \mathring{W}_s^2$, $x'' \in W_{r-s}$. Sea $\xi = \xi' \xi''$ donde $c(\xi') = s$, $\gamma(\xi') = 2$, $c(\xi'') = r-s$, $\gamma(\xi'') = 1$ y donde $\xi \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ es el haz lineal asociado a algun divisor en la fibra $\varphi^{-1}(x)$. Entonces para $P_1, P_2 \in M$ tales que $x - \varphi(P_1)$, $x - \varphi(P_2)$ sean regulares de W_{r-1}, tenemos que los espacios tangentes $T_{x-\varphi(P_1)}(W_{r-1})$ y $T_{x-\varphi(P_2)}(W_{r-1})$

o bien coinciden o bien se intersectan en un subespacio lineal de dimensión $\gamma(\xi' \xi'')-3+r-s$.

Demostración. Por ser un grupo de Lie en una variedad jacobiana se pueden identificar los espacios tangentes en diferentes puntos en forma canónica. Lo mismo ocurre con los espacios contangentes pudiéndose, además identificar con $\Gamma(M,\Theta^{1,0})$.

Sea P_i tal que $x-\varphi(P_i)$ es punto regular de W_{r-1}, entonces existe un único divisor positivo $D_i \in M^{(r-1)}$ tal que $x=\varphi(P_i+D_i)$ y el espacio tangente a W_{r-1} en $x-\varphi(P_i) = \varphi(D_i)$ se puede identificar con la imagen de la diferencial $d\varphi_{D_i}$ en el punto $D_i \in M^{(r-1)}$, el dual a dicho espacio es $L^*_{D_i} \subset T^*(J(M))$ definido por

$$L^*_{D_i} = \{\omega \in \Gamma(M,\Theta^{1,0}) \mid D(\omega) \geq D_i\}$$

Por una demostración de este hecho ver ([3])

Nótese que $\dim L^*_{D_i} = g-r+1$ y por Riemann-Roch $\dim L^*_{D_i+P_i} = g-r+1$ y cono $L^*_{D_i+P_i} \subset L^*_{D_i}$, tenemos, pues que $L^*_{D_i+P_i} = L^*_{D_i}$

Y así, $T_{x-\varphi(P_1)} \cap T_{x-\varphi(P_2)}$ es el espacio dual a

$$L^*_{D_1} + L^*_{D_2} = L^*_{D_1+P_1} + L^*_{D_2+P_2}$$

Por tanto

$$\dim(T_{x-\varphi(P_1)} \cap T_{x-\varphi(P_2)}) = g - \dim(L^*_{D_1} + L^*_{D_2})$$

$$= g - \dim L^*_{D_1} - \dim L^*_{D_2} + \dim(L^*_{D_1} \cap L^*_{D_2})$$

$$= 2(r-1) - g + \dim(L^*_{D_1} \cap L^*_{D_2}). \qquad (\text{II}.1)$$

Si los divisores P_1+D_1 , P_2+D_2 son distintos, sus términos comunes se determinan por la descomposición $x=x'+x''$ así que $P_1+D_1=D_1'+D''$, $P_2+D_2=D_2'+D''$ donde D_1' , D_2' no tienen puntos en común y donde no tienen puntos en común y donde $\xi_{D_1'}=\xi_{D_2'}=\xi'$, $\xi_{D''}=\xi''$.

Entonces

$$\begin{aligned} L^*_{D_1}\cap L^*_{D_2} &= L^*_{D_1+P_1}\cap L^*_{D_2+P_2} \\ &= \{\omega\in\Gamma(M,\theta^{1,0})\mid D(\omega)\geq D_1+P_1 \text{ y } D(\omega)\geq D_2+P_2\} \\ &= \{\omega\in\Gamma(M,\theta^{1,0})\mid D(\omega)\geq D_1'+D_2'+D''\}. \end{aligned}$$

Aplicando Riemann-Roch

$$\begin{aligned} \dim(L^*_{D_1}\cap L^*_{D_2}) &= \gamma(K(\xi')^{-2}(\xi'')^{-1}) \\ &= \gamma((\xi')^2\xi'')+g-1-r-s, \end{aligned}$$

que sustituyéndolo en (II.1) nos dá el resultado.

Teorema 4. Para cualquier punto $x\in W_r^2-W_r^3$, $1\leq r\leq g$, $x=x'+x''$ Sean $D\in M^{(r)}$, $D'\in M^{(s)}$ divisores positivos tales que $\varphi(D)=x$ y $\varphi(D')=x'$. Entonces la dimensión de encaje de ---- W_r^2 en x no es mayor que $\gamma(\xi_D\,\xi_{D'})+r-s-3$.

Demostración. Escogemos puntos tales que $x-\varphi(P_1)$, $x-\varphi(P_2)$ Sean puntos regulares de W_{r-1} y se sigue que

$$T_x(W_r^2)\subset T_{x-\varphi(P_1)}(W_{r-1})\cap T_{x-\varphi(P_2)}(W_{r-1})$$

Por lo tanto

$$\dim T_x(W_r^2)\leq\gamma(\xi'\xi'')-3+r-s=\gamma(\xi_D\,\xi_{D'})+r-s-3$$

Por el teorema 3.

El siguiente paso es demostrar la generalización del

Teorema de Clifford.

<u>Teorema de Cifford Extendido.</u> Si $\dim W_r^{\nu} = r-2\nu+2$, $2 \leq \nu \leq r/2+1$, $r \leq g-2$ para una superficie de Riemann de género g, entonces esa superficie es hipere líptica.

Demostración. Si $\dim W_r^{\nu} = r-2\nu+2$, $\nu > 2$ usando el hecho de que

$$\dim W_r^{\nu} < \dim W_{r-1}^{\nu-1}$$

y de que $\dim W_{r-1}^{\nu-1} \leq r-2\nu+3$, se sigue que

$$\dim W_{r-1}^{\nu-1} = r-2\nu+3 \qquad (\text{II}.2)$$

Nótese que la hiótesis del teorema es esencialmente la misma que (II.2) (excepto que se reemplaza $\nu-1$, $r-1$ por ν y r respectivamente) Por lo tanto es suficiente demostrar el teorema para $\nu=2$.

Supongamos, pues, que $\dim W_r^2 = r-2$, $2 \leq r \leq g-2$ Si tenemos los puntos de W_r^2 son puntos huecos es decir $W_r^2 = W_{r-1}^2 + W_1$ y $\dim W_{r-1}^2 \geq \dim W_r^2 - 1 = r-3$ como $\dim W_{r-1}^2 \leq r-3$ por tenemos que $\dim W_{r-1}^2 = r-3$ que es, de nuevo, la misma hipótesis, reemplazando $r-1$ por r. Si W_{r-1}^2 consta de puntos huecos solamente, repetimos el argumento y así llegamos a que o bien $\dim W_2^2 = 0$ y por lo tanto $W_2^2 \neq \phi$ y la superficie es hiperelíptica o bien $\overset{\circ}{W}{}^2_s \neq \phi$ para algún índice s. En caso de que esto último suceda, tenemos $x \in \overset{\circ}{W}{}^2_s$ regular, donde $\dim W^2_s = r-2$ y $D \in M^{(s)}$ tal que $\varphi(D)=x$, del Teorema 4 se sigue que $\dim W^2_r = \dim T_x(W^2_r) \leq \gamma(\zeta_D) - 3$ y por tanto $\gamma(\zeta^2_D) \geq s+1$, es decir $\zeta^2_D \in W^{s+1}_{2s}$ y $W^{s+1}_{2s} \neq \phi$ y por el Teorema de Clifford se sigue que la superficie es hiperelíptica.

En este momento procede a dar una descripción geométrica de las implicaciónes que tiene el teorema de Clifford para una superficie de Riemann compacta que no sea hiperelíptica.

Sabemos que toda superficie de Riemann compacta M se puede realizar como una curva proyectiva irreducible y no singular, esto es, existe un morfismo analítico $\varphi: M \longrightarrow \mathbb{P}^d$ de rango máximo en todo punto cuya imagen $\varphi(M)$ es una curva analítica y por lo tanto algebraica por el lema de Chow ([1]).

Una manera de hacer ésto es dando un haz lineal ζ tal que tenga suficientes secciones y que éstas separen puntos y vectores tangentes. Esto es, si $r = \gamma(\zeta)$, entonces para cada $p,q \in M$ debemos tener $\gamma(\zeta \zeta_p^{-1}) = r-1$ y $\gamma(\zeta \zeta_p^{-1} \zeta_q^{-1}) = r-2$ y en este caso si $f_1, \dots, f_r$ es una base de $H^0(M, \mathcal{O}(\zeta))$ la función $M \longrightarrow \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C})$, $p \mapsto (f_1(p); \dots; f_r(p))$

nos define a M como una curva algebráica X de grado $c(\xi)$.

Entonces el teorema de Clifford nos dice que el grado de una curva X es cuando menos el doble de la dimención del espacio proyectivo donde está sumergida.

Un problema aún no resuelto es qué tanto mas grande es y.e. para una superficie de Riemann compacta M de "tipo general", cuánto vale $c(\xi)-2\gamma(\xi)$. En el siguiente capítulo trataremos de dar una descripción mas detallada de este problema.

CAPITULO III

Por ser mas natural desde el punto de vista geométrico, usaremos de aquí en adelante el lenguaje de divisores, recordando que si $D=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i$ es un divisor en M, le corresponde el haz lineal $\xi_D = \xi_{P_1}^{\lambda_1} \cdots \xi_{P_n}^{\lambda_n}$ y que podemos identificar de manera natural al espacio vectorial $L(D)=\{f\in H^0(M,\mathcal{M}) \mid (f)+D\geq 0\}$ con $H^0(M,\mathcal{O}(\xi_D))$, o sea que $\ell(D)=\dim L(D)=\gamma(\xi_D)$. Observemos que $c(\xi_D)=gr\, D$.

I. El Indice de Clifford.

Empezamos definiendo el índice de Clifford del divisor D en M como

$$i_c(D)=gr\, D-2\,\ell(D)+2$$

Proposición 1. Si D_1 y D_2 son divisores en M, entonces

(a) $i_c(D_1+D_2-(D_1,D_2))+i_c(D_1,D_2)\leq i_c(D_1)+i_c(D_2)$

(b) $i_c(D_1,(Z,D_2))\leq i_c(D_1)$

donde Z es un divisor canónico y (D_1,D_2) es el máximo común divisor de D_1 y D_2.

Demostración.(a) Como $(D_1,D_2)\leq D_i$, $i=1,2$, tenemos que

$$L(D_i)\subset L(D_1+D_2-(D_1,D_2))$$

Por otro lado

$$L(D_1)\cap L(D_2)=L(D_1,D_2)$$

ya que $f\in L(D_1)\cap L(D_2)$ si y solo si $-D(f)\leq D_i$, por lo tanto si y solo si $-D(f)\leq (D_1,D_2)$, es decir, si y solo si $f\in L(D_1,D_2)$, De lo anterior deducimos que

$$\ell(D_1+D_2-(D_1,D_2))+\ell(D_1,D_2)\geq \ell(D_1)+\ell(D_2)$$

y sustituyendo en la fórmula del índice de Clifford demostramos (a).

(b) Usando Riemann-Roch y el hecho de que

$$gr(D)+gr(Z-D)=gr(Z)=2g-2$$

obtenemos la fórmula de Brill-Noether

$$i_c(D)=i_c(Z-D)$$

Sustituyendo en (a) $Z-D_1$ por D_2 obtenemos

$$i_c(D_1+Z-D_1-(D_1,Z-D_1))+i_c(D_1,Z-D_1)\leq i_c(D_1)+i_c(Z-D_1)$$

como por Brill-Noether tenemos que

$$i_c(D_1+Z-D_1-(D_1,Z-D_1))=i_c(D_1,Z-D_1)$$

concluímos que se cumple (b).

Teorema 1. (Clifford). Sean D y D^* divisores no negativos en M tales que $D+D^*\equiv Z$ y $gr(D)\leq g-1$. Entonces $i_c(D)\geq 0$ y $i_c(D)=0$ solo si $D=0$ a menos que M sea hipereíptica.

Demostración. Si $D=0$, entonces $\ell(D)=1$ y $i_c(D)=0$. Si $gr(D)=1$, entonces $\ell(D)=1$ y $i_c(D)=1$.

Si $gr(D)\geq 2$ y $i_c(D)\leq 0$, entonces $\ell(D)\geq 2$ y podemos considerar que (D,D^*) es no negativo y $gr(D,D^*)<gr(D)$ y por la proposición 1(b) Tenemos que $i_c(D,D^*)\leq i_c(D)$

. Aplicando inducción sobre $gr(D)$ llegamos a que $i_c(D) \geq 0$.

Ahoera veamos la segunda.parte. Si $gr(D)=2$ y $i_c(D)=0$, entonces $l(D)=2$ y M es hiperelíptica. Si $gr(D)\geq 3$ y $i_c(D)=0$, entonces $l(D)\geq 3$ y podemos considerar, por tanto, que $1 \leq gr(D,D^*) < gr(D)$. Teniendo en cuenta que $i_c(D,D^*) \leq i_c(D)=0$, llegamos -- por inducción sobre $gr\,D$, a que M es hiperelíptica.

Corolario. Si D es un divisor tal que $0 \leq gr\,D \leq 2g-2$. Entonces $i_c(D) \geq 0$ y $i_c(D)=0$ solo si $D \not\approx Z$ a menos que M sea hiperelíptica.

Demostración. Supongamos que $l(D)\geq 2$. Entonces -- $D \not\approx D^*$ con $gr(D) = gr(D^*)$ y $gr(Z-D) \leq g-1$, por lo tanto $i_c(Z-D)=i_c(D)\geq 0$ y $i_c(D)=0$ solo si $Z-D \not\approx 0$ a menos que M sea hiperelíptica.

Lo que hace Clifford es restringir los divisores especiales de índice o en una superficie no hiperelíptica. La pregunta natural es si se pueden poner restricciones similaresen caso de que tengamos índice de Clifford positivo. Por Brill-Noether podemos restringimos a divisores de grados entre 0 y $g-1$.

Proposición 2. Sea D un divisor cualquiera en M y P un divisor polar. Entonces

(a) $i_c(D) < gr\,D$ si y solo si $l(D) \geq 2$

(b) $i_c(D)$ y $gr D$ tienen la misma paridad y

(c) $i_c(D+P)+i_c(D-P) \leq 2\, i_c(D)$

Demostración. (c) Sea $D=D'-D''$ con $(D',D'')=0$ como P es polar existen P' y P'' no negativos tales que $P\approx P'\approx P''$ y $(P',P'')=0$. Entonces

$$L(D)\cap L(D+P'-P'')=L(D-P''),$$
$$L(D)\subset L(D+P') \quad y$$
$$L(D+P'-P'')\subset L(D+P')$$

y por lo tanto $\ell(D+P)+\ell(D-P)\geq \ell(D)+\ell(D+P'-P'')=2\,\ell(D)$

de donde se sigue (c).

Teorema 2. Sea M una superficie de género $g\geq 4$, D, D^* divisores no negativos de índice de Clifford 1 y tales que $3\leq gr(D)\leq g-1$, $3\leq gr(D^*)\leq g-1$. Entonces M es hiperelíptica a menos que $D\approx D^*$ o bien $D+D^*\approx Z$

Demostración. Sea $gr(D)\geq gr(D^*)$. Si D^* no es polar, -- existe $D^{*'}<D^*$ tal que $\ell(D^{*'})=\ell(D^*)\geq 2$ y $i_c(D^{*'})<i_c(D^*)$ y M es hiperelíptica. Si D^* es polar,

$$i_c(D+D^*)+i_c(D-D^*)\leq 2$$

Los grados de $D+D^*$ y $D-D^*$ deben ser paces y por -lo tanto $i_c(D+D^*)=0$ o bien $i_c(D-D^*)=0$, supongamos, por ejemplo que $i_c(D+D^*)=0$, Entonces M sería hiperelíptica a menos que $D+D^*\approx Z$. Se procede similarmente para el caso en que $i_c(D-D^*)=0$ y queda demostrado el teorema.

II. El índice de Clifford de M.

Vamos a definir el índice de Clifford de una superficie M que es un concepto útil en la clasificación de las superficies. Primeramente debemos introducir alguna técnica. Si D y D^* son divisores no negativos del mismo grado y con índice de Clifford igual y $\ell(D)=\ell(D^*)=r+1$, $r>0$, podemos suponer que (D,D^*) es de grados $\geq s$ donde $s\leq r$ y siempre que $gr(D,D^*) < gr(D)$. Para hacer lo anterior tomamos un divisor D' no negativo de grado $s\leq r$ y si $D-D'$ y D^*-D' tienen divisores fijos F, F' respectivamente, entonces podemos considerar D, D^* tales que

$$(F,F')=(D-D', D^*-D')=(D,D^*)-D'$$

de donde se sigue lo deseado.

Si escogemos D y D^* de esta manera, decimos que constituyen una "Selección Standard" para D'.

Podemos tambien, escoger D' tal que $\ell(D')=1$ y

$$\ell(D+D^*-D')=\ell(D+D^*)-s$$

Proposición 3. Sean D y D^* divisores no negativos del mismo grado $\leq g-1$ con $\ell(D)=\ell(D^*)=r+1$, $r>0$, con D, D^* selección Standard para D', donde D' divisor no negativo de grado $s\leq r$, $\ell(D+D^*-D')=\ell(D+D^*)-s$.

Entonces $i_c(D+D^*)\leq gr(D,D^*)-i_c(D,D^*)+2(i_c(D)-s)$.

Demostración. Como $D' \leq (D, D^*)$, tenemos que

$$\ell(D+D^*) \geq \ell(D+D^*-(D,D^*)) + s$$

y claramente

$$i_c(D+D^*) \leq i_c(D+D^*-(D,D^*)) + gr(D,D^*) - 2s$$

además, por la proposición 1

$$i_c(D+D^*-(D,D^*)) + i_c(D,D^*) \leq i_c(D) + i_c(D^*) \leq 2i_c(D)$$

y podemos concluír la demostración combinando las dos últimas desigualdades.

Teorema 3. Sea M no hiperelíptica de genero $g \geq 4$, D un divisor no negativo en M de grado $\leq g-1$ con $i_c(D)=1$ Entonces $\ell(D) \leq 2$ excepto, posiblemente si $g=6$, $\ell(D)=3$ y $2D \approx Z$.

Demostración. Supongamos lo contrario y tomemos D' de grado $s = \ell(D) - 2 \geq 1$ tal que $\ell(2D - D') = \ell(2D) - s$. Si A, B forman una selección Standard para D' con $A \approx B \approx D$ tenemos que $s \leq gr(A,B) < gr D$.

Como $i_c(A+B-(A,B)) + i_c(A,B) \leq i_c(A) + i_c(B) = 2$ y ademas ni $A+B-(A,B)$ ni (A,B) son canónicos; Tenemos que $i_c(A+B-(A,B)) = i_c(A,B) = 1$.

Si $\ell((A,B)) = 1$, entonces $i_c(A,B) = gr(A,B) = 1$ y por la proposición anterior

$$i_c(2D) = i_c(A+B) \leq 2(i_c(A) - s)$$

Como $s \geq 1 = i_c(A)$, $s = 1 = \ell(D) - 2$ y $i_c(2D) = 0$ y como M es no hiperelíptica $2D \approx Z$, $g = gr D + 1 = 6$.

Si $\ell((A,B))\geq 2$, podemos suponer (A,B) polar pues en caso contrario tendríamos $D''<(A,B)$ con $\ell(D'')=\ell(A,B)$ y $i_c(D'')=0$ y M sería hiperelíptica. Por lo tanto

$$i_c(D+(A,B))+i_c(D-(A,B))\leq 2i_c(D)=2$$

Como $D+(A,B)$ y $D-(A,B)$ son de grado par, tenemos que uno de los dos debe ser de índice de Clifford 0 y como ninguno de los dos es canónico tenemos una contradicción pues M es no hiperelíptica. Quedando así demotrado el teorema.

Ahora podemos definir el índice de Clifford de M como el entero

$$i_c(M)=\inf\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq i_c(D),\ D\in\Delta\}$$

Con Δ el conjunto de divisores no negativos D con $\ell(D)\neq 1$ y $\mathrm{gr}\,D\leq g-1$.

<u>Problema de Brill-Noether</u>. Cuál es $i_c(M)$ para una superficie general M de genero g.

<u>Otro Problema</u>. Si M' no es general en el sentido de Brill Noether i.e. si $i_c(M')<i_c(M)$ con M general, de cuántos parámetros en el sentido de "Moduli" depende M'?

CAPITULO IV

El morfismo canónico asociado a M (el inducido por $L(Z)$ lo que es lo mismo $H^0(M,\mathcal{O}(K))$), es isomorfismo si y solo si M no es hiperelíptica (ésto es una consecuencia inmediata de Riemann-Roch), una pregunta natural es si podemos describir a la curva canónica en términos de objetos de M. Un primer paso en esta dirección es el teorema de Noether que incluímos ya que se demuestra con el mismo tipo de técnicas que hemos estado usando.

I El Teorema de Noether.

En la demostración del teorema de Noether es esencial el siguiente lema, que es una consecuencia inmediata del teorema de Clifford en su forma extendida.

Lema. Una superficie M de género $g\geq 3$ es hiperelíptica si ysolo si para todo divisor positivo D, $\gamma D = g-2$, existe un punto Q tal que $\ell(D+Q)\geq 2$.

Ahora veremos que nos dice Noether.

Teorema de Noether. Sea M no hiperelíptica de género $g\geq 3$, entonces $L(mZ)$ es generado por los polinomios de grado m en los elementos de una base de $L(Z)$

Demostración. Primero veremos los casos $m=2$ y $m=3$

Por el lema auxiliar tenemos que existe un divisor D de grado $g-2$ tal que $\ell(D)=\ell(D+Q)$ con $Q\in M$, además como un divisor canónico no tiene puntos fijos, tenemos que $(Z,D)=0$. Por Riemann-Roch $\ell(Z-D)=2$ y podemos tomar una base $\{h_1,h_2\}$ de $L(Z-D)$ tal que $((h_1)_0,(h_2)_0)=D$ ya que $((h_1)_0,(h_2)_0)\geq D$ y como $((h_1)_0,(h_2)_0)\neq 0$ significa que $Z-D$ tiene algun punto fijo Q, por Riemann-Roch llegaríamos a que $\ell(D+Q)\geq 2$ contrario a lo supuesto. Por lo tanto $D=((h_1)_0,(h_2)_0)$.

Si $\{f_j\}$, $j=1,\dots,g$ es una base para $L(Z)$, entonces los conjuntos $\{h_1 f_j\}$ y $\{h_2 f_j\}$ son respectivamente, linealmente independientes en $L(2Z-(h_1)_0)$ y $L(2Z-(h_2)_0)$. Ahora, como

$$(2Z-(h_1)_0,2Z-(h_2)_0)=2Z+((h_1)_0,(h_2)_0)-(h_1)_0-(h_2)_0$$
$$=2Z+D-(h_1)_0-(h_2)_0$$

y como $2Z\simeq(h_1)_0+(h_2)_0$,

$$L(2Z-(h_1)_0)\cap L(2Z-(h_2)_0)=L(D)$$

Por lo que el conjunto $\{h_1 f_j\}\cup\{h_2 f_j\}$ tiene $2g-1$ elementos linealmente independientes en $L(2Z-D)$. Además $L(Z-D)=L(Z)\cap L(2Z-D)$ y $\ell(Z-D)=2$, entonces $\{h_1 f_j\}\cup\{h_2 f_j\}\cup\{f_j\}$ tiene $3g-3$ elementos linealmente independientes en $L(2Z)$ y como $\ell(2Z)=3g-3$, tenemos que forman una base para $L(2Z)$ lo que prueba el teorema para el caso $m=2$.

Lo probaremos ahora para $m=3$. Sea $\{f_j\}$ base para $L(2Z)$ de la forma obtenida Como M es no hiperelíptica existen $h_1, h_2 \in L(Z)$ con $((h_1)_0, (h_2)_0) = Q$ y $(Z, Q) = 0$ y los conjuntos $\{h_1 f_j\}$, $\{h_2 f_j\}$ son linealmente independientes en $L(3Z-(h_1)_0)$ y $L(3Z-(h_2)_0)$ cuya intersección es $L(3Z+Q-(h_1)_0-(h_2)_0)$ que es isomorfo a $L(Z+Q)$ y por Riemann-Rovh $\ell(Z+Q)=g$. Así, el conjunto $\{h_1 f_j\} \cup \{h_2 f_j\}$ tiene $2(3g-3)-g=5g-6$ elementos linealmente independientes en $L(3Z-Q)$ y el conjunto $\{h_1 f_j\} \cup \{h_2 f_j\} \cup \{1\}$ tiene $5g-5$ elementos linealmente independientes en $L(3Z)$ y todos son polinomios de grado 3 en elementos de una base de $L(Z)$ y tenemos resuelto el caso $m=3$.

Ahora procedemos por inducción para $m \geq 3$. Sean $h_1, h_2 \in L(Z)$ linealmente independientes con $((h_1)_0, (h_2)_0)=0$, $\{f_j\}$ base de $L(mZ)$, entonces $\{h_1 f_j\}$, $\{h_2 f_j\}$ son linealmente independientes, respectivamente, en $L((m+1)Z-(h_1)_0)$ y $L((m+1)Z-(h_2)_0)$ cuya intersección es $L((m-1)Z)$ cuya dimensión es $(g-1)(2m-3)$ por tanto $\{h_1 f_j\} \cup \{h_2 f_j\}$ tiene

$$2(g-1)(2m-1)-(g-1)(2m-1)=(g-1)(2(m+1)-1)=\ell((m+1)Z)$$

elementos linealmente independientes.

Con lo anterior queda demostrado el teorema pues si f_j

es polinomio de grado m en elementos de una base de $L(Z)$, $h_i f_j$ es polinomio de grado $(m+1)$ en los mismos elementos.

II. Interpretación Geométrica.

Supongamos sumergida a la superficie M en su espacio proyectivo canónico $\mathbb{P}^{g-1}$, ésto es, tal que lòs hiperplanos cortan divisores canónicos. El hecho de que $\ell(D)=\ell(D+Q)$ se traduce por Riemann-Roch en que $\ell(Z-D)=2$ y $\ell(Z-D-Q)=1$. Esto es, si $D=P_1+\cdots+P_{g-2}$. El número de hiperplanos linealmente independientes que pasan por $P_1,\dots,P_{g-2}$ es precisamente 2. Pero de los hiperplanos que pasan por $P_1,\dots,P_{g-2}$ que pasan también por Q solo hay uno. De esto último se sigue $((\omega_1),(\omega_2))=D$ con $\omega_1,\omega_2\in\Gamma(M,\Theta^{1,0})$ linealmente.

Sea $d_1,\dots,d_g$ una base de $\Gamma(M,\Theta^{1,0})$. Entonces las diferenciales cuadráticas $\omega_1 d_1,\dots,\omega_1 d_g$ de $\Gamma(M,\Theta^{1,0}\otimes\Theta^{1,0})$ son linealmente independientes. Lo mismo se puede decir de $\omega_2 d_1,\dots,\omega_2 d_g$. El subespacio generado por éstas se puede identificar con $\{\rho\in\Gamma(M,\Theta^{1,0}\otimes\Theta^{1,0})\,|\,(\rho)\geq(\omega_1)\}$ y $\{\rho\in\Gamma(M,\Theta^{1,0}\otimes\Theta^{1,0}\,|\,(\rho)\geq(\omega_2)\}$ ya que ambos son de dimensión g. La intersección de estos subespacios se puede identificar con $\{\rho\in\Gamma(M,\Theta^{1,0}\otimes\Theta^{1,0}\,|\,(\rho)\geq(\omega_1),(\omega_2)\}$ y que a su vez se identifica con $\{\rho\in\Gamma(M,\Theta^{1,0}\otimes\Theta^{1,0}\,|\,(\rho)\geq\omega_1,$ $(\rho)\geq\omega_2-D\}$

que es de dimensión $\ell((\omega^2)-(\omega)-(\omega)+D)=\ell(D)=1$. Luego en $\{\omega_1\alpha_1,\dots,\omega_1\alpha_g,\ \omega_2\alpha_1,\dots,\ \omega_2\alpha_g\}$ hay $2g-1$ elementos linealmente inde pendiente que es preciaamente la dimensión de $L((\omega^2)-D)$, donde $Z=(\omega)$. Consideramos, ahora, los elementos

$$\omega_1\alpha_1,\dots,\omega_1\alpha_g,\ \omega_2\alpha_1,\dots,\omega_2\alpha_g,\ \alpha_1\omega,\dots,\alpha_g\omega \in \Gamma(M,\mathcal{O}^{1,0}\otimes\mathcal{O}^{1,0})$$

Las diferenciales de $L(2Z-D)$ Son presisamente aquellas que cumplen $(\alpha)\geq D$ y las diferenciales $\beta\in L(2Z)$ precisamente las que satisfacen $(\beta)\geq Z$ y la intersección son las diferenciales cuadráticas que pasan por $Z+D$ cuya dimensión es $\ell(2Z-Z-D)=\ell(Z-D)=2$. O sea que tenemos $2g-1+g-2=3g-3$ elementos lineales independientes .

CAPITULO V

Veremos como Petri nos describe explicitamente una base para las secciónes de $\mathcal{O}(K^{\otimes m})$ (o de $L(mZ)$).

Mas aún, nos describe explicitamente (excepto en dos - casos especiales) un número finito de relaciónes de grados 2 y 3 que generan el ideal de la curva canónica. Esto es, toda superficie no hiperelíptica M, se puede -- realizar como una curva algebráica de grado 2g-2 en un espacio proyectivo de dimensión g-1 la cual es interceción de hipersupsrficies de grado 2 o 3

I. Teorema de Petri.

Sea M de género g y no hiperelíptica. Entonces podemos escoger $P_1,\ldots,P_g \in M$ y diferenciales holomorfas $\alpha_1,\ldots,\alpha_g$ linealmente independientes tales que

$$\alpha_i(P_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$
$$\neq 0 \quad \text{si } i = j$$

En caso de que $3 \leq i \leq g$, escribimos $\alpha_i = dt_i$ y

$$\alpha_1 = \lambda_i t_i dt_i + \cdots$$

$$\alpha_2 = \mu_i t_i dt_i + \cdots$$

Donde t_i coordenada local en P_i y $\lambda_i \neq 0$.

En la tabla adjunta aparecen los resultados obtenidos - por Petri. Cada Columna comprende una base para las m-formas con $1 \leq m \leq 5$. Además en cada columna se agrupan las diferenciales en renglones de acuerdo a la multipli cidad de sus ceros en $\mathcal{U} = P_3 + \cdots + P_g$. Así, el primer renglón es $d_3^m, \ldots, d_g^m$. Las columnas se obtienen de la siguiente manera. La segunda columna se obtiene así:

(a) Primero se ve que toda diferencial cuadrática que se anula en es de la forma $d_1 \cdot (\ ) + d_2 \cdot (\ )$.

(b) Si $3 \leq i < j \leq g$, $d_i d_j$ se puede representar en la forma

$d_1 \cdot (\ ) + d_2 \cdot (\ )$.

(c) Omitiendo los $d_i d_j$ con $3 \leq i < j \leq g$, los elementos restantes forman la base deseada.

La tercera columna se obtiene así.

(a) Se ve que las diferenciales cúbicas $d_1^2 \cdot (\ ) + d_1 d_2 \cdot (\ ) + d_2^2 \cdot (\ )$ son de codimensión 1 en el espacio de las cúbicas ω con doble cero en $\mathcal{U}$. Para que ω sea de la forma $d_1^2 \cdot (\ ) + d_1 d_2 \cdot (\ ) + d_2^2 \cdot (\ )$ es necesario que

$$\sum_{\substack{q \text{ cero de } d_1 \\ q \neq P_3, \ldots, P_g}} \operatorname{Res}_q (\omega / d_1 d_2) = 0 \qquad \text{(V.1)}$$

(b) Si $\eta_i = (\mu_i d_1 - \lambda_i d_2) d_i^2$, tenemos que tiene un cero doble en $\mathcal{U}$ y que $\eta_i - \eta_j$ satisface (V.1)

(c) Por lo tanto $\eta_i - \eta_j = d_1^2 (\ ) + \lambda_1 d_2 (\ ) + d_2^2 (\ )$ y nos quedan $5g-5$ diferenciales cúbicas que forman base

Las demás columnas se obtienen en forma automática pues se reducen a las anteriores. Sin embargo se usan las siguientes identidades.

$$d_i d_j = \sum_{k=3}^{g} P_{ijk}(d_1, d_2)\, d_k + \nu_{ij}\, d_1 d_2$$

$$\eta_i - \eta_j = \sum_{k=3}^{g} p'_{ijk}(\alpha_1, \alpha_2)\,\alpha_k + \nu'_{ij}\,\alpha_1^2\alpha_2 + \nu''_{ij}\,\alpha_1\alpha_2^2 \qquad (V.2)$$

Donde las p son lineales, las ρ' cuadráticas y las ν escalares.

Ahora, si $X_1, \ldots, X_g$ son las coordenadas homogéneas correspondientes a $P_1, \ldots, P_g$ para el mapeo canónico

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

Tenemos que las identidades (V.2) nos dicen que las ecuaciones homogéneas

$$f_{ij} = X_i X_j - \sum_{k=3}^{g} p_{ijk}(X_1, X_2)X_k - \nu_{ij}X_1X_2$$

$$g_{ij} = (\mu_i X_1 - \lambda_i X_2)X_i^2 - (\mu_j X_1 - \lambda_j X_2)X_j^2 - \sum_{k=3}^{g} \rho'_{ijk}(X_1, X_2)X_k - \nu_{ij}X_1^2X_2 - \nu''_{ij}X_1X_2^2$$

que son de grados 2 y 3, generan al ideal de la curva asociada a M.

Los resultados que comprende el teorema de Petri son

1. (a) $f_{ij} = f_{ji}$, $g_{ij} + g_{jk} = g_{ik}$

   (b) $X_k f_{ij} - X_j f_{ik} + \sum_{l=3,\, l\neq k}^{g} p_{ijl} f_{kl} - \sum_{l=3,\, l\neq j} p_{ikl} f_{jl} = \rho_{ijk}\, g_{jk}$

con ρ_{ijk} escalar simétrico en i, j, k.

2. Tenemos dos posibilidades. O bien $\rho_{ijk} = p_{ijk} = 0$, en cuyo caso M es cubrimiento triple de $\mathbb{P}^1$ o si $g = 6$ puede ser una quíntica plana no singular. O bien la mayoría de las ρ y p son no cero, en cuyo caso las f_{ij} generan por sí mismas el ideal de M.

3. Dado cualquier conjunto de f_{ij}, g_{ij} relacionadas como en 1. con los $\lambda_i \neq 0$ y alguna $\rho_{ij} \neq 0$, existe una super

ficie M de género g cuya imagen canónica en $\mathbb{P}^{g-1}$ está definida por estas ecuaciones. O sea que se tiene un conjunto completo de identidades en $\rho, \rho', \nu, \nu', \nu'', \lambda, \mu, \varphi$ que caracterizan aquellas que dan lugar a curvas canónicas.

$\varphi_3,\dots,\varphi_g$	$\varphi_3^2,\dots,\varphi_g^2$	$\varphi_3^3,\dots,\varphi_g^3$	$\varphi_3^4,\dots,\varphi_g^4$	$\varphi_3^5,\dots,\varphi_g^5$	no nulas en $\mathcal{U}$
φ_1, φ_2	$\varphi_1\varphi_i, \varphi_2\varphi_i$ $3\le i\le g$	$\varphi_1\varphi_3^2,\dots,\varphi_1\varphi_g^2$	$\varphi_1\varphi_3^3,\dots,\varphi_1\varphi_g^3$	$\varphi_1\varphi_3^4,\dots,\varphi_1\varphi_g^4$	con cero simple en $\mathcal{U}$
—	$\varphi_1^2, \varphi_1\varphi_2, \varphi_2^2$	$\varphi_1^2\varphi_i, \varphi_1\varphi_2\varphi_i, \varphi_2^2\varphi_i$ $3\le i\le g$	$\varphi_1^2\varphi_3^2,\dots,\varphi_1^2\varphi_g^2$	$\varphi_1^2\varphi_3^3,\dots,\varphi_1^2\varphi_g^3$	con cero doble en $\mathcal{U}$
—	—	$\varphi_1^3, \varphi_1^2\varphi_2, \varphi_1\varphi_2^2, \varphi_2^3$	$\varphi_1^3\varphi_i, \varphi_1^2\varphi_2\varphi_i, \varphi_1\varphi_2^2\varphi_i, \varphi_2^3\varphi_i$; $3\le i\le g$	$\varphi_1^3\varphi_3^2,\dots,\varphi_1^3\varphi_g^2$	con cero triple en $\mathcal{U}$
—	—	—	$\varphi_1^4, \varphi_1^3\varphi_2, \varphi_1^2\varphi_2^2, \varphi_1\varphi_2^3, \varphi_2^4$	$\varphi_1^4\varphi_i, \varphi_1^3\varphi_2\varphi_i, \varphi_1^2\varphi_2^2\varphi_3, \varphi_1\varphi_2^3\varphi_i, \varphi_2^4\varphi_i$ $3\le i\le g$	con cero de orden 4 en $\mathcal{U}$
—	—	—	—	$\varphi_1^5, \varphi_1^4\varphi_2, \varphi_1^3\varphi_2^2, \varphi_1^2\varphi_2^3, \varphi_1\varphi_2^4, \varphi_2^5$	con cero de orden 5 en $\mathcal{U}$
g 1-formas	$3g-3$ formas cuadráticas	$5g-5$ formas cúbicas	$7g-7$ 4-formas	$9g-9$ 5-formas	

BIBLIOGRAFIA

1. R. Hartshorne — Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

2. R.C. Gunning — Lectures on Riemann Surfaces, Princeton University Press.

3. R.C. Gunning — Lectures on Riemann Surfaces; Jacobi Varieties, Princeton University Press.

4. H. Martens — On the varieties of special divisors on a Curve, I, Jour. reine Angew. Math. 227.

5. H. Martens — On the varieties of special divisors on a Curve, II, Jour. reine Angew. Math. 233.

6. D. Mumford — Curves and their Jacobians, University of Michigan Press.

7. S. Soberón — La Jacobiana de una Superficie de Riemann compacta, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1976.